

2.

Análise Estatística de Dados Financeiros

2.1

O Mercado de Capitais no Brasil

A Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) é atualmente a única bolsa de valores no Brasil. Nela se pode comprar e vender as ações de companhias que funcionam como empresas abertas. A BOVESPA é uma associação civil sem fins lucrativos, com autonomia administrativa, financeira e patrimonial. Ela funciona apenas em dias úteis e um dia de pregão corresponde a aproximadamente 6 horas e 30 minutos, indo de 10:30h a 17:00h.

O IBOVESPA é um índice composto pelas ações mais representativas negociadas na bolsa de valores brasileira, a BOVESPA, no período compreendido pelo ano anterior.

Implantado em 2 de janeiro de 1968, O IBOVESPA é hoje o mais importante termômetro do desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro. Ele retrata o comportamento dos principais papéis negociados no BOVESPA. Para escolher esses papéis, a BOVESPA considera o número de negócios e o volume movimentado nos últimos 12 meses. O índice é composto por uma carteira teórica de ações que representam cerca de 80% do volume total negociado. Há atualmente 428 companhias abertas listadas na Bolsa, mas nem todas têm suas ações negociadas diariamente.

A composição do IBOVESPA (54 ações - referência julho de 2004) é reavaliada a cada quatro meses, nos meses de janeiro, maio e setembro. Isso se dá a fim de manter um índice representativo do mercado. Matematicamente, o IBOVESPA I é a soma dos pesos das ações integrantes de sua carteira teórica, ou seja, a quantidade teórica Q_i de cada ação dessa carteira multiplicada pelo último preço do respectivo papel P^i [9].

$$I = \sum_i P^i Q_i \quad (2.1)$$

Entre as empresas de maior peso no índice, estão Telemar, Petrobrás, Eletrobrás, Embratel, Usiminas, Bradesco, Telesp e Vale do Rio Doce.

Abaixo podemos observar a série histórica dos preços de fechamento do IBOVESPA no período compreendido entre dezembro de 1985 e abril de 2004. Os dados nominais do índice foram convertidos em dólar.

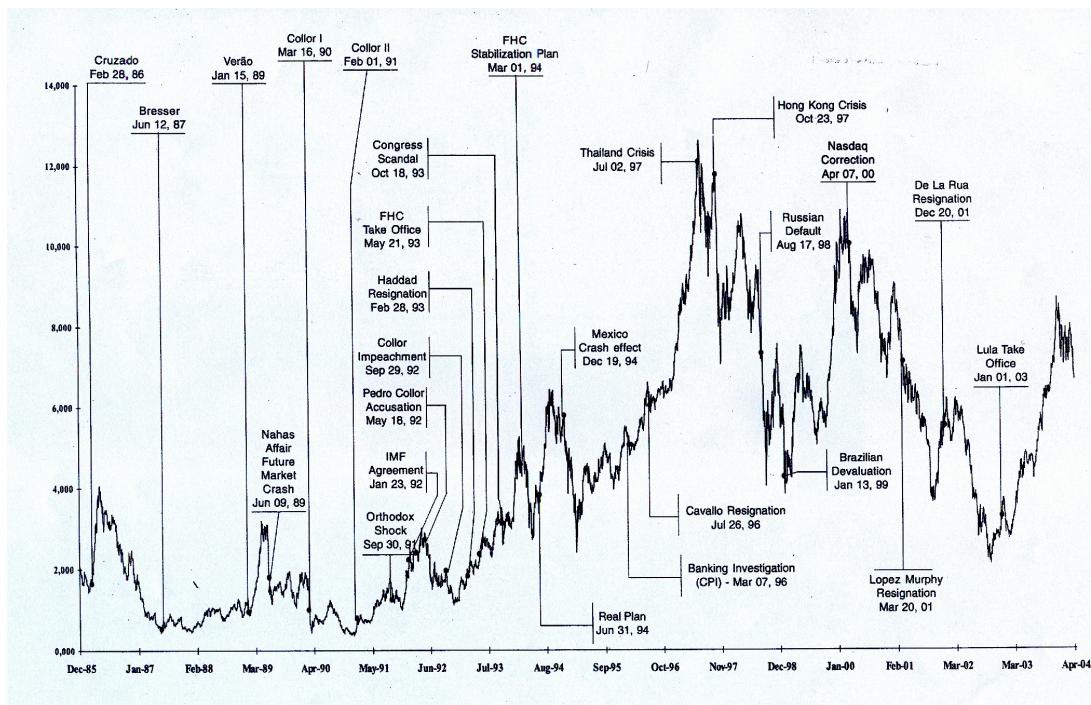


Fig. 2.1. Série histórica dos valores de fechamento do IBOVESPA (dez. '85 - abr. '04).

É interessante notar no gráfico acima os diversos eventos macroeconômicos associados a fortes oscilações nos valores de fechamento do IBOVESPA. Dele podemos concluir como o mercado de ações é extremamente influenciável pela ocorrência de crises externas e internas, implantação de pacotes econômicos e até acontecimentos políticos relevantes, seja no Brasil, seja em outros países do mundo. Essa influência externa se dá devido à política de globalização vigente na maior parte dos países do mundo.

Nossa base de dados consiste de 3330 registros diários de preço de fechamento do IBOVESPA. Ela foi obtida a partir de cada dia de pregão no período compreendido entre janeiro de 1991 e maio de 2004 e é representada na unidade monetária de Real. Todos os preços de fechamento, portanto, são dados

como múltiplos dessa unidade monetária. Os dados nominais do período anterior ao Plano Real foram convertidos em Reais (valor de referência-agosto de 1994).

Esse período foi escolhido pois após o Plano Collor (março de 1990) houve a abertura do mercado brasileiro, gerando uma mudança de comportamento na economia como um todo e em particular nas bolsas de valores brasileiras [10]. O mercado de ações brasileiro passou a se comportar de forma mais eficiente, de acordo com o paradigma de mercado eficiente apresentado no capítulo 1, com uma estrutura de mercado mais semelhante às dos mercados desenvolvidos.

Abaixo mostramos a série histórica dos preços de fechamento do IBOVESPA nesse período.

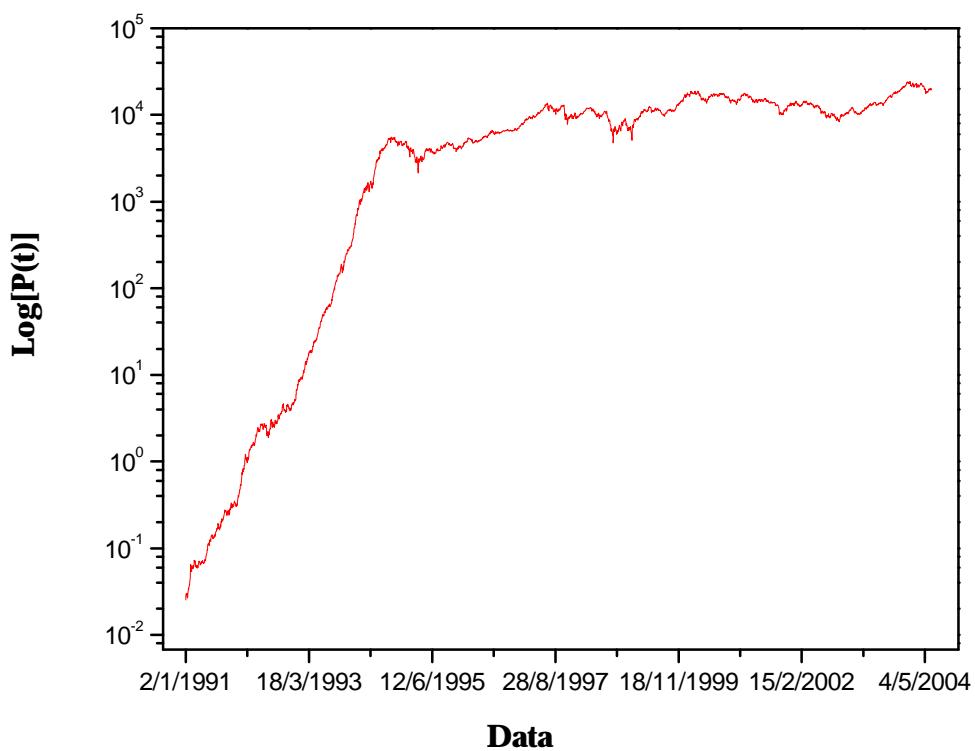


Fig. 2.2. Série histórica dos valores de fechamento do IBOVESPA.

Nota-se que principalmente no período anterior a julho de 1994, quando se lançou o Plano Real, o mercado brasileiro possuía uma componente fortemente determinística refletida no índice. Essa componente nada mais é que a inflação associada a um período de grande instabilidade macroeconômica. Através do gráfico na escala logarítmica dos valores de fechamento do IBOVESPA, concluímos que entre janeiro de 1991 e julho de 1994 houve um crescimento exponencial do valor do índice, originado pela alta inflação no período.

Abaixo mostramos a série temporal dos valores de fechamento do IBOVESPA de julho de 1994 até maio de 2004.

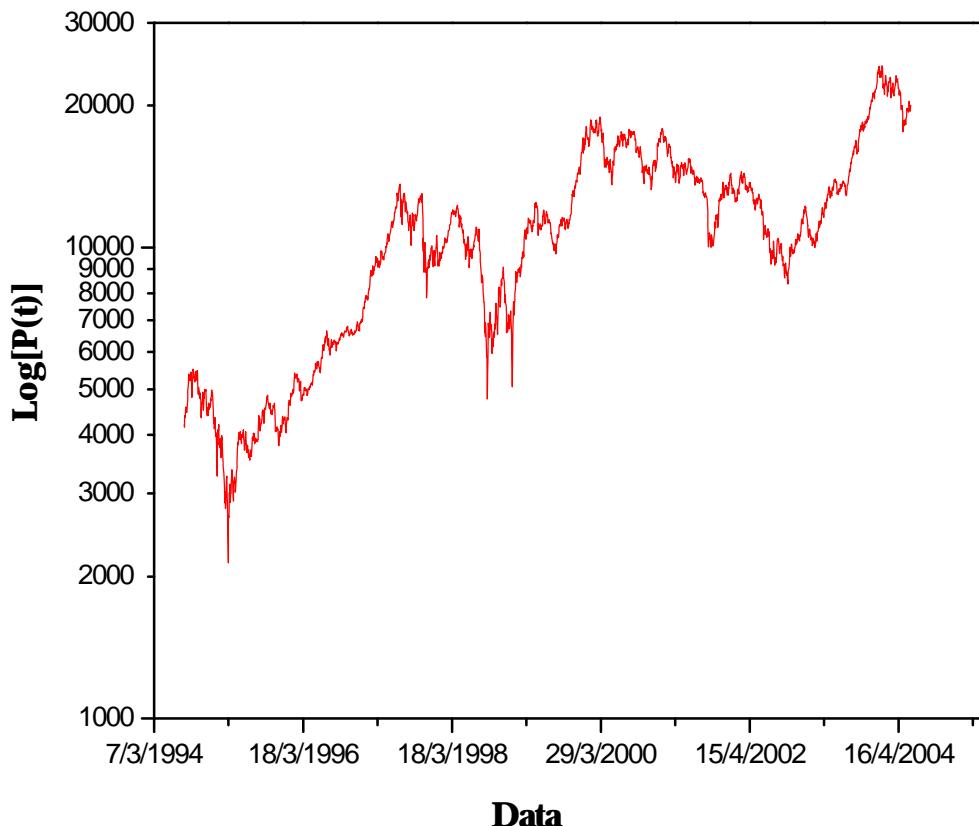


Fig. 2.3. Série histórica dos valores de fechamento do IBOVESPA no período pós-Plano Real.

