

Pertemuan 2: Pemodelan Dalam Domain Frekuensi (Bagian 1)

Heri Purnawan

Program Studi Teknik Elektro
Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

Disampaikan pada Matakuliah **Dasar Sistem Kontrol**
Program Studi Teknik Elektro, UNISLA

October 6, 2024

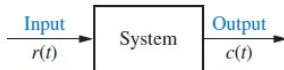
Gambaran Umum

- ◀ **Tujuan:** Mengembangkan model matematika dari diagram skematik sistem fisik.
- ◀ **Dua Metode:**
 - Fungsi Transfer (dalam domain frekuensi)
 - Persamaan Ruang Keadaan (dalam domain waktu)
- ◀ Hukum Fisika dan Teknik digunakan sebagai dasar dalam membuat model sistem.
- ◀ Contoh:
 - Sistem Elektrikal:
 - Hukum Ohm dan Hukum Kirchhoff sebagai dasar.
 - Menjumlahkan tegangan dalam loop atau arus pada simpul.
 - Sistem Mekanikal:
 - Hukum Newton sebagai prinsip utama.
 - Menjumlahkan gaya atau torsi pada sistem mekanikal.
- ◀ Dari persamaan-persamaan tersebut, diperoleh hubungan antara keluaran (*output*) dan masukan (*input*) sistem.

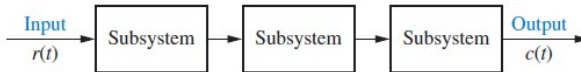
Representasi Matematika dalam Sistem Kontrol

◀ Preferensi Representasi:

- Memilih representasi matematika seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1(a), di mana masukan (input), keluaran (output), dan sistem adalah bagian yang terpisah dan jelas.



(a) sistem



(b) sub-sistem interkoneksi

Gambar 1: Representasi diagram blok

Representasi Matematika dalam Sistem Kontrol

◀ Kebutuhan Representasi:

- Kita juga ingin merepresentasikan interkoneksi dari beberapa subsistem dengan mudah.
- Contoh: Interkoneksi berurutan (*cascaded*) seperti yang terlihat pada Gambar 1(b), dimana:
 - Fungsi matematika yang disebut fungsi transfer berada di dalam setiap blok.
 - Fungsi blok ini dapat dengan mudah digabungkan untuk mendapatkan representasi seperti Gambar 1(a) untuk memudahkan analisis dan desain.

◀ Keunggulan Fungsi Transfer:

- Fungsi transfer menawarkan kenyamanan yang tidak bisa diperoleh melalui persamaan diferensial.

Review Transformasi Laplace

- ◀ Sistem yang diwakili oleh persamaan diferensial sulit untuk dimodelkan sebagai diagram blok, sehingga transformasi Laplace dapat mewakili input, output, dan sistem sebagai entitas terpisah.

Definisi Transformasi Laplace

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

- ◀ Invers transformasi Laplace adalah proses yang digunakan untuk mengubah fungsi di domain frekuensi (fungsi Laplace) kembali ke domain waktu.

Invers Transformasi Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \quad (2)$$

Invers Transformasi Laplace

- Secara formal, invers transformasi Laplace diberikan oleh integral kontur kompleks yang dikenal sebagai **integral Bromwich**:

Invers transformasi Laplace

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (3)$$

- γ adalah garis vertikal dalam bidang kompleks, yang terletak di sebelah kanan semua poles dari $F(s)$
- j adalah bilangan imajiner murni

- Namun, dalam praktiknya, invers transformasi Laplace sering kali dilakukan dengan menggunakan tabel transformasi Laplace.

Tabel Transformasi Laplace

Tabel 1 Transformasi Laplace

Item no.	$f(t)$	$F(s)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
6.	$\sin \omega t u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7.	$\cos \omega t u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Teorema Dalam Transformasi Laplace

Beberapa teorema dalam transformasi Laplace

◀ Sifat kelinieran

$$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s) \quad (4)$$

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s) \quad (5)$$

◀ Sifat pergeseran frekuensi

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s + a) \quad (6)$$

◀ Sifat pergeseran waktu

$$\mathcal{L}[f(t - T)] = e^{-sT}F(s) \quad (7)$$

◀ Penskalaan

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (8)$$

Teorema Dalam Transformasi Laplace (lanjutan)

Beberapa teorema dalam transformasi Laplace

◀ Teorema diferensiasi

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n f}{dt^n} \right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{k-1}(0) \quad (9)$$

◀ Teorema integrasi

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s} \quad (10)$$

Pecahan Parsial dalam Bentuk Laplace

- ◀ Penguraian Pecahan Parsial
 - Untuk menemukan invers transformasi Laplace dari fungsi yang rumit.
 - Mengubah fungsi tersebut menjadi penjumlahan dari beberapa suku yang lebih sederhana.
 - Setiap suku memiliki transformasi Laplace yang telah diketahui.
- ◀ Jika $F_1(s) = N(s)/D(s)$, di mana derajat $N(s)$ kurang dari derajat $D(s)$, maka penguraian pecahan parsial dapat dibuat. Jika derajat $N(s)$ lebih besar dari atau sama dengan derajat $D(s)$, maka $N(s)$ harus dibagi dengan $D(s)$ secara berturut-turut sampai memiliki sisa yang derajat pembilangnya kurang dari penyebutnya.

