Estratégias Quantitativas para Tomada de Decisão em Finanças e Controladoria

Prof. Dr. Marco Antonio Leonel Caetano

TÓPICO 1

Modelos Probabilísticos em Eventos Financeiros

1.1 Introdução

O cálculo de probabilidades é um conjunto de leis e técnicas muito bem elaboradas, baseadas nas regras da teoria matemática dos conjuntos. A probabilidade é uma medida de possibilidades favoráveis dentro de fenômenos incertos. Modelar um fenômeno pelas leis de probabilidade, significa adotar funções cujos resultados em média fornecem valores muito próximos aos valores reais do fenômeno. No entanto, uma probabilidade que indique certas chances de ocorrência do resultado de um fenômeno aleatório, não garante que o fenômeno realmente venha a ocorrer. Chances e possibilidades são conjunto de valores que representam *todos os possíveis resultados* de um experimento aleatório. Esse conjunto de valores recebe o nome de **espaço amostral.**

DEFINIÇÃO
Espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Experimento aleatório é um experimento onde a cada repetição o resultado do fenômeno observado fornece resultados diferentes.

Exemplo:

Três moedas honestas são lançadas. Se for definido que C: cara e K: coroa, o espaço amostral (todas as possibilidades) será:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} CCC & CCK & CKC & KCC \\ CKK & KCK & KKC & KKK \end{Bmatrix}$$

Pode-se perceber que todos os resultados possíveis desse experimento estarão dentro do conjunto denominado espaço amostral.

Dado um certo experimento aleatório, sempre deseja-se saber o resultado desse experimento, e ao mesmo tempo quantificá-lo. O que se deseja saber de um experimento aleatório realizado é denominado como **evento**.

> **DEFINIÇÃO**
> Evento é o que se deseja saber de um experimento aleatório. Um evento é um subconjunto do espaço amostral.

Exemplo:

Imagine-se que no experimento das 3 moedas, deseja-se avaliar o seguinte evento:

A = {sair uma vez cara}

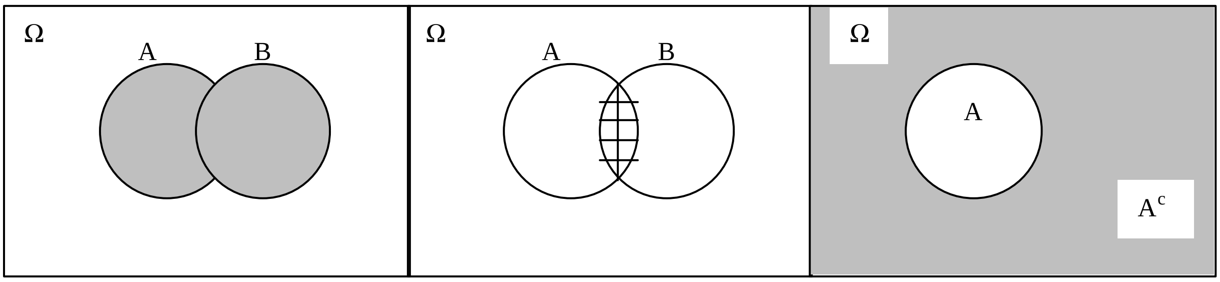
O resultado desse evento seria:

A = { CKK, KCK, KKC }

Como eventos são subconjuntos do espaço amostral, a relação existente entre dois ou mais eventos, também serão subconjuntos dentro do espaço amostral. Então se eventos são conjuntos, vale a intersecção, a união e o complementar de conjuntos, perfazendo todos como resultados conjuntos que serão também eventos. Então:

- A e B eventos $\Rightarrow$ $(A \cup B)$ é evento. O resultado será um elemento de A ou B.
- A e B eventos $\Rightarrow$ $(A \cap B)$ é evento. O resultado será um elemento de A e B.
- A evento $\Rightarrow$ A^c é o evento complementar. O resultado são todos os elementos do espaço amostral que não pertencem ao conjunto A.
- Dois eventos são ditos **mutuamente exclusivos se** $A \cap B = 0$.

Evento **União** | Evento **Intersecção** | Evento **Complementar**



Exemplo:

Duas empresas A e B são avaliadas durante 6 meses quanto aos prejuízos num determinado ano, tomados mês a mês. Elaborar o espaço amostral e determinar os seguintes eventos:

(a) Evento com meses iguais de prejuízo.
(b) Evento cuja soma dos meses de prejuízo das duas firmas seja igual a 10.
(c) Evento cujo mês de uma firma é o dobro da outra.
(d) Evento cuja soma dos meses é menor que 15.
(e) Evento cuja soma dos meses é menor que 2.

Pode-se primeiro determinar o espaço amostral, criando uma tabela com duas entradas, sendo que as linhas representam os meses de prejuízo da firma A e as colunas representam os meses de prejuízo da firma B.

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

(a) O evento nesse caso será o conjunto E_1={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)}. Este evento pode ser representado na tabela:

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

(b) O evento será o conjunto E_2={(4,6),(5,5),(6,4)} que na tabela é representado por:

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

(c) O evento será o conjunto E_3={(1,2),(2,1),(2,4),(3,6),(4,2),(6,3)} representado na tabela :

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

(d) O evento nesse caso será todo o espaço amostral, $E_4 = \Omega$.
(e) O evento nesse caso será vazio pois a soma mínima é de 2 meses. $E_5 = \phi$.

Exemplo

Com os eventos anteriores criar os seguintes novos eventos:

(a) $E_1 \cup E_2$
(b) $E_1 \cap E_2$
(c) $(E_1 \cup E_2)^c$

A solução será:

(a) $E_1 \cup E_2$ = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(4,6),(6,4)}. Na tabela,

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

(b) $E_1 \cap E_2$ = {(5,5)}
(c) $(E_1 \cup E_2)^c$ = {(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,5)}

Na tabela fica:

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

1.2 Probabilidade

A probabilidade é uma ponderação entre número de casos prováveis de ocorrer pelo número de casos possíveis. Pode-se defini-la em termos matemáticos:

> **DEFINIÇÃO**
> Se um evento é possível de ocorrer em N casos mutuamente exclusivos e igualmente prováveis, e se "m" desses casos tem uma característica abordada por um evento E, a probabilidade da ocorrência de E será igual a m/N.

A probabilidade é então expressa por:

$$P(E) = \frac{m}{N}$$

Assim, a probabilidade tem como regra o fato de que ao se amostrar pontos e calcular a freqüência relativa (freqüência em %), quando esse número de pontos aumenta o suficiente para amostras isoladas não alterarem o resultado final, essa freqüência se transforma em probabilidade. Como toda teoria, algumas propriedades e teoremas são os pilares de sustentação da probabilidade.

Propriedades

- A probabilidade de um evento é sempre positiva: P(E) ≥ 0.
- A soma das probabilidades de todos os eventos de um espaço amostral Ω é igual a 1:

$$P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_N) = 1$$

- Para eventos que são mutuamente exclusivos (A∩B=0) a probabilidade da união de dois eventos será:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

No entanto para dois eventos quaisquer desconhecidos a probabilidade de um acontecimento de união entre eles será:

DEFINIÇÃO
Dado dois eventos E_1 e E_2, a probabilidade da ocorrência do evento E_1, ou do evento E_2, ou de ambos ocorrerem , será a probabilidade do evento E_1 somada a probabilidade do evento E_2, subtraída da probabilidade da ocorrência mutua de ambos.

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Exemplo:

Imagine que num relatório anual, uma empresa que possua 3 filiais (A,B,C) faz uma auditoria nessas firmas e verificada a freqüência dos seus lucros mês a mês nos últimos 12 meses. Se a filial A foi a maior responsável pelo lucro no mês, ela poderá ser a responsável pelo lucro no mês seguinte ou não. Então primeiro os auditores colocaram numa fila, desde o primeiro mês, as filiais que mais forneceram lucros, começando pelo mês um. Junto com o nome da empresa foi colocado seu lucro, onde: 1≡ R\$1 Bilhão; 2≡ R\$2 Bilhões; 3≡ R\$3 Bilhões.

Meses											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A=1	A=2	C=1	B=3	A=2	B=1	C=1	C=2	A=2	B=2	C=2	A=1

Os auditores ficaram com a seguinte relação de filiais que deram lucros nos 12 meses:

Empresa/ lucro R$	1	2	3	TOTAL
A	2	3	0	5
B	1	1	1	3
C	2	2	0	4
TOTAL	5	6	1	12

Então a empresa deseja saber:

(a) Qual a probabilidade da filial A ser a filial responsável por lucro num mês?

(b) Qual a probabilidade de num mês a filial A ser responsável por lucro ou a matriz ter um lucro de R$1 bilhão?

Solução:
(a) A filial A obteve uma freqüência total 5 de vezes sendo a responsável pelo maior lucro dentre 12 observações. Logo,

$$P(A) = \frac{5}{12} = 0,4166$$

ou 41,66% de chances de um determinado mês ter como filial mais lucrativa a empresa A.
(b) Nesse caso, como os eventos não são mutuamente exclusivos, uma vez que (A∩"1") não é nula, deve-se utilizar a fórmula para união de dois eventos quaisquer.

$$P(A \cup "1") = P(A) + P("1") - P(A \cap "1")$$

Observando as parcelas,

$$P(A) = \frac{5}{12} = 0,4166$$

$$P("1") = \frac{5}{12} = 0,4166$$

$$P(A \cap "1") = \frac{2}{12} = 0,1666$$

Deve-se perceber que a probabilidade de (A∩"1)" reflete a possibilidade da filial A ser a líder em um mês E seu lucro ser de R$1 bilhão. Essa probabilidade de união seria:

$$P(A \cap "1") = 0,4166 + 0,4166 - 0,1666 = 0,6666$$ ou **66,66%**

1.3 Probabilidade Condicional – Informação Adicional

Toda informação tem seu valor quando se refere ao estudo de probabilidades de certos eventos. Na área de finanças a informação é ainda mais importante, uma vez que lucros e prejuízos de empresas estão relacionados com esta questão. Ter o privilégio do conhecimento prévio em relação ao mercado concorrente sempre faz a diferença na hora de escolher ou executar um negócio. Neste aspecto, trabalhar com probabilidade, uma vez que se conhece informação adicional, faz com que a imprevisibilidade prevista no cálculo de probabilidade se torne menor.

Este é caso onde se conhece a probabilidade de um certo evento passado, ou do mesmo evento analisado num passado recente, e se deseja estudar as chances do evento no futuro ou no presente. Essa probabilidade recebe o nome de probabilidade condicional. Eis a definição:

DEFINIÇÃO
A probabilidade condicional de um evento A dado que se conhece um evento B, é igual a probabilidade da ocorrência conjunta de A e B, dividida pela probabilidade da ocorrência do evento B.

Em termos matemáticos, a fórmula é:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemplo

Considere 250 empresas avaliadas por uma firma de consultoria sobre a capacidade de endividamento. Separa-se então as empresas em endividadas e não endividadas. Estas empresas representam basicamente dois setores, setor de *papel e celulose* e setor de *energia*. Uma tabela representa esse estudo.

Situação / Empresa	Endividada	Não Endividada	**Total**
Papel e Celulose	40	60	100
Energia	70	80	150
Total	110	140	**250**

Os consultores desejam saber o seguinte:

(1) Se uma empresa for selecionada ao acaso, qual a probabilidade dela ser um empresa endividada?

(2) Sabendo-se que a empresa é do setor de papel e celulose, que chances tem de uma vez escolhida, essa empresa esteja endividada?

(1) Para a primeira parte, supõe-se que o consultor escolheu a empresa desprovido de qualquer informação. Neste caso,

$$\boxed{P(\text{Endiv}) = \frac{\text{total}(\text{endividada})}{\text{total}(\text{empresas})} = \frac{110}{250} = 0{,}44}$$

Então, ao acaso, sem informação nenhuma, o consultor tem a probabilidade de 44% de escolher uma empresa endividada.

(2) Nesta segunda questão o consultor recebeu a informação de que a empresa é do setor de papel e celulose antecipadamente. Verificando os arquivos, ele pode checar quantas empresas do setor estão endividadas. No caso, são 40 empresas. Então,

$$P(\text{Endiv} \mid \text{Pap.Cel}) = \frac{P(\text{End.} \cap \text{Pap.Cel})}{P(\text{Pap.Cel.})}$$

Primeiro tem que se conhecer as chances de uma empresa estar endividada e ser do ramo de papel e celulose. Percebe-se que são 40 empresas. A probabilidade então de uma empresa desse ramo estar endividada é:

$$P(\text{End.} \cap \text{Pap.Cel.}) = \frac{40}{250}$$

A probabilidade de uma empresa ao acaso ser do ramo de papel e celulose será:

$$P(\text{Pap.Cel.}) = \frac{100}{250}$$

Assim a resposta final será

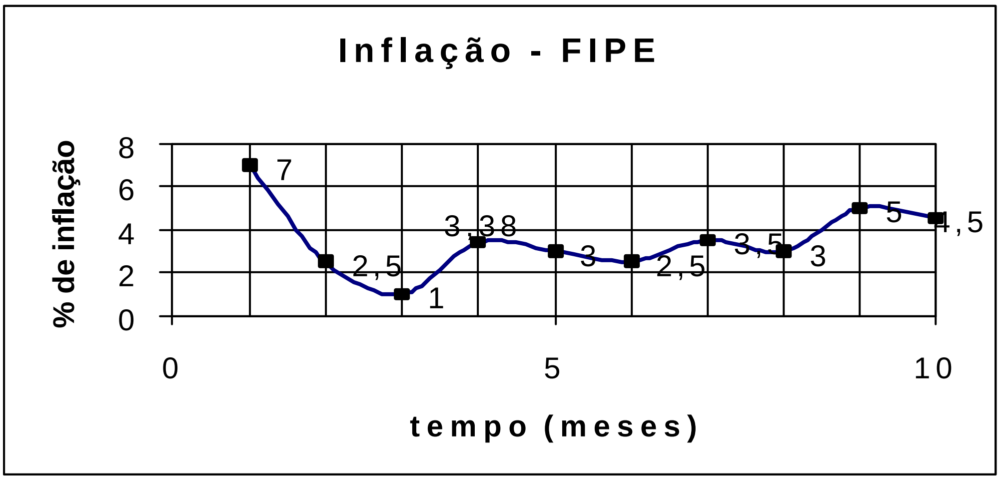
$$P(\text{Endiv} \mid \text{Pap.Cel}) = \frac{\dfrac{40}{250}}{\dfrac{100}{250}} = 0{,}40$$

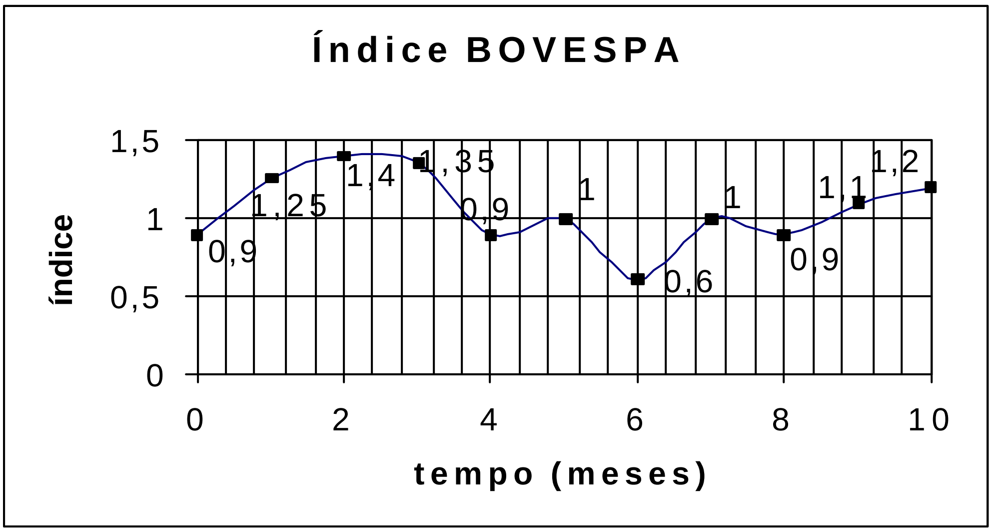
Interpretação: A informação de que a empresa era do setor de papel e celulose aumento a certeza sobre o evento em 4%. Sem a informação o consultor estabelecera a chance de investigar uma empresa endividada em 44%. Com a informação adicional, ele estabelece a probabilidade de 40% de endividamento nas empresas auditadas.

Exemplo

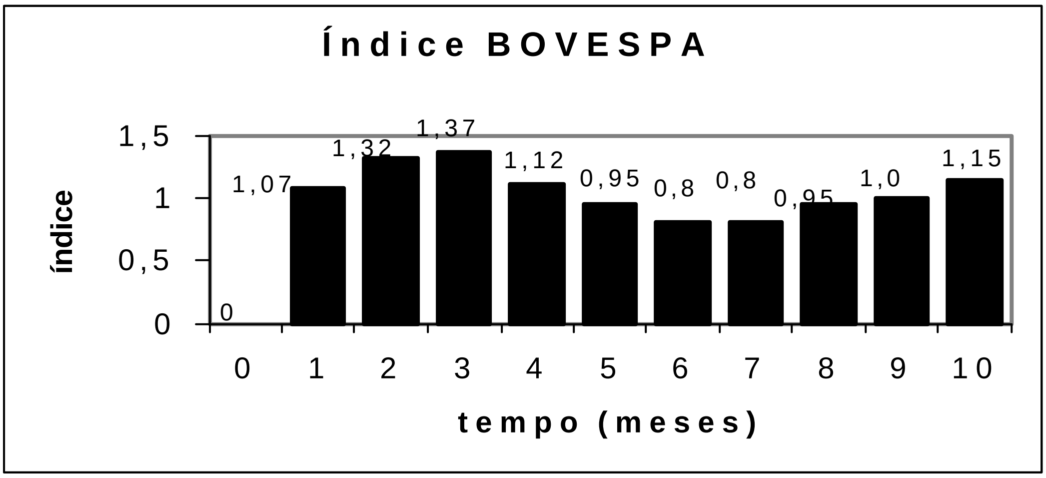
<u>*Estimativa de Investimento Financeiro*</u>

Os gráficos abaixo mostram o desempenho, durante 10 meses, da inflação FIPE e da BOVESPA.





A inflação é uma medida mensal, ou semanal as vezes, enquanto o índice da bolsa de valores é diário ou até horário. Neste caso, apenas como exemplo ilustrativo, para efeito de comparação com a inflação, o ideal é tomar o valor médio mensal da Bovespa. Assim, os valores mensais médios da bovespa serão fornecidos pelo seguinte gráfico:



Estuda-se esse problema adotando uma abordagem para o número de altas da inflação e para o número de altas da bolsa de valores. Então, sendo

x : número de altas da inflação de um período para outro.

y: número de altas na bolsa de valores de um período para outro.

Vamos considerar como eventos a queda da inflação paralela a queda da bolsa de valores. De um mês para o outro pode-se criar a seguinte tabela:

Mês	*Inflação*	*Bolsa de Valores*
1 – 2	Queda	Subida
2 – 3	Queda	Subida
3 – 4	Subida	Queda
4 – 5	Queda	Queda
5 – 6	Queda	Queda
6 – 7	Subida	Estável
7 – 8	Queda	Subida
8 – 9	Subida	Subida
9 – 10	Queda	Subida

Analisando então as quedas e subidas conjuntas tem-se a seguinte tabela final:

Bolsa \ Inflação	Queda	Subida	**Total**
Queda	3	1	4
Subida	4	1	5
Total	7	2	**9**

Então pergunta-se:
(a) Qual a probabilidade da Bolsa subir num mês/
(b) Dado que a inflação caiu, que chances tem do índice Bovespa subir?

(a)
Neste caso é um cálculo simples de probabilidades baseado na tabela anterior, ou seja,

$$P(B.subir) = \frac{5}{9} = 0{,}55 \text{ ou } 55\%$$

(b) Adicionou-se agora mais uma informação que deve ser levada em conta no cálculo de probabilidade. Assim

$$P(B.subir \mid I.caiu) = \frac{P(B.subir \cap Icair)}{P(I.cair)} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{7}{9}} = \frac{4}{7} = 0{,}57 \text{ ou } 57\%$$

Deve-se reparar que a certeza aumentou em relação ao evento subida da bolsa, o que fez o número anterior ser revisto de 55% para 57%.

1.4 Distribuições de Probabilidade

Além das regras e teoremas dos fundamentos das probabilidades, estatísticos perceberam que essas probabilidades apresentam algum padrão em comum, dependendo do problema tratado. As probabilidades se distribuem conforme regras baseadas em equações.

i-Binomial

Seja ε um experimento aleatório e seja A um evento associado a ε. Admitindo que $P(A) = p$ e $P(\overline{A}) = 1 - p$ seja o complemento, consideremos n repetições independentes de ε. Seja x: n$^{\underline{o}}$ de vezes que A tenha ocorrido, denomina-se x, v.a. Binomial com valores n e p para possíveis valores 0,1,2,..., n e diremos que x terá distribuição binomial se:

$$\boxed{P(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \qquad \text{onde } k=0,1,2,...,n$$

Notação: x ~ b(n,p)

Exemplo 4

Suponha $x \sim b(3,0.2)$

$$P(x=0) = \binom{3}{0}(0.2)^0(1-0.2)^3 = 0.512$$

$$P(x=1) = \binom{3}{1}(0.2)(1-0.2)^2 = 0.384$$

$$P(x=2) = \binom{3}{2}(0.2)^2(1-0.2)^1 = 0.096$$

$$P(x=3) = \binom{3}{3}(0.2)^3(1-0.2)^0 = 0.008$$

ii-Poisson

Seja x uma v.a assumindo valores 0,1,2,...n. Diremos que x tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda>0$ se:

$$\boxed{P(x=k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}}$$

com $\lambda = n \times p$ sendo a média da distribuição de Poisson.

Obs: Sempre que se realizam repetições independentes de um experimento e estivermos interessados somente em dicotomia, estaremos tratando de um espaço amostral no qual podemos definir uma v.a. binomial.

iii-Geométrica

Suponhamos a realização de um experimento ε e que estejamos interessados na ocorrência ou não de algum evento A. Suponhamos também cada realização independente. Repete-se o experimento até a ocorrência de A pela primeira vez { afastamento da distribuição binomial, pois lá o número de repetições era pré determinado }.

Seja x: { nº de repetições até obter a primeira ocorrência de A, inclusive}. Logo,

$$\boxed{P(x=k) = (1-p)^{k-1}.p} \qquad k = 1,2,3,...$$

A distribuição de probabilidade dessa v.a. recebe o nome de distribuição geométrica.

Exemplo 5

Se a probabilidade de fluxo de caixa é "+" com 0.4 para um mês, qual será a probabilidade de que menos de 5 meses com fluxo de caixa "-"ocorram antes do primeiro positivo?

Solução

x = { número de fluxo de caixa "-" antes do primeiro "+" }

x ~ G(0.4)

$$P(x<5)=1-P(x\geq 5)=1-\sum_{k=5}^{\infty}(0.4)(0.6)^k=1-0.4\left(\frac{0.6^5}{1-0.6}\right)=0.9222$$

Deve-se observar que nesse caso se utilizou a regra de soma infinita de progressão geométrica (PG).

iv-Pascal {generalização da distribuição geométrica}

Suponhamos que um particular experimento seja continuado até que um evento A ocorra na n-ésima vez.

$$P(A)=p\,;\ P(\overline{A})=1-p=q$$

Define-se a variável aleatória y = { número de repetições necessárias a fim de que A ocorra exatamente r vezes }.

$$\boxed{P(y=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r.q^{k-r}}\qquad k=r,\ r+1,\ \ldots$$

v-Hipergeométrica

Suponhamos agora que tenhamos um lote de N peças, das quais r são defeituosas. Suponha que escolheremos n peças ao acaso (n<N) sem reposição. Seja x o número de peças defeituosas encontradas. Desde que { x = k } se e somente se obtivermos exatamente k peças defeituosas e n-k boas,

$$\boxed{P(x=k)=\frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}}\qquad k=0,1,2,3,\ldots,n$$

denomina-se essa distribuição de hipergeométrica.

