1 Matematična logika

Kaj je izjava? *Trdilna izjava*, ki je bodisi pravilna ali pa nepravilna.[1]

Prispevek logike k znanju je v odkrivanju novih izjav, ki so logične posledice drugih.

- Celotno teorijo naravnih števil je moč zgraditi iz 5 osnovnih izjav, ki jih običajno imenujemo Peanovi aksiomi. Teh pet izjav lahko z besedico "in" povežemo v eno samo izjavo.
- Hilbert je pokazal, da je vso kopico izrekov elementarne geometrije moč dokazati iz 20 aksiomov (osnovnih izjav).
- V splošnem so matematične strukture definirane s peščico aksiomov, iz katerih se s pomočjo logičnega sklepanja izpelje izreke in gradi teorije.

O razvoju logike in teorije množic si lahko preberete v Prijateljevi knjigi (Osnove matematične logike, 1. poglavje, 2. podpoglavje).

1.1 Osnovne povezave in pravilnostne tabele

Negacija: Ne A; ni res, da A
Oznaka: $\neg A$.
$\neg A$ je negacija izjave A. Izjava $\neg A$ je pravilna, če je A nepravilna, in je nepravilna, če je A pravilna.
Zgled: *Jutri bo dež. Negacija: Jutri ne bo dežja. (Ni res, da bo jutri dež.)*

Vrednost vsake sestavljene izjave je enolično določena z vrednostmi osnovnih izjav, ki v njej nastopajo. Za nazoren pregled te odvisnosti si pomagamo s t.i. *pravilnostnimi tabelami*. Dogovorimo se, da bomo vrednost *pravilno* označevali z 1, vrednost *nepravilno* pa z 0.

Pravilnostna tabela za negacijo:

	A	$\neg A$
1.	1	0
2.	0	1

Konjunkcija: A in B
Oznaka: $A \wedge B$
$A \wedge B$ je konjunkcija izjav A in B. Ta sestavljena izjava je pravilna, kadar sta obe izjavi A in B pravilni, in nepravilna sicer.
Zgled: *Sneg pada. Veter piha. Konjunkcija: Sneg pada in veter piha.*

Disjunkcija: A ali B (inkluzivno)
Oznaka: $A \vee B$
$A \vee B$ je disjunkcija izjav A in B. Ta sestavljena izjava je pravilna, brž ko je ena izmed izjav A in B pravilna, in nepravilna sicer.

[1] Izjave boste podrobneje obravnavali na uvodnem predavanju pri Analizi I.

Zgled: *Janez bo jutri vprašan fiziko. Janez bo jutri vprašan matematiko. Disjunkcija: Janez bo jutri vprašan fiziko ali matematiko.*

Implikacija: Če A, potem B
Oznaka: $A \Rightarrow B$

$A \Rightarrow B$ je implikacija izjav A in B. Ta sestavljena izjava je nepravilna, kadar je A pravilna, B pa nepravilna. V vseh ostalih primerih je pravilna.

A - antecedens, zadostni pogoj
B - konsekvens

Zgled: : *Če Andrej naredi maturo, potem mu kupim kolo.*

Ekvivalenca: A če in samo če B
Oznaka: $A \Leftrightarrow B$

$A \Leftrightarrow B$ je ekvivalenca izjav A in B. Ta sestavljena izjava je pravilna, kadar sta izjavi A in B ali obe pravilni ali obe nepravilni. V vseh ostalih primerih je nepravilna.

"$A \Leftrightarrow B$"beremo:
A če in samo če B
A tedaj in samo tedaj kot B
A natanko tedaj kot B

Zgled: *Andreju kupim kolo, če in samo če naredi maturo.*

Pravilnostne tabele za konjuncijo, disjunkcijo, implikacijo in ekvivalenco:

	A, B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1.	1, 1	1	1	1	1
2.	1, 0	0	1	0	0
3.	0, 1	0	1	1	0
4.	0, 0	0	0	1	1

Izjave, dobljene z uprabo 5 osnovnih povezav, so *sestavljene*. V splošnem pravimo, da je dana izjava *sestavljena*, če je izid zaporedne uporabe 5 osnovnih povezav na osnovnih izjavah $A_1, \ldots, A_n$, pa tudi na izjavah, ki smo jih že prej napravili. Dvomom o tem, katera povezava sledi prej in katera pozneje, se izognemo z uporabo oklepajev. Uporabo oklepajev pa z uporabo naslednjega dogovora omejimo, kolikor se da:

- Kadar izjava nastopa osamljeno, je ne oklenemo z oklepaji:

  npr.: namesto $(A \wedge B)$ pišemo $A \wedge B$

- Kadar ista vrsta povezave nastopi večkrat zapored, jo obravnavamo z leve proti desni.

  npr.: namesto $((A \wedge B) \wedge C) \wedge D$ pišemo $A \wedge B \wedge C \wedge D$

- Upoštevamo naslednji prednostni red operacij: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ (v vsaki sestavljeni izjavi najprej upoštevamo negacije, za njimi disjunkcije itd.)

  npr.: namesto $(A \wedge B) \Rightarrow (\neg C)$ pišemo $A \wedge B \Rightarrow \neg C$

Pravilnostne tabele lahko zapišemo tudi za sestavljene izjave, z uporabo poljubnega zaporedja, s katerim sestavimo izjavo.

Zgled:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (\neg A \vee C) \tag{1}$$

	A, B, C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$\neg A$	$\neg A \vee C$	(1)
1.	1, 1, 1	1	1	1	0	1	1
2.	1, 1, 0	1	0	0	0	0	0
3.	1, 0, 1	0	1	0	0	1	0
4.	1, 0, 0	0	1	0	0	0	0
5.	0, 1, 1	1	1	1	1	1	1
6.	0, 1, 0	1	0	0	1	1	0
7.	0, 0, 1	1	1	1	1	1	1
8.	0, 0, 0	1	1	1	1	1	1

Naj bo A izjava, sestavljena iz osnovnih izjav $A_1, \ldots, A_n$.

Določilo izjave A: določitev vrednosti 1 / 0 (pravilno / nepravilno) vsaki od izjav $A_1, \ldots, A_n$

Če je izjava sestavljena iz n osnovnih izjav, potem ima izjava natanko 2^n določil.

Dve vrsti izjav si zaslužita posebno ime:

- *Tavtologija*: pri vseh določilih pravilna izjava (primer: $A \vee \neg A$)
- *Protislovje*: pri vseh določilih nepravilna izjava (primer: $A \wedge \neg A$)

Zgled: Za vsako od naslednjih dveh izjav s pomočjo pravilnostne tabele določi, ali je izjava tavtologija in ali je protislovje.

(a) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vee B$,

(b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$.

Pravilnostna tabela za prvo izjavo:

	A, B	$A \Rightarrow B$	$A \vee B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vee B$
1.	1, 1	1	1	1
2.	1, 0	0	1	1
3.	0, 1	1	1	1
4.	0, 0	1	0	0

Izjava ni ne tavtologija ne protislovje.

Pravilnostna tabela za drugo izjavo:

	A, B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$
1.	1, 1	1	0	0	0
2.	1, 0	0	1	1	0
3.	0, 1	1	0	0	0
4.	0, 0	1	1	0	0

Izjava ni tavtologija, je pa protislovje. ▲

Domača naloga:

1. Dani sta izjavi A: "Andrej govori francosko." in B: "Andrej govori dansko." V naravnem jeziku zapiši naslednje sestavljene izjave:
(a) $A \vee B$
(b) $A \wedge B$
(c) $A \wedge \neg B$
(d) $\neg A \vee \neg B$
(e) $\neg\neg A$
(f) $\neg(\neg A \wedge \neg B)$

2. Dani sta izjavi A: "Janez je bogat." in B: "Janez je srečen."
Naslednje izjave zapiši simbolično:
(a) Če je Janez bogat, potem je nesrečen.
(b) Janez ni niti srečen niti bogat.
(c) Janez je srečen, samo če je reven.
(d) Janez je reven natanko tedaj, ko je nesrečen.

Vitezi in oprode

S pomočjo pravilnostnih tabele lahko rešujemo uganke o vitezih in oprodah. Vitezi vselej govorijo resnico, oprode pa vselej lažejo.
Naloga: Artur in Bine podata naslednji izjavi:

- Artur: "Bine je oproda."
- Bine: "Nobeden od naju ni oproda."

Za vsakega od njiju določi, ali je vitez ali oproda!

Naj bo A izjava: "Artur je vitez," B pa izjava: "Bine je vitez."

