Integral

Heri Purnawan

Kalkulus 1
Fakultas Teknik
Universitas Islam Lamongan

February 5, 2022

Integral

Meliputi:

Integral

Meliputi:

1. Anti Turunan.

Integral

Meliputi:

1. Anti Turunan.
2. Luas Sebagai Limit Jumlahan: Definisi Integral Tertentu

Integral

Meliputi:

1. Anti Turunan.
2. Luas Sebagai Limit Jumlahan: Definisi Integral Tertentu
3. Teorema Fundamental Kalkulus 1

Integral

Meliputi:

1. Anti Turunan.
2. Luas Sebagai Limit Jumlahan: Definisi Integral Tertentu
3. Teorema Fundamental Kalkulus 1
4. Teorema Fundamental Kalkulus 2

Referensi:

Dosen-Dosen Departemen Matematika ITS (2018)
Seri Buku Ajar Matematika 1
Departemen Matematika, ITS

Anti Turunan

Definisi 5.1.1

Suatu fungsi F disebut anti-derivatif (anti-turunan) dari fungsi f pada suatu interval jika $F'(x) = f(x)$ untuk setiap x pada interval tersebut.

Contoh 5.1.1 Misal fungsi $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ adalah anti-turunan dari $f(x) = x^2$ pada interval $(-\infty, +\infty)$, sebab untuk setiap $x \in (-\infty, +\infty)$ berlaku

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3\right] = x^2 = f(x).$$

Namun, $\frac{1}{3}x^3$ bukanlah satu-satunya anti-turunan dari f.

Anti Turunan

Teorema 5.1.2

Jika $F(x)$ anti-turunan dari $f(x)$ pada interval tertentu, maka $F(x) + c$ dengan c sebarang konstanta real juga merupakan anti-turunan dari $f(x)$ pada interval tersebut.

Dengan Teorema 5.1.2 dapat dipastikan bahwa fungsi-fungsi

$$\frac{1}{3}x^3, \quad \frac{1}{3}x^3 + 5, \quad \frac{1}{3}x^3 + \sqrt{3}, \quad \frac{1}{3}x^3 + \pi$$

semuanya adalah anti-turunan dari $f(x) = x^2$.

Anti Turunan

Definisi 5.1.3

Proses mencari anti-turunan disebut *anti-diferensiasi* atau *integrasi* yang dinotasikan sebagai

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

dengan c suatu konstanta real sebarang.

Anti Turunan

Table: Rumus Integral

Rumus Diferensiasi	Rumus Integrasi
$\frac{d}{dx}[x] = 1$	$\int 1 \ dx = x$
$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right] = x^n$	$\int x^n \ dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$	$\int \cos x \ dx = \sin x$
$\frac{d}{dx}[-\cos x] = \sin x$	$\int \sin x \ dx = -\cos x$
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x \ dx = \tan x$
$\frac{d}{dx}[-\cot x] = \csc^2 x$	$\int \csc^2 x \ dx = -\cot x$
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x \ dx = \sec x$
$\frac{d}{dx}[-\csc x] = \csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x \ dx = -\csc x$

Anti Turunan

Teorema 5.1.4

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ fungsi yang mempunyai anti-turunan dan c adalah konstanta sebarang, maka

1. $\int cf(x)\ dx = c\int f(x)\ dx$.
2. $\int [f(x)+g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$.
3. $\int [f(x)-g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx - \int g(x)\ dx$.

Contoh 5.1.2 Dapatkan integral-integral berikut ini.

1. $\int x^3\ dx$.
2. $\int \frac{5}{\sqrt[3]{x}}\ dx$.
3. $\int x^4 + \sin x\ dx$.
4. $\int (\sec^2 x - \cos x)\ dx$.

