Solusi Sistem Persamaan Nonlinier

Heri Purnawan

Disampaikan pada matakuliah **Metode Numerik**
Program Studi S-1 Teknik Elektro
Fakultas Sains dan Teknologi (FST)
Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

October 12, 2024

Email: heripurnawan@unisla.ac.id

Pokok Bahasan

- Iterasi titik tetap
  - Solusi Persamaan satu variabel
    - Langkah dalam penyelesaian iterasi titik tetap
    - Algoritma iterasi titik tetap
    - Penerapan iterasi titik tetap (I)
  - Solusi sistem persamaan nonlinier
    - Bentuk umum sistem persamaan nonlinier
    - Penerapan iterasi titik tetap (II)
- Newton-Rhapson
  - Pembentukan formula Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier
  - Penerapan Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier

Iterasi titik tetap

- Ide di balik teknik iterasi titik tetap sudah lama, namun terminologi pertama kali digunakan oleh ahli matematika Belanda **L.E.J. Brouwer (1882–1962)** dalam awal tahun 1900an.
- Iterasi titik tetap adalah sebuah metode yang digunakan untuk menghitung titik tetap yang deterministik dari suatu fungsi iteratif tertentu. Metode ini menghasilkan barisan $x_0, x_1, x_2, \cdots$ yang konvergen ke x^*
- Fungsi f harus kontinu agar dapat mencapai titik tetap yang ditentukan yaitu x^*. Selain itu, titik tetap x^*, dapat dipenuhi jika fungsi $f(x)$ dapat diekspresikan sebagai $x = g(x)$.

Pokok Bahasan

- Iterasi titik tetap
  - Solusi Persamaan satu variabel
    - Langkah dalam penyelesaian iterasi titik tetap
    - Algoritma iterasi titik tetap
    - Penerapan iterasi titik tetap (I)
  - Solusi sistem persamaan nonlinier
    - Bentuk umum sistem persamaan nonlinier
    - Penerapan iterasi titik tetap (II)
- Newton-Rhapson
  - Pembentukan formula Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier
  - Penerapan Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier

Penyelesaian iterasi titik tetap

Diberikan $f(x) = 0$

(1). Nyatakan $f(x) = x - g(x) = 0$

$$x = g(x)$$

(2). Dapatkan turunan dari $g(x)$ pada tebakan awal x_0

$$g'(x_0) < 1, \quad x_0 \in [a, b]$$

Kondisi untuk mempertimbangkan $g(x)$
Untuk $i = 0, 1, 2, \ldots$

- Jika $|g'(x_0)| < 1$:
  - Akan ada konvergensi ke nilai tertentu x^*
  - Oleh karena itu, $g(x)$ adalah fungsi yang baik
- Jika tidak:
  - $x_{i+1} = g(x_i)$ akan terus menyimpang.
  - Oleh karena itu, pertimbangkan untuk memilih fungsi $g(x)$ yang berbeda dari langkah (1).

Pokok Bahasan

- Iterasi titik tetap
  - Solusi Persamaan satu variabel
    - Langkah dalam penyelesaian iterasi titik tetap
    - Algoritma iterasi titik tetap
    - Penerapan iterasi titik tetap (I)
  - Solusi sistem persamaan nonlinier
    - Bentuk umum sistem persamaan nonlinier
    - Penerapan iterasi titik tetap (II)
- Newton-Rhapson
  - Pembentukan formula Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier
  - Penerapan Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier

Algoritma

Algorithm 1: Algoritma iterasi titik tetap

INPUT : Tebakan awal x_0, nilai toleransi TOL, maksimum iterasi N
OUTPUT: Solusi pendekatan $x^* = x_{i+1}$ atau pesan gagal

```
Atur i = 0;
while i ≤ N − 1 do
    Set x_{i+1} = g(x_i) ;                         /* Hitung x_{i+1} */
    if x_{i+1} − x_i < TOL then
        OUTPUT(x_{i+1}) ;                          /* Prosedur sukses */
        STOP
    else
        Atur i = i + 1;
OUTPUT(Gagal mendapatkan solusi)
```

Pokok Bahasan

- Iterasi titik tetap
  - Solusi Persamaan satu variabel
    - Langkah dalam penyelesaian iterasi titik tetap
    - Algoritma iterasi titik tetap
    - Penerapan iterasi titik tetap (I)
  - Solusi sistem persamaan nonlinier
    - Bentuk umum sistem persamaan nonlinier
    - Penerapan iterasi titik tetap (II)
- Newton-Rhapson
  - Pembentukan formula Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier
  - Penerapan Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier

Penerapan iterasi titik tetap

Contoh 1: Tentukan akar dari $xe^x = 1$ pada interval $[0, 1]$ menggunakan iterasi titik tetap.

