Kesalahan Keadaan Tunak

(Steady-State Error)

Heri Purnawan

Disampaikan pada matakuliah **Dasar Sistem Kendali**
Program Studi S-1 Teknik Elektro
Fakultas Sains dan Teknologi (FST)
Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

December 2, 2024

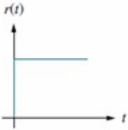
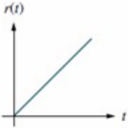
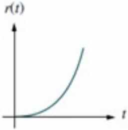
Email: heripurnawan@unisla.ac.id

Definisi

- Kesalahan keadaan tunak adalah perbedaan antara masukan dan keluaran untuk masukan pengujian yang ditentukan sebagai $t \to \infty$. Untuk menjelaskan bagaimana sinyal uji ini digunakan, mari kita asumsikan sistem kendali posisi, dimana posisi keluaran mengikuti posisi yang diperintahkan masukan.
- Input *step* mewakili posisi konstan dan dengan demikian berguna dalam menentukan kemampuan sistem kontrol untuk memposisikan dirinya terhadap target stasioner.
- Input *ramp* mewakili input kecepatan konstan ke sistem kontrol posisi dengan amplitudo yang meningkat secara linier. Bentuk gelombang ini dapat digunakan untuk menguji kemampuan sistem dalam mengikuti masukan yang meningkat secara linier atau, setara, untuk melacak target kecepatan konstan.
- Parabola yang turunan keduanya konstan, menyatakan masukan percepatan konstan ke sistem kontrol posisi dan dapat digunakan untuk mewakili target percepatan.

Jenis input dalam pengujian

Pengujian input untuk mengevaluasi kesalahan keadaan tunak

Waveform	Name	Physical interpretation	Time function	Laplace transform
	Step	Constant position	1	$\frac{1}{s}$
	Ramp	Constant velocity	t	$\frac{1}{s^2}$
	Parabola	Constant acceleration	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$

Contoh: satelit

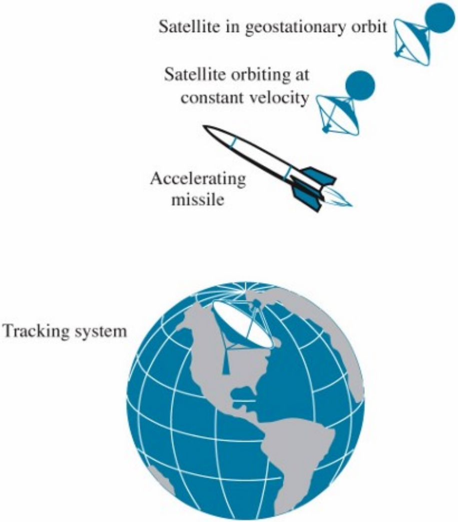
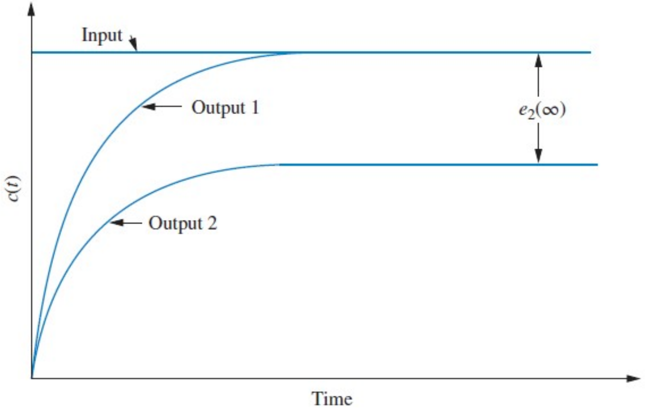


