Limit dan Kekontinuan

Heri Purnawan

Kalkulus 1
Fakultas Teknik
Universitas Islam Lamongan

October 11, 2021

Limit dan Kekontinuan

Meliputi

Limit dan Kekontinuan

Meliputi

1. Pengantar Notasi Limit

Limit dan Kekontinuan

Meliputi

1. Pengantar Notasi Limit
2. Perhitungan Limit

Limit dan Kekontinuan

Meliputi

1. Pengantar Notasi Limit
2. Perhitungan Limit
3. Limit di Tak-Hingga

Limit dan Kekontinuan

Meliputi

1. Pengantar Notasi Limit
2. Perhitungan Limit
3. Limit di Tak-Hingga
4. Kekontinuan

Referensi:

Dosen-Dosen Departemen Matematika ITS (2018)
Seri Buku Ajar Matematika 1
Departemen Matematika, ITS

Limit dan Kekontinuan

Limit

Jika nilai $f(x)$ dapat dibawa sedekat mungkin ke L dengan membawa nilai x sangat dekat ke a (tetapi tidak sama dengan a), maka dapat ditulis

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{1}$$

yang dibaca "limit dari $f(x)$ saat x mendekati a adalah L" atau "$f(x)$ mendekati L saat x mendekati a". Bentuk (1) dapat juga ditulis sebagai

$$f(x) \to L \text{ untuk } x \to a$$

Limit dan Kekontinuan

Contoh 3.1.1

Dengan pengamatan secara numerik, dapatkan nilai dari

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$$

Jawab: Perhatikan bahwa fungsi

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$$

tidak terdefinisi di $x = 1$, tetapi hal ini tidak ada kaitannya dengan nilai limitnya.

x	0.99	0.999	0.9999		1.0001	1.001	1.01
$f(x)$	0.5013	0.5001	0.5000		0.5000	0.49998	0.4988
	..	$\cdots$	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$\cdots$	..

Nilai $f(x)$ yang bersesuaian terlihat mendekati $\frac{1}{2}$. Jadi,

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \frac{1}{2}$$

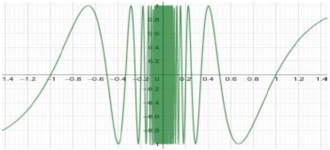
Limit dan Kekontinuan

Contoh 3.1.1 hanya menduga nilai limit dari suatu fungsi dan kebetulan dugaan tersebut benar. Pada contoh berikut ini ditunjukkan bahwa dugaan limit yang hanya didasarkan nilai-nilai $f(x)$ yang dihitung dan ditabelkan dapat ***menjebak*** dan memberikan hasil dugaan yang salah.
Contoh berikut menunjukkan bahwa dari tabel berikut ini dapat mengarah pada kesimpulan yang salah, yaitu

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0 \quad \textbf{(SALAH)}$$

x	$\frac{\pi}{x}$	$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$
$x = \pm 1$	$\pm\pi$	$\sin(\pm\pi) = 0$
$x = \pm 0.1$	$\pm 10\pi$	$\sin(\pm 10\pi) = 0$
$x = \pm 0.01$	$\pm 100\pi$	$\sin(\pm 100\pi) = 0$
$x = \pm 0.001$	$\pm 1000\pi$	$\sin(\pm 1000\pi) = 0$
$x = \pm 0.0001$	$\pm 10{,}000\pi$	$\sin(\pm 10{,}000\pi) = 0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Kenyataannya, kesimpulan tersebut SALAH. Perhatikan bukti dengan grafik berikut ini



Limit dan Kekontinuan

Limit Satu Sisi

Jika nilai $f(x)$ dapat dibuat sedekat mungkin ke L dengan membawa x sedekat mungkin ke a (tetapi lebih besar dari a), maka dapat ditulis

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

dan dibaca "limit dari $f(x)$ untuk x mendekati a dari kanan".
Jika nilai $f(x)$ dapat dibuat sedekat mungkin ke L dengan membawa x sedekat mungkin ke a (tetapi lebih kecil dari a), maka dapat ditulis

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

dan dibaca "limit dari $f(x)$ untuk x mendekati a dari kiri".

Limit dan Kekontinuan

Contoh 3.1.2

Dapatkan limit satu sisi dari $f(x) = \frac{|x|}{x}$ untuk $x \to 0^-$ dan $x \to 0^+$.

Jawab: Perhatikan bahwa

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Jelas bahwa $f(x) = -1$ untuk semua $x < 0$ dan $f(x) = 1$ untuk semua $x > 0$, sehingga diperoleh

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \text{ dan } \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Bagaimana dengan $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$?

