

# Sinyal

**Heri Purnawan**

Disampaikan pada matakuliah **Sistem Linier**  
Program Studi S-1 Teknik Elektro  
Fakultas Sains dan Teknologi (FST)  
Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

November 18, 2024

Email: [heripurnawan@unisla.ac.id](mailto:heripurnawan@unisla.ac.id)

# Pokok Bahasan

- ◀ Definisi sinyal
- ◀ Ukuran sinyal
- ◀ Operasi sinyal
- ◀ Klasifikasi sinyal
- ◀ Model sinyal

# Definisi

- ◀ **Sinyal** adalah sekumpulan data atau informasi.
- ◀ Contohnya termasuk sinyal telepon atau televisi, penjualan bulanan suatu perusahaan, atau harga penutupan harian pasar saham.
- ◀ Dalam semua contoh ini, sinyal merupakan fungsi dari **variabel bebas waktu**. Namun hal ini tidak selalu terjadi.
- ◀ Ketika muatan listrik didistribusikan ke seluruh benda, misalnya, sinyalnya adalah kepadatan muatan, yang merupakan fungsi **ruang**, bukan **waktu**.
- ◀ Dalam pembahasan ini, hampir secara eksklusif dibahas sinyal-sinyal yang merupakan fungsi **waktu**. Namun, pembahasan ini juga berlaku untuk **variabel independen/bebas lainnya**.

# Pokok Bahasan

- ◀ Definisi sinyal
- ◀ Ukuran sinyal
- ◀ Operasi sinyal
- ◀ Klasifikasi sinyal
- ◀ Model sinyal

# Ukuran sinyal

## ◀ Energi sinyal

Dengan mempertimbangkan luas di bawah sinyal  $|x(t)|^2$  sebagai ukuran yang mungkin untuk ukurannya, karena area tersebut tidak hanya memperhitungkan amplitudo tetapi juga durasinya. **Energi sinyal**  $E_x$ , didefinisikan sebagai

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1)$$

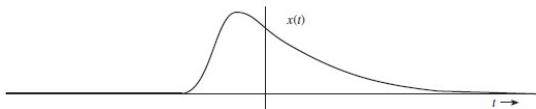
## ◀ Daya sinyal

Energi sinyal harus terbatas agar dapat mengukur ukuran sinyal. Kondisi yang diperlukan agar energinya berhingga adalah amplitudo sinyal  $\rightarrow 0$  sebagai  $|t| \rightarrow \infty$  (lihat Gambar 1(a)). Jika tidak, integral dalam Pers. (1) tidak akan konvergen.

Ketika amplitudo  $x(t)$  tidak  $\rightarrow 0$  seperti  $|t| \rightarrow \infty$  (lihat Gambar 1(b)), energi sinyal menjadi tak terhingga. Ukuran sinyal dalam kasus seperti ini adalah rata-rata waktu energi, jika memang ada. Ukuran ini disebut daya sinyal. Untuk sinyal  $x(t)$ , didefinisikan **daya sinyal**  $P_x$  sebagai

# Ukuran sinyal

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (2)$$



(a) sinyal dengan energi terbatas

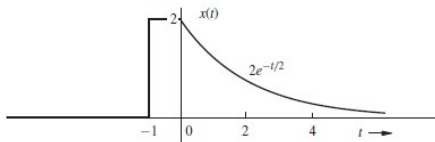


(b) sinyal dengan daya terbatas

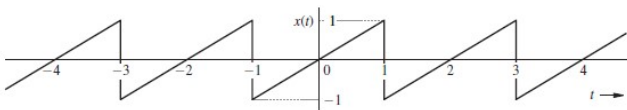
Gambar 1: Contoh-contoh sinyal

# Ukuran sinyal

Contoh 1: Tentukan ukuran yang sesuai dari sinyal-sinyal di Gambar 2.



