Sinyal

Heri Purnawan
Email: heripurnawan@unisla.ac.id

Program Studi S-1 Teknik Elektro
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Lamongan

Sistem Linier (TE4249)

October 4, 2024

Pokok Bahasan

- Definisi sinyal
- Ukuran sinyal
- Operasi sinyal
- Klasifikasi sinyal
- Model sinyal

Definisi

- Sinyal adalah sekumpulan data atau informasi.
- Contohnya termasuk sinyal telepon atau televisi, penjualan bulanan suatu perusahaan, atau harga penutupan harian pasar saham.
- Dalam semua contoh ini, sinyal merupakan fungsi dari variabel bebas waktu. Namun hal ini tidak selalu terjadi.
- Ketika muatan listrik didistribusikan ke seluruh benda, misalnya, sinyalnya adalah kepadatan muatan, yang merupakan fungsi ruang, bukan waktu.
- Dalam pembahasan ini, hampir secara eksklusif dibahas sinyal-sinyal yang merupakan fungsi waktu. Namun, pembahasan ini juga berlaku untuk variabel independen/bebas lainnya.

Pokok Bahasan

- Definisi sinyal
- Ukuran sinyal
- Operasi sinyal
- Klasifikasi sinyal
- Model sinyal

Ukuran sinyal

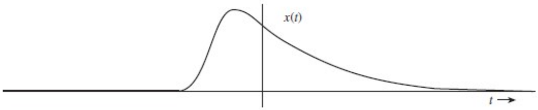
- **Energi sinyal**
  Dengan mempertimbangkan luas di bawah sinyal $|x(t)|^2$ sebagai ukuran yang mungkin untuk ukurannya, karena area tersebut tidak hanya memperhitungkan amplitudo tetapi juga durasinya. Energi sinyal E_x, didefinisikan sebagai

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt \tag{1}$$

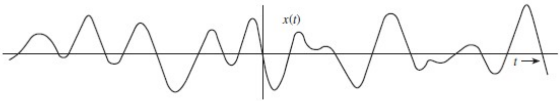
- **Daya sinyal**
  Energi sinyal harus terbatas agar dapat mengukur ukuran sinyal. Kondisi yang diperlukan agar energinya berhingga adalah amplitudo sinyal $\to 0$ sebagai $|t| \to \infty$ (lihat Gambar 1(a)). Jika tidak, integral dalam Pers. (1) tidak akan konvergen.
  Ketika amplitudo $x(t)$ tidak $\to 0$ seperti $|t| \to \infty$ (lihat Gambar 1(b)), energi sinyal menjadi tak terhingga. Ukuran sinyal dalam kasus seperti ini adalah rata-rata waktu energi, jika memang ada. Ukuran ini disebut daya sinyal. Untuk sinyal $x(t)$, didefinisikan daya sinyal P_x sebagai

Ukuran sinyal

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt \qquad (2)$$



(a) sinyal dengan energi terbatas

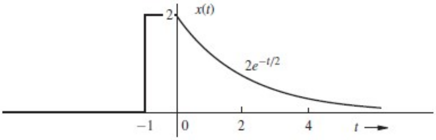


(b) sinyal dengan daya terbatas

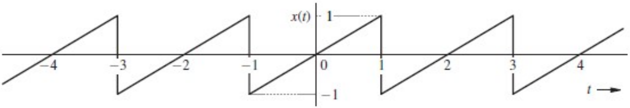
Gambar 1: Contoh-contoh sinyal

Ukuran sinyal

Contoh 1: Tentukan ukuran yang sesuai dari sinyal-sinyal di Gambar 2.



