

# Déduction naturelle

Preuves assistées par ordinateur – TD 1 – 24 janvier 2025

Année scolaire 2024–2025

## Exercice 1

On rappelle les règles d'inférence de la déduction naturelle intuitionniste (sans quantificateur).

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\Gamma_1, a : A, \Gamma_2 \vdash a : A} \quad \frac{}{\Gamma \vdash () : \top} \quad \frac{\Gamma \vdash p : \perp}{\Gamma \vdash \text{efq } p : A} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash p : A \quad \Gamma \vdash q : B}{\Gamma \vdash (p, q) : A \wedge B} \quad \frac{\Gamma \vdash p : A \wedge B}{\Gamma \vdash \pi_1(p) : A} \quad \frac{\Gamma \vdash p : A \wedge B}{\Gamma \vdash \pi_2(p) : B} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash p : A}{\Gamma \vdash \iota_1(p) : A \vee B} \quad \frac{\Gamma \vdash p : B}{\Gamma \vdash \iota_2(p) : A \vee B} \quad \frac{\Gamma \vdash p : A \vee B \quad \Gamma, a : A \vdash q : C \quad \Gamma, b : B \vdash r : C}{\Gamma \vdash \text{case } p \text{ of } [\iota_1(a) \rightarrow q | \iota_2(b) \rightarrow r] : C} \\
 \\
 \frac{\Gamma, a : A \vdash p : B}{\Gamma \vdash \lambda a. p : A \Rightarrow B} \quad \frac{\Gamma \vdash p : A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash q : A}{\Gamma \vdash p q : B}
 \end{array}$$

1. Montrer que l'implication est réflexive ( $A \Rightarrow A$ ) et transitive ( $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ ). Commenter les programmes obtenus.
2. Montrer l'isomorphisme de Curry

$$(A \wedge B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \Rightarrow C)$$

(on note  $A \Leftrightarrow B$  pour  $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ).

Quelle conséquence peut-on en déduire en programmation ?

3. Montrer la distributivité de  $\wedge$  et  $\vee$  avec l'implication.

$$(A \Rightarrow (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))$$

$$((A \vee B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$$

Quelles conséquences peut-on en déduire en programmation ?

4. Montrer que  $\top$  est neutre pour  $\wedge$  et absorbant pour  $\vee$ .  
Montrer que  $\perp$  est absorbant pour  $\wedge$  et neutre pour  $\vee$ .

## Exercice 2

On rappelle les règles d'inférence de la déduction naturelle intuitionniste pour les quantificateurs.

$$\frac{\Gamma \vdash p : A \quad x \text{ n'est pas libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \lambda x.p : \forall x.A} \quad \frac{\Gamma \vdash p : \forall x.A}{\Gamma \vdash p t : A[t/x]}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : A[t/x]}{\Gamma \vdash (t, p) : \exists x.A} \quad \frac{\Gamma \vdash p : \exists x.A \quad \Gamma, a : A \vdash q : C \quad x \text{ n'est pas libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \text{dest pas } (x, a) \text{ in } q : C}$$

1. Montrer la distributivité de  $\wedge$  avec la quantification universelle et la distributivité de  $\vee$  avec la quantification existentielle.

$$\forall x(A \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x A) \wedge (\forall x B)$$

$$\exists x(A \vee B) \Leftrightarrow (\exists x A) \vee (\exists x B)$$

2. Qu'en est-il de la distributivité de  $\wedge$  avec la quantification existentielle et de la distributivité de  $\vee$  avec la quantification universelle ?
3. Montrer les équivalences  $\forall x \forall y A \Rightarrow \forall y \forall x A$  et  $\exists x \exists y A \Rightarrow \exists y \exists x A$ .
4. Montrer l'implication  $\exists y \forall x A \Rightarrow \forall x \exists y A$ . Justifier informellement qu'on ne peut pas montrer l'implication réciproque.

## Exercice 3

On note  $\neg A$  l'implication  $A \Rightarrow \perp$ .

1. Montrer que le tiers exclu  $(A \vee \neg A)$  n'est pas prouvable en logique intuitionniste.
2. Montrer que  $A \Rightarrow \neg \neg A$  est prouvable en logique intuitionniste.  
Montrer que la réciproque est équivalente au tiers exclu.
3. Montrer que  $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$  et montrer que  $(\neg A) \vee (\neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$ .
4. Montrer que  $\neg(\exists x A) \Leftrightarrow \forall x(\neg A)$  et montrer que  $\exists x(\neg A) \Rightarrow \neg(\forall x A)$ .
5. Montrer que la loi de Pierce ci-dessous est équivalente au tiers exclu.

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

6. On suppose que  $\Gamma$  contient  $\text{call/cc} : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ .  
Montrer que, dans le contexte  $\Gamma$ , on a  $\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$  et  $\neg(\forall x A) \Rightarrow \exists x(\neg A)$ .  
Quelles conséquences peut-on en déduire en programmation ?