Določimo pravilnost izjav A in B s pomočjo pravilnostne tabele. Iz Arturjeve izjave sklepamo na pravilnost izjave $A \Leftrightarrow \neg B$. Iz Binetove izjave sklepamo na pravilnost izjave $B \Leftrightarrow A \wedge B$. Torej je konjunkcija teh dveh izjav pravilna:

$$(A \Leftrightarrow \neg B) \wedge (B \Leftrightarrow A \wedge B)\,.$$

Za kateri nabor določil za A in B je ta izjava pravilna?

A	B	$\neg B$	$A \Leftrightarrow \neg B$	$A \wedge B$	$B \Leftrightarrow A \wedge B$	$(A \Leftrightarrow \neg B) \wedge (B \Leftrightarrow A \wedge B)$
1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0

Artur je vitez, Bine pa oproda. □

Še ena podobna naloga: Tokrat podata Artur in Bine naslednji izjavi:

- Artur: “Jaz in Bine nisva iste vrste.”
- Bine: “Natanko eden od naju je vitez.”

Naslednja konjunkcija izjav je pravilna:

$$[A \Leftrightarrow (A \land \neg B) \lor (\neg A \land B)] \land [B \Leftrightarrow (A \land \neg B) \lor (\neg A \land B)]\,. \tag{2}$$

A	B	$A \land \neg B$	$\neg A \land B$	$(A \land \neg B) \lor (\neg A \land B)$ $(*)$	$B \Leftrightarrow (*)$	$A \Leftrightarrow (*)$	(2)
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1

Oba sta oprodi. □

Domača naloga: Reši naslednji nalogi o vitezih in oprodah:

- Artur: “Ni res, da je Bine oproda.” Bine: “Nisva oba iste vrste.”
- Artur: “Ni res, da je Cene oproda.” Bine: “Cene je vitez ali pa sem jaz vitez.” Cene: “Bine je oproda.”

□

Videli smo, kako priredimo vsaki sestavljeni izjavi njeno pravilnostno tabelo. Obratna naloga: Če imamo dane neodvisne izjave $A_1, \ldots, A_n$, kako konstruirati iz njih sestavljeno izjavo, ki bo imela pri vsakem izmed 2^n določil *vnaprej predpisano logično vrednost?*

Da bi rešili to nalogo, si najprej poglejmo t.i. *logične ekvivalence.*

1.2 Logične ekvivalence

Naj bosta B in C izjavi, sestavljeni iz izjav $A_1, \ldots, A_n$. Če je izjava $B \Leftrightarrow C$ tavtologija, pravimo, da sta B in C *logično ekvivalentni.* Za logiko: $B = C$ (dve različni obliki iste izjave).

Naštejmo najpoglavitnejše logične ekvivalence:

1. $A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$, zakon dvakratne negacije
2. $A \land B \Leftrightarrow B \land A$, $\quad A \lor B \Leftrightarrow B \lor A$, komutativnost konjunkcije in disjunkcije
3. $A \land (B \land C) \Leftrightarrow (A \land B) \land C$, $\quad A \lor (B \lor C) \Leftrightarrow (A \lor B) \lor C$, asociativnostna zakona
4. $A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$, $\quad A \land (B \lor C) \Leftrightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$, distributivnostna zakona
5. $A \land A \Leftrightarrow A$, $\quad A \lor A \Leftrightarrow A$
6. $\neg(A \land B) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B$
7. $\neg(A \lor B) \Leftrightarrow \neg A \land \neg B$, De Morganova zakona (6. in 7.)

8. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
9. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$
10. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
11. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
12. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$, komutativnost ekvivalence
13. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$
14. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
15. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
16. $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$

Za vajo se prepričajmo v pravilnost 16. ekvivalence s pomočjo pravilnostne tabele:

	A, B	$A \Leftrightarrow B$	$\neg(A \Leftrightarrow B)$	$\neg B$	$A \Leftrightarrow \neg B$
1.	1, 1	1	0	0	0
2.	1, 0	0	1	1	1
3.	0, 1	0	1	0	1
4.	0, 0	1	0	1	0

Domača naloga: S pomočjo pravilnostnih tabel (ali kako drugače) se prepričaj v pravilnost preostalih ekvivalenc.

S pomočjo zgornjih ekvivalenc se lahko prepričamo, da 5 osnovnih povezav med izjavami ni med seboj neodvisnih. Vse sestavljene izjave lahko izrazimo *samo z dvema osnovnima povezavama*, če ju le primerno izberemo. Zadošča že:

(a) negacija $\neg$ in disjunkcija $\vee$

(b) negacija $\neg$ in konjunkcija $\wedge$

(c) negacija $\neg$ in implikacija $\Rightarrow$

Te izbire so edine mogoče.

Zgled:

Vzemimo izjavo "Če je kakšna reč lepa, potem je minljiva."
($\neg$ in $\vee$) Reč ni lepa, ali pa je minljiva.
($\neg$ in $\wedge$) Ni res, da je kakšna reč lepa in ni minljiva.
($\neg$ in $\Rightarrow$) Če kakšna reč ni minljiva, potem ni lepa. ▲

1.3 Izbrani obliki izjav

Od zadnjič dolgujemo še rešitev naslednje naloge: iz danih izjav $A_1, \ldots, A_n$ konstruiraj izjavo, ki bo imela pri vsakem izmed 2^n določil vnaprej predpisano vrednost.

1. način: Vsakemu določilu d za izjave $A_1, \ldots, A_n$ priredimo konjunkcijo

$$C_1 \wedge \ \ldots \ \wedge C_n \,,$$

in sicer takole: izjava je $C_i = A_i$, če ima A_i v določilu d vrednost 1, in naj bo $C_i = \neg A_i$, sicer. Tako dobljena konjunkcija je pravilna pri določilu d in nepravilna pri vsakem drugem določilu. Imenuje se *osnovna konjunkcija določila d.*

Sedaj pa napravimo osnovne konjunkcije natanko tistih določil, za katere naj bo iskana izjava pravilna, in jih povežimo z disjunkcijami!

Tako dobljeno izjavo imenujemo *izbrana disjunktivna oblika.*

Ta postopek deluje v vsakem primeru, le v primeru protislovja ne! Za protislovje lahko iskano izjavo konstruiramo posebej, npr. $A_1 \wedge \neg A_1$.

2. način:
d - določilo
Sedaj tvorimo *osnovno disjunkcijo določila* d:

$$D_1 \vee \ \cdots \ \vee D_n \,,$$

kjer je
$D_i = \neg A_i$, če ima A_i v d vrednost 1 in
$D_i = A_i$, če ima A_i v d vrednost 0.

Tako dobljena disjunkcija je nepravilna pri d in pravilna pri vsakem drugem določilu.

Napravimo osnovne disjunkcije natanko tistih določil, za katere naj bo iskana sestavljena izjava nepravilna, in jih povežimo med seboj s konjunkcijami.

Tako dobljeno izjavo imenujemo *izbrana konjunktivna oblika.*

Ta postopek deluje v vsakem primeru, le v primeru tavtologije ne! Za tavtologijo lahko konstruiramo iskano izjavo posebej, npr. $A_1 \vee \neg A_1$ ("zakon izključene tretje možnosti", vsaka izjava je bodisi pravilna bodisi nepravilna).

Zgled: Iščemo izjavo D, sestavljeno iz izjav A, B in C, za katero velja:

A	B	C	D	osnovna konjunkcija	osnovna disjunkcija
1	1	1	1	$A \wedge B \wedge C$	
1	1	0	0		$\neg A \vee \neg B \vee C$
1	0	1	0		$\neg A \vee B \vee \neg C$
1	0	0	0		$\neg A \vee B \vee C$
0	1	1	1	$\neg A \wedge B \wedge C$	
0	1	0	0		$A \vee \neg B \vee C$
0	0	1	1	$\neg A \wedge \neg B \wedge C$	
0	0	0	1	$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$	

Izbrana disjunktivna oblika izjave D je

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)\,.$$

izbrana konjunktivna oblika pa je

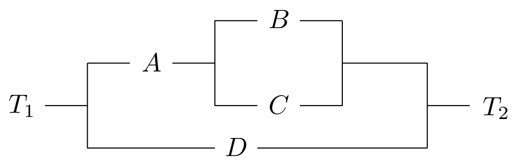
$$(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)\,.$$

$\square$

1.4 Preklopna vezja

Logične izjave lahko modeliramo s t.i. preklopnimi vezji.

Preklopno vezje je sistem žic in preklopov (stikal), ki vežejo dve izhodni točki, med katerima obstaja električna napetost. Vsako stikalo je bodisi "zaprto" (če skozenj teče tok) ali "odprto" (če tok ne teče).