(a)



(b)

Gambar 2: Sinyal untuk Contoh 1

Ukuran sinyal

Solusi Contoh 1:
Pada Gambar 2(a), amplitudo sinyal $\to 0$ untuk $|t| \to \infty$. Oleh karena itu ukuran yang cocok untuk sinyal ini adalah energi E_x yang diberikan oleh

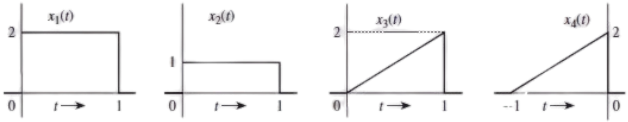
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-1}^{0} |2|^2 \, dt + \int_{0}^{\infty} \left|2e^{-\frac{t}{2}}\right|^2 \, dt$$
$$= \int_{-1}^{0} 4 \, dt + \int_{0}^{\infty} 4e^{-t} \, dt = 4 + 4 = 8$$

Pada Gambar 2(b), besaran sinyal tidak $\to 0$ untuk $|t| \to \infty$. Namun, ini bersifat periodik, dan oleh karena itu dayanya ada. Kita dapat menyederhanakan prosedur untuk sinyal periodik dengan mengamati bahwa sinyal periodik berulang secara teratur setiap periode (dalam hal ini 2 detik). Oleh karena itu, merata-ratakan $|x(t)|^2$ pada interval yang sangat besar sama dengan merata-ratakan besaran ini dalam satu periode (dalam kasus ini 2 detik). Dengan demikian

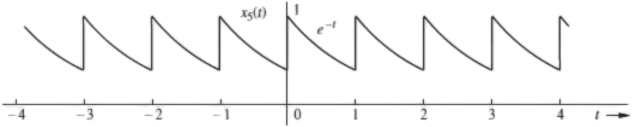
$$P_x = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |t|^2 \, dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} t^2 \, dt = \frac{1}{3}.$$

Ukuran sinyal

Latihan 1: Tunjukkan bahwa energi sinyal pada Gambar 3(a) berturut-turut adalah 4, 1, $4/3$, dan $4/3$. Tunjukkan juga bahwa daya sinyal pada Gambar 3(b) adalah $0,4323$.



(a)



(b)

Gambar 3: Sinyal untuk Latihan 1

Pokok Bahasan

Operasi sinyal

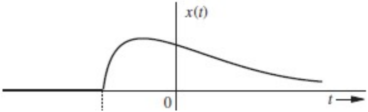
- Pergeseran waktu

  Pertimbangkan sinyal $x(t)$ (Gambar 4(a)) dan sinyal yang sama tertunda selama T detik (Gambar 4(b)), yang akan kita nyatakan dengan $\phi(t)$. Apapun yang terjadi pada $x(t)$ (Gambar 4(a)) pada saat t juga terjadi pada $\phi(t)$ (Gambar 4(b)) T detik kemudian pada saat $t+T$. Oleh karena itu,

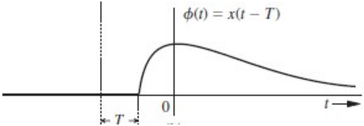
  $$\phi(t+T) = x(t) \quad \text{dan} \quad \phi(t) = x(t-T)$$

  Oleh karena itu, untuk menggeser sinyal sebesar T, kita mengganti t dengan $t-T$. Jadi $x(t-T)$ mewakili $x(t)$ waktu yang digeser oleh T detik. Jika T positif maka pergeserannya ke kanan (*delay*/tertunda), seperti pada Gambar 4(b). Jika T negatif maka pergeserannya ke kiri (*advance*/maju), seperti pada Gambar 4(c). Jelasnya, $x(t-2)$ adalah $x(t)$ tertunda (bergeser ke kanan) sebanyak 2 detik, dan $x(t+2)$ adalah $x(t)$ maju (bergeser ke kiri) sebanyak 2 detik.

