Fungsi

Heri Purnawan

Departemen Teknik Elektro
Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

Disampaikan pada Matakuliah Kalkulus Dasar
Program Studi Kesehatan Lingkungan, UNISLA

October 1, 2024

Pokok Bahasan

Meliputi:

Pokok Bahasan

Meliputi:

- Definisi dan Notasi Fungsi.

Pokok Bahasan

Meliputi:

- Definisi dan Notasi Fungsi.
- Operasi pada Fungsi.

Pokok Bahasan

Meliputi:

- Definisi dan Notasi Fungsi.
- Operasi pada Fungsi.
- Grafik Fungsi.

Pokok Bahasan

Meliputi:

- Definisi dan Notasi Fungsi.
- Operasi pada Fungsi.
- Grafik Fungsi.
- Sifat Grafik Fungsi.

Pokok Bahasan

Meliputi:

- Definisi dan Notasi Fungsi.
- Operasi pada Fungsi.
- Grafik Fungsi.
- Sifat Grafik Fungsi.
- Invers

Referensi:

Dosen-Dosen Departemen Matematika ITS (2018)
Seri Buku Ajar Matematika 1
Departemen Matematika, ITS

Definisi dan Notasi Fungsi

Definisi 2.1.1 Fungsi

Himpunan semua pasangan terurut atau hasil-kali Cartesian dari dua himpunan A dan B dinotasikan dengan $A \times B$, yaitu

$$A \times B := \{(x, y) : x \in A \text{ dan } y \in B\}$$

Contoh:

$A \times \phi = \phi \times A = \phi$, untuk sebarang himpunan A,
$\{a, b, c\} \times \{1, 2\} = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$
$\{1, 2\} \times \{a, b, c\} = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

Definisi 2.1.2 Fungsi

Fungsi atau pemetaan f dari himpunan A ke himpunan B adalah aturan yang memasangkan setiap $x \in A$ dengan tepat satu $y \in B$, ditulis $y = f(x)$ dengan x adalah peubah bebas, y adalah peubah tak bebas, nilainya tergantung x yang mungkin. Domain atau daerah asal adalah himpunan semua bilangan real dari x yang mungkin. Range atau daerah hasil adalah himpunan bagian dari B yang anggotanya berpasangan dengan anggota A. Secara umum daerah asal adalah

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$$

dan daerah hasil adalah

$$\mathcal{R}_f = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in \mathcal{D}_f\}$$

Definisi dan Notasi Fungsi

Contoh 2.1.1 Dapatkan domain dan range dari fungsi

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = 2 + \sqrt{x-1}$

Jawab:

1. Domain dari f adalah $\mathcal{D}_f = (-\infty, +\infty)$, sedangkan rangenya adalah $\mathcal{R}_f = [0, +\infty)$.
2. Domain dari g adalah $\mathcal{D}_g = [1, +\infty)$, sedangkan rangenya adalah $\mathcal{R}_g = [2, +\infty)$.

Definisi 2.2.1 Operasi Fungsi

Diberikan fungsi f dan g, maka rumus-rumus untuk jumlah, selisih, hasil kali, dan hasil bagi didefinisikan dengan

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\
(f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\
(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x)\\
(f/g)(x) &= f(x)/g(x), \quad g(x)\neq 0
\end{aligned}
$$

Domain fungsi-fungsi $f+g$, $f-g$ dan $f\cdot g$ didefinisikan sebagai irisan dari domain-domain f dan g, atau

$$\mathcal{D}_{(f+g)} = \mathcal{D}_{(f-g)} = \mathcal{D}_{(f\cdot g)} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$$

Sedangkan domain f/g adalah irisan domain f dan domain g kecuali titik-titik yang menyebabkan $g(x)=0$, atau

$$\mathcal{D}_{(f/g)} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \setminus \{x : g(x)=0\}.$$

Operasi Fungsi

Contoh 2.2.1 Dapatkan rumus $(f \cdot g)(x)$, dan tentukan domainnya, untuk

$$f(x) = 2\sqrt{x} \;\; \text{dan} \;\; g(x) = \sqrt{x}$$

Jawab: Berdasarkan definisi 2.2.1

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x}) = 2x.$$

Domain dari $f \cdot g$ adalah $\mathcal{D}_{(f \cdot g)} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$, yaitu $[0, +\infty)$.

