Pemodelan Dalam Domain Waktu

Heri Purnawan

Disampaikan pada matakuliah **Dasar Sistem Kontrol**
Program Studi S-1 Teknik Elektro
Fakultas Sains dan Teknologi (FST)
Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

October 21, 2024
Email: heripurnawan@unisla.ac.id

Pokok bahasan

- Pendahuluan
- Representasi persamaan ruang keadaan (*state-space*)
- Penerapan representasi state-space
  - Sistem jaringan listrik
  - Sistem mekanik
- Fungsi transfer ke state-space
- State-space ke fungsi transfer

Pendahuluan

- Pada kuliah sebelumnya, kita telah mempelajari tentang teknik klasik atau domain frekuensi.
- Pendekatan ini didasarkan pada pengubahan persamaan diferensial suatu sistem menjadi fungsi transfer, sehingga menghasilkan model matematis dari sistem yang secara aljabar menghubungkan representasi keluaran dengan representasi masukan.
- Kerugian utama dari pendekatan klasik adalah penerapannya yang terbatas. Pendekatan ini hanya dapat diterapkan pada sistem yang linier dan invarian waktu.
- Keuntungan utama dari teknik domain frekuensi adalah teknik ini memberikan stabilitas dan informasi respons sementara dengan cepat. Dengan demikian, kita dapat segera melihat pengaruh parameter sistem yang bervariasi hingga desain yang dapat diterima terpenuhi.

Pendahuluan

- Kebutuhan akan sistem kendali semakin meningkat, sehingga pendekatan menggunakan persamaan diferensial linier waktu-invarian dan fungsi transfer tidak lagi memadai.
- Pendekatan *state-space* (pendekatan modern atau domain waktu) adalah metode terpadu untuk memodelkan, menganalisis, dan merancang berbagai sistem. Pendekatan ini bisa digunakan untuk memodelkan sistem nonlinier.
- *State-space* juga dapat menangani sistem dengan kondisi awal tak-nol dan sistem dengan parameter yang bervariasi seiring waktu.
- Sistem dengan beberapa input dan output (*multiple*-input, *multiple*-output) dapat direpresentasikan dengan *state-space*.
- Pendekatan ini memungkinkan pemodelan sistem untuk simulasi digital, yang berguna untuk menganalisis perubahan parameter sistem.

Beberapa istilah dalam state-space

- Variabel sistem: variabel apa pun yang merespons masukan atau kondisi awal dalam suatu sistem.
- Variabel keadaan (*state variable*): himpunan terkecil dari variabel sistem bebas linier sedemikian rupa sehingga nilai anggota himpunan pada waktu t_0 beserta fungsi pemaksa yang diketahui sepenuhnya menentukan nilai semua variabel sistem untuk semua $t \geq t_0$.
- Vektor keadaan (*state vector*): sebuah vektor yang elemen-elemennya merupakan variabel keadaan.
- Ruang keadaan (*state space*): ruang berdimensi n yang sumbunya merupakan variabel keadaan.
- Persamaan keadaan (*state equations*): himpunan n persamaan diferensial orde pertama simultan dengan n variabel, dimana n variabel yang harus diselesaikan adalah variabel keadaan.
- Persamaan keluaran: persamaan aljabar yang menyatakan variabel keluaran suatu sistem sebagai kombinasi linier dari variabel keadaan dan masukan.

Representasi umum state-space

Sistem linier *time-invariant* kontinu dapat direpresentasikan sebagai

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t), \tag{2}$$

dimana,

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$: vektor variabel keadaan (*state*)
$\dot{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{n_x}$: turunan vektor keadaan terhadap waktu
$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$: vektor input
$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$: vektor keluaran (output)
$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$: matriks keadaan (*state matrix*)
$\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$: matriks input (*input matrix*)
$\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$: matriks keluaran (*output matrix*)
$\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$: matriks umpan maju (*feedforward matrix*)

State-space dalam waktu diskrit

Persamaan (1) dan (2), dapat ditransformasi menjadi sistem diskrit dengan menggunakan metode Euler yang direpresentasikan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d \boldsymbol{u}(k), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k), \tag{4}$$

dimana:

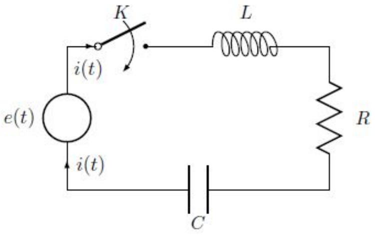
$$\boldsymbol{A}_d = T_s \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I},$$

$$\boldsymbol{B}_d = T_s \boldsymbol{B}$$

T_s adalah *sampling time* dan $\boldsymbol{I}$ adalah matriks identitas.