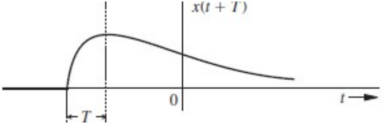
Operasi sinyal



(a)



(b)

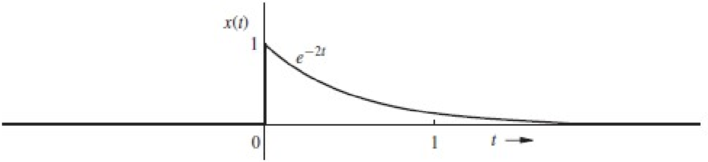


(c)

Gambar 4: Pergeseran waktu sebuah sinyal

Operasi sinyal

Contoh 2: Sinyal eksponensial $x(t) = e^{-2t}$ yang ditunjukkan pada Gambar 5. Sketsa dan deskripsikan secara matematis sinyal tertunda 1 detik. Ulangi soal dengan $x(t)$ maju 1 detik.



Gambar 5: Sinyal $x(t)$

Fungsi $x(t)$ dapat dideskripsikan secara matematika sebagai

$$x(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3)$$

Operasi sinyal

Solusi Contoh 2: Sketsa sinyal $x(t)$ tertunda 1 detik ditunjukkan pada Gambar 6.

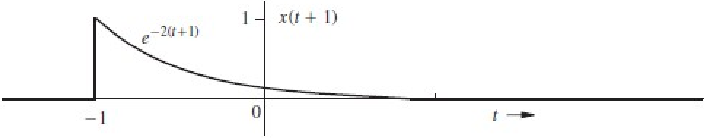
Gambar 6: Sinyal $x(t)$ tertunda 1 detik

Deskripsi matematis sinyal $x(t)$ tertunda 1 detik diberikan oleh

$$x_d(t) = x(t-1) = \begin{cases} e^{-2(t-1)} & t-1 \geq 0 \;\; \text{atau} \;\; t \geq 1 \\ 0 & t-1 < 0 \;\; \text{atau} \;\; t < 1 \end{cases} \tag{4}$$

Operasi sinyal

Solusi Contoh 2: Sketsa sinyal $x(t)$ maju 1 detik ditunjukkan pada Gambar 7.



Gambar 7: Sinyal $x(t)$ maju 1 detik

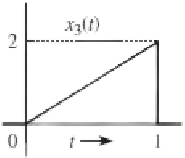
Deskripsi matematis sinyal $x(t)$ maju 1 detik diberikan oleh

$$x_a(t) = x(t+1) = \begin{cases} e^{-2(t+1)} & t+1 \geq 0 \;\; \text{atau} \;\; t \geq -1 \\ 0 & t+1 < 0 \;\; \text{atau} \;\; t < -1 \end{cases} \tag{5}$$

Operasi sinyal

Latihan 2:

Tuliskan deskripsi matematis sinyal $x_3(t)$ pada Gambar 8. Selanjutnya, tunda sinyal ini sebesar 2 detik. Buat sketsa sinyal yang tertunda. Tunjukkan bahwa sinyal tertunda $x_d(t)$ dapat dijelaskan secara matematis sebagai $x_d(t) = 2(t-2)$ untuk $2 \leq t \leq 3$, dan sebaliknya sama dengan 0. Sekarang ulangi prosedur dengan sinyal maju (bergeser ke kiri) selama 1 detik. Tunjukkan bahwa ini sinyal maju $x_a(t)$ dapat dinyatakan sebagai $x_a(t) = 2(t+1)$ untuk $-1 \leq t \leq 0$, dan 0 sebaliknya.