(a)



(b)

Gambar 2: Sinyal untuk Contoh 1

# Ukuran sinyal

## Solusi Contoh 1:

Pada Gambar 2(a), amplitudo sinyal  $\rightarrow 0$  untuk  $|t| \rightarrow \infty$ . Oleh karena itu ukuran yang cocok untuk sinyal ini adalah energi  $E_x$  yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-1}^0 |2|^2 dt + \int_0^{\infty} \left| 2e^{-\frac{t}{2}} \right|^2 dt \\ &= \int_{-1}^0 4 dt + \int_0^{\infty} 4e^{-t} dt = 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

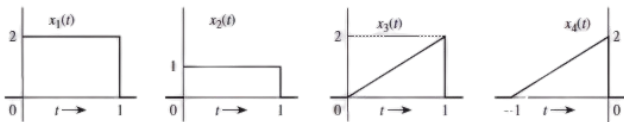
Pada Gambar 2(b), besaran sinyal tidak  $\rightarrow 0$  untuk  $|t| \rightarrow \infty$ . Namun, ini bersifat periodik, dan oleh karena itu dayanya ada. Kita dapat menyederhanakan prosedur untuk sinyal periodik dengan mengamati bahwa sinyal periodik berulang secara teratur setiap periode (dalam hal ini 2 detik). Oleh karena itu, merata-ratakan  $|x(t)|^2$  pada interval yang sangat besar sama dengan merata-ratakan besaran ini dalam satu periode (dalam kasus ini 2 detik). Dengan demikian

$$P_x = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |t|^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

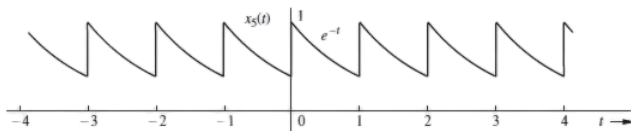


# Ukuran sinyal

**Latihan 1:** Tunjukkan bahwa **energi sinyal** pada Gambar 3(a) berturut-turut adalah 4, 1,  $4/3$ , dan  $4/3$ . Tunjukkan juga bahwa **daya sinyal** pada Gambar 3(b) adalah 0,4323.



(a)



(b)

Gambar 3: Sinyal untuk Latihan 1

# Pokok Bahasan

- ◀ Definisi sinyal
- ◀ Ukuran sinyal
- ◀ Operasi sinyal
- ◀ Klasifikasi sinyal
- ◀ Model sinyal

# Operasi sinyal

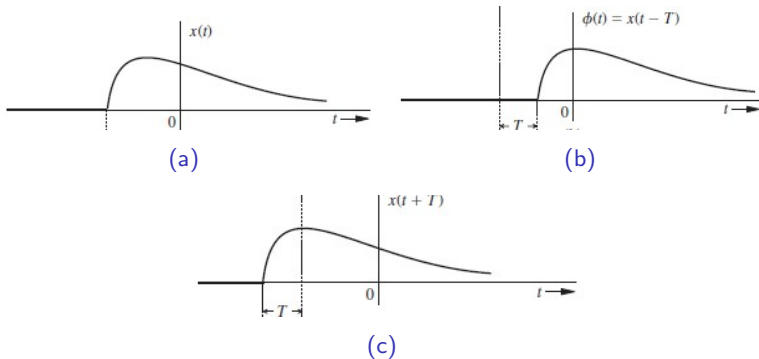
## ◀ Pergeseran waktu

Pertimbangkan sinyal  $x(t)$  ([Gambar 4\(a\)](#)) dan sinyal yang sama tertunda selama  $T$  detik ([Gambar 4\(b\)](#)), yang akan kita nyatakan dengan  $\phi(t)$ . Apapun yang terjadi pada  $x(t)$  ([Gambar 4\(a\)](#)) pada saat  $t$  juga terjadi pada  $\phi(t)$  ([Gambar 4\(b\)](#))  $T$  detik kemudian pada saat  $t + T$ . Oleh karena itu,

$$\phi(t + T) = x(t) \quad \text{dan} \quad \phi(t) = x(t - T)$$

Oleh karena itu, untuk menggeser sinyal sebesar  $T$ , kita mengganti  $t$  dengan  $t - T$ . Jadi  $x(t - T)$  mewakili  $x(t)$  waktu yang digeser oleh  $T$  detik. Jika  $T$  **positif** maka **pergeserannya ke kanan** (*delay*/tertunda), seperti pada [Gambar 4\(b\)](#). Jika  $T$  **negatif** maka **pergeserannya ke kiri** (*advance*/maju), seperti pada [Gambar 4\(c\)](#). Jelasnya,  $x(t - 2)$  adalah  $x(t)$  tertunda (bergeser ke kanan) sebanyak 2 detik, dan  $x(t + 2)$  adalah  $x(t)$  maju (bergeser ke kiri) sebanyak 2 detik.