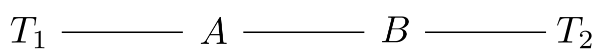


Slika 1: Primer vezja s štirimi stikali

Recimo, da imamo tako vezje in da vemo, katera stikala so odprta in katera zaprta. Zanima nas, ali je celotno vezje "zaprto" (tj., skozenj teče tok) ali "odprto" (če tok ne teče).

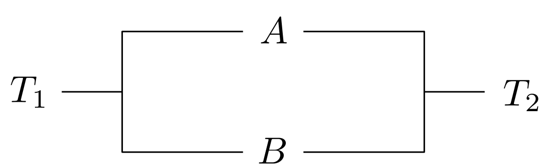
Poglejmo si dve zelo preprosti vezji:

(1) *zaporedno vezani stikali:*



Zaporedno vezje je zaprto natanko tedaj, kadar sta obe stikali zaprti: **konjunkcija**.

(2) *vzporedno vezani stikali:*



Vzporedno vezje je zaprto natanko tedaj, kadar je vsaj eno stikalo zaprto: **disjunkcija**.

Vsakemu takemu vezju ustreza neka logična izjava, sestavljena iz izjav, ki ustrezajo stikalom.

Obratno: če omogočamo *identična* in *obratna* stikala, potem lahko vsako sestavljeno izjavo predstavimo z vezjem!

Identični stikali sta taki stikali, ki sta bodisi hkrati odprti ali hkrati zaprti.

Obratni stikali sta taki stikali, da je natanko eno od njiju odprto.

Zveza med vezji in izjavami: *vezje je zaprto natanko tedaj, ko je ustrezna izjava pravilna, in odprto sicer.*

Zgled: Vzemimo izjavo

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (\neg A \vee C)$$

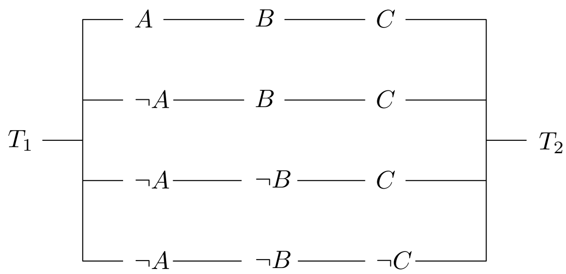
V poglavju 1.2. smo izračunali pravilnostno tabelo te izjave:

	A	B	C	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (\neg A \vee C)$
1.	1	1	1	1
2.	1	1	0	0
3.	1	0	1	0
4.	1	0	0	0
5.	0	1	1	1
6.	0	1	0	0
7.	0	0	1	1
8.	0	0	0	1

V prejšnjem podpoglavju smo zapisali to izjavo v izbrani disjunktivni obliki kot:

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)\,.$$

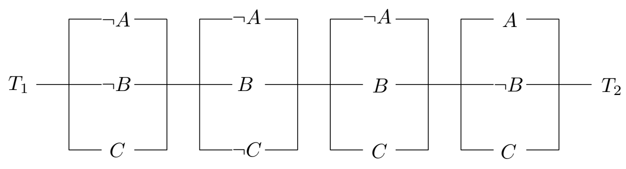
Tej obliki ustreza naslednje vezje:



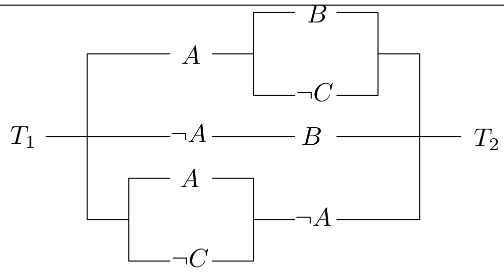
Izbrani konjunktivni obliki

$$(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)$$

pa ustreza vezje



Vidimo, da dani izjavi ustreza več preklopnih vezij. Pri dejanski konstrukciji vezij, ki simulirajo dano izjavo, je torej utemeljena zahteva, da naj bo vezje čimbolj enostavno, da naj ustreza določenim predpisom itd. (s tem se tu ne bomo ukvarjali). ▲



Zgled: Dano je naslednje preklopno vezje:

Pri katerih položajih stikal je vezje zaprto? Problem rešimo z logiko.

Prirejena sestavljena izjava, recimo ji D, je:

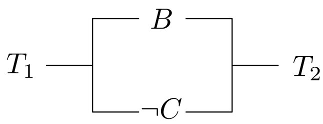
$$(A \wedge B \vee \neg C) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \vee \neg C \wedge \neg A)\,.$$

Njena pravilnostna tabela pa je:

	A	B	C	$A \wedge B \vee \neg C$	$\neg A \wedge B$	$A \vee \neg C \wedge \neg A$	D
1.	1	1	1	1	0	0	1
2.	1	1	0	1	0	0	1
3.	1	0	1	0	0	0	0
4.	1	0	0	1	0	0	1
5.	0	1	1	0	1	0	1
6.	0	1	0	0	1	1	1
7.	0	0	1	0	0	0	0
8.	0	0	0	0	0	1	1

Vidimo, da je vezje odprto natanko takrat, ko je stikalo B odprto, C pa zaprto, in zaprto v vseh drugih primerih.

Torej bi vezje lahko zamenjali tudi z naslednjim preprostejšim vezjem:



Do istega rezultata lahko pridemo tudi po logični poti:

Iz pravilnostne tabele razberemo izbrano konjunktivno obliko izjave D

$$(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee \neg C)\,.$$

zaradi distributivnosti je ta izjava ekvivalentna izjavi

$$(\neg A \wedge A) \vee (B \vee \neg C)$$

ker pa je konjunkcija $\neg A \wedge A$ vselej nepravilna, je ta izjava ekvivalentna izjavi $B \vee \neg C$.

▲

Zaključimo poglavje o vezjih še z enim zgledom bolj praktične narave.

Zgled: Imamo odbor 3 poslancev, ki glasujejo o posameznih predlogih po določenem volilnem načelu. Konstruirati je treba tako preklopno vezje, ki bo nemudoma sporočilo, ali je predlog sprejet ali ne.

Oglejmo si dve možni volilni načeli:

(a) načelo enostavne večine

(b) načelo enostavne večine, pri čemer ima poslanec A pravico veta

Pravilnostna tabela veli:

A	B	C	(a)	(b)
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Če se odločimo za izbrano disjunktivno obliko, potem se zaželena izjava v primeru (a) glasi

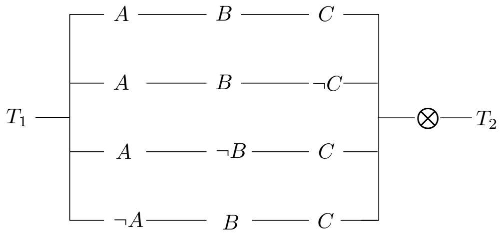
$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$$

v primeru (b) pa

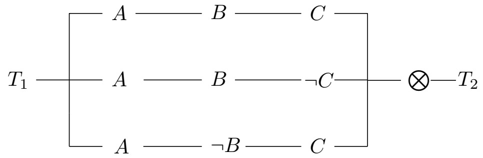
$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)\,.$$

Ustrezni vezji pa sta:

(a)



(b)



Domača naloga: Sestavite vezje, prirejeno izjavi

$$(A \Rightarrow B) \vee (\neg B \Rightarrow C) \vee (A \Leftrightarrow C)\,.$$

1.5 Logične implikacije

Logična implikacija je tavtologija, pri kateri je glavna povezava implikacija.

Veljajo naslednje resnice o logičnih implikacijah:

1. Če je antecedens tavtologija, mora biti tudi konsekvens tavtologija.
2. Če je konsekvens protislovje, mora biti tudi antecedens protislovje.
3. Če je konsekvens tavtologija, je lahko antecedens katerakoli izjava.
4. Če je antecedens protislovje, je lahko konsekvens katerakoli izjava.
5. Vsaka izjava logično implicira samo sebe.
6. Vsaka izjava, ki logično implicira hkrati kakšno izjavo A in njeno negacijo $\neg A$, mora biti protislovje.
7. Izjava, ki logično implicira svojo negacijo, je protislovje.

Zgled logične implikacije:

$$A \Rightarrow B \Rightarrow (A \wedge C \Rightarrow B \wedge C)\,.$$

Dokažimo jo. Ta implikacija bi bila nepravilna le pri takem določilu, pri katerem bi bila izjava $A \Rightarrow B$ pravilna, izjava $A \wedge C \Rightarrow B \wedge C$ pa nepravilna. To je po definiciji implikacije res samo, če sta izjavi $A \wedge C$ pravilni, izjava B pa nepravilna. V tem primeru pa je implikacija $A \Rightarrow B$ nepravilna, kar je v nasprotju s predpostavko, da je pravilna. Torej ne obstaja tako določilo, za katero bi bila izjava $A \Rightarrow B$ pravilna, izjava $A \wedge C \Rightarrow B \wedge C$ pa nepravilna. Implikacija je res tavtologija.

