Solusi Sistem Persamaan Linier (1)

Heri Purnawan

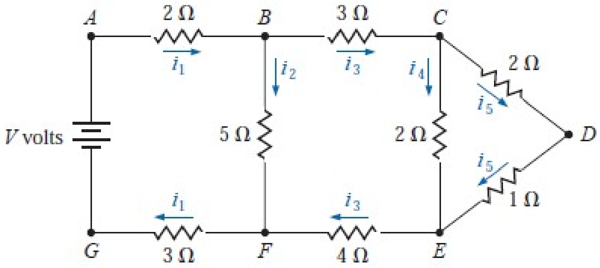
Disampaikan pada matakuliah **Metode Numerik**
Program Studi S-1 Teknik Elektro
Fakultas Sains dan Teknologi (FST)
Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

October 19, 2024

Email: heripurnawan@unisla.ac.id

Pendahuluan

Hukum Kirchhoff tentang rangkaian listrik menyatakan bahwa aliran bersih arus melalui setiap sambungan dan penurunan tegangan bersih di sekitar setiap loop tertutup suatu rangkaian adalah nol. Misalkan potensial V volt diterapkan antara titik A dan G pada rangkaian dan i_1, i_2, i_3, i_4, dan i_5 mewakili aliran arus seperti yang ditunjukkan pada diagram.



Pendahuluan

Dengan menggunakan G sebagai titik referensi, hukum Kirchhoff menyiratkan bahwa arus memenuhi sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} 5i_1 + 5i_2 &= V \\ i_3 - i_4 - i_5 &= 0 \\ 2i_4 - 3i_5 &= 0 \\ i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ 5i_2 - 7i_3 - 2i_4 &= 0 \end{aligned}$$

Solusi untuk sistem jenis ini akan dibahas dalam bagian ini.

Sistem persamaan linier (SPL) dikaitkan dengan banyak masalah di bidang teknik dan sains, serta dengan penerapan matematika pada ilmu-ilmu sosial dan studi kuantitatif masalah bisnis dan ekonomi.

Sistem persamaan linier

Andaikan sistem mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
E_1 &: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
E_2 &: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\qquad\qquad\qquad\vdots \\
E_n &: a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned} \tag{1}
$$

- Pada Sistem (1), konstanta a_{ij}, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$, dan b_i, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, dan kita harus menentukan $x_1, \cdots, x_n$ yang tidak diketahui.
- Kami mempertimbangkan metode langsung (*direct method*) untuk menyelesaikan sistem linier n persamaan dalam n variabel sebagaimana diberikan pada Pers. (1).
- Teknik/metode langsung adalah metode yang secara teoritis memberikan solusi eksak pada sistem dalam sejumlah langkah yang terbatas.

Sistem persamaan linier

Tiga operasi untuk menyederhanakan SPL:

1. $(\lambda E_i) \to (E_i)$: Pers. E_i dapat dikalikan dengan $\lambda \neq 0$ dan persamaan yang dihasilkan digunakan sebagai pengganti E_i.
2. $(E_i + \lambda E_j) \to (E_i)$: Pers. E_j dapat dikalikan dengan $\lambda \neq 0$ dan ditambahkan ke pers. E_i dan persamaan yang dihasilkan digunakan sebagai pengganti E_i.
3. $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$: Pers. E_i dan E_j dapat ditukarkan posisinya.

Contoh 1

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\
E_2: & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\
E_3: & 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3, \\
E_4: & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4.
\end{array}
$$

Solusi Contoh 1:

- $(E_2 - 2E_1) \rightarrow (E_2)$, $(E_3 - 3E_1) \rightarrow (E_3)$ dan $(E_4 + E_1) \rightarrow (E_4)$:

$$\begin{array}{rrrrrrrrl} E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\ E_2: & & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7, \\ E_3: & & - & 4x_2 & - & x_3 & - & 7x_4 & = & -15, \\ E_4: & & & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 8. \end{array}$$

- $(E_3 - 4E_2) \rightarrow (E_3)$ dan $(E_4 + 3E_2) \rightarrow (E_4)$:

$$\begin{array}{rrrrrrrrl} E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\ E_2: & & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7, \\ E_3: & & & & & 3x_3 & + & 13x_4 & = & 13, \\ E_4: & & & & & & - & 13x_4 & = & -13. \end{array}$$

Solusi Contoh 1 (lanj.)