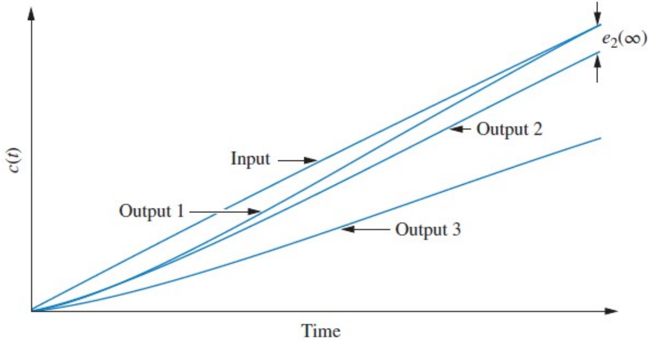
Figure 7.1

Evaluasi kesalahan keadaan tunak



- Output 1 memiliki kesalahan kondisi tunak nol, dan output 2 memiliki kesalahan kondisi tunak berhingga, $e_2(\infty)$.

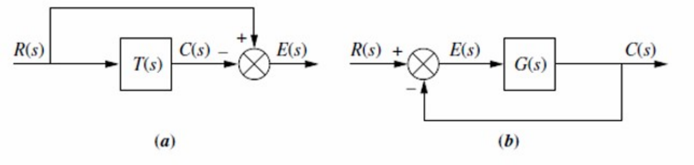
Evaluasi kesalahan keadaan tunak (lanj.)



- Contoh serupa ditunjukkan untuk input *ramp* dibandingkan dengan output 1, yang memiliki kesalahan kondisi tunak nol, dan output 2, yang memiliki kesalahan kondisi tunak berhingga, $e_2(\infty)$ yang diukur secara vertikal antara input dan output 2 setelahnya transien berlalu.
- Untuk input *ramp* ada kemungkinan lain. Output 3, kesalahan keadaan tunak tidak terbatas jika diukur secara vertikal antara masukan dan keluaran setelah transien berlalu untuk t mendekati tak terhingga.

Sumber kesalahan keadaan tunak (lanj.)

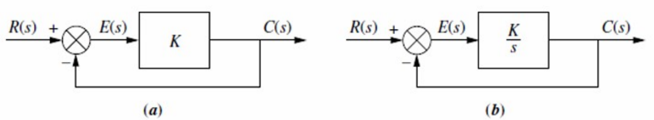
- Karena kesalahan adalah selisih antara masukan dan keluaran suatu sistem, kita asumsikan fungsi transfer loop tertutup, $T(s)$, dan bentuk kesalahannya, $E(s)$, dengan mengambil selisih antara input dan output.
- Nilai akhir dari $e(t)$ pada nilai keadaan tunak.



- Kesalahan keadaan tunak yang kita pelajari di sini adalah kesalahan yang timbul dari konfigurasi sistem itu sendiri dan jenis masukan yang diterapkan.

Sumber kesalahan keadaan tunak (lanj.)

- Misalnya, perhatikan sistem di bawah ini, di mana $R(s)$ adalah input, $C(s)$ adalah output, dan $E(s) = R(s) - C(s)$ adalah kesalahan.



- Pertimbangkan masukan *step*. Dalam keadaan tunak, jika $c(t)$ sama dengan $r(t)$, $e(t)$ akan menjadi nol. Tetapi dengan penguatan, K, kesalahannya, $e(t)$, tidak bisa nol jika $c(t)$ berhingga dan bukan nol.
- Berdasarkan konfigurasi sistem (penguatan K), pasti ada kesalahan (a).
- Jika kita menyebut c_{ss} sebagai nilai kondisi tunak dari keluaran dan e sebagai nilai kondisi tunak dari kesalahan, maka

$$e_{ss} = \frac{1}{K} c_{ss}$$

Sumber kesalahan keadaan tunak (lanj.)