Operasi Fungsi

Definisi 2.2.2 Operasi Fungsi Komposisi

Diberikan fungsi f dan g, komposisi f dengan g, ditulis $f\ o\ g$, adalah fungsi yang didefinisikan dengan

$$(f\ o\ g)(x) = f(g(x))$$

Domain dari $f\ o\ g$ terdiri dari semua x dalam domain g, dimana $g(x)$ dalam domain f, atau

$$\mathcal{D}_{(f\ o\ g)} = \{x \in \mathcal{D}_g : g(x) \in \mathcal{D}_f\}.$$

Untuk $g\ o\ f$ didefinisikan $(g\ o\ f)(x) = g(f(x))$. Domain dari $g\ o\ f$ adalah

$$\mathcal{D}_{(g\ o\ f)} = \{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \in \mathcal{D}_g\}.$$

Operasi Fungsi

Contoh 2.2.2 Diberikan $f(x) = x^2 + 3$ dan $g(x) = \sqrt{x}$.

1. Dapatkan $(f \ o \ g)(x)$ dan domainnya.
2. Dapatkan $(g \ o \ f)(x)$ dan domainnya.

Jawab:

1. Berdasarkan Definisi 2.2.2

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 3 = x + 3$$

Domain dari $f \ o \ g$ adalah $\mathcal{D}_{(f \ o \ g)} = [0, +\infty)$.

2. Berdasarkan Definisi 2.2.2

$$g(f(x)) = g(x^2 + 3) = \sqrt{x^2 + 3}$$

Domain dari $g \ o \ f$ adalah $\mathcal{D}_{(g \ o \ f)} = (-\infty, +\infty)$.

Grafik Fungsi

Definisi 2.3.1 Grafik Fungsi

Grafik suatu fungsi f pada bidang-xy didefinisikan sebagai grafik persamaan $y = f(x)$.

Contoh Sketsa Grafik Fungsi

Grafik Fungsi

Definisi 2.3.1 Grafik Fungsi

Grafik suatu fungsi f pada bidang-xy didefinisikan sebagai grafik persamaan $y = f(x)$.

Contoh Sketsa Grafik Fungsi

1. $f(x) = x + 2$

Grafik Fungsi

Definisi 2.3.1 Grafik Fungsi

Grafik suatu fungsi f pada bidang-xy didefinisikan sebagai grafik persamaan $y = f(x)$.

Contoh Sketsa Grafik Fungsi

1. $f(x) = x + 2$
2. $f(x) = |x|$

Grafik Fungsi

Definisi 2.3.1 Grafik Fungsi

Grafik suatu fungsi f pada bidang-xy didefinisikan sebagai grafik persamaan $y = f(x)$.

Contoh Sketsa Grafik Fungsi

1. $f(x) = x + 2$
2. $f(x) = |x|$
3. $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-3}$

Grafik Fungsi

Definisi 2.3.1 Grafik Fungsi

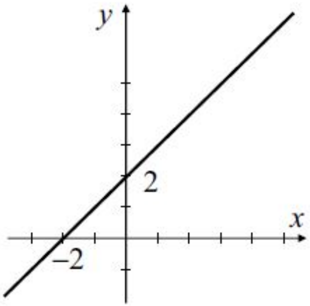
Grafik suatu fungsi f pada bidang-xy didefinisikan sebagai grafik persamaan $y = f(x)$.

Contoh Sketsa Grafik Fungsi

1. $f(x) = x + 2$
2. $f(x) = |x|$
3. $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-3}$
4. $f(x) = \begin{cases} 2 & , x < -1 \\ 4 - x & , x \geq -1 \end{cases}$

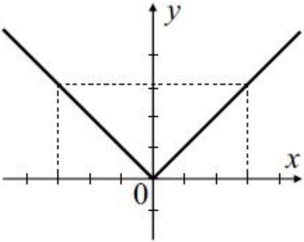
Grafik Fungsi

Grafik $y = x + 2$



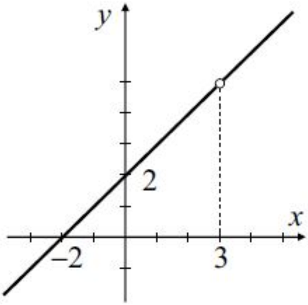
Grafik Fungsi

Grafik $y = |x|$



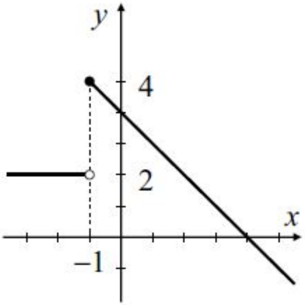
Grafik Fungsi

Grafik $y = \frac{x^2-x-6}{x-3}$



Grafik Fungsi

Grafik $f(x) = \begin{cases} 2 & , x < -1 \\ 4 - x & , x \geq -1 \end{cases}$



Sifat Grafik Fungsi

Sifat-sifat Grafik Fungsi

1. $y = f(x) + c$, geser sejauh $c > 0$ ke atas.