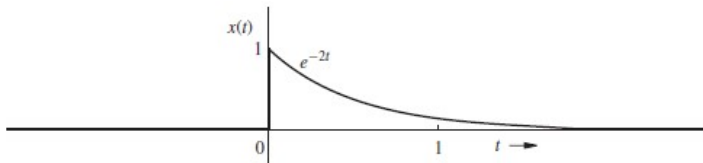
# Operasi sinyal



Gambar 4: Pergeseran waktu sebuah sinyal

# Operasi sinyal

**Contoh 2:** Sinyal eksponensial  $x(t) = e^{-2t}$  yang ditunjukkan pada [Gambar 5](#). Sketsa dan deskripsikan secara matematis [sinyal tertunda](#) 1 detik. Ulangi soal dengan  $x(t)$  [maju](#) 1 detik.



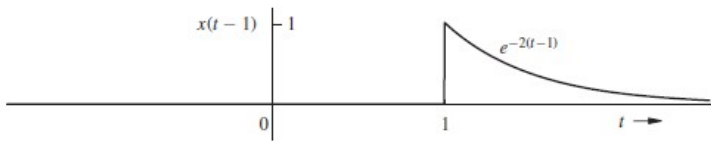
**Gambar 5:** Sinyal  $x(t)$

Fungsi  $x(t)$  dapat dideskripsikan secara matematika sebagai

$$x(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3)$$

# Operasi sinyal

**Solusi Contoh 2:** Sketsa sinyal  $x(t)$  tertunda 1 detik ditunjukkan pada Gambar 6.



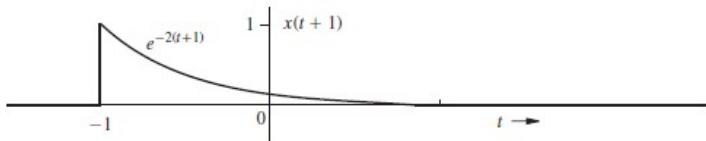
Gambar 6: Sinyal  $x(t)$  tertunda 1 detik

Deskripsi matematis sinyal  $x(t)$  tertunda 1 detik diberikan oleh

$$x_d(t) = x(t-1) = \begin{cases} e^{-2(t-1)} & t-1 \geq 0 \text{ atau } t \geq 1 \\ 0 & t-1 < 0 \text{ atau } t < 1 \end{cases} \quad (4)$$

# Operasi sinyal

**Solusi Contoh 2:** Sketsa sinyal  $x(t)$  **maju** 1 detik ditunjukkan pada **Gambar 7**.



**Gambar 7:** Sinyal  $x(t)$  **maju** 1 detik

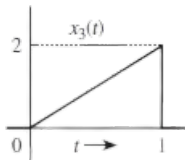
Deskripsi matematis sinyal  $x(t)$  **maju** 1 detik diberikan oleh

$$x_a(t) = x(t+1) = \begin{cases} e^{-2(t+1)} & t+1 \geq 0 \text{ atau } t \geq -1 \\ 0 & t+1 < 0 \text{ atau } t < -1 \end{cases} \quad (5)$$

# Operasi sinyal

## Latihan 2:

Tuliskan deskripsi matematis sinyal  $x_3(t)$  pada [Gambar 8](#). Selanjutnya, [tunda sinyal](#) ini sebesar 2 detik. Buat sketsa sinyal yang [tertunda](#). Tunjukkan bahwa [sinyal tertunda](#)  $x_d(t)$  dapat dijelaskan secara matematis sebagai  $x_d(t) = 2(t-2)$  untuk  $2 \leq t \leq 3$ , dan sebaliknya sama dengan 0. Sekarang ulangi prosedur dengan [sinyal maju](#) (bergeser ke kiri) selama 1 detik. Tunjukkan bahwa ini [sinyal maju](#)  $x_a(t)$  dapat dinyatakan sebagai  $x_a(t) = 2(t+1)$  untuk  $-1 \leq t \leq 0$ , dan 0 sebaliknya.



