Sistem Bilangan Real

Heri Purnawan

Departemen Teknik Elektro
Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

Disampaikan pada Matakuliah Kalkulus Dasar
Program Studi Kesehatan Lingkungan, UNISLA

September 9, 2024

Perkenalan Singkat

- Nama Lengkap: Heri Purnawan
- Program Studi: Teknik Elektro, Universitas Islam Lamongan (UNISLA)
- Riwayat Pendidikan:
  - S-1 Matematika ITS (2011 - 2015)
  - S-2 Matematika ITS (2016 - 2018)
  - S-3 Matematika ITS (2020 - 2024)
- Kontak: +62 82140797329

Download Materi

https://github.com/heripurnawan/KesLing-Calculus.git

Penilaian:

- Kehadiran : 25%
- Tugas : 25%
- Quiz 1 : 10%
- Quiz 2 : 10%
- ETS : 15%
- EAS : 15%

Materi Pembelajaran:

- Sistem Bilangan Real
- Fungsi
- Limit dan Kekontinuan
- Diferensiasi/Turunan
- Teknik Integrasi

Referensi:

Dosen-Dosen Departemen Matematika ITS (2018)
Seri Buku Ajar Matematika 1
Departemen Matematika, ITS

Bilangan Real

- Himpunan bilangan asli, dinotasikan dengan $\mathbb{N}$, yaitu
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$
- Himpunan bilangan bulat, dinotasikan dengan $\mathbb{Z}$, yaitu
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$
- Himpunan bilangan rasional, dinotasikan dengan $\mathbb{Q}$ yang merupakan bentuk pembagian bilangan bulat $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$. Contohnya:
$$\frac{2}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{8}{1}, \quad -\frac{3}{7} (= \frac{-3}{7} = \frac{3}{-7}), \cdots$$
- Himpunan bilangan irasional adalah himpunan bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam pembagian bilangan bulat. Jika p bilangan irasional, maka $p \neq \frac{a}{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$. Contohnya:
$$\sqrt{2}, \quad \pi, \quad \sqrt[3]{5}, \quad 1 + \sqrt{2}, \cdots$$

Pertidaksamaan

Penulisan pertidaksamaan $a \leq b$ dapat diartikan dengan $a < b$ atau $a = b$, sedangkan $a \geq b$ adalah $a > b$ atau $a = b$.

Teorema 1.1.1 Sifat-Sifat Pertidaksamaan

Diberikan bilangan-bilangan real a, b, c, dan d:

1. Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$.
2. Jika $a < b$, maka $a + c < b + c$ dan $a - c < b - c$.
3. Jika $a < b$, maka $ac < bc$ untuk $c > 0$ dan $ac > bc$ untuk $c < 0$.
4. Jika $a < b$ dan $c < d$, maka $a + c < b + d$.
5. Jika a dan b keduanya positif atau keduanya negatif, dan $a < b$, maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Penulisan selang tertutup dari a ke b ditulis dengan $[a, b]$, dan selang terbuka dari a ke b ditulis dengan (a, b), didefinisikan dengan:

Contoh Soal

Contoh 1.1.1

Dapatkan penyelesaian dari pertidaksamaan $4 + 5x \leq 3x - 7$.

Jawab:

$$\begin{aligned} 4 + 5x &\leq 3x - 7 && \text{[diketahui]} \\ 5x &\leq 3x - 11 && \text{[kedua sisi dikurangi } 4\text{]} \\ 2x &\leq -11 && \text{[kedua sisi dikurangi } 3x\text{]} \\ x &\leq -\tfrac{11}{2} && \text{[kedua sisi dikalikan } \tfrac{1}{2}\text{]} \end{aligned}$$

Contoh 1.1.2

Selesaikan $\frac{2x-5}{x-2} < 1$.

Nilai Mutlak

Definisi 1.2.1 Nilai Mutlak

Nilai mutlak suatu bilangan real x, dituliskan dengan $|x|$, didefinisikan dengan

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0, \\ -x, & \text{jika } x < 0. \end{cases}$$

Contoh 1.2.1

$|6| = 6$ $\quad$ $|-2| = -(-2) = 2$ $\quad$ $|0| = 0$

Contoh 1.2.2

Selesaikan persamaan nilai mutlak dari $|7x - 4| = 2$

Jawab: Berdasarkan Definisi 1.2.1, maka persamaan tersebut terdiri dari dua persamaan, yaitu

$$\begin{array}{lrll}
(1) & 7x - 4 = 2, & \text{untuk } 7x - 4 \geq 0, & \\
 & 7x = 6, & \text{untuk } 7x \geq 4, & \\
 & x = \frac{6}{7}, & \text{untuk } x \geq \frac{4}{7}, & \text{memenuhi} \\
(2) & -(7x - 4) = 2, & \text{untuk } 7x - 4 < 0, & \\
 & -7x = -2, & \text{untuk } 7x < 4, & \\
 & x = \frac{2}{7}, & \text{untuk } x < \frac{4}{7}, & \text{memenuhi}
\end{array}$$

Contoh 1.2.3

Selesaikan persamaan $|3x - 2| = |5x + 4|$.

