

Pengantar Persamaan Diferensial

Heri Purnawan

Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

Disampaikan pada Matakuliah Matematika Teknik II (4 sks)
Program Studi Teknik Elektro

February 18, 2025

Perkenalan Singkat

- ◀ Nama Lengkap: Heri Purnawan
- ◀ Program Studi: Teknik Elektro, Universitas Islam Lamongan (UNISLA)
- ◀ Riwayat Pendidikan:
 - S-1 Matematika ITS (2011 - 2015)
 - S-2 Matematika ITS (2016 - 2018)
 - S-3 Matematika ITS (2020 - 2024)
- ◀ Informasi:
 - Phone: +62 82140797329
 - Email: heripurnawan@unisla.ac.id
 - Ruang: Gedung C, Lt. 1, Kampus 1, UNISLA.

Penilaian:

- ◀ Kehadiran : 15%
- ◀ Tugas : 20%
- ◀ Quiz 1 : 10%
- ◀ Quiz 2 : 10%
- ◀ ETS : 20%
- ◀ EAS : 25%

Materi pembelajaran dan referensi lihat di RPS
(<https://heri-purnawan.github.io/teaching/te4485/>)

Aturan perkuliahan

Penting!

Toleransi keterlambatan maksimal 15 menit yaitu 08:15 WIB (berlaku untuk mahasiswa dan dosen)

- ◀ Jika mahasiswa terlambat lebih dari 15 menit, maka dianggap tidak hadir di kelas (kecuali ada alasan tertentu yang dianggap logis).
- ◀ Jika dosen terlambat lebih dari 15 menit (tanpa pemberitahuan yang merugikan waktu mahasiswa), maka mahasiswa berhak melaporkan ke KaProdi/WaDek I/WaRek I untuk dikenai sanksi.

Pendahuluan

Definisi Persamaan Diferensial (PD)

Suatu persamaan yang mengandung fungsi beserta turunan-turunannya.

Tingkat PD

Suatu persamaan yang mana turunan tertinggi merupakan tingkat persamaan diferensial.

Derajat PD

Pangkat dari turunan tertinggi.

Penyelesaian PD

Fungsi yang memenuhi persamaan diferensial.

- ▶ Penyelesaian PD tidak tunggal.

Contoh:

$$\begin{cases} y = C_2 e^{-t} \\ y' = -C_2 e^{-t} \\ y'' = C_2 e^{-t} \end{cases} \left\} \frac{d^2 y}{dt^2} - y = 0 \right.$$

$$\begin{cases} y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ y' = C_1 e^t - C_2 e^{-t} \\ y'' = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \end{cases} \left\} \frac{d^2 y}{dt^2} - y = 0 \right.$$

$$\text{3} \quad y = C \sin t \rightarrow \text{bukan penyelesaian } \frac{d^2 y}{dt^2} - y = 0$$

- ▶ Banyaknya konstanta sebarang tergantung pada tingkat PD.
- ▶ **Penyelesaian Umum:** Penyelesaian PD yang memuat konstanta sebarang
- Penyelesaian Khusus:** Tidak ada konstanta sebarang.

Klasifikasi PD

- ◀ Salah satu klasifikasi penting didasarkan pada apakah fungsi yang tidak diketahui bergantung pada satu variabel bebas atau beberapa variabel bebas.
 - **Persamaan diferensial biasa** (*Ordinary Differential Equation*, ODE) adalah persamaan yang melibatkan turunan dari suatu fungsi terhadap satu variabel bebas.
 - **Persamaan diferensial parsial** (*Partial Differential Equation*, PDE) adalah persamaan yang melibatkan turunan parsial dari suatu fungsi dengan lebih dari satu variabel bebas.
- ◀ Klasifikasi penting dari persamaan diferensial adalah apakah persamaan tersebut linier atau nonlinier.
 - **Linear**, jika setiap suku dalam persamaan tidak mengandung atau hanya mengandung tepat satu dari variabel terikat atau turunannya. Tidak ada perkalian variabel terikat dengan dirinya sendiri atau dengan turunannya.
 - **Nonlinier**, jika bukan linier.

Contoh-Contoh Klasifikasi PDB/PDP

- ▶ **Peluruhan Radioaktif:** Jumlah u dari suatu material radioaktif berubah seiring waktu sebagai berikut,

$$\frac{du(t)}{dt} = -ku(t), \quad k > 0$$

dimana k adalah konstanta positif yang mewakili sifat radioaktif material tersebut.