1.5 Distribuição Acumulada

Def. Seja x uma v.a. discreta, define-se F como a função distribuição acumulada da variável aleatória X que representa um evento se:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_j)$$

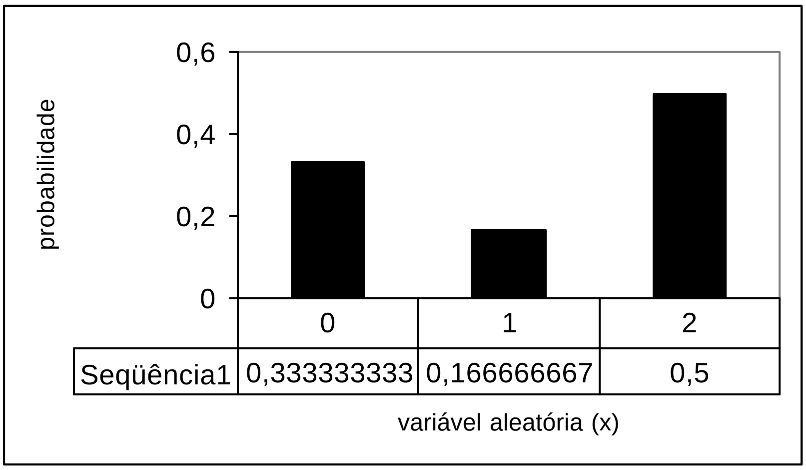
Exemplo

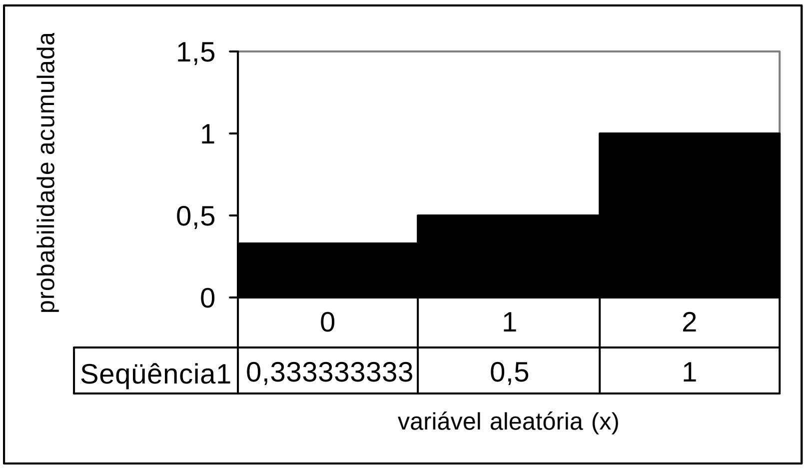
Seja X uma v.a. discreta com distribuição dada por:

x_i	0	1	2
$p(x_i)$	1/3	1/6	1/2

Então a função distribuição acumulada será:

$$x < 0 \Rightarrow F(x) = 0$$
$$0 \le x < 1 \Rightarrow F(x) = 1/3$$
$$1 \le x < 2 \Rightarrow F(x) = 1/3 + 1/6 = 1/2$$
$$x \ge 2 \Rightarrow F(x) = 1$$





1.6 Distribuição Normal

Existem diversas distribuições de probabilidade, cada qual com sua hipótese ideal para uma boa utilização e previsão de resultados dos modelos. As vezes duas ou três distribuições poderão servir e ajudar o pesquisador na previsão de eventos aleatórios. No entanto, estas distribuições e densidades apresentadas são todas conhecidas como parte de modelos quantitativos. Esses modelos probabilísticos partem do pressuposto básico de que o tamanho da amostragem da população é adequado ao estudo dos eventos à eles associados. No entanto, para pequenas amostras, elas não são válidas e o pesquisador deverá realizar seus estudos através de modelos estatísticos conhecidos como modelos não paramétricos.

Principal modelo de representação estatística, a modelagem gaussiana ou normal baseia-se na curva de Gauss. Uma variável aleatória *x*, assumindo valores $-\infty \leq x \leq \infty$ têm distribuição normal ou gaussiana se sua densidade de probabilidade for:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(dp)}} e^{\frac{-(x-media)^2}{2(dp)^2}}$$

onde *dp* é o desvio padrão.

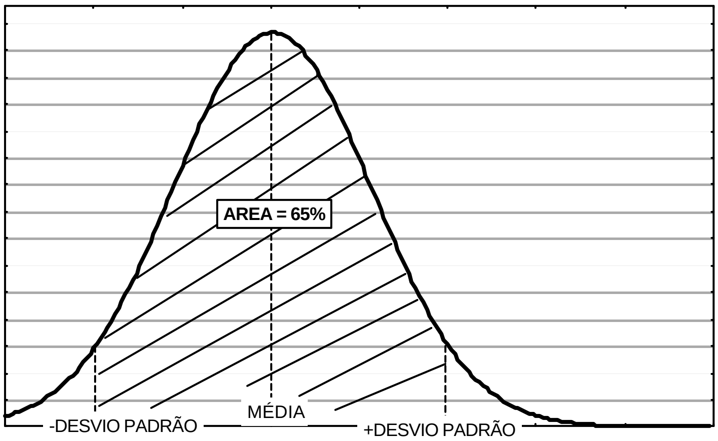


Figura 2.1: Densidade de Probabilidade Normal

O que faz desse modelo de probabilidades ser o mais importante? O teorema a seguir é a garantia da utilidade desse modelo para um grade conjunto de dados.

<u>Teorema do limite Central</u>

Sendo x_1 , x_2 , ... , x_n uma seqüência de variáveis aleatórias então, quando o número de dados amostrados tende a ser superior a 30, sendo estes dados amostrados de maneira independente, pode-se afirmar que o valor da variável

$$z = \frac{x - media}{dp}$$

tem uma distribuição normal. Diz-se que z é na verdade uma normalização da seqüência de dados da variável x. Essa distribuição está em tabelas com média zero e variância 1 e auxiliam no estudo de eventos aleatórios associados à variação dos parâmetros abordados.

1.7 Intervalo de Confiança

Criar cenários ou projeções em controladoria é uma segurança para administração ter uma visão global do funcionamento de uma empresa. No entanto, sem a utilização de estatística de variações ou incertezas, esses cenários devem sofrer exaustivas mudanças e revisões para se adequar à realidade do mercado.

Os modelos de orçamento podem ser *determinístico* ou *probabilístico*. O modelo determinístico é aquele onde a previsão tem suficiente grau de certeza. Modelos probabilísticos são aqueles onde existem incertezas na previsão do orçamento em grau elevado e com grandes flutuações.

Os cenários probabilísticos são interessantes pois podem produzirem com a confiança desejada, os limites de otimismo e pessimismo. O pessimismo não necessariamente significa prejuízo, mas sim por exemplo, um valor esperado de ganho menor que a média. Já o otimismo pode ser da mesma forma tanto um ganho acima da média, como um prejuízo menor.

Como exemplo, vamos examinar um típico orçamento de matérias primas. O quadro a seguir é um quadro típico de orçamento onde as quantidade são assumidas como determinísitcas para a previsão futura. Pode-se perceber que a quantidade a iniciar de consumo de matéria prima altera-se bastante de um mês para outro. É claro que os valores passados devem fazer parte do planejamento e nesse ponto eles são determinísticos pois são passados. A previsão de consumo futuro é que deve ser alterada e além do valor médio dos meses anteriores, o desvio padrão positivo e negativo devem ser utilizados para a criação dos cenários.

	Orçamento de Matérias Primas		
	Consumo por unidade	**Janeiro**	**Fevereiro**
PRODUTO: TIPO1			
1 Quantidade a iniciar		**9.102**	**9.681**
Matérias Primas a consumir			
2 Papel	**0,4**	3.641	3.872
3 Plástico	**0,02**	182	194
PRODUTO: TIPO2			
4 Quantidade a iniciar		**13.250**	**15.180**
Matérias Primas a consumir			
5 Papel	**0,15**	1.988	2.277
6 Resina	**2**	26.500	30.360
RESUMO DE MATÉRIAS PRIMAS A CONSUMIR			
7 Papel (ton)		5.629	6.149
8 Plástico (Kg)0000		182	194
9 Resina (peça)		26.500	30.360

Incertezas para projeção futura.

Uma outra abordagem é ao invés da média dos meses anteriores, tomar a média dos mesmos meses de anos anteriores. Com isso o fator sazonalidade fica automaticamente incluído na planejamento.

	Orçamento de Matérias Primas				OTIMISTA	PESSIMISTA
		Consumo por unidade	Janeiro	Fevereiro	Março	Março
	PRODUTO: TIPO1					
1	Quantidade a iniciar		**9.102**	**9.681**	**9700**	**10.300**
	Matérias Primas a consumir					
2	Papel	**0,4**	3.641	3.872		
3	Plástico	**0,02**	182	194		
	PRODUTO: TIPO2					
4	Quantidade a iniciar		**13.250**	**15.180**	**17.500**	**22.500**
	Matérias Primas a consumir					
5	Papel	**0,15**	1.988	2.277		
6	Resina	**2**	26.500	30.360		
	RESUMO DE MATÉRIAS PRIMAS A CONSUMIR					
7	Papel (ton)		5.629	6.149		
8	Plástico (Kg)0000		182	194		
9	Resina (peça)		26.500	30.360		

Média ± Desvio Padrão – Confiança de 68%

O Quadro do exemplo anterior supõe que normalmente no mês de março a quantidade a iniciar do produto TIPO-1 tem como média 10.000 produtos com uma flutuação de 300. Para o produto TIPO-2 20.000 com flutuação positiva ou negativa de 2.500. Em termos estatísticos,

TIPO 1

Média = 10.000

Desvio Padrão = 300

TIPO 2

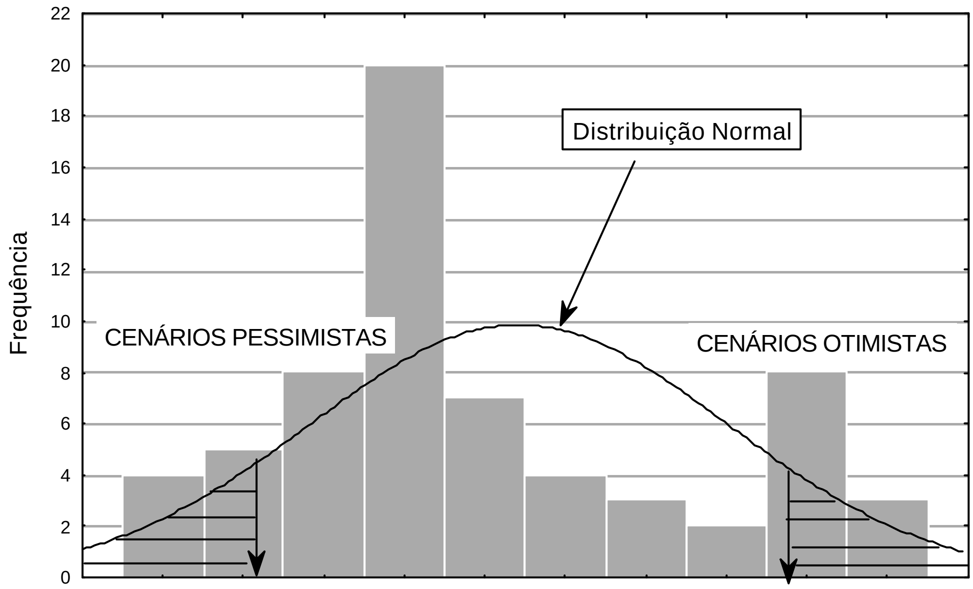
Média = 20.000

Desvio padrão = 2.500

Então o Cenário otimista passa a possuir como valor inicial 10.000-300 e o cenário pessimista 10.000+300. Da mesma forma para o produto 2 o cenário otimista seria 20.000-2500 e o pessimista 20.000+2500. O cenário é otimista para (média – desvio) pois quanto menor a quantidade a produzir, maior o lucro. Isso devido a quantidade em estoque ser bem estimada para o consumo do mês. O problema que esse cenário tem uma confiança baixa de apenas 68%. Isso corresponde a área em baixo da curva normal de probabilidades. Se quisermos mais confiança deve-se trabalhar com dois desvios padrões para cima e para baixo da média, ou seja,

Média ± 2 x Desvio Padrão .... Confiança de 95% nas previsões

Média ± 3 x Desvio Padrão..............................Confiança de 99% nas previsões



O gráfico da figura anterior apresenta como cenário *pessimista* a área da curva normal atrás da média e como *otimista* a área da curva normal acima da média. Essa ilustração pode ser invertida, dependendo do contexto do que se entende por otimista e pessimista.

TÓPICO 2
Tipos de Decisão – Aspecto Prático

2.1 Introdução

O Cálculo de Probabilidades é um ferramental matemático que se presta ao estudo de fenômenos aleatórios ou probabilísticos. A estatística em si apresenta não somente metodologias de medidas de informação, como auxilia na projeção de resultados de eventos com risco mínimo em tomadas de decisão. No entanto, para que esse risco na realidade corresponda a teoria estatística, é necessário que todas as premissas básicas sejam atendidas. Entre essas premissas se destaca como principal, o tipo de coleta de dados e a quantidade de dados amostrados. Em linguagem mais atual, tudo sobre previsão só se prestará como ferramenta importante, se uma empresa possuir um banco de dados perfeitamente correlacionado aos fatos e fluxos de informações das empresas.

Um importante fator na tomada de decisão empresarial se refere ao fato sobre o preço a ser dado para um determinado ativo, após decorrentes algum período de tempo. Em outras palavras, o que se busca é uma quantificação sobre a depreciação existente de um ativo.

Nesse aspecto, com o grande volume de operações financeiras realizadas nos dias atuais, graças aos computadores e operações em *web* tais como *e-business* e *e-commerce,* a estatística tradicional perde totalmente sua importância, se desvinculada de técnicas e operações computacionais.

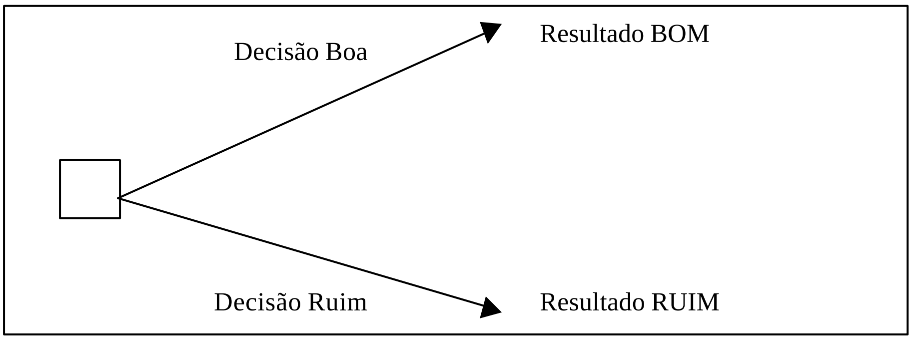
O quanto se paga por uma informação em tempo real (*on line*)? Por que se paga por uma informação em tempo real? Como será possível verificar nesse tópico, quanto menores os tempos de aquisição de uma informação, bem como, quanto maiores os volumes dessas informações, maiores serão as chances de realização de negócios lucrativos com ótimas tomadas de decisões.

2.2 Tomada de Decisão

Todas as pessoas tomam decisões diariamente e de diversas maneiras. Algumas decisões são calculadas, outras são mais irracionais, outras aleatórias. O fato de tomar decisão não significa que de alguma maneira, tomou-se a decisão correta. Decisões sempre tem conseqüências e elas podem ser muito importantes. Problemas de decisões tornam-se cada vez mais difícil se eles são complexos, no sentido de envolver muitas variáveis, ou se requererem múltiplas decisões sucessivas sendo que cada decisão possivelmente tem mais de um resultado. Um problema de tomada de decisão pode ser composto de decisão com certeza e decisão com incertezas nas variáveis que o definem. Numa decisão com certeza, quando se escolhe a alternativa a ser tomada, já se sabe de antemão se o resultado final é bom ou não. Um exemplo de decisão com certeza é quando recebe um prêmio. Por exemplo, se alguém lhe oferece como um prêmio um automóvel e você recusa, certamente você saberá que essa decisão não foi tão boa. No entanto se recusa em troca do valor do carro em dinheiro (supondo que lhe pagarão o valor de mercado do automóvel) certamente será uma boa decisão (desde que não deseje gastar dinheiro com gasolina, mecânico, etc).

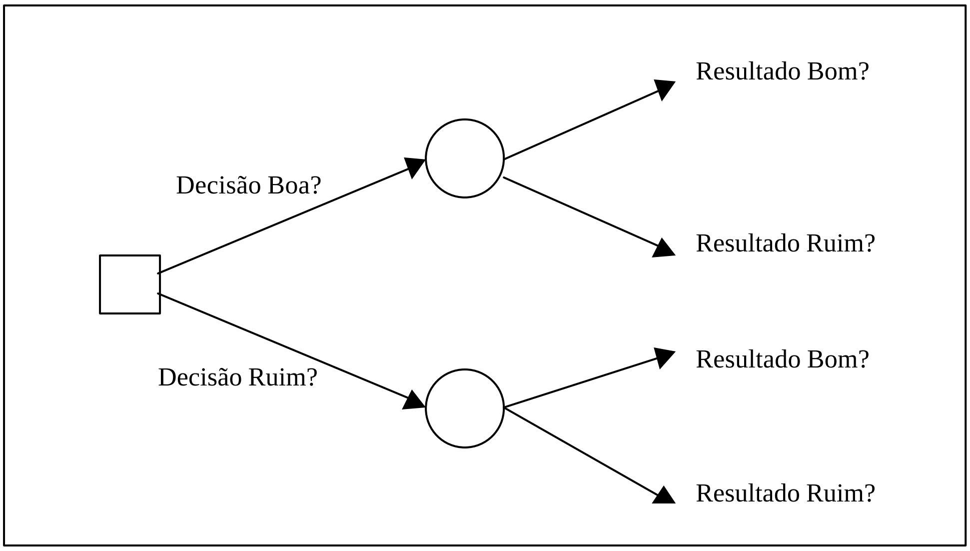
Mas na vida, no dia a dia, dificilmente nos encontraremos a tomar decisões com certeza. O mais comum é sempre depois de uma decisão nos perguntar se ela foi boa ou não.

DECISÃO COM CERTEZA



Esse tipo de tomada de decisão onde a pergunta final é se ela foi acertada ou não, consiste na tomada de decisão com incertezas. Na presença de incertezas sobre o resultado final, o decisor é de fato, forçado a se portar diante de um jogo. No caso de investidores, ou gestores de grandes firmas, sempre estarão diante desse cenário, seja para compra de ações, aplicações de recursos orçamentários, aquisições de imóveis ou mesmo parcerias para aumentar o poder de domínio do mercado.

DECISÃO COM INCERTEZA



Os gráficos anteriores são representado por quadrados e círculos os quais indicam:

Nó de Decisão

Nó de Aleatoriedade

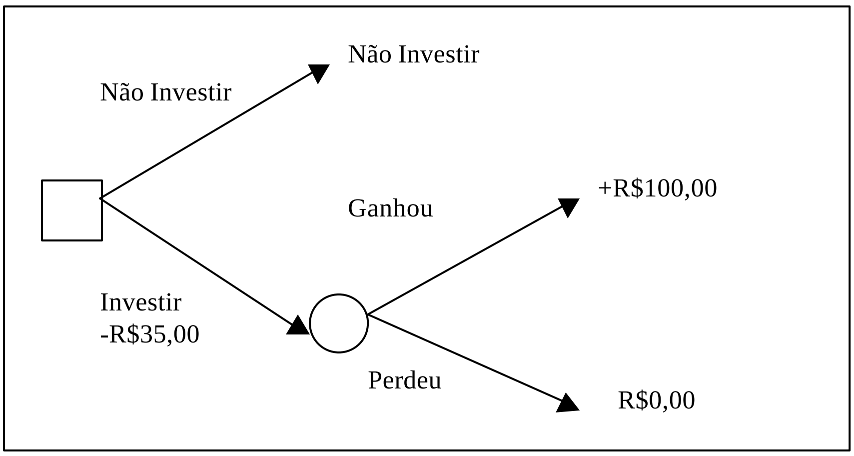
O leitor pode supor o seguinte exemplo: Você tem a oportunidade de ganhar R$100,00 se você acertar se a face de um dado é par ou ímpar. No entanto, essa oportunidade não é gratuita. Para jogar você deve pagar R$35,00. Há somente uma chance para investir. Você aceitaria?

<u>Como Avaliar essa Oportunidade?</u>

As típicas respostas são:

- Eu posso perder R$35,00, está barato esse jogo.
- Eu poderia ganhar R$100,00 e eu tenho muita sorte.
- Eu jogaria uma moeda para decidir.
- Eu preciso perguntar para a esposa.
- Eu não aposto em jogos.
- Minha taxa de retorno é .....

A decisão a ser tomada é investir ou não investir R$35,00 na *oportunidade* de receber R$100,00 ou R$0,00 dependendo do resultado do dado. A árvore de decisão será:



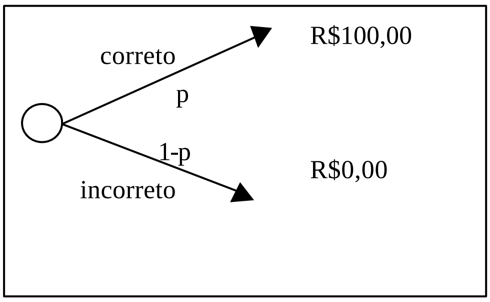
O que mais seria necessário para avaliar essa *oportunidade*?

A árvore de probabilidades ajuda a tomar a decisão para bons e maus resultados. A árvore incorpora um julgamento ao decisor sobre a probabilidade de sucesso e de sua chance complementar, que nesse caso significa a perda de investimento.

Que tipos de informações ajudariam ao decisor?

- O número de lados do dado.
- Conhecer a freqüência dos resultados do dado para ver sua honestidade.
- Quem jogará o dado?

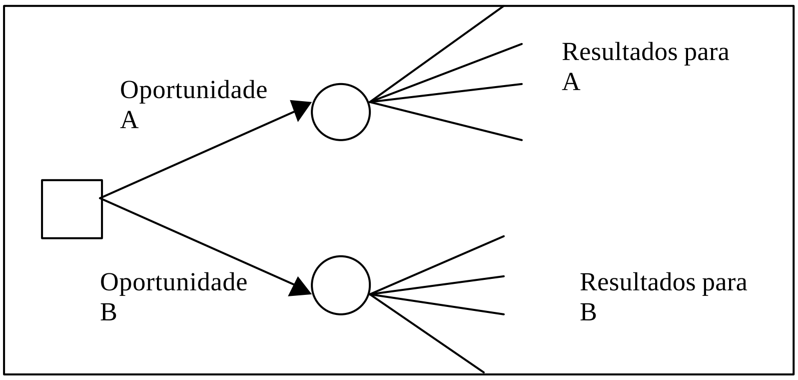
O ramo de aleatoriedade seria:



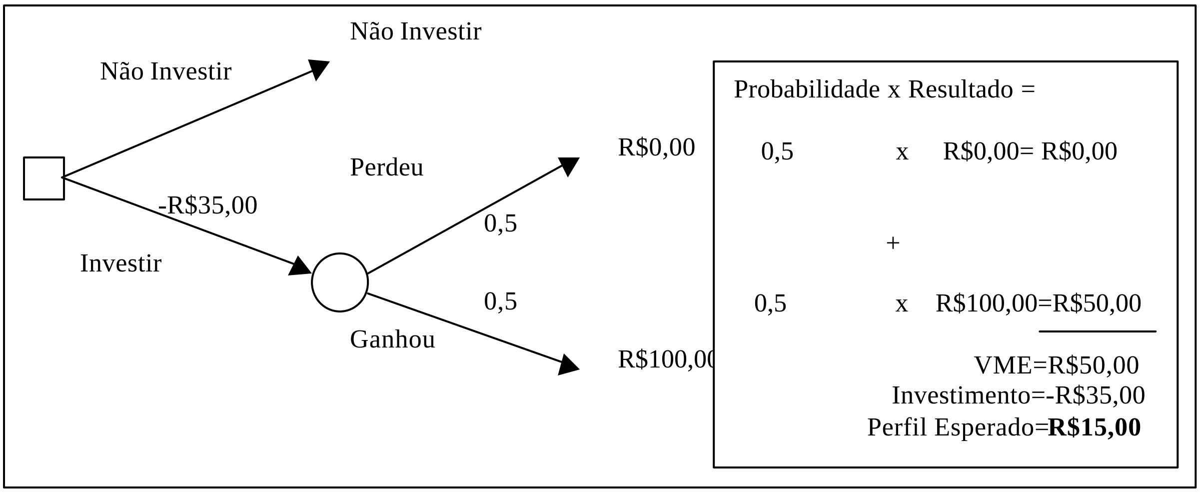
Existe uma importante distinção existente entre *oportunidade* e *resultados*.

Oportunidade é a soma dos possíveis *resultados*.

Isto é importante pois, nós podemos escolher somente oportunidades – não seus resultados!



Uma maneira de avaliar as decisões é quantificando-as através do ***valor monetário esperado*** (VME). O VME é a média dos resultados favoráveis e desfavoráveis ponderados pelas probabilidades. Para o exemplo do investidor que jogará o dado, a árvore de decisão seria a seguinte, adotando-se um dado com 6 faces:



Assim, neste caso, há uma boa chance de, jogando-se este jogo proposto o investidor receba como lucro o valor de R$15,00. O importante nesse caso, é perceber que existir uma chance de lucro não significa lucro! Existe uma probabilidade de, se puder jogar muitas vezes, o investidor receba em média por jogo um valor de R$15,00. A informação foi fundamental, pois por exemplo, sem saber se o dado tem 6 faces ou não, é impossível calcular as probabilidades, e o investidor estará jogando "às cegas". As probabilidades foram calculadas como:

$$p = \frac{3\,\text{pares}}{6\,\text{faces}} = 0{,}5$$

$$1 - p = 0{,}5$$

2.3 O Valor da Informação

Uma vez conhecendo-se a árvore de decisão é possível simular cenários para os eventos e analisar o que, por exemplo, uma mudança de parâmetros ocasionaria. Para tanto é necessário a aquisição de dados aleatórios ou de tabelas (em desuso) ou programas computacionais (tais como excel for windows, dentre outros).