◀ **Contoh:**

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 6s + 7}{s^2 + s + 5} \rightarrow F(s) = s + 1 + \frac{2}{s^2 + s + 5}$$

Bentuk Pecahan Parsial

- ◀ Terdapat tiga kasus bagaimana F bisa diperluas menjadi pecahan parsial.

- Kasus 1: Akar penyebut $F(s)$ real dan berbeda

Contoh:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \rightarrow \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

diperoleh: $K_1 = 2$ dan $K_2 = -2$, maka

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}\right]$$

Berdasarkan Tabel 1, maka

$$f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

Bentuk Pecahan Parsial (lanjutan)

- ◀ Terdapat tiga kasus bagaimana F bisa diperluas menjadi pecahan parsial.

- Kasus 2: Akar penyebut $F(s)$ real dan kembar

Contoh:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$$

maka

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{s+2}$$

diperoleh: $K_1 = 2$, $K_2 = -2$, dan $K_3 = -2$, sehingga

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{s+2}$$

Berdasarkan Tabel 1, maka

$$f(t) = 2e^{-t} - 2te^{-2t} - 2e^{-2t}$$

Bentuk Pecahan Parsial (lanjutan)

- ◀ Terdapat tiga kasus bagaimana F bisa diperluas menjadi pecahan parsial.

- Kasus 3: Akar penyebut $F(s)$ imajiner

Contoh:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)} \rightarrow \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2s + K_3}{s^2 + 2s + 5}$$

diperoleh: $K_1 = \frac{3}{5}$, $K_2 = -\frac{3}{5}$, dan $K_3 = -\frac{6}{5}$ maka

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5} \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 5}$$

Berdasarkan Tabel 1 and Tabel 2.2 (lihat penjelasan¹), maka

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t} \left(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right)$$

¹Norman S. Nise, "Control System Engineering"

Contoh transformasi Laplace dari Persamaan Diferensial

Contoh 1: Diketahui persamaan diferensial berikut, selesaikan $y(t)$ jika semua kondisi awal adalah nol. Gunakan transformasi Laplace.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 12\frac{dy(t)}{dt} + 32y(t) = 32u(t) \quad (11)$$

Jawab: Gunakan no. 2 pada [Tabel 1](#) dan teorema diferensiasi pada Pers. (9), maka transformasi Laplace dari Pers. (11) adalah

$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 32Y(s) = \frac{32}{s} \quad (12)$$

Penyelesaian $Y(s)$ menghasilkan

$$Y(s) = \frac{32}{s(s^2 + 12s + 32)} = \frac{32}{s(s + 4)(s + 8)}$$

Lanjutan solusi Contoh 1

Mengacu pada **Kasus 1**, maka

$$Y(s) = \frac{32}{s(s+4)(s+8)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+4} + \frac{K_3}{s+8} \quad (13)$$

Diperoleh nilai $K_1 = 1$, $K_2 = -2$, dan $K_3 = 1$, sehingga

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+4} + \frac{1}{s+8}$$

Dengan invers transformasi Laplace, maka diperoleh

$$y(t) = (1 - 2e^{-4t} + e^{-8t})u(t)$$

Penilaian Pemahaman Transformasi Laplace

Latihan 1:

Tentukan transformasi Laplace dari $f(t) = te^{-5t}$.

Jawab: $F(s) = 1/(s + 5)^2$

Latihan 2:

Tentukan invers transformasi Laplace dari

$$F(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+3)^2}$$

Jawab:

$$f(t) = \frac{5}{9} - 5e^{-2t} + \frac{10}{3}te^{-3t} + \frac{40}{9}e^{-3t}$$

Fungsi Transfer

- ▶ Perbandingan transformasi Laplace dari keluaran dengan transformasi Laplace dari masukan dengan asumsi bahwa kondisi awal adalah nol.
- ▶ Sistem persamaan diferensial linier *time-invariant* dinyatakan oleh persamaan diferensial berikut:

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_m x(t), n \geq m$$

dimana y adalah keluaran dari sistem dan x adalah masukan.

- ▶ Fungsi alih dari sistem tersebut adalah

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Contoh Fungsi Transfer

Contoh 2:

Tentukan fungsi transfer dari

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

dengan asumsi kondisi awal bernilai nol.

Jawab:

Dengan transformasi Laplace kedua sisi

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) \right\} = \mathcal{L} \{x(t)\}$$

$$sY(s) + 2Y(s) = X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s + 2}$$

Respon sistem dari fungsi transfer

Tentukan respon sistem untuk input *unit step* $x(t) = u(t)$ pada **Contoh 2**.

Karena kondisi awal adalah nol,

$$Y(s) = X(s)G(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{s+2} = \frac{1}{s(s+2)}$$

Dapat diubah menjadi

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

diperoleh $A = \frac{1}{2}$ dan $B = -\frac{1}{2}$, maka

$$Y(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s+2}$$

dengan invers transformasi Laplace, maka

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

Latihan Fungsi Transfer

Latihan 3: Tentukan fungsi transfer, $G(s) = Y(s)/X(s)$ dari persamaan diferensial berikut.

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

Jawab:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}$$

Latihan 4: Tentukan persamaan diferensial dari fungsi transfer berikut.

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 6s + 2}$$

Jawab:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$