- Proses substitusi mundur (*backward-substitution*):
  - $E_4 \Rightarrow x_4 = 1$
  - Selesaikan E_3 for x_3:

$$x_3 = \frac{1}{3}(13 - 13x_4) = \frac{1}{3}(13 - 13) = 0.$$

  - E_2 memberikan

$$x_2 = -(-7 + 5x_4 + x_3) = -(-7 + 5 + 0) = 2.$$

  - E_1 memberikan

$$x_1 = 4 - 3x_4 - x_2 = 4 - 3 - 2 = -1.$$

Sistem persamaan linier

Menyelesaikan sistem persamaan linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Ditulis ulang dalam bentuk matriks

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{2}$$

dimana

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

dan $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}]$ dinamakan matriks yang diperbesar (*augmented matrix*).

Eliminasi Gauss dengan substitusi mundur

Matriks diperbesar dari Contoh 1 adalah:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

- $E_2 - 2E_1 \to E_2, \quad E_3 - 3E_1 \to E_3, \quad E_4 + E_1 \to E_4$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

- $E_3 - 4E_2 \to E_3, \quad E_4 + 3E_2 \to E_4$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -13 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right]$$

Prosedur eliminasi Gauss

- Untuk $a_{11} \neq 0$, $\forall i = 2, 3, \cdots, n$,

$$\left(E_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} E_1\right) \rightarrow (E_i)$$

  Ubah semua entri di kolom pertama di bawah diagonalnya adalah nol. Notasikan entri baru di baris ke-i dan kolom ke-j dengan a_{ij}

- Untuk $i = 2, 3, \cdots, n-1$, asalkan $a_{ii} \neq 0$,

$$\left(E_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} E_i\right) \rightarrow (E_j), \forall j = i+1, i+2, \cdots, n$$

  Ubah semua entri pada kolom ke-i di bawah diagonal menjadi nol.

- Menghasilkan matrik segitiga atas:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Prosedur eliminasi Gauss

Proses eliminasi Gauss menghasilkan urutan matriks sebagai berikut:

$$A = A^{(1)} \to A^{(2)} \to \cdots \to A^{(n)} = \text{matriks segitiga atas}$$

Matriks $A^{(k)}$ memiliki bentuk sebagai berikut:

$$A^{(k)} = \left[\begin{array}{ccc|c|cccc}
a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1j}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1,j}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-1)} \\
\hline
0 & \cdots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kj}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\
\hline
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
0 & \cdots & 0 & a_{ik}^{(k)} & \cdots & a_{ij}^{(k)} & \cdots & a_{in}^{(k)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nj}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)}
\end{array}\right]$$

Prosedur eliminasi Gauss

Entri-entri dari $A^{(k)}$ dihasilkan dengan formula

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k-1)}, & \text{for } i = 1, \cdots, k-1, j = 1, \cdots, n; \\ 0, & \text{for } i = k, \cdots, n, j = 1, \cdots, k-1; \\ a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{i,k-1}^{(k-1)}}{a_{k-1,k-1}^{(k-1)}}, & \text{for } i = k, \cdots, n, j = k, \cdots, n. \end{cases}$$

- Prosedur akan gagal jika salah satu elemennya $a_{11}^{(1)}$, $a_{22}^{(2)}$, $\cdots$, $a_{nn}^{(n)}$ adalah nol.
- $a_{ii}^{(i)}$ disebut sebagai elemen pivot.

Substitusi mundur

Sistem linier baru membentuk segitiga:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & & & & & & \vdots & & \\ & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

- Penyelesaian persamaan ke-n untuk x_n memberikan
$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$
- Penyelesaian persamaan ke-$(n-1)$ untuk x_{n-1} dan menggunakan nilai x_n menghasilkan
$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$
- Secara umum,
$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, \forall i = n-1, n-2, \cdots, 1.$$

Contoh 2

Selesaikan sistem persamaan linier

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}$$

Solusi:

Langkah 1 Gunakan 6 sebagai elemen pivot, baris pertama sebagai baris pivot, dan kalikan dengan 2, $\frac{1}{2}$, -1 untuk mereduksi sistem menjadi

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$

Solusi Contoh 2 (lanj.)