- Jika penguatan (*gain*) digantikan oleh integrator (b), maka tidak akan ada kesalahan dalam keadaan tunak untuk masukan *step*.
- Alasannya adalah sebagai berikut:
  - Ketika $c(t)$ meningkat, $e(t)$ akan menurun, karena $e(t) = r(t) - c(t)$.
  - Penurunan ini akan terus berlanjut hingga kesalahannya nol, namun nilai $c(t)$ tetap ada karena integrator dapat memiliki keluaran yang konstan tanpa masukan apa pun.
  - Oleh karena itu, sistem yang mirip dengan Gambar (b), yang menggunakan jalur maju, dapat mempunyai kesalahan keadaan tunak nol untuk masukan *step*.
- Untuk menentukan $E(s)$, kesalahan antara input $R(s)$ dan output $C(s)$, dapat dituliskan

$$E(s) = R(s) - C(s)$$
$$C(s) = R(s)T(s)$$

Kesalahan keadaan tunak dalam $T(s)$

- Mengganti, menyederhanakan, dan menyelesaikan $E(s)$ menghasilkan

$$E(s) = R(s)[1 - T(s)]$$

- Meskipun persamaan sebelumnya memungkinkan kita menyelesaikan $e(t)$ kapan saja, t, kita tertarik pada nilai akhir kesalahannya. Menerapkan teorema nilai akhir, yang memungkinkan kita menggunakan nilai akhir $e(t)$ tanpa mengambil transformasi Laplace invers dari $E(s)$, dan kemudian membiarkan t mendekati tak terhingga, kita peroleh

$$e(\infty) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

yang menghasilkan

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} sR(s)[1 - T(s)]$$

Teorema nilai akhir

- Teorema nilai akhir diturunkan dari definisi transformasi Laplace dan turunan transformasi Laplace.

$$\mathcal{L}\left\{\dot{f}(t)\right\} = \int_{0^-}^{\infty} \dot{f}(t)e^{-st}\,dt = sF(s) - f(0^-)$$

- Karena $s \to 0$,

$$\int_{0^-}^{\infty} \dot{f}(t)\,dt = f(\infty) - f(0^-) = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0^-)$$

- Maka,

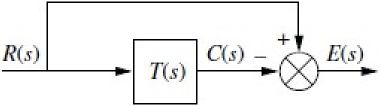
$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Kesalahan keadaan tunak $T(s)$: Contoh

Tentukan kesalahan keadaan tunak untuk sistem jika

$$T(s) = \frac{5}{s^2 + 7s + 10}$$

dan inputnya adalah undak satuan (*unit step*).



Solusi: Diketahui bahwa $R(s) = \frac{1}{s}$ dan $T(s) = \frac{5}{s^2+7s+10}$

$$E(s) = R(s)[1 - T(s)] = \frac{s^2 + 7s + 5}{s(s^2 + 7s + 10)}$$

Karena $T(s)$ stabil dan, selanjutnya, $E(s)$ tidak mempunyai *pole* setengah bidang kanan atau *pole* $j\omega$ selain di titik asal, kita dapat menerapkan teorema nilai akhir yang memberikan

$$e(\infty) = e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \frac{1}{2}$$

.

Kesalahan kondisi tunak dari bentuk $G(s)$

- Pertimbangkan system kontrol dengan umpan balik satuan (karena $H(s) = 1$) berikut.

- Implikasinya adalah $E(s)$ sebenarnya adalah kesalahan antara input, $R(s)$, dan keluarannya, $C(s)$.
- Jadi, jika kita menyelesaikan $E(s)$, kita akan mendapatkan ekspresi kesalahannya. Kemudian, akan diterapkan teorema nilai akhir, untuk mengevaluasi kesalahan kondisi tunak.
- $E(s)$ dapat dituliskan

$$E(s) = R(s) - C(s) \quad \text{dan} \quad C(s) = E(s)G(s)$$

- Terakhir, substitusi $C(s)$ ke $E(s)$ dan menyelesaikan $E(s)$ menghasilkan

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

Kesalahan kondisi tunak dari bentuk $G(s)$ (lanj.)

- Aplikasikan teorema nilai akhir

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$

- Substitusikan beberapa masukan untuk $R(s)$ dan kemudian menarik kesimpulan tentang hubungan yang ada antara sistem *loop* terbuka, $G(s)$ dan sifat kesalahan kondisi tunak.
- Bentuk umum fungsi transfer

$$G(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_i)}{s^N (s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_j)} \tag{1}$$

dengan N adalah tipe sistem.