Teorema 1.2.2 Nilai Akar Kuadrat

Untuk setiap bilangan real x, berlaku

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Teorema 1.2.3 Sifat Dasar Nilai Mutlak

Jika a dan b bilangan real, maka berlaku:

(a)	$\|a\| \geq 0$	Nilai mutlak suatu bilangan selalu tak negatif.
(b)	$\|-a\| = \|a\|$	suatu bilangan dan negatifnya mempunyai nilai mutlak yang sama.
(c)	$\|ab\| = \|a\|\|b\|$	Nilai mutlak dari perkalian sama dengan perkalian nilai mutlak.
(d)	$\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{\|a\|}{\|b\|}$, $b \neq 0$	Nilai mutlak dari pembagian sama dengan pembagian nilai mutlak.

Teorema 1.2.4 Rumus Jarak

Jika P dan Q adalah titik-titik pada garis koordinat yang masing-masing dengan koordinat p dan q, maka jarak d antara P dan Q adalah

$$d = |q - p|$$

Teorema 1.2.5 Pertidaksamaan Segitiga

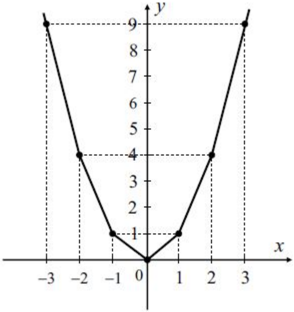
Jika a dan b bilangan real, maka

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Grafik Persamaan

Definisi 1.3.1 Grafik Suatu Persamaan

Grafik suatu persamaan yang menghubungkan dua peubah x dan y adalah himpunan semua titik pada bidang-xy yang koordinat-koordinatnya merupakan anggota himpunan penyelesaian persamaan tersebut.



Contoh grafik persamaan $y = x^2$

x	$y = x^2$	(x, y)
-2	4	$(-2, 4)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	4	$(2, 4)$
3	9	$(3, 9)$

Garis, Persamaan Linier

Definisi 1.4.1 Kemiringan Garis atau *Gradient*

Misal $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ titik-titik pada bidang koordinat. Kemiringan garis yang melalui P dan Q didefinisikan dengan

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Teorema 1.4.2 Hubungan Dua Garis

Jika garis l_1 mempunyai kemiringan m_1 dan garis l_2 mempunyai kemiringan m_2, maka

- l_1 sejajar l_2 jika dan hanya jika $m_1 = m_2$.
- l_1 tegak lurus terhadap l_2 jika dan hanya jika $m_1 m_2 = -1$.

Bentuk-Bentuk Persamaan Garis

1. $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ adalah persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan titik (x_2, y_2).
2. $y - y_1 = m(x - x_1)$ adalah persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan mempunyai kemiringan m.
3. $y = ax + b$ adalah persamaan garis dengan kemiringan a dan memotong sumbu$-y$ di titik $(0, b)$.
4. $x = a$ adalah persamaan garis vertikal melalui titik $(a, 0)$.
5. $y = b$ adalah persamaan garis horizontal melalui titik $(0, b)$.
6. $ax + by + c = 0$ dengan $a \neq 0, b \neq 0$, dan c konstanta, adalah persamaan umum garis atau persamaan linier dalam x dan y.

Contoh 1.4.1

Dapatkan kemiringan garis yang melalui:

1. titik $(2, 1)$ dan $(4, 5)$
   Jawab: $m = \frac{5-1}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$
2. titik $(-1, 1)$ dan $(3, -3)$
   Jawab: $m = \frac{-3-1}{3-(-1)} = \frac{-4}{4} = -1$

Contoh 1.4.2

Diketahui l_1 garis dengan kemiringan $m_1 = \frac{3}{2}$, dan garis l_2 berpotongan tegak lurus dengan l_1 di titik $(4, -1)$. Persamaan garis l_2 adalah $\cdots$

Jawab:

Karena garis l_1 dan garis l_2 tegak lurus, maka $m_1 m_2 = -1$. Jadi, $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$.

Persamaan garis l_2 adalah $y - (-1) = -\frac{2}{3}(x - 4) \;\rightarrow\; y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$