

Sistem Persamaan Diferensial Biasa (Bagian 1)

Ordinary Differential Equation Systems (Part 1)

Heri Purnawan

Disampaikan pada Mata Kuliah Matematika Teknik II (TE4485)

Program Studi S-1 Teknik Elektro
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Lamongan

2025





Sistem PDB tk. 1 $n \times n$ dapat dituliskan sebagai

$$\bar{x}'(t) = \bar{A}(t)\bar{x}(t) + \bar{b}(t) \quad (1)$$

dimana:

$$\bar{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \bar{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}, \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Sistem (1) disebut homogen jika $\bar{b} = 0$ dan koefisien konstan jika matriks \bar{A} konstan.

Dari (1),

\bar{A} adalah matriks koefisien berukuran $n \times n$.

\bar{b} adalah vektor gaya luar berukuran $n \times 1$.

\bar{x} adalah vektor variabel yang tidak diketahui berukuran $n \times 1$.

Contoh 1: Tentukan matriks koefisien, vektor gaya luar & vektor variabel yang tidak diketahui dari sistem linier 2×2 berikut:

$$x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t)$$

$$x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t)$$

Contoh 2: Tentukan matriks koefisien, vektor gaya luar & vektor variabel yang tidak diketahui dari sistem berikut:

$$x_1' = x_1 - x_2$$

$$x_2' = -x_1 + x_2$$

Contoh 3: Tentukan bentuk eksplisit untuk sistem $\bar{x}' = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}$ dimana

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} e^t \\ 2e^{3t} \end{bmatrix}, \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Contoh 4: Tunjukkan bahwa vektor

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} \quad \text{dan} \quad \bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t}$$

adalah solusi untuk sistem linier 2×2

$$\bar{x}' = \bar{A}\bar{x}, \quad \text{dimana} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$



Suatu PDB tk. n dapat diubah menjadi sistem PDB tingkat 1.

Andaikan diberikan PDB tk. 2 sebagai berikut:

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \quad (2)$$

Persamaan (2) dapat ditransformasi ke sistem PDB tk. 1 dengan memisalkan $x_1 = y$ dan $x_2 = y'$.

$$x'_1 = y' = x_2$$

$$x'_2 = y'' = -a_1(t)y' - a_0(t)y + b(t) = -a_1(t)x_2 - a_0(t)x_1 + b(t)$$

maka diperoleh

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -a_0(t)x_1 - a_1(t)x_2 + b(t) \end{cases}$$

Jika dituliskan dalam matriks, maka akan diperoleh sistem PDB berikut:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

Contoh 5: Ekspresikan PDB linier tk. 2 berikut:

$$y'' - 5y' + 6y = t$$

kedalam sistem PDB tk. 1!

Contoh 6: Ekspresikan PDB linier tk. 3 berikut:

$$y''' - y'' - 20y' = 0$$

kedalam sistem PDB tk. 1!