Kesalahan kondisi tunak: masukan *step*

Masukan step: $R(s) = \frac{1}{s}$

$$e_{\text{step}}(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s(1/s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} G(s)}$$

misalkan konstanta kesalahan posisi statis didefinsikan sebagai

$$k_p = \lim_{s \to 0} G(s) \quad \text{maka} \quad e_{\text{step}}(\infty) = \frac{1}{1 + k_p}$$

- Untuk sistem dengan Tipe-0:

$$k_p = \lim_{s \to 0} G(s) = c \quad \text{maka} \quad e_{\text{step}}(\infty) = \frac{1}{1 + c}$$

- Untuk sistem dengan Tipe-1 atau lebih $(N \geq 1)$:

$$k_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \infty \quad \text{maka} \quad e_{\text{step}}(\infty) = 0$$

Kesalahan kondisi tunak: masukan *ramp*

Masukan ramp: $R(s) = \frac{1}{s^2}$

$$e_{\text{ramp}}(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s(1/s^2)}{1+G(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG(s)}$$

misalkan konstanta kesalahan kecepatan statis didefinsikan sebagai

$$k_v = \lim_{s\to 0} sG(s) \quad \text{maka} \quad e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{k_v}$$

- Untuk sistem dengan Tipe-0:

$$k_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = 0 \quad \text{maka} \quad e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{k_v} = \infty$$

- Untuk sistem dengan Tipe-1:

$$k_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = c \quad \text{maka} \quad e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{c}$$

- Untuk sistem dengan Tipe-2 atau lebih $(N \geq 2)$:

$$k_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \infty \quad \text{maka} \quad e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{k_v} = 0$$

Kesalahan kondisi tunak: masukan parabola

Masukan parabola: $R(s) = \frac{1}{s^3}$

$$e_{\text{parabola}}(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s(1/s^3)}{1+G(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2 G(s)}$$

misalkan konstanta kesalahan percepatan statis didefinsikan sebagai

$$k_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) \quad \text{maka} \quad e_{\text{parabola}}(\infty) = \frac{1}{k_a}$$

- Untuk sistem dengan Tipe-0:

$$k_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = 0 \quad \text{maka} \quad e_{\text{parabola}}(\infty) = \frac{1}{k_v} = \infty$$

- Untuk sistem dengan Tipe-1:

$$k_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = 0 \quad \text{maka} \quad e_{\text{parabola}}(\infty) = \frac{1}{k_a} = \infty$$

Kesalahan kondisi tunak: masukan parabola (lanj.)

- Untuk sistem dengan Tipe-2:

$$k_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) = c \quad \text{maka} \quad e_{\text{parabola}}(\infty) = \frac{1}{k_a} = \frac{1}{c}$$

- Untuk sistem dengan Tipe-3 atau lebih $(N \geq 3)$:

$$k_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) = \infty \quad \text{maka} \quad e_{\text{parabola}}(\infty) = \frac{1}{k_a} = 0$$

TABLE 7.2 Relationships between input, system type, static error constants, and steady-state errors

		Type 0		Type 1		Type 2	
Input	Steady-state error formula	Static error constant	Error	Static error constant	Error	Static error constant	Error
Step, $u(t)$	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p =$ Constant	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Ramp, $tu(t)$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞	$K_v =$ Constant	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parabola, $\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a =$ Constant	$\frac{1}{K_a}$

Kesalahan kondisi tunak dari Tipe-0: Contoh 1

Sistem dengan umpan balik satuan mempunyai fungsi transfer:

$$G(s) = \frac{1000(s+8)}{(s+7)(s+9)}$$

a) Hitung konstanta, k_p, k_v, dan k_a.

b) Gunakan jawaban Anda pada bagian a), untuk menemukan kesalahan keadaan tunak untuk masukan *step* satuan, *ramp* satuan, dan parabola satuan.