Jawab: PDB/ODE, Linier, Tk. 1, Derajat 1

- ▶ **Hukum Newton:** Massa dikalikan percepatan sama dengan gaya, $ma = f$, di mana m adalah massa partikel, $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ adalah percepatan partikel, x adalah posisi partikel pada waktu t , dan f adalah gaya yang bekerja pada partikel.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f \left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt} \right)$$

Jawab: PDB/ODE, Linier jika f linier, Tk. 2, Derajat 1

- ▶ **Persamaan Panas:** Suhu T dalam suatu material padat berubah seiring waktu dan dalam tiga dimensi- $\mathbf{x} = (x, y, z)$

$$\frac{\partial T(t, \mathbf{x})}{\partial t} = -k \left(\frac{\partial^2 T(t, \mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(t, \mathbf{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(t, \mathbf{x})}{\partial z^2} \right), \quad k > 0$$

dimana k adalah konstanta positif yang mewakili sifat termal dari material.

Jawab: PDP/PDE, Linier, Tk. 2 untuk ruang dan Tk. 1 untuk waktu, Derajat 1 untuk ruang dan waktu.

- ▶ **Persamaan Gelombang:** Sebuah gangguan gelombang u merambat dalam waktu t dan dalam tiga dimensi dilabeli dengan $\mathbf{x} = (x, y, z)$ melalui media dengan cepat rambat gelombang $v > 0$ adalah

$$\frac{\partial^2 u(t, \mathbf{x})}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u(t, \mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t, \mathbf{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(t, \mathbf{x})}{\partial z^2} \right),$$

Jawab: PDP/PDE, Linier, Tk. 2 untuk ruang dan waktu, Derajat 1 untuk ruang dan waktu.

Soal Latihan

Dalam setiap Soal 1 sampai 5 tentukan apakah persamaan yang diberikan PDB atau PDP, linier atau nonlinier, Tingkat PD, dan Derajat PD.

$$1 \quad t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + 2y = \sin t$$

$$2 \quad \frac{d^4 y}{dt^4} + \frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 1$$

$$3 \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

$$4 \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \sin(t + y) = \sin t$$

$$5 \quad u_{xx} + u_{yy} + uu_x + uu_y + u = 0$$

Aplikasi PD

◀ Fisika dan Teknik

- Mekanika: Model gerakan partikel dan sistem dinamis (misalnya, gerak osilasi pada pegas dan bandul).
- Elektronika: Analisis rangkaian listrik seperti RLC, LC, dan RC yang menggambarkan perilaku arus dan tegangan dalam sistem elektronik.
- Termodinamika: Pemodelan perpindahan panas dan difusi.

◀ Biologi dan Ekologi

- Pertumbuhan Populasi: Model pertumbuhan populasi (seperti model eksponensial dan logistik) dan interaksi predator-mangsa.
- Penyebaran Penyakit: Pemodelan penyebaran infeksi dan epidemiologi (misalnya, model SIR untuk penyakit menular).

Aplikasi PD (lanj.)

◀ Kimia

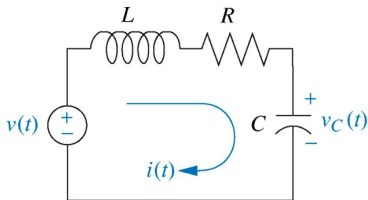
- Kinetika Reaksi: Persamaan diferensial digunakan untuk menggambarkan laju reaksi kimia dan perubahan konsentrasi zat selama waktu.
- Difusi: Model penyebaran zat dalam medium melalui persamaan difusi.

◀ Ekonomi dan Keuangan

- Model Pertumbuhan Ekonomi: Analisis dinamika ekonomi dan investasi menggunakan persamaan diferensial.
- Model Keuangan: Pemodelan pergerakan harga saham dan opsi melalui persamaan diferensial stokastik (seperti model *Black-Scholes*).

◀ DII.

PD dalam rangkaian listrik



dimana, R menyatakan resistor, L adalah induktor/kumparan, C adalah kapasitor, i adalah arus, v adalah tegangan, dan v_C adalah tegangan pada kapasitor. Dari Hukum Kirchhoff:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = v(t)$$

PD dalam rangkaian listrik (lanj.)

Dengan menggunakan $i(t) = \frac{dq}{dt}$, dimana q adalah muatan listrik pada kapasitor, kita dapat dapatkan

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = v(t)$$

Dengan hubungan $q(t) = C v_C(t)$, maka

$$LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = v(t)$$

Pertemuan selanjutnya akan dibahas bagaimana mendapatkan solusi dari PDB orde 1 dan orde 2.



**YOU CAN
IF
YOU THINK YOU CAN**