Jaringan listrik

Contoh 1: Suatu rangkaian seri RLC yang diberikan dalam gambar.



Voltage $e(t)$ sama dengan jumlah dari penurunan voltage (*voltage drop*) bila *switch* ditutup diberikan oleh persamaan berikut:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\ dt = e(t) \tag{5}$$

Rangkaian memuat dua elemen yang menyimpan energi, yaitu induktor L dan kapasitor C.

Representasi state-space pada RLC

Dengan menggunakan hubungan $v_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\ dt$, persamaan (5), dapat diubah menjadi

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v_C(t) = e(t) \tag{6}$$

Misalkan $x_1(t) = v_C(t)$ dan $x_2(t) = i(t)$, didapat

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \dot{v}_C = \frac{1}{C}i(t) = \frac{1}{C}x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{L}v_C(t) - \frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}e(t) \\
&= -\frac{1}{L}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}e(t)
\end{aligned}$$

atau dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} e(t)$$

State-space pada RLC (I)

Bila masukan dari sistem $u(t) = e(t)$ dan keluaran dari sistem $y(t) = v_C(t)$, didapat uraian sistem dalam variabel keadaan sebagai berikut:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{7}$$

Untuk $y(t) = v_C(t)$ dan $u(t) = e(t)$, Persamaan (6) dapat ditulis dalam bentuk:

$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

atau

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{RC}{LC}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}u(t)$$

State-space pada RLC (II)

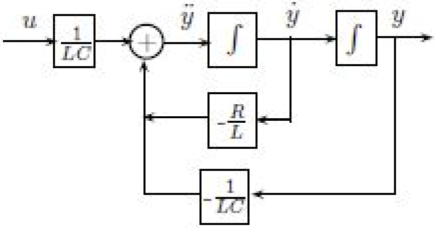
Dapat dipilih variabel keadaan $x_1(t) = y(t)$ dan $x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$, sehingga didapat:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \dot{y} = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\frac{1}{LC}y(t) - \frac{R}{L}\dot{y}(t) + \frac{1}{LC}u(t) \\ &= -\frac{1}{LC}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{LC}u(t)\end{aligned}$$

Untuk masukan $u(t)$ dan keluaran $y(t)$, didapat:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix}\dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t) \\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ \frac{1}{LC}\end{bmatrix}u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t) \\ x_2(t)\end{bmatrix}\end{cases} \tag{8}$$

Diagram blok RLC



Terlihat bahwa walaupun pengambilan variabel keadaan dari dua sudut pandang yang berbeda tetapi hasil diskripsi sistemnya dalam penyajian ruang keadaan hampir mirip, hal ini bisa dilihat dalam Pers. (7) dan (8).

Representasi state-space pada sistem mekanik

Contoh 2:

Diberikan sistem mekanik pada gambar (kanan). Jika diasumsikan bahwa sistemnya linier. Gaya luar $u(t)$ adalah input sistem dan perpindahan massa $y(t)$ adalah output. Perpindahan $y(t)$ diukur dari posisi setimbang dengan tidak adanya gaya luar. Dari gambar, diperoleh

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = u(t)$$

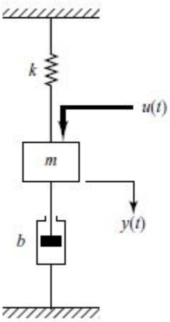


Figure 2–15
Mechanical system.

State-space sistem mekanik (I)

Didefinisikan $x_1(t) = y(t)$ dan $x_2(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$, kemudian didapatkan

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{m}\left(-ky(t) - b\dot{y}(t)\right) + \frac{1}{m}u \\ &= -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t) \end{aligned} \tag{10}$$

Persamaan keluaran adalah

$$y(t) = x_1(t) \tag{11}$$

Berdasarkan Pers. (9)-(11) dapat ditulis menjadi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \tag{12}$$

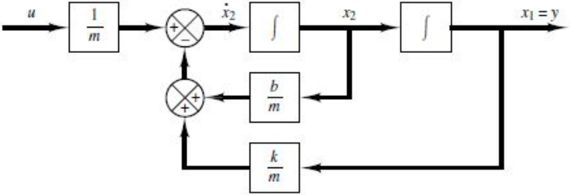
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{13}$$

State-space sistem mekanik (II)

Dari (12) dan (13), diperoleh

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagram blok dari Contoh 2 dapat direpresentasikan sebagai berikut.



