Chapitre 5 : Puissances.

I. Puissances d'un nombre relatif.

1) Exposant entier positif.

Définition :

a désigne un nombre relatif et n un entier positif non nul.

a^n désigne le produit de n facteurs égaux à a : $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$

Le nombre n s'appelle un ***exposant***.

Exemple :

3^4 est le produit de 4 facteurs égaux à 3. Donc : $3^4 = \mathbf{3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81}$

Calculer :

$7^3 = \mathbf{7 \times 7 \times 7 = 343}$ $9^7 = \mathbf{9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 4\ 782\ 969}$ $(-3)^5 = \mathbf{(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = -243}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$ $\left(-\frac{5}{7}\right)^5 = \left(-\frac{5}{7}\right) \times \left(-\frac{5}{7}\right) \times \left(-\frac{5}{7}\right) \times \left(-\frac{5}{7}\right) \times \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{3125}{16807}$

Cas particulier : $a^1 = a$ exemple : $5^1 = 5$

Convention : pour $a \neq 0$, on convient que : $a^0 = 1$ exemple : $7^0 = 1$

Attention : Ne pas confondre !!!

$(-5)^4 = \mathbf{(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = +625}$

$-5^4 = \mathbf{-5 \times 5 \times 5 \times 5 = -625}$

Applications :

Quel est le signe des nombres suivants ?

$(-7)^{2012}$: **Produit de 2012 facteurs tous égaux à (-7). Or, 2012 est un nombre pair. Donc $(-7)^{2012}$ est positif.**

$(-11)^{93}$: **Produit de 93 facteurs tous égaux à (-11). Or,93 est un nombre impair. Donc $(-11)^{93}$ est négatif.**

-5^{110} **$= -5 \times 5 \times 5 \times \ldots \times 5$ Il y a un seul signe moins donc le nombre -5^{110} est négatif.**

2) Exposant entier négatif.

A l'aide de la calculatrice, calculer :

$2^{-3} = \mathbf{0{,}125}$ et $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$ On remarque que $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

$5^{-2} = \mathbf{0{,}04}$ et $\frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$ On remarque que $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$

Définition :

a et b désignent deux nombres relatifs non nuls.

n désigne un entier non nul.

a^{-n} désigne l'inverse de a^n :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$ désigne l'inverse de $\left(\frac{a}{b}\right)^{n}$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

Exemple :

2^{-3} est l'inverse de 2^3 donc $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Cas particulier :

Pour $a \neq 0$, a^{-1} est l'inverse de a.

Exemple :

5^{-1} est l'inverse de 5. Donc, $5^{-1} = \frac{1}{5}$

Calculer :

Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ $\quad$ $9^{-1} = \frac{1}{9^1} = \frac{1}{9}$ $\quad$ $7^{-5} = \frac{1}{7^5} = \frac{1}{16807}$ $\quad$ $(-5)^{-4} = \frac{1}{(-5)^4} = \frac{1}{625}$

$\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^{3} = \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{125}{64}$ $\quad$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-6} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{6} = \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{729}{64}$

Applications :

Quel est le signe des nombres suivants ?

$(-5)^{-2012} = \frac{1}{(-5)^{2012}}$ **Il y a 2012 facteurs négatifs (au dénominateur). Or, 2012 est un nombre pair. Donc $(-5)^{-2012}$ est positif.**

$(-11)^{-93} = \frac{1}{(-11)^{93}}$ **Il y a 93 facteurs négatifs (au dénominateur). Or, 93 est un nombre impair. Donc $(-11)^{-93}$ est négatif.**

$-5^{-110} = \frac{1}{-5^{110}}$ **Il y a un seul signe moins donc le nombre -5^{-110} est négatif.**

$\left(\frac{7}{3}\right)^{-116} = \left(\frac{3}{7}\right)^{116}$ **Produit de 116 facteurs tous égaux à $\frac{3}{7}$. Donc $\left(\frac{7}{3}\right)^{-116}$ est positif.**

$\left(-\frac{5}{9}\right)^{-116} = \left(-\frac{9}{5}\right)^{116}$ **Produit de 116 facteurs tous égaux à $-\frac{9}{5}$. Or, 116 est un nombre pair. Donc $\left(-\frac{5}{9}\right)^{-116}$ est positif.**

3) Priorités opératoires.

