

Matriks

Heri Purnawan

Disampaikan pada matakuliah **Kalkulus Dasar**
Program Studi S-1 Kesehatan Lingkungan
Fakultas Ilmu Kesehatan
Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

December 17, 2024

Email: heripurnawan@unisla.ac.id

Pokok Bahasan

- ◀ Matriks dan Operasinya
- ◀ Matriks Diagonal, Segitiga dan Simetris
- ◀ Sistem Persamaan Linear (**tidak dibahas**)
- ◀ Penyelesaian Sistem Persamaan Linear (**tidak dibahas**)
- ◀ Mencari Determinan dan Invers Matriks (**tidak dibahas**)

Matriks dan Operasinya

Definisi: Matriks

Matriks adalah susunan bilangan berbentuk segiempat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu dinamakan anggota matriks tersebut.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad [2 \quad -1 \quad 5], \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Matriks A mempunyai ukuran $m \times n$, maka matriks tersebut dapat ditulis

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

atau dapat dituliskan

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = (a_{ij})$$

Definisi: 2 Matriks Sama

Dua matriks dikatakan sama jika kedua matriks tersebut mempunyai ukuran yang sama dan anggota yang berpadanan juga sama.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Definisi: Penjumlahan dan Pengurangan 2 Matriks

Jika dua matriks A dan B mempunyai ukuran yang sama, maka kedua matriks tersebut dapat dijumlahkan atau dikurangkan. Untuk menambahkan atau mengurangi kedua matriks tersebut anggota yang berpadanan dijumlahkan atau dikurangkan. Matriks yang tidak mempunyai ukuran yang sama tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Hitunglah: a. $A + B$, b. $A - B$, c. $C - A$

Definisi: Perkalian skalar dan Matriks

Jika A sebarang matriks dan c sebarang skalar, maka hasil kali skalar dan matriks cA adalah mengalikan semua anggota A dengan skalar c .

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Hitunglah: a. $2A$, b. $3C$ c. $2A - 3B$ d. $2C - 3B$.

Definisi: Perkalian Matriks

Dua matriks A dan B dapat dikalikan, jika matriks A mempunyai $r \times n$, dan matriks B harus mempunyai ukuran $n \times l$ maka matriks hasil-kalinya mempunyai ukuran $r \times l$ dengan anggota ke- ij berasal dari perkalian baris ke- i dari matriks A dengan kolom ke- j dari matriks B .

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Hitunglah: a. AB b. BA c. AC d. CA

Definisi: Matriks Transpose

Matriks transpose dari matriks A ditulis A^T yang anggotanya merupakan anggota A dengan mengubah baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Hitunglah: a. A^T b. B^T c. C^T d. $(C^T)^T$

Definisi: Trace Matriks

Jika matriks A persegi, maka **trace** A dinyatakan dengan $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah anggota-anggota pada diagonal utama matriks A .

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Hitunglah: a. $tr(A)$ b. $tr(B)$ c. $tr(C)$ d. $tr(AB)$

Matriks Diagonal, Segitiga, Simetris

Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang semua anggotanya nol semua kecuali pada diagonal utama yang semuanya tidak harus nol.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis

$$A = \text{diag}(3, -7) \quad B = \text{diag}(1, 1, 1) \quad C = \text{diag}(1, 4, 0, -3)$$

Matriks Segitiga

Ada dua macam matriks segitiga (atas dan bawah), Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang semua anggotanya dibawah diagonal utama semuanya nol, sedangkan matriks segitiga bawah kebalikannya.

- ◀ Matriks segitiga atas $A = [a_{ij}]$ jika dan hanya jika $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$,
sedangkan
- ◀ Matriks segitiga bawah $B = [b_{ij}]$ jika dan hanya jika $b_{ij} = 0$ untuk $i < j$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks Simetris

Matriks simetris adalah matriks persegi A yang $A^T = A$

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Contoh Penerapan

Contoh 1: Pemodelan Penyebaran Polusi Udara

Konsentrasi polutan di suatu daerah ditentukan oleh persamaan:

$$C = A \cdot x$$

dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix}$$

dimana:

- ◀ A adalah matriks pengaruh sumber polusi pada titik-titik pemantauan.
- ◀ x adalah jumlah emisi polutan dari dua pabrik.
- ◀ C adalah konsentrasi polutan yang diukur di 3 titik pemantauan.

Soal: Hitung nilai konsentrasi polutan C pada tiga titik pemantauan.

Contoh 2: Analisis Kualitas Air

Diberikan data kualitas air dari 3 sungai yang diukur berdasarkan **pH**, **BOD** (*Biochemical Oxygen Demand*), dan **COD** (*Chemical Oxygen Demand*):

$$A = \begin{bmatrix} 6.8 & 3.5 & 15 \\ 7.2 & 4.0 & 20 \\ 6.5 & 3.8 & 18 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix}$$

dimana:

- ◀ Baris pertama adalah kualitas air **Sungai 1**.
- ◀ Baris kedua adalah kualitas air **Sungai 2**.
- ◀ Baris ketiga adalah kualitas air **Sungai 3**.

Soal:

- a. Hitung rata-rata **pH**, **BOD**, dan **COD** dari ketiga sungai.
- b. Jika kualitas air dinormalisasi dengan faktor matriks diagonal $D = \text{diag}(1.2, 0.8, 0.5)$, hitung matriks baru $A' = AD$