Pertemuan 2: Pemodelan Dalam Domain Frekuensi (Bagian 1)

Heri Purnawan

Program Studi Teknik Elektro
Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

Disampaikan pada Matakuliah **Dasar Sistem Kontrol**
Program Studi Teknik Elektro, UNISLA

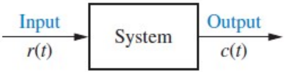
September 30, 2024

Gambaran Umum

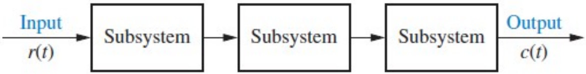
- **Tujuan**: Mengembangkan model matematika dari diagram skematik sistem fisik.
- **Dua Metode**:
  - Fungsi Transfer (dalam domain frekuensi)
  - Persamaan Ruang Keadaan (dalam domain waktu)
- Hukum Fisika dan Teknik digunakan sebagai dasar dalam membuat model sistem.
- Contoh:
  - Sistem Elektrikal:
    - Hukum Ohm dan Hukum Kirchhoff sebagai dasar.
    - Menjumlahkan tegangan dalam loop atau arus pada simpul.
  - Sistem Mekanikal:
    - Hukum Newton sebagai prinsip utama.
    - Menjumlahkan gaya atau torsi pada sistem mekanikal.
- Dari persamaan-persamaan tersebut, diperoleh hubungan antara keluaran (*output*) dan masukan (*input*) sistem.

Representasi Matematika dalam Sistem Kontrol

- **Preferensi Representasi**:
  - Memilih representasi matematika seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1(a), di mana masukan (input), keluaran (output), dan sistem adalah bagian yang terpisah dan jelas.



(a) sistem



(b) sub-sistem interkoneksi

Gambar 1: Representasi diagram blok

Representasi Matematika dalam Sistem Kontrol

- **Kebutuhan Representasi**:
  - Kita juga ingin merepresentasikan interkoneksi dari beberapa subsistem dengan mudah.
  - Contoh: Interkoneksi berurutan (*cascaded*) seperti yang terlihat pada Gambar 1(b), dimana:
    - Fungsi matematika yang disebut fungsi transfer berada di dalam setiap blok.
    - Fungsi blok ini dapat dengan mudah digabungkan untuk mendapatkan representasi seperti Gambar 1(a) untuk memudahkan analisis dan desain.
- **Keunggulan Fungsi Transfer**:
  - Fungsi transfer menawarkan kenyamanan yang tidak bisa diperoleh melalui persamaan diferensial.

Review Transformasi Laplace

- Sistem yang diwakili oleh persamaan diferensial sulit untuk dimodelkan sebagai diagram blok, sehingga transformasi Laplace dapat mewakili input, output, dan sistem sebagai entitas terpisah.

Definisi Transformasi Laplace

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt \tag{1}$$

- Invers transformasi Laplace adalah proses yang digunakan untuk mengubah fungsi di domain frekuensi (fungsi Laplace) kembali ke domain waktu.

Invers Transformasi Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] \tag{2}$$

Invers Transformasi Laplace

- Secara formal, invers transformasi Laplace diberikan oleh integral kontur kompleks yang dikenal sebagai **integral Bromwich**:

Invers transformasi Laplace

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} F(s) e^{st}\, ds \qquad (3)$$

- γ adalah garis vertikal dalam bidang kompleks, yang terletak di sebelah kanan semua poles dari $F(s)$
- j adalah bilangan imajiner murni

- Namun, dalam praktiknya, invers transformasi Laplace sering kali dilakukan dengan menggunakan tabel transformasi Laplace.

Tabel Transformasi Laplace

Tabel 1 Transformasi Laplace

Item no.	$f(t)$	$F(s)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
6.	$\sin \omega t u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7.	$\cos \omega t u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Teorema Dalam Transformasi Laplace

Beberapa teorema dalam transformasi Laplace

- Sifat kelinieran

$$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s) \tag{4}$$
$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s) \tag{5}$$

- Sifat pergeseran frekuensi

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$$

- Sifat pergeseran waktu

$$\mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-sT}F(s)$$

- Penskalaan

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Teorema Dalam Transformasi Laplace (lanjutan)

Beberapa teorema dalam transformasi Laplace

- Teorema diferensiasi

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{k-1}(0)$$

- Teorema integrasi

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\ d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Pecahan Parsial dalam Bentuk Laplace