Solusi:
Kita dapat menyatakan $f(x)$ sebagai $x = e^{-x}$

$$g(x) = e^{-x} \quad \text{dan} \quad g'(x) = -e^{-x}$$

Pilih $x_0 = 0.5 \in [0, 1]$, sehingga

$$|g'(0.5) = |-e^{-0.5}| = 0.6065 < 1.$$

Jadi, akan konvergensi ke x^*. Iterasinya dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0) = e^{-0.5} = 0.6065 \\ x_2 &= g(x_1) = 0.5452 \\ x_3 &= g(x_2) = 0.5797 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Setelah iterasi berhasil, nilai pendekatan konvergen ke $x^* = 0.5671$.

Penerapan iterasi titik tetap

Contoh 2: Tentukan akar dari $x^3 = 2x + 1$ pada interval $[1.5, 2.0]$ menggunakan iterasi titik tetap dengan tebakan awal $x_0 = 1.5$.

Solusi:
Kita dapat menyatakan $f(x)$ sebagai $x^3 = 2x + 1 \rightarrow x = (2x + 1)^{\frac{1}{3}}$.

$$g(x) = (2x + 1)^{\frac{1}{3}} \quad \text{dan} \quad g'(x) = \frac{2}{3}(2x + 1)^{-\frac{2}{3}}$$

Sehingga

$$|g'(1.5) = \left| \frac{2}{3}(2(1.5) + 1)^{-\frac{2}{3}} \right| = 0.2646 < 1.$$

Jadi, akan konvergensi ke x^*. Iterasinya dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0) = (2(1.5) + 1)^{\frac{1}{3}} = 1.5874 \\ x_2 &= g(x_1) = 1.6102 \\ x_3 &= g(x_2) = 1.6160 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Setelah iterasi berhasil, nilai pendekatan konvergen ke $x^* = 1.6180$.

Pokok Bahasan

- Iterasi titik tetap
  - Solusi Persamaan satu variabel
    - Langkah dalam penyelesaian iterasi titik tetap
    - Algoritma iterasi titik tetap
    - Penerapan iterasi titik tetap (I)
  - Solusi sistem persamaan nonlinier
    - Bentuk umum sistem persamaan nonlinier
    - Penerapan iterasi titik tetap (II)
- Newton-Rhapson
  - Pembentukan formula Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier
  - Penerapan Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier

Bentuk umum sistem persamaan nonlinier

Sistem persamaan nonlinier umumnya dapat didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Penyelesaian sistem ini terdiri dari himpunan nilai x yang secara simultan menghasilkan semua persamaan sama dengan nol.

Contoh sistem persamaan nonlinier:

$$\begin{aligned} x^2 + xy - 10 &= 0 \\ y + 3xy^2 - 57 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Selanjutnya, kita akan menyelesaikan sistem persamaan nonlinier pada Persamaan (2) menggunakan iterasi titik tetap.

Pokok Bahasan

- Iterasi titik tetap
  - Solusi persamaan satu variabel
    - Langkah dalam penyelesaian iterasi titik tetap
    - Algoritma iterasi titik tetap
    - Penerapan iterasi titik tetap (I)
  - Solusi sistem persamaan nonlinier
    - Bentuk umum sistem persamaan nonlinier
    - Penerapan iterasi titik tetap (II)
- Newton-Rhapson
  - Pembentukan formula Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier
  - Penerapan Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier

Penerapan iterasi titik tetap pada sistem pers. nonlinier

Contoh 3: Tentukan akar-akar dari Persamaan (2) menggunakan iterasi titik tetap dengan tebakan awal $x_0 = 1.5$ dan $y_0 = 3.5$. (*Solusi sebenarnya adalah* $x = 2$ *dan* $y = 3$).