Attention, quand une expression comporte des puissances, on calcule en priorité :

1. Les calculs entre parenthèses.

2. Les puissances.

3. Les multiplications et les divisions.

4. Les additions et les soustractions.

Exemples :

Calculer (écrire les étapes intermédiaires) :

$A = 50 - 3\times4^2 = \mathbf{50 - 3\times16 = 50 - 48 = 2}$ $B = 5 - 3^2 = \mathbf{5 - 9 = -4}$

$C = 5\times(-3)^2 - (-3)^3 = \mathbf{5\times9 - (-27) = 45 + 27 = 72}$ $D = 2^{-2} + 3^{-2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{9}{36} + \frac{4}{36} = \frac{13}{36}$

$E = 4^{-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{4^2} - \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{1}{16} - \frac{27}{8} = \frac{1}{16} - \frac{54}{16} = -\frac{53}{16}$

$F = -2\times3^{-2} - 3^2\times4^{-3}\times\frac{4}{3} = -2\times\frac{1}{3^2} - 3^2\times\frac{1}{4^3}\times\frac{4}{3} = -2\times\frac{1}{9} - 3\times3\times\frac{1}{4\times4\times4}\times\frac{4}{3} = \frac{-2}{9} - \frac{3}{16} = \frac{-32}{144} - \frac{27}{144} = -\frac{59}{144}$

II- Puissances de 10.

1) Définitions.

n désigne un nombre **entier positif** non nul.

On note 10^n le produit de *n* facteurs tous égaux à 10.

$$\boxed{10^n = \underbrace{10\times\ldots\times10}_{\text{n facteurs}} = 1\underbrace{0\ldots0}_{\text{n zeros}}}$$

Applications :

10^5 = **100 000**
10^9 = **1 000 000 000**
10^1 = **10**
10^{22} = **10 000 000 000 000 000 000 000**
1 gogol =**10 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 Il y a 100 zéros !** *10 sexdécilliard !*
On note 10^{-n} l'inverse de 10^n.

$$\boxed{10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\underbrace{10\times\ldots\times10}_{\text{n facteurs}}} = \frac{1}{1\underbrace{0\ldots0}_{\text{n zeros}}} = 0,\underbrace{0\ldots01}_{\text{n décimales}}}$$

Applications :

10^{-2} = **0,01**
10^{-5} =**0,000 01**
10^{-9} = **0,000 000 001**
10^{-1} = **0,1**

Attention : Par **convention** 10^0 =**1**

2) Calculer avec des puissances.

Activités :

a. Après avoir décomposé le produit, écrire le résultat sous la forme d'une puissance de 10 :

$A = 10^3 \times 10^2$ **A = 1 000 × 100** **A = 100 000** $\mathbf{A = 10^5}$	$B = 10^4 \times 10^5$ **B = 10 000× 100 000** **B = 1 000 000 000** $\mathbf{B = 10^9}$	$C = 10^{-5} \times 10^7$ **C = 0,00001×10 000 000** **C = 100** $\mathbf{C = 10^2}$	***On peut conjecturer la propriété :*** Etant donnés deux entiers relatifs ***n*** et ***p***, on a : $\mathbf{10^n \times 10^p = 10^{n+p}}$

b. Même consigne :

$A = \dfrac{10^7}{10^3}$ $\mathbf{A = \dfrac{10000000}{1000}}$ **A = 10 000** $\mathbf{A = 10^4}$	$B = \dfrac{10^8}{10^5}$ $\mathbf{B = \dfrac{100000000}{100000}}$ **B = 1000** $\mathbf{B = 10^3}$	$C = \dfrac{10^{-5}}{10^2}$ $\mathbf{C = \dfrac{0{,}00001}{100}}$ **C = 0,000 000 1** $\mathbf{C = 10^{-7}}$	***On peut conjecturer le propriété :*** Etant donnés deux entiers relatifs ***n*** et ***p***, on a : $\mathbf{\dfrac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}}$

c. Même consigne :

$A = \left(10^3\right)^2$ $\mathbf{A = (1000)^2}$ **A = 1 000 × 1 000** **A = 1 000 000** $\mathbf{A = 10^6}$	$B = \left(10^2\right)^4$ $\mathbf{B = (100)^4}$ **B=100×100×100×100** **B = 100 000 000** $\mathbf{B = 10^8}$	$C = \left(10^{-5}\right)^2$ $C = (0{,}00001)^2$ **C = 0,00001×0,00001** **C = 0,000 000 000 1** $\mathbf{C = 10^{-10}}$	***Propriété :*** Etant donnés deux entiers relatifs ***n*** et ***p***, on a : $\mathbf{(10^n)^p = 10^{n \times p}}$

Applications : Ecrire les nombres sous la forme a^n :

$10^2 \times 10^4 = \mathbf{10^{2+4} = 10^6}$ $\quad$ $10^7 \times 10^{-11} = \mathbf{10^{7+(-11)} = 10^{-4}}$ $\quad$ $10^{-4} \times 10^{-7} = \mathbf{10^{-4+(-7)} = 10^{-11}}$