Limit dan Kekontinuan

Hubungan Limit Satu Sisi dan Limit Dua Sisi

Limit dua-sisi dari fungsi $f(x)$ di a **ADA** jika dan hanya jika dua limit satu-sisi dari $f(x)$ di a **ADA** dan bernilai **SAMA**, yaitu

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ jika dan hanya jika } \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Dengan pedoman ini, dapat dikatakan bahwa $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ tidak ada, sebab

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$$

Ada kalanya limit suatu fungsi tidak ada, dikarenakan nilai limitnya tak-hingga ($-\infty$ atau $+\infty$). Untuk kasus yang demikian dikatakan limitnya tak-hingga.

Limit dan Kekontinuan

Contoh: $f(x) = \frac{1}{x}$ dan $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \ \text{ dan } \ \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

sehingga $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ tidak ada.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \ \text{ dan } \ \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

sehingga $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Limit dan Kekontinuan

Teorema 3.2.1

Jika a adalah bilangan real dan

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \text{ dan } \lim_{x \to a} g(x) = L_2$$

yaitu limit-limit tersebut ada dan bernilai L_1 dan L_2, maka:

$$(1)\ \lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$$

$$(2)\ \lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L_1 - L_2$$

$$(3)\ \lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = L_1 L_2$$

$$(4)\ \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2},\ L_2 \neq 0$$

$$(5)\ \lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1},\ L_1 > 0 \text{ jika n genap}$$

*Semua pernyataan di atas juga benar untuk limit satu-sisi, yaitu untuk $x \to a^-$ dan $x \to a^+$.

Limit dan Kekontinuan

Teorema 3.2.2

Untuk sebarang polinomial

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

dan sebarang bilangan real a, berlaku

$$\lim_{x \to a} p(x) = a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + \cdots + a_n a^n = p(a).$$

Contoh 3.2.1

Dapatkan $\lim_{x \to 1} (2x^5 - 7x^2 + 6)^{31}$.

Jawab: Dengan $p(x) = 2x^5 - 7x^2 + 6$ dan dengan menggunakan Teorema 3.2.2 diperoleh

$$\lim_{x \to 1} (p(x))^{31} = \left(\lim_{x \to 1} p(x) \right)^{31} = (p(1))^{31} = 1^{31} = 1$$

Limit dan Kekontinuan

Contoh 3.2.2

Dapatkan $\lim_{x\to -2} \frac{6x^3-7x}{3x+4}$.

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} \frac{6x^3-7x}{3x+4} &= \frac{\lim_{x\to -2}(6x^3-7x)}{\lim_{x\to -2}(3x+4)} \\ &= \frac{6(-2)^3-7(-2)}{3(-2)+4} \\ &= 17\end{aligned}$$

Contoh 3.2.3

Misal diketahui $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3}, & x > -3 \\ x-9, & x \le -3 \end{cases}$

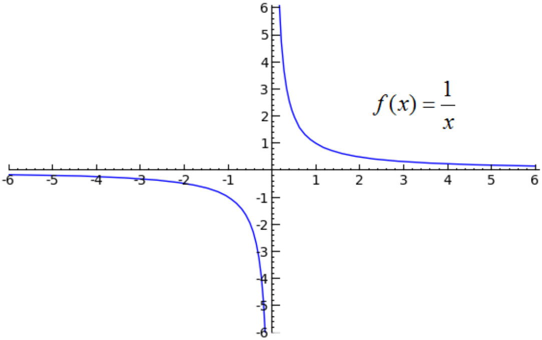
1. Dapatkan $\lim_{x\to -3^+} f(x)$.
2. Dapatkan $\lim_{x\to -3^-} f(x)$.
3. Dapatkan $\lim_{x\to -3} f(x)$.

Limit dan Kekontinuan

Pembahasan di bagian ini dipusatkan pada limit $f(x)$ untuk $x \to -\infty$ atau $x \to +\infty$. Sebagai contoh:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

yang digambarkan secara geometrik pada gambar di bawah ini.



Limit di Tak-Hingga

Jika nilai-nilai $f(x)$ menjadi sedekat mungkin ke suatu bilangan L saat x naik tanpa batas, maka dapat dituliskan

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{atau} \quad f(x) \to L \text{ untuk } x \to +\infty$$

sedangkan jika nilai-nilai $f(x)$ menjadi sedekat mungkin ke suatu bilangan L saat x turun tanpa batas, maka dapat dituliskan

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad \text{atau} \quad f(x) \to L \text{ untuk } x \to -\infty$$

Semua sifat yang diberikan dalam Teorema 3.2.1 berlaku juga untuk limit-limit di $-\infty$ dan $+\infty$.