Definisi Integral Tertentu

Definisi 5.2.1 Luas di bawah kurva

Misal $[a, b]$ dibagi menjadi n selang bagian dengan lebar $\triangle x_1, \triangle x_2, \cdots, \triangle x_n$, dan lebar selang terbesar disebut *ukuran mesh* dari partisi tersebut dan dinotasikan dengan $max \triangle x_k$ yang dibaca "maksimum dari $\triangle x_k$". Jika suatu fungsi f kontinu pada $[a, b]$ dan jika $f(x) \geq 0$ untuk semua x pada $[a, b]$, maka luas di bawah kurva $y = f(x)$ dan di atas sumbu-x sepanjang selang $[a, b]$ didefinisikan sebagai

$$L = \lim_{max \triangle x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \triangle x_k \qquad (1)$$

dengan x_k^* suatu titik sebarang pada selang bagian ke-k dan jumlahan pada Persamaan (1) disebut *jumlahan Riemenn*.

Definisi Integral Tertentu

Contoh 5.2.1 Misalkan suatu fungsi $f(x) = x$ yang didefinisikan pada selang $[0,1]$. Hitunglah pendekatan luasan dari daerah di bawah fungsi $f(x)$ dan di atas sumbu-x, jika selang $[0,1]$ dibagi menjadi n bagian, $\triangle x_1 = \triangle x_2 = \cdots = \triangle x_n = \frac{1}{n}$ dan $x_k^* = \frac{k}{n}$ untuk $k = 1, 2, \cdots, n$.

Penyelesaian: Dengan menggunakan Definisi 5.2.1 dapat dituliskan

$$L = \lim_{max \triangle x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \triangle x_k = \lim_{\frac{1}{n} \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \frac{n^2 + n}{2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Definisi Integral Tertentu

Definisi 5.2.2 Integral Riemann

Jika fungsi f terdefinisi pada interval tertutup $[a, b]$ maka f dikatakan terintegral (Riemann) pada $[a, b]$ jika

$$\lim_{max \triangle x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \triangle x_k$$

ada dan tidak bergantung pada pemilihan partisi atau pemilihan titik x_k^*. Jika f terintegral pada $[a, b]$ maka didefinisikan integral tertentu dari f untuk $x = a$ sampai $x = b$ dengan

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{max \triangle x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \triangle x_k \qquad (2)$$

Definisi Integral Tertentu

Definisi 5.2.3

1. Jika a berada dalam domain f, maka didefinisikan
$$\int_a^a f(x)\ dx = 0$$
2. Jika f terintegral pada $[a, b]$, maka didefinisikan
$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx$$

Definisi Integral Tertentu

Teorema 5.2.4 Sifat-sifat integral tertentu

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ fungsi yang dapat diintegralkan dan c adalah konstanta sebarang, maka

1. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\ dx = c\int_a^b f(x)\ dx.$
2. $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.$
3. $\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b g(x)\ dx.$

Definisi Integral Tertentu

Contoh 5.2.2 Dapatkan $\int_1^4 [2f(x) + g(x)] \; dx$ jika $\int_1^4 f(x) \; dx = 2$ dan $\int_1^4 g(x) \; dx = 10$.

Penyelesaian: Berdasarkan Teorema 5.2.4 (1) dan (2) didapatkan

$$\begin{aligned}\int_1^4 [2f(x) + g(x)] \; dx &= \int_1^4 2f(x) \; dx + \int_1^4 g(x) \; dx \\ &= 2\int_1^4 f(x) \; dx + \int_1^4 g(x) \; dx \\ &= 2 \cdot 2 + 10 = 14.\end{aligned}$$

Definisi Integral Tertentu

Teorema 5.2.5

Jika f terintegral pada suatu selang tertutup dan memuat tiga titik a, b dan c, maka

$$\int_a^c f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx$$

tidak bergantung pada urutan dari titik-titik tersebut.