<u>Teorema de Bayes</u>

O uso da informação como ferramenta para diminuir incertezas futuras é bastante utilizado na teoria da decisão. Essa informação aumenta as previsões sobre as probabilidades dos eventos, ocasionando assim melhor poder de decisão. O teorema de Bayes diz que : " Uma vez conhecida uma informação sobre um evento no passado, a probabilidade desse evento ocorrer no presente é uma ponderação entre as chances de repetição desse evento até o presente pela sua ocorrência no passado". Em termos matemáticos, é a divisão da probabilidade de intersecção entre dois eventos pela probabilidade da ocorrência do evento passado. Em fórmula seria,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

para dois eventos A e B e será

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \times P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B \mid A_i)}$$

para n eventos A_i mutuamente exclusivos.

Vamos observar sua aplicação no seguinte jogo:

<u>**Exemplo**</u>

Suponha que o jogo consiste em jogar uma moeda e observar sua face superior. Ganha primeiro quem tirar "coroa". No entanto, teremos 3 moedas para escolher uma, sendo que destas 2 são honestas e uma das moedas possui duas caras. Uma vez que um jogador jogou uma moeda, qual é a probabilidade de ter saído a moeda honesta se ao jogar se observou "cara" ?

Vamos nomear os seguintes eventos:

A_1={moeda honesta}
A_2={moeda de duas faces}
B={saiu cara}
Então, utilizando Bayes,

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1)\times P(B \mid A_1)}{P(A_1)\times P(B \mid A_1) + P(A_2)\times P(B \mid A_2)}$$

Isto se interpreta assim: dado que saiu o evento B (saiu cara), qual a probabilidade de ter sido na moeda honesta (A_1)?
Para resolver esse problema, basta traduzir o problema para as probabilidades. Então nesse caso,

$$P(A_1)=2/3$$
$$P(A_2)=1/3$$

Essas probabilidades assumem esses valores, uma vez que se tem duas honestas dentre 3 moedas no total e uma desonesta dentre 3 moedas no total. E ainda,

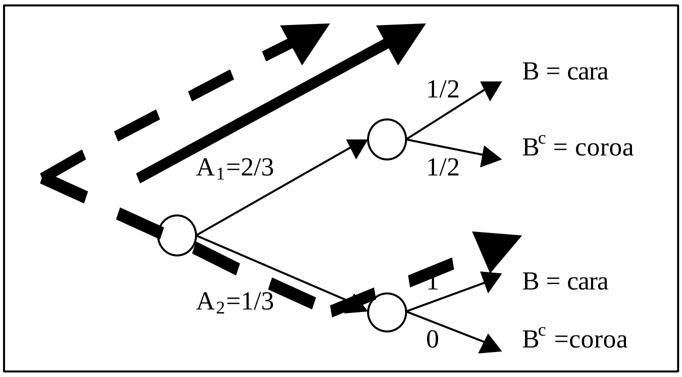
$$P(B|A_1)=1/2$$
$$P(B|A_2)=1$$

Neste caso que a probabilidade de sair cara(B) na moeda honesta é ½ e a probabilidade de sair cara na desonesta é de 100% (A_2). Então substituindo na fórmula será:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{(2/3)\times(1/2)}{(2/3)\times(1/2)+(1/3)\times 1} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Ou seja, mesmo possuindo uma moeda desonesta, a presença de duas honestas fez com que as chances do jogo ser honesto (50% para cada) ficassem corretas!

Uma maneira mais simples de enxergar a teoria da informação e decisão Bayesiana é através da árvore de probabilidade como visto na seção anterior. Assim, no caso do jogo da moeda desonesta, a árvore seria:



Neste caso é só observar que a probabilidade será calculada dividindo o ramo indicado pela flecha contínua (produto das duas probabilidades), pela soma dos ramos indicados pelas flechas tracejadas.

Então o *valor da informação* agora pode ser somado aos valores previamente adquiridos pela estatística, tornando o cálculo de probabilidades para a tomada de decisão mais rico. Uma vez a empresa tendo em mãos dados sobre vendas, compras, patrimônios, ações, dívidas, enfim, qualquer tipo de variável, é possível através da estatística estimar o valor de cada ramo da árvore de decisão.

2.4 O Valor Monetário Esperado e a Volatilidade

Uma tomada de decisão empresarial, envolve sobretudo, oscilações de momento, de período de avaliação, de eventos econômicos, tanto indicando otimismo quanto pessimismo. Então, como saber se a decisão encontrada pela árvore é confiável e segura para avaliações de cenários? A saída é a utilização do *Método de Monte Carlo* que realiza através de repetições, cálculos com os números aleatórios, simulando como se a realidade estivesse alterando instântaneamente os cenários probabilísticos traçados.

Vamos Analisar o seguinte problema:

Aquisição de Empresas

Uma grande empresa deseja fazer uma aquisição de outras três empresas menores {A,B,C}, concorrentes do setor, em situação financeira complicada. A empresa compradora, no entanto, antes de realizar as aquisições, deseja traçar um cenário e avaliar a possibilidade de lucro nos meses após essas aquisições. As três empresas tem o seguinte comportamento:

Empresa A

Deseja lançar dois produtos novos. A empresa acredita que com 80% de chances, o produto A_1 implacará e fornecerá um lucro de R$10,00 por produto e com 20% de chances um prejuízo de R$1,00 por produto. Da mesma forma para o produto A_2 a empresa crê que com 40% de chances ele terá um lucro de R$4,00 por produto e 60% de chances de prejuízo de R$5,00 por produto. Essa empresa está em dúvida qual dos dois produtos ela lançará diante das concorrências do mercado e do setor. Existe por parte da diretoria 60% de chances de lançar o produto A_1 e 40% de chances de lançar A_2.

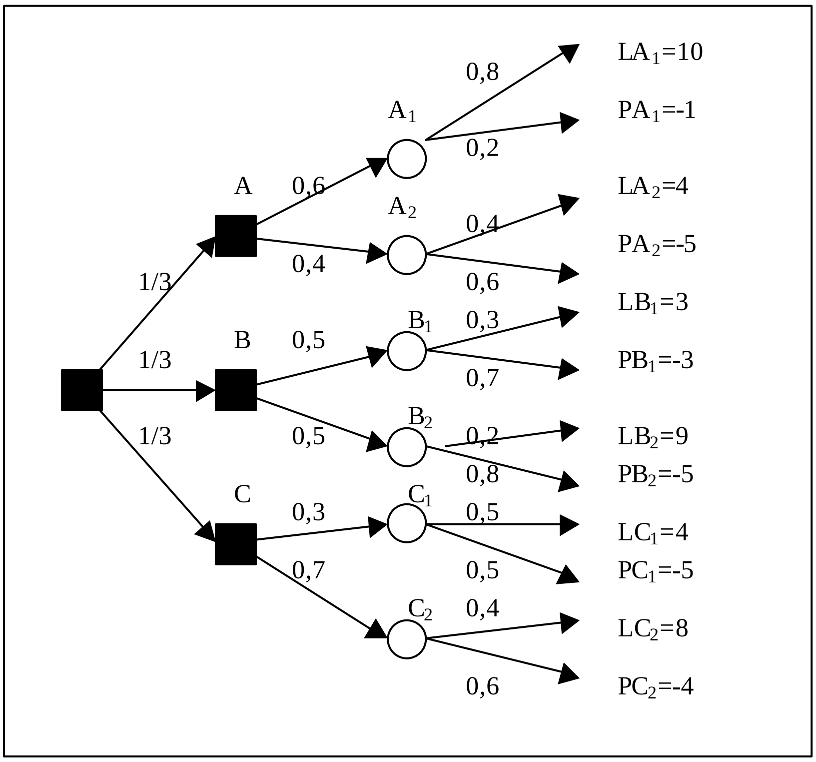
Empresa B

Deseja lançar dois produtos novos. A empresa acredita que com 30% de chances, o produto B_1 implacará e fornecerá um lucro de R$3,00 por produto e com 70% de chances um prejuízo de R$3,00 por produto. Da mesma forma para o produto B_2 a empresa crê que com 20% de chances ele terá um lucro de R$9,00 por produto e 80% de chances de prejuízo de R$5,00 por produto. Essa empresa também está em dúvida sobre qual dos dois produtos ela lançará diante das concorrências do mercado e do setor. Uma sondagem mostrou uma divisão entre os diretores sendo que 50% desejam lançar o produto B_1 e 50% desejam lançar B_2.

Empresa C

Também deseja lançar dois produtos novos. A empresa acredita que com 50% de chances, o produto C_1 fornecerá um lucro de R$4,00 por produto e com 50% de chances um prejuízo de R$5,00 por produto. Da mesma forma para o produto C_2 a empresa crê que com 40% de chances ele terá um lucro de R$8,00 por produto e 60% de chances de prejuízo de R$4,00 por produto. Essa empresa também está em dúvida sobre qual dos dois produtos ela lançará diante das concorrências do mercado e do setor. Uma sondagem mostrou uma divisão entre os diretores sendo que 30% deseja lançar o produto C_1 e 70% de chances de lançar C_2.

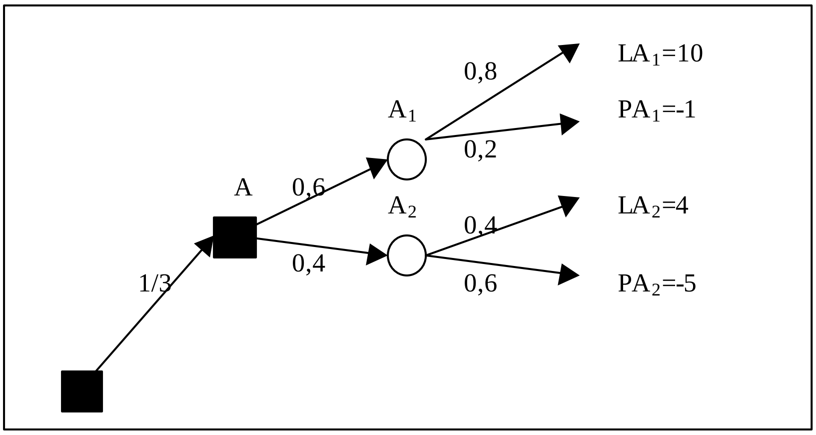
A árvore de decisão desse projeto será:



Vamos supor que a decisão da empresa que irá realizar a aquisição, seja a de primeiro adquirir a empresa com maior valor monetário esperado. Qual empresa deverá primeiro ser adquirida?

A análise através dos ramos fica bastante fácil. Partindo do quadrado representando uma decisão, deve-se multiplicar os valores dos ramos de trás-para-frente pelos respectivos lucros e prejuízos e então somá-los até o nó de decisão.

Valor Monetário Esperado - Empresa A



$$VME(A) = 0{,}6 \times (0{,}8 \times 10 + 0{,}2 \times (-1)) + 0{,}4 \times (0{,}4 \times 4 + 0{,}6 \times (-5)) = R\$4{,}12$$

Com os mesmos tipos de cálculos os valores para as empresas B e C serão:

$$VME(B) = 0{,}5 \times (0{,}3 \times 3 + 0{,}7 \times (-3)) + 0{,}5 \times (0{,}2 \times 9 + 0{,}8 \times (-5)) = -R\$1{,}7$$

$$\text{VME}(C) = 0{,}3 \times \left(0{,}5 \times 4 + 0{,}5 \times (-5)\right) + 0{,}7 \times \left(0{,}4 \times 8 + 0{,}6 \times (-4)\right) = R\$0{,}41$$

Neste caso, a decisão seria primeiro fazer aquisição da empresa A, depois a empresa C e por último a empresa B. No entanto, deve-se levar em conta, que como valores estimados, existe por trás uma volatilidade que deve ser adicionada aos valores esperados. A adição e subtração dessa volatilidade aos valores monetários esperados, cria um intervalo, conhecido como intervalo de confiança para uma estimação estatística. O termo volatilidade é mais conhecido em estatística como variância, cuja extração da raiz quadrada fornecerá o desvio-padrão.

A Volatilidade (desvio-padrão) de Cenários

O Cálculo do desvio-padrão que ajudará a criar o intervalo de confiança é bastante simples. A fórmula é:

$$dp = \pm\sqrt{\text{VME}(x^2) - \text{VME}(x)^2}$$

Para o caso das empresas, primeiro deve-se calcular o valor monetário esperado dos valores quadráticos, ou seja,

$$\text{VME}(A^2) = 0{,}6 \times \left(0{,}8 \times 10^2 + 0{,}2 \times (-1)^2\right) + 0{,}4 \times \left(0{,}4 \times 4^2 + 0{,}6 \times (-5)^2\right) = R\$56{,}68$$
$$\text{VME}(B^2) = 0{,}5 \times \left(0{,}3 \times 3^2 + 0{,}7 \times (-3)^2\right) + 0{,}5 \times \left(0{,}2 \times 9^2 + 0{,}8 \times (-5)^2\right) = R\$22{,}6$$
$$\text{VME}(C^2) = 0{,}3 \times \left(0{,}5 \times 4^2 + 0{,}5 \times (-5)^2\right) + 0{,}7 \times \left(0{,}4 \times 8^2 + 0{,}6 \times (-4)^2\right) = R\$30{,}79$$

Então, por exemplo para 68% de confiança nas estimativas, os desvios padrões dos valores monetários esperados nas empresas serão:

$$dp(A) = \pm\sqrt{\text{VME}(A^2) - \text{VME}(A)^2} = \pm\sqrt{56{,}68 - (4{,}12)^2} = \pm\sqrt{39{,}7} = \pm R\$6{,}3$$
$$dp(B) = \pm\sqrt{\text{VME}(B^2) - \text{VME}(B)^2} = \pm\sqrt{22{,}6 - (1{,}7)^2} = \pm\sqrt{19{,}7} = \pm R\$4{,}4$$
$$dp(C) = \pm\sqrt{\text{VME}(C^2) - \text{VME}(C)^2} = \pm\sqrt{30{,}79 - (0{,}41)^2} = \pm\sqrt{30{,}62} = \pm R\$5{,}5$$

Então os cenários otimistas e pessimistas para as 3 empresas serão:

EMPRESAS	PESSIMISTA	OTIMISTA
A	-R$2,18	R$10,42
B	-R$6,10	R$2,70
C	-R$5,09	R$5,91

Estes intervalos fornecerão estimativas mais seguras para a empresa que deseja fazer aquisição, uma vez que, estatisticamente poderá ocorrer que em algum mês os lucros estimados não sigam as ordens colocadas pelos valores monetários estimados. Ou seja, poderá existir algum mês, onde por exemplo, a empresa B fornecerá menos prejuízo que a empresa A.

2.5 A Função Utilidade

Todo decisor sempre deseja escolher as alternativas que lhe convém sobre o melhor negócio, pautado em algum tipo de medida. Uma função utilidade serve para associar aos prêmios monetários, valores de uma quantidade abstrata chamada utilidade, de modo a convenientemente representar o comportamento real do decisor perante as situações de risco.

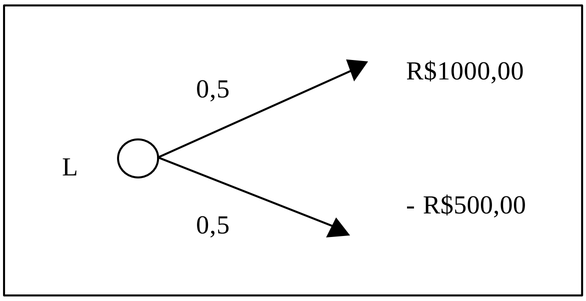
Assim, o que se procura é buscar numa forma matemática, representar o sentimento de risco envolvido pelo decisor na tomada de decisões. Para tanto é necessário antes a determinação do *equivalente certo.*

DEFINIÇÃO
Equivalente certo é o valor monetário cuja troca de oportunidades deixa o decisor indiferente

Uma vez determinado o equivalente certo do decisor, numera-se arbitrariamente a função utilidade como 0 o menor valor monetário e como 1 o maior valor monetário.

Exemplo

Imaginar que uma determinada empresa poderá fazer aquisições de patrimônio que no futuro lhe poderão fornecer lucro ou prejuízo. Assim, suponha-se que essa aquisição tenha probabilidade de 50% de fornecer lucro de R$1.000,00 e 50% de fornecer prejuízo de R$500,00.



Primeiro adota-se como valores da função utilidade

Valor máximo da função utilidade = 1 (R$1.000,00)

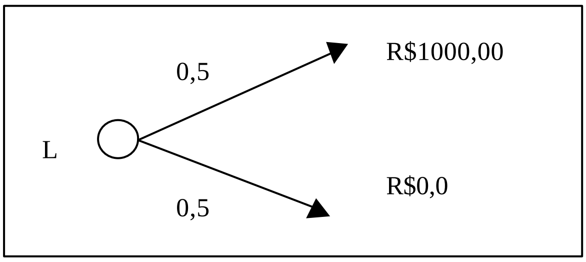
Valor mínimo da função utilidade = 0 (-R$500,00)

Se a empresa decidir que irá fazer aquisição de qualquer maneira, considerando esses números apresentados, então tem-se que o equivalente certo para essa indiferença é zero. Logo, a função utilidade *u(L)=u(0)*. Então

$$u(L) = 0,5 \times u(1000) + 0,5 \times u(-500) = 0,5 \times 1 + 0,5 \times 0 = 0,5$$

Assim, para estas possibilidades o ponto da curva utilidade valeria *u(0)=0,5*.

Suponha agora que seja apresentado o seguinte cenário à empresa:

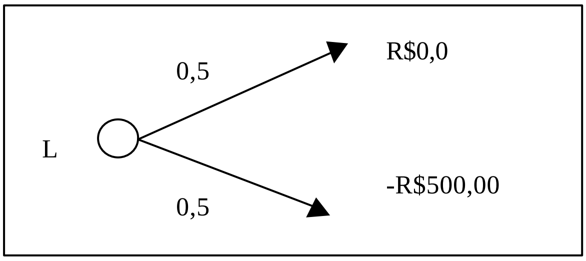


Como neste caso a empresa nunca perde, os diretores decidem que mesmo que somente recebam R$400,00 no fim do período, já estarão satisfeitos. Então o ponto da função utilidade neste caso será:

$$u(L) = u(400) = 0{,}5 \times u(1000) + 0{,}5 \times u(0) = 0{,}5 \times 1 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}75$$

Assim, neste cenário, o valor da função é *u(400)=0,75*.

Por fim, imagine o seguinte cenário apresentado à empresa:



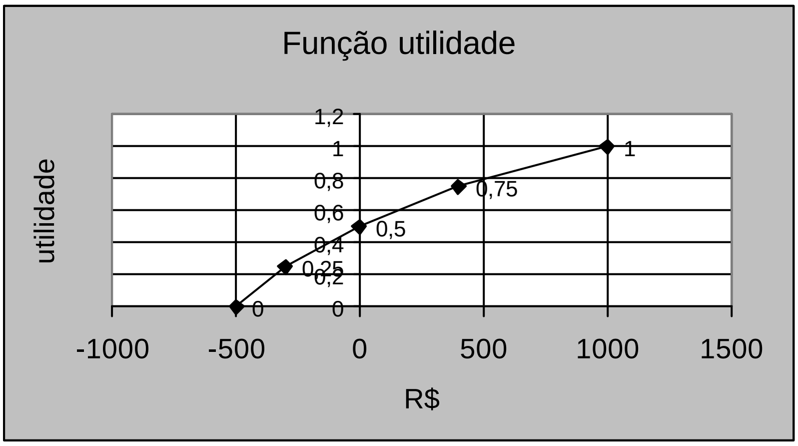
Neste cenário ruim a empresa admite pagar até R$300,00 para não realizar estas aquisições. O novo ponto da curva utilidade será:

$$u(L) = u(-300) = 0{,}5 \times u(0) + 0{,}5 \times u(-500) = 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0 = 0{,}25$$

Portanto, para esta decisão de aquisição a função utilidade que medirá a sensibilidade da empresa em correr riscos tem os seguintes valores:

Valor Monetário	*Valor Utilitário*
R$1.000,00	1
R$400,00	0,75
R$0,00	0,5
-R$300,00	0,25
-R$500,00	0

Quanto mais pontos apresentarmos, melhor definida será a curva. Pode-se inferir que o gráfico da função utilidade dessa empresa terá o seguinte aspecto:



Curvas com esse aspecto, isto é, com concavidade para baixo, indicam aversão ao risco. Concavidade para cima é uma indicação de propensão ao risco, pois para valores monetários cada vez mais altos obter-se-ia utilidades baixas, ou sensibilidades baixas aos riscos. A reta indica neste caso, total indiferença ao risco e é conhecida como utilidade linear.

2.6 Modelos de Função Utilidade

Ficar fornecendo cenários e indagando decisores sobre quanto pagariam para tal cenário é muito subjetivo e pesquisas já comprovaram, que enquanto de fato um decisor não tenha que tomar uma decisão real, seus valores e critérios são bem subestimados quanto a sensibilidade ao risco. Para isso existem modelos de funções utilidades sem a necessidade de experimentos empíricos quanto ao risco.

<u>Função utilidade exponencial</u>

$$u(x) = 1 - e^{-r \times x}$$

onde r é uma função de risco constante r(x) = c.

<u>Função utilidade logarítmica</u>

$$u(x) = \ln(x + a)$$

onde “a” é o capital do agente decisório antes de enfrentar a decisão.

<u>Função utilidade raiz quadrada</u>

$$u(x) = \sqrt{x + a}$$

onde “a” é o capital do decisor antes de tomar uma decisão.

TÓPICO 3
Estratégias de Decisão Financeira
Aquisições ou Vendas

3.1 Introdução

No tópico anterior foi fornecida a base probabilística para o entendimento das estratégias em negócios financeiros. Foi mostrado no tópico a importância da informação refletida e traduzida matematicamente através do teorema de Bayes. Uma vez conhecida a informação, diversos cenários estratégicos podem ser traçados para tomadas de decisão utilizando o conceito da árvore de decisão. A teoria da utilidade foi apresentada como um recurso que de forma admensional tenta traduzir a natureza de espírito de um investidor ou decisor.

Neste tópico, serão apresentadas algumas aplicações práticas sobre o uso de estratégias probabilísticas e como elas poderão ser úteis para um decisor.

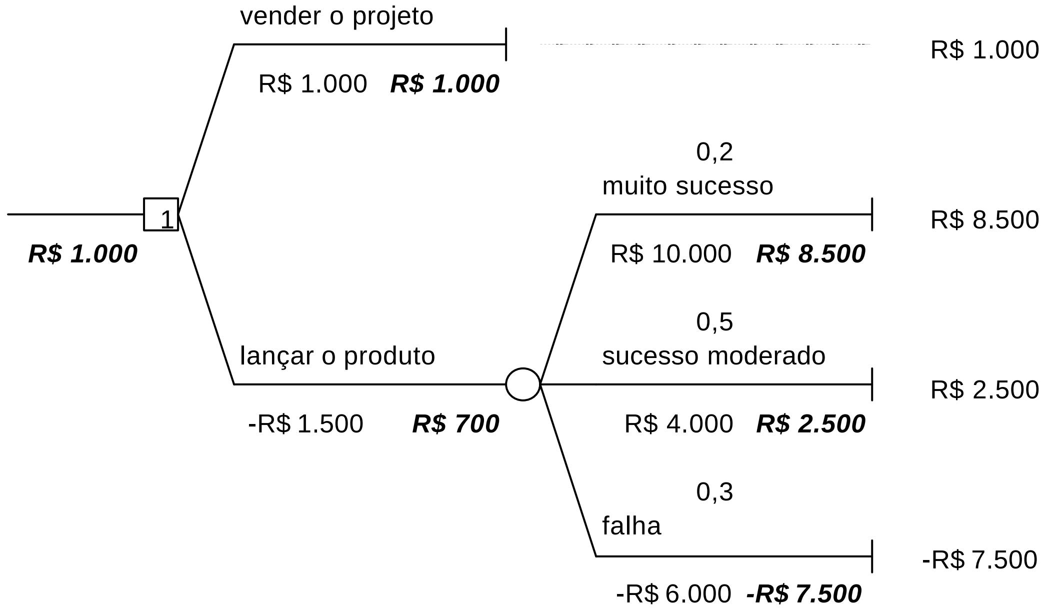
3.2 Primeiro Caso : Lançamento de um Novo Produto

Um novo produto foi desenvolvido por uma empresa. O valor do projeto se for vendido para outras empresas é de R$1.000,00. Para lançar e fazer *marketing* a empresa estima que o produto custará R$1.500,00. O produto poderá ter sucesso, sucesso moderado ou falhar com estimativas financeiras de R$10.000,00, R$4.000,00 e –R$6.000,00 respectivamente. Estes valores excluem o lançamento e *marketing* do produto. Como a empresa está muitos anos no ramo do produto, ela tem as seguintes estimativas para a aceitabilidade do produto:

Resultado	*Aceitabilidade*
Muito sucesso	0,2 (20%)
Sucesso moderado	0,5 (50%)
Falha	0,3 (30%)

A empresa deseja tomar uma decisão: Lançar o produto ou vender o projeto à outra empresa?