Na vajah boste spoznali in dokazali številne druge logične implikacije.

Nekaj poglavitnih logičnih implikacij

1. $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
2. $\neg B \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A$
3. $\neg A \wedge (A \vee B) \Rightarrow B$
4. $A \wedge B \Rightarrow A$
5. $A \Rightarrow A \vee B$
6. $A \wedge \neg A \Rightarrow B$
7. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
8. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B))$
9. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

10. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge C \Rightarrow B \wedge C)$
11. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \vee C \Rightarrow B \vee C)$
12. $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$
13. $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
14. $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
15. $A \wedge (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow B$
16. $\neg A \wedge (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \neg B$
17. $B \Rightarrow (A \Leftrightarrow A \wedge B)$
18. $\neg B \Rightarrow (A \Leftrightarrow A \vee B)$
19. $(A \Rightarrow (B \wedge \neg B)) \Rightarrow \neg A$

Za vajo se prepričajte o veljavnosti teh logičnih implikacij. Namesto pravilnostnih tabel lahko uporabite tole metodo: *Izhajamo iz definicije implikacije in poskušamo konstruirati tako določilo, za katero bi bila implikacija nepravilna. Potem se mora seveda izkazati, da takega določila ni.*

Zgled: Dokažimo 10. logično implikacijo s seznama:

$$A \Rightarrow B \Rightarrow (A \wedge C \Rightarrow B \wedge C)$$

Ta implikacija bi bila nepravilna le pri takem določilu, pri katerem bi bila izjava $A \Rightarrow B$ pravilna, izjava $A \wedge C \Rightarrow B \wedge C$ pa nepravilna. To je po definiciji implikacije res samo, če sta izjavi $A \wedge C$ pravilni, izjava B pa nepravilna. V tem primeru pa je implikacija $A \Rightarrow B$ nepravilna, kar je v nasprotju s predpostavko, da je pravilna. Torej ne obstaja tako določilo, za katero bi bila izjava $A \Rightarrow B$ pravilna, izjava $A \wedge C \Rightarrow B \wedge C$ pa nepravilna. Implikacija 10. je res tavtologija. ▲

1.6 Načini dokazovanja

Logične implikacije uporabljamo pri dokazovanju novih trditev iz aksiomov in že dokazanih trditev. Poglejmo si nekaj načinov dokazovanja.

1) Direktni dokaz implikacije $A \Rightarrow B$

Dokazujemo logično implikacijo $A \Rightarrow B$. Predpostavimo, da je A pravilna izjava in direktno izpeljemo pravilnost izjave B.

Zgled:

Če je n liho naravno število, je tudi n^2 liho število.

Dokaz. Naj bo n liho naravno število. Tedaj ga lahko zapišemo kot $n = 2k - 1$, kjer je k naravno število. Sledi $n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1$, torej je n^2 liho število. □

Direktni dokaz implikacije $A \Rightarrow B$
Dokaz:
Predpostavimo A.
$\vdots$
Torej, B.
Sledi $A \Rightarrow B$. □

2) Indirektni dokaz implikacije $A \Rightarrow B$

Dokazujemo pravilnost logične implikacije $A \Rightarrow B$. Včasih se izkaže, da je ugodneje direktno dokazovati ekvivalentno implikacijo $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Zgled:

Če je n^2 sodo število, je n sodo število.

Dokaz. Izjava je ekvivalentna implikaciji:

Če je n število, ki ni sodo, je n^2 število, ki ni sodo.

Ekvivalentno: Če je n liho število, je n^2 liho število.

To pa smo že dokazali. □

Indirektni dokaz implikacije $A \Rightarrow B$
Dokaz:
Predpostavimo $\neg B$.
$\vdots$
Torej, $\neg A$.
Sledi $\neg B \Rightarrow \neg A$.
Posledično $A \Rightarrow B$. □

3) Dokaz izjave A s protislovjem

Želimo dokazati pravilnost izjave A. Predpostavimo, da je A nepravilna in pokažemo, da vodi ta predpostavka v protislovje (ki ga označimo s $\perp$). S tem smo pokazali pravilnost izjave $\neg A \Rightarrow \perp$. Ta izjava pa je pravilna le, če je izjava $\neg A$ nepravilna, torej je A pravilna.

Zgled:

Število $\sqrt{2}$ ni racionalno.

Dokaz. Predpostavimo, da je $\sqrt{2}$ racionalno število. Tedaj ga lahko zapišemo kot $\sqrt{2} = p/q$, kjer sta p in q tuji si naravni števili.

Sledi
$2 = p^2/q^2$.
$p^2 = 2q^2$.
Torej je p^2 sodo število. Sledi (po prej dokazanem), da je p sodo število.
Pišimo $p = 2m$, kjer je m naravno število.
Dobimo
$4m^2 = 2q^2$.
Sledi $2m^2 = q^2$.
Torej je tudi q sodo število. To pa je protislovje. (Predpostavili smo, da sta p in q tuji si števili in dokazali, da sta obe deljivi z 2, torej da si nista tuji.) $\square$

Dokaz izjave A s protislovjem
Dokaz:
Predpostavimo $\neg A$.
$\vdots$
Torej, B.
$\vdots$
Torej, $\neg B$.
Sledi, da je pravilna tudi izjava $B \wedge \neg B$, ta pa je protislovje.
Posledično A. $\square$

4) Dokaz ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ v dveh delih

Želimo dokazati pravilnost logične ekvivalence $A \Leftrightarrow B$. Dokažemo vsako od obeh implikacij.

Za dokazovanje obeh delov lahko uporabimo različne metode. Pogosto je dokaz implikacije v eno smer lažji od dokaza v drugo smer.

Zgled:

Pozitivno celo število $p > 1$ je praštevilo natanko tedaj, ko ne obstaja tako naravno število n, večje od 1 in manjše ali enako $\sqrt{p}$, ki deli p.

Dokaz.

(i) Dokazujemo indirektno. Predpostavimo, da obstaja tako naravno število n, večje od 1 in manjše ali enako $\sqrt{p}$, ki deli p. Torej je n delitelj p, različen od 1 in p, in p ni praštevilo.

(ii) Tudi tu dokazujemo indirektno. Predpostavimo, da p ni praštevilo. Lahko ga torej zapišemo v obliki $p = n_1 \cdot n_2$, kjer sta n_1 in n_2 pozitivni celi števili, različni od 1 in p. Trdimo, da je vsaj eno od števil n_1 in n_2 manjše ali enako $\sqrt{p}$. Če to ne bi veljalo, bi imeli $n_1 > \sqrt{p}$ in $n_2 > \sqrt{p}$ in posledično $p = n_1 n_2 > \sqrt{p} \cdot \sqrt{p} = p$, protislovje. Naj bo torej n tako število izmed n_1 in n_2, za katerega velja $n \leq \sqrt{p}$. Število n je tedaj naravno število, večje od 1 in manjše ali enako $\sqrt{p}$, ki deli p. □

Zgled:

Naj bosta m in n celi števili. Tedaj sta števili m in n iste parnosti natanko tedaj, ko je število $m^2 + n^2$ sodo.

Dokaz.

(i) Predpostavimo, da sta m in n iste parnosti. Obravnavamo dva primera.

(a) Če sta m in n sodi števili, potem je $m = 2k$ in $n = 2j$ za neki celi števili k in j. Sledi $m^2 + n^2 = (2k)^2 + (2j)^2 = 2(2k^2 + 2j^2)$, kar je sodo število.

(b) Če sta m in n lihi števili, potem je $m = 2k + 1$ in $n = 2j + 1$ za neki celi števili k in j. Sledi $m^2 + n^2 = (2k + 1)^2 + (2j + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k + 2j^2 + 2j + 1)$, kar je sodo število.

V obeh primerih je $m^2 + n^2$ sodo število.

(ii) Predpostavimo, da je $m^2 + n^2$ sodo število. Spet obravnavamo dva primera.

(a) Če je m sodo število, potem je tudi m^2 sodo število. Torej, ker je $m^2 + n^2$ sodo število in m^2 sodo število, je sodo tudi število $n^2 = (m^2 + n^2) - m^2$. Od tod sledi, da je n sodo.