Nesse período observamos que a economia brasileira já apresenta uma maior estabilidade macroeconômica refletida em índices de inflação bem mais baixos. O gráfico da Fig. 2.3 está em escala linear e, portanto, o crescimento dos valores de fechamento do IBOVESPA já não apresenta mais caráter fortemente exponencial. Todavia, é interessante observar a flutuação nos valores de fechamento do índice, mesmo com a situação de maior estabilidade econômica. Isso se dá pelo caráter estocástico que o comportamento dinâmico deste ativo financeiro apresenta.

Comparando-se os gráficos das figuras 2.2 e 2.3, vemos que o crescimento médio alto característico da série temporal no período pré-Real esconde as flutuações dos preços do IBOVESPA. Faz-se necessário, portanto, deflacionar a série histórica do IBOVESPA para que possamos observar e comparar as flutuações dos valores do índice em um período de tempo muito grande e em valores equivalentes. Além disso, se a série não fosse deflacionada, o caráter

determinístico que a inflação alta gera na evolução temporal da série poderia dificultar a análise estatística da volatilidade.

Como medida para inflação utiliza-se amplamente o IGP-DI (Índice Geral de Preços - Disponibilidade Interna). O IGP é um índice calculado mensalmente pela Fundação Getúlio Vargas (FGV). Os índices podem ter as referências Disponibilidade Interna (DI) e Oferta Global (OG). O IGP, no conceito Disponibilidade Interna, mais utilizado quando se trata de mercado de ações, procura medir os preços que afetam diretamente as unidades econômicas situadas dentro do país. Dessas ponderações é excluída a parte do produto interno que é exportada (no conceito Oferta Global, a parte do produto que é exportada é considerada).

O IGP-DI sempre se baseia no mês inteiro. Seu período de coleta compreende do primeiro ao último dia do mês de referência e sua divulgação ocorre por volta do dia 20 do mês posterior. O índice foi criado em 1947 com o objetivo de balizar o comportamento de preços em geral na economia. Ele é uma média aritmética ponderada composta pelos seguintes fatores:

- Índice de Preços no Atacado (IPA) - onde entram preços praticados do mercado atacadista e representa 60 % do IGP-DI.
- Índice de Preços ao Consumidor (IPC) - a coleta de dados ocorre nas cidades de S.Paulo e Rio de Janeiro dentre as famílias que tem uma renda de 1 a 33 salários mínimos. Representa 30 % do IGP-DI.
- Índice Nacional de Construção Civil (INCC) - onde são avaliados os preços no setor de construção civil, não só de materiais como de mão-de-obra. Representa 10% do IGP-DI.

Na figura 2.4, a seguir, mostramos a evolução histórica do IGP-DI no período compreendido entre janeiro de 1991 e maio de 2004 [11].

Nossa série nominal foi deflacionada tomando como referência o mês de agosto de 1994, sendo o índice de deflação diário calculado a partir do índice mensal acumulado da data de referência até o dia em questão. A série histórica deflacionada está mostrada na figura 2.5.

Podemos observar que a série temporal deflacionada apresenta um alcance de valores muito menor que a série nominal, podendo ser representada através de uma escala linear. O comportamento das flutuações dos preços pode ser então melhor analisado a partir desse tratamento.

Apesar da série ter sido deflacionada, observa-se na Fig. 2.5 um crescimento residual médio do índice com o tempo. Isto representa o crescimento médio real da economia, ainda que super-estimado, uma vez que a carteira que determina o índice apenas leva em conta as empresas mais fortes e mais líquidas do mercado.

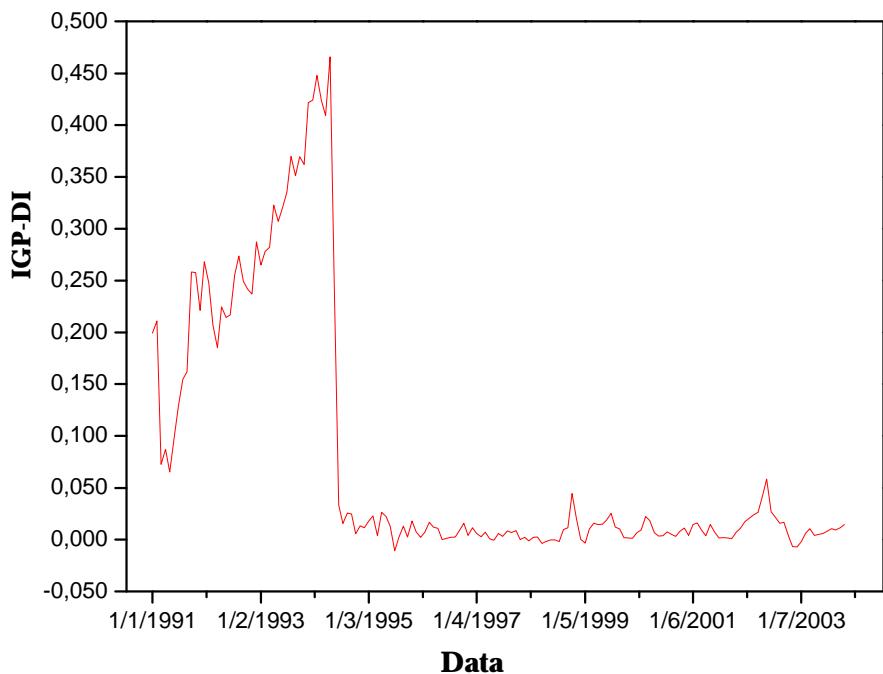


Fig. 2.4. Série histórica do IGP-DI.

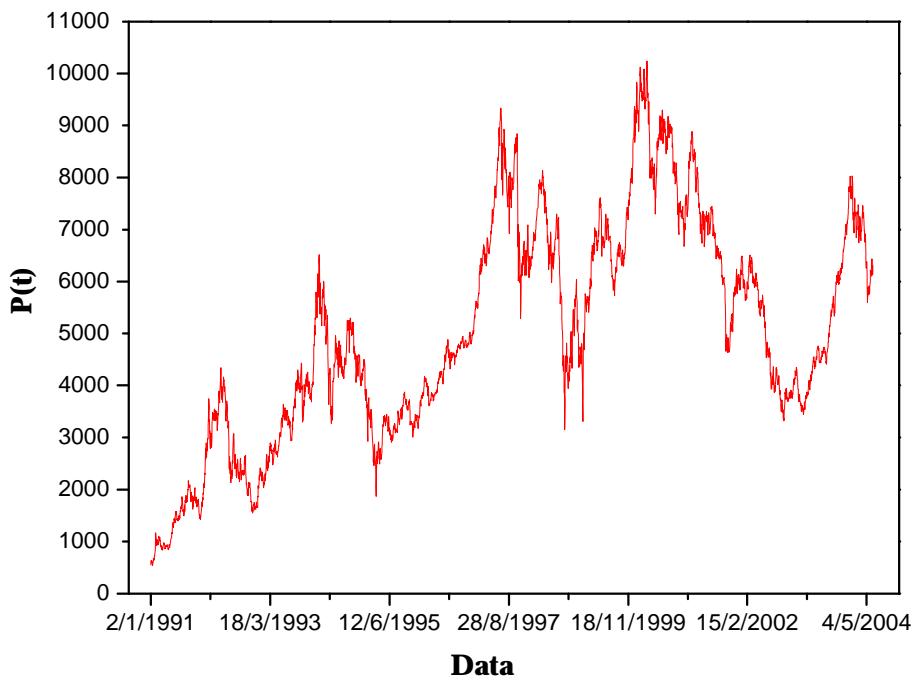


Fig. 2.5. Série histórica deflacionada dos valores de fechamento do IBOVESPA.

2.2 Retornos

O retorno diário de um ativo financeiro é usualmente definido como a diferença logarítmica entre valores diários consecutivos dos preços desse ativo.

Ele é dado por:

$$r_t \equiv \ln y_t - \ln y_{t-1} = \ln\left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right) \quad (2.2)$$

onde y_t é o valor de fechamento do IBOVESPA no instante t , que por sua vez é medido em dias de pregão. No caso de dia anterior sem pregão, o retorno é calculado utilizando-se os preços de fechamento do dia de pregão em questão e do dia útil imediatamente anterior.

Abaixo apresentamos a série histórica dos retornos no período supracitado, onde se observa uma evolução estocástica no tempo.

A dinâmica estocástica dos retornos de preços historicamente é caracterizada por dois parâmetros: a tendência m (“*drift*”), que caracteriza a taxa média de crescimento no tempo dos retornos de preços e a volatilidade v , que caracteriza a amplitude típica do ruído do processo estocástico.

A partir da série histórica apresentada na figura 2.6, construímos um histograma (mostrado na figura 2.7) que fornece a distribuição do número de ocorrências de retornos diários do IBOVESPA dentro de faixas pré-determinadas de valores.

Tanto o “*drift*” como a volatilidade são medidos empiricamente pelo valor médio da distribuição dos retornos e pela largura da distribuição respectivamente, como mostramos na figura 2.8.

No entanto, observa-se que as distribuições de retornos de preço em geral possuem caudas pesadas (“*fat tails*”), ou seja, caudas mais longas que as de uma distribuição normal.

Uma vasta literatura se desenvolveu nos últimos anos, propondo modelos para caracterizar a distribuição de retornos no mercado mundial, e em particular as caudas longas observadas [12-17].