O primeiro passo é montar a árvore de decisão com base nos dados fornecidos pela empresa. A árvore terá o seguinte aspecto:



Interpretando a árvore de decisão pode-se ressaltar as duas estratégias possíveis em termos de VME (valor monetário esperado):

Estratégia-1 (não lançar o produto e vender o projeto)

Valor($) (x)	Probabilidade - P(x)	VME – x × P(x)
R$1.000	1	R$1.000

Estratégia-2 (lançar o produto e fazer marketing)

Valor($) (x)	Probabilidade - P(x)	VME – x × P(x)
R$8.500	0,2	R$1.700
R$2.500	0,5	R$1.250
-R$7.500	0,3	-R$2.250
Total		**R$700,00**

Assim, ao se comparar o VME das duas estratégias, percebe-se que a estratégia (1) é mais preferida do que a estratégia (2), uma vez que seu lucro ou VME (R$1.000,00) é maior. Logo, a melhor decisão a ser tomada é a venda do projeto para outra empresa. A caixa no começo da árvore à esquerda como número (1) indica que seria melhor escolher a estratégia (1).

A pesquisa de mercado como eliminação de incertezas

A empresa do problema anterior decide fazer uma pesquisa de opinião pública sobre a aceitabilidade do produto. A empresa estima que o lançamento do produto com essa eliminação de incerteza poderá custar-lhe bem menos do que ir às cegas ao mercado. Assim ela estima um custo de R$500,00 para realizar a pesquisa de opinião. Após a pesquisa de mercado ela obteve a seguinte tabela de aceitabilidade:

Resultado	Aceitabilidade		
	Sem Pesquisa	Pesquisa Favorável	Pesquisa Desfavorável
Muito sucesso	0,2	0,6	0,1
Sucesso moderado	0,5	0,2	0,3
Falha	0,3	0,2	0,6

A árvore de decisão apresentará as estratégias alteradas. Os novos VME para as novas estratégias serão:

Estratégia-1 (não lançar o produto e vender o projeto)

Valor($) (x)	Probabilidade - P(x)	VME – x × P(x)
R$1.000	1	**R$1.000**

Estratégia-2 (lançar o produto e fazer marketing)

Valor($) (x)	Probabilidade - P(x)	VME – x × P(x)
R$8.500	0,2	R$1.700
R$2.500	0,5	R$1.250
-R$7.500	0,3	-R$2.250
Total		**R$700,00**

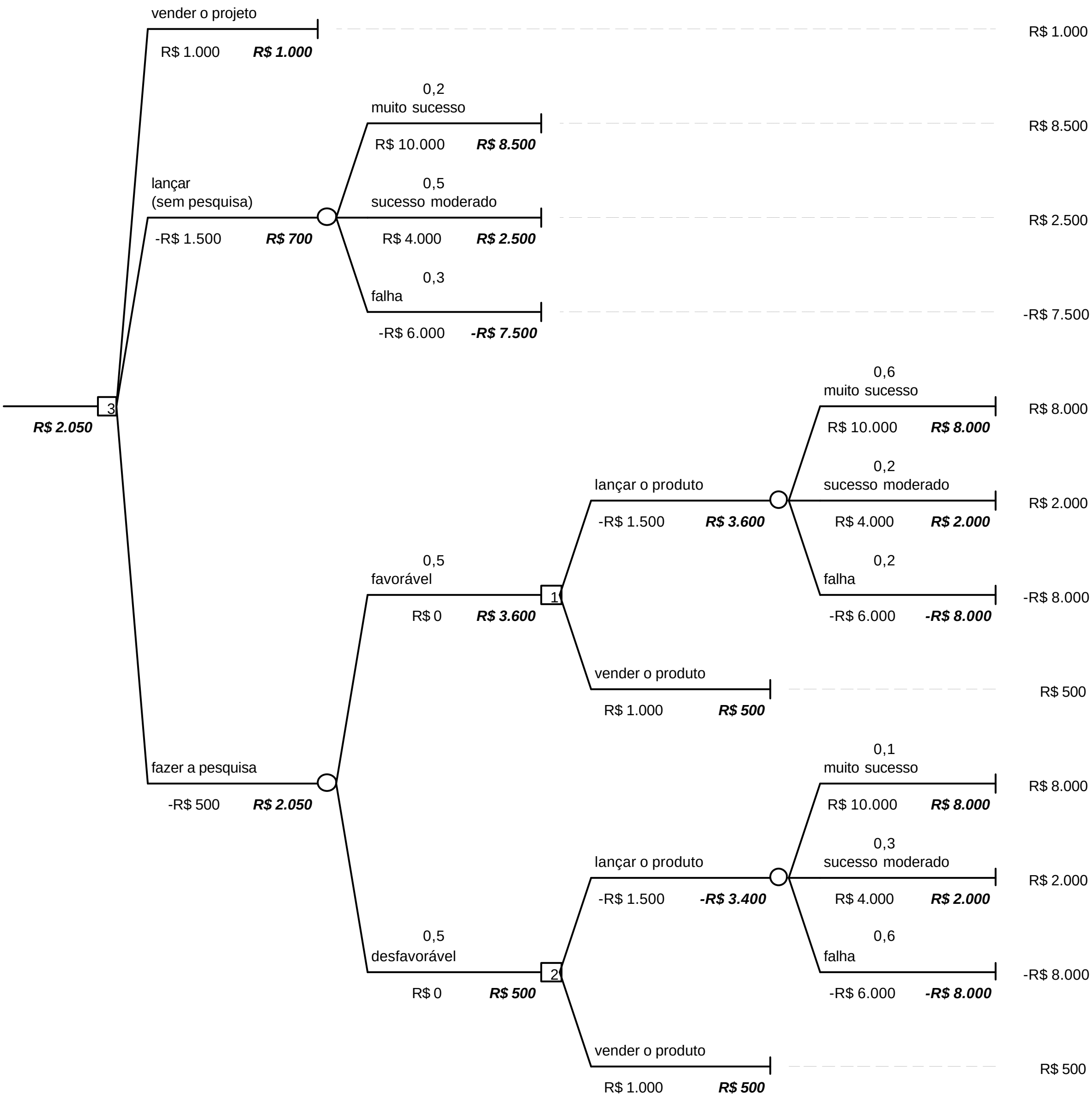
Estratégia-3 (Fazer a pesquisa e se for favorável lançar o produto)

Valor($) (x)	Probabilidade - P(x)	VME – x × P(x)
R$8.000	0,6	R$4.800
R$2.000	0,2	R$400
-R$8.000	0,2	-R$1.600
Total		**R$3.600,00**

Estratégia-4 (Fazer a pesquisa e se for desfavorável vender o projeto)

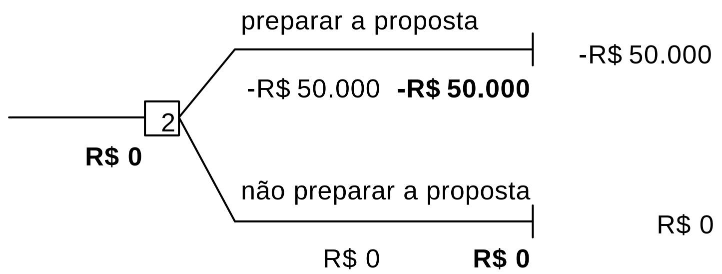
Valor($) (x)	Probabilidade - P(x)	VME – x × P(x)
R$1.000	0,5	**R$500,00**

Logo, a melhor decisão é : *Realizar a pesquisa e se for favorável lançar o produto. Caso contrário vender o produto.*

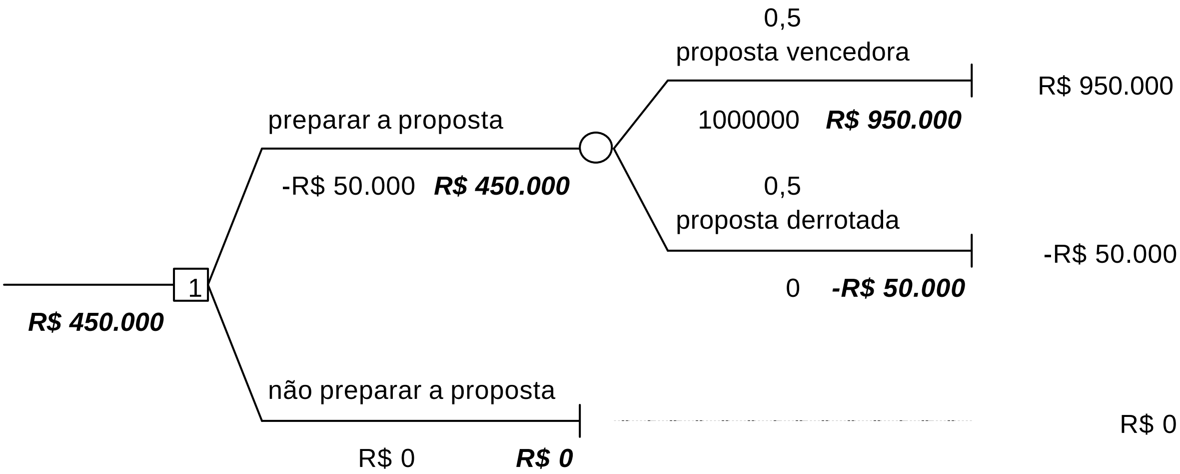


3.3 Segundo Caso: Aquisições de Empresas Estatais

Um processo de aquisição de empresa estatal deve passar por algumas etapas exigidas e necessárias para a confiabilidade da operação. A licitação é uma das etapas e é caracterizada pela formulação de uma proposta que atenda os interesses públicos de venda e privados de compra. Estabelecer esse preço envolve vários aspectos e também tem seu custo de mão de obra para as empresas interessadas. Para a formulação de um proposta viável uma empresa às vezes terá que contratar um corpo jurídico para atender aos pontos de um edital, corpo de contabilistas, corpo de engenheiros ou outros técnicos específicos do processo envolvido. Além de levar semanas (custo tempo) esse processo pode ser bastante dispendioso e seu resultado financeiro final, mesmo a longo prazo pode não compensar. Nosso exemplo então começa com uma grande empresa que deseja participar de um processo de privatização de uma empresa estatal. Essa empresa estima que a preparação da proposta tenha um custo de R$50.000,00. A primeira árvore de decisão é bastante fácil e começa com o seguinte esquema:

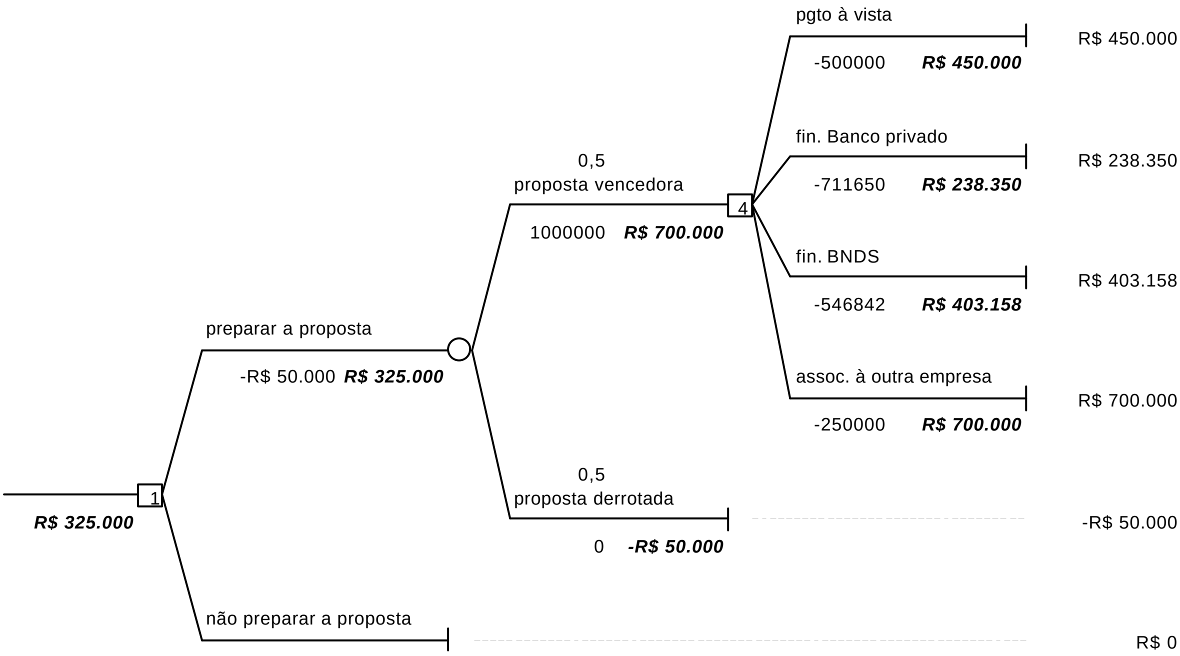


Se a proposta for vencedora, a empresa espera em 9 nove meses ter um lucro de cerca de R$1.000.000,00 não descontados os custos da preparação da proposta. A empresa espera que o processo seja honesto, e assim, sendo ela tem as mesmas chance de ganhar ou perder a proposta. A árvore então com essa nova informação será:



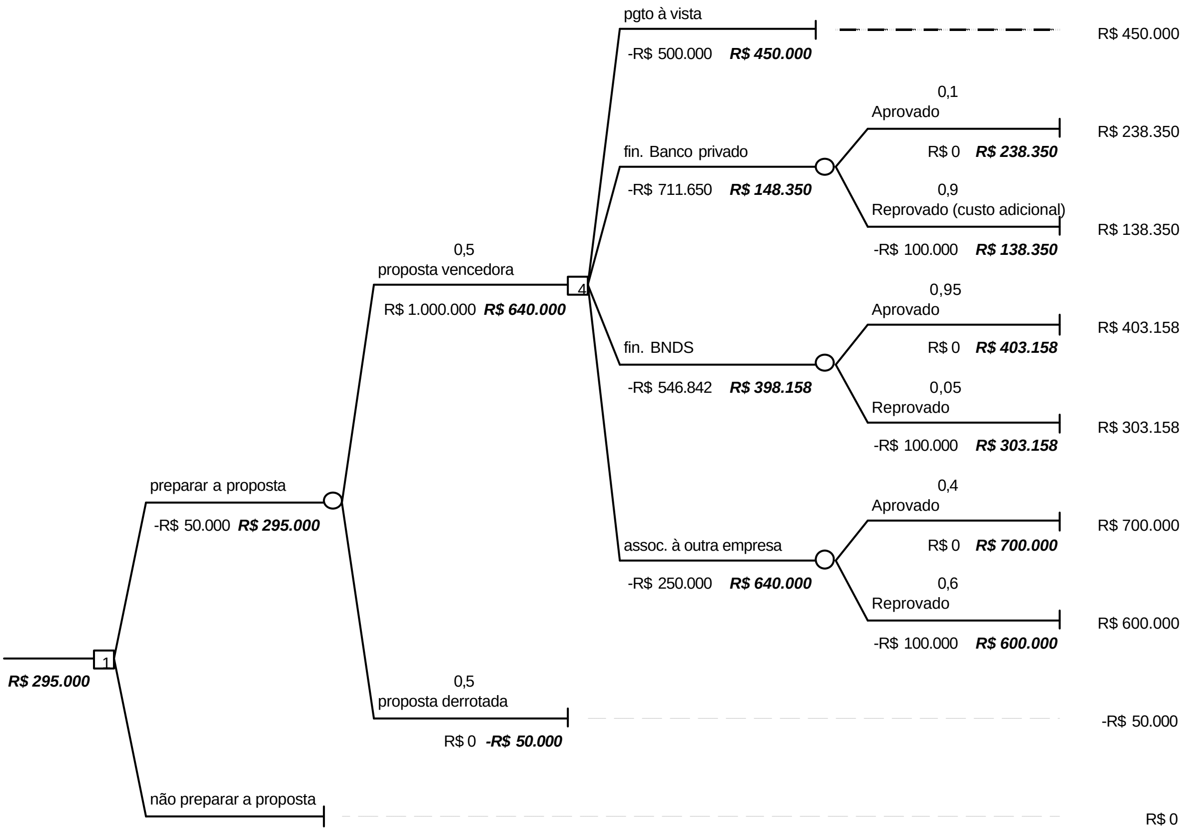
Percebe-se que nesse primeiro resultado o ideal é a empresa participar do processo enviando uma proposta e tendo a possibilidade de lucro médio de R$450.000,00. É interessante notar que o lucro de R$1.000.000,00 diminuiu uma vez que o evento duvidoso leva em conta a possibilidade da empresa perder a proposta. Isso não quer dizer que se a empresa ganhar terá um lucro diminuído!

No entanto, uma vez que ganhe a proposta a empresa tem dúvidas se vale a pena efetuar o pagamento de imediato. A compra lhe valerá um desembolso de R$500.000,00 para a compra da estatal (proposta). Se financiar num banco privado a empresa consegue um juro de 4% ao mês para os nove meses que espera o lucro estabelecido. Se conseguir no entanto, financiamento do BNDS, consegue taxas muito melhores de 1% ao mês sobre os R$500.000,00 durante 9 meses. Uma última alternativa é se associar a outra empresa do ramo e dividindo os custos ao meio, pagar à vista.



Nesse ponto a melhor decisão é então, fazer a proposta e se ganhar associar-se à outra empresa do ramo para dividir os custos. O lucro VME é de R$325.000,00. No entanto resta à empresa algumas dúvidas. Tendo em vista que a empresa já possui empréstimos em bancos privados para outros projetos, a diretoria acha muito difícil a aprovação de tal empréstimo. Caso seja reprovado a empresa prevê uma perda de R$100.000,00 pelo atraso da decisão. Já um empréstimo do BNDS é bem mais provável e caso seja reprovado também a empresa estima perda de R$100.000,00. Por último ainda existe o risco de não se encontrar uma empresa adequada para participar dos custos da proposta de compra. Se isso ocorrer a empresa estima uma perda de R$100.000,00. Enfim, as probabilidades dessas dúvidas são expressas na tabela a seguir:

Empréstimos	*Aprovado*	*Reprovado*
Banco Privado	0,1	0,9
BNDS	0,95	0,05
Outra Associada	0,4	0,6



Então com essas novas informações adicionadas à árvore de decisão, a melhor estratégia será: *Fazer a proposta e se ganhar se associar à outra empresa.* O valor monetário estimado (VME) será de R$295.000,00. O *ranking* das melhores estratégias será o seguinte, em termos de VME.

(1) *Associar-se à outra empresa:* R$640.000,00.
(2) *Pagar à vista:* R$450.000,00.
(3) *Empréstimo via BNDS:* R$398.158,00.
(4) *Empréstimo via Banco Privado:* R$148.350,00.

3.4 Análise de Risco com função Utilidade Exponencial

Quando foi definida no tópico anterior a função utilidade, foi mencionado o fato de que a análise de risco mais tradicional é realizada com uma função utilidade exponencial. No tópico definiu-se como função utilidade exponencial a função:

$$u(x) = 1 - e^{-r \times x} \tag{3.1}$$

onde r é uma função de risco constante r(x) = c. Na verdade, o risco r(x) é definido como

$$r(x) = \frac{1}{TR} \tag{3.2}$$

onde TR é a tolerância ao risco por parte do investidor. Na verdade, a função exponencial é melhor ajustada à análise de risco pela fórmula mais completa:

$$\boxed{u(x) = A - B \times e^{-\frac{x}{TR}}} \tag{3.3}$$

onde A e B são parâmetros ajustados aos dados de risco fornecidos pelo investidor. Ou seja, deve ser informado qual o máximo valor monetário em que o investidor aceitaria participar do investimento e qual o menor valor em que de forma alguma ele desejaria correr risco. Neste caso A e B, através de manipulação da equação da função utilidade poderão serem obtidos por:

$$A = \frac{e^{\frac{-baixo}{TR}}}{e^{\frac{-baixo}{TR}} - e^{\frac{-alto}{TR}}}$$

$$B = \frac{1}{e^{\frac{-baixo}{TR}} - e^{\frac{-alto}{TR}}} \tag{3.4}$$

onde alto é o valor monetário máximo do processo decisório e baixo é o mínimo. Por fim, deve-se ainda determinar o ***equivalente certo*** (EC), ou seja, o valor sob o qual o investidor é indiferente em participar do investimento. Esse valor é importante pois é através dele que se determina o valor da tolerância ao risco por parte do investidor (TR). Essas duas incógnitas podem ser resolvidas de maneira iterativa(repetição) através do comando "atingir metas" do excel.

De acordo com a propriedade fundamental de uma função utilidade de risco, a utilidade do equivalente certo é igual a utilidade esperada da loteria. O valor esperado da função utilidade é

$$VUE = 0{,}5 \times U(melhor) + 0{,}5 \times U(pior) \tag{3.5}$$

Por outro lado, o valor de utilidade esperada é o valor equivalente certo

$$VUE = U(eq.certo) \tag{3.6}$$

Logo, igualando-se os dois termos

$$U(eq.certo) = 0{,}5 \times U(melhor) + 0{,}5 \times U(pior) \tag{3.7}$$

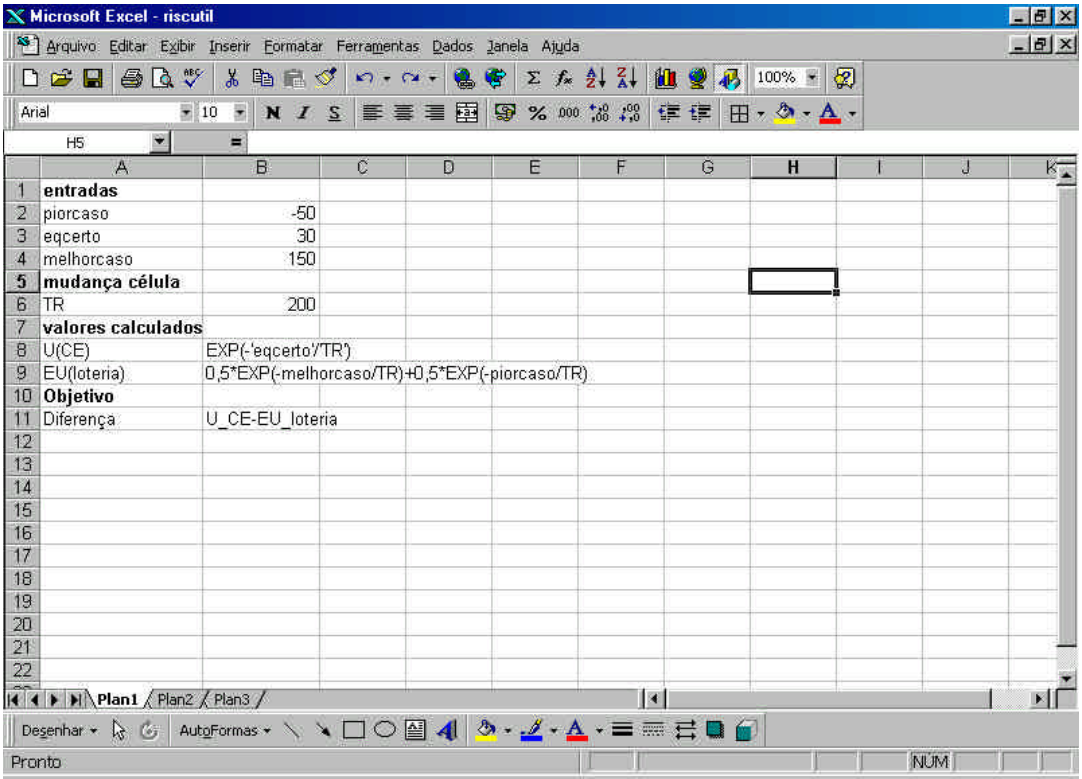
Para a função utilidade na forma exponencial com os valores de A e B e tolerância ao risco (TR) conhecidos, substituindo-se na equação anterior e simplificando os termos da equação resultante, tem-se

$$e^{\frac{-eq.certo}{TR}} = 0{,}5 \times e^{\frac{-melhor}{TR}} + 0{,}5 \times e^{\frac{-pior}{TR}} \tag{3.8}$$

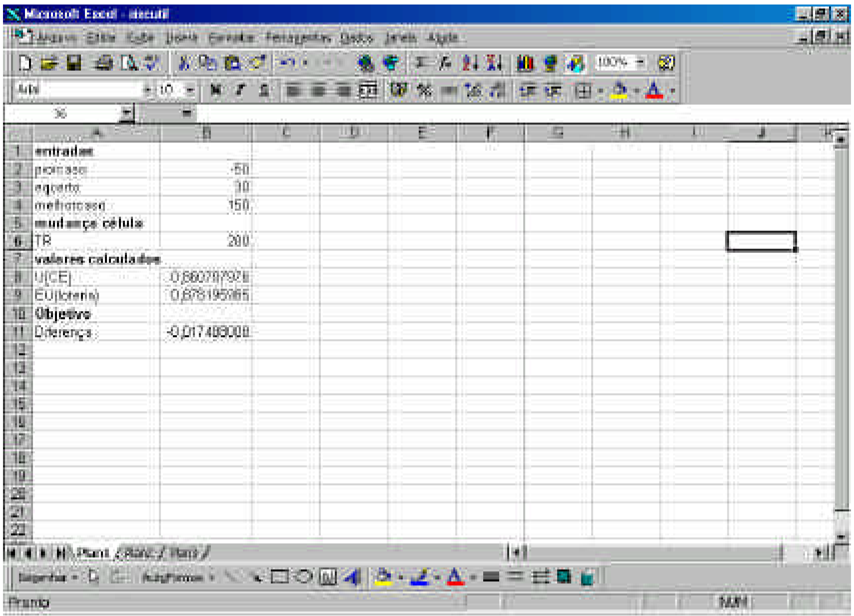
Essa é uma equação recorrente, ou seja, necessita-se de dois valores ligados entre si. Uma saída é ir testando por tentativa e erro qual o valor de tolerância ao risco (TR) faz com que os dois lados da equação sejam iguais para equivalentes certos fornecidos. A outra maneira mais prática é deixar o excel fazer isso no comando "atingir metas".