Gambar 8: Sinyal  $x_3(t)$



# Operasi sinyal

## ◀ Penskalaan waktu

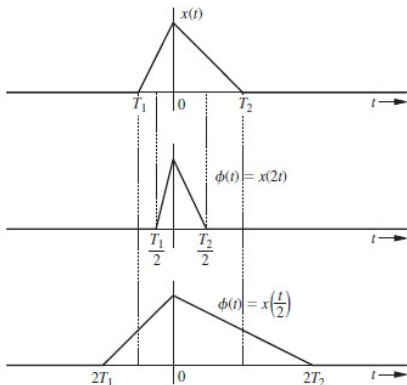
Kompresi atau perluasan sinyal dalam waktu dikenal sebagai **penskalaan waktu**. Perhatikan sinyal  $x(t)$  pada **Gambar 9 (atas)**. Sinyal  $\phi(t)$  pada **Gambar 9 (tengah)** adalah  $x(t)$  yang **dikompresi** dalam waktu dengan faktor 2. Oleh karena itu, apapun yang terjadi pada  $x(t)$  pada saat  $t$  juga terjadi pada  $\phi(t)$  pada saat  $t/2$  sehingga,

$$\phi\left(\frac{t}{2}\right) = x(t) \quad \text{dan} \quad \phi(t) = x(2t)$$

Perhatikan bahwa karena  $x(t) = 0$  pada  $t = T_1$  dan  $T_2$ , kita harus mempunyai  $\phi(t) = 0$  pada  $t = T_1/2$  dan  $T_2/2$ , seperti ditunjukkan pada **Gambar 9 (tengah)**. Secara umum, jika  $x(t)$  **dikompresi** dalam waktu dengan faktor  $a$  ( $a > 1$ ), sinyal yang dihasilkan  $\phi(t)$  diberikan oleh

$$\phi(t) = x(at)$$

# Operasi sinyal



Gambar 9: Penskalaan waktu

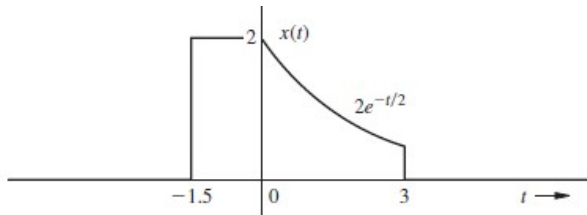
Dengan menggunakan argumen serupa,  $x(t)$  **diperluas** (diperlambat) terhadap waktu dengan faktor  $a$  ( $a > 1$ ) diberikan oleh

$$\phi(t) = x\left(\frac{t}{a}\right)$$

**Gambar 9 (bawah)** menunjukkan  $x(t/2)$ , yaitu  $x(t)$  **diekspansi** terhadap waktu sebanyak 2 kali. Operasi penskalaan waktu, titik asal  $t = 0$  adalah titik tetap tidak berubah pada kondisi operasi **penskalaan** karena pada  $t = 0$ ,  $x(t) = x(at) = x(0)$ .

# Operasi sinyal

**Contoh 3:** Gambar 10 menunjukkan sinyal  $x(t)$ . Buat sketsa dan jelaskan secara matematis waktu sinyal yang **dikompresi** oleh faktor 3. Ulangi soal untuk waktu sinyal yang sama yang **diperluas** dengan faktor 2.



Gambar 10: Sinyal  $x(t)$

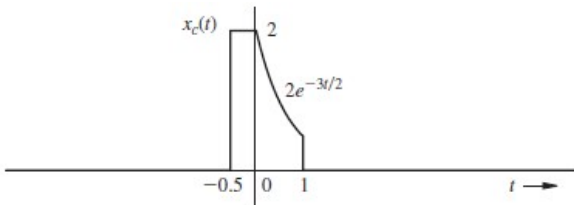
Sinyal  $x(t)$  dapat dideskripsikan sebagai

$$x(t) = \begin{cases} 2 & -1.5 \leq t < 0 \\ 2e^{-t/2} & 0 \leq t < 3 \\ 0 & t \text{ yang lain} \end{cases} \quad (6)$$

