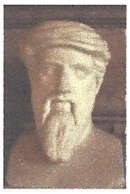
Le théorème de Thalès.

Introduction :

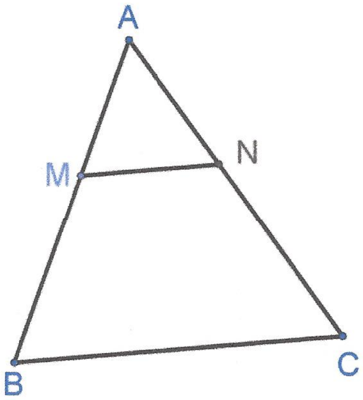


Thalès de Milet, appelé communément Thalès était un philosophe et savant grec né à Milet (actuelle Turquie) vers - 625 et mort vers -547 dans cette même ville.
Il fut l'un des « Sept sages » de la Grèce antique et le fondateur présumé de l'école milésienne. Philosophe de la nature, il passe pour avoir effectué un séjour en Égypte, où il aurait été initié aux sciences égyptienne et babylonienne. On lui attribue de nombreux exploits arithmétiques, comme le calcul de la hauteur de la Grande Pyramide ou la prédiction d'une éclipse. Curieusement, le fameux théorème de Thalès n'a pas été découvert par Thalès. Il était déjà connu avant lui les babyloniens et ne fut démontré qu'après lui par Euclide d'Alexandrie.

I- Le théorème de Thalès.

1) Rappel : configuration vue 4ème :

Voir conjecture sur GeoGebra du **Théorème de Thalès** ***(site de maths)*** **:**



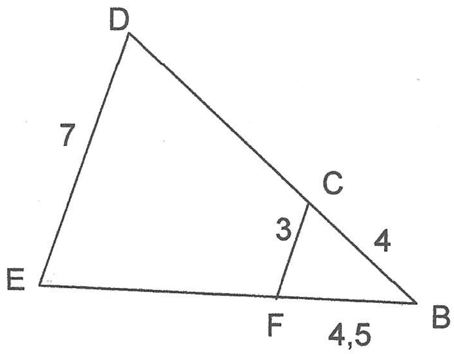
Enoncé :

D'une part les points A, M, B et d'autre part les points A, N, C sont alignés.
Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Dans son livre « les éléments », Euclide énonce, le théorème de Thalès ainsi (Livre VI, Proposition 2) :
Si on mène une ligne droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle, laquelle coupe les deux autres côtés, elle les coupera proportionnellement. *(Source Wikipédia)*

Application 1 : Sur la figure ci-dessous, (CF) et (DE) sont parallèles (les longueurs sont en centimètres).
Les droites (CD) et (EF) sont sécantes en B. Calculer BD



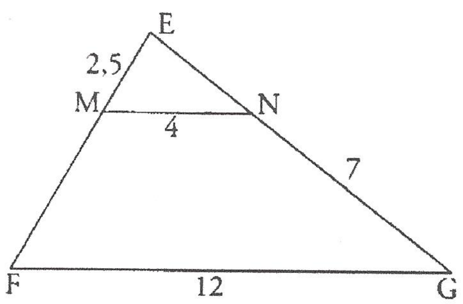
Dans les triangles BFC et BED, on a : C ∈ (BD) ; F ∈ (BE) et (CF)//(DE).
Or, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BF}{BE} = \frac{CF}{DE} \qquad \frac{4}{BD} = \frac{4,5}{BE} = \frac{3}{7}$$

Donc : $BD = \frac{4\times7}{3} = \frac{28}{3} \approx 9,3$ **[BD] mesure** $\frac{28}{3}$ **cm.**

Valeur exacte **Valeur arrondie à 10^{-1} près**

Application 2 :
La figure ci-dessous n'est pas en vraie grandeur.
Les droites (MN) et (FG) sont parallèles. Les points E, M, F sont alignés ainsi que les points E, N, G.
On donne les longueurs suivantes : EM = 2,5 ; MN = 4 ; NG = 7 ; FG =12. Calculer MF.



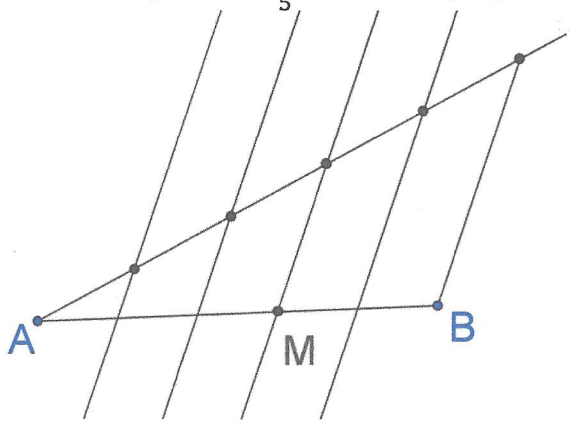
D'une part les points E, M, F et d'autre part les points E, N, G sont alignés
Les droites (MN) et (FG) sont parallèles.
Or, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{EM}{EF} = \frac{EN}{EG} = \frac{MN}{FG} \qquad \frac{2,5}{EF} = \frac{EN}{EG} = \frac{4}{12}$$

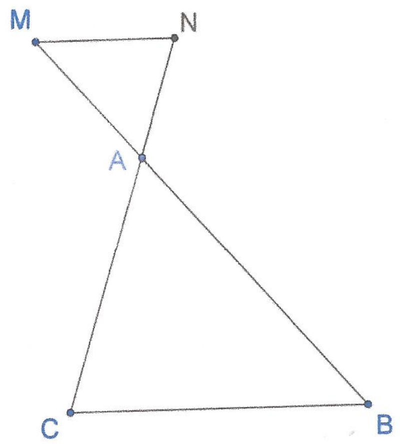
Donc $EF = \frac{2,5\times12}{4} = 7,5$
d'où $MF = EF - EM = 7,5 - 2,5 = 5$
La longueur MF est égale à 5 cm.