Exemplo

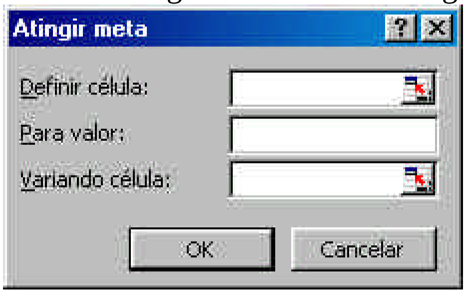
Entre com o texto na coluna A da planilha do excel para os valores de melhor retorno, pior retorno e equivalente certo. Os valores dessa loteria de oportunidades ficam na coluna B conforme mostrado na figura a seguir. Entre com um valor tentativa para a tolerância ao risco (TR), um "chute inicial" no valor B6. Selecione as células A2:B4 e então use: Inserir: Nome: Criar. Repita os mesmos passos para A6:B6 e A8:B9. Com isso o excel assume que os valores numéricos da coluna B são valores de uma função que está à esquerda na coluna A.



Notar que os símbolos com os parênteses representando funções utilidade do valor equivalente certo U(CE) e valor esperado da função utilidade EU(loteria) são tratados pelo excel como uma função dos valores eq.certo, melhorcaso e piorcaso. Para U(CE) o excel transforma em U_CE e EU(loteria) em EU_loteria. Então a diferença para o primeiro "chute" de TR foi –0,017. O objetivo é torná-la mais próximo a zero.

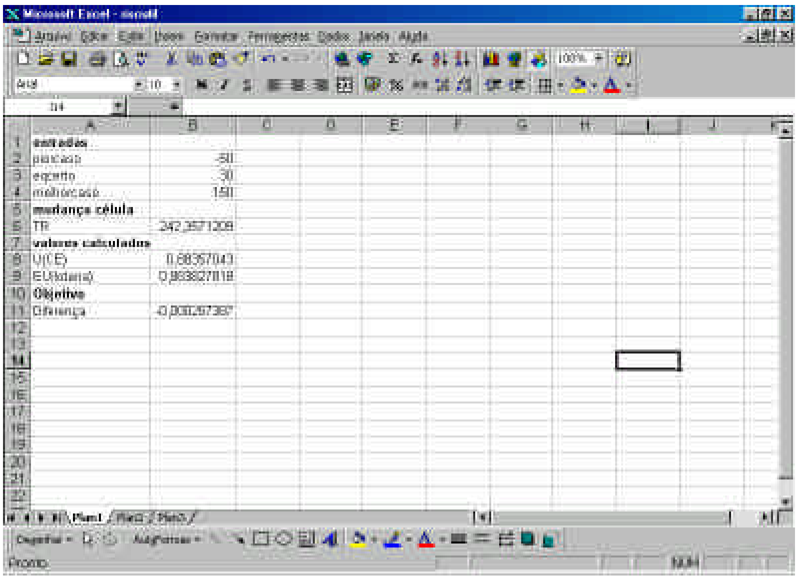


Então para torná-lo mais próximo a zero utiliza-se "atingir metas". Primeiro segue-se o menu principal em ferramentas: atingir metas conforme figura a seguir.

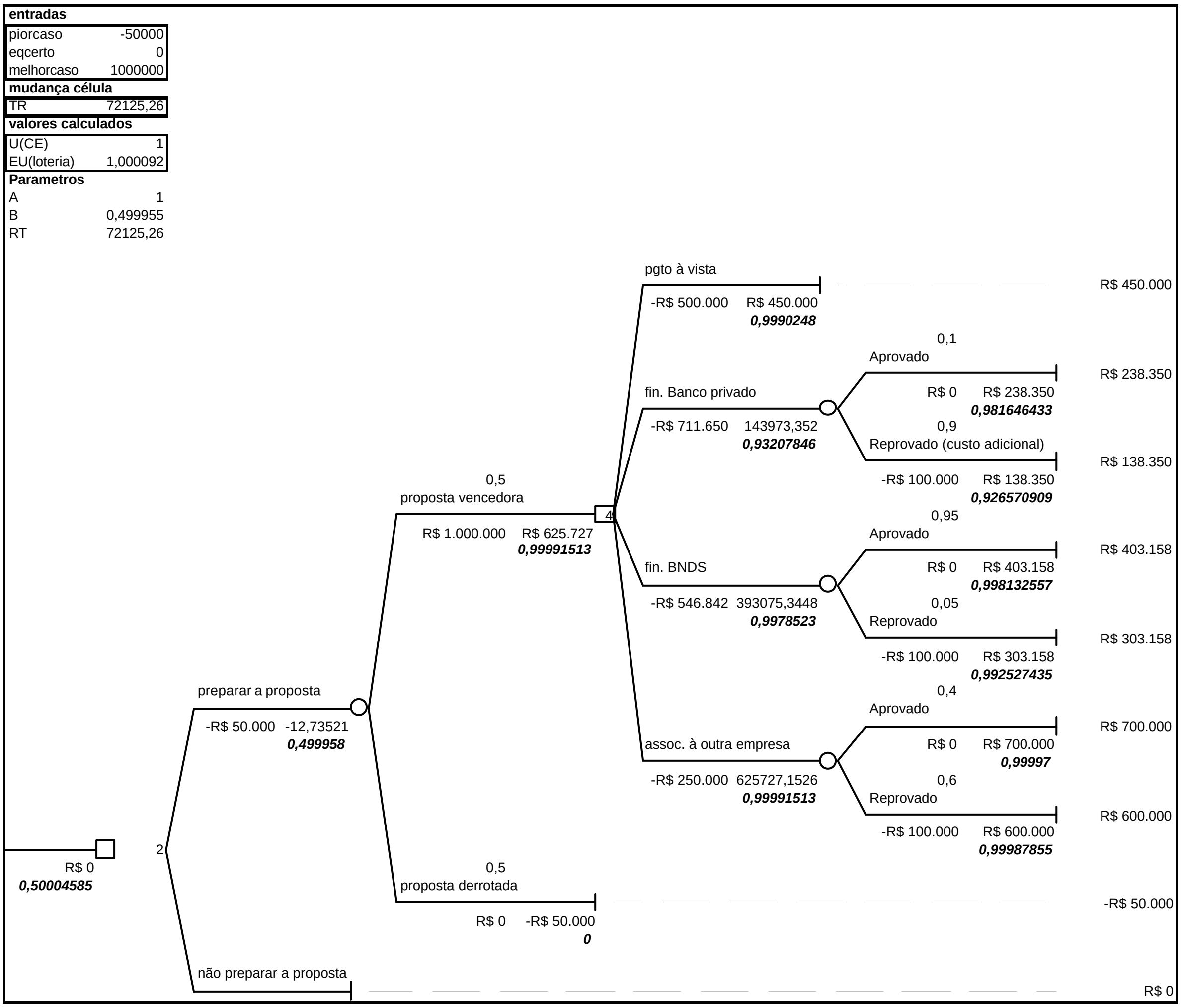


O valor de definir célula será B11 pois deseja-se que a diferença entre os dois lados da equação (3.8) seja nula. Então "para valor" ajusta-se como zero e pede-se que varie o valor de TR na célula B6.

O resultado será TR = 242,357 com os dois lados da equação (3.8) sendo –0,000257 conforme figura abaixo.



Pode-se a partir de então incluir essa análise para as árvores de decisão, levando em consideração o tipo de aversão ao risco. Vamos procurar a solução da seção 3.3 sobre a problema da privatização.



Pode-se perceber como a aversão ao risco altera o resultado. Neste caso agora, foi utilizado como equivalente certo o valor zero, ou seja, a empresa só será indiferente se realmente não perder nada. A empresa é totalmente <u>contra</u> qualquer tipo de prejuízo. Não se deseja nesse caso correr risco algum. Assim, quando se substitui como entradas:

Pior Caso = -R$50.000,00
Equivalente Certo = R$0,00
Melhor Caso = R$1.000.000,00

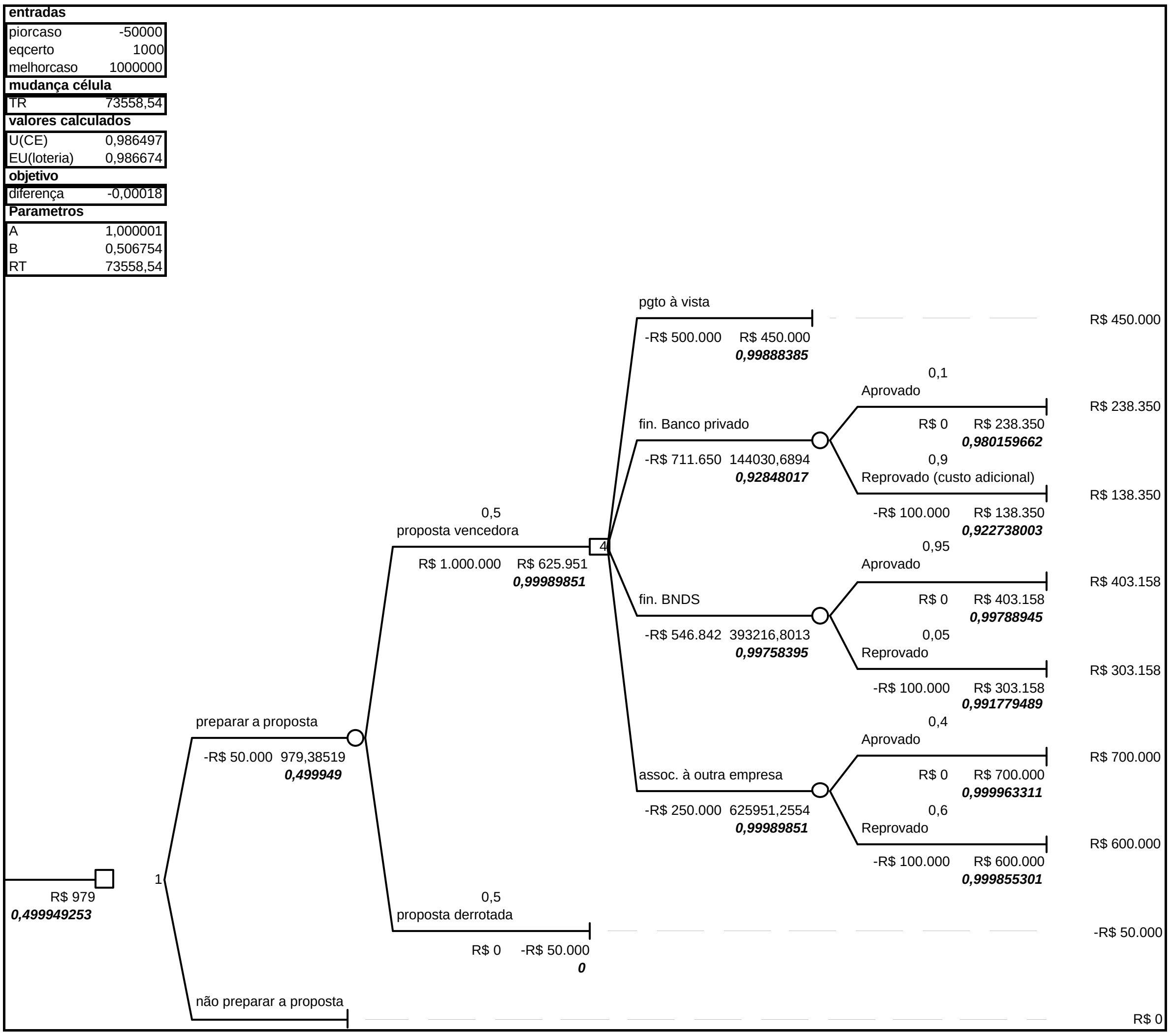
encontra-se através das tentativas para a tolerância ao risco o valor de r(x) = 72.125,26.

Com o uso das fórmulas (3.4) afim de encontrar o valor dos parâmetros A e B

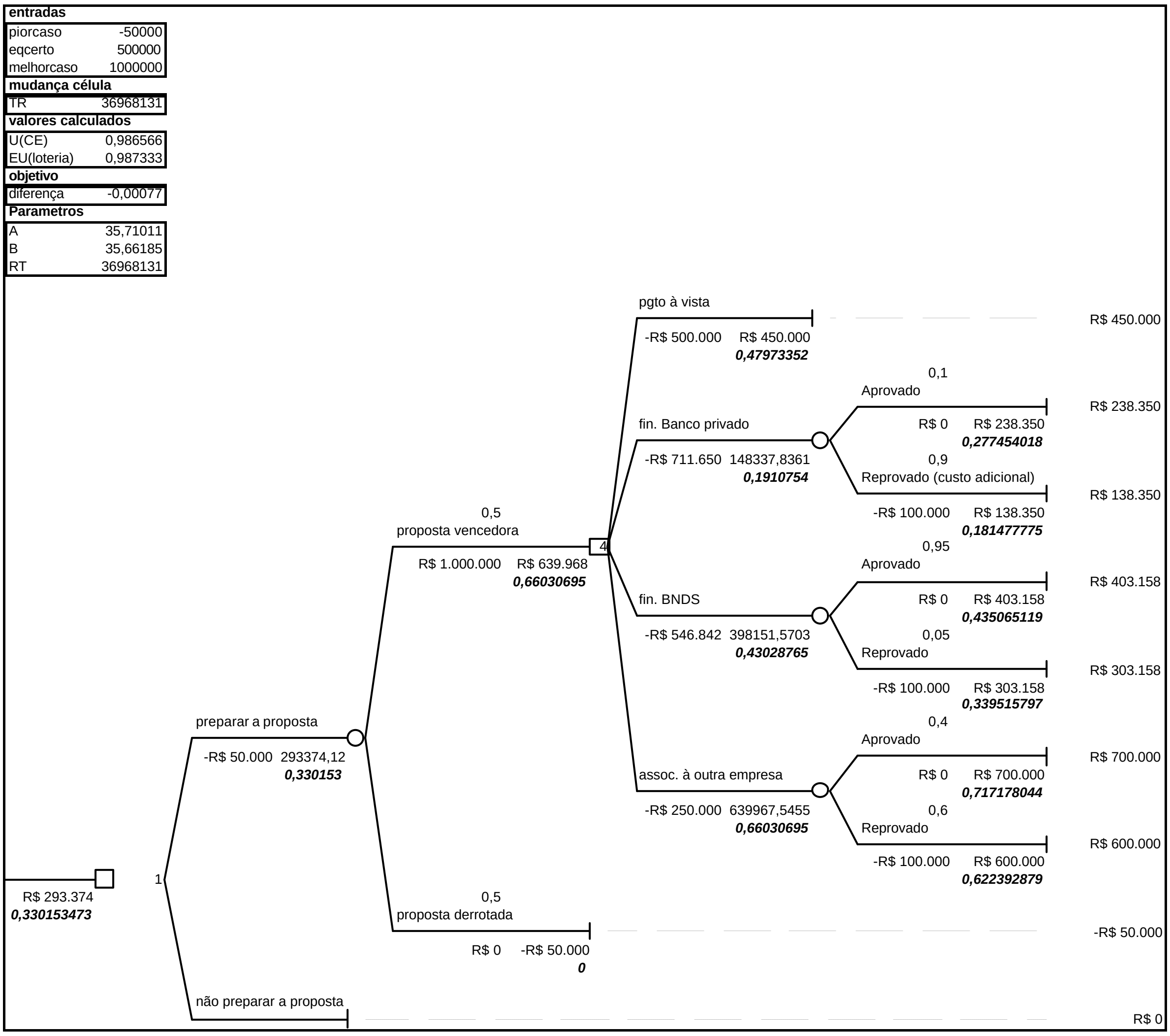
$$A = 1$$
$$B = 0{,}4999$$

Então, ao contrário da solução encontrada anteriormente, como a empresa não deseja risco algum, a melhor solução encontrada seria *Não Preparar a Proposta.* No gráfico da árvore de decisão isso corresponde ao número 2 no primeiro quadrado.

No entanto, basta a empresa admitir correr um pouco de risco e se tem a mesma solução da seção (3.3). Por exemplo, se a empresa admitir indiferença em relação ao valor R$1.000,00, a solução se repete, ou seja, deve-se fazer a proposta e caso ganhe a proposta se associar à outra empresa.



Os valores abaixo dos valores monetários esperados em itálico e negrito, são os valores para a função utilidade exponencial. Essa decisão por sinal, acaba sendo a mesma para uma firma com decisão financeira com *perfil agressivo.* Se a empresa decidir que o equivalente certo é R$500.000,00, ou seja, aceita até perder 500 mil reais, a solução é a mesma que para o equivalente certo sendo 1000 reais. Veja a solução a seguir.


entradas
piorcaso -50000
eqcerto 500000
melhorcaso 1000000
mudança célula
TR 36968131
valores calculados
U(CE) 0,986566
EU(loteria) 0,987333
objetivo
diferença -0,00077
Parametros
A 35,71011
B 35,66185
RT 36968131
pgto à vista
-R$ 500.000 R$ 450.000
0,47973352
R$ 450.000
0,1
Aprovado
R$ 238.350
fin. Banco privado
R$ 0 R$ 238.350
0,277454018
-R$ 711.650 148337,8361
0,1910754
0,9
Reprovado (custo adicional)
R$ 138.350
-R$ 100.000 R$ 138.350
0,181477775
0,5
proposta vencedora
4
R$ 1.000.000 R$ 639.968
0,66030695
0,95
Aprovado
R$ 403.158
fin. BNDS
R$ 0 R$ 403.158
0,435065119
-R$ 546.842 398151,5703
0,43028765
0,05
Reprovado
R$ 303.158
-R$ 100.000 R$ 303.158
0,339515797
0,4
Aprovado
preparar a proposta
-R$ 50.000 293374,12
0,330153
R$ 700.000
assoc. à outra empresa
R$ 0 R$ 700.000
0,717178044
-R$ 250.000 639967,5455
0,66030695
0,6
Reprovado
R$ 600.000
-R$ 100.000 R$ 600.000
0,622392879
1
R$ 293.374
0,330153473
0,5
proposta derrotada
-R$ 50.000
R$ 0 -R$ 50.000
0
não preparar a proposta
R$ 0

TÓPICO 4

Timing Decisorial para Otimização de Negócios

4.1 Introdução

A avaliação de um investimento em projetos é bem conhecida da área de controladoria e finanças empresariais. Primeiro deve-se fazer uma previsão dos fluxos de tesouraria gerados pelo projeto ao longo de sua vida econômica. Depois, deve-se determinar o custo de oportunidade do capital apropriado. Este deverá refletir, quer o valor temporal do dinheiro, quer o risco envolvido no projeto. Em terceiro lugar é importante utilizar esse custo de oportunidade de capital para atualizar os fluxos de tesouraria futuros do projeto. A soma dos fluxos de tesouraria atualizados denomina-se Valor Presente (VP). Por último, deve-se calcular o Valor Presente Líquido (VPL), subtraindo do VP o valor do investimento inicial. Então, a tomada de decisão de executar ou não o projeto depende do valor de VPL. Se o VPL é positivo existem grandes possibilidades de sucesso, caso contrário o investimento não é recomendado.

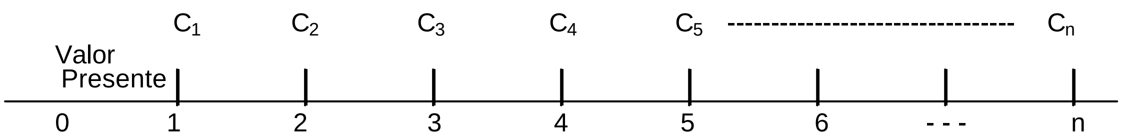
Essas são as premissas tradicionais de finanças empresariais quando se trata da avaliação de investimentos e análise de projetos. No entanto, qual a certeza sobre o fluxo de caixa futuro. Mesmo para um futuro próximo, por exemplo o mês seguinte ao início de um projeto, existe grande grau de incertezas. O fluxo de caixa é um exemplo clássico de oscilação aleatória centrada em uma tendência que deve ser determinada estatisticamente. Neste tópico serão somados aos conhecimentos tradicionais de controladoria sobre VPL o tempo necessário para retorno de investimento (*timing*) com a abordagem estatística de criação de cenários.

4.2 O Valor Presente Líquido (VPL)

As empresas investem numa variedade de ativos reais. Estes englobam ativos corpóreos tais como instalações fabris e equipamentos e incorpóreos tais como de gestão e patentes. O objetivo da decisão de investimento consiste na procura de ativos reais que valham mais do que custam. Para calcular o valor presente de um investimento (VP) basta atualizar o fluxo de tesouraria futuro com uma taxa apropriada, geralmente designada *custo de oportunidade de capital* ou *taxa mínima de rentabilidade*

$$\boxed{VP = \frac{C_1}{1+r}}$$

Neste caso, C_1 é fluxo de tesouraria para o período seguinte ao investimento e r a taxa de rentabilidade mínima. Para o caso de um projeto com n períodos de duração, os fluxos de caixa devem ser estimados e então a fórmula se transforma na seguinte relação:



$$\boxed{VP = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{C_n}{(1+r)^n}}$$

O Valor Presente Líquido (VPL) é o valor presente mais qualquer fluxo de tesouraria imediato C_0. Deve ser recordado que C_0 é negativo se o fluxo de tesouraria imediato for um investimento, isto é, representa um pagamento. A fórmula para o VPL é:

$$\boxed{VPL = C_0 + \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{C_n}{(1+r)^n}}$$

O conceito de VPL permite uma adequada separação entre a propriedade e a gestão da empresa. Um gestor que investe somente em ativos com VPL positivos serve os máximos interesses de cada um dos proprietários da empresa. Isto é possível devido à existência do mercado de capitais, que permite a cada acionista criar um plano individual de investimento, feito na medida de suas necessidades. Esse plano individual de cada acionista é condicionado unicamente por dois fatores: sua riqueza pessoal e a taxa de juro a que podem contrair ou pedir empréstimos. O gestor financeiro não pode influenciar a taxa de juro, mas pode incrementar a riqueza dos acionistas. A forma de realizar isto é investir em ativos que tenham valores presentes líquidos VPL positivos.

4.3 O *Timing* Ótimo de Investimento

As empresas exigem freqüentemente que a despesa inicial em qualquer projeto seja recuperada dentro de um determinado período de tempo. O período de recuperação também conhecido como *payback*, é obtido calculando-se o número de anos que decorrerão até os fluxos de tesouraria acumulados previsionais igualarem o montante de investimento inicial.

O exemplo a seguir fornecerá uma idéia de como a escolha do *timing* para fazer aquisições ou vender é importante para o sucesso de um negócio.

Exemplo

Uma empresa vinícola poderá vender um barril de vinho a qualquer tempo durante os próximos 5 anos. Dado um fluxo de caixa previsto, quando essa empresa deverá vender o vinho supondo uma taxa de oportunidade *r* = 10%.

Anos	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Fluxo de caixa	100	130	156	180	202	218
% de mudança		30%	20%	15%	12%	8%

Através da análise do valor presente (VP) tem-se os seguintes valores numéricos:

Se vender agora:

VP = 100

Se vender em um ano:

$$VP = \frac{130}{(1+0{,}1)} = 118$$

<u>DECISÃO:</u> A melhor decisão no momento é esperar!

No entanto, se for criada uma tabela de todos os valores presentes para os 5 anos de fluxo de caixa previstos poderá ser observado quando é o *timing* ótimo de investimento.

$$VP = \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

Anos	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Fluxo de caixa	100	130	156	180	202	218
VP	100	118	129	135	138	135

Timing ótimo

Logo, a melhor decisão de venda do barril de vinho, é realizá-la somente no quarto ano de projeto, pois é quando será obtido o maior VP (138). Uma maneira mais rápida de se determinar o *timing* ideal de investimento ou venda é utilizando a fórmula:

$$\boxed{t = \frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^n}}$$

Aplicando no exemplo anterior,

$$t = \frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{0{,}1 \times 1{,}1^5} = 3{,}79 \cong 4 \text{ anos}$$

ou seja, o mesmo *timing* encontrado pelo fluxo de caixa projetado.

