

# PDB Linier Tingkat 2 Homogen

*Homogeneous 2<sup>nd</sup> Linear ODE*

Heri Purnawan

Disampaikan pada Mata Kuliah Matematika Teknik II (TE4485)

Program Studi S-1 Teknik Elektro  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Lamongan

2025





## Definisi 2.1.1

PDB linier Tk. 2 untuk fungsi  $y(t)$  adalah

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t), \quad (1)$$

dimana  $a_2, a_1, a_0$  adalah fungsi yang diberikan. Pers. (1) adalah

- **Homogen**, jika  $f(t) = 0$  dan **tak-homogen**, jika  $f(t) \neq 0$ , untuk semua  $t \in \mathbb{R}$ .
- **Koefisien konstan**, jika  $a_2, a_1, a_0$  konstan dan **koefisien variabel**, jika  $a_2, a_1, a_0$  bukan konstan, untuk semua  $t \in \mathbb{R}$ .

## Contoh 2.1.1

Klasifikan PDB linier Tk.2 berikut adalah koef. konstan, koef. variabel, homogen, atau tak-homogen!

1.  $y'' + 5y' + 6 = 0$
2.  $y'' - 3y' + y = \cos(3t)$



Diberikan PDB linier Tk. 2 homogen koefisien konstan sebagai berikut:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (2)$$

Misalkan didefinisikan  $y = e^{\lambda t}$ , maka

$$y' = \lambda e^{\lambda t} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Substitusikan ke Pers. (2), maka diperoleh

$$a_2 \lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0 \quad \text{atau} \quad (a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda t} = 0$$

Karena  $e^{\lambda t} \neq 0$ , maka  $a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ . Dalam hal ini persamaan/polinomial karakteristik adalah

$$P(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \quad (3)$$

Pers. (3) adalah polinomial derajat 2 atau persamaan kuadrat yang kemungkinan mempunyai akar-akar karakteristik sebagai berikut:

- 2 buah akar real dan berbeda ( $\lambda_1$  dan  $\lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$ )

PUPD:

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

$y_h$  adalah penyelesaian homogen.

- 2 buah akar real dan kembar ( $\lambda_1 = \lambda_2$ )

PUPD:

$$y_h = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, \lambda = \lambda_1 = \lambda_2$$

- 2 buah akar imajiner/*konjugate* kompleks ( $\lambda_1 = a + ib$  dan  $\lambda_2 = a - ib$ , dimana  $a, b \in \mathbb{R}$ )

PUPD:

$$y_h = c_1 e^{(a+ib)t} + c_2 t e^{(a-ib)t}$$



## Contoh 2.1.2 Akar real dan berbeda

Diberikan PDB linier tk. 2 homogen sebagai berikut

$$y'' - 7y' + 12y = 0$$

1. Tentukan persamaan karakteristiknya!
2. Tentukan akar-akar persamaan karakteristiknya!
3. Tentukan penyelesaian umum PD (PUPD)!

## Contoh 2.1.3 Akar real dan kembar

Diberikan PDB linier tk. 2 homogen sebagai berikut

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

1. Tentukan persamaan karakteristiknya!
2. Tentukan akar-akar persamaan karakteristiknya!
3. Tentukan penyelesaian umum PD (PUPD)!



- Bilangan kompleks mempunyai bentuk

$$z = a + ib, \text{ dimana } i = \sqrt{-1} \text{ dan } a, b \in \mathbb{R}$$

- $\text{Re}[z] = a$ ,  $\text{Im}[z] = b$  adalah bagian real dan imajiner dari  $z$ .
- Konjugate* dari  $z$  adalah  $\bar{z} = a - ib$

$$\text{Re}[z] = \frac{z + \bar{z}}{2}, \text{Im}[z] = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

- Eksponensial dari bil. kompleks adalah

$$e^{a+ib} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+ib)^n}{n!}, \text{ khususnya berlaku } e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}.$$

- Rumus Euler:

$$e^{ib} = \cos b + i \sin b$$

- Bil. kompleks dari bentuk  $e^{a \pm ib}$  dapat dituliskan sebagai

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b) \text{ dan } e^{a-ib} = e^a(\cos b - i \sin b)$$



- Dari  $e^{a+ib}$  dan  $e^{a-ib}$ , maka diperoleh bil. real

$$\frac{1}{2} (e^{a+ib} + e^{a-ib}) = e^a \cos b$$

$$\frac{1}{2i} (e^{a+ib} - e^{a-ib}) = e^a \sin b$$

**Recall:** Solusi PDB linier tk. 2 homogen dengan akar-akar bilangan kompleks yaitu

$$y_h = c_1 e^{(a+ib)t} + c_2 e^{(a-ib)t} = c_1 e^{at} \cdot e^{ibt} + c_2 e^{at} \cdot e^{-ibt}$$

Dengan menggunakan rumus Euler:

$$\begin{aligned} y_h &= c_1 e^{at} (\cos bt + i \sin bt) + c_2 e^{at} (\cos bt - i \sin bt) \\ &= e^{at} (c_1 (\cos bt + i \sin bt) + c_2 (\cos bt - i \sin bt)) \\ &= e^{at} ((c_1 + c_2) \cos bt + i (c_1 - c_2) \sin bt) \end{aligned}$$

**Misalkan:**  $K_1 = c_1 + c_2$  dan  $K_2 = i(c_1 - c_2)$ , maka

$$y_h = e^{at} (K_1 \cos bt + K_2 \sin bt)$$



## Contoh 2.1.4 Akar imajiner/*konjugate* kompleks

Diberikan PDB linier tk. 2 homogen sebagai berikut

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

1. Tentukan persamaan karakteristiknya!
2. Tentukan akar-akar persamaan karakteristiknya!
3. Tentukan penyelesaian umum PD (PUPD)!