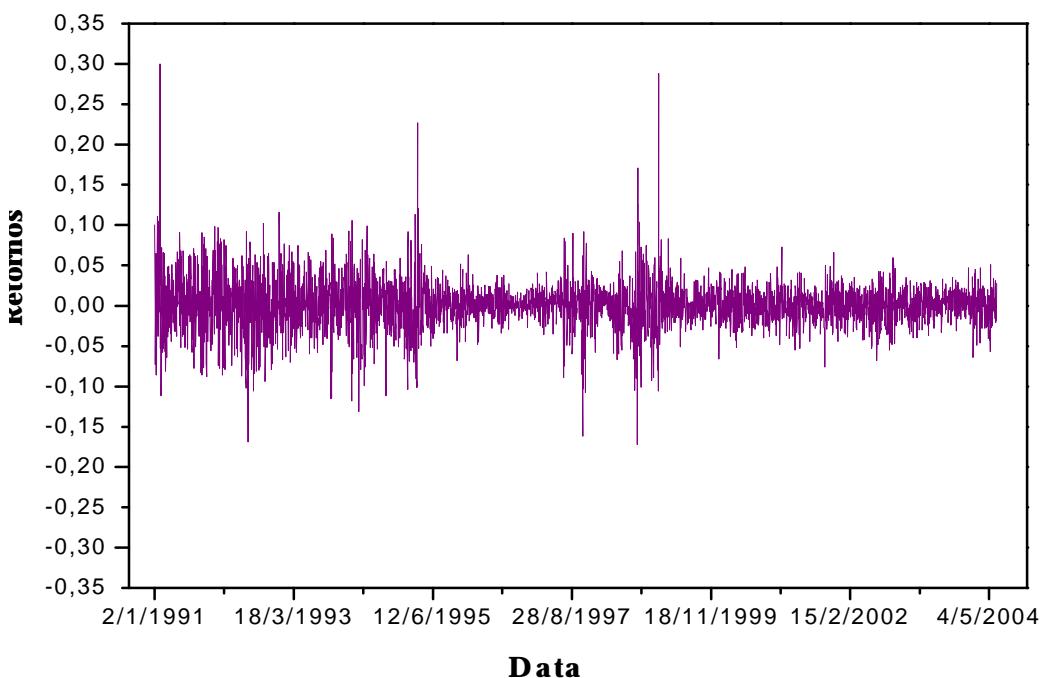


Fig. 2.6. Série histórica de retornos diários do IBOVESPA.

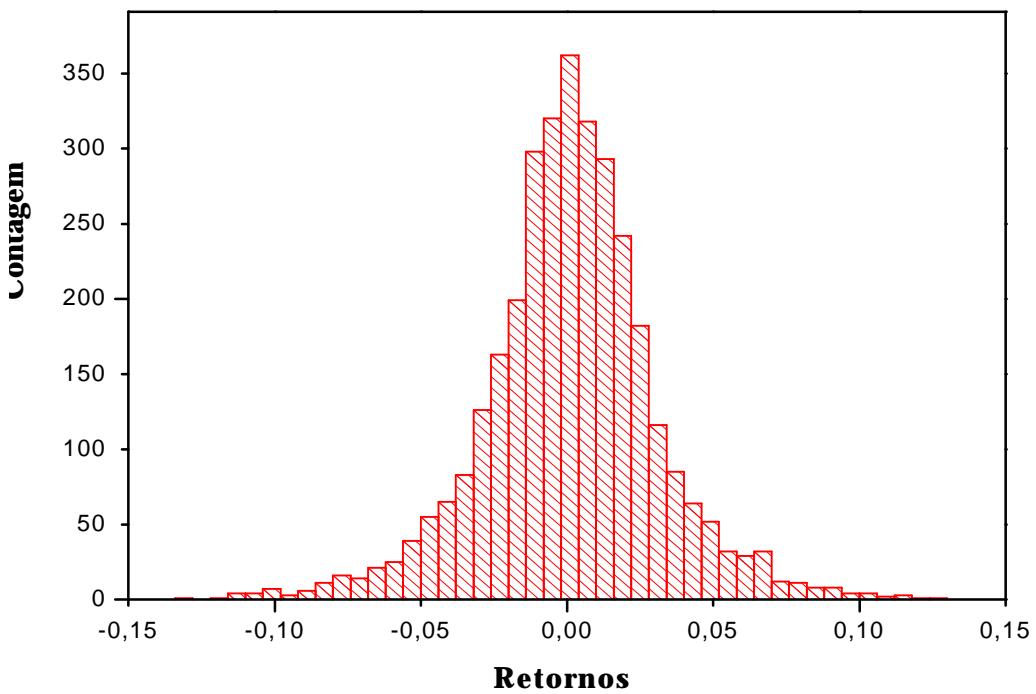


Fig. 2.7. Histograma de retornos diários do IBOVESPA.

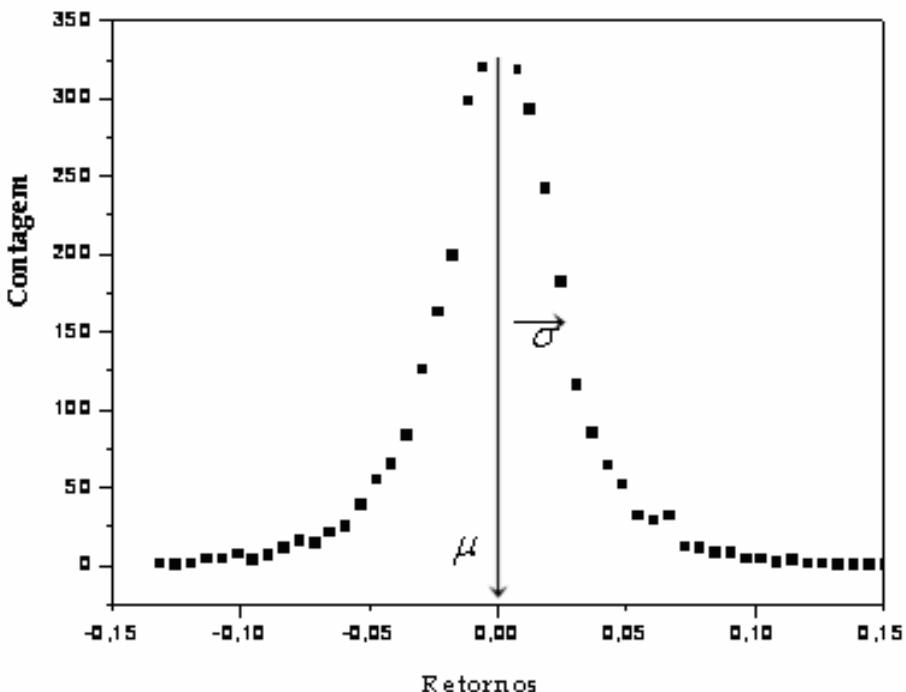


Fig. 2.8. Distribuição de retornos diários do IBOVESPA.

Em geral, as distribuições podem ser caracterizadas por seus quatro primeiros cumulantes, isto é, o valor médio (μ), a variância (σ^2), a assimetria e a curtose (k)¹. Para os dados de retornos diários do IBOVESPA considerados aqui, obtém-se $\mu = 0,0007$; $\sigma^2 = 0,00098$; assimetria = 0,43 e $k = 7,30$. O valor alto da curtose é indicativo de uma distribuição não-Gaussiana² de retornos diários para o IBOVESPA [8].

Na figura 2.9 apresentamos a comparação da distribuição empírica de retornos do IBOVESPA com uma distribuição normal de mesmo valor médio e de mesma largura, onde claramente se vê a inadequação da hipótese de distribuição Gaussiana de preços.

Queremos investigar o comportamento da volatilidade do mercado ao longo do tempo. Como vimos, uma maneira de estimá-la é a partir da largura da distribuição dos retornos passados. Essa definição é conhecida como volatilidade histórica. Está bem estabelecido no entanto que a volatilidade do mercado não é um parâmetro constante, mas sim uma grandeza variável no tempo.

¹ Nos casos da curtose e de assimetria, utilizamos nesse trabalho as definições de cumulantes reduzidos, isto é, a assimetria é dividida por S^3 e a curtose, por S^4 .

² Para gaussiana, a assimetria e a curtose são nulas.

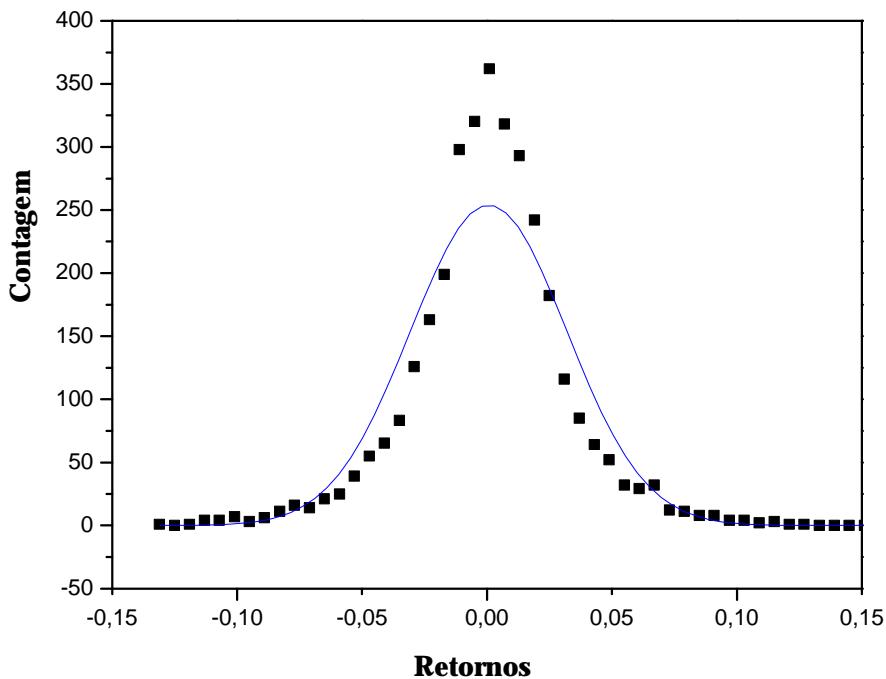


Fig. 2.9. Ajuste gaussiano para a distribuição de retornos diários do IBOVESPA.

Enquanto o valor dos retornos de preços pode ser obtido diretamente da série temporal dos dados financeiros, a volatilidade não pode ser observada diretamente, ou seja, é uma variável estocástica escondida. A volatilidade portanto é uma quantidade estatística que precisa ser extraída a partir desses dados.

Embora não exista uma definição exata de volatilidade, assume-se que a dinâmica dos retornos de preços possua subjacente um processo estocástico de volatilidade, conforme explicado no capítulo 1. Segundo este ponto de vista teórico, uma forma simples de definir a volatilidade σ_t no tempo t é através de:

$$r_t = \sigma_t \cdot z_t \quad (2.3)$$

onde z_t é uma variável aleatória identicamente distribuída com desvio padrão unitário e independente de r_t .

