

Sistem Bilangan Real

Heri Purnawan

Departemen Teknik Elektro
Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

Disampaikan pada Matakuliah Kalkulus Dasar
Program Studi Kesehatan Lingkungan, UNISLA

September 9, 2024

Perkenalan Singkat

- ◀ Nama Lengkap: Heri Purnawan
- ◀ Program Studi: Teknik Elektro, Universitas Islam Lamongan (UNISLA)
- ◀ Riwayat Pendidikan:
 - S-1 Matematika ITS (2011 - 2015)
 - S-2 Matematika ITS (2016 - 2018)
 - S-3 Matematika ITS (2020 - 2024)
- ◀ Kontak: +62 82140797329

Download Materi

Penilaian:

- ◀ Kehadiran : 25%
- ◀ Tugas : 25%
- ◀ Quiz 1 : 10%
- ◀ Quiz 2 : 10%
- ◀ ETS : 15%
- ◀ EAS : 15%

Materi Pembelajaran:

- ◀ Sistem Bilangan Real
- ◀ Fungsi
- ◀ Limit dan Kekontinuan
- ◀ Diferensiasi/Turunan
- ◀ Teknik Integrasi

Referensi:



Dosen-Dosen Departemen Matematika ITS (2018)

Seri Buku Ajar Matematika 1

Departemen Matematika, ITS

Bilangan Real

- ◀ Himpunan bilangan asli, dinotasikan dengan \mathbb{N} , yaitu

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

- ◀ Himpunan bilangan bulat, dinotasikan dengan \mathbb{Z} , yaitu

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

- ◀ Himpunan bilangan rasional, dinotasikan dengan \mathbb{Q} yang merupakan bentuk pembagian bilangan bulat $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$.

Contohnya:

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{8}{1}, \quad -\frac{3}{7} (= \frac{-3}{7} = \frac{3}{-7}), \dots$$

- ◀ Himpunan bilangan irasional adalah himpunan bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam pembagian bilangan bulat. Jika p bilangan irasional, maka $p \neq \frac{a}{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$. Contohnya:

$$\sqrt{2}, \quad \pi, \quad \sqrt[3]{5}, \quad 1 + \sqrt{2}, \dots$$

Pertidaksamaan

Penulisan pertidaksamaan $a \leq b$ dapat diartikan dengan $a < b$ atau $a = b$, sedangkan $a \geq b$ adalah $a > b$ atau $a = b$.

Teorema 1.1.1 Sifat-Sifat Pertidaksamaan

Diberikan bilangan-bilangan real a , b , c , dan d :

- 1 Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$.
- 2 Jika $a < b$, maka $a + c < b + c$ dan $a - c < b - c$.
- 3 Jika $a < b$, maka $ac < bc$ untuk $c > 0$ dan $ac > bc$ untuk $c < 0$.
- 4 Jika $a < b$ dan $c < d$, maka $a + c < b + d$.
- 5 Jika a dan b keduanya positif atau keduanya negatif, dan $a < b$, maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Penulisan selang tertutup dari a ke b ditulis dengan $[a, b]$, dan selang terbuka dari a ke b ditulis dengan (a, b) , didefinisikan dengan:

Contoh Soal

Contoh 1.1.1

Dapatkan penyelesaian dari pertidaksamaan $4 + 5x \leq 3x - 7$.

Jawab:

$$4 + 5x \leq 3x - 7 \quad [\text{diketahui}]$$

$$5x \leq 3x - 11 \quad [\text{kedua sisi dikurangi } 4]$$

$$2x \leq -11 \quad [\text{kedua sisi dikurangi } 3x]$$

$$x \leq -\frac{11}{2} \quad [\text{kedua sisi dikalikan } \frac{1}{2}]$$

Contoh 1.1.2

Selesaikan $\frac{2x-5}{x-2} < 1$.

Nilai Mutlak

Definisi 1.2.1 Nilai Mutlak

Nilai mutlak suatu bilangan real x , dituliskan dengan $|x|$, didefinisikan dengan

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0, \\ -x, & \text{jika } x < 0. \end{cases}$$

Contoh 1.2.1

$$|6| = 6$$

$$|-2| = -(-2) = 2$$

$$|0| = 0$$

Contoh 1.2.2

Selesaikan persamaan nilai mutlak dari $|7x - 4| = 2$

Jawab: Berdasarkan Definisi 1.2.1, maka persamaan tersebut terdiri dari dua persamaan, yaitu

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 7x - 4 = 2, \quad \text{untuk } 7x - 4 \geq 0, \\
 & 7x = 6, \quad \text{untuk } 7x \geq 4, \\
 & x = \frac{6}{7}, \quad \text{untuk } x \geq \frac{4}{7}, \text{ memenuhi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & -(7x - 4) = 2, \quad \text{untuk } 7x - 4 < 0, \\
 & -7x = -2, \quad \text{untuk } 7x < 4, \\
 & x = \frac{2}{7}, \quad \text{untuk } x < \frac{4}{7}, \text{ memenuhi}
 \end{aligned}$$

Contoh 1.2.3

Selesaikan persamaan $|3x - 2| = |5x + 4|$.