Limit dan Kekontinuan

Selain itu, untuk $n \in \mathbb{Z}$ berlaku:

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) \right)^n$$

$$\text{dan}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x) \right)^n$$

asalkan nilai limit $f(x)$ ada. Demikian juga, konstanta dapat keluar dari tanda limit:

$$\lim_{x \to -\infty} kf(x) = k \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

$$\text{dan}$$

$$\lim_{x \to +\infty} kf(x) = k \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

asalkan limit $f(x)$ ada.

Limit dan Kekontinuan

Contoh 3.3.1

Menggunakan sifat-sifat limit di tak-hingga, dapat dilakukan perhitungan limit sebagai berikut:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} 3 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 3\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\right)^3 = 3\cdot 0^3 = 0$$

Limit Tak-Hingga di Tak-Hingga

Jika nilai-nilai $f(x)$ naik tanpa batas saat $x \to -\infty$ atau saat $x \to +\infty$, maka dapat ditulis

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

dan jika nilai-nilai $f(x)$ turun tanpa batas saat $x \to -\infty$ atau saat $x \to +\infty$, maka dapat ditulis

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Limit dan Kekontinuan

Limit di tak-hingga untuk polinomial x^n, untuk $n = 1, 2, 3$ disajikan dalam tabel berikut.

$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$	$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

Untuk n bilangan bulat positif, yaitu

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty, \;\; n = 1, 2, 3, \cdots$$

dan

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty, & n \textit{ ganjil} \\ +\infty, & n \textit{ genap} \end{cases}$$

Limit di tak-hingga dari suatu polinomial adalah tepat sama dengan limit di tak-hingga dari suku dengan pangkat tertinggi polinomial tersebut.

Limit dan Kekontinuan

Jika $a_n \neq 0$, maka

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x\to-\infty}\left(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\right)=\lim_{x\to-\infty}a_nx^n \\ \lim_{x\to+\infty}\left(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\right)=\lim_{x\to+\infty}a_nx^n \end{array}}$$

Contoh 3.3.2

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x^9-4x^5+2x^2+1\right)=\lim_{x\to-\infty}3x^9=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(6x^6-9x^4+5x^2-3\right)=\lim_{x\to-\infty}6x^6=+\infty$$

Limit di Tak-Hingga Fungsi Rasional

Jika $a_n \neq 0$ dan $b_m \neq 0$, maka

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

Limit dan Kekontinuan

Contoh 3.3.3

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^3 - 2x + 5}{-6x^3 + 10x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^3}{-6x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^4 + x^2 - 7}{9x^5 - 2x^3 + 4x - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^4}{9x^5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{9x} = \mathbf{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 - x^2 + 8}{-2x^3 + 10} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4}{-2x^3} = -\frac{3}{2} \lim_{x\to+\infty} x = \mathbf{-\infty}$$

Contoh 3.3.4

Dapatkan

$$(a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{2x+1} \qquad (b)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{2x+1}$$

Dibahas di kelas

Limit dan Kekontinuan

Definisi Kekontinuan Suatu Fungsi

Suatu fungsi f dikatakan kontinu di $x = c$ jika memenuhi syarat-syarat berikut:

1. $f(c)$ terdefinisi
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ ada
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Jika ada syarat di atas yang tidak dipenuhi, maka dikatakan f *dikontinu* di $x = c$.

Contoh 3.4.1

Jelaskan kekontinuan di $x = 1$ untuk fungsi-fungsi berikut ini:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1};\; g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} ;\, h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

Limit dan Kekontinuan

Teorema 3.4.1

Jika dua fungsi f dan g kontinu di c, maka

1. $f + g$ kontinu di c.
2. $f - g$ kontinu di c.
3. $f \cdot g$ kontinu di c.
4. f/g kontinu di c jika $g(c) \neq 0$, diskontinu di c jika $g(c) = 0$.

Teorema 3.4.2

1. Setiap polinomial selalu kontinu dimana-mana.
2. Setiap fungsi rasional selalu kontinu di setiap titik yang tidak membuat penyebutnya nol, dan diskontinu di titik-titik yang membuat penyebutnya nol.

Limit dan Kekontinuan

Contoh 3.4.2

1. Diberikan $f(x) = \begin{cases} kx^2, & x \leq 2 \\ 2x + k, & x > 2 \end{cases}$

   Dapatkan nilai k sehingga f kontinu dimana-mana.
2. Dapatkan nilai x yang membuat f diskontinu dan jelaskan apakah diskontinuitas tersebut dapat dihilangkan.
   a. $f(x) = \frac{x-2}{|x|-2}$
   b. $g(x) = \frac{x^2-3x}{x-3}$

Dibahas di kelas