Sifat Grafik Fungsi

Sifat-sifat Grafik Fungsi

1. $y = f(x) + c$, geser sejauh $c > 0$ ke atas.
2. $y = f(x) - c$, geser sejauh $c > 0$ ke bawah.

Sifat Grafik Fungsi

Sifat-sifat Grafik Fungsi

1. $y = f(x) + c$, geser sejauh $c > 0$ ke atas.
2. $y = f(x) - c$, geser sejauh $c > 0$ ke bawah.
3. $y = f(x + c)$, geser sejauh $c > 0$ ke kiri.

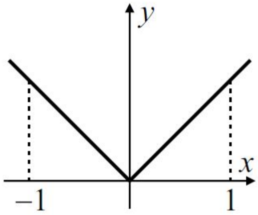
Sifat Grafik Fungsi

Sifat-sifat Grafik Fungsi

1. $y = f(x) + c$, geser sejauh $c > 0$ ke atas.
2. $y = f(x) - c$, geser sejauh $c > 0$ ke bawah.
3. $y = f(x + c)$, geser sejauh $c > 0$ ke kiri.
4. $y = f(x - c)$, geser sejauh $c > 0$ ke kanan.

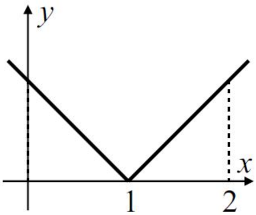
Sifat Grafik Fungsi

Grafik $f(x) = |x|$



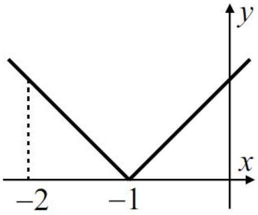
Sifat Grafik Fungsi

Grafik $f(x) = |x - 1|$



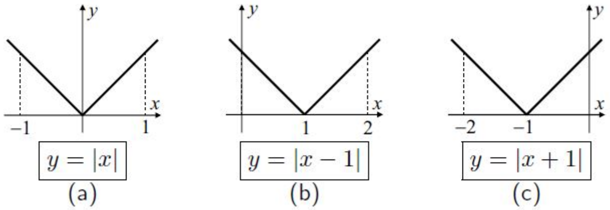
Sifat Grafik Fungsi

Grafik $f(x) = |x+1|$



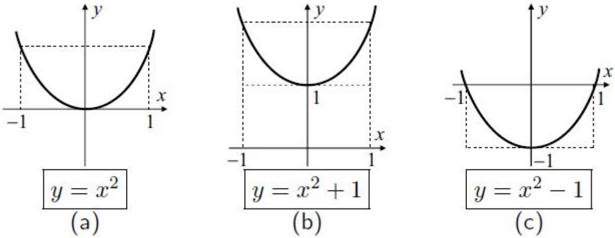
Sifat Grafik Fungsi

Pergeseran arah horizontal grafik $f(x) = |x|$



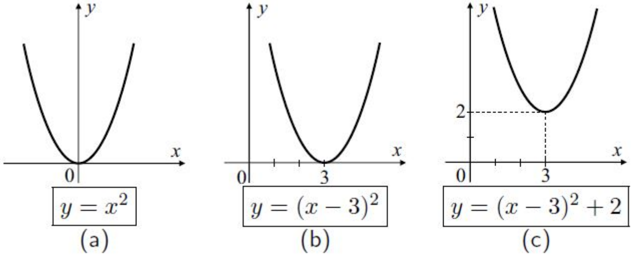
Sifat Grafik Fungsi

Pergeseran arah vertikal grafik $f(x) = x^2$



Sifat Grafik Fungsi

Pergeseran grafik $f(x) = x^2 + 6x + 11$



Sifat Grafik Fungsi

Ada cara yang cukup membantu untuk mengetahui apakah grafik yang dihadapi merupakan grafik suatu fungsi atau bukan, yaitu dengan uji garis vertikal dan uji garis horisontal:

1. Uji garis vertikal: Suatu grafik dalam bidang-xy adalah grafik dari $y = f(x)$ untuk suatu fungsi f apabila tidak ada garis vertikal yang memotong grafik lebih dari satu titik.
2. Uji garis horisontal: Suatu grafik dalam bidang-xy adalah grafik dari $x = g(y)$ untuk suatu fungsi g apabila tidak ada garis horisontal yang memotong grafik lebih dari satu titik.

