

# Persamaan Diferensial Biasa Tingkat 1 (Bagian 3)

*1<sup>st</sup> Order Ordinary Differential Equation (Part 3)*

Heri Purnawan

Disampaikan pada Mata Kuliah Matematika Teknik II (TE4485)

Program Studi S-1 Teknik Elektro  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Lamongan

2025





# Persamaan Diferensial Biasa (PDB) Eksak

Persamaan diferensial adalah eksak jika bagian-bagian tertentu dari persamaan diferensial tersebut memiliki turunan parsial yang sama.

## Definisi 1.4.1

PDB **eksak** didefinisikan sebagai berikut

$$N(t, y)y' + M(t, y) = 0$$

dimana fungsi  $N$  dan  $M$  memenuhi

$$\partial_t N(t, y) = \partial_y M(t, y)$$

## Catatan

Fungsi  $N$  dan  $M$  bergantung pada  $t, y$  dan kita gunakan notasi untuk turunan parsial

$$\partial_t N = \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \partial_y M = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Mari kita perhatikan contoh berikut.

## Contoh 1.4.1

Apakah persamaan diferensial berikut adalah PDB eksak atau bukan?

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad a(t) \neq 0$$

**Jawab:** Dari soal kita bisa tuliskan

$$y'(t) - a(t)y(t) - b(t) = 0$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} N(t, y) &= 1 & \rightarrow & \partial_t N(t, y) = 0 \\ M(t, y) &= -a(t)y(t) - b(t) & \rightarrow & \partial_y M(t, y) = -a(t) \end{aligned}$$

Karena  $\partial_t N(t, y) \neq \partial_y M(t, y)$ , maka PDB tersebut bukan PDB **eksak**.

## Contoh 1.4.2

Apakah persamaan diferensial berikut adalah PDB eksak atau bukan?

$$2tyy' + 2t + y^2 = 0$$

## Latihan 1.4.3

Apakah persamaan diferensial berikut adalah PDB eksak atau bukan?

$$\sin(t)y' + t^2e^y y' - y' = -y \cos(t) - 2te^y$$



## Solusi PDB eksak

Bentuk umum:

$$N(t, y)y' + M(t, y) = 0$$

Kunci: Misalkan penyelesaiannya

$$F(t, y) = C$$

sehingga,

$$\partial_t F(t, y) = M(t, y) \quad \text{dan} \quad \partial_y F(t, y) = N(t, y)$$

## Contoh 1.4.4

Diberikan PDB eksak sebagaimana [Contoh 1.4.2](#), yaitu

$$2tyy' + 2t + y^2 = 0,$$

selesaikan PDB tersebut!

PDB **non-eksak** dapat diubah menjadi PDB **eksak** setelah dikalikan dengan faktor integrasi.

## Definisi 1.4.2

Diberikan PDB sebagai berikut:

$$N(t, y)y' + M(t, y) = 0$$

adalah PDB **non-eksak**, jika

$$\partial_t N(t, y) \neq \partial_y M(t, y)$$

## Contoh 1.4.5

PDB pada **Contoh 1.4.1** bisa dikatakan PDB **non-eksak**, karena memenuhi

$$\partial_t N(t, y) \neq \partial_y M(t, y)$$

## Contoh 1.4.6

Buktikan bahwa PDB berikut adalah **non-eksak**.

$$(t^2 + ty)y' + (3ty + y^2) = 0$$



## Solusi PDB non-eksak

Bentuk umum:

$$N(t, y)y' + M(t, y) = 0, \quad \text{dimana} \quad \partial_t N(t, y) \neq \partial_y M(t, y)$$

Kunci: Definisikan

$$h(t) = \frac{\partial_y M - \partial_t N}{N}, \quad N \neq 0$$

maka diperoleh PDB **eksak** sebagai berikut<sup>a</sup>:

$$(e^H N) y' + (e^H M) = 0$$

dimana:  $H$  adalah anti turunan dari  $h$ , yaitu

$$H(t) = \int h(t) \, dt$$

---

<sup>a</sup>Penjelasan di G. Nagy, "Ordinary Differential Equation", Michigan State University, 2021

## Contoh 1.4.7

Dari **Contoh 1.4.6**, selesaikan PDB **non-eksak** tersebut.



## Contoh 1.4.8

Tentukan solusi dari PDB berikut:

$$(5t e^{-y} + 2 \cos(3t)) y' + (5e^{-y} - 3 \sin(3t)) = 0$$

## Contoh 1.4.9

Tentukan solusi dari PDB berikut:

$$(t - t^2 y) y' + (y + t y^2) = 0$$