De acordo com esta definição, podemos estimar as propriedades estatísticas da volatilidade a partir das magnitudes dos retornos, pois tipicamente $|z_t|=1$. Considere o gráfico a seguir das magnitudes dos retornos diários do IBOVESPA.

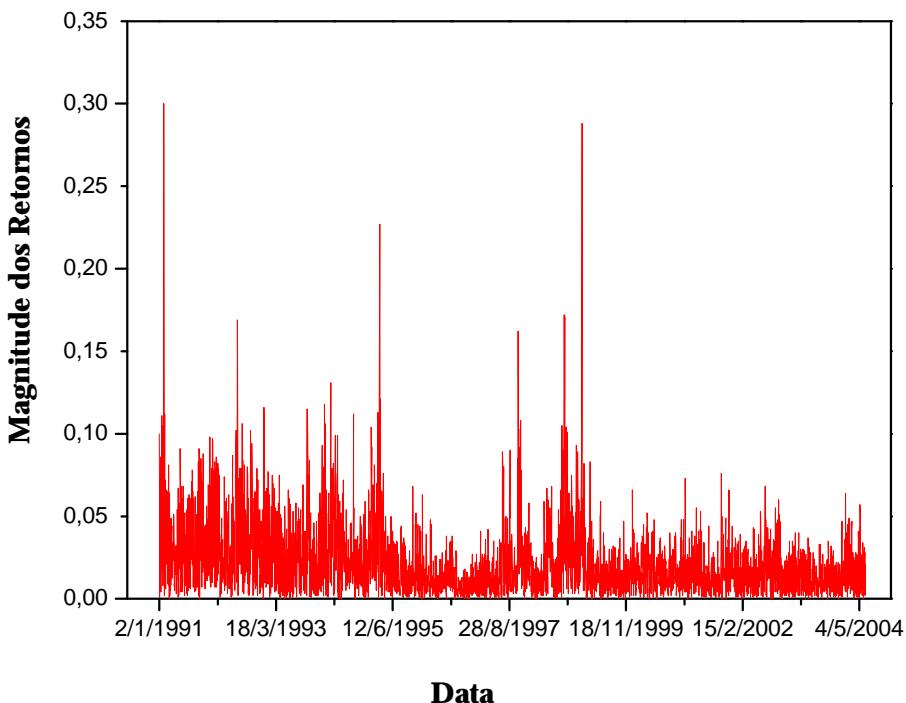


Fig. 2.10. Série histórica da magnitude dos retornos diários do IBOVESPA.

Nota-se um comportamento intermitente, com a presença de períodos distintos de alta e de baixa volatilidade. Tal reconhecimento deu origem a uma série de trabalhos com o intuito de caracterizar a distribuição de volatilidades do mercado mundial assim como suas propriedades dinâmicas [18-20].

Na seção a seguir vamos investigar novos estimadores para a volatilidade. Essa necessidade se dá pelo fato de a magnitude dos retornos diários ser um estimador muito “ruidoso” da volatilidade do mercado, pois, de acordo com (2.3), $|r_t|$ incorpora as flutuações de z_t , não permitindo uma inferência confiável de v_t .

2.3 Volatilidade

Para estimar a volatilidade diária do IBOVESPA, utilizaremos três definições amplamente usadas na literatura. A princípio, não existem fortes razões teóricas para preferir uma ou outra definição. Um dos objetivos é o de examinar a sensitividade dos resultados encontrados com a escolha dos estimadores.

Na primeira definição, a volatilidade diária é dada pelo valor médio das magnitudes dos retornos de preços em uma janela temporal T em torno do dia t :

$$v(t) = \frac{1}{T} \sum_{t'} |r(t')| \quad (2.4)$$

Desta forma, esperamos caracterizar localmente no tempo o risco do mercado (ou de seus ativos). Existe um compromisso na escolha da janela T . Ela não pode ser tão pequena de forma a apenas captar um comportamento isolado, como no caso $T = 1$ ³, onde a ocorrência de $r(t) = 0$ baseado nos preços de fechamento não significa que o mercado não esteja volátil naquele dia ou que esteja operando sem risco. Por outro lado, janelas muito grandes podem englobar períodos de diferentes tendências (de calmaria e nervosismo), perdendo assim informação relevante sobre a volatilidade do mercado.

Uma análise dos dados do S&P 500 mostrou que para escolhas de janelas distintas, as distribuições de valores de volatilidade são as mesmas, apenas tendo parâmetros diferentes [18]. Para verificar este resultado, um re-escalonamento apropriado é feito (de forma a se ter média 0 e desvio padrão 1 em escala logarítmica). A figura 2.11 mostra as distribuições de volatilidades re-escalonadas superpostas, que colapsam em uma única curva na região central das distribuições.

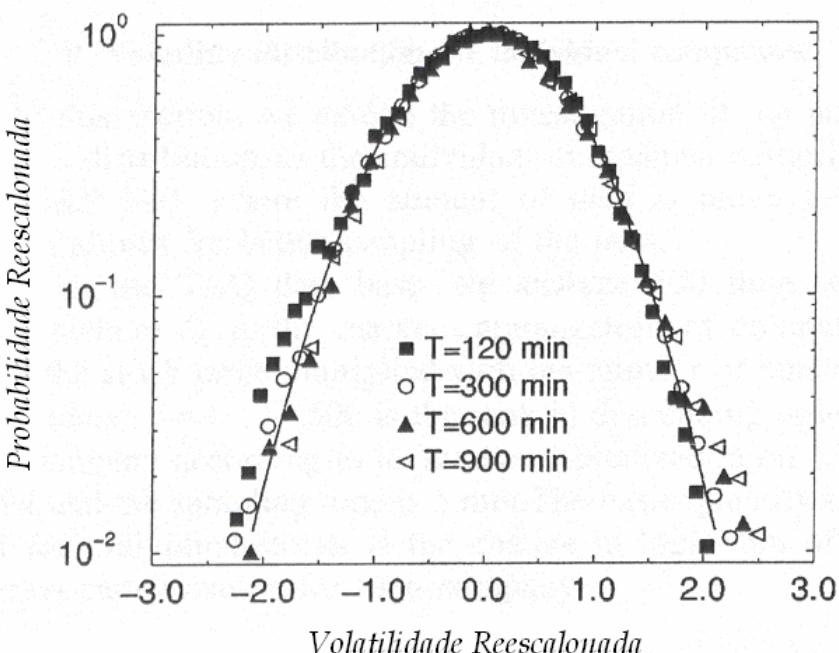


Fig. 2.11. Distribuição de probabilidade de volatilidade reescalonada em diferentes janelas de tempo para o índice S&P 500.

³ Note que no caso $T = 1$, $v(t) = |r(t)|$, que foi apresentado na seção anterior.

Em nosso trabalho, consideramos a janela $T = 5$ dias⁴ de pregão em torno do dia t , correspondentes a uma semana de calendário normal.

Assim, definimos:

$$v_I(t) = \frac{1}{5} \sum_{t'=t-2}^{t+2} |r(t')| \quad (2.5)$$

Os gráficos da série temporal de $v_I(t)$ para o IBOVESPA e seu respectivo histograma estão mostrados na figuras 2.12 e 2.13.

A segunda definição de volatilidade diária considerada é obtida como o valor absoluto do alcance das flutuações do índice de preços P , em escala logarítmica, ao longo de cada dia de pregão:

$$v_H(t) = \ln \left[\frac{P_{\max}(t)}{P_{\min}(t)} \right] \quad (2.6)$$

Essa definição pode levar a uma estimativa superior para a volatilidade do mercado, fornecendo valor maior do que a medida de risco efetivo associado ao ativo no dia, devido à existência de um eventual pico de flutuação intra-diária do índice. Os gráficos nas figuras 2.14 e 2.15 mostram o comportamento de $v_H(t)$ para o IBOVESPA e seu respectivo histograma.

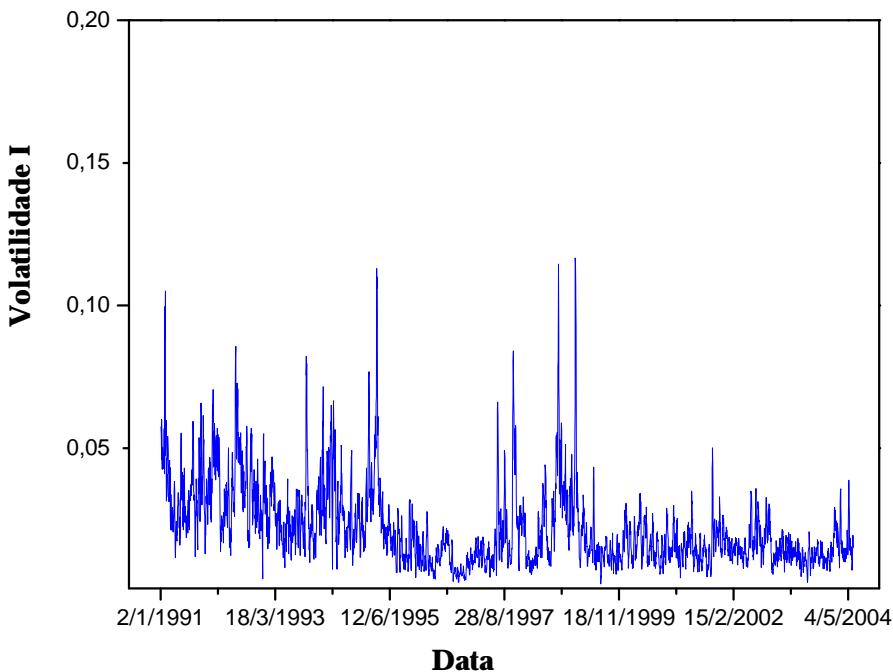


Fig. 2.12. Série histórica de Volatilidade I.