(b) Če je m liho število, potem je tudi m^2 liho število. Torej, ker je $m^2 + n^2$ sodo število in m^2 liho število, je liho tudi število $n^2 = (m^2 + n^2) - m^2$. Od tod sledi, da je n liho.

V obeh primerih sta m in n iste parnosti. □

Povzemimo:

Dokaz ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ v dveh delih
Dokaz:
(i) Dokažemo $A \Rightarrow B$.
(ii) Dokažemo $B \Rightarrow A$.
Torej, $A \Leftrightarrow B$. □

5) "Če in samo če" dokaz $A \Leftrightarrow B$

Pravilnost logične ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ lahko dokažemo z zaporedjem logično ekvivalentnih izjav. Začnemo z izjavo A in jo zamenjamo z zaporedjem ekvivalentnih izjav, ki se konča z izjavo B.

Zgled:

Dan je trikotnik T s stranicami dolžin a, b, c. S pomočjo kosinusnega izreka dokaži, da je T pravokotni trikotnik s hipotenuzo dolžine c natanko tedaj, ko je $a^2 + b^2 = c^2$.

Kosinusni izrek: $a^2 + b^2 = c^2 + 2ab \cos \gamma$, kjer je γ kot med stranicama dolžin a in b.

Dokaz.

Iz kosinusnega izreka sledi

$a^2 + b^2 = c^2$ če in samo če $2ab\cos\gamma = 0$
če in samo če $\cos\gamma = 0$
če in samo če $\gamma = 90°$.

Torej je $a^2+b^2 = c^2$ natanko tedaj, ko je T pravokotni trikotnik s hipotenuzo dolžine c. □

Če imamo n vmesnih izjav $C_1, \ldots, C_n$, ima dokaz naslednjo obliko:

"Če in samo če" dokaz $A \Leftrightarrow B$
Dokaz:
A če in samo če C_1
če in samo če C_2
...
če in samo če C_n
če in samo če B. □

6) Analiza primerov

Včasih nam pri dokazu pravilnosti izjave A pomaga, če pregledamo vse primere, ter ugotovimo da je B vedno pravilna.

Dokazovanje A s pomočjo analize primerov.
Dokaz:
Primer 1: predpostavimo B
...
A.
Primer 2: predpostavimo $\neg B$
...
A. □

1.7 Množice izjav

Dane so atomarne izjave $A_1, \ldots, A_n$ (take, da v njih ne nastopa nobena logična povezava).

Koliko različnih izjav lahko sestavimo iz njih?

Zdi se, da neskončno mnogo! Vendar pa, za logiko sta dve izjavi isti, če sta logično ekvivalentni.

Izjav, ki med seboj niso logično ekvivalentne, pa je le končno mnogo.

Vsaka izjava, sestavljene iz $A_1, \ldots, A_n$, ima natanko 2^n različnih določil. Izjava je enolično določena, brž ko so določene njene vrednosti za vsako od teh 2^n določil.

Vsako določilo ima vrednost 0 ali 1, neodvisno od drugih. Sledi, da je vseh možnih izjav $2^{(2^n)}$.

Oglejmo si konstrukcijo vseh možnih izjav za $n = 1$ in $n = 2$.

$\mathbf{n = 1}$

Imamo eno samo izjavo, A. Iz nje lahko sestavimo $2^{(2^1)} = 4$ izjave, $C_1, \ldots, C_4$.

A	C_1	C_2	C_3	C_4
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

C_1 je tavtologija, npr. $A \vee \neg A$.

C_4 je protislovje, npr. $A \wedge \neg A$.

Za C_2 lahko vzamemo kar A.

Za C_3 pa $\neg A$.

$\mathbf{n = 2}$

Imamo dve izjavi, A in B. Iz njiju lahko sestavimo $2^{(2^2)} = 16$ izjav, $C_1, \ldots, C_{16}$.

A	B	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Seveda je C_1 je tavtologija, npr. $A \vee \neg A$ in C_{16} protislovje $A \wedge \neg A$.

Ker so izjave C_2, C_3, C_5 in C_9 nepravilne le pri enem določilu, bomo v teh primerih izbrali izbrano konjunktivno obliko:

- $C_2 = A \vee B$
- $C_3 = A \vee \neg B$
- $C_5 = \neg A \vee B$
- $C_8 = \neg A \vee \neg B$

Podobno za izjave C_8, C_{12}, C_{14} in C_{15} izrazimo s pomočjo izbrane disjunktivne oblike:

- $C_8 = A \wedge B$

- $C_{12} = A \wedge \neg B$
- $C_{14} = \neg A \wedge B$
- $C_{15} = \neg A \wedge \neg B$

Vse preostale izjave pa so pravilne pri dveh določilih in prav tako nepravilne pri dveh določilih.

Za C_4 vzamemo

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)\,,$$

kar je ekvivalentno

$$A \wedge (B \vee \neg B)$$

in ker je disjunkcija $B \vee \neg B$ vedno pravilna izjava, je torej izjava C_4 ekvivalentna z izjavo A.

Podobno se prepričamo, da je:

- izjava C_6 ekvivalentna z izjavo B,
- izjava C_{11} ekvivalentna z izjavo $\neg B$,
- izjava C_{13} ekvivalentna z izjavo $\neg A$.

Za C_7 pišimo

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \vee \neg B)\,,$$

kar je ekvivalentno z

$$A \Leftrightarrow B\,.$$

Podobno pa lahko za C_{10} vzamemo ekvivalenco

$$A \Leftrightarrow \neg B\,.$$

□

1.8 Pravila sklepanja

Kako pa pokažemo pravilnost sklepa? Zapis pravilnostne tabele in preverjanje vseh naborov je časovno potraten postopek. Precej rajši bi imeli kratko izpeljavo, v kateri bi izvajali relativno enostavne, majhne korake proti cilju. Majhne, enostavne sklepe, ki jih bomo potrebovali za dokazovanje pravilnosti sklepov, imenujemo pravila sklepanja.

ime	predpostavke	sklep
modus ponens	$A, A \Rightarrow B$	B
modus tollens	$A \Rightarrow B, \neg B$	$\neg A$
hipotetični silogizem	$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$
disjunktivni silogizem	$A \vee B, \neg A$	B
združitev	A, B	$A \wedge B$
poenostavitev	$A \wedge B$	A
pridružitev	A	$A \vee B$

1.9 Izjave s predikati in kvantifikatorji

Kvantifikatorji povedo, za koliko objektov neke vrste velja neka izjava. Pri tem moramo povedati, katere vrste objekti nas zanimajo (npr. elementi množic $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, itd.), pogosto pa je to že razvidno iz konteksta.

Naj bo $A(x)$ neka izjava, smiselna za vsak objekt x iz domene pogovora. Taki izjavi pravimo *predikat*. Predikati oblike $A(x)$ so enomestni. Poznamo pa tudi dvo- in večmestne predikate, npr. $A(x, y)$, $P(x_1, x_2, x_3)$ ipd.

Za zapis izjav s kvantifikatorji bomo uporabljali naslednje oznake:

- $(\forall x)A(x)$: to je izjava, ki je pravilna natanko tedaj, ko je za vsak x izjava $A(x)$ pravilna

  $\forall$ je t.i. *univerzalni kvantifikator*

- $(\exists x)A(x)$: to je izjava, ki je pravilna natanko tedaj, ko obstaja vsaj en x, za katerega je izjava $A(x)$ pravilna

  $\exists$ je t.i. *eksistencialni kvantifikator*

- $(\exists! x)A(x)$: to je izjava, ki je pravilna natanko tedaj, ko obstaja **natanko en** x, za katerega je izjava $A(x)$ pravilna

  Ekvivalentno: $(\exists x)A(x) \wedge (\forall y)(\forall z)(A(y) \wedge A(z) \Rightarrow y = z)$

Zgled: Zadnjič smo dokazali izjavo *Če je n liho naravno število, je tudi n^2 liho število.* To pomeni: za vsako naravno število n velja, da če je liho, potem je tudi n^2 liho število. To lahko zapišemo kot $(\forall n)A(n)$, kjer je $A(n)$ izjava "Če je n liho število, potem je tudi n^2 liho število." ▲

Zgled: Dana je izjava "Vsa jabolka so okusna." Kako bi to izjavo zapisali s predikati in kvantifikatorji?

Uporabimo $\forall$, a kako?

Če se omejimo le na objekte, ki so jabolka, potem zapišemo $(\forall x)(x \text{ je okusen})$.