# Operasi sinyal

**Solusi Contoh 3:** Gambar 11 menunjukkan  $x_c(t)$ , yaitu  $x(t)$  yang dikompresi waktu oleh faktor 3; akibatnya, secara matematis dapat digambarkan sebagai  $x(3t)$ , yang diperoleh dengan mengganti  $t$  dengan  $3t$  di ruas kanan Pers. (6). Dengan demikian,

$$x_c(t) = x(3t) = \begin{cases} 2 & -1.5 \leq 3t < 0 \text{ atau } -0.5 \leq t < 0 \\ 2e^{-3t/2} & 0 \leq 3t < 3 \text{ atau } 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \text{ yang lain} \end{cases} \quad (7)$$

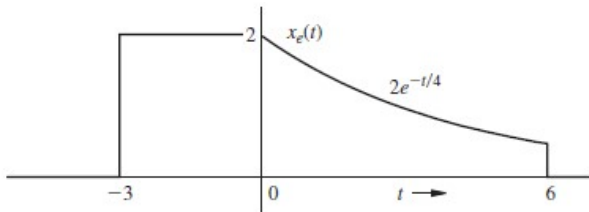


Gambar 11: Sinyal  $x(3t)$

# Operasi sinyal

**Solusi Contoh 3:** Gambar 11 menunjukkan  $x_e(t)$ , yaitu  $x(t)$  yang diperluas waktu oleh faktor 2; akibatnya, secara matematis dapat digambarkan sebagai  $x(t/2)$ , yang diperoleh dengan mengganti  $t$  dengan  $t/2$  di  $x(t)$ . Dengan demikian,

$$x_e(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} 2 & -1.5 \leq \frac{t}{2} < 0 \text{ atau } -3 \leq t < 0 \\ 2e^{-t/4} & 0 \leq \frac{t}{2} < 3 \text{ atau } 0 \leq t < 6 \\ 0 & t \text{ yang lain} \end{cases} \quad (8)$$



Gambar 12: Sinyal  $x(t/2)$

# Operasi sinyal

## Latihan 3:

Tunjukkan bahwa **kompresi** waktu dengan faktor bilangan bulat  $n$  ( $n > 1$ ) dari sebuah sinusoidal menghasilkan sinusoidal dengan **amplitudo** dan **fase** yang sama, tetapi dengan frekuensi yang meningkat sebanyak  $n$  kali lipat. Demikian pula, **perluasan** waktu dengan faktor bilangan bulat  $n$  ( $n > 1$ ) dari sebuah sinusoidal menghasilkan sinusoidal dengan **amplitudo** dan **fase** yang sama, tetapi dengan frekuensi dikurangi dengan faktor  $n$ . Verifikasi kesimpulan Anda dengan membuat sketsa sinusoidal  $\sin 2t$  dan sinusoidal yang sama **dikompresi** dengan faktor 3 dan **diperluas** dengan faktor 2.

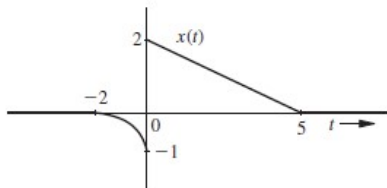
### ◀ Pembalikan waktu

Perhatikan sinyal  $x(t)$  pada **Gambar 13(a)**. Untuk membalikkan waktu  $x(t)$ , kita melakukan putaran  $180^\circ$  terhadap sumbu vertikal. Kali ini pembalikan (refleksi  $x(t)$  terhadap sumbu vertikal) memberi kita sinyal  $\phi(t)$  (**Gambar 13(b)**). Amati bahwa apapun yang terjadi pada **Gambar 13(a)** pada saat  $t$  juga terjadi pada **Gambar 13(b)** pada saat  $-t$ , dan sebaliknya. Karena itu,

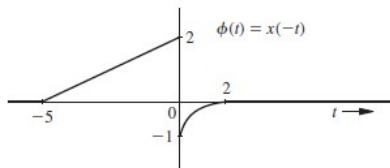
$$\phi(t) = x(-t)$$

# Operasi sinyal

Jadi, untuk membalikkan waktu suatu sinyal kita mengganti  $t$  dengan  $-t$ , dan **pembalikan waktu** dari sinyal  $x(t)$  menghasilkan sinyal  $x(-t)$ . Ingat juga bahwa pembalikan  $x(t)$  terhadap sumbu horizontal menghasilkan  $-x(t)$ .