Application 3 : Partager un segment.

Construire le point M d'un segment [AB] tel que $AM = \frac{3}{5}AB$. (sans règle graduée)



2) Configuration papillon.

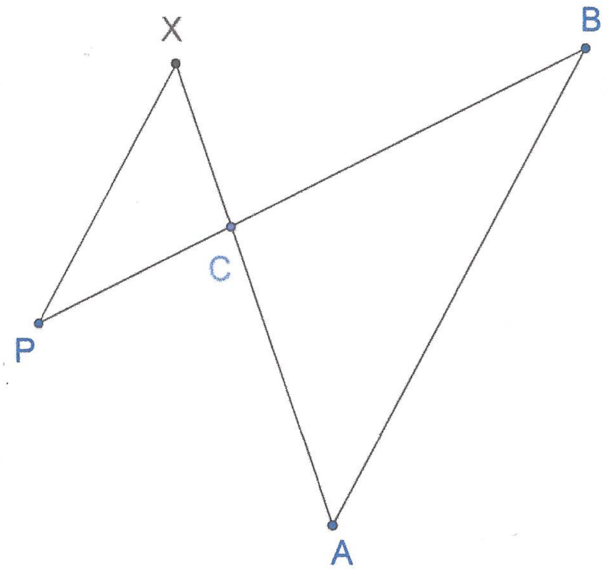


D'une part les points A, M, B et d'autre part les points A, N, C sont alignés.
Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Application :

Les points X, C, A sont alignés ainsi que les points P, C, B.
Les droites (PX) et (AB) sont parallèles. On donne :
CX = 4 cm ; CA = 6 cm ; CB = 7,5 cm et PX = 54 mm.
Calculer CP et AB.

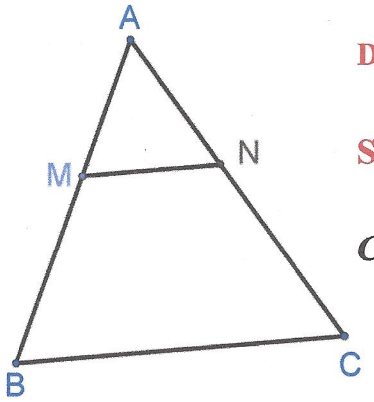


D'une part les points C, X, A et d'autre part les points C, P, B sont alignés.
Les droites (PX) et (AB) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{CX}{CA} = \frac{CP}{CB} = \frac{PX}{AB} \qquad \frac{4}{6} = \frac{CP}{7,5} = \frac{5,4}{AB}$$

$CP = \frac{7,5\times4}{6} = 5$ **cm et** $AB = \frac{6\times5,4}{4} = 8,1$ **cm**

3) Conséquence du théorème de Thalès.

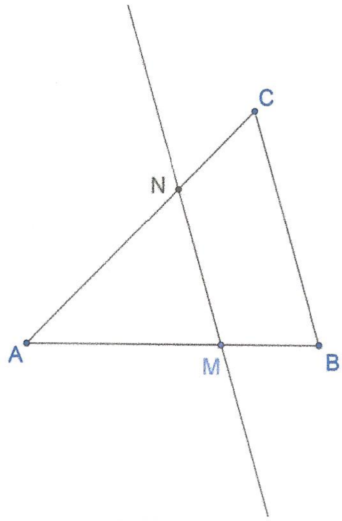


D'une part les points A, M, N et d'autre part les points A, N, C sont alignés.

Si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

C'est la « contraposée » du théorème de Thalès.

Application :



On donne (en cm) : AN = 11 ; AC = 17 ; AM = 10 et AB = 15.
Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.

Les points A, N, C sont alignés, les points A, M, B aussi.

On calcule : $\frac{AM}{AB} = \frac{10}{15} \approx 0{,}67$ **ET** $\frac{AN}{AC} = \frac{11}{17} \approx 0{,}65$

On constate que $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$.

Donc, d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

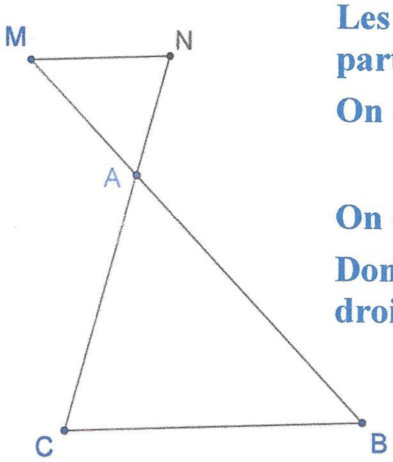
II - Réciproque du Théorème de Thalès (Voir conjecture sur Geogebra).

Enonce de la réciproque du théorème de Thalès :

Si les points A, M, B d'une part et les points A, N, C d'autre part sont alignés et sont dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Application :

On donne : AM = 2 cm ; AB = 6 cm ; AN = 1,6 cm et AC = 4,8 cm.
Montrer que (MN) et (BC) sont parallèles.



Les points M, A, B d'une part et les points N, A, C d'autre part sont alignés dans le même ordre.

On calcule : $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ **ET** $\frac{AN}{AC} = \frac{1{,}6}{4{,}8} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$

On constate que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.