Če pa je x lahko poljubno sadje, potem moramo uporabiti dve izjavi:

$A(x)$: x je jabolko

in

$B(x)$: x je okusen

Kako pa zapišemo izjavo vsi $A(x)$ so $B(x)$? Kot $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$ ali kot $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x))$? Prva izjava bi pomenila, da je vsako sadje okusno jabolko, tega pa ne želimo trditi. Pravilen je drugi zapis. ▲

Zgled: Dana je izjava "Nekatera jabolka so okusna." Kako bi pa to izjavo zapisali s kvantifikatorji, pri čemer kot objekte upoštevamo vse vrste sadja? Naj bo spet

$A(x)$: x je jabolko in $B(x)$: x je okusen

Bomo zapisali $(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$ ali $(\exists x)(A(x) \Rightarrow B(x))$?

Prva izjava pomeni, da obstaja sadje, ki je okusno jabolko, in to je pravilen zapis. Druga izjava pa trdi, da za vsako sadje velja, da če je jabolko, potem je okusno. Ta izjava pa ne zagotavlja obstoja jabolka; pravilna je v vsakem kontekstu, kjer obstaja objekt, ki ni jabolko ali pa je okusno. Tega pa ne želimo trditi. ▲

Povzemimo:

Izjavo oblike "vsi $A(x)$ so $B(x)$" zapišemo kot $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x))$.
Izjavo oblike "nekateri $A(x)$ so $B(x)$" pa kot $(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$.

Še nekaj zgledov izjav s kvantifikatorji:

Naj bo domena pogovora množica naravnih števil. Tedaj so naslednje izjave s kvantifikatorji smiselne:

- $(\forall\ n)$ (n je deljiv z 2).
- $(\exists n)$ (n je deljiv z 2).
- $(\exists! n)$ (n je najmanjše naravno število).

Kako bi zapisali zgornje izjave, če bi bila domena pogovora množica realnih števil z uporabo predikata $N(n)$: "n je naravno število"?

- $(\forall\ n)$ $(N(n) \Rightarrow n$ je deljiv z 2).
- $(\exists n)$ $(N(n) \wedge n$ je deljiv z 2).
- $(\exists! n)$ $(N(n) \wedge n$ je najmanjše naravno število).

1.9.1 Negacije izjav s kvantifikatorji

Negacija $\forall$

$$\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg A(x))$$

Zgled:
B: Vsak državljan Slovenije je rjavolas.
$\neg B$: Ni res, da je vsak državljan Slovenije rjavolas.
Ekvivalentno: Obstaja vsaj en državljan Slovenije, ki ni rjavolas. ▲

Negacija $\exists$

$$\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$$

Zgled:
B: V škatli obstaja rdeča kroglica.
$\neg B$: Ni res, da obstaja v škatli rdeča kroglica.
Ekvivalentno: Za vse kroglice v škatli velja, da niso rdeče. ▲

Zgled:
Naj $P(x)$ označuje izjavo "x je praštevilo".
Za vsako naravno število x obstaja naravno število y, večje od x, ki je praštevilo: $(\forall x)(\exists y)(y > x \wedge P(y))$.
Negacija:
$\neg(\forall x)(\exists y)(y > x \wedge P(y)) \Leftrightarrow (\exists x)\neg(\exists y)(y > x \wedge P(y))$
$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)\neg(y > x \wedge P(y)) \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(y \leq x \vee \neg P(y))$. ▲

Zgled: Zapišimo negacijo izjave $(\forall x)(\exists y)(y < x)$.
$\neg(\forall x)(\exists y)(y < x)$
$\Leftrightarrow (\exists x)(\neg(\exists y)(y < x))$
$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)\neg(y < x)$
$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(y \geq x)$ ▲

- Ali je izjava pravilna v realnih številih?

  $(\forall x)(\exists y)(y < x)$

  Da, izjava je pravilna!

- Ali je izjava pravilna v naravnih številih? $(\forall x)(\exists y)(y < x)$

  Ne, pravilna je njena negacija: $(\exists x)(\forall y)(y \geq x)$, obstaja namreč najmanjše naravno število.

Domača naloga:
Ali je naslednja izjava pravilna?
Obstaja realno število x, za katerega velja $\frac{1}{1+x^2} > 1$.

1.9.2 Dokazovanje izjav s kvantifikatorji

Poglejmo si nekaj načinov dokazovanja izjav s kvantifikatorji.

1) Direktni dokaz izjave $(\forall x)A(x)$

Dokazujemo trditev oblike $(\forall x)A(x)$. Pokazati moramo torej, da je izjava $A(x)$ pravilna za vsak objekt x iz domene pogovora.

Zgled: *Dokaži, da za vsako naravno število n velja $4n^2 - 4n + 1 \geq 0$.*

Dokaz.
Trditev je oblike $(\forall x)A(x)$, kjer preučujemo naravna števila, $\mathbb{N}$, in je $A(x)$ izjava "$4x^2 - 4x + 1 \geq 0$".
Naj bo n poljubno naravno število. Zapišimo $4n^2 - 4n + 1 = (2n - 1)^2$. Kvadrat poljubnega realnega števila je nenegativno število. Torej je $4n^2 - 4n + 1 \geq 0$. Ker je bilo število n poljubno, smo pokazali, da velja $4n^2 - 4n + 1 \geq 0$ za vsa naravna števila. $\square$

Direktni dokaz izjave $(\forall x)A(x)$

Dokaz:
Naj bo x poljuben objekt iz domene pogovora. *(Katere vrste objektov preučujemo, mora biti zapisano v trditvi ali razvidno iz konteksta.)*
$\vdots$
Torej, $A(x)$ je pravilna izjava.
Ker je bil x poljuben, je izjava $(\forall x)A(x)$ pravilna. $\square$

2) Dokaz izjave $(\forall x)A(x)$ **s protislovjem**

Za dokazovanje izjav oblike $(\forall x)A(x)$ pogosto uporabimo dokaz s protislovjem.

Zgled: *Dokaži, da za vse $x \in (0, \pi/2)$ velja $\sin x + \cos x > 1$.*

Dokaz.
Trditev je oblike $(\forall x)A(x)$, kjer je $A(x)$ izjava "$0 < x < \pi/2 \Rightarrow \sin x + \cos x > 1$".

Predpostavimo, da je trditev napačna. Tedaj obstaja neko realno število t, za katerega je $0 < t < \pi/2$ in $\sin t + \cos t \leq 1$. Ker sta funkciji $\sin x$ in $\cos x$ pozitivni za vse $x \in (0, \pi/2)$, velja $\sin t > 0$ in $\cos t > 0$. Sledi:

$0 < \sin t + \cos t \leq 1$
$0 < (\sin t + \cos t)^2 \leq 1^2 = 1$
$0 < \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t \leq 1$
$0 < 1 + 2 \sin t \cos t \leq 1$
$-1 < 2 \sin t \cos t \leq 0$
(Uporabili smo identiteto $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.)

Ampak $2 \sin t \cos t \leq 0$ je nemogoče, saj sta tako $\sin t$ kot $\cos t$ pozitivna. Torej, če je $0 < x < \pi/2$, potem je $\sin x + \cos x > 1$. □

Ker je izjava $\neg(\forall x)A(x)$ ekvivalentna izjavi $(\exists x)\neg A(x)$, ima dokaz s protislovjem naslednjo obliko:

Dokaz izjave $(\forall x)A(x)$ s protislovjem

Dokaz:
Predpostavimo, da $\neg(\forall x)A(x)$.
Tedaj $(\exists x)\neg A(x)$.
Naj bo t objekt, za katerega velja $\neg A(t)$.
$\vdots$
Torej, $B \wedge \neg B$.
Sledi, da je izjava $(\exists x)\neg A(x)$ nepravilna, torej je izjava $(\forall x)A(x)$ pravilna. □

3) Dokazovanje izjav oblike $(\exists x)A(x)$

Kako dokazujemo eksistenčne izreke, tj. trditve oblike $(\exists x)A(x)$?

Včasih lahko kar direktno.

Zgled: *Dokaži, da obstaja sodo praštevilo.*

Dokaz. Število 2 je sodo praštevilo. □

Nekateri dokazi so težji. Znameniti matematik Euler je sredi 18. stoletja vprašal, ali obstaja tako naravno število, katerega n-to potenco lahko zapišemo kot vsoto manj kot n n-tih potenc drugih števil. (Euler je postavil domnevo, da takih števil ni. Protiprimeri so znani za $n = 4, 5$.)

