

Persamaan Diferensial Biasa Tingkat 1 (Bagian 2)

1st Order Ordinary Differential Equation (Part 2)

Heri Purnawan

Disampaikan pada Mata Kuliah Matematika Teknik II (TE4485)

Program Studi S-1 Teknik Elektro

Fakultas Sains dan Teknologi

Universitas Islam Lamongan

2025



Seringkali persamaan diferensial nonlinier lebih sulit diselesaikan daripada persamaan linier. Persamaan yang dapat dipisahkan merupakan pengecualian karena persamaan tersebut dapat diselesaikan hanya dengan mengintegrasikan kedua sisi persamaan diferensial.

Definisi 1.3.1

PDB Tk. 1 **terpisah** diberikan oleh

$$h(y)y'(t) = g(t)$$

dimana h, g adalah fungsi-fungsi yang diberikan.

Catatan:

- Ruas kiri secara eksplisit hanya bergantung pada y .
- Ruas kanan hanya bergantung pada t .

Contoh 1.3.1

Klasifikasikan apakah PDB berikut adalah PDB Tk. 1 **terpisah** atau **tidak**!

a. $y' = \frac{t^2}{1-y^2}$

c. $y' + y^2 \cos(2t) = 0$

b. $y' = e^y + \cos(t)$

d. $y' = a_0 y + b_0$

Solusi PDB terpisah

Bentuk umum:

$$h(y)y' = g(t) \quad (1)$$

karena $y' = \frac{dy}{dt}$, maka Pers. (1) dapat dituliskan menjadi

$$h(y)dy = g(t)dt$$

Kunci: Integrasikan masing-masing ruas/sisi

$$\int h(y) dy = \int g(t) dt$$



Contoh 1.3.2

Tentukan solusi PDB berikut:

1. $-\frac{y'}{y^2} = \cos(2t)$

2. $y' = \frac{t^2}{1-y^2}$

Latihan 1.3.3

Tentukan solusi PDB berikut:

$$3t^2 + 4y^3y' - 1 + y' = 0$$



Terkadang PDB tidak dapat dipisahkan tetapi dapat diubah menjadi persamaan yang dapat dipisahkan dengan mengubah fungsi yang tidak diketahui. Ini adalah kasus persamaan diferensial yang dikenal sebagai persamaan **homogen**.

Definisi 1.3.2

PDB Tk. 1 **homogen** dapat didefinisikan sebagai

$$y'(t) = F\left(\frac{y(t)}{t}\right) \quad (2)$$

Catatan:

- Fungsi apa pun F dari t, y hanya bergantung pada hasil bagi y/t adalah **invarian skala**.
- Fungsi invarian skala adalah kasus khusus dari **fungsi homogen berderajat n** , yang merupakan fungsi yang memenuhi

$$f(ct, cy) = c^n f(t, y)$$

Fungsi invarian skala adalah kasus $n = 0$.



Solusi PDB homogen

Bentuk umum:

$$y' = F\left(\frac{y}{t}\right)$$

Kunci: Substitusi

$$x = \frac{y}{t}$$

sehingga diperoleh PDB **terpisah**, dan selanjutnya dapat diselesaikan sebagaimana cara pada PDB **terpisah**.

Contoh 1.3.4

Tentukan solusi PBD berikut:

$$y' = \frac{t^2 + 3y^2}{2ty}$$

Kerjakan Latihan di Hal. 35 (G. Nagy, *Ordinary Differential Equations*)