Transformasi Laplace

Heri Purnawan

Disampaikan pada matakuliah **Sistem Linier**
Program Studi S-1 Teknik Elektro
Fakultas Sains dan Teknologi (FST)
Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

November 22, 2024

Email: heripurnawan@unisla.ac.id

Pokok Bahasan

- Motivasi
- Transformasi Laplace
- Invers transformasi Laplace
- Sifat-sifat transformasi Laplace
- Aplikasi transformasi Laplace
  - Respon zero-input and zero-state
  - Analisis jaringan listrik

Motivasi

- Transformasi Laplace mengubah persamaan *integral* dan *diferensial* menjadi persamaan *aljabar*.
- Transformasi Laplace dapat diaplikasikan untuk
  - Sinyal, tidak hanya sinusoidal
    Contoh: fungsi step, ramp, atau eksponensial, dan bahkan sinyal yang tidak berbentuk periodik (non-periodik) yang relevan dalam aplikasi seperti kontrol robotik dan pemrosesan sinyal.
  - Menganalisis respon *transient* (fase awal respon sistem sebelum mencapai kondisi tunak).
    Contoh: analisis getaran, rangkaian listrik (RLC), atau sistem mekanis.

Transformasi Laplace

Definisi

Diberikan $f(t)$, $t > 0$ yang merupakan sinyal (fungsi). Transformasi Laplace dari fungsi $f(t)$ didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt \tag{1}$$

untuk $s \in \mathbb{C}$ (bilangan kompleks) dimana integralnya ada.

- F adalah fungsi nilai kompleks dari bilangan kompleks.
- s disebut *variabel frekuensi (kompleks)*, dengan satuan detik^{-1}; t yang merupakan *variabel waktu* (dalam detik); st tidak memiliki unit.
- Dalam beberapa referensi, transformasi Laplace biasanya juga disebut sebagai transformasi Laplace unilateral.

Transformasi Laplace: Contoh

Fungsi eksponensial: $f(t) = e^t$

$$F(s) = \int_0^\infty e^t e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{(1-s)t}\, dt = \frac{1}{1-s} e^{(1-s)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-1}$$

asalkan kita dapat mengatakan $e^{(1-s)t} \to 0$ sebagai $t \to \infty$, yang berlaku untuk Re $s > 1$:

$$\left|e^{(1-s)t}\right| = \left|e^{-j(\text{Im } s)t}\right| \left|e^{(1-\text{Re } s)t}\right| = \underbrace{\left|e^{-j(\text{Im } s)t}\right|}_{=1} \left|e^{(1-\text{Re } s)t}\right| = e^{(1-\text{Re } s)t}$$

- integral yang mendefinisikan $F(s)$ ada untuk semua $s \in \mathbb{C}$ dengan Re $s > 1$. Kondisi ini disebut region of convergence (ROC) $F(s)$.
- Namun, rumus yang dihasilkan untuk $F(s)$ tetap masuk akal untuk semua $s \in \mathbb{C}$.

Transformasi Laplace: Contoh (lanj.)

Fungsi konstan atau fungsi unit step (undak satuan): $f(t) = u(t)$ (for $t \geq 0$)

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

asalkan kita dapat mengatakan $e^{-st} \to 0$ sebagai $t \to \infty$, yang berlaku untuk Re $s > 0$:

$$\left|e^{-st}\right| = \left|e^{-j(\text{Im } s)t}\right| \left|e^{(1-\text{Re } s)t}\right| = \underbrace{\left|e^{-j(\text{Im } s)t}\right|}_{=1} \left|e^{-(\text{Re } s)t}\right| = e^{-(\text{Re } s)t}$$

- integral yang mendefinisikan $F(s)$ ada untuk semua $s \in \mathbb{C}$ dengan Re $s > 0$.
- Namun, rumus yang dihasilkan untuk $F(s)$ tetap masuk akal untuk semua $s \in \mathbb{C}$ kecuali $s = 0$.

Transformasi Laplace: Contoh (lanj.)

Fungsi sinusoidal: $f(t) = \cos \omega t$ as

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}$$

sehingga, F dapat dicari dengan

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{1}{2}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{(-s+j\omega)t}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{(-s-j\omega)t}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(-s+j\omega)}e^{(-s+j\omega)t}\Big|_0^\infty + \frac{1}{2}\frac{1}{(-s-j\omega)}e^{(-s-j\omega)t}\Big|_0^\infty \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega}, \qquad \text{Re }(s \pm j\omega) = \text{Re } s > 0 \\
&= \frac{s}{s^2+\omega^2}, \qquad \text{Re } s > 0
\end{aligned}$$

Transformasi Laplace: Contoh (lanj.)