Gambar 8: Sinyal $x_3(t)$

Operasi sinyal

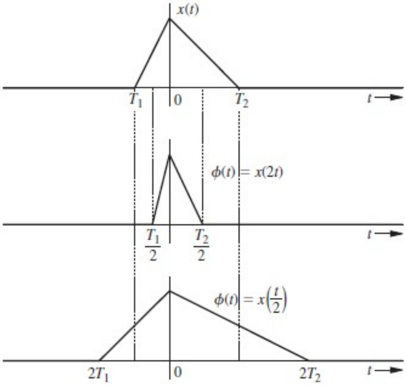
- Penskalaan waktu
  Kompresi atau perluasan sinyal dalam waktu dikenal sebagai penskalaan waktu. Perhatikan sinyal $x(t)$ pada Gambar 9 (atas). Sinyal $\phi(t)$ pada Gambar 9 (tengah) adalah $x(t)$ yang dikompresi dalam waktu dengan faktor 2. Oleh karena itu, apapun yang terjadi pada $x(t)$ pada saat t juga terjadi pada $\phi(t)$ pada saat $t/2$ sehingga,

$$\phi\left(\frac{t}{2}\right) = x(t) \quad \text{dan} \quad \phi(t) = x(2t)$$

  Perhatikan bahwa karena $x(t) = 0$ pada $t = T_1$ dan T_2, kita harus mempunyai $\phi(t) = 0$ pada $t = T_1/2$ dan $T_2/2$, seperti ditunjukkan pada Gambar 9 (tengah). Secara umum, jika $x(t)$ dikompresi dalam waktu dengan faktor a ($a > 1$), sinyal yang dihasilkan $\phi(t)$ diberikan oleh

$$\phi(t) = x(at)$$

Operasi sinyal



Gambar 9: Penskalaan waktu

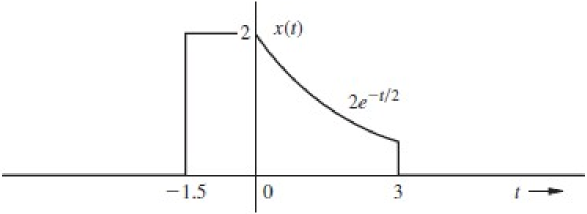
Dengan menggunakan argumen serupa, $x(t)$ diperluas (diperlambat) terhadap waktu dengan faktor a ($a > 1$) diberikan oleh

$$\phi(t) = x\left(\frac{t}{a}\right)$$

Gambar 9 (bawah) menunjukkan $x(t/2)$, yaitu $x(t)$ diekspansi terhadap waktu sebanyak 2 kali. Operasi penskalaan waktu, titik asal $t = 0$ adalah titik tetap tidak berubah pada kondisi operasi penskalaan karena pada $t = 0$, $x(t) = x(at) = x(0)$.

Operasi sinyal

Contoh 3: Gambar 10 menunjukkan sinyal $x(t)$. Buat sketsa dan jelaskan secara matematis waktu sinyal yang dikompresi oleh faktor 3. Ulangi soal untuk waktu sinyal yang sama yang diperluas dengan faktor 2.



Gambar 10: Sinyal $x(t)$

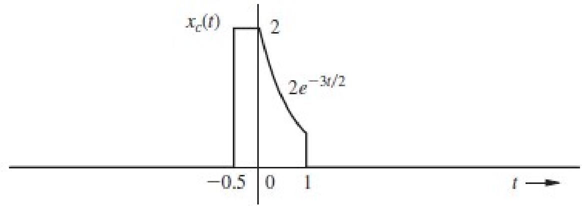
Sinyal $x(t)$ dapat dideskripsikan sebagai

$$x(t) = \begin{cases} 2 & -1.5 \leq t < 0 \\ 2e^{-t/2} & 0 \leq t < 3 \\ 0 & t \text{ yang lain} \end{cases} \tag{6}$$

Operasi sinyal

Solusi Contoh 3: Gambar 11 menunjukkan $x_c(t)$, yaitu $x(t)$ yang dikompresi waktu oleh faktor 3; akibatnya, secara matematis dapat digambarkan sebagai $x(3t)$, yang diperoleh dengan mengganti t dengan $3t$ di ruas kanan Pers. (6). Dengan demikian,

$$x_c(t) = x(3t) = \begin{cases} 2 & -1.5 \leq 3t < 0 \text{ atau } -0.5 \leq t < 0 \\ 2e^{-3t/2} & 0 \leq 3t < 3 \text{ atau } 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \text{ yang lain} \end{cases} \tag{7}$$