(a)

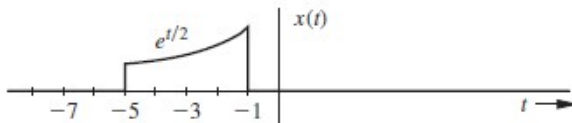


(b)

Gambar 13: Pembalikan waktu sebuah sinyal

# Operasi sinyal

**Contoh 4:** Untuk sinyal  $x(t)$  yang diilustrasikan pada [Gambar 14](#), buat sketsa  $x(-t)$ , yang merupakan **pembalikan waktu** dari  $x(t)$ .



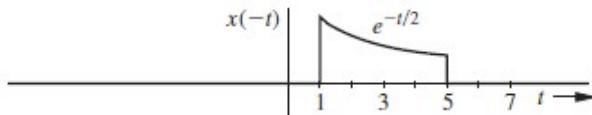
**Gambar 14:** Sinyal  $x(t)$

**Solusi:** Nilai  $-1$  dan  $-5$  di  $x(t)$  dipetakan ke nilai  $1$  dan  $5$  di  $x(-t)$ . Karena  $x(t) = e^{t/2}$ , kita mempunyai  $x(-t) = e^{-t/2}$ . Sinyal  $x(-t)$  digambarkan pada [Gambar 15](#). Kita dapat mendeskripsikan  $x(t)$  dan  $x(-t)$  sebagai

$$x(t) = \begin{cases} e^{t/2} & -5 \leq t \leq -1 \\ 0 & t \text{ yang lain} \end{cases}$$



# Operasi sinyal



Gambar 15: Sinyal  $x(-t)$

dan versi **pembalikan waktu**  $x(-t)$  diperoleh dengan mengganti  $t$  dengan  $-t$  di  $x(t)$  sebagai

$$x(-t) = \begin{cases} e^{-t/2} & -5 \leq -t \leq -1 \text{ atau } 1 \leq t \leq 5 \\ 0 & t \text{ yang lain} \end{cases}$$

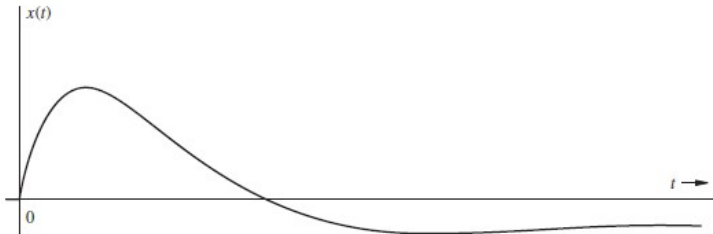
# Pokok Bahasan

- ◀ Definisi sinyal
- ◀ Ukuran sinyal
- ◀ Operasi sinyal
- ◀ **Klasifikasi sinyal**
- ◀ Model sinyal