⁴ 1 dia = 6h30' = 390'

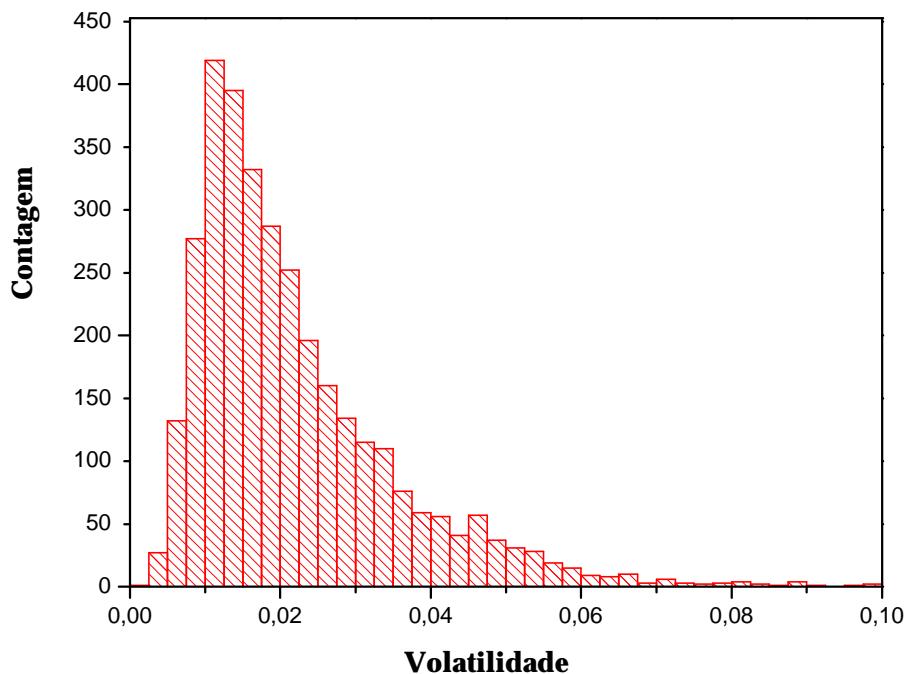


Fig. 2.13. Distribuição de Volatilidades I.

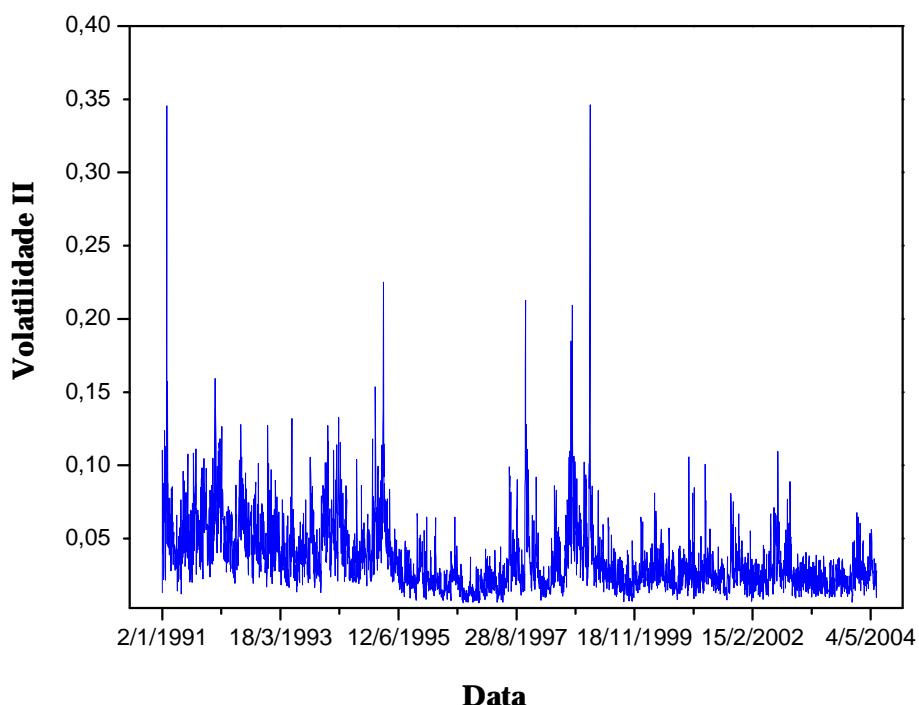


Fig. 2.14. Série histórica de Volatilidade II.

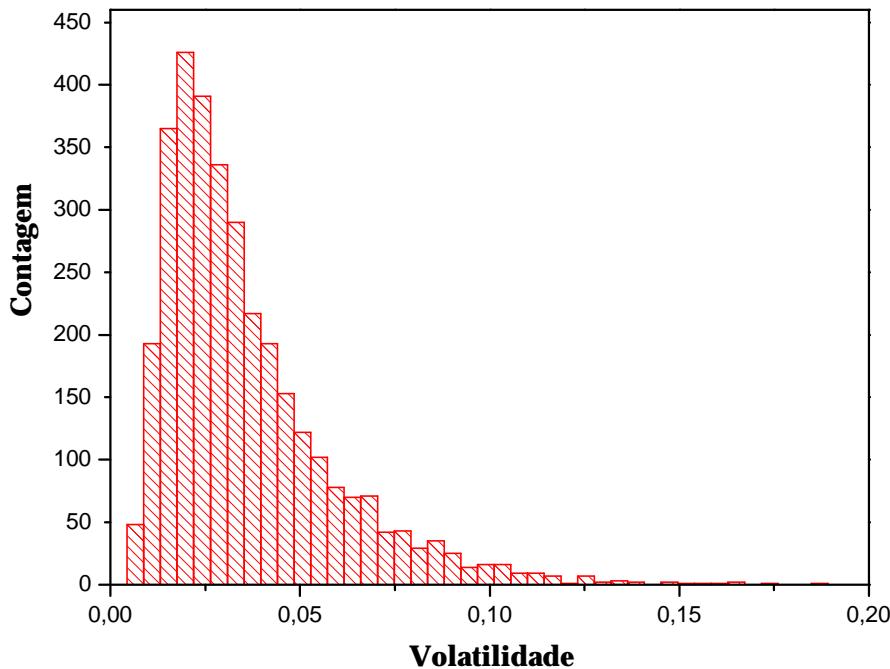


Fig. 2.15. Distribuição de Volatilidades II.

Conforme se pode verificar nos gráficos de série histórica, os estimadores de volatilidade apresentados, apesar de se basearem em dados de retorno em escalas de tempo diferentes (diária e intra-diária) têm distribuições empíricas cuja forma é semelhante.

Aprimorando a definição II de volatilidade , vamos considerar não apenas o alcance das flutuações de preço intra-diárias, mas a média dessas flutuações de preços ao longo do dia. Consideramos os n_t retornos intra-diários em uma escala de tempo t e o desvio padrão dos retornos $v_t(t)$ para cada dia t . Reescalonando-os para a escala diária,

$$v_{III}(t) = \sqrt{n_t} v_t(t) \quad (2.7)$$

Utilizamos nesse trabalho $t = 15$ minutos e um total de $n_t = 25$ intervalos intra-diários, totalizando 6 horas e 30 minutos entre a primeira e a última tomadas de preço do pregão diário. Ao todo foram contabilizados 1.532 dias de pregão, utilizando-se assim uma base de dados totalizando 38.300 retornos intra-diários.

Os gráficos a seguir mostram a série temporal de $v_{III}(t)$ para o IBOVESPA e seu respectivo histograma. A série histórica começa em janeiro de 1998, que é a data a partir da qual a BOVESPA passou a fornecer dados intra-diários a cada 15 minutos.

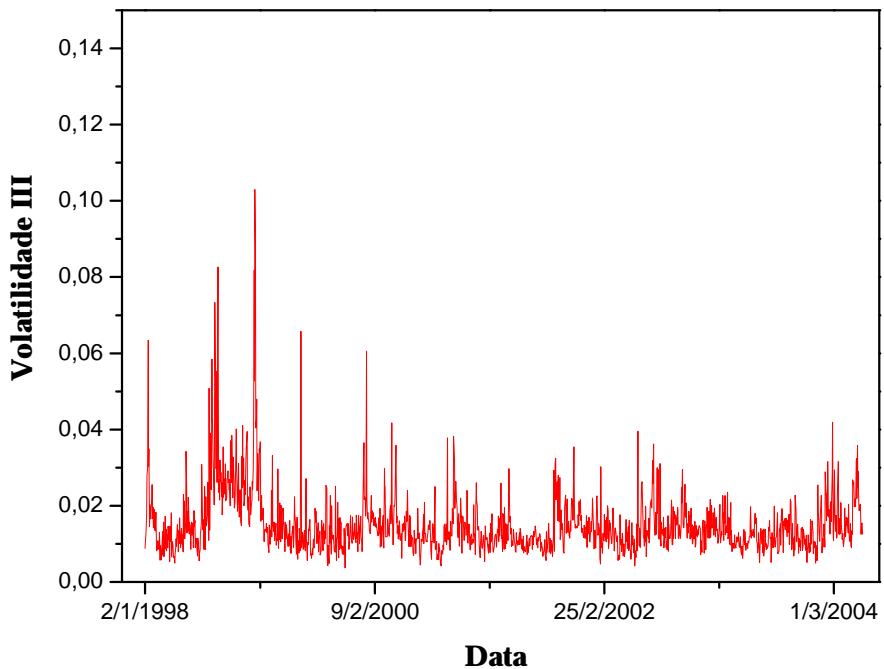


Fig. 2.16. Série histórica de Volatilidade III.

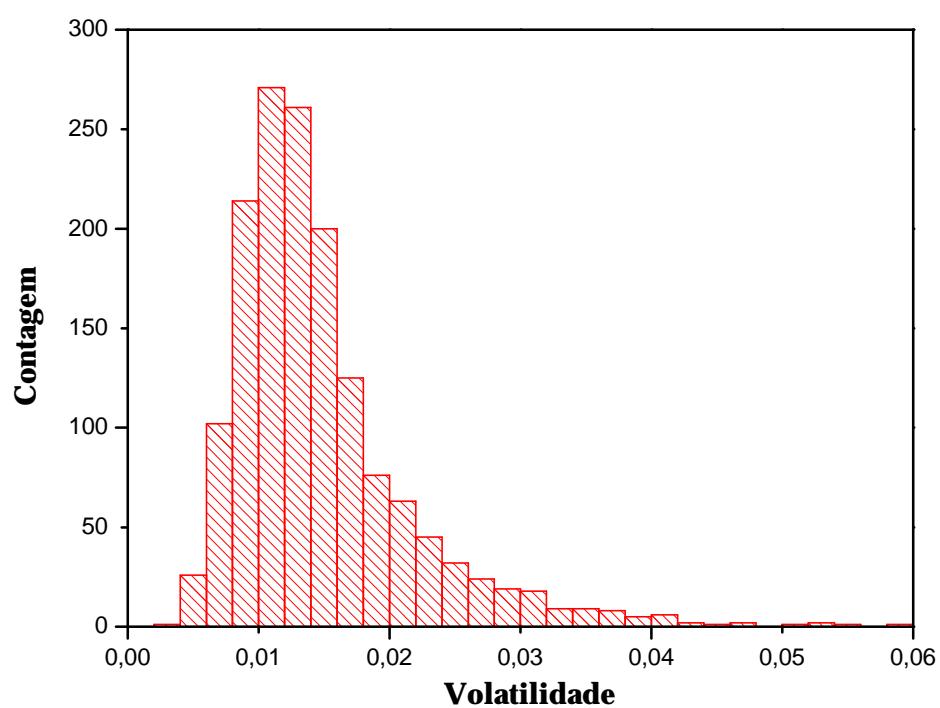


Fig. 2.17. Distribuição de Volatilidades III.