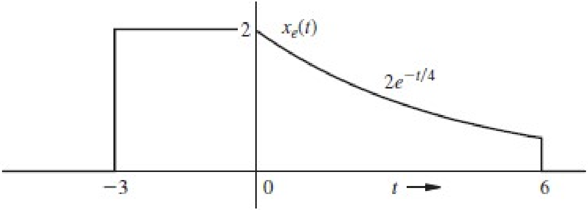


Gambar 11: Sinyal $x(3t)$

Operasi sinyal

Solusi Contoh 3: Gambar 11 menunjukkan $x_e(t)$, yaitu $x(t)$ yang diperluas waktu oleh faktor 2; akibatnya, secara matematis dapat digambarkan sebagai $x(t/2)$, yang diperoleh dengan mengganti t dengan $t/2$ di di $x(t)$. Dengan demikian,

$$x_e(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} 2 & -1.5 \le \frac{t}{2} < 0 \quad \text{atau} \quad -3 \le t < 0 \\ 2e^{-t/4} & 0 \le \frac{t}{2} < 3 \quad \text{atau} \quad 0 \le t < 6 \\ 0 & t \text{ yang lain} \end{cases} \tag{8}$$



Gambar 12: Sinyal $x(t/2)$

Operasi sinyal

Latihan 3:

Tunjukkan bahwa kompresi waktu dengan faktor bilangan bulat n $(n > 1)$ dari sebuah sinusoidal menghasilkan sinusoidal dengan amplitudo dan fase yang sama, tetapi dengan frekuensi yang meningkat sebanyak n kali lipat. Demikian pula, perluasan waktu dengan faktor bilangan bulat n $(n > 1)$ dari sebuah sinusoidal menghasilkan sinusoidal dengan amplitudo dan fase yang sama, tetapi dengan frekuensi dikurangi dengan faktor n. Verifikasi kesimpulan Anda dengan membuat sketsa sinusoidal $\sin 2t$ dan sinusoidal yang sama dikompresi dengan faktor 3 dan diperluas dengan faktor 2.

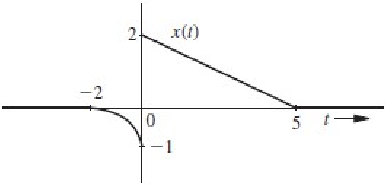
- Pembalikan waktu

  Perhatikan sinyal $x(t)$ pada Gambar 13(a). Untuk membalikkan waktu $x(t)$, kita melakukan putaran 180° terhadap sumbu vertikal. Kali ini pembalikan (refleksi $x(t)$ terhadap sumbu vertikal) memberi kita sinyal $\phi(t)$ (Gambar 13(b)). Amati bahwa apapun yang terjadi pada Gambar 13(a) pada saat t juga terjadi pada Gambar 13(b) pada saat $-t$, dan sebaliknya. Karena itu,

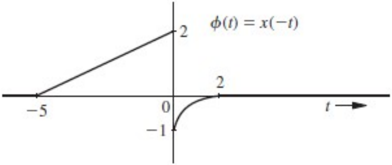
$$\phi(t) = x(-t)$$

Operasi sinyal

Jadi, untuk membalikkan waktu suatu sinyal kita mengganti t dengan $-t$, dan pembalikan waktu dari sinyal $x(t)$ menghasilkan sinyal $x(-t)$. Ingat juga bahwa pembalikan $x(t)$ terhadap sumbu horizontal menghasilkan $-x(t)$.