4.4 Escolhendo o Melhor Projeto

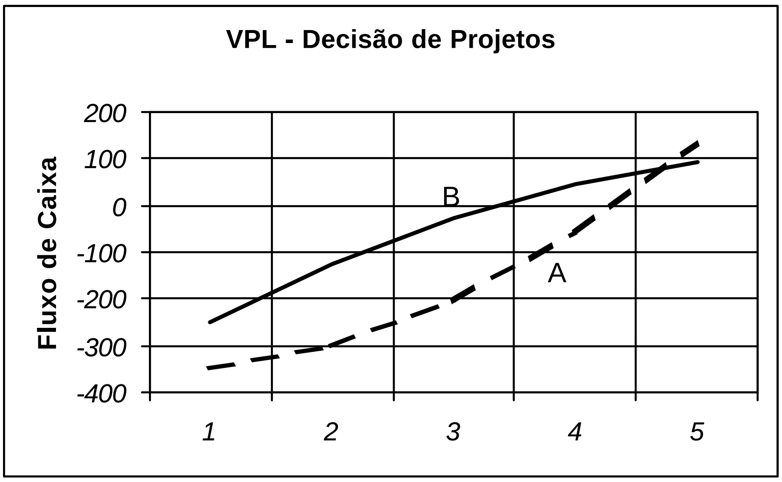
A técnica de escolha do melhor investimento baseado no valor presente líquido, é bastante utilizada quando se deseja comparar perfís entre projetos. Imagine os seguintes projetos, com seus respectivos fluxos de caixa projetados:

Período	Proj.A	Proj.B	VPL(A)	VPL(B)
0	-350	-250	-350,00	-250,00
1	50	125	-300,50	-126,24
2	100	100	-202,47	-28,21
3	150	75	-56,88	44,59
4	200	50	135,32	92,64

Com uma taxa de oportunidade de 1%, calcula-se os valores presentes líquidos para cada período de cada projeto.

$$\mathrm{VPL}(A) = -350 + \frac{50}{1{,}01} + \frac{100}{(1{,}01)^2} + \frac{150}{(1{,}01)^3} + \frac{200}{(1{,}01)^4} = 135{,}32$$

$$\mathrm{VPL}(B) = -250 + \frac{125}{1{,}01} + \frac{100}{(1{,}01)^2} + \frac{75}{(1{,}01)^3} + \frac{50}{(1{,}01)^4} = 92{,}64$$

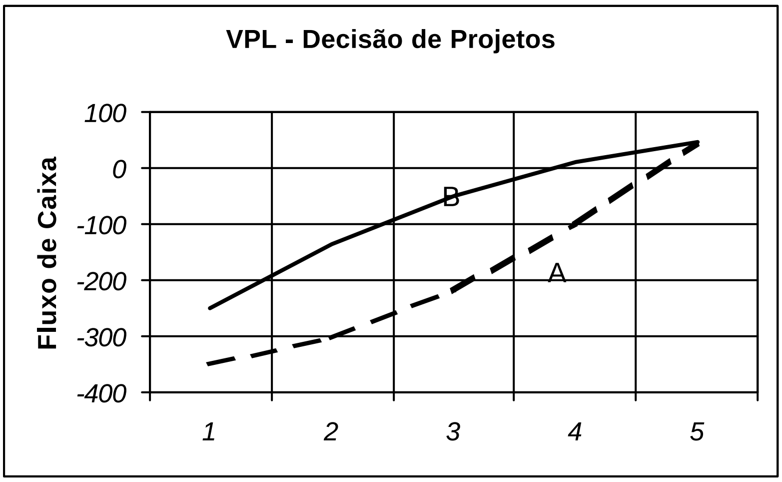


Assim, com essa taxa de 1% de retorno a cada período o projeto com o fluxo de caixa A seria mais interessante de se investir. No entanto, o que acontece quando a taxa de retorno é de 8%?

Ao observar a tabela a seguir, pode-se verificar que com a taxa de oportunidades um pouco maior o projeto A e o projeto B se tornam idênticos, e não seria possível distinguir por essa técnica qual dos dois é o melhor.

Período	Proj.A	Proj.B	VPL(A)	VPL(B)
0	-350	-250	-350,00	-250,00
1	50	125	-303,70	-134,26
2	100	100	-217,97	-48,53
3	150	75	-98,89	11,01
4	200	50	48,11	47,76

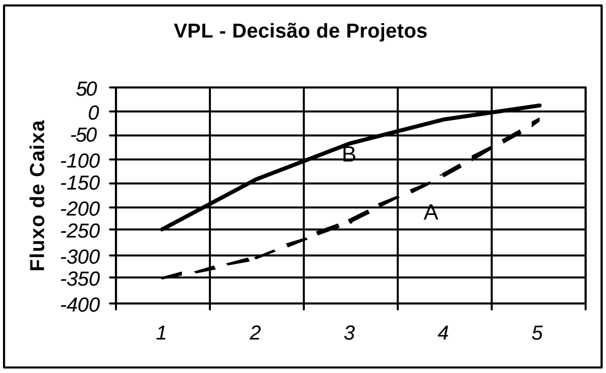
Observe a figura. Os dois projetos chegarão ao final do período de investimento com os mesmos VPL.



E com uma taxa de retorno de 15% o projeto B passa a ser mais interessante do que o projeto A. Seu valor presente líquido é maior (12,21) do que o VPL de A (-17,93).

Período	Proj.A	Proj.B	VPL(A)	VPL(B)
0	-350	-250	-350,00	-250,00
1	50	125	-306,52	-141,30
2	100	100	-230,91	-65,69
3	150	75	-132,28	-16,38
4	200	50	-17,93	12,21

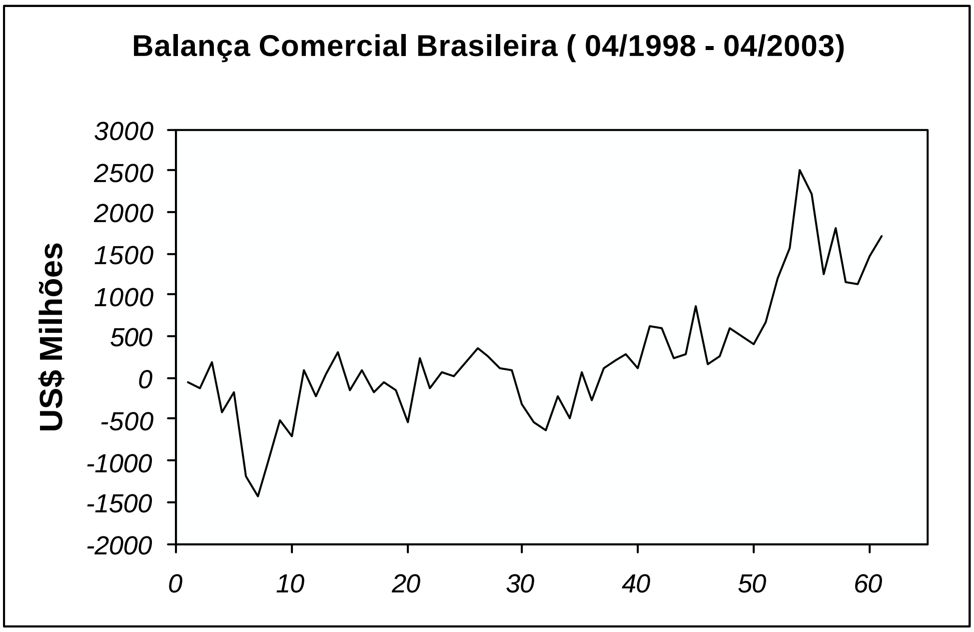
Neste gráfico percebe-se o afastamento das duas curva de VPL dos dois projetos de fluxo de caixa A e B.



4.5 *Timing* Baseado em Cenários Econômicos

A formulação apresentada no item anterior é bastante interessante e tradicional, mas falha num ponto. A previsão de fluxo de caixa pode conter diversas variáveis sazonais que se alteram dependendo do período do ano. No item anterior três cenários diferentes foram traçados para a taxa de retorno. Mas qual é a melhor? Como distinguir o melhor cenário de fluxo de caixa? Um fluxo de caixa com valor de 180, por exemplo, não indica a volatilidade do mercado para um investidor. O investidor deseja sempre saber quais as melhores e piores condições para seu investimento. A previsão sobre o fluxo de caixa pode então ser aperfeiçoada e melhorada através da criação de cenários otimistas, neutros e pessimistas para os fluxos de caixa.

Vamos observar o gráfico da balança comercial brasileira de 1998 à 2003. Pode-se observar a grande oscilação com repiques de crescimento e decréscimo dependendo do mês. Um grande empresário deseja saber o melhor mês para exportação de seus produtos. A criação de cenários é fundamental para a avaliação do fluxo de caixa da balança comercial.



<u>Criando Cenários</u>

A criação de cenários deve ser baseada na inferência estatística sobre uma amostragem representativa dos dados. Sabe-se da teoria de inferência, que a soma e subtração de um desvio padrão ao valor monetário esperado, fornecerá às estimativas uma confiabilidade de 68%. Isso corresponde a área em baixo da curva normal de probabilidades. Se quisermos mais confiança devemos trabalhar com aproximadamente dois desvios padrões (1,96) para cima e para baixo da média, ou seja,

$$\boxed{\text{Média} \pm \frac{1{,}96 \times \text{DP}}{\sqrt{n}}} \text{ .... Confiança de 95\% nas previsões}$$

$$\boxed{\text{Média } \pm \frac{3\times \text{DP}}{\sqrt{n}}}$$ ....Confiança de 99% nas previsões

onde *n* é o tamanho da amostra, *Média* é a média aritmética dos n dados coletados e *DP* o desvio padrão da amostra calculado pela fórmula

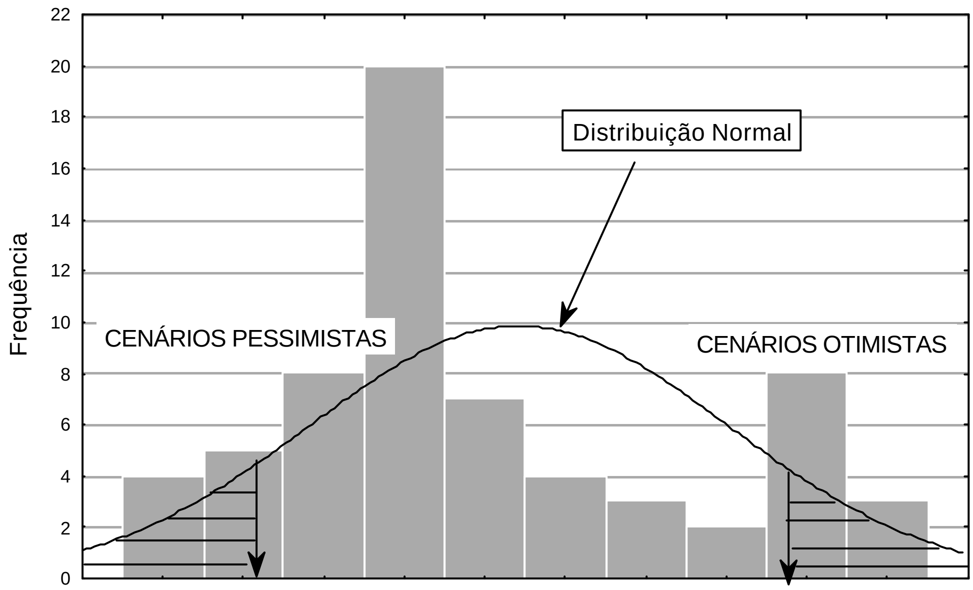
$$\text{DP} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \text{Média}\right)^2}{n-1}}$$

Então para 95% de confiança o cenário ***pessimista*** para o fluxo de caixa é:

$$\boxed{\text{Fl.Caixa } = \text{Média } - \frac{1{,}96\times \text{DP}}{\sqrt{n}}}$$

E para o cenário ***otimista***

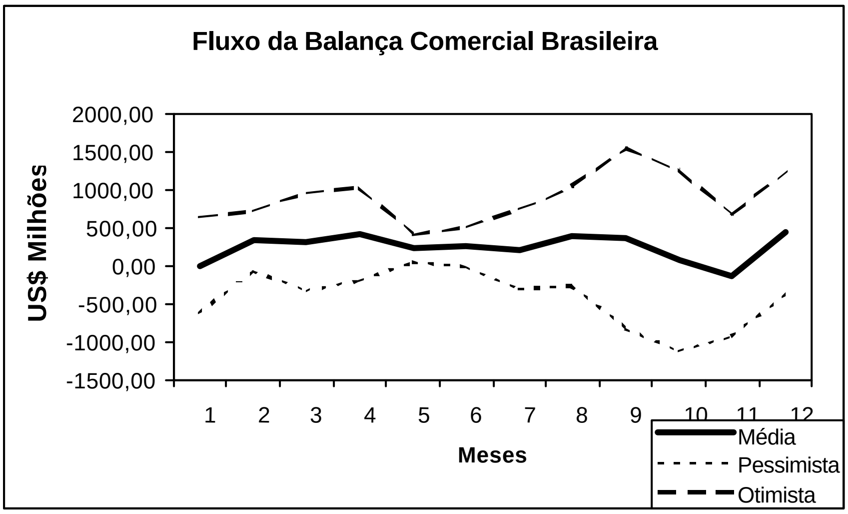
$$\boxed{\text{Fl.Caixa } = \text{Média } + \frac{1{,}96\times \text{DP}}{\sqrt{n}}}$$



O gráfico da figura anterior apresenta como cenário *pessimista* a área da curva normal atrás do fluxo de caixa esperado (fluxo ***médio***) e como *otimista* a área da curva normal acima desse valor.

No exemplo da balança comercial, o primeiro passo é separar os valores mês a mês, ou seja, juntar todos os valores do mês de Janeiro, depois de Fevereiro e assim até Dezembro. Uma vez separados esses valores por mês, calcula-se a média aritmética e o desvio padrão amostral para cada mês. Finalmente cria-se o cenário pessimista e depois o cenário otimista para o investimento em exportação.

O resultado é apresentado na figura a seguir. O cenário médio é conhecido como fluxo com padrão de neutralidade(neutro). Neste caso, o valor de fluxo de caixa otimista está acima da linha da neutralidade (média) e o pessimista abaixo desses valores.



A decisão sobre o melhor *timing* é feita através da utilização tradicional do valor presente, no entanto agora mais confiável pois tem-se duas extremidades que darão uma visualização da situação mês a mês baseado em informações anteriores. Na tabela a seguir, percebe-se que no caso pessimista o mês indicado para exportar é Maio, uma vez que por esse cenário o VP somente é positivo (15,05) nesse mês. Já o cenário otimista indica como maior valor o mês de Janeiro (510,25) seguido de Março (481,52). Percebe-se então o risco que projetar fluxo de caixa constante sem uma análise prévia de dados. A taxa de oportunidade usada neste exemplo foi a taxa SELIC do valor de Abril de 2003, (26% ao ano). Assim, por exemplo o VP otimista de Janeiro foi calculado com o fluxo de caixa otimista, o qual foi calculado como:

$$\text{Fl.Caixa}\,(\text{otim}) = 8{,}40 + \frac{1{,}96 \times 723{,}89}{\sqrt{5}} = 642{,}91$$

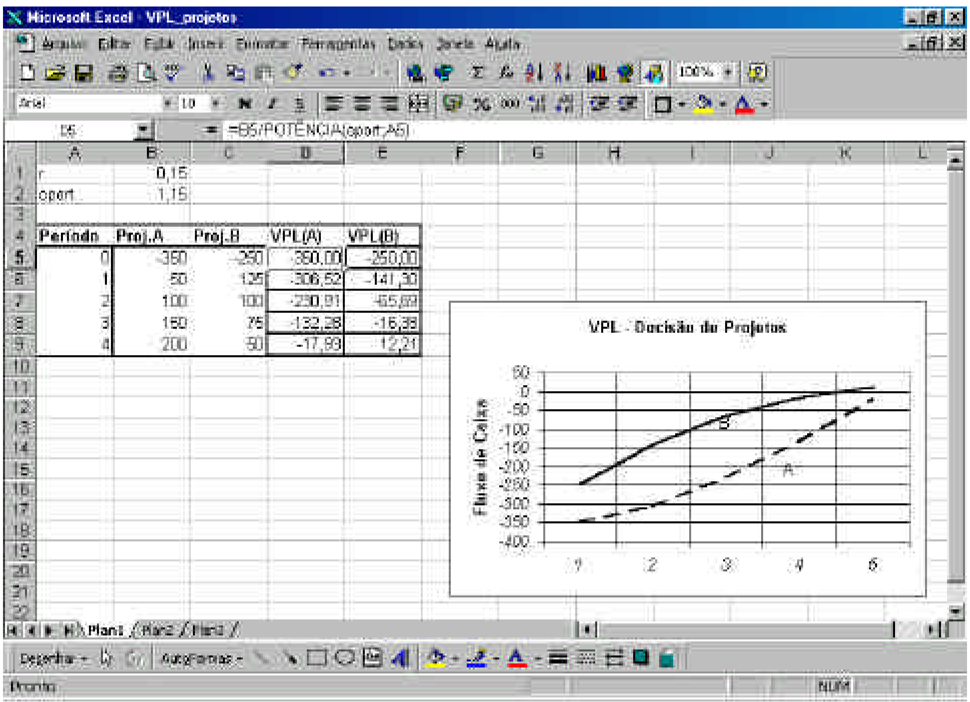
$$\text{VP}(\text{otim}) = \frac{642{,}91}{(1+0{,}26)^{1}} = 510{,}25$$

Mes	98	99	2000	2001	2002	2003	Média	DP	Pessimista	Otimista	VP(pess)	VP(otim)
1		-696	-115	-476	170	1159	8,40	723,89	-626,11	642,91	-496,92	510,25
2		102	76	77	261	1123	327,80	451,14	-67,64	723,24	-42,60	455,55
3		-222	20	-279	596	1479	318,80	735,19	-325,62	963,22	-162,78	481,52
4	-52	37	186	120	494	1714	416,50	694,74	-192,47	1025,47	-76,36	406,86
5	-121	308	362	210	395		230,80	208,76	47,81	413,[illegible]	15,05	130,29
6	185	-146	255	280	678		250,40	293,75	-7,08	507,88	-1,77	126,92
7	-422	90	116	107	1201		218,40	594,77	-302,94	739,74	-60,08	146,72
8	-167	-184	96	628	1577		390,00	740,23	-258,84	1038,84	-40,74	163,53
9	-1185	-56	-34	595	2499		363,80	1355,16	-824,05	1551,65	-102,95	193,85
10	-1438	-153	-528	245	2205		66,20	1348,16	-1115,52	1247,92	-110,60	123,73
11	-1026	-528	-632	286	1262		-127,60	911,58	-926,64	671,44	-72,92	52,84
12	-507	248	-213	853	1799		436,00	918,89	-369,44	1241,44	-23,07	77,53

As setas na tabela mostram os melhores meses para exportação segundo os cenários pessimista e otimista.

4.6 O VPL no Excel

Apesar da fórmula para o VPL já existir no Microsoft Excel, é interessante a construção da planilha utilizando as fórmulas apresentadas neste tópico. Isso porque a inclusão de termos aleatórios tornam o VPL mais próximo da realidade, quando sazonalidades acontecem nas previsões. Para a taxa de retorno "r" é interessante criar uma função na planilha para que ao se alterar a taxa automaticamente, a tabela e valor final do VPL se alterem. Para criar a função "r", basta seguir os seguintes passos: marcar a célula com "r" e a célula à frente com valor numérico; ir ao menu principal; *inserir*; *nome*; *coluna à esquerda*. Pronto, a variável "r" agora é uma função e ao ser alterada, os resultados se alteram. Então, basta ir somando os termos do somatório do início desse tópico e no final do período o valor será o VPL de cada projeto. A figura a seguir mostra o resultado final na planilha do Excel para o exemplo da seção 4.4.



TÓPICO 5

A Regra Fuzzy

Estratégia Contemporânea em Tomada de Decisão

5.1 Introdução

A lógica *fuzzy* ou lógica "nebulosa" é a lógica que permite simultânea associação entre dados numéricos e conhecimento lingüístico. Para muitos problemas existem duas formas distintas de abordagem para busca de soluções:

- *Conhecimento Objetivo:* É usado todo o tempo em formulações dos problemas, identificando as variáveis e parâmetros através do uso de modelos matemáticos (equações).
- *Conhecimento Subjetivo:* Representa informação lingüística que é usualmente impossível quantificar usando a matemática tradicional. São conhecimentos de especialistas que acumularam anos de experiência na forma de tratamento e resolução, com técnicas intuitivas.

Exemplos de conhecimentos objetivos são: séries temporais para estudo de ações do mercado financeiro, modelos de econometria para macroeconomia, modelos de demanda de produto, regressões lineares e não lineares para tendências de transações financeiras, etc.

Já para os conhecimentos subjetivos, tem-se como exemplo: se as ações estão subindo e o dólar caindo, comprar mais ações; se o governo não controla a inflação e a dívida interna aumenta, não investir em títulos da dívida pública pois existe uma grande possibilidade de *default* (calote); se as compras estão aumentando e a produção está baixa, tem-se que subir o preço do produto vendido.

Como pode-se perceber, o conhecimento subjetivo fica difícil de ser tratado matematicamente, quando na verdade se tem um problema de transcrição lingüística para variáveis numéricas. Como representar "subir um pouco", "comprar menos", "vender mais"? Essa é a função da lógica *fuzzy* elaborada no início da década de 70.

Recentemente, a lógica *fuzzy* fez sentir presença com aplicações no mundo dos negócios. Um sistema de avaliação de pedidos de reembolso de seguros foi projetado pela *General Cologne Re*, ajudando companhias de seguro identificar pedidos "legítimos" e pedidos "suspeitos" de fraude. Com isso deixou seu corpo de auditores com mais tempo para focar seus esforços em investigações potencialmente fraudulentas. O sistema foi construído usando analistas de fraude de 12 companhias européias. Hoje, mais de 20 das maiores companhias de seguro européias estão utilizando o sistema que tem demonstrado eficiência de 85%.

Na área de *análise de risco* especialistas tem com sucesso automatizado sistemas de decisão baseado em regra *fuzzy*. A dominante alemã de cartão de crédito e débito em transações estrangeiras, GZS Corporation, usou a automatização de seu conhecimento em análise de risco com a lógica *fuzzy*. Segundo a empresa 9 entre 10 transações de risco são automaticamente identificadas corretamente e a transação bloqueada antes da autorização.

Esses são apenas alguns exemplos da utilizada deste novo tipo de abordagem para tomadas de decisão financeira.

5.2 Conjuntos Nebulosos (*fuzzy*)

Na teoria clássica de conjuntos, um conjunto é definido como uma coleção de objetos. Nesse caso, um objeto possui apenas duas possibilidades quanto à sua relação com um conjunto, ou seja, um dado objeto é ou não um elemento do conjunto. No entanto, na teoria dos conjuntos *fuzzy*, esse objeto possui graus variados de pertinência de dentro do conjunto. Veja o seguinte exemplo.

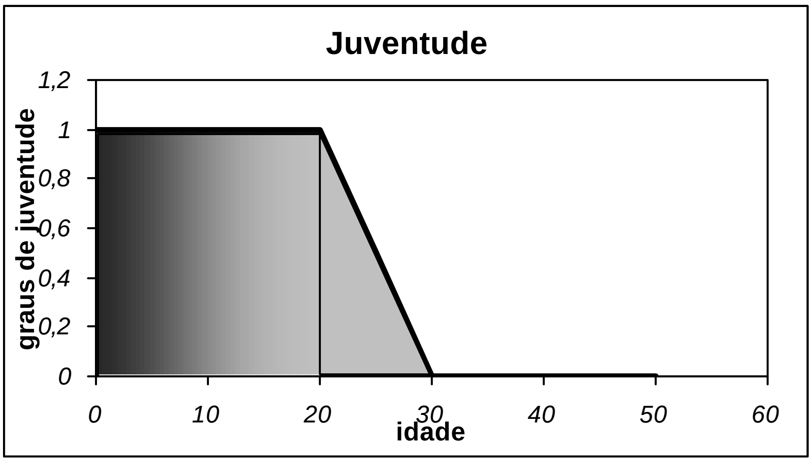
Exemplo:

Quando uma pessoa poderá ser considerada jovem?

Uma pessoa não deixa de ser jovem logo que passa de uma idade. A pessoa vai deixando esse "grau" denominado jovem ao longo de sua vida. Imagine que a função em que relata a mudança na característica da pessoa seguindo a seguinte relação:

$$\text{Jovem} = \begin{cases} 1, & \text{se idade} \leq 20 \\ \dfrac{30 - \text{idade}}{10}, & \text{se } 20 \leq \text{idade} \leq 30 \\ 0, & \text{se idade} > 30 \end{cases}$$

Então, o grau de jovem varia conforme a idade avança mas, de maneira contínua e não abrupta. A relação acima é traduzida em gráfico para a função "Jovem" com seus graus de juventude.