Zgled: *Dokaži, da obstaja naravno število, katerega četrta potenca je vsota četrtih potenc treh drugih naravnih števil.*

Dokaz. Tako število je npr. 20.615.673, saj velja

$$20615673^4 = 2682440^4 + 1536539^4 + 18796760^4 .$$

(Zgornjo rešitev je našel Noam Elkies leta 1988. Kmalu zatem je Roger Frye našel najmanjšo rešitev: $95.800^4 + 217.519^4 + 414.560^4 = 422.481^4$.) □

Včasih pa je ugodneje uporabiti dokaz s protislovjem.

Zgled: *Hribolazec krene na pot iz doline v ponedeljek ob 9:00 in prispe na vrh gore ob 15:00. Tam prenoči in v torek zjutraj krene nazaj ob 9:00 po isti poti in se vrne v dolino ob 15:00. Na poti navzdol se je vmes večkrat ustavil, ponekod pa hodil hitreje kot prejšnji dan navzgor. Dokaži, da obstaja točka na poti, na kateri je bil oba dneva ob istem času.*

Dokaz.

Če merimo čas v urah od 0 *do* 6 *(*$t = 0$ *ustreza času 9:00,* $t = 6$ *pa času 15:00, je treba dokazati:*
$(\exists t \in (0,6))$*(točka na poti ob času t v ponedeljek je enaka točki na poti ob času t v torek).*

Recimo, da taka točka ne obstaja. Torej za vsak $t \in (0,6)$ točka na poti ob času t v ponedeljek različna od točke na poti ob času t v torek. Vzemimo dva hribolazca, ki gresta istočasno po poti od 9:00 dalje, prvi gre navzgor, in sicer z enakim tempom kot je šel naš hribolazec navzgor v ponedeljek, drugi pa navzdol, in sicer z enakim tempom kot je šel naš hribolazec navzdol v torek. Ker sta ta dva hribolazca ves čas na različnih točkah, se ne bosta nikoli srečala. To pa ni možno, enkrat se namreč morata srečati, saj gresta po isti poti. To je protislovje.

Sledi, da obstaja točka na poti, na kateri je bil hribolazec oba dneva ob istem času. □

Dokaz izjave $(\exists x)A(x)$ s protislovjem

Dokaz:
Predpostavimo, da $\neg(\exists x)A(x)$.
Tedaj $(\forall x)\neg A(x)$.
$\vdots$
Torej, $B \wedge \neg B$, protislovje.
Sledi, da je izjava $(\forall x)\neg A(x)$ nepravilna, torej je izjava $(\exists x)A(x)$ pravilna. □

4) Dokazovanje izjav oblike $(\exists! x)A(x)$

Zgled: *Vsako neničelno realno število ima enoličen multiplikativni inverz.*

Dokaz.

Izjava ima obliko $(\forall x)(x \neq 0 \Rightarrow (\exists! y)(xy = 1))$*, domena pogovora je množica realnih števil.*

Naj bo $x \neq 0$. Obstoj inverza bomo pokazali v dveh korakih: najprej bomo pokazali, da tako število y obstaja, potem pa še, da x ne more imeti dveh različnih inverzov.

(i) Naj bo $y = 1/x$. Ker je $x \neq 0$, je y realno število. Tedaj je $xy = x \cdot (1/x) = 1$. Število x torej ima multiplikativni inverz.

(ii) Naj bosta y in z multiplikativna inverza števila x. *(Tu ne predpostavimo, da je ta* y *enak* y *iz točke* (i)*.)*

Sledi $xy = 1$ in $xz = 1$ in od tod
$xy = xz$
$xy - xz = 0$
$x(y - z) = 0$.
Ker je $x \neq 0$, sledi $y - z = 0$, torej $y = z$. □

Dokaz izjave $(\exists! x)A(x)$

Dokaz:
(i) Dokaži pravilnost izjave $(\exists x)A(x)$ (s katerokoli metodo).
(ii) Dokaži pravilnost izjave $(\forall y)(\forall z)(A(y) \wedge A(z) \Rightarrow y = z)$.
Predpostavi, da sta y in z obravnavana objekta, za katera sta izjavi $A(y)$ in $A(z)$ pravilni.

$\vdots$

Torej, $y = z$.
Iz (i) in (ii) izpeljemo, da je izjava $(\exists! x)A(x)$ pravilna. $\square$

2 Teorija množic

2.1 Množice

Množice so osnovni matematični objekti. Pojma množice ne definiramo. Množice imajo elemente (ki so lahko tudi sami množice), običajno jih bomo označevali z malimi črkami: $a, b, \ldots, x, y, z$ (+ indeksi: a_6, x_1, z_λ)

Množice pa bomo običajno pisali z velikimi črkami: $A, B, \ldots, X, Y, Z$ (+ indeksi)

Množice in elemente druži relacija pripadnosti:
$a \in F$: element a *pripada* množici F, a *je element* množice F.

$\in$: znak pripadnosti

$a \notin F$: a ni element (ne pripada) množici F.

Zgled: Če je G množica vseh sodih števil, je $16 \in G$ in $3 \notin G$.

Enakost množic: Množici A in B sta enaki natanko takrat, kadar imata iste reči za elemente:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Ta definicija je potrebna, saj podaja pomembno lastnost, ki ji mora relacija pripadnosti ustrezati!

Primer: Recimo, da so objekti, ki jih preučujemo, ljudje, in zapišimo $x \in A$ natanko tedaj, ko je x prednik A-ja. Ali lahko to definicijo uporabimo, da definiramo ljudi kot množice? Zgornja ekvivalenca pravi:

- *Če sta dva človeka enaka, potem imata iste prednike.* To drži.
- *Če imata dva človeka iste prednike, potem sta enaka.* To pa ne drži!

Načini podajanja množic:

1. Množico lahko podamo tako, da navedemo vse njene elemente:

   $$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}, 2i + 8\right\}.$$

   Vrstni red *ni pomemben!* Včasih pa je ta zapis nepraktičen (kadar je množica neskončna ali pa končna, a prevelika).

2. Množico lahko podamo tudi tako, da jo opišemo. Opis pa mora biti **nedvoumen:** za vsako reč mora veljati bodisi, da je element dane množice, ali pa da ni element te množice.

   V splošnem lahko zapišemo:

   $$A = \{x; P(x)\},$$

   kjer je $P(x)$ nek enomestni predikat. *Množica A je množica vseh elementov x, za katere je izjava $P(x)$ pravilna.* Ali pa, če imamo več izjav $P_1, \ldots, P_n$:

   $$A = \{x; P_1(x) \wedge \cdots \wedge P_n(x)\}$$

$$A = \{x; P_1(x) \vee \cdots \vee P_n(x)\}$$

Kot bomo kmalu videli, lahko take množice tvorimo le z elementi množic, ki jih že poznamo (oz. za katere vemo, da obstajajo).

Zgled: Naj bo A množica vseh takih kompleksnih števil x, ki so rešitev kakšne enačbe oblike

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0\,,$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$ in $a_i \in \mathbb{Z}$ za vse $i = 0, 1, \ldots, n$.

A - množica vseh algebraičnih števil.
Ali je $2^\pi \in A$? Ne vemo (današnja matematika še ne more odgovoriti na to vprašanje).
▲

Pozor: škatla, ki vsebuje klobuk, ni ista reč kot klobuk. Tako tudi množica $\{a\}$ ni ista reč kot a. Za vsako reč a pa velja $a \in \{a\}$.

Podmnožice

Dani sta množici A in B.
Pravimo, da je A *podmnožica* množice B natanko takrat, ko je vsak element množice A tudi element množice B.
Oznaka: $A \subseteq B$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Seveda je vsaka množica podmnožica same sebe:

$$(\forall A)(A \subseteq A)\,.$$

Če je $A \subseteq B$ in $A \neq B$, potem je A *prava podmnožica* množice B: $A \subset B$.

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

Očitno velja:

- $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$.

  Ta ekvivalenca je izjemno pomembna za dokazovanje enakosti dveh množic!

- $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ (tranzitivnost inkluzije)

Dokažimo tranzitivnost inkluzije: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
Direkten dokaz:
Privzemimo, da je $A \subseteq B$ in $B \subseteq C$. Dokazati moramo: $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in C)$.
Vzemimo poljuben $x \in A$.

- Ker je $x \in A$ in $A \subseteq B$, sledi $x \in B$.

- Ker je $x \in B$ in $B \subseteq C$, sledi $x \in C$.

Ker je bil x poljuben, smo dokazali $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in C)$, tj., $A \subseteq C$. $\square$

V razmislek: Ali obstajata množici A in B, za kateri velja $A \subset B$ in $B \subset A$?

Pozor: Relacija inkluzije $\subseteq$ in relacija pripadnosti $\in$ sta povsem različna pojma!
$1 \in \{1, 2, 3\}$, toda 1 ni podmnožica množice $\{1, 2, 3\}$. Množica $\{1\}$ pa je podmnožica množice $\{1, 2, 3\}$, toda $\{1\}$ ni element množice $\{1, 2, 3\}$.