$\dfrac{10^{12}}{10^8} = \mathbf{10^{12-8} = 10^4}$ $\quad$ $\dfrac{10^8}{10^{15}} = \mathbf{10^{8-15} = 10^{-7}}$ $\quad$ Attention ! $\quad$ $\dfrac{10^5}{10^{-9}} = \mathbf{10^{5-(-9)} = 10^{5+9} = 10^{14}}$

$\dfrac{10}{10^7} = \mathbf{\dfrac{10^1}{10^7} = 10^{1-7} = 10^{-6}}$ $\quad$ $(10^4)^7 = \mathbf{10^{4\times 7} = 10^{28}}$ $\quad$ $(10^{-3})^{-9} = \mathbf{10^{(-3)\times(-9)} = 10^{27}}$

$(10^6)^{-8} = \mathbf{10^{6\times(-8)} = 10^{-48}}$ $\quad$ $\dfrac{1}{10^{-3}} = \mathbf{\dfrac{10^0}{10^{-3}} = 10^{0-(-3)} = 10^3}$ $\quad$ $\dfrac{1}{10^5} = \mathbf{\dfrac{10^0}{10^5} = 10^{0-5} = 10^{-5}}$

$5^7 \times 4^7 = \mathbf{(5\times 4)^7 = 20^7}$

III- Ecriture scientifique d'un nombre décimal.

Activité :

Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

$0{,}123\times10^{2}=$ **12,3**

$1\ 230\times10^{-2}=$ **12,3**

$0{,}000\ 123\times10^{5}=$ **12,3**

$123\ 000\times10^{-4}=$ **12,3**

$1{,}23\times10^{1}=$ **12,3**

Un nombre a plusieurs écritures utilisant les puissances de 10, mais une seule est appelée écriture scientifique(ou notation scientifique), c'est-à-dire de la forme « $a\times 10^{n}$ » avec :

$1 \leq a < 10$ et **n est un entier positif ou négatif.**

La notation (ou écriture) scientifique du nombre 12,3 est **$1{,}23\times10^{1}$.**

Applications : Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$A = 120\ 000\ 000\ 000 = 1{,}2\times10^{11}$

$B = 0{,}000\ 000\ 000\ 002\ 01 = 2{,}01\times10^{-12}$

$C = 145\ 000\ 000 = 1{,}45\times10^{8}$

$D = 0{,}000\ 002 = 2\times10^{-6}$

$E = 1\ 000\ 000 = 1\times10^{6}$

$F = 0{,}000\ 001\ 101 = 1{,}101\times10^{-6}$

$G = 450\ 000\times10^{8} = 4{,}5\times10^{5}\times10^{8} = 4{,}5\times10^{13}$

$H = 123\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\times10^{-18} = 1{,}23\times10^{17}\times10^{-18} = 1{,}23\times10^{-1}$

$I = 0{,}000\ 145\times10^{13} = 1{,}45\times10^{-4}\times10^{13} = 1{,}45\times10^{9}$

$J = 0{,}000\ 000\ 203\times10^{-11} = 2{,}03\times10^{-7}\times10^{-11} = 2{,}03\times10^{-18}$

$K = 12\times10^{-5}\times9\times10^{9} = 12\times9\times10^{-5}\times10^{9} = 108\times10^{4} = 1{,}08\times10^{2}\times10^{4} = 1{,}08\times10^{6}$

$L = 2\times10^{-3} + 5\times10^{-2} = 2\times0{,}001 + 5\times0{,}01 = 0{,}002 + 0{,}05 = 0{,}052 = 5{,}2\times10^{-2}$

$$M = \frac{7\times10^{-12}\times6\times10^{5}}{21\times10^{4}} = \frac{7\times6\times10^{-12}\times10^{5}}{21\times10^{4}} = \frac{42\times10^{-7}}{21\times10^{4}} = 2\times10^{-11}$$

$$N = \frac{7\times10^{-12}\times0{,}04\times10^{15}}{2\times10^{-4}\times2{,}5\times(10^{5})^{-3}} = \frac{7\times0{,}04\times10^{-12}\times10^{15}}{2\times2{,}5\times10^{-4}\times10^{-15}} = \frac{0{,}28\times10^{3}}{5\times10^{-19}} = 0{,}056\times10^{3-(-19)} = 0{,}056\times10^{22} = 5{,}6\times10^{-2}\times10^{22} = 5{,}6\times10^{20}$$

Donner l'écriture décimale du nombre :

$A = 10^{8} + 10^{5} + 10^{2} + 10^{-1} + 10^{-5}$

$A = 100\ 000\ 000 + 100\ 000 + 100 + 0{,}1 + 0{,}000\ 01$

$A = 100\ 100\ 100{,}100\ 01$