Solusi Sistem Persamaan Linier (II): Faktorisasi LU

Heri Purnawan

Disampaikan pada matakuliah **Metode Numerik**
Program Studi S-1 Teknik Elektro
Fakultas Sains dan Teknologi (FST)
Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

October 26, 2024

Email: heripurnawan@unisla.ac.id

Faktorisasi matriks

- Persamaan ini memiliki solusi tunggal $x = A^{-1}b$ ketika matriks A adalah nonsingular.
- Gunakan eliminasi Gaussian untuk memfaktorkan matriks koefisien menjadi hasil kali matriks. Faktorisasinya disebut faktorisasi LU dan berbentuk $A = LU$, dengan L adalah segitiga bawah dan U adalah segitiga atas.
- Solusi untuk masalah awal $Ax = LUx = b$ kemudian ditemukan melalui proses penyelesaian segitiga dua langkah:

$$Ly = b \quad \text{dan} \quad Ux = y$$

- Faktorisasi LU memerlukan operasi aritmatika $O(n^3)$. Substitusi maju untuk menyelesaikan sistem segitiga bawah $Ly = b$ membutuhkan $O(n^2)$. Substitusi mundur untuk menyelesaikan sistem segitiga atas $Ux = y$ memerlukan $O(n^2)$ operasi aritmatika.

Faktorisasi LU

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks L dan U didefinisikan sebagai

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Faktorisasi LU

Langkah-langkah membentuk matriks L dan U sehingga memenuhi $A = LU$, dimana $a_{ij} \in A$, untuk $1 \leq i, j \leq n$ dan $l_{11} = l_{22} = \cdots = l_{nn} = 1$.

1. Atur $u_{11} = a_{11}$. Jika $a_{11} = 0$, maka faktorisasi tidak bisa dilakukan.
2. Hitung $u_{1j} = a_{1j}$, $j = 2, 3, \cdots, n$ (baris pertama dari matriks U).
3. Hitung $l_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}}$, $j = 2, 3, \cdots, n$ (kolom pertama dari matriks L).
4. Untuk $i = 2$, hitung

   $$u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{ki}$$

   Jika $u_{ii} = 0$, maka faktorisasi tidak bisa dilakukan.
5. Untuk $j = i + 1, \cdots, n$, hitung

   $$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}; \quad \text{baris ke-i dari } U$$

Faktorisasi LU

dan

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \left[a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right]; \quad \text{kolom ke-i dari } L$$

Ulangi langkah 4 dan 5 untuk $i = 3, \cdots, n-1$, $n - 1 \geq 3$.

6. Hitung

$$u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} u_{kn}$$

Setelah faktorisasi matriks selesai, solusi sistem linier berbentuk $Ax = LUx = b$ ditemukan dengan terlebih dahulu menyelesaikan $Ly = b$ dan kemudian menyelesaikan $Ux = y$.

Algorithm 1: Faktorisasi LU

INPUT : Matriks $A = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$ dan $l_{11} = \cdots = l_{nn} = 1$ dari L

Atur $u_{11} = a_{11}$;

if $u_{11} = 0$ **then**

  OUTPUT: Faktorisasi tidak bisa dilakukan; STOP.

for $j = 2, \cdots, n$ **do**

  $u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}$; /* baris ke-1 dari U */

  $l_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}}$; /* kolom ke-1 dari L */

for $i = 2, \cdots, n-1$ **do**

  $u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki}$;

  if $u_{ii} = 0$ **then**

    OUTPUT: Faktorisasi tidak bisa dilakukan; STOP.

  else

    for $j = i+1, \cdots, n$ **do**

      $u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$; /* baris ke-i dari U */

      $l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \left[a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki} \right]$; /* kolom ke-i dari L */

Hitung $u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn}$;

OUTPUT: $l_{ij} \in L$, $1 \leq j \leq i, 1 \leq i \leq n$ dan $u_{ij} \in U$, $i \leq j \leq n, 1 \leq i \leq n$

Contoh faktorisasi LU

Diberikan SPL sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ 3x + 4y &= 3 \\ 2x + 10y + 4z &= 10 \end{aligned} \tag{1}$$

1. Dengan faktorisasi/dekomposisi LU, dapatkan matriks L dan U sehingga $A = LU$
2. Tentukan solusi SPL dengan $L\bar{y} = b$, $\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ dan $U\bar{x} = \bar{y}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^\mathsf{T}$.

Solusi: dari Pers. (1), diperoleh matriks A dan b sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Solusi contoh faktorisasi LU (lanj.)

Diketahui bahwa $n = 3$, diagonal dari L adalah $l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$. Selanjutnya langkah-langkah mendapatkan matriks L dan U adalah sebagai berikut:

1. $u_{11} = a_{11} = 1$
2. Karena $n = 3$, maka untuk $j = 2, 3$ diperoleh:
$$u_{12} = a_{12} = 2; \quad u_{13} = a_{13} = 1$$
3. Untuk $j = 2, 3$, maka
$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{3}{1} = 3; \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{2}{1} = 2$$
4. Untuk $i = 2$, maka
$$u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{ki} \ \rightarrow \ u_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12} = 4 - 3(2) = -2$$
5. Karena $n = 3$, maka kita cukup menghitung untuk $j = i + 1 = 2 + 1 = 3$
$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \ \rightarrow \ u_{23} = a_{23} - l_{21} u_{13} = 0 - 3(1) = -3$$

Solusi contoh faktorisasi LU (lanj.)

dan

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \left[a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right] \;\rightarrow\; l_{32} = \frac{1}{u_{22}} \left[a_{32} - l_{31} u_{12} \right]$$

$$= \frac{1}{-2} \left[10 - 2(2) \right] = \frac{1}{-2} \left[10 - 4 \right] = -3$$

Karena $n - 1 = 2$, maka kita cukup menghitung untuk $i = 2$ saja.

6. Hitung

$$u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} u_{kn} \;\rightarrow\; u_{33} = a_{33} - \left[l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23} \right]$$

$$= 4 - \left[2(1) + (-3)(-3) \right]$$

$$= 4 - 11 = -7$$

Jadi,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Solusi contoh faktorisasi LU (lanj.)

Untuk mendapatkan solusi dari SPL pada Pers. (1), maka $L\bar{y} = b$ yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $y_1 = 3$
- $3y_1 + y_2 = 3 \rightarrow 3(3) + y_2 = 3 \rightarrow y_2 = 3 - 9 = -6$
- $2y_1 - 3y_2 + y_3 = 10 \rightarrow 2(3) - 3(-6) + y_3 = 10 \rightarrow y_3 = 10 - 24 = -14$

Kemudian, $U\bar{x} = \bar{y}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -14 \end{bmatrix}$$

- $-7z = -14 \rightarrow z = 2$
- $-2y - 3z = -6 \rightarrow -2y - 3(2) = -6 \rightarrow -2y = -6 + 6 \rightarrow y = 0$
- $x + 2y + z = 3 \rightarrow x + 2(0) + 2 = 3 \rightarrow x + 2 = 3 \rightarrow x = 1$