V razmislek: Naj bo $X = \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$. Ali je 1 element množice X? Ali je 1 podmnožica množice X? Ali je $\{1\}$ element množice X? Ali je $\{1\}$ podmnožica množice X?

Prazna množica

Množico, ki nima nobenega elementa, označimo s simbolom $\emptyset$ — *prazna množica.*

$$X = \emptyset \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin X)$$

Seveda velja:

$$(\forall X)(\emptyset \subseteq X)$$

Domača naloga: Dokažite, da velja:

$$X = \emptyset \Leftrightarrow (\forall Y)(X \subseteq Y)\,.$$

Unija

Dani sta množici A in B. *Unija* teh dveh množic je množica $A \cup B$, ki ima za elemente natanko tiste reči, ki so elementi množice A ali množice B:

$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}\,.$$

Zgled: $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$.
$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 2, 4, 8\}$.

Posplošimo sedaj pojem unije dveh množic na unijo poljubne družine množic. $A \cup B$ je unija družine množic $\{A, B\}$. Tvorimo lahko množice množic (oziroma družine množic).
Zgled: $\mathbb{Q}$: množica racionalnih števil je množica množic:

$$0,5 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \cdots\right\}$$

(Ulomek razumemo kot urejen par celih števil. Urejen par (a, b) pa lahko, kot bomo videli kmalu, definiramo kot množico $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.) ▲

Unija več množic:
V splošnem lahko družino množic zapišemo na naslednji način:
$\mathcal{A} = \{A_\lambda; \lambda \in J\}$ - družina množic z indeksno množico J
Indeksna množica je poljubna množica!

Zgled: Za $J = \{1, 2\}$ dobimo

$\mathcal{A} = \{A_\lambda; \lambda \in \{1,2\}\} = \{A_1, A_2\}$. ▲

Unijo družine $\mathcal{A}$ definiramo kot

$$\cup\mathcal{A} = \cup_{\lambda\in J} A_\lambda = \{x; (\exists\lambda)(\lambda \in J \wedge x \in A_\lambda)\}$$

Zgled: $J = \{1,2\}$

$$\cup_{\lambda\in\{1,2\}} A_\lambda = \{x; (\exists\lambda)(\lambda \in \{1,2\} \wedge x \in A_\lambda)\} = \{x; x \in A_1 \vee x \in A_2\} = A_1 \cup A_2 \,.$$

▲

Zgled: Vzemimo družino $\mathcal{A} = \{A_\lambda; \lambda \in J\}$, kjer je $J = \mathbb{Z}$ množica celih števil in $A_\lambda = [\lambda, \lambda+1] = \{x; x \in \mathbb{R} \ \wedge \ \lambda \leq x \leq \lambda+1\}$ za vse $\lambda \in \mathbb{Z}$. Tedaj je

$$\cup\mathcal{A} = \cup_{\lambda\in\mathbb{Z}} A_\lambda = \{x; (\exists\lambda)(\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \leq x \leq \lambda+1)\} = \mathbb{R}\,,$$

saj vsako realno število leži med dvema zaporednima celima številoma. ▲

Če je J končna, vzamemo po navadi $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ in pišemo

$$\cup\mathcal{A} = \cup_{j=1}^{n} A_j = A_1 \cup \cdots \cup A_n \,.$$

Osnovne lastnosti unije:

- $A \cup B = B \cup A$, komutativnost
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, asociativnost
- $A \cup A = A$, idempotentnost
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$
- $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

Dokažimo lastnost

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \ :$$

Ekvivalenco bomo dokazali tako, da dokažemo obratno ekvivalenco $\neg(A \subseteq B) \Leftrightarrow \neg(A \cup B = B)$: Izkaže se, da je ugodneje obravnati najprej negacijo izjave na desni.

$$\neg(A \cup B = B)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\neg((A \cup B \subseteq B) \wedge (B \subseteq A \cup B))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\neg(A \cup B \subseteq B) \vee \neg(B \subseteq A \cup B)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\neg(A \cup B \subseteq B)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\exists x)(x \in A \cup B \wedge x \notin B)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\exists x)((x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin B)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\exists x)((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin B))$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\neg(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\neg(A \subseteq B)$$

□

Domača naloga: Dokažite preostale lastnosti.

Presek

Dani sta množici A in B. *Presek* teh dveh množic je množica $A \cap B$, ki ima za elemente natanko tiste reči, ki so elementi množice A in množice B:

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}\,.$$

Zgled: $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$.
$A \cap B = \{1\}$.

Presek več množic:
$\mathcal{A} = \{A_\lambda; \lambda \in J\}$ - družina množic z indeksno množico J, $J \neq \emptyset$!
Indeksna množica je poljubna **neprazna** množica!
Presek neprazne družine $\mathcal{A}$ definiramo kot

$$\cap\mathcal{A} = \cap_{\lambda \in J} A_\lambda = \{x; (\forall\lambda)(\lambda \in J \Rightarrow x \in A_\lambda)\}$$

(Če bi bil $J = \emptyset$, bi $\cap\mathcal{A} =$ vse. To pa ni možno zaradi Russellove antinomije (ki ste jo že spoznali pri Analizi 1)!)

Če je J končna, vzamemo po navadi $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ in pišemo

$$\cap\mathcal{A} = \cap_{j=1}^{n} A_j = A_1 \cap \cdots \cap A_n\,.$$

Če velja $A \cap B = \emptyset$, pravimo, da sta si množici A in B *tuji* (ali da sta *disjunktni*).

Osnovne lastnosti preseka:

- $A \cap B = B \cap A$, komutativnost
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, asociativnost
- $A \cap A = A$, idempotentnost
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$,
- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$
- $A \subseteq B \wedge A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$

Domača naloga: Dokažite te lastnosti. (Dokazi so podobni dokazom analognih lastnosti za unijo.)

Unija in presek sta povezana z distributivnostnima zakonoma:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Domača naloga: Dokažite, da za poljubne tri množice A, B, C velja:

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A\,.$$

(Pogoj na desni je neodvisen od množice B!)

Ponovimo: Unijo družine množic $\mathcal{A} = \{A_\lambda; \lambda \in J\}$ smo definirali kot
$\cup\mathcal{A} = \{x; (\exists\lambda)(\lambda \in J \wedge x \in A_\lambda)\}$, presek neprazne družine množic pa kot
$\cap\mathcal{A} = \{x; (\forall\lambda)(\lambda \in J \Rightarrow x \in A_\lambda)\}$.
Kaj dobimo v primeru $\mathcal{A} = \{A_1\}$? $J = \{1\}$.

$\cup\{A_1\} = \{x; (\exists\lambda)(\lambda \in \{1\} \wedge x \in A_\lambda)\} = \{x; (\exists\lambda)(\lambda = 1 \wedge x \in A_\lambda)\} = \{x; x \in A_1\} = A_1\,.$

$\cap\{A_1\} = \{x; (\forall\lambda)(\lambda \in \{1\} \Rightarrow x \in A_\lambda)\} = \{x; (\forall\lambda)(\lambda = 1 \Rightarrow x \in A_\lambda)\} = \{x; x \in A_1\} = A_1\,.$

Pisano brez indeksov: $\cup\{A\} = \cap\{A\} = A$.
Podobno velja tudi $\cup\{\emptyset\} = \cap\{\emptyset\} = \emptyset$ in $\cup\emptyset = \emptyset$.

Razlika množic

Dani sta množici A in B.

Razlika množic A in B je množica, ki ima za elemente natanko tiste reči, ki so elementi množice A, niso pa elementi množice B.

$$A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}\,.$$

Zgled: Naj bo A množica praštevil, B pa množica vseh pozitivnih lihih števil. Tedaj je
$A \setminus B = \{2\}$ (2 je edino sodo praštevilo)
$B \setminus A = \{1, 9, 15, 21, 25, \ldots\}$ (množica vseh lihih števil, ki niso praštevila)

Osnovne lastnosti:

- $A \setminus A = \emptyset$
- $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$
- $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$
- $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$
- $(A \cap B) \setminus B = \emptyset$
- $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$

Dokažimo enakost $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$:

$$x \in (A \setminus B) \cup B$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x \in A \setminus B \lor x \in B$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x \in A \land x \notin B) \lor x \in B$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x \in A \lor x \in B) \land (x \notin B \lor x \in B)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x \in A \lor x \in B)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x \in A \cup B$$

□

Domača naloga: Dokažite preostale lastnosti.