Definisi Integral Tertentu

Contoh 5.2.3 Hitunglah nilai dari $\int_{-2}^{2} f(x)\ dx$ jika

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq 0 \\ f_2(x), & x > 0 \end{cases},$$

$$\int_{-2}^{0} f_1(x)\ dx = 1 \text{ dan } \int_{0}^{2} f_2(x)\ dx = 2.$$

Penyelesaian: Berdasarkan Teorema 5.2.5 didapatkan

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} f(x)\ dx &= \int_{-2}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{2} f(x)\ dx \\ &= \int_{-2}^{0} f_1(x)\ dx + \int_{0}^{2} f_2(x)\ dx \\ &= 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

Soal Latihan Integral Tertentu

1. Berapakah nilai dari $\int_{-2}^{-1} x\ dx$ dengan menggunakan rumus luas dari geometri bidang?
2. Berapakah nilai dari $\int_{0}^{3} |x-2|\ dx$ dengan menggunakan rumus luas dari geometri bidang?
3. Berapakah nilai dari $\int_{-3}^{0} \left(2+\sqrt{9-x^2}\right)\ dx$ dengan menggunakan rumus luas dari geometri bidang?
4. Dapatkan $\int_{-1}^{2} [f(x)+2g(x)]\ dx$ jika $\int_{-1}^{2} f(x)\ dx = 5$ dan $\int_{-1}^{2} g(x)\ dx = -3$.

Teorema Fundamental Kalkulus I

Teorema 5.3.1 (Teorema Fundamental Kalkulus I)

Jika f kontinu pada interval $[a, b]$ dan F adalah anti-derivatif dari f pada interval $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

atau biasanya dituliskan sebagai

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)|_a^b$$

Teorema Fundamental Kalkulus I

Contoh 5.3.1 Hitunglah

$$\int_0^1 x^4 \, dx.$$

Penyelesaian: anti-turunan dari x^4 adalah $\frac{1}{5}x^5$, maka

$$\int_0^1 x^4 \, dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}(1)^5 - \frac{1}{5}(0)^5 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}.$$

Soal Latihan

1. Hitunglah nilai $\int_1^2 \frac{1}{x^6} \, dx$ menggunakan Teorema Fundamental Kalkulus 1.
2. Hitunglah nilai $\int_4^9 2y\sqrt{y} \, dy$ menggunakan Teorema Fundamental Kalkulus I.

Teorema Fundamental Kalkulus II

Teorema 5.4.1 (Teorema Fundamental Kalkulus II)

Jika f kontinu pada selang I dan misal a sebarang titik pada I. Jika F didefinisikan dengan

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

maka $F'(x) = f(x)$ pada setiap titik x pada interval I.

Contoh 5.4.1 Misal $F(x) = \int_2^x \sqrt{t^2+12}\ dt$, dapatkan $F(2), F'(2)$ dan $F''(2)$.

Penyelesaian: Berdasarkan Teorema 5.4.1 didapatkan $F(2) = 0$. Kemudian berdasarkan Teorema 5.4.1 didapatkan $F'(x) = \sqrt{x^2+12}$, sehingga juga didapat $F''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+12}} \cdot 2x$. Jadi, $F'(2) = 4$ dan $F''(2) = \frac{1}{2}$.

Teorema Fundamental Kalkulus II

Soal Latihan

1. $\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{1+\sqrt{t}}\ dt = \cdots$
2. $\frac{d}{dx}\int_1^x sin(\sqrt{t})\ dt = \cdots$
3. Didefinsikan $F(x)$ dengan $F(x) = \int_1^x 2(t^3+1)\ dt$.
   (a). Gunakan Teorema Fundamental Kalkulus II untuk mendapatkan $F'(x)$.
   (b). Periksa hasil pada bagian (a) dengan mengintegralkan kemudian menurunkan.
4. Misal $F(x) = \int_2^x 2\sqrt{3t^2+1}\ dt$, dapatkan $F(2), F'(2)$ dan $F''(2)$.
5. Misal $F(x) = \int_0^x \frac{2\cos t}{t^2+3}\ dt$, dapatkan $F(0), F'(0)$ dan $F''(0)$.