Se essa relação hipotética fosse verdade uma coleção de pessoas poderiam ser denominadas mais jovem, menos jovem, não tão jovem, e assim sucessivamente, dependendo do grau de juventude. Esse grau de juventude recebe o nome de *grau de pertinência* ao conjunto dos jovens. Poderia se ter a seguinte tabela:

Nome	Idade	Grau de Pertinência
João	10	1
Eduardo	21	0,9
Patrícia	25	0,5
Adriana	26	0,6
Souza	28	0,2
Joana	83	0

Então, quanto mais próximo de 1 o grau de pertinência da pessoa, mais ela pode ser rotulada como muito jovem. Quanto mais próximo de zero, mais ela se aproxima de não jovem. Essas atribuição formam as variáveis conhecidas como *variáveis lingüísticas*.

5.3 Variáveis Lingüísticas e Graus de Pertinência

Pensar em variáveis como objetos lingüísticos é mais fácil do que traduzir a realidade em forma de números. No mercado financeiro, sempre os analistas tentam traduzir o que os números dizem através de palavras. Assim, num conjunto *fuzzy*, uma variável lingüística sempre aparecerá com adjetivos: "alto", "baixo", "pouco", "muito pouco", "muito pequeno", "muito grande", dependendo de seu grau de pertinência.

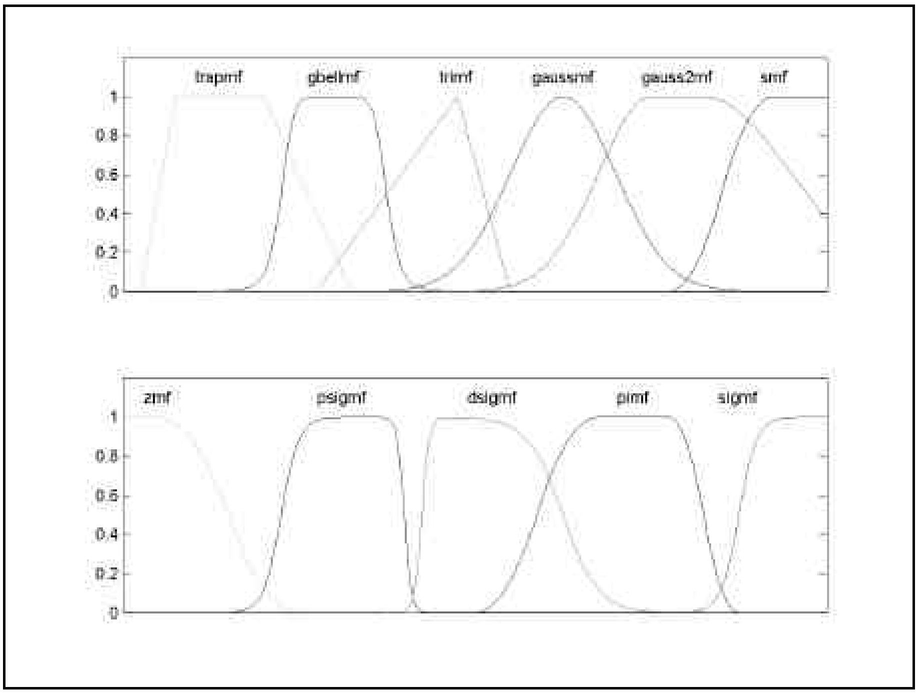
A função de pertinência é a representação gráfica da magnitude de participação de cada entrada no processo. Entrada num processo pode ser por exemplo valores de vendas, valores de compra, valores das ações, índices de inflação, etc. Essas entradas recebem então "pesos" de informação através da função de pertinência. Através de regras lógicas como SE ENTÃO, SE NÃO, E, OU e uma combinação delas fornecem um resultado de saída que poderá ser numérico ou lingüístico.

<u>Tipos de Função</u>

As funções de pertinência sempre recebem algumas formas básicas de representação, sendo as mais comuns:

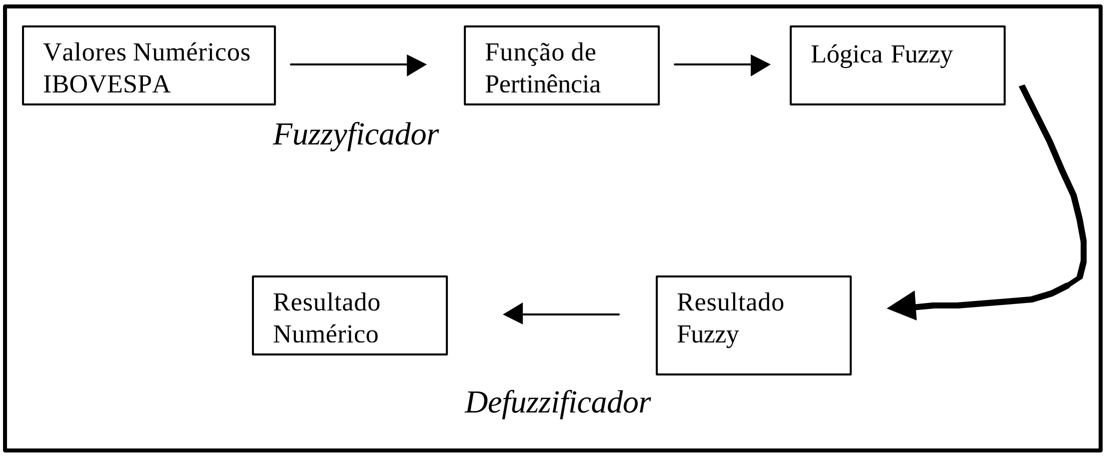
- Trapmf: *trapezóide*.
- Gbelmf: *sino*.
- Trimf: *triangular.*
- Gaussmf: *gaussiana*.
- Smf: *curva molde – S.*
- Zmf: *curva molde – Z.*
- Psigmf: *curva sigmóide*.

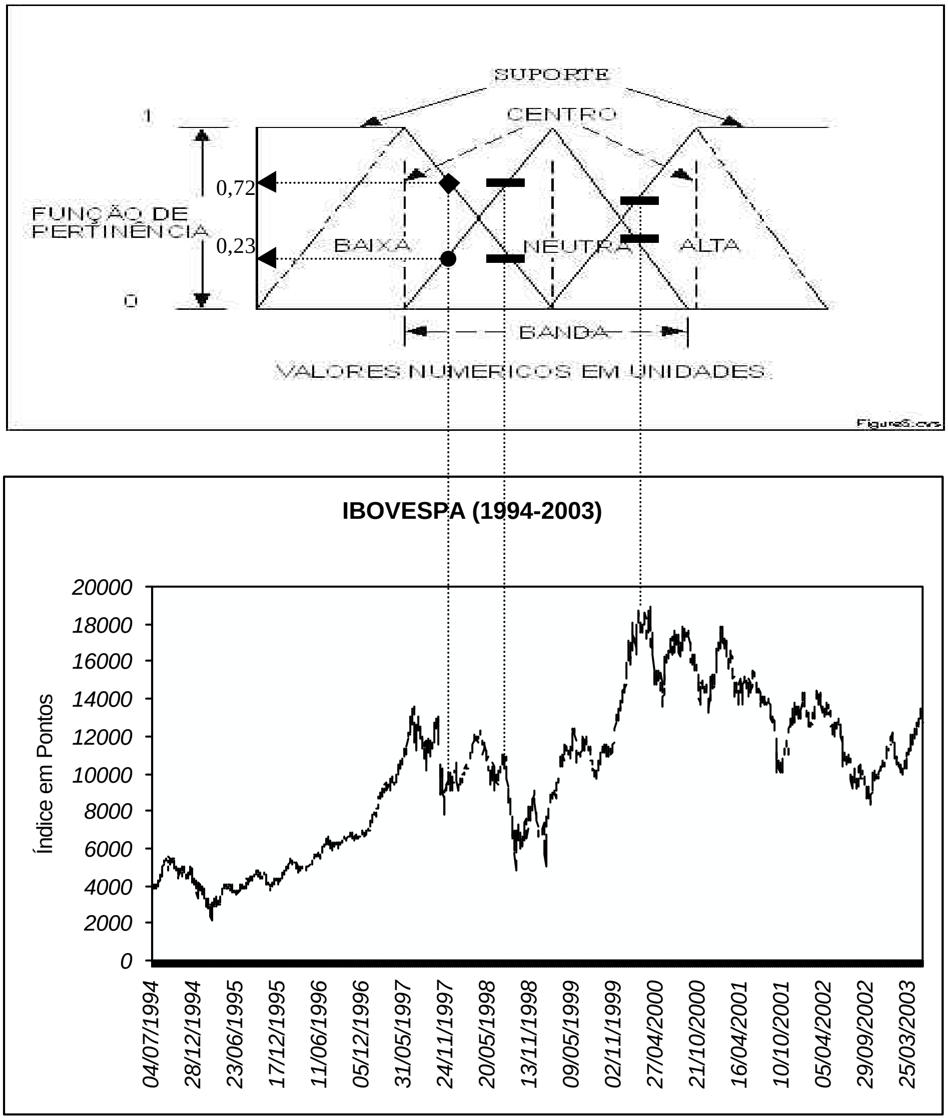
A figura a seguir mostra além dessas funções de pertinência outras que também são usadas para problemas específicos.



A função de pertinência traduz a variável numérica para variável lingüística que poderá ser analisada pela lógica nebulosa. Os resultados da lógica em termos lingüísticos são então interpretados e traduzidos novamente para variável numérica. O conversor para variáveis nebulosas é conhecido como "Nebulizador" ou "Fuzzyficador". Uma vez o resultado lingüístico obtido faz a transcrição para a variável numérica através de um "Desnebulizador" ou "Defuzzificador".

Imagine que se tem um banco de dados contendo os valores percentuais de queda e alta da bolsa de valores de São Paulo, medidos pelo IBOVESPA. Então deve-se seguir o seguinte esquema:





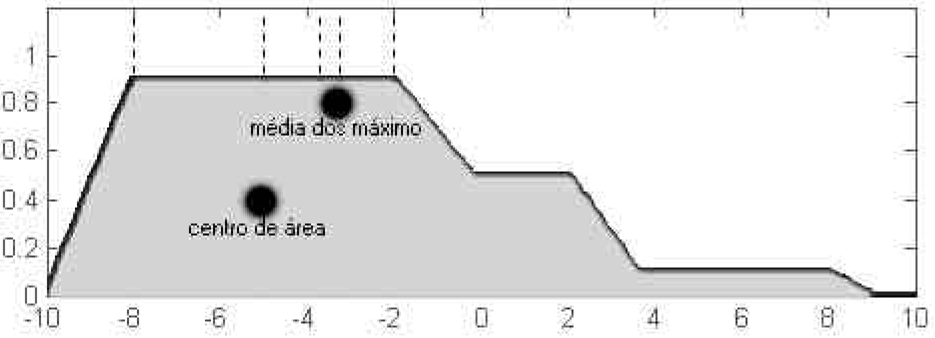
Para a decisão de investir, por exemplo em ações da BOVESPA o gestor por exemplo quer saber quando a bolsa está em baixa, para fazer aquisições de ações mais baratas. A figura anterior mostra como exemplo, num determinado dia, ou hora que a fuzzyficação traduz um valor numérico para a função de pertinência. Então, por exemplo, o índice passa a possuir dois graus de pertinência. Ele terá uma pertinência de 0,23 para mercado neutro e 0,72 para mercado em baixa.

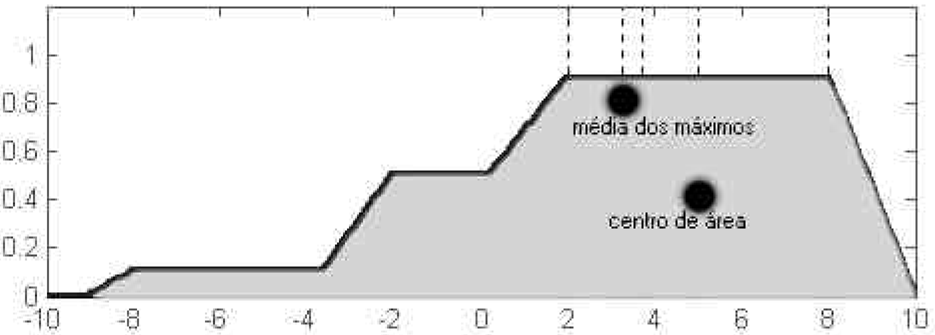
A regra lógica então deve ser elaborada, levando em conta a experiência do gestor. Uma regra por exemplo, poderia ser:

Regra: SE (ibovespa) ~ (baixo) ENTÃO (comprar)
SE (ibovespa) ~ (neutro) ENTÃO (comprar)
SE (ibovespa) ~ (alto) ENTÃO (não comprar)

5.4 Defuzzificação

Essa é uma fase importante da lógica fuzzy. O defuzzificador é que pesa as diversas respostas fornecidas pelas regras lógicas e atribui à saída um número. Esse número é que dirá o que é mais *pertinente* de fazer: "comprar" ou "não comprar" e com que grau. Essa ponderação de respostas podem ser realizadas por diversos métodos.





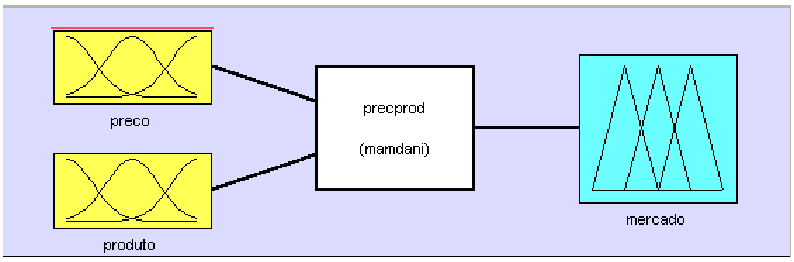
Os dois métodos mais importantes são: método baseado no centro de massa e método baseado na média dos máximos das funções de pertinência. Por um desses métodos encontra-se o valor numérico no eixo "x" mais pertinente. Então, voltando as funções de pertinência elaboradas pelas regras, descobre-se o quanto esse valor do defuzzificador significa em termos das variáveis lingüísticas "comprar", "vender", "comprar alto", "comprar baixo", "vender alto", etc.

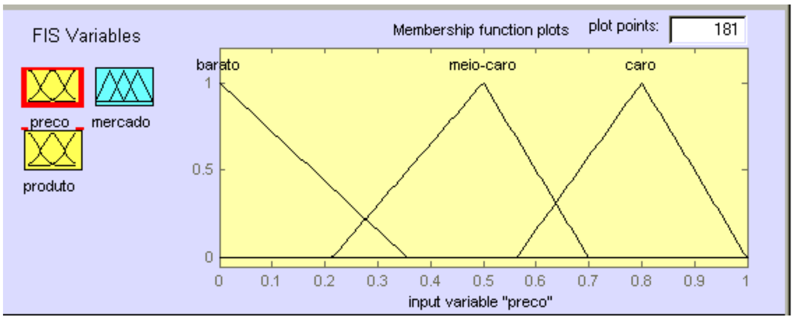
5.5 Exemplos Práticos

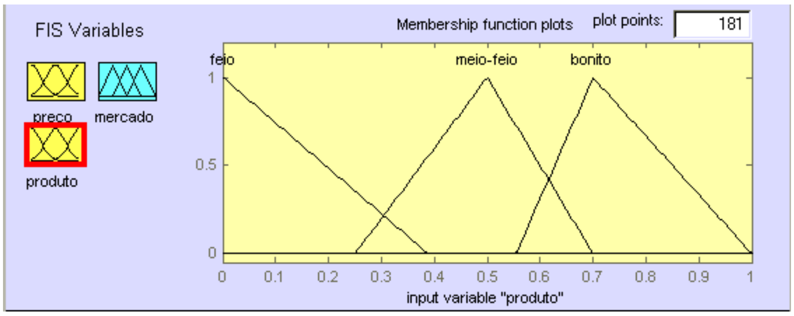
A fim de fixar as idéias apresentadas nas seções desse tópico, serão apresentados alguns exemplos práticos de como utilizar a regra fuzzy para tomadas de decisão e investimento.

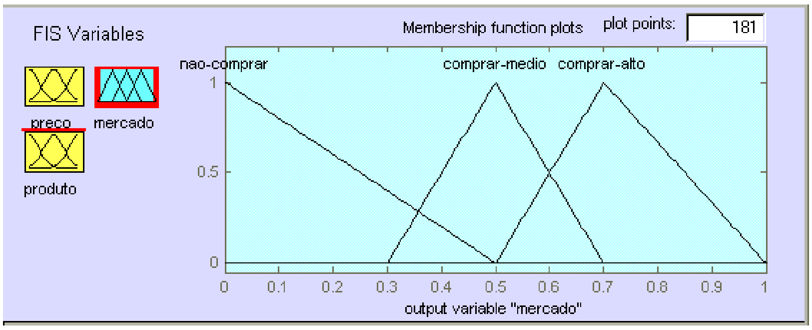
<u>Exemplo-1-</u> {*Aquisição de Ativos*}

Deseja-se fazer a aquisição de um produto importado baseado no acabamento e preço. A tomada de decisão será baseada na combinação de situações lógicas possíveis entre "comprar" ou "não comprar".







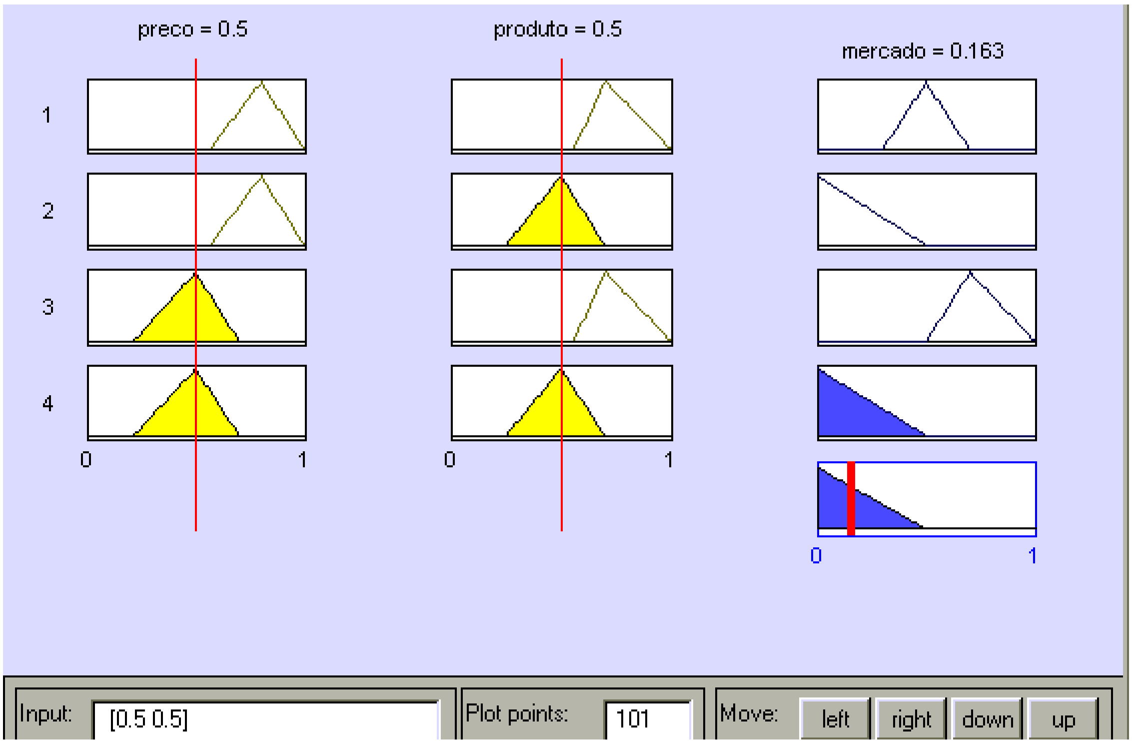


As figuras anteriores mostram como as funções de pertinência foram criadas para esse exemplo. Todas foram baseadas na função triangular e separadas na variável “preço” e “produto”. Dentro da variável “preço” as funções triangulares representam um preço que poderá ser barato, meio caro ou caro. Pode-se perceber que propositadamente existe interseções entre os valores das funções, representando as dúvidas do gestor quanto ao preço ser caro ou barato.

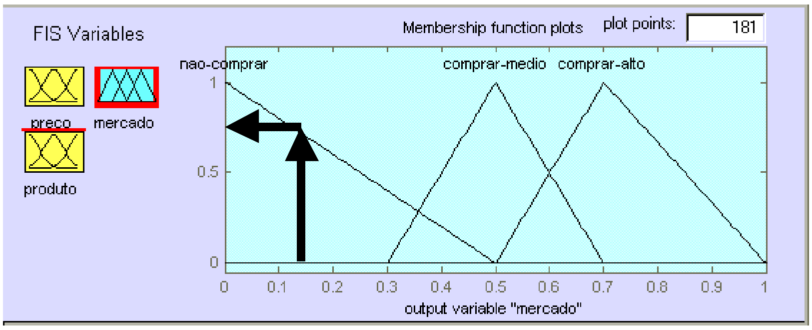
Do mesmo modo, funções triangulares foram criadas para o perfil do produto, tendo como variáveis lingüísticas “feio”, “meio feio” e “bonito”. Finalmente, as funções de saída, também triangulares foram criadas para um investidor com aversão ao risco. O leitor pode perceber que a variável lingüística “não comprar” atinge boa parte da variável lingüística “comprar médio”. Então, hipoteticamente foi criada as seguintes regras pelo especialista:

- SE (preço ~ caro) E (produto ~ bonito) ENTÃO (mercado ~ comprar-médio)
- SE (preço ~ caro) E (produto ~ meio-feio) ENTÃO (mercado ~ não-comprar)
- SE (preço ~ meio-caro) E (produto ~ bonito) ENTÃO (mercado ~ comprar-alto)
- SE (preço ~ meio-caro) E (produto ~ meio-feio) ENTÃO (mercado ~ não-comprar)

A primeira entrada foi supor que o cliente achou o preço mais ou menos (valor = 0,5) e não gostou tanto assim do produto (valor = 0,5). Como resposta utilizando o método do *centro de área* tem-se o valor de mercado = 0,163, mostrado na figura a seguir com todas as composições das funções de pertinência para os valores de entrada [0,5;0,5].

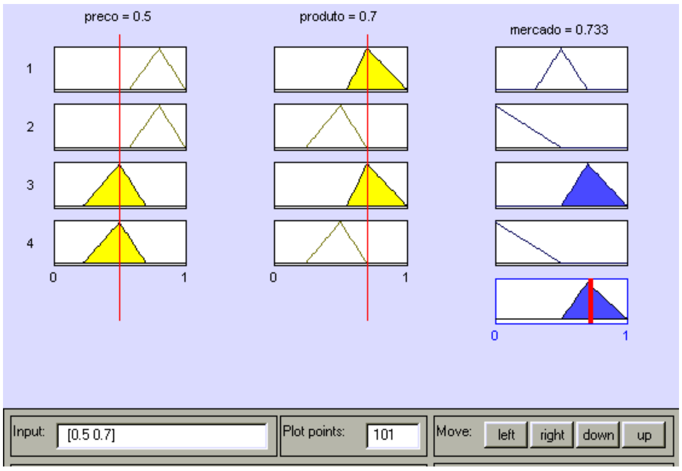


Com esse valor do mercado, volta-se novamente para a função de pertinência de mercado e procura-se os graus para a decisão. A figura a seguir ilustra esse procedimento.

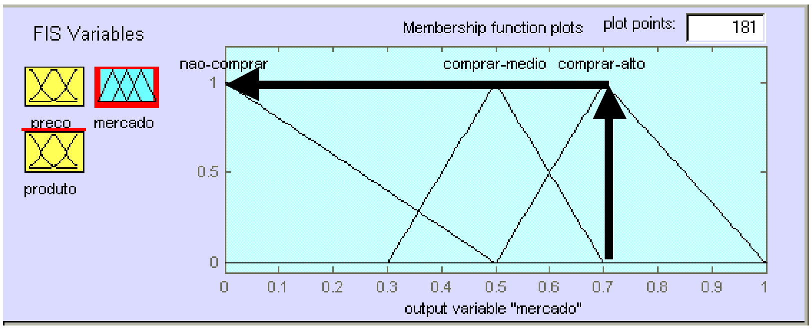


A decisão neste caso é de NÃO COMPRAR o produto, pois a função de pertinência da variável lingüística “não comprar” é maior que 0,5, enquanto os valores de “comprar-médio” e “comprar-alto” são nulos.

Vamos imaginar que o investidor achou o preço mais ou menos barato mas se sente satisfeito com a qualidade. Por hipótese, vamos adotar as entradas para o preço=0,5 e produto=0,7. Com essas entradas, tem-se como valor do defuzzificador 0,73 conforme mostra a figura a seguir.



Percebe-se nessa figura que o sentimento do investidor (refletido nos gráficos do meio) é de quem está gostando do produto e apenas com dúvida quanto ao valor. Com o método de defuzzificação do *centro de área* a decisão final se deslocou para frente, mais próximo a 1. Com esse valor de 0,733, volta-se aos gráficos de função de pertinência do mercado e verifica-se o resultado lingüístico, conforme figura a seguir.



Então, para o valor 0,733 a decisão será COMPRAR ALTO, ou seja, recomenda-se fortemente ao investidor a compra do produto.