(a)

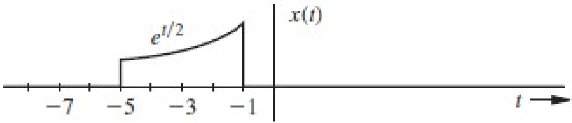


(b)

Gambar 13: Pembalikan waktu sebuah sinyal

Operasi sinyal

Contoh 4: Untuk sinyal $x(t)$ yang diilustrasikan pada Gambar 14, buat sketsa $x(-t)$, yang merupakan pembalikan waktu dari $x(t)$.

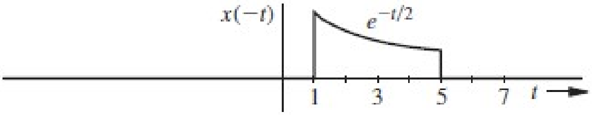


Gambar 14: Sinyal $x(t)$

Solusi: Nilai -1 dan -5 di $x(t)$ dipetakan ke nilai 1 dan 5 di $x(-t)$. Karena $x(t) = e^{t/2}$, kita mempunyai $x(-t) = e^{-t/2}$. Sinyal $x(-t)$ digambarkan pada Gambar 15 Kita dapat mendeskripsikan $x(t)$ dan $x(-t)$ sebagai

$$x(t) = \begin{cases} e^{t/2} & -5 \leq t \leq -1 \\ 0 & t \text{ yang lain} \end{cases}$$

Operasi sinyal



Gambar 15: Sinyal $x(-t)$

dan versi pembalikan waktu $x(-t)$ diperoleh dengan mengganti t dengan $-t$ di $x(t)$ sebagai

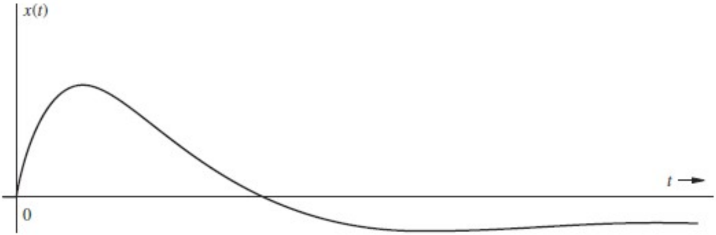
$$x(-t) = \begin{cases} e^{-t/2} & -5 \le -t \le -1 \ \text{ atau } \ 1 \le t \le 5 \\ 0 & t \text{ yang lain} \end{cases}$$

Pokok Bahasan

- Definisi sinyal
- Ukuran sinyal
- Operasi sinyal
- Klasifikasi sinyal
- Model sinyal

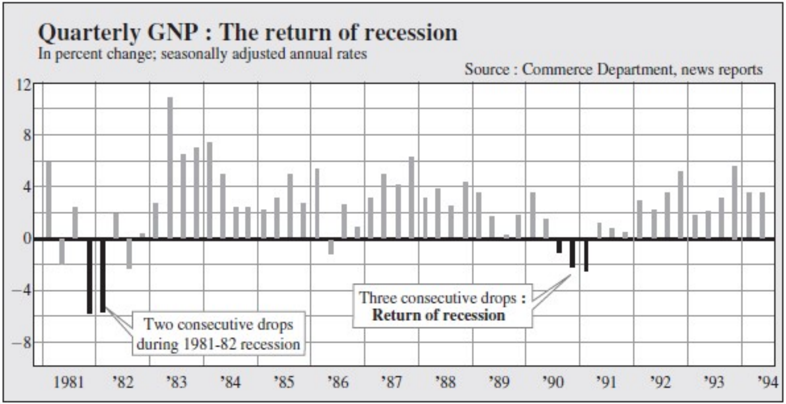
Klasifikasi sinyal

- Sinyal waktu kontinu dan diskrit
  Sinyal yang ditentukan untuk semua nilai waktu t secara berkesinambungan (Gambar 16) disebut sinyal waktu kontinu, dan sinyal yang hanya ditentukan pada nilai-nilai waktu t tertentu (Gambar 17) disebut sinyal waktu diskrit. Output telepon dan kamera video adalah sinyal waktu kontinu, sedangkan produk nasional bruto (GNP) triwulanan, penjualan bulanan suatu perusahaan, dan rata-rata harian pasar saham adalah sinyal waktu diskrit.