Pangkat dari t: $f(t) = t^n$, $(n \geq 1)$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty t^n e^{-st}\, dt \\ &= t^n \left(\frac{-e^{-st}}{s} \right) \Big|_0^\infty + \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st}\, dt \\ &= \frac{n}{s} \mathcal{L}\left\{ t^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

asalkan kita dapat mengatakan $t^n e^{-st} \to 0$ sebagai $t \to \infty$, yang berlaku untuk Re $s > 0$. Terapkan rumus rekursif, kita dapatkan

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

benar untuk Re $s > 0$; rumus terakhir ada untuk semua $s \neq 0$.

Transformasi Laplace: Impuls pada saat $t = 0$

Jika $f(t)$ mengandung impuls pada waktu $t = 0$, kita memilih untuk memasukkannya dalam integral yang mendefinisikan $F(s)$:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

Contoh: fungsi impuls, $f(t) = \delta(t)$

$$F(s) = \int_0^\infty \delta(t)e^{-st}\,dt = e^{-st}\Big|_{t=0} = 1$$

Begitu juga untuk $f(t) = \delta^k(t)$ diperoleh

$$F(s) = \int_0^\infty \delta^k(t)e^{-st}\,dt = (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} e^{-st}\Big|_{t=0} = s^k e^{-st}\Big|_{t=0} = s^k$$

Transformasi Laplace: Perkalian dengan t

Diberikan $f(t)$ yang merupakan sinyal dan didefinisikan

$$g(t) = tf(t) \text{maka } G(s) = -\frac{d}{ds}F(s)$$

Untuk memverifikasi rumus, cukup diferensialkan kedua sisinya

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

terhadap s untuk mendapatkan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}F(s) &= \int_0^\infty (-t)e^{-st} f(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty (-t) f(t) e^{-st}\, dt \\
&= -\int_0^\infty t f(t) e^{-st}\, dt = -\int_0^\infty g(t) e^{-st}\, dt = -G(s)
\end{aligned}$$

Transformasi Laplace: Perkalian dengan t (lanj.)

Contoh:

- $f(t) = e^{-t}$, $g(t) = te^{-t}$

$$\mathcal{L}\left\{te^{-t}\right\} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

- $f(t) = te^{-t}$, $g(t) = t^2e^{-t}$

$$\mathcal{L}\left\{t^2e^{-t}\right\} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{(s+1)^2} = \frac{2}{(s+1)^3}$$

- Secara umum,

$$\mathcal{L}\left\{t^k e^{-at}\right\} = \frac{k!}{(s+a)^{k+1}}$$

Latihan:
Tentukan transformasi Laplace dari $f(t) = te^{-5t}$.

Jawab: $F(s) = 1/(s+5)^2$

Invers transformasi Laplace

- Secara formal, invers transformasi Laplace diberikan oleh integral kontur kompleks yang dikenal sebagai **integral Bromwich**:

Invers transformasi Laplace

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} F(s) e^{st} \, ds \tag{2}$$

- γ adalah garis vertikal dalam bidang kompleks, yang terletak di sebelah kanan semua poles dari $F(s)$
- j adalah bilangan imajiner murni

- Namun, dalam praktiknya, invers transformasi Laplace sering kali dilakukan dengan menggunakan tabel transformasi Laplace.

Invers transformasi Laplace: Pecahan parsial

- Penguraian Pecahan Parsial
  - Untuk menemukan invers transformasi Laplace dari fungsi yang rumit.
  - Mengubah fungsi tersebut menjadi penjumlahan dari beberapa suku yang lebih sederhana.
  - Setiap suku memiliki transformasi Laplace yang telah diketahui.
- Jika $F_1(s) = N(s)/D(s)$, di mana derajat $N(s)$ kurang dari derajat $D(s)$, maka penguraian pecahan parsial dapat dibuat. Jika derajat $N(s)$ lebih besar dari atau sama dengan derajat $D(s)$, maka $N(s)$ harus dibagi dengan $D(s)$ secara berturut-turut sampai memiliki sisa yang derajat pembilangnya kurang dari penyebutnya.
- Contoh:

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 6s + 7}{s^2 + s + 5} \rightarrow F(s) = s + 1 + \frac{2}{s^2 + s + 5}$$

Invers transformasi Laplace: Pecahan parsial (lanj.)