Uma vez que a distribuição empírica de volatilidade é obtida, podemos utilizar procedimentos estatísticos convencionais para caracterizar suas propriedades. A tabela abaixo fornece um resumo da estatística da distribuição das volatilidades diárias empíricas do IBOVESPA.

Tabela 2.1: Dados estatísticos das distribuições empíricas de volatilidade.

	Média	Variância (w^2)	Assimetria	Curtose
$v_I(t)$	0,02	0,0002	2,02	6,46
$v_{II}(t)$	0,04	0,0006	2,91	20,30
$v_{III}(t)$	0,02	0,0001	3,55	22,46

Comparando-se as diferentes definições, vê-se que a definição v_{II} apresenta valor médio mais alto, como já mencionamos, pelo fato dessa definição majorar a estimativa de volatilidade. Por outro lado, a definição v_I fornece um valor baixo de curtose, pois sendo essa definição equivalente a um filtro de média móvel, ela suaviza grandes flutuações.

O valor típico das médias obtidas é $v_M = 0,027$ implicando em um desvio padrão anualizado de 43% nos retornos. Este valor é comparável aos valores de volatilidade praticados no mercado, por exemplo, na especificação de opções.

No entanto, existe flutuação significativa da volatilidade ao longo do tempo, como fica evidente pelos valores da variância dos dados mostrados na 2^a coluna da tabela 2.1.

Além disso, as 3^a e 4^a colunas desta tabela indicam que as distribuições são assimétricas para a direita ($assimetria > 0$) e leptocúrticas ($curtose > 0$), o que exclui a hipótese de normalidade. Esse resultado era esperado, uma vez que a volatilidade apresenta comportamento correlacionado de longo alcance como mostraremos a seguir, o que viola os argumentos do Teorema do Limite Central, mesmo para amostras muito grandes.

Considere a correlação temporal normalizada da série de volatilidade, dada por:

$$C(t) = \frac{\langle v(t+t)v(t) \rangle - \langle v(t) \rangle^2}{w^2} \quad (2.8)$$

onde a notação $\langle \rangle$ representa a média temporal ao longo da série.

Nos gráficos a seguir apresentamos o comportamento de $C(t)$ para as três definições de volatilidade tratadas aqui. São apresentados ajustes para os resultados empíricos de acordo com a dependência:

$$C(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{t_c}\right)^g} \quad (2.9)$$

Esta expressão fornece os limites $C(0)=1$ e o comportamento assintótico em lei de potência:

$$C(t) \propto t^{-g} \quad t \gg t_c, \quad (2.10)$$

onde o expoente $0 < g < 1$ caracteriza um comportamento persistente da série.

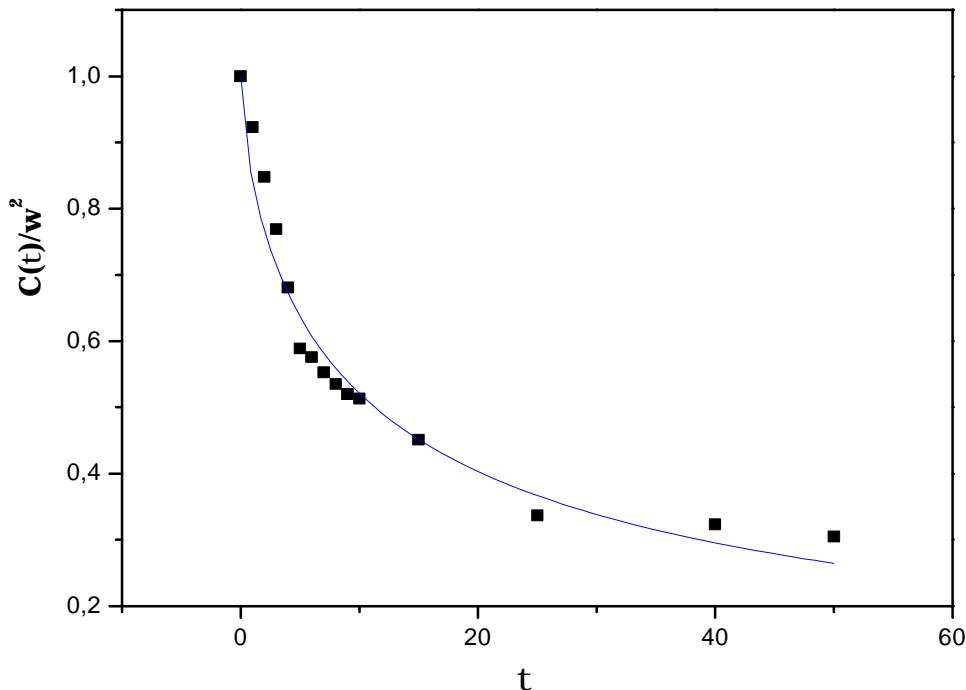


Fig. 2.18. Correlação temporal normalizada da série Volatilidade I.

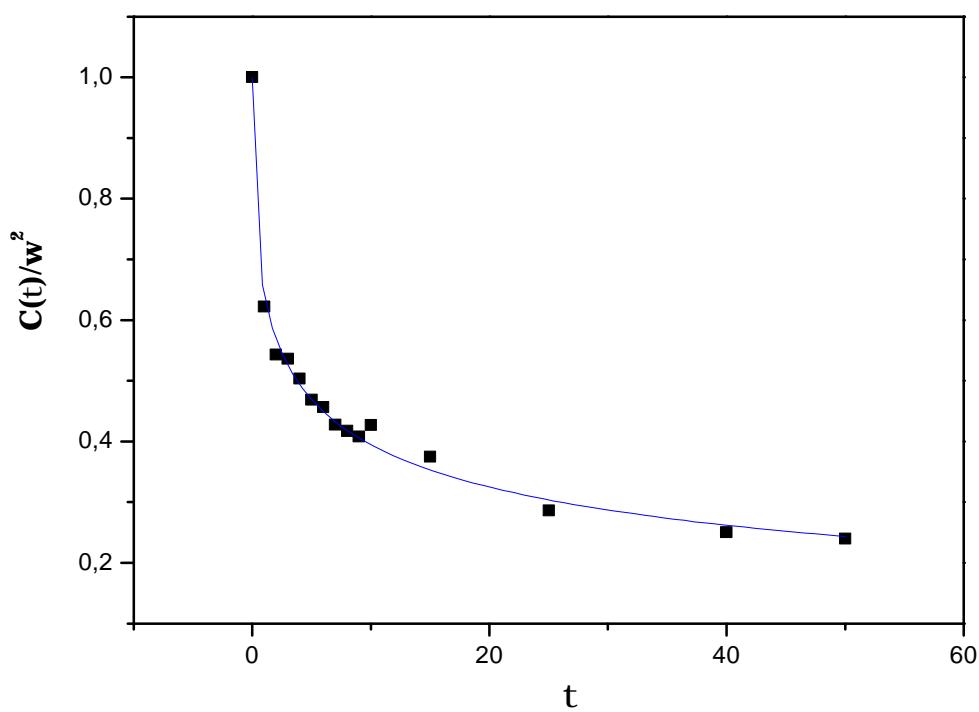


Fig. 2.19. Correlação temporal normalizada da série Volatilidade II.

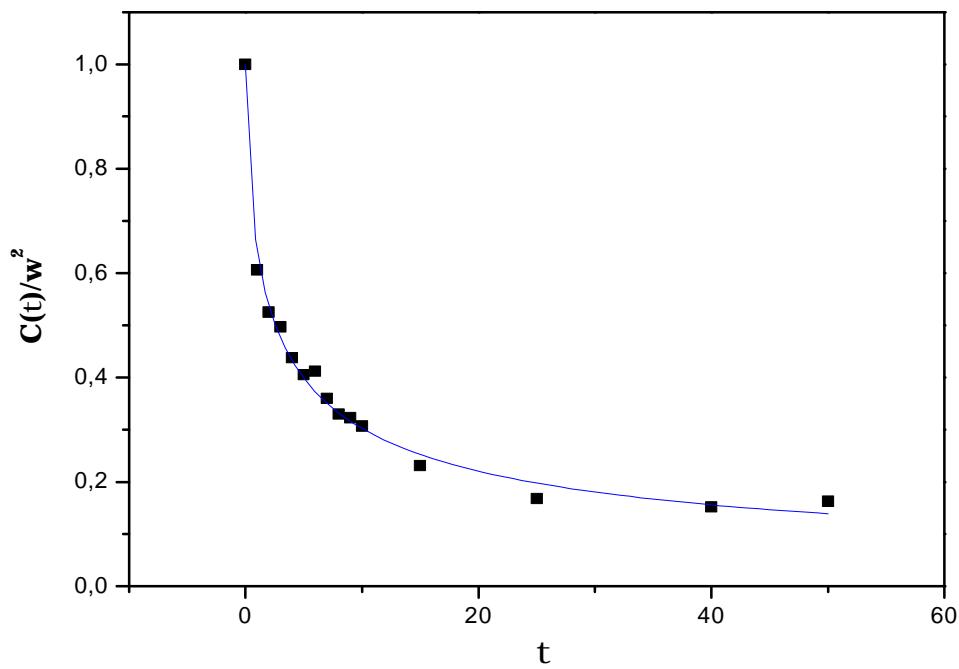


Fig. 2.20. Correlação temporal normalizada da série Volatilidade III.

A partir dos ajustes encontrados, obtivemos uma estimativa do limiar de tempo t_c a partir do qual o se obtém o regime assintótico em cada caso. A estimativa do expoente g é obtida a partir dos ajustes lineares dos gráficos da função de correlação em escala logarítmica mostrados nas figuras 2.21, 2.22 e 2.23, e obtidos por mínimos quadrados para intervalos de tempo $t > t_c$. Apresentamos também na tabela abaixo a estimativa encontrada para o expoente g em cada caso.

Tabela 2.2. Parâmetros do ajuste linear para a correlação temporal normalizada das séries de volatilidade.

	t_c	g
$v_I(t)$	5	$0,31 \pm 0,01$
$v_{II}(t)$	3	$0,30 \pm 0,03$
$v_{III}(t)$	3	$0,46 \pm 0,02$

Nossos resultados sugerem que a função de auto-correlação da volatilidade pode ser descrita assintoticamente por uma lei de potência (equação 2.10) com expoente $0 < g < 1$, caracterizando uma memória de longo alcance. Este resultado é robusto em relação à definição utilizada de volatilidade, que tanto pode ser estimada por uma média local dos valores absolutos de retorno, ou pelo desvio médio quadrático dos retornos intra-diários.