Gambar 16: Sinyal waktu kontinu

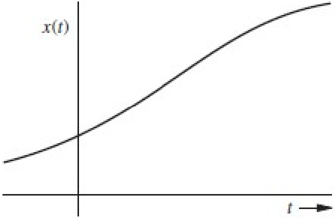
Klasifikasi sinyal



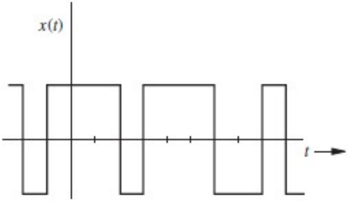
Gambar 17: Sinyal waktu diskrit

Klasifikasi sinyal

- Sinyal analog dan digital
  Sinyal yang amplitudonya bisa mengambil nilai apa pun dalam rentang kontinu adalah sinyal analog. Ini berarti bahwa amplitudo sinyal analog dapat mempunyai jumlah nilai yang tidak terbatas. Sebaliknya, sinyal digital adalah sinyal yang amplitudonya hanya dapat mempunyai sejumlah nilai terbatas.



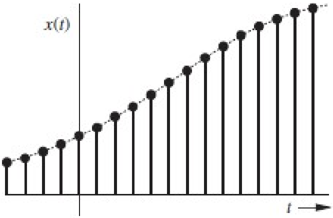
(a) analog kontinu



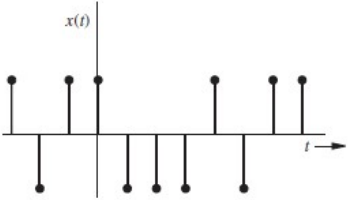
(b) digital kontinu

Gambar 18: Sinyal analog dan digital kontinu

Klasifikasi sinyal



(a) analog diskrit

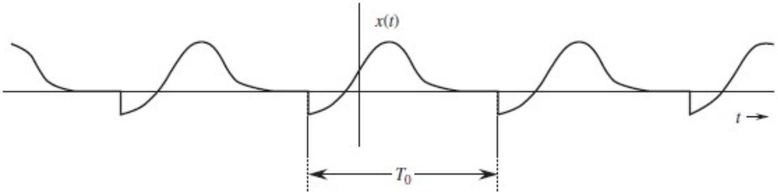


(b) digital diskrit

Gambar 19: Sinyal analog dan digital diskrit

- Sinyal periodik dan aperiodik
  Suatu sinyal $x(t)$ dikatakan periodik jika untuk suatu konstanta positif T_0
  $$x(t) = x(t + T_0) \quad \forall t \tag{9}$$
  Suatu sinyal bersifat aperiodik jika tidak periodik.

Klasifikasi sinyal



Gambar 20: Sinyal periodik dengan periode T_0

- Sinyal deterministik dan acak
  Sinyal yang gambaran fisiknya diketahui secara lengkap, baik dalam bentuk matematis maupun grafik, merupakan sinyal deterministik. Sinyal yang nilainya tidak dapat diprediksi secara tepat tetapi hanya diketahui berdasarkan deskripsi probabilistik, seperti nilai rata-rata atau nilai kuadrat rata-rata, adalah sinyal acak.