Solusi: Tipe sistem, $G(s)$ adalah Tipe-0 dan sistemnya adalah stabil.

a) Nilai k_p, k_v, dan k_a adalah

$$k_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1000(s+8)}{(s+7)(s+9)} = \frac{1000(8)}{7(9)} \approx 127, \quad k_v = 0 \text{ dan } k_a = 0$$

b) $e_{\text{step}}(\infty) = \frac{1}{1+k_p} = 7.8 \times 10^{-3}$, $\quad e_{\text{ramp}}(\infty) = \infty$, dan $e_{\text{parabola}}(\infty) = \infty$.

Implementasi di MATLAB: Contoh 1

```
%% Matlab code

num = [0 1000 8000]; % Numerator
den = [1 16 63];     % Denominator
sys = tf(num, den); % Transfer function

% Compute steady-state error for step input
Kp = dcgain(sys);    % DC gain = Kp
e_ss_step = 1 / (1 + Kp);
```

Kesalahan kondisi tunak dari Tipe-0: Contoh 2

Sistem dengan umpan balik satuan mempunyai fungsi transfer:

$$G(s) = \frac{120(s+2)}{(s+3)(s+4)}$$

Tentukan kesalahan kondisi tunak untuk input $5u(t)$, $5tu(t)$, dan $5t^2u(t)$.

Solusi:

- Untuk input $5u(t)$ (*step*), maka $R(s) = \frac{5}{s}$

$$e_{\text{step}}(\infty) = \frac{5}{1 + \lim_{s\to 0} G(s)} = \frac{5}{1+20} = \frac{5}{21}.$$

- Untuk input $5tu(t)$ (*ramp*), maka $R(s) = \frac{5}{s^2}$

$$e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{5}{\lim_{s\to 0} sG(s)} = \frac{5}{0} = \infty.$$

- Untuk input $5t^2u(t)$ (parabola), maka $R(s) = \frac{10}{s^3}$

$$e_{\text{parabola}}(\infty) = \frac{10}{\lim_{s\to 0} s^2G(s)} = \frac{10}{0} = \infty.$$

Kesalahan kondisi tunak dari Tipe-1: Contoh

Sistem dengan umpan balik satuan mempunyai fungsi transfer:

$$G(s) = \frac{100(s+2)(s+6)}{s(s+3)(s+4)}$$

Tentukan kesalahan kondisi tunak untuk input $5u(t)$, $5tu(t)$, dan $5t^2u(t)$.

Solusi:

- Untuk input $5u(t)$ (*step*), maka $R(s) = \frac{5}{s}$

$$e_{\text{step}}(\infty) = \frac{5}{1 + \lim_{s\to 0} G(s)} = \frac{5}{1+\infty} = 0.$$

- Untuk input $5tu(t)$ (*ramp*), maka $R(s) = \frac{5}{s^2}$

$$e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{5}{\lim_{s\to 0} sG(s)} = \frac{5}{100} = 0.05.$$

- Untuk input $5t^2u(t)$ (parabola), maka $R(s) = \frac{10}{s^3}$

$$e_{\text{parabola}}(\infty) = \frac{10}{\lim_{s\to 0} s^2G(s)} = \frac{10}{0} = \infty.$$

Kesalahan kondisi tunak dari $G(s)$: Latihan

Sistem dengan umpan balik satuan mempunyai fungsi transfer:

$$G(s) = \frac{10(s+20)(s+30)}{s(s+25)(s+35)}$$

a) Tentukan kesalahan kondisi tunak untuk input $15u(t)$, $15tu(t)$, dan $15t^2u(t)$.

b) Ulangi untuk

$$G(s) = \frac{10(s+20)(s+30)}{s^2(s+25)(s+35)(s+50)}$$

Jawaban:

a) Sistemnya stabil. Untuk $15u(t)$, maka $e_{\text{step}}(\infty) = 0$; $15tu(t)$, maka $e_{\text{ramp}}(\infty) = 2.1875$; dan $15t^2u(t)$, maka $e_{\text{parabola}}(\infty) = \infty$.

b) Sistemnya tak stabil. Perhitungan tidak dapat dilakukan.