Logique classique et double négation

Preuves assistées par ordinateur – TD 2 – 13 mars 2025

Année scolaire 2024–2025

Exercice 1 : double négation de l'implication

Montrer que les énoncés suivants sont tous trois équivalents en logique intuitionniste.
— $\neg\neg(A \Rightarrow B)$
— $\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B$
— $A \Rightarrow \neg\neg B$

Exercice 2 : variantes du tiers exclu

Montrer que toutes ces lois (pour toutes propositions P, Q, R) sont équivalentes en logique intuitionniste.
— $P \vee \neg P$ (tiers exclu)
— $\neg\neg P \Rightarrow P$ (élimination de la double négation)
— $(\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P$ (*mirabile consequentia*, loi de Clavius)
— $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$ (loi de Peirce)
— $(\neg(P \Rightarrow Q)) \Rightarrow P \wedge \neg Q$ (principe du contre-exemple)
— $P \vee (P \Rightarrow Q)$ (formule de Tarski)
— $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow R)$ (principe de linéarité)

Montrer que le tiers exclu faible ($\neg P \vee \neg\neg P$) est équivalent à la loi de de Morgan ($\neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg P \vee \neg Q$).

Exercice 3 : traduction négative

Soit Φ une formule propositionnelle en les variables $P_1, \ldots, P_n$.

1. Supposons $\neg\neg\Phi$ prouvable en logique intuitionniste. Montrer que Φ est prouvable classiquement.
2. Supposons Φ prouvable classiquement. Montrer que $(P_1 \vee \neg P_1) \Rightarrow \cdots \Rightarrow (P_n \vee \neg P_n) \Rightarrow \Phi$ est prouvable en logique intuitionniste. En déduire que $\neg\neg\Phi$ est prouvable en logique intuitionniste (théorème de Glivenko, 1929).
3. En déduire que si la logique intuitionniste est cohérente, alors la logique classique est cohérente.