Déduction naturelle

Preuves assistées par ordinateur – TD 1 – 24 janvier 2025

Année scolaire 2024–2025

Exercice 1

On rappelle les règles d'inférence de la déduction naturelle intuitionniste (sans quantificateur).

$$\frac{}{\Gamma_1, a : A, \Gamma_2 \vdash a : A} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash () : \top} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : \bot}{\Gamma \vdash \mathrm{efq}\, p : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : A \qquad \Gamma \vdash q : B}{\Gamma \vdash (p, q) : A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : A \wedge B}{\Gamma \vdash \pi_1(p) : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : A \wedge B}{\Gamma \vdash \pi_2(p) : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : A}{\Gamma \vdash \iota_1(p) : A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : B}{\Gamma \vdash \iota_2(p) : A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : A \vee B \qquad \Gamma, a : A \vdash q : C \qquad \Gamma, b : B \vdash r : C}{\Gamma \vdash \mathrm{case}\, p\, \mathrm{of}\, [\iota_1(a) \to q | \iota_2(b) \to r] : C}$$

$$\frac{\Gamma, a : A \vdash p : B}{\Gamma \vdash \lambda a.p : A \Rightarrow B} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash q : A}{\Gamma \vdash p\, q : B}$$

1. Montrer que l'implication est réflexive ($A \Rightarrow A$) et transitive ($(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$). Commenter les programmes obtenus.
2. Montrer l'isomorphisme de Curry
$$(A \wedge B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \Rightarrow C)$$
(on note $A \Leftrightarrow B$ pour $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$).
Quelle conséquence peut-on en déduire en programmation ?
3. Montrer la distributivité de $\wedge$ et $\vee$ avec l'implication.
$$(A \Rightarrow (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))$$
$$((A \vee B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$$
Quelles conséquences peut-on en déduire en programmation ?
4. Montrer que $\top$ est neutre pour $\wedge$ et absorbant pour $\vee$.
Montrer que $\bot$ est absorbant pour $\wedge$ et neutre pour $\vee$.

Exercice 2

On rappelle les règles d'inférence de la déduction naturelle intuitionniste pour les quantificateurs.

$$\frac{\Gamma \vdash p : A \qquad x \text{ n'est pas libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \lambda x.p : \forall x.A} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : \forall x\, A}{\Gamma \vdash p\, t : A[t/x]}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : A[t/x]}{\Gamma \vdash (t, p) : \exists x\, A} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : \exists x\, A \qquad \Gamma, a : A \vdash q : C \qquad x \text{ n'est pas libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \mathrm{dest}\, p\, \mathrm{as}\, (x, a)\, \mathrm{in}\, q : C}$$

1. Montrer la distributivité de $\wedge$ avec la quantification universelle et la distributivité de $\vee$ avec la quantification existentielle.

$$\forall x(A \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x\, A) \wedge (\forall x\, B)$$

$$\exists x(A \vee B) \Leftrightarrow (\exists x\, A) \vee (\exists x\, B)$$

2. Qu'en est-il de la distributivité de $\wedge$ avec la quantification existentielle et de la distributivité de $\vee$ avec la quantification universelle ?
3. Montrer les équivalences $\forall x\, \forall y\, A \Rightarrow \forall y\, \forall x\, A$ et $\exists x\, \exists y\, A \Rightarrow \exists y\, \exists x\, A$.
4. Montrer l'implication $\exists y\, \forall x\, A \ \Rightarrow\ \forall x\, \exists y\, A$. Justifier informellement qu'on ne peut pas montrer l'implication réciproque.

Exercice 3

On note $\neg A$ l'implication $A \Rightarrow \bot$.

1. Montrer que $\forall A(A \Rightarrow \neg\neg A)$ est prouvable en logique intuitionniste.
   Montrer que la réciproque est équivalente au tiers exclu.
2. Montrer que $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$ et montrer que $(\neg A) \vee (\neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$.
3. Montrer que $\neg(\exists x\, A) \Leftrightarrow \forall x(\neg A)$ et montrer que $\exists x(\neg A) \Rightarrow \neg(\forall x\, A)$.
4. Montrer que la loi de Pierce ci-dessous est équivalente au tiers exclu.

$$\forall A \forall B(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$$

5. On suppose que Γ contient call/cc : $\forall A \forall B(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$.
   Montrer que, dans le contexte Γ, on a $\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$ et $\neg(\forall x\, A) \Rightarrow \exists x(\neg A)$.
   Quelles conséquences peut-on en déduire en programmation ?