Домашняя работа 12. Ватутин, ФТ202-2

1.1

$$\rho_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}(x^2+y^2), & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0\end{cases}$$

• $\rho_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{3}{2}(x^2+y^2)dy=\frac{3}{2}\int\limits_0^1(x^2+y^2)dy=\frac{3}{2}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1=$

$=\frac{3}{2}\left(x^2+\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$

$\rho_\eta(y)=\frac{3}{2}y^2+\frac{1}{2}$ по симметрии

• $\mathbb{E}\xi=\int\limits_0^1\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)x\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{3x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$

$\mathbb{E}\eta=\frac{5}{8}$ по симм.

• $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\mathbb{E}\xi\eta-\mathbb{E}\xi\cdot\mathbb{E}\eta$

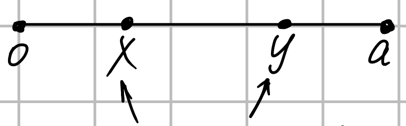
$\mathbb{E}\xi\eta=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xy\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\frac{3}{2}\int\limits_0^1x\,dx\int\limits_0^1(yx^2+y^3)dy=$

$=\frac{3}{2}\cdot\int\limits_0^1x\,dx\cdot\left(\frac{y^2x^2}{2}+\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}\int\limits_0^1\left(\frac{x^3}{2}+\frac{x}{4}\right)dx=\frac{3}{2}\left(\frac{x^4}{8}+\frac{x^2}{8}\right)\Big|_0^1=$

$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{8}$

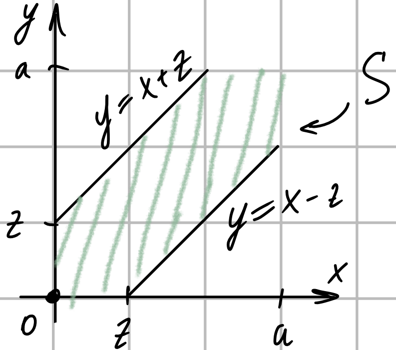
$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\frac{3}{8}-\frac{25}{64}=\frac{24-25}{64}=\frac{-1}{64}$

2.1



незав. случ. велич. ; $\xi=|X-Y|$ - расстояние

$F_\xi(z)=P(\xi\le z),\ z\ge 0$



$z<0 \Rightarrow F_\xi(z)=0$

$z \geq a \Rightarrow F_\xi(z)=1$

$0 \leq z < a \Rightarrow S = a^2 - (a-z)^2 \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}$

$$F_\xi(z) = P(|X-Y| \leq z) = \frac{S}{a^2} = \frac{a^2-(a-z)^2}{a^2} =$$

$$= 1 - \frac{a^2 - 2az + z^2}{a^2} = \frac{2z}{a} - \frac{z^2}{a^2}$$

$$F_\xi(z) = \begin{cases} 0 & z<0 \\ \frac{2z}{a} - \underline{z^2} & 0 \leq z \leq a \\ 1 & z \geq a \end{cases}$$

3.| О/п Пусть $\exists\ \xi, \eta, \theta$ − случ. велич. такие, что:

$$\operatorname{corr}(\xi,\eta) = \operatorname{corr}(\xi,\theta) = \operatorname{corr}(\theta,\eta) = -1$$

Рассм. $X = \frac{\xi - \mathbb{E}\xi}{\sqrt{D(\xi)}}$, $Y = \frac{\eta - \mathbb{E}\eta}{\sqrt{D(\eta)}}$ $Z = \frac{\theta - \mathbb{E}\theta}{\sqrt{D(\theta)}}$, тогда:

$\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}Y^2 = \mathbb{E}Z^2 = 1$ и $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(YZ) = -1$

Рассм. $D(X+Y)$:

$$\mathbb{E}[(X+Y)^2] = \mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}Y^2 + 2\mathbb{E}XY = 1+1+2\cdot(-1) = 0$$

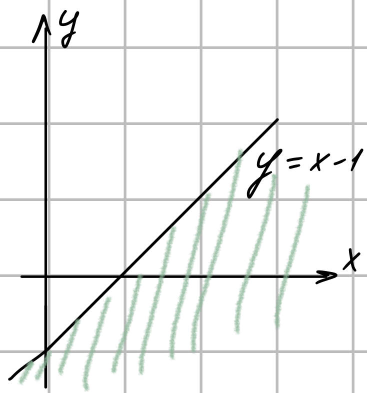
Отсюда $X+Y=0 \Rightarrow X=-Y$, аналогично $X=-Z$, $Y=-Z$

Но тогда $Z=X \Rightarrow X=-X \Rightarrow X=0$ ↯

4.| $\rho(x,y)$ − плотн. совм. распр. ξ, η

а) $P(\xi - \eta > 1)$

на (x,y) это область $y<x-1$

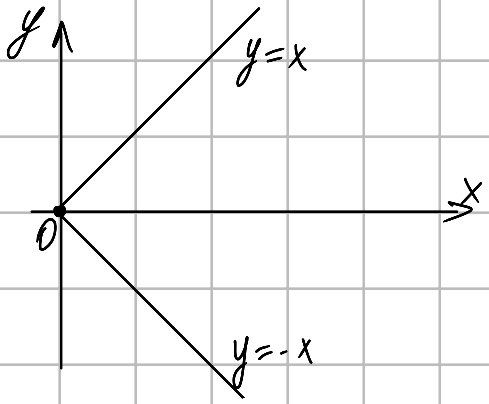


$$P(\xi-\eta>1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{y+1}^{+\infty} \rho(x,y)\,dx\,dy$$

б) $P(\xi > |\eta|)$

область $x > |y|$

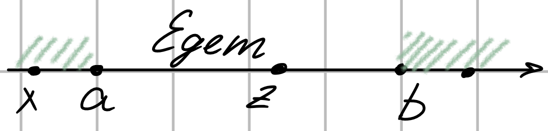
$$\int_0^{+\infty}\int_{-x}^{+x} \rho(x,y)\,dx\,dy$$



5.1 $F(a,b) = P(x<a,\ y\le b)$

а) $x < z < y$

$P(x<z,\ y>z) =$



$$= P(x<z) - P(x<z,\ y\le z) = F(z,+\infty) - F(z,z)$$

$F(z,+\infty) = \lim\limits_{b\to+\infty} F(z,b)$, $F(z,z) =$ знач. при $a=z,\ b=z$

б) вошёл до z: $P(x<z) = P(x<z,\ y\le+\infty) = F(z;+\infty)$

в) сошёл до z: $P(y\le z) = P(x<+\infty,\ y\le z) = F(+\infty;z)$