- Penguraian Pecahan Parsial
  - Untuk menemukan invers transformasi Laplace dari fungsi yang rumit.
  - Mengubah fungsi tersebut menjadi penjumlahan dari beberapa suku yang lebih sederhana.
  - Setiap suku memiliki transformasi Laplace yang telah diketahui.
- Jika $F_1(s) = N(s)/D(s)$, di mana derajat $N(s)$ kurang dari derajat $D(s)$, maka penguraian pecahan parsial dapat dibuat. Jika derajat $N(s)$ lebih besar dari atau sama dengan derajat $D(s)$, maka $N(s)$ harus dibagi dengan $D(s)$ secara berturut-turut sampai memiliki sisa yang derajat pembilangnya kurang dari penyebutnya.
- Contoh:

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 6s + 7}{s^2 + s + 5} \rightarrow F(s) = s + 1 + \frac{2}{s^2 + s + 5}$$

Bentuk Pecahan Parsial

- Terdapat tiga kasus bagaimana F bisa diperluas menjadi pecahan parsial.
  - Kasus 1: Akar penyebut $F(s)$ real dan berbeda
    Contoh:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \rightarrow \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

diperoleh: $K_1 = 2$ dan $K_2 = -2$, maka

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}\right]$$

Berdasarkan Tabel 1, maka

$$f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

Bentuk Pecahan Parsial (lanjutan)

- Terdapat tiga kasus bagaimana F bisa diperluas menjadi pecahan parsial.
  - Kasus 2: Akar penyebut $F(s)$ real dan kembar
    Contoh:
    $$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$$
    maka
    $$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{s+2}$$
    diperoleh: $K_1 = 2, K_2 = -2$, dan $K_3 = -2$, sehingga
    $$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{s+2}$$
    Berdasarkan Tabel 1, maka
    $$f(t) = 2e^{-t} - 2te^{-2t} - 2e^{-2t}$$

Bentuk Pecahan Parsial (lanjutan)

- Terdapat tiga kasus bagaimana F bisa diperluas menjadi pecahan parsial.
  - Kasus 3: Akar penyebut $F(s)$ imajiner
    Contoh:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} \rightarrow \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+2s+5}$$

diperoleh: $K_1 = \frac{3}{5}, K_2 = -\frac{3}{5}$, dan $K_3 = -\frac{6}{5}$ maka

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\frac{s+2}{s^2+2s+5}$$

Berdasarkan Tabel 1 and Tabel 2.2 (lihat penjelasan[1]), maka

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

[1] Norman S. Nise, "Control System Engineering"

Penilaian Pemahaman Transformasi Laplace

Latihan 1

Tentukan transformasi Laplace dari $f(t) = te^{-5t}$.

JAWAB: $F(s) = 1/(s+5)^2$

Latihan 2

Tentukan invers transformasi Laplace dari

$$F(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+3)^2}$$

JAWAB:

$$f(t) = \frac{5}{9} - 5e^{-2t} + \frac{10}{3}te^{-3t} + \frac{40}{9}e^{-3t}$$

Fungsi Transfer

- Perbandingan transformasi Laplace dari keluaran dengan transformasi Laplace dari masukkan dengan asumsi bahwa kondisi awal adalah nol.
- Sistem persamaan diferensial linier *time-invariant* dinyatakan oleh persamaan diferensial berikut:

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_m x(t), n \geq m$$

dimana y adalah keluaran dari sistem dan x adalah masukkan.

- Fungsi alih dari sistem tersebut adalah

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

Contoh Fungsi Transfer

Contoh dalam persamaan diferensial

Tentukan fungsi transfer dari

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

dengan asumsi kondisi awal bernilai nol.

Jawab:
Dengan transformasi Laplace kedua sisi

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\}$$

$$sY(s) + 2Y(s) = X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+2}$$

Respon sistem dari fungsi transfer

Tentukan respon sistem untuk input *unit step* $x(t) = u(t)$.
Karena kondisi awal adalah nol,

$$Y(s) = X(s)G(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s+2} = \frac{1}{s(s+2)}$$

Dapat diubah menjadi

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

diperoleh $A = \frac{1}{2}$ dan $B = -\frac{1}{2}$, maka

$$Y(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s+2}$$

dengan invers transformasi Laplace, maka

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$