Os resultados numéricos obtidos para os parâmetros t_c e g mostram ainda características de “universalidade” em relação às definições utilizadas. Com exceção da definição v_{III} , obtém-se o valor $g \approx 0,3$ para o expoente do decaimento em lei de potência da função de correlação. Devemos olhar com cautela, no entanto, o expoente g diferente encontrado nesse caso, pois, devido ao menor tamanho da série envolvida, este resultado pode ser decorrência de uma insuficiência estatística dos dados.

Nossos resultados estão de acordo com análise recente feita para a série de volatilidade diária do mercado brasileiro [21], obtida a partir de 2.063 observações de retornos diários. Nesta análise, através de vários testes estatísticos, foi rejeitada a hipótese nula de memória de curto alcance da série de volatilidade, com nível de significância de 5%. No entanto, não foram sugeridos resultados para o expoente γ .

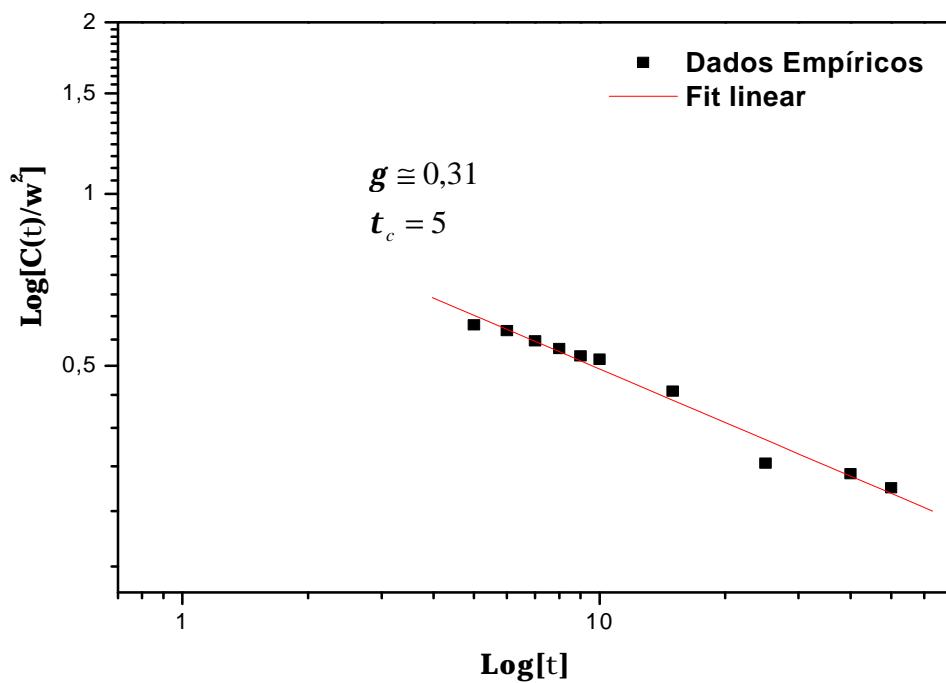


Fig. 2.21. Gráfico log-log da correlação temporal normalizada da série Volatilidade I.

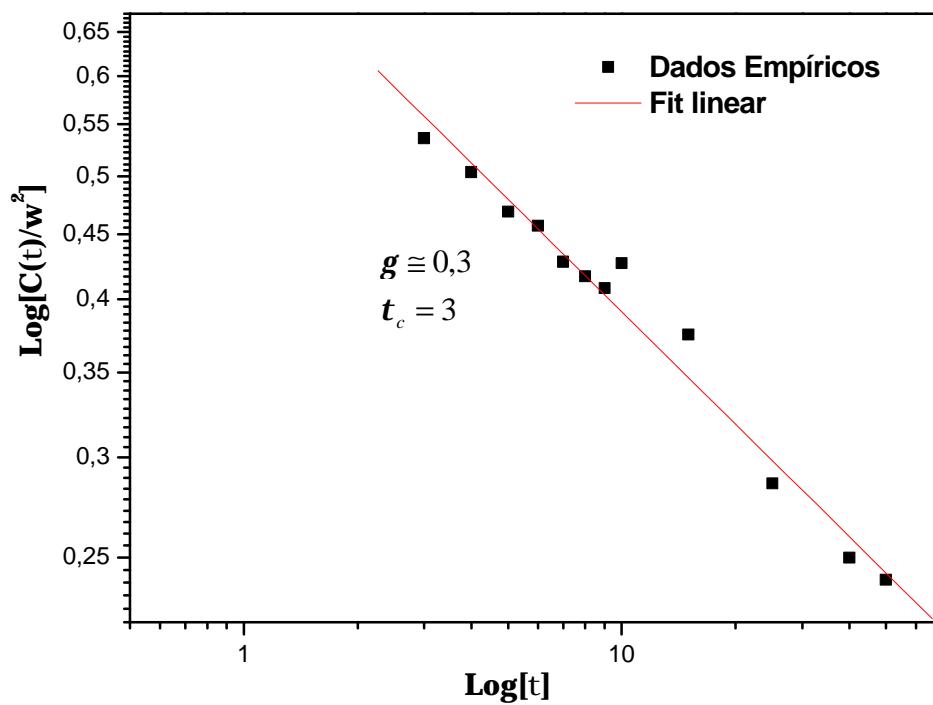


Fig. 2.22. Gráfico log-log da correlação temporal normalizada da série Volatilidade II.

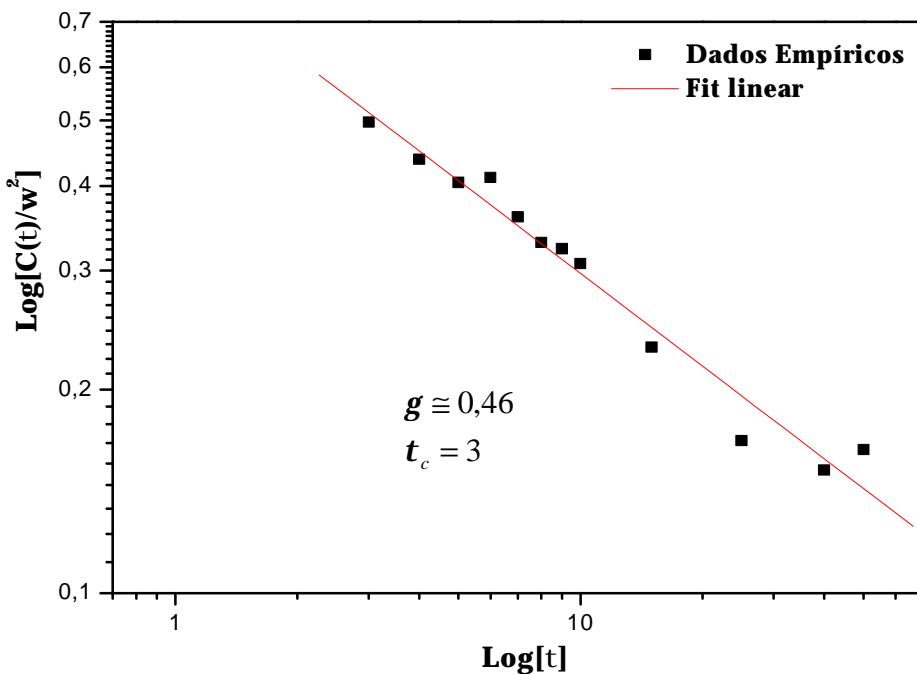


Fig. 2.23. Gráfico log-log da correlação temporal normalizada da série Volatilidade III.

É interessante notar que a análise da memória de longo alcance da volatilidade em mercados desenvolvidos fornece valores semelhantes para o expoente g ao encontrado para o mercado brasileiro. Podemos citar por exemplo o valor $g \approx 0,30$ obtido para o índice S&P 500 [6] e $g \approx 0,38$ para o índice NYSE [20]. Podemos concluir que as diferenças institucionais e de fluxo de informação do mercado brasileiro em relação aos mercados desenvolvidos não são suficientes para afetar de forma relevante a dinâmica do processo de avaliação de preços.

A dependência temporal da volatilidade mostra ainda que qualquer modelo de caracterização de série temporal financeira deve incluir necessariamente a dinâmica da volatilidade. Além disso, a presença de memória de longo alcance na série de retornos é evidência contra a hipótese de mercado eficiente e fornece uma componente de previsão na dinâmica da série.

É instrutivo considerar agora os gráficos representativos das séries temporais da volatilidade dados por $\ln[v_I(t)]$, $\ln[v_{II}(t)]$ e $\ln[v_{III}(t)]$ mostrados nas figuras 2.24, 2.25 e 2.26 respectivamente. Neles se vê mais claramente que a série é correlacionada positivamente, pois em geral os períodos de alta volatilidade não são independentes, mas tendem a se aglomerar. O efeito de “clustering” de volatilidade, muito documentado na literatura, se caracteriza pela concentração de regiões de alta volatilidade, que estão associadas às épocas de crise no mercado.

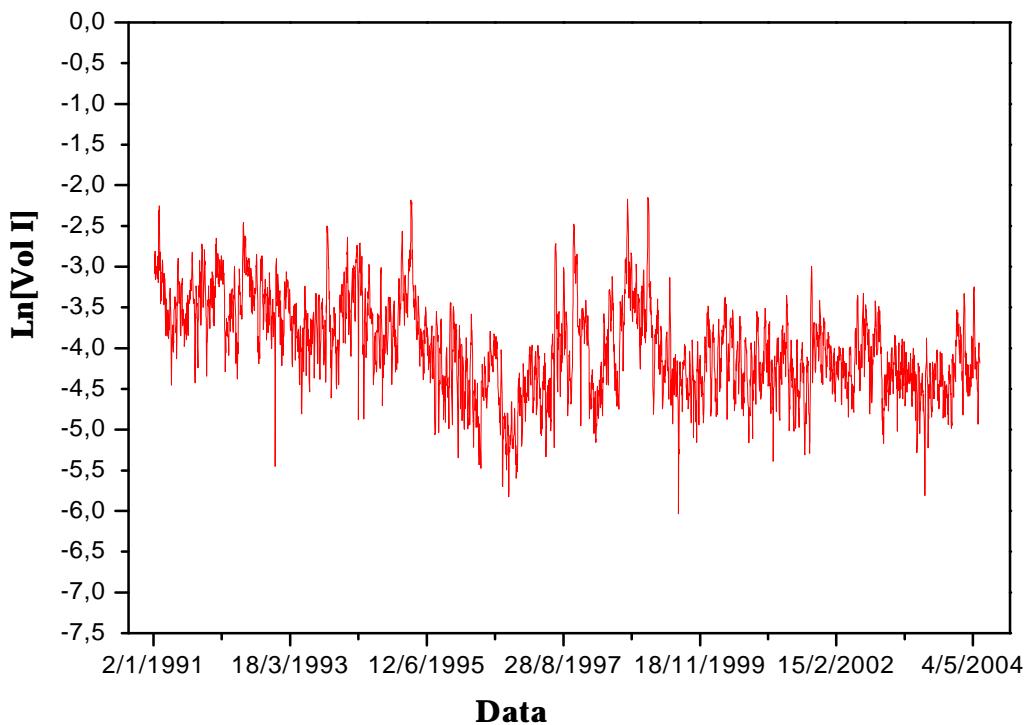


Fig. 2.24. Série histórica da Volatilidade I em escala logarítmica.