Fungsi transfer ke state-space

Diberikan persamaan diferensial

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u \tag{14}$$

Cara mudah untuk memilih variabel keadaan adalah dengan memilih output, $y(t)$, dan turunannya $(n-1)$ sebagai variabel keadaan. Memilih variabel keadaan, x_i, kita dapatkan

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \frac{dy}{dt} \\ x_3 &= \frac{d^2y}{dt^2} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{aligned} \tag{15}$$

Fungsi transfer ke state-space (lanj.)

dan turunkan kedua ruas menghasilkan

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{y} = \frac{dy}{dt}\\ \dot{x}_2 &= \frac{d^2y}{dt^2}\\ &\vdots\\ \dot{x}_n &= \frac{d^ny}{dt^n}\end{aligned} \tag{16}$$

Substitusi Pers. (15) ke Pers. (16), persamaan keadaan dituliskan sebagai

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{17}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \tag{18}$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + b_0u \tag{19}$$

dengan Pers. (19) diperoleh dari Pers. (14) dengan menuliskan $\frac{d^ny}{dt^n}$ dan menggunakan Pers. (15).

Fungsi transfer ke state-space (lanj.)

Dalam bentuk matriks, Pers. (17)-(19), menjadi

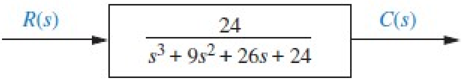
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

Karena solusi persamaan diferensial adalah $y(t)$, atau, x_1, maka persamaan keluaran adalah

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Mengubah fungsi transfer (TF) ke state-space (SS)

Contoh 3: Tentukan *state-space* dari fungsi transfer yang ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1: Fungsi transfer

Solusi:

1. Temukan persamaan diferensial terkait:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

hasil perkalian silang menghasilkan

$$(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)C(s) = 24R(s)$$

Solusi Contoh 3 (lanj.)

Persamaan diferensial yang sesuai ditemukan dengan mengambil invers transformasi Laplace, dengan asumsi kondisi awal nol

$$\dddot{c} + 9\ddot{c} + 26\dot{c} + 24c = 24r \tag{20}$$

2. Pilih variabel keadaan

$$\begin{aligned} x_1 &= c \\ x_2 &= \dot{c} \\ x_3 &= \ddot{c} \end{aligned} \tag{21}$$

turunkan kedua ruas dari Pers. (21) dan keluaran sistem adalah c, maka

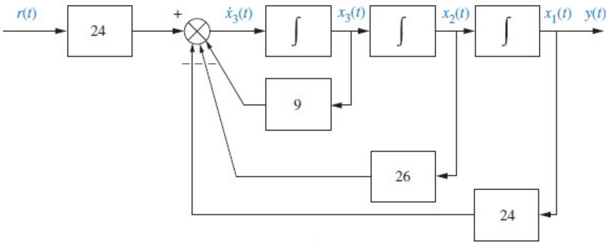
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \dot{x}_1 & = & & & x_2 & & & & \\ \dot{x}_2 & = & & & & & x_3 & & \\ \dot{x}_3 & = & -24x_1 & - & 26x_2 & - & 9x_3 & + & 24r \\ y & = & c = x_1 & & & & & & \end{array}$$

dalam bentuk matriks,

Solusi Contoh 3 (lanj.)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -24 & -26 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 24\end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$



Gambar 2: Diagram blok dari pers. diferensial (20)

State-space (SS) ke fungsi transfer (TF)

Diberikan persamaan keadaan dan keluaran

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$$

dengan transformasi Laplace yang mengasumsikan kondisi awal nol, maka

$$s\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) \tag{22}$$
$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s) \tag{23}$$

Penyelesaian untuk $\boldsymbol{X}(s)$ di Pers. (22),

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) \quad \text{atau} \quad \boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) \tag{24}$$

Substitusi Pers. (24) ke Pers. (23) menghasilkan

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s) = \left[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\right]\boldsymbol{U}(s)$$

sehingga fungsi transfernya adalah

$$\frac{\boldsymbol{Y}(s)}{\boldsymbol{U}(s)} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \tag{25}$$

SS ke TF

Contoh 4: Diberikan sistem yang didefinisikan oleh Pers. (26), tentukan fungsi transfer $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ dimana $U(s)$ adalah input dan $Y(s)$ adalah output.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{26}$$

Solusi:

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})} = \frac{\begin{bmatrix} (s^3 + 3s + 2) & s+3 & 1 \\ -1 & s(s+3) & s \\ -s & -(2s+1) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

Solusi Contoh 4 (lanj.)

Substitusi $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, dan $\boldsymbol{D}$ ke Pers. (25), dimana

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{D} = 0$$

kita dapatkan fungsi transfernya:

$$G(s) = \frac{10(s^2 + 3s + 2)}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

Latihan

Ubah persamaan keadaan dan keluaran yang ditunjukkan oleh Pers. (27) ke fungsi transfer.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} -4 & -1.5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1.5 & 0.625 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{27}$$


YOU CAN
IF
YOU THINK YOU CAN
NEVER GIVE UP!