Langkah 2 Gunakan -4 sebagai elemen pivot, baris kedua sebagai baris pivot, dan kalikan dengan 3, $-\frac{1}{2}$ untuk mereduksi sistem menjadi

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix}$$

Langkah 3 Gunakan 2 sebagai elemen pivot, baris ketiga sebagai baris pivot, dan kalikan dengan 2 untuk mereduksi sistem menjadi

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Solusi Contoh 2 (lanj.)

Langkah 4 Lakukan substitusi mundur:

$$\begin{aligned}
x_4 &= \frac{-3}{-3} = 1,\\
x_3 &= \frac{-9+5x_4}{2} = \frac{-9+5}{2} = -2,\\
x_2 &= \frac{10-2x_4-2x_3}{-4} = \frac{10-2+4}{-4} = -3,\\
x_1 &= \frac{12-4x_4-2x_3+2x_2}{6} = \frac{12-4+4-6}{6} = 1.
\end{aligned}$$

- Contoh 2 dikerjakan karena $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, $\forall k = 1, 2, 3, 4$.
- Bagaimana mengerjakan jika $a_{kk}^{(k)} = 0$ untuk beberapa k?

Contoh 3

Selesaikan sistem persamaan linier

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -20 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solusi:

Langkah 1 Gunakan 1 sebagai elemen pivot, baris pertama sebagai baris pivot, dan kalikan dengan 2, 1, 1 untuk mereduksi sistem menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Solusi Contoh 3 (lanj.)

Langkah 2 Karena $a_{22}^{(2)} = 0$ dan $a_{32}^{(2)} \neq 0$, operasi $(E_2) \leftrightarrow (E_3)$ (pertukaran baris) dilakukan untuk mendapatkan sistem baru

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Langkah 3 Gunakan -1 sebagai elemen pivot, baris ketiga sebagai baris pivot, dan kalikan dengan -2 untuk mereduksi sistem menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solusi Contoh 3 (lanj.)

Langkah 4 Lakukan substitusi mundur:

$$x_4 = \frac{4}{2} = 2,$$
$$x_3 = \frac{-4 + x_4}{-1} = 2,$$
$$x_2 = \frac{6 - x_4 + x_3}{2} = 3,$$
$$x_1 = \frac{-8 + x_4 - 2x_3 + x_2}{1} = -7.$$

- Contoh 3 mengilustrasikan apa yang dilakukan jika $a_{kk}^{(k)} = 0$, untuk beberapa k.
- Jika $a_{pk}^{(k)} \leq 0$ untuk beberapa p dengan $k+1 \leq p \leq n$. maka operasi $(E_k) \leftrightarrow (E_p)$ dilakukan untuk mendapatkan matriks baru.
- Jika $a_{pk}^{(k)} = 0$ untuk setiap nilai p, maka SPL tidak mempunyai solusi tunggal (*unique*) dan prosedurnya berakhir.

Algorithm 1: eliminasi Gauss

INPUT : Matriks diperbesar $\bar{\boldsymbol{A}} = [\bar{a}_{ij}]$, dimana $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n+1$

for $i = 1, \cdots, n-1$ **do**
- misalkan p bilangan bulat terkecil dengan $i \leq p \leq n$ dan $a_{pi} \neq 0$;
- **if** $\nexists\ p$ **then**
  - **OUTPUT:** tidak ada solusi; STOP.
- **if** $p \neq i$ **then**
  - lakukan $(E_p) \leftrightarrow (E_i)$;
  - **for** $j = i+1, \cdots, n$ **do**
    - $m_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$;
    - $E_j - m_{ji}E_i \rightarrow E_j$;

if $a_{nn} = 0$ **then**
- **OUTPUT:** tidak ada solusi; STOP.

else
- atur $x_n = a_{n,n+1}/a_{nn}$;
- **for** $i = n-1, \cdots, 1$ **do**
  - $x_i = \left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right]/a_{ii}$;
- **OUTPUT:** $(x_1, \cdots, x_n)$; STOP.