- Terdapat tiga kasus bagaimana F bisa diperluas menjadi pecahan parsial.
  - Kasus 1: Akar penyebut $F(s)$ real dan berbeda
    Contoh:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \to \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

diperoleh: $K_1 = 2$ dan $K_2 = -2$, maka

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \to \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}\right]$$

Berdasarkan Tabel 1, maka

$$f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

Invers transformasi Laplace: Pecahan parsial (lanj.)

- Terdapat tiga kasus bagaimana F bisa diperluas menjadi pecahan parsial.
  - Kasus 2: Akar penyebut $F(s)$ real dan kembar
    Contoh:
    $$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$$
    maka
    $$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{s+2}$$
    diperoleh: $K_1 = 2, K_2 = -2$, dan $K_3 = -2$, sehingga
    $$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{s+2}$$
    Berdasarkan tabel transformasi Laplace, maka
    $$f(t) = 2e^{-t} - 2te^{-2t} - 2e^{-2t}$$

Invers transformasi Laplace: Pecahan parsial (lanj.)

- Terdapat tiga kasus bagaimana F bisa diperluas menjadi pecahan parsial.
  - Kasus 3: Akar penyebut $F(s)$ imajiner
    Contoh:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} \rightarrow \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+2s+5}$$

diperoleh: $K_1 = \frac{3}{5}, K_2 = -\frac{3}{5}$, dan $K_3 = -\frac{6}{5}$ maka

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\frac{s+2}{s^2+2s+5}$$

Berdasarkan Tabel transformasi Laplace, maka

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

Invers transformasi Laplace: Latihan

Latihan:
Tentukan invers transformasi Laplace dari

$$F(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+3)^2}$$

Jawab:

$$f(t) = \frac{5}{9} - 5e^{-2t} + \frac{10}{3}te^{-3t} + \frac{40}{9}e^{-3t}$$

Sifat transformasi Laplace

- Kelinieran

$$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s) \tag{3}$$

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s) \tag{4}$$

Bukti:

- Pembuktian untuk Pers. (3)

$$\mathcal{L}[kf(t)] = \int_0^\infty kf(t)e^{-st}\ dt = k\int_0^\infty f(t)e^{-st}\ dt = kF(s)$$

- Pembuktian untuk Pers. (4)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] &= \int_0^\infty (f_1(t) + f_2(t))e^{-st}\ dt\\ &= \int_0^\infty f_1(t)e^{-st} + f_2(t)e^{-st}\ dt\\ &= \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}\ dt + \int_0^\infty f_2(t)e^{-st}\ dt = F_1(s) + F_2(s)\end{aligned}$$

Sifat transformasi Laplace (lanj.)

- Pergeseran frekuensi (Buktikan!)

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a) \tag{5}$$

- Pergeseran waktu (Buktikan!)

$$\mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-sT}F(s) \tag{6}$$

- Penskalaan (Buktikan!)

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{7}$$

- Diferensiasi (Buktikan!)

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{k-1}(0) \tag{8}$$

- Integrasi (Buktikan!)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} \tag{9}$$

Sifat transformasi Laplace: Contoh diferensiasi

Contoh: Diketahui persamaan diferensial berikut, selesaikan $y(t)$ jika semua kondisi awal adalah nol. Gunakan transformasi Laplace.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 12\frac{dy(t)}{dt} + 32y(t) = 32u(t) \tag{10}$$

Jawab: Gunakan fungsi *unit step* dan sifat diferensiasi pada Pers. (8), maka transformasi Laplace dari Pers. (10) adalah

$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 32Y(s) = \frac{32}{s} \tag{11}$$

Penyelesaian $Y(s)$ menghasilkan

$$Y(s) = \frac{32}{s(s^2 + 12s + 32)} = \frac{32}{s(s+4)(s+8)}$$

Sifat transformasi Laplace: Contoh diferensiasi (lanj.)

Mengacu pada Kasus 1, maka

$$Y(s) = \frac{32}{s(s+4)(s+8)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+4} + \frac{K_3}{s+8} \tag{12}$$

Diperoleh nilai $K_1 = 1$, $K_2 = -2$, dan $K_3 = 1$, sehingga

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+4} + \frac{1}{s+8}$$

Dengan invers transformasi Laplace, maka diperoleh

$$y(t) = (1 - 2e^{-4t} + e^{-8t})u(t)$$