Solusi: Persamaan (2) dapat diselesaikan untuk x yaitu

$$x = \frac{10 - x^2}{y} \tag{3}$$

dan untuk y yaitu

$$y = 57 - 3xy^2 \tag{4}$$

Substitusi $x = x_0 = 1.5$ dan $y = y_0 = 3.5$ ke Persamaan (3) dan (4), sehingga diperoleh

$$x = \frac{10 - (1.5)^2}{3.5} = 2.21429$$

dan

$$y = 57 - 3(2.21429)(3.5)^2 = -24.37516$$

Lanjutan Contoh 3

Dengan cara yang sama untuk iterasi selanjutnya, maka diperoleh

$$x = \frac{10 - (2.21429)^2}{-24.37516} = -0.20910$$
$$y = 57 - 3(2.21429)(-24.37516)^2 = 429.709$$

Jelas sekali, pendekatan ini menghasilkan solusi yang semakin jauh dari solusi sebenarnya. Sekarang kita akan mengulangi perhitungannya tetapi dengan persamaan awal yang diatur dalam format yang berbeda. Misalnya, rumusan alternatif Persamaan (2) untuk x adalah

$$x = \sqrt{10 - xy}$$

dan untuk y adalah

$$y = \sqrt{\frac{57 - y}{3x}}$$

Lanjutan Contoh 3

- Untuk iterasi 1, maka

$$x = \sqrt{10 - 1.5(3.5)} = 2.17945$$

$$y = \sqrt{\frac{57 - 3.5}{3(2.17945)}} = 2.86051$$

- Untuk iterasi 2, maka

$$x = \sqrt{10 - 2.17945(2.86051)} = 1.94053$$

$$y = \sqrt{\frac{57 - 2.86051}{3(1.94053)}} = 3.04955$$

Dengan demikian, pendekatan ini konvergen ke nilai-nilai sebenarnya yaitu $x = 2$ dan $y = 3$.

Pokok Bahasan

- Iterasi titik tetap
  - Solusi persamaan satu variabel
    - Langkah dalam penyelesaian iterasi titik tetap
    - Algoritma iterasi titik tetap
    - Penerapan iterasi titik tetap (I)
  - Solusi sistem persamaan nonlinier
    - Bentuk umum sistem persamaan nonlinier
    - Penerapan iterasi titik tetap (II)
- Newton-Rhapson
  - Pembentukan formula Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier
  - Penerapan Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier

Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier 2 variabel

Bentuk multi-persamaan diturunkan dengan cara yang identik. Namun, deret Taylor multivariabel harus digunakan untuk memperhitungkan fakta bahwa lebih dari satu variabel bebas berkontribusi terhadap penentuan akar. Untuk kasus dua variabel, deret Taylor orde pertama dapat ditulis untuk setiap persamaan nonlinier sebagai

$$f_{1_{i+1}} = f_{1_i} + (x_{1_{i+1}} - x_{1_i})\frac{\partial f_{1_i}}{\partial x_1} + (x_{2_{i+1}} - x_{2_i})\frac{\partial f_{1_i}}{\partial x_2} \tag{5}$$

dan

$$f_{2_{i+1}} = f_{2_i} + (x_{1_{i+1}} - x_{1_i})\frac{\partial f_{2_i}}{\partial x_1} + (x_{2_{i+1}} - x_{2_i})\frac{\partial f_{2_i}}{\partial x_2} \tag{6}$$

Sama seperti versi persamaan tunggal, estimasi akar berhubungan dengan nilai x_1 dan x_2, dimana $f_{1_{i+1}}$ dan $f_{2_{i+1}}$ sama dengan nol. Untuk situasi ini, Persamaan (5) dan (6) dapat disusun ulang menjadi

Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier 2 variabel

$$\frac{\partial f_{1_i}}{\partial x_1} x_{1_{i+1}} + \frac{\partial f_{1_i}}{\partial x_2} x_{2_{i+1}} = -f_{1_i} + x_{1_i} \frac{\partial f_{1_i}}{\partial x_1} + x_{2_i} \frac{\partial f_{1_i}}{\partial x_2} \tag{7}$$

dan

$$\frac{\partial f_{2_i}}{\partial x_1} x_{1_{i+1}} + \frac{\partial f_{2_i}}{\partial x_2} x_{2_{i+1}} = -f_{2_i} + x_{1_i} \frac{\partial f_{2_i}}{\partial x_1} + x_{2_i} \frac{\partial f_{2_i}}{\partial x_2} \tag{8}$$