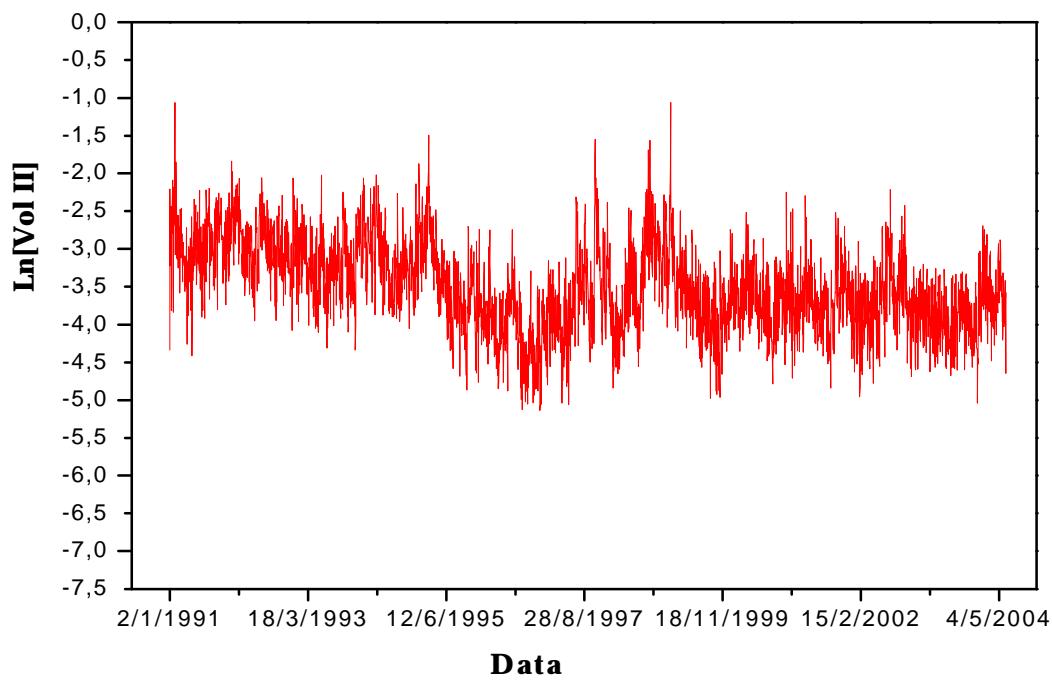


Fig. 2.25. Série histórica da Volatilidade II em escala logarítmica.

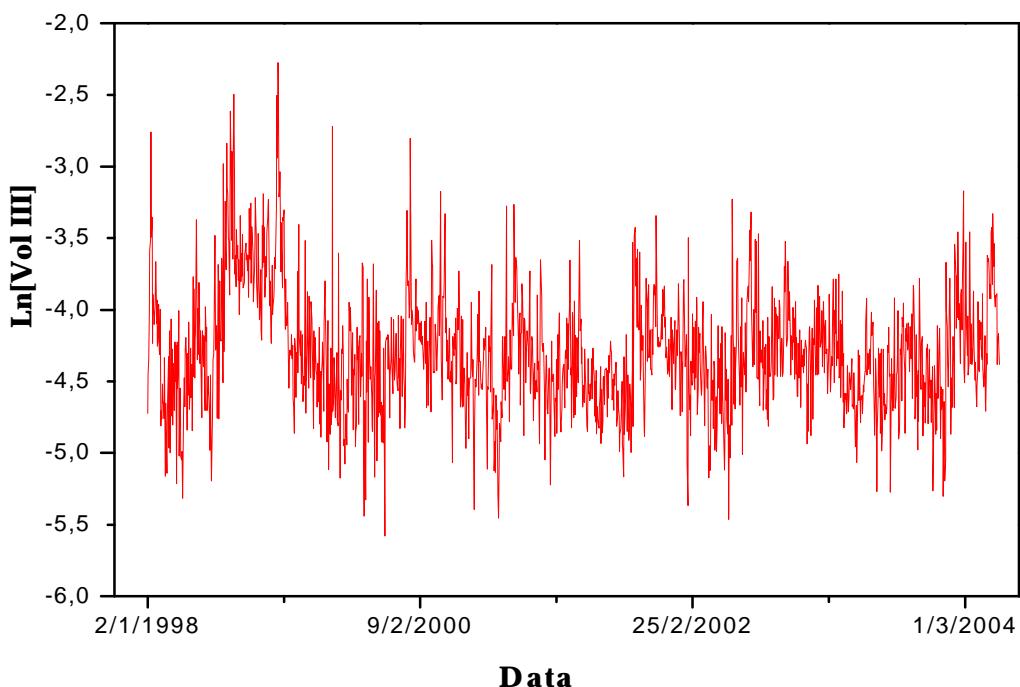


Fig. 2.26. Série histórica da Volatilidade III em escala logarítmica.

A partir dos gráficos gerados para as três definições de volatilidade utilizadas, identifica-se a presença simultânea de concentração de alta volatilidade associada a épocas de grande instabilidade política e/ou econômica, como na implantação do Plano Collor (fevereiro de 1991), a crise no México (1995), a crise asiática (1997-1998), a crise na Rússia (2º semestre de 1998), a desvalorização do Real (janeiro de 1999), a crise argentina (2001) e o último período pré-eleitoral (2002).

A tabela a seguir apresenta os parâmetros estatísticos das distribuições dos valores empíricos do logaritmo de cada definição de volatilidade.

Tabela 2.3: Dados estatísticos das distribuições empíricas do logaritmo da volatilidade.

	Média (\bar{a})	Variância (s^2)	Assimetria	Curtose
$\ln v_I(t)$	-3,98	0,34	0,13	-0,11
$\ln v_{II}(t)$	-3,50	0,35	0,18	-0,10
$\ln v_{III}(t)$	-4,30	0,18	0,64	1,32

É interessante notar os valores reduzidos de assimetria e curtose em relação à tabela anterior, o que implica que a hipótese de normalidade é mais adequada neste caso. Isso significa que a distribuição de volatilidade pode ser aproximada por uma distribuição log-normal descrita por:

$$P(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}vl} \exp\left[-\left[\ln\left(\frac{v}{v_c}\right)\right]^2 / 2l^2\right] \quad (2.10)$$

onde $\ln(v_c) = a$.

De fato, a análise da distribuição de volatilidade do S&P 500 [18] mostrado na figura 2.11 conclui que os dados empíricos são consistentes com a distribuição log-normal para a parte central da distribuição, mas com um comportamento distinto para a cauda da distribuição de valores de volatilidade. Resultados semelhantes foram obtidos para a volatilidade do índice NYSE (bolsa de Nova York) [20].

Isso sugere que investiguemos a adequação deste modelo na descrição da distribuição de volatilidades do IBOVESPA. Com essa finalidade, vamos analisar nos três casos a distribuição de valores do logaritmo da volatilidade reescalados por:

$$\frac{\ln v - a}{l} \quad (2.11)$$

O gráfico na figura 2.27 apresenta as distribuições de freqüência superpostas para os logaritmos de volatilidades reescalados.

Observamos um colapso dos dados sobre uma única curva na parte central do gráfico, significando a existência de uma mesma forma funcional de distribuição para todas as definições utilizadas quando consideramos valores do logaritmo da volatilidade próximos ao respectivo valor esperado. Isso indica que as definições utilizadas são estimadores igualmente confiáveis para a volatilidade.

Além disso, conforme mostrado na figura 2.17, o colapso de dados possui forma aproximadamente parabólica, indicando que $P(n)$ pode ser descrita pela distribuição log-normal para valores intermediários de volatilidade. No entanto, este colapso, falha para valores extremos de volatilidade. Isto significa que é necessário desenvolver novos modelos de forma a descrever a *pdf* da volatilidade em uma faixa mais ampla de valores, compatíveis com a dos dados empíricos. No capítulo a seguir iremos analisar mais detalhadamente a validade do modelo log-

normal e de outros modelos da literatura para a descrição do comportamento global da volatilidade estocástica do IBOVESPA.

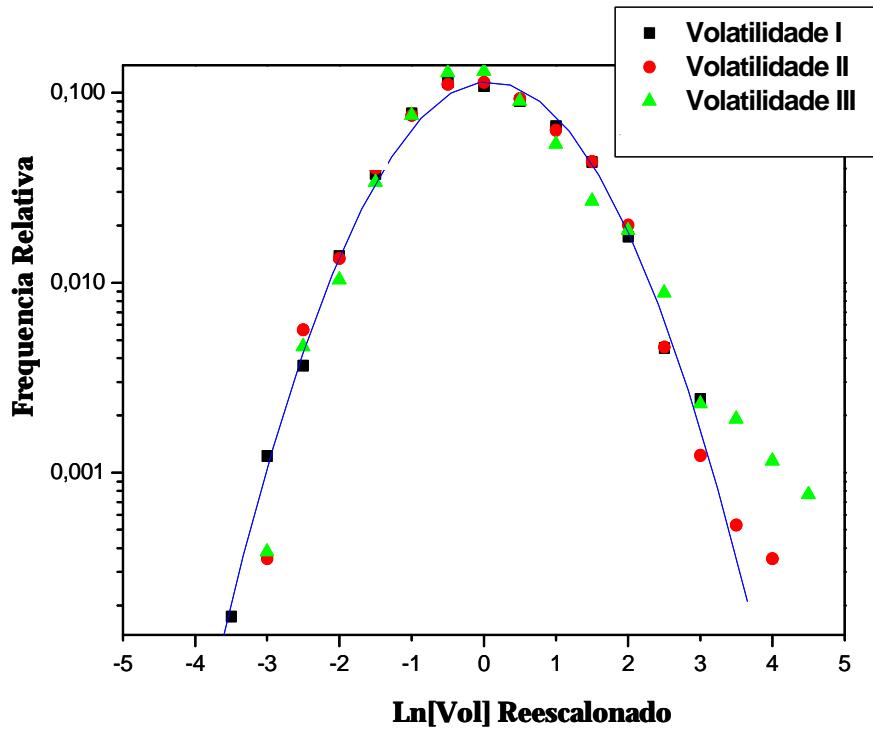


Fig. 2.27. Distribuições de freqüências do logaritmo da volatilidade reescalonado.