Teorema 1.2.2 Nilai Akar Kuadrat

Untuk setiap bilangan real x , berlaku

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Teorema 1.2.3 Sifat Dasar Nilai Mutlak

Jika a dan b bilangan real, maka berlaku:

- (a) $|a| \geq 0$ Nilai mutlak suatu bilangan selalu tak negatif.
- (b) $|-a| = |a|$ suatu bilangan dan negatifnya mempunyai nilai mutlak yang sama.
- (c) $|ab| = |a||b|$ Nilai mutlak dari perkalian sama dengan perkalian nilai mutlak.
- (d) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$ Nilai mutlak dari pembagian sama dengan pembagian nilai mutlak.

Teorema 1.2.4 Rumus Jarak

Jika P dan Q adalah titik-titik pada garis koordinat yang masing-masing dengan koordinat p dan q , maka jarak d antara P dan Q adalah

$$d = |q - p|$$

Teorema 1.2.5 Pertidaksamaan Segitiga

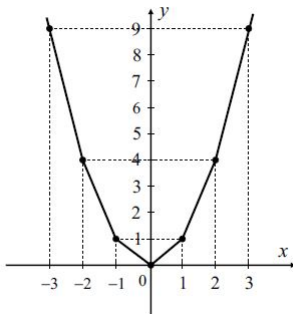
Jika a dan b bilangan real, maka

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Grafik Persamaan

Definisi 1.3.1 Grafik Suatu Persamaan

Grafik suatu persamaan yang menghubungkan dua peubah x dan y adalah himpunan semua titik pada bidang- xy yang koordinat-koordinatnya merupakan anggota himpunan penyelesaian persamaan tersebut.



Contoh grafik persamaan $y = x^2$

| x | $y = x^2$ | (x, y) |
|-----|-----------|-----------|
| -2 | 4 | $(-2, 4)$ |
| -1 | 1 | $(-1, 1)$ |
| 0 | 0 | $(0, 0)$ |
| 1 | 1 | $(1, 1)$ |
| 2 | 4 | $(2, 4)$ |
| 3 | 9 | $(3, 9)$ |

Garis, Persamaan Linier

Definisi 1.4.1 Kemiringan Garis atau *Gradient*

Misal $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ titik-titik pada bidang koordinat. Kemiringan garis yang melalui P dan Q didefinisikan dengan

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Teorema 1.4.2 Hubungan Dua Garis

Jika garis l_1 mempunyai kemiringan m_1 dan garis l_2 mempunyai kemiringan m_2 , maka

- ◀ l_1 sejajar l_2 jika dan hanya jika $m_1 = m_2$.
- ◀ l_1 tegak lurus terhadap l_2 jika dan hanya jika $m_1 m_2 = -1$.

Bentuk-Bentuk Persamaan Garis

- 1 $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ adalah persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan titik (x_2, y_2) .
- 2 $y - y_1 = m(x - x_1)$ adalah persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan mempunyai kemiringan m .
- 3 $y = ax + b$ adalah persamaan garis dengan kemiringan a dan memotong sumbu- y di titik $(0, b)$.
- 4 $x = a$ adalah persamaan garis vertikal melalui titik $(a, 0)$.
- 5 $y = b$ adalah persamaan garis horizontal melalui titik $(0, b)$.
- 6 $ax + by + c = 0$ dengan $a \neq 0, b \neq 0$, dan c konstanta, adalah persamaan umum garis atau persamaan linier dalam x dan y .

Contoh 1.4.1

Dapatkan kemiringan garis yang melalui:

- 1 titik (2, 1) dan (4, 5)

Jawab: $m = \frac{5-1}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$

- 2 titik (-1, 1) dan (3, -3)

Jawab: $m = \frac{-3-1}{3-(-1)} = \frac{-4}{4} = -1$

Contoh 1.4.2

Diketahui l_1 garis dengan kemiringan $m_1 = \frac{3}{2}$, dan garis l_2 berpotongan tegak lurus dengan l_1 di titik (4, -1). Persamaan garis l_2 adalah ...

Jawab:

Karena garis l_1 dan garis l_2 tegak lurus, maka $m_1 m_2 = -1$. Jadi,
 $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$.

Persamaan garis l_2 adalah $y - (-1) = -\frac{2}{3}(x - 4) \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$