Karena semua nilai yang disubskripsikan dengan i diketahui (sesuai dengan perkiraan terakhir), satu-satunya nilai yang tidak diketahui adalah $x_{1_{i+1}}$ dan $x_{2_{i+1}}$. Jadi, Persamaan (7) dan (8) adalah himpunan dua persamaan linier dengan dua variabel yang tidak diketahui. Akibatnya, manipulasi aljabar (misalnya, aturan Cramer) dapat digunakan untuk menyelesaikannya. Oleh karena itu, diperoleh

Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier 2 variabel

$$x_{1_{i+1}} = x_{1_i} - \frac{f_{1_i}\frac{\partial f_{2_i}}{\partial x_2} - f_{2_i}\frac{\partial f_{1_i}}{\partial x_2}}{\frac{\partial f_{1_i}}{\partial x_1}\frac{\partial f_{2_i}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_{1_i}}{\partial x_2}\frac{\partial f_{2_i}}{\partial x_1}} \tag{9}$$

dan

$$x_{2_{i+1}} = x_{2_i} - \frac{f_{2_i}\frac{\partial f_{1_i}}{\partial x} - f_{1_i}\frac{\partial f_{2_i}}{\partial x_1}}{\frac{\partial f_{1_i}}{\partial x_1}\frac{\partial f_{2_i}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_{1_i}}{\partial x_2}\frac{\partial f_{2_i}}{\partial x_1}} \tag{10}$$

Penyebut masing-masing persamaan ini secara formal disebut sebagai determinan sistem Jacobian.

Persamaan (9) dan (10) adalah versi dua persamaan dari metode Newton-Raphson. Seperti pada contoh berikut, ini dapat digunakan secara iteratif untuk mendapatkan solusi dari dua persamaan simultan.

Pokok Bahasan

- Iterasi titik tetap
  - Solusi persamaan satu variabel
    - Langkah dalam penyelesaian iterasi titik tetap
    - Algoritma iterasi titik tetap
    - Penerapan iterasi titik tetap (I)
  - Solusi sistem persamaan nonlinier
    - Bentuk umum sistem persamaan nonlinier
    - Penerapan iterasi titik tetap (II)
- Newton-Rhapson
  - Pembentukan formula Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier
  - Penerapan Newton-Rhapson untuk sistem pers. nonlinier

Penerapan Newton-Rhapson untuk sistem nonlinier

Contoh 4: Gunakan metode Newton-Raphson untuk menyelesaikan sistem persamaan (2). Perhatikan bahwa solusi yang sebenarnya adalah $x = 2$ dan $y = 3$. Mulailah perhitungan dengan tebakan $x_0 = 1.5$ dan $y_0 = 3.5$.

Solusi: Misal: $f_1(x, y) = x^2 + xy - 10 = 0$ dan $f_2(x, y) = y + 3xy^2 - 57 = 0$. Pertama, hitung turunan parsial dan evaluasi turunan tersebut berdasarkan tebakan awal x_0 dan y_0:

$$\frac{\partial f_{1_0}}{\partial x} = 2x + y = 2(1.5) + 3.5 = 6.5$$
$$\frac{\partial f_{1_0}}{\partial y} = x = 1.5$$
$$\frac{\partial f_{2_0}}{\partial x} = 3y^2 = 3(3.5)^2 = 36.75$$
$$\frac{\partial f_{2_0}}{\partial y} = 1 + 6xy = 1 + 6(1.5)(3.5) = 32.5$$

Lanjutan Contoh 4

Jadi, determinan Jacobian untuk iterasi pertama adalah

$$6.5(32.5) - 1.5(36.75) = 156.125$$

Nilai fungsi dapat dievaluasi pada tebakan awal sebagai

$$f_{1_0} = (1.5)^2 + 1.5(3.5) - 10 = -2.5$$
$$f_{2_0} = 3.5 + 3(1.5)(3.5)^2 - 57 = 1.625$$

Nilai-nilai ini dapat disubstitusikan ke Persamaan (9) dan (10) memberi

$$x = 1.5 - \frac{-2.5(32.5) - 1.625(1.5)}{156.125} = 2.03603$$
$$y = 3.5 - \frac{-1.625(6.5) - (-2.5)(36.75)}{156.125} = 2.84388$$

Dengan demikian, hasilnya konvergen dengan nilai sebenarnya dari $x = 2$ dan $y = 3$. Perhitungan dapat diulangi hingga diperoleh akurasi yang dapat diterima.

Sama seperti iterasi titik tetap, pendekatan Newton-Raphson sering kali menyimpang jika tebakan awal tidak cukup mendekati solusi sebenarnya.