# Klasifikasi sinyal

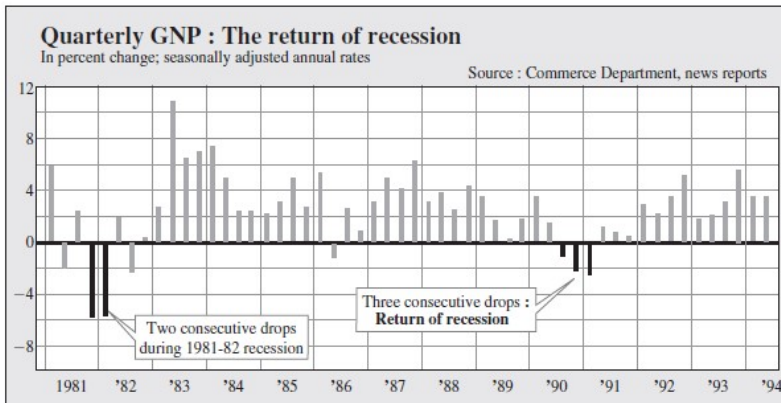
## ◀ Sinyal waktu kontinu dan diskrit

Sinyal yang ditentukan untuk semua nilai waktu  $t$  secara berkesinambungan ([Gambar 16](#)) disebut sinyal waktu kontinu, dan sinyal yang hanya ditentukan pada nilai-nilai waktu  $t$  tertentu ([Gambar 17](#)) disebut sinyal waktu diskrit. Output telepon dan kamera video adalah sinyal waktu kontinu, sedangkan produk nasional bruto (GNP) triwulanan, penjualan bulanan suatu perusahaan, dan rata-rata harian pasar saham adalah sinyal waktu diskrit.



Gambar 16: Sinyal waktu kontinu

# Klasifikasi sinyal

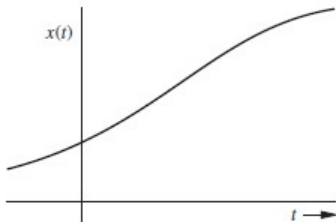


Gambar 17: Sinyal waktu diskrit

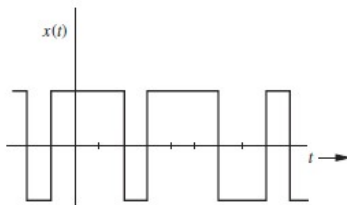
# Klasifikasi sinyal

## ◀ Sinyal analog dan digital

Sinyal yang amplitudonya bisa mengambil nilai apa pun dalam rentang kontinu adalah **sinyal analog**. Ini berarti bahwa amplitudo **sinyal analog** dapat mempunyai jumlah nilai yang tidak terbatas. Sebaliknya, **sinyal digital** adalah sinyal yang amplitudonya hanya dapat mempunyai sejumlah nilai terbatas.



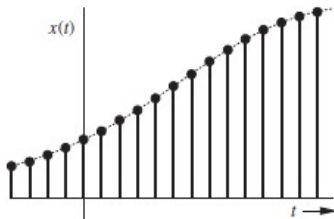
(a) analog kontinu



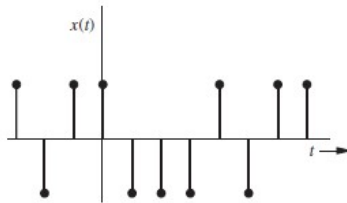
(b) digital kontinu

Gambar 18: Sinyal analog dan digital kontinu

# Klasifikasi sinyal



(a) analog diskrit



(b) digital diskrit

Gambar 19: Sinyal analog dan digital diskrit

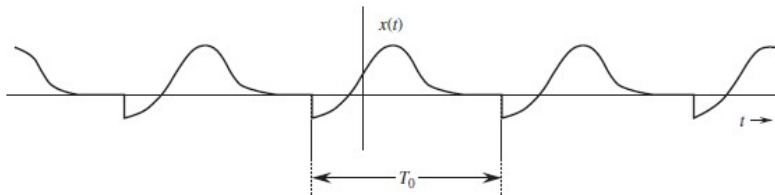
## ◀ Sinyal periodik dan aperiodik

Suatu sinyal  $x(t)$  dikatakan **periodik** jika untuk suatu konstanta positif  $T_0$

$$x(t) = x(t + T_0) \quad \forall t \quad (9)$$

Suatu sinyal bersifat **aperiodik** jika tidak **periodik**.

# Klasifikasi sinyal



Gambar 20: Sinyal periodik dengan periode  $T_0$

## ◀ Sinyal deterministik dan acak

Sinyal yang gambaran fisiknya diketahui secara lengkap, baik dalam bentuk matematis maupun grafik, merupakan **sinyal deterministik**. Sinyal yang nilainya tidak dapat diprediksi secara tepat tetapi hanya diketahui berdasarkan deskripsi probabilistik, seperti nilai rata-rata atau nilai kuadrat rata-rata, adalah **sinyal acak**.