<u>Exemplo-2-{Oportunidades de Investimento}</u>

Vamos imaginar que uma empresa tem capital para investir no mercado financeiro e está em dúvida se investe em: Ações do Setor Eletrônico; Ações de Petróleo ou Fundo Mútuo de investimento. O que o gestor de risco supõe é que três situações são possíveis para o mercado. O mercado pode estar estável, declinando ou crescente. O eixo “x” agora de cada função de pertinência irá variar de –1 a +1, representando –100% a 100% de variação. O gestor informa que, pela sua experiência, quando as variações na semana são:

- -100% a –10% : *mercado declinando muito.*
- -20% a 0%: *mercado declinando pouco.*
- -30% a 30%: *mercado estável.*
- 0% a 20% : *mercado crescendo pouco.*
- -5% a 100% : *mercado crescendo muito.*

As regras elaboradas pelo gestor foram:

(1) SE (set.ele.=dec.muito)E(pet.=dec.muito)E(fund.=dec.muito)ENTÃO (merc.=não investir)

(2) SE (set.ele.=dec.pouco)E(pet.=dec.muito)E(fund.=dec.pouco)ENTÃO (merc.=inv. médio)

(3) SE (set.ele.=dec.pouco)E(pet.=dec.pouco)E(fund.=dec.muito)ENTÃO (merc.=inv. médio)

(4) SE (set.ele.=estável)E(pet.=estável)E(fund.=estável)ENTÃO (merc.=inv. médio)

(5) SE (set.ele.=estável)E(pet.=estável)E(fund.=pouco)ENTÃO (merc.=inv. médio)

(6) SE (set.ele.=estável)E(pet.=estável)E(fund.=dec.muito)ENTÃO (merc.=inv. médio)

(7) SE (set.ele.=estável)E(pet.=dec.pouco)E(fund.=estável)ENTÃO (merc.=inv. médio)

(8) SE (set.ele.=estável)E(pet.=dec.muito)E(fund.=estável)ENTÃO (merc.=inv. médio)

(9) SE (set.ele.=estável)E(pet.=estável)E(fund.=dec.muito)ENTÃO (merc.=inv. médio)

(10) SE (set.ele.=estável)E(pet.=estável)E(fund.=pouco)ENTÃO (merc.=inv. médio)

(11) SE (set.ele.=cresc.pouco)E(pet.=cresc.pouco)E(fund.=cresc.pouco)ENTÃO (merc.=inv. médio)

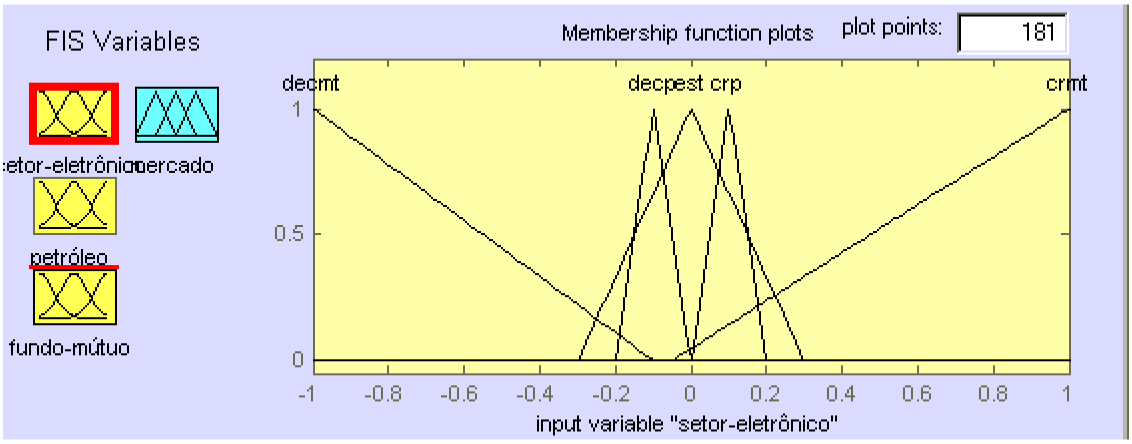
(12) SE (set.ele.=cresc.pouco)E(pet.=cresc.pouco)E(fund.=cresc.muito)ENTÃO (merc.=inv. alto)

(13) SE (set.ele.=cresc.pouco)E(pet.=cresc.muito)E(fund.=cresc.pouco)ENTÃO (merc.=inv. alto)

(14) SE (set.ele.=cresc.muito)E(pet.=cresc.muito)E(fund.=cresc.pouco)ENTÃO (merc.=inv. alto)

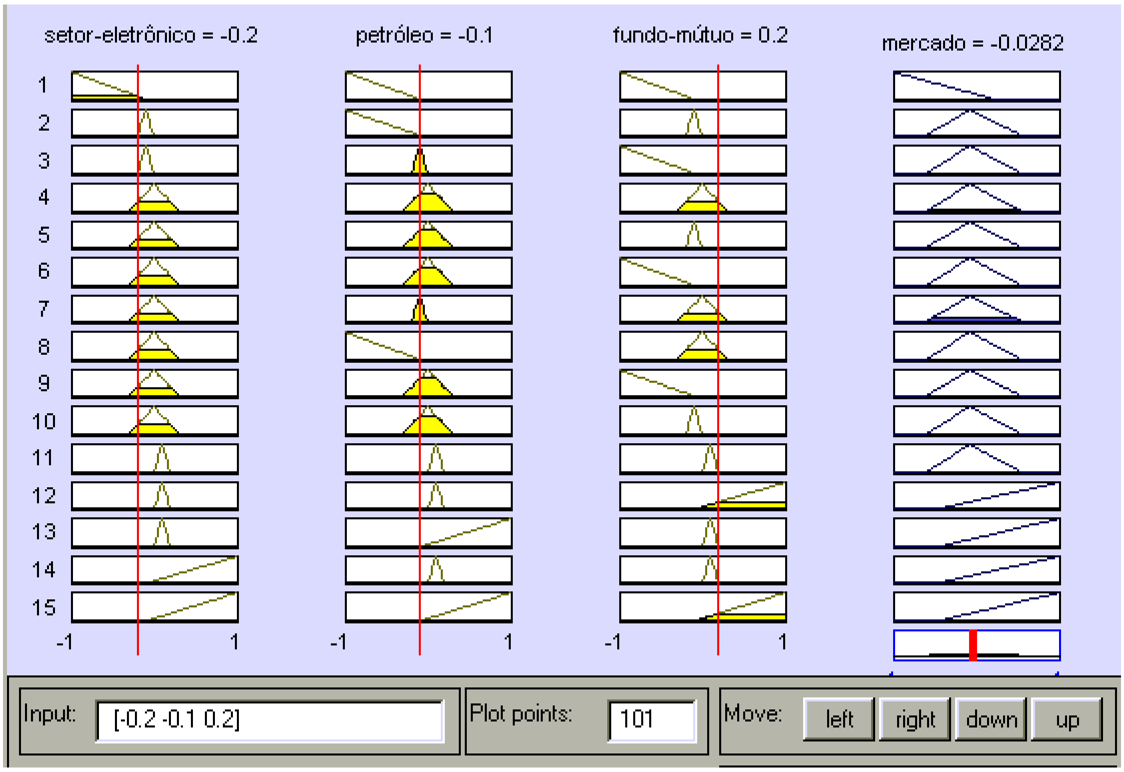
(15) SE (set.ele.=cresc.muito)E(pet.=cresc.muito)E(fund.=cresc.muito)ENTÃO (merc.=inv. alto)

Para os três setores, os gráficos para as funções de pertinência serão iguais. A figura a seguir mostra as funções de pertinência para o setor eletrônico.

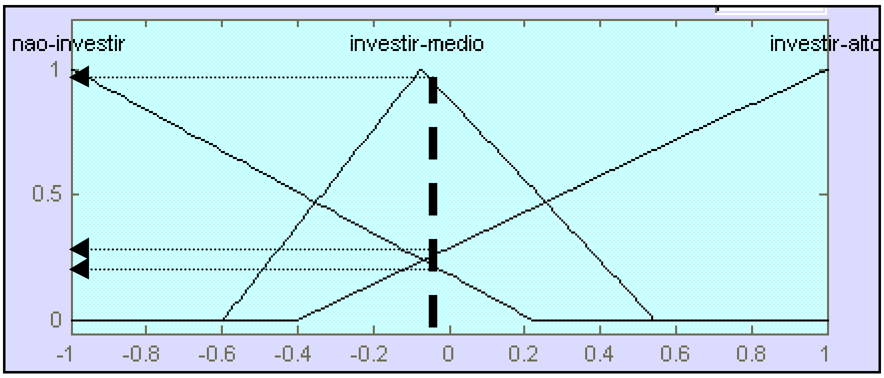


A figura a seguir apresenta o quadro para os três setores: eletrônico, petróleo e fundo mútuo com a combinação das funções de pertinência.

O quadro simulado foi de que na semana anterior o setor de eletrônicos ofereceu uma retração de 20%, o setor petrolífero uma retração de 10% e o fundo uma rentabilidade de 20%. O resultado final para o *centro de área* foi um valor de mercado = –0,028. Esse valor então é analisado em termos das funções de pertinência do mercado que tem como saída, “não investir”, “investir médio” e “investir alto”.



Para a decisão, deve-se analisar o valor –0,028 em termos de mercado *fuzzy*. A figura a seguir mostra as possibilidades.



Observando as três setas percebe-se que "não investir" tem a menor pertinência, e "investir alto" também possui baixa pertinência. Já a solução "investir médio" tem alto grau de pertinência e portanto é a recomendação a ser seguida.Assim, a solução é **investir médio**.

5.6 Aplicação em Caso Real (Política Brasileira de Juros)

Desde o período de eleição de 2002, a incerteza de investidores estrangeiros quanto à política do novo governo fez aumentar a volatilidade dos principais parâmetros econômicos e financeiros. O banco central do Brasil, a partir de Novembro agendou uma política austera sobre a taxa básica de juros. Após dois anos permanecendo nos patamares de 17% a 19%, a taxa selic saltou para 26,5%. Apresenta-se aqui como um exemplo real, uma possível forma de abordagem do problema de controle da inflação através da ação do banco central via taxa de juros.

Neste caso, pode-se adotar como entrada no sistema diversas variáveis que são indicadores econômicos, tais como, inflação, taxa de câmbio, nível de desemprego, balança comercial, volumes de vendas interna, entre tantos outros. No entanto, adota-se aqui apenas a título de exemplo a taxa de inflação e câmbio. A variável de decisão seria a política sobre a taxa de juros sellic.

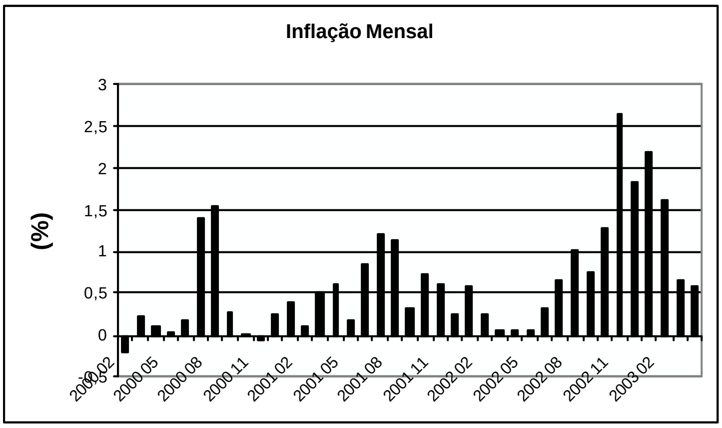
A primeira abordagem a ser realizada é verificando a série histórica para conhecimento estatístico do problema. Adotou-se como período de observação Fevereiro de 2000 à Abril de 2003. As taxas colhidas são as taxas médias mensais adquiridas da base de dados do IPEA.

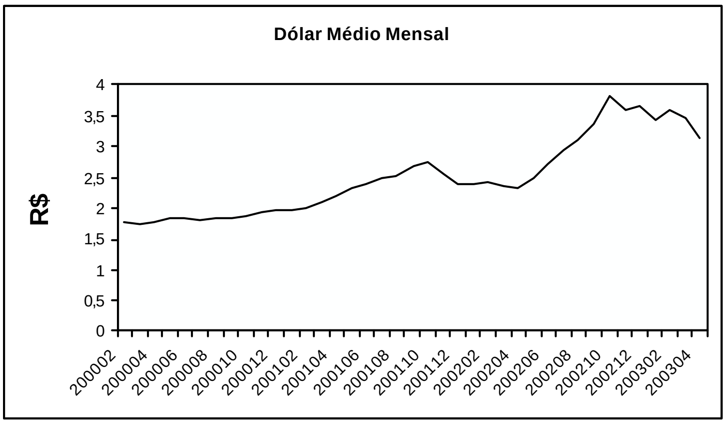
Então deve-se traçar um perfil do cenário otimista, neutro e pessimista das séries históricas. Isso facilitará a abordagem *fuzzy* baseada no conhecimento quantitativo do problema. Para esse período coletado, a tabela a seguir apresenta os cenários para 95% de confiança. Isto significa dizer que o cenário otimista foi criado retirando-se da média duas vezes o desvio padrão. O cenário pessimista somou-se à média duas vezes o desvio padrão, e o padrão neutro são os valores das próprias médias.

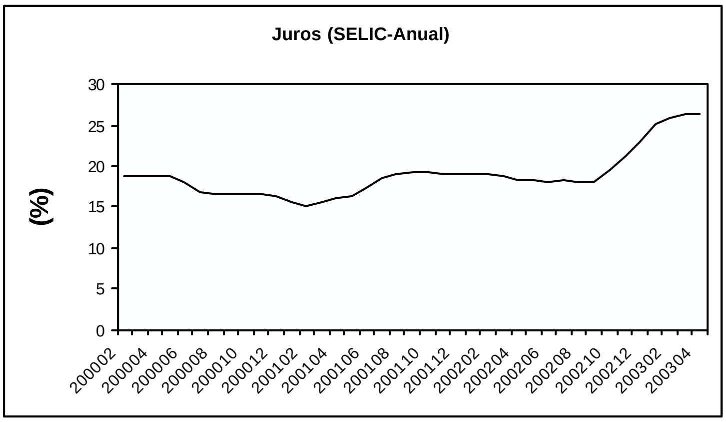
	inflação	dólar	selic
média	0,646636	2,486707	18,83741
desv.pad.	0,658822	0,62394	2,856221
otimista	-0,671008	1,238827	13,12496
pessimista	1,96428	3,734587	24,54985

Os gráficos a seguir retratam o panorama para esse período de cerca de 3 anos, mostrando o impacto da taxa de juros selic no que diz respeito ao câmbio e inflação. Percebe-se claramente a queda da inflação nos primeiros meses do ano de 2003 e a queda da taxa de câmbio para a taxa selic constante e igual a 26,5%.

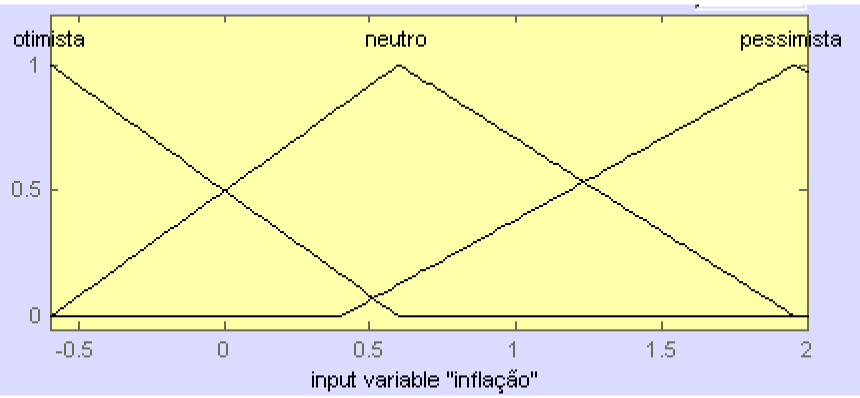
As regras *fuzzy* deverão ser baseadas nesses cenários para uma estimativa da ação do banco central brasileiro quanto a política da taxa de juros.

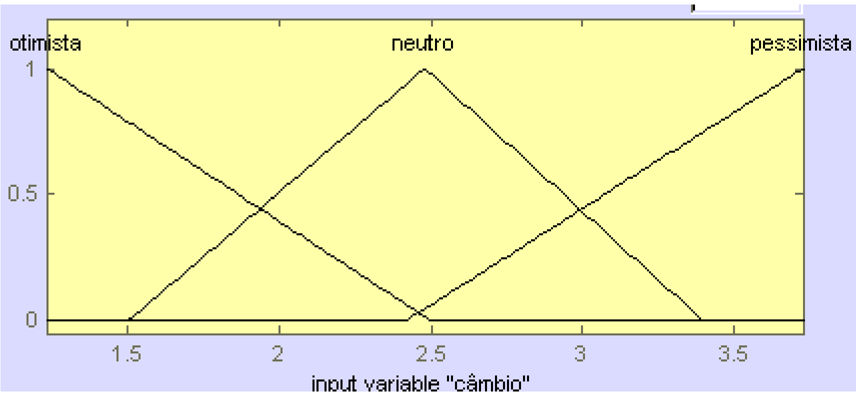

Inflação Mensal
(%)
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
-0,5
2000.02
2000.05
2000.08
2000.11
2001.02
2001.05
2001.08
2001.11
2002.02
2002.05
2002.08
2002.11
2003.02

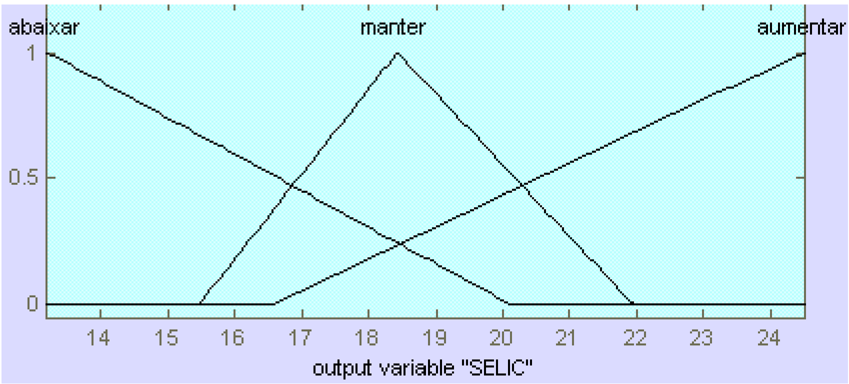

Dólar Médio Mensal
R$
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
200002
200004
200006
200008
200010
200012
200102
200104
200106
200108
200110
200112
200202
200204
200206
200208
200210
200212
200302
200304


Juros (SELIC-Anual)
(%)
30
25
20
15
10
5
0
200002
200004
200006
200008
200010
200012
200102
200104
200106
200108
200110
200112
200202
200204
200206
200208
200210
200212
200302
200304

Com base na estatística das séries históricas, as variáveis *fuzzy* poderiam ser compostas pelas seguintes funções de pertinência.







As regras para a tomada de decisão, foram baseadas nas afirmações e atitudes do banco central no passado remoto. Claro que são regras hipotéticas e bastante simplificadas, mas demonstram como agir com mais variáveis escolhidas. As regras para tomada de decisão foram:

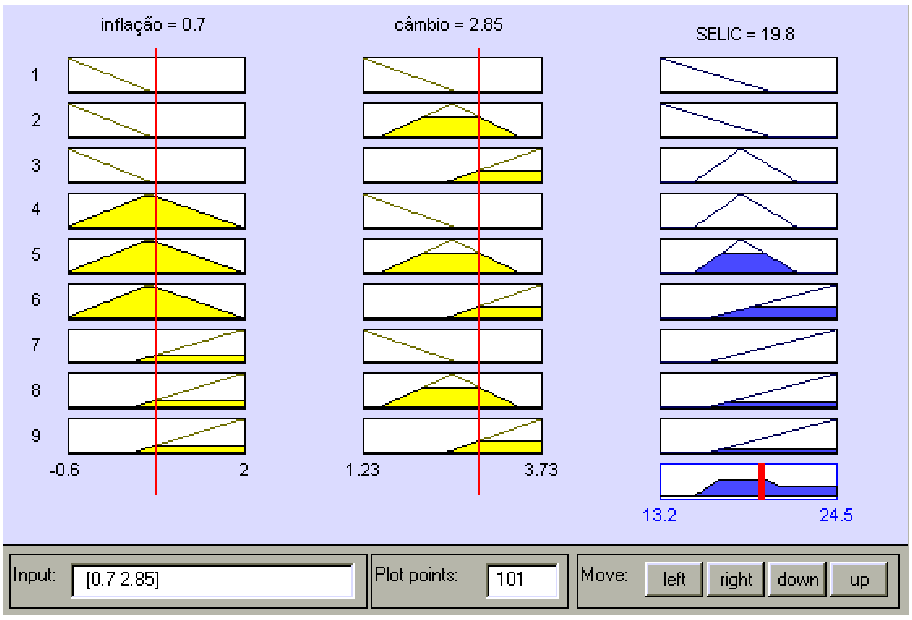
- SE (inflação = otimista) E (cambio = otimista) ENTÃO (selic = abaixar).
- SE (inflação = otimista) E (cambio = neutro) ENTÃO (selic = abaixar).
- SE (inflação = otimista) E (cambio = pessimista) ENTÃO (selic = manter).
- SE (inflação = neutro) E (cambio = otimista) ENTÃO (selic = manter).
- SE (inflação = neutro) E (cambio = neutro) ENTÃO (selic = manter).
- SE (inflação = neutro) E (cambio = pessimista) ENTÃO (selic = aumentar).
- SE (inflação = pessimista) E (cambio = otimista) ENTÃO (selic = aumentar).
- SE (inflação = pessimista) E (cambio = neutro) ENTÃO (selic = aumentar).
- SE (inflação = pessimista) E (cambio = pessimista) ENTÃO (selic = aumentar).

Então uma vez colocada as regras *fuzzy* o "fuzzificador" fornecerá a saída que deverá ser interpretada quantitativamente e "defuzzificada" para uma resposta qualitativa. Vamos imaginar um cenário com as seguintes taxas:

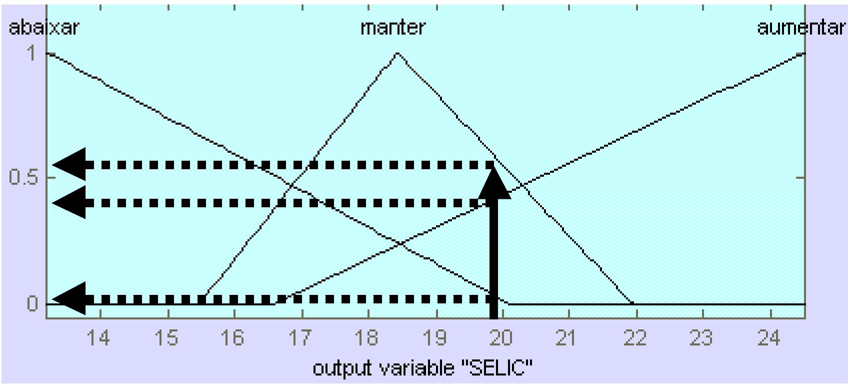
Inflação = 0,7%

Câmbio = R$ 2,85

Qual a decisão a ser tomada?



Percebe-se na figura anterior que a regra do centro de área forneceu como valor *fuzzy* 19,8 para selic. Voltando-se às funções de pertinência de saída para selic faz-se o caminho de volta para à variável lingüística, conforme figura a seguir.



Como a função de pertinência é maior para a variável manter, a decisão seria então **MANTER** a taxa selic.

5.7 Conclusões e Sugestões

Com as novas dimensões dos mercados tradicional e virtual, decisões rápidas e seguras devem ser tomadas em questões de segundos. A utilização do *e-commerce* e *e-business* fez com que as ferramentas na área de finanças se atualizassem para atender a demanda e rapidez necessária para os negócios.

Somente a utilização de estatística como ferramenta de análise já está em desuso nas maiores empresas mundiais. A estatística hoje em dia deve ser aliada à ferramentas que se baseiam no aprendizado humano, que na maioria das vezes não estão contemplados em números.

Novas ferramentas da área computacional, tais como redes neurais, *fuzzy* system expert system, estão cada vez mais aptas a serem utilizadas na área de finanças. Neste texto, apresentamos apenas uma delas, a abordagem *fuzzy*. Tentamos aliar e mostrar que também só a utilização da regra *fuzzy* não consegue satisfazer uma boa tomada de decisão sem um histórico fiel demonstrado pela estatística.

Assim, para finalizar, a estatística não deve mais ser utilizada de maneira isolada. Técnicas híbridas tem demonstrado sucesso frente à mono utilização especialista de ferramentas. No mercado existem diversos *softwares* específicos para utilização da regra *fuzzy* seja na área de finanças seja na área de ciências, sobretudo em ciência da computação. Utilizou-se neste texto o ambiente ***Matlab*** com o ***toolbox*** de ***fuzzy-system*** já bastante tradicional nas ciências exatas desde a década de 1990.

Esperamos assim, através do texto, satisfazer os anseios de aprendizado de uma nova abordagem em teoria da decisão, abordagem essa contemporânea aliada às tradicionais ferramentas conhecidas.