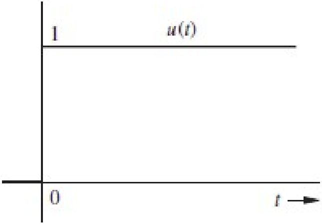
Pokok Bahasan

- Definisi sinyal
- Ukuran sinyal
- Operasi sinyal
- Klasifikasi sinyal
- Model sinyal

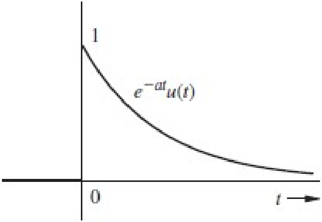
Model sinyal

- Fungsi undak satuan (*unit step*)
  Fungsi ini dapat didefinisikan sebagai

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{10}$$



(a) fungsi undak satuan $u(t)$

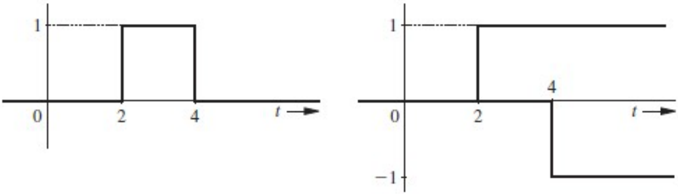


(b) eksponensial $e^{-at}u(t)$

Model sinyal

Sinyal pulse dapat dihasilkan menggunakan dua fungsi undak (*step*), misalnya:

$$x(t) = u(t-2) - u(t-4)$$



Gambar 22: Representasi fungsi pulse dari fungsi-fungsi undak

Model sinyal

- **Fungsi impuls satuan**

  Fungsi impuls satuan $\delta(t)$ adalah salah satu fungsi paling penting dalam studi sinyal dan sistem. Fungsi ini pertama kali didefinisikan dalam dua bagian oleh P. A. M. Dirac sebagai

$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \quad \text{dan} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \tag{11}$$

Gambar 23: Impuls satuan dan perkiraannya

Model sinyal

- **Fungsi eksponensial**

  Fungsi eksponensial sangat penting dalam sains dan teknik. Parameter s adalah variabel kompleks yang diberikan oleh $s = \sigma + j\omega$. Oleh karena itu,

$$e^{st} = e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t}e^{j\omega t} = e^{\sigma t}(\cos\omega t + j\sin\omega t)$$

  Jika s adalah konjugate, $s^* = \sigma - j\omega$, maka

$$e^{s^*t} = e^{(\sigma-j\omega)t} = e^{\sigma t}e^{-j\omega t} = e^{\sigma t}(\cos\omega t - j\sin\omega t)$$

  dan

$$e^{\sigma t}\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{st} + e^{s^*t})$$

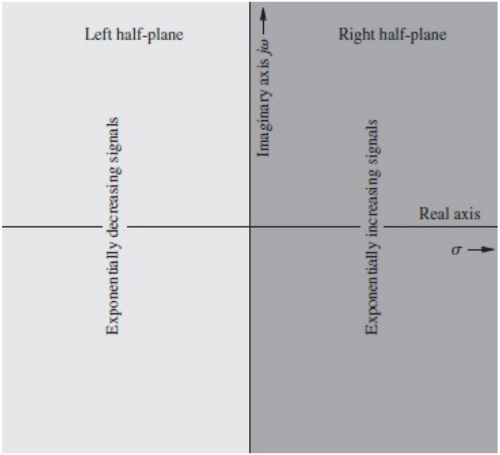
Model sinyal

Fungsi-fungsi berikut merupakan kasus khusus atau dapat dinyatakan dalam ketentuan e^{st}

- Konstanta $k = ke^{0t}$ $(s = 0)$
- eksponensial monotonik $e^{\sigma t}$ $(\omega = 0,\ s = \sigma)$
- Sinusoidal $\cos \omega t$ $(\sigma = 0,\ s = \pm j\omega)$
- Sinusoidal yang bervariasi secara eksponensial $e^{\sigma t} \cos \omega t$ $(s = \sigma \pm j\omega)$

Frekuensi kompleks s dapat dengan mudah direpresentasikan pada bidang frekuensi kompleks (s plane), seperti yang digambarkan pada Gambar 24.

Model sinyal



Gambar 24: Bidang frekuensi kompleks