# Pokok Bahasan

- ◀ Definisi sinyal
- ◀ Ukuran sinyal
- ◀ Operasi sinyal
- ◀ Klasifikasi sinyal
- ◀ Model sinyal

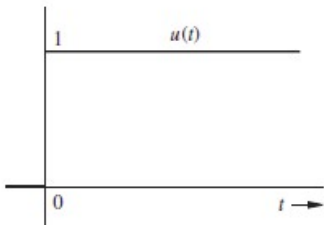


# Model sinyal

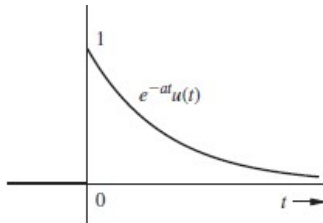
## ◀ Fungsi undak satuan (*unit step*)

Fungsi ini dapat didefinisikan sebagai

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (10)$$



(a) fungsi undak satuan  $u(t)$

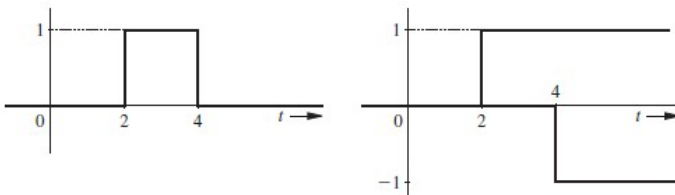


(b) eksponensial  $e^{-at}u(t)$

# Model sinyal

Sinyal pulse dapat dihasilkan menggunakan dua fungsi undak (*step*), misalnya:

$$x(t) = u(t - 2) - u(t - 4)$$



Gambar 22: Representasi fungsi pulse dari fungsi-fungsi undak

# Model sinyal

## ◀ Fungsi impuls satuan

Fungsi impuls satuan  $\delta(t)$  adalah salah satu fungsi paling penting dalam studi sinyal dan sistem. Fungsi ini pertama kali didefinisikan dalam dua bagian oleh P. A. M. Dirac sebagai

$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \quad \text{dan} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (11)$$



Gambar 23: Impuls satuan dan perkiraannya

# Model sinyal

## ◀ Fungsi eksponensial

Fungsi eksponensial sangat penting dalam sains dan teknik. Parameter  $s$  adalah variabel kompleks yang diberikan oleh  $s = \sigma + j\omega$ . Oleh karena itu,

$$e^{st} = e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

Jika  $s$  adalah konjugate,  $s^* = \sigma - j\omega$ , maka

$$e^{s^*t} = e^{(\sigma-j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{-j\omega t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t - j \sin \omega t)$$

dan

$$e^{\sigma t} \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{st} + e^{s^*t})$$

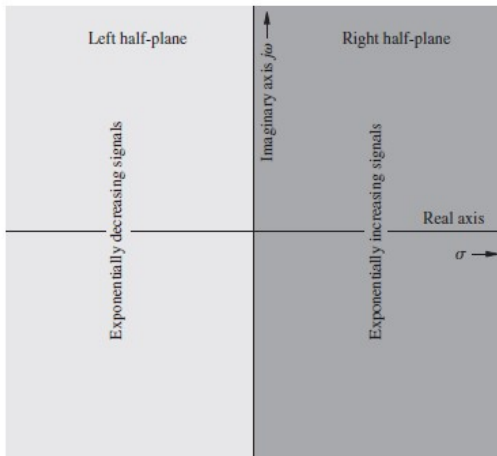
# Model sinyal

Fungsi-fungsi berikut merupakan kasus khusus atau dapat dinyatakan dalam ketentuan  $e^{st}$

- ◀ Konstanta  $k = ke^{0t}$  ( $s = 0$ )
- ◀ eksponensial monotonik  $e^{\sigma t}$  ( $\omega = 0$ ,  $s = \sigma$ )
- ◀ Sinusoidal  $\cos \omega t$  ( $\sigma = 0$ ,  $s = \pm j\omega$ )
- ◀ Sinusoidal yang bervariasi secara eksponensial  $e^{\sigma t} \cos \omega t$  ( $s = \sigma \pm j\omega$ )

Frekuensi kompleks  $s$  dapat dengan mudah direpresentasikan pada bidang frekuensi kompleks ( $s$  plane), seperti yang digambarkan pada [Gambar 24](#).

# Model sinyal



Gambar 24: Bidang frekuensi kompleks