Fungsi Invers

Diberikan Persamaan

$$y = x^3 + 1 \;\rightarrow\; y = f(x)$$

dapat diselesaikan untuk x sebagai fungsi dari y:

$$x = \sqrt[3]{y-1} \;\rightarrow\; x = g(y)$$

dan jika

$$\begin{aligned}(g\ o\ f)(x) &= \sqrt[3]{f(x)-1} = \sqrt[3]{(x^3+1)-1} = x,\\ (f\ o\ g)(y) &= [g(y)]^3 + 1 = \left(\sqrt[3]{y-1}\right)^3 + 1 = y.\end{aligned}$$

Fungsi Invers

Definisi 2.5.1 Fungsi Invers

Jika dua fungsi f dan g memenuhi dua sifat berikut:

$$(g \ o \ f)(x) = x, \ \text{untuk setiap } x \in \mathcal{D}_f$$
$$(f \ o \ g)(x) = y, \ \text{untuk setiap } y \in \mathcal{D}_g$$

maka dikatakan f sebagai invers dari g, dan g sebagai invers dari f, atau f dan g fungsi-fungsi invers.

Fungsi Invers

Diberikan persamaan

$$f(x) = x^3 + 1$$

maka inversnya adalah:

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$$

dengan

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f$$

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$$
$$\text{atau}$$
$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad \forall x \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$$

Fungsi Invers

Langkah-langkah mendapatkan invers dari fungsi f:

1. Tulis persamaan $y = f(x)$.
2. Bila memungkinkan, selesaikan persamaan tersebut untuk x sebagai fungsi dari y.
3. Persamaan yang dihasilkan adalah $x = f^{-1}(y)$, yang merupakan rumus untuk f^{-1} dengan peubah bebas y.
4. Jika dikehendaki x sebagai peubah bebasnya, maka tukarkan x dan y dalam persamaan $x = f^{-1}(y)$ untuk mendapatkan $y = f^{-1}(x)$.

Fungsi Invers

Contoh 2.5.1 Dapatkan invers dari fungsi $f(x) = \sqrt{7x-4}$ dengan x sebagai peubah bebas, dan sebutkan domain dari f^{-1}.

Jawab:

1. $y = \sqrt{7x-4}$
2. Kemudian diselesaikan persamaan tersebut untuk x sebagai fungsi dari y:
$$y^2 = 7x - 4 \;\rightarrow\; x = \tfrac{1}{7}(y^2+4)$$
3. Dihasilkan $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{7}(y^2+4)$
4. Karena dikehendaki x sebagai peubah bebasnya, maka tukarkan x dan y dalam persamaan $x = f^{-1}(y)$, diperoleh

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{7}(x^2+4)$$

Domain f^{-1} adalah range dari f yaitu $[0, +\infty)$.

Fungsi Invers

Teorema 2.5.2

Suatu fungsi f mempunyai invers jika dan hanya jika fungsi tersebut satu-satu.

Teorema 2.5.3

Suatu fungsi f mempunyai invers jika dan hanya jika perpotongan sebarang garis horizontal dengan grafik $y = f(x)$ tidak lebih dari satu titik.

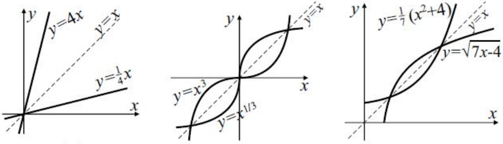
Contoh 2.5.2 Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^2$ tidak mempunyai invers.

Bukti:

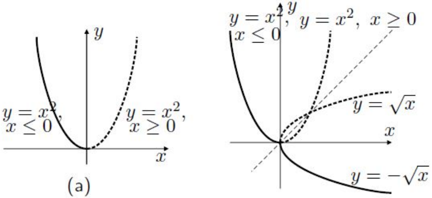
Untuk $x_1 \neq -x_1$, didapat $f(x_1) = x_1^2 = f(-x_1)$. Ini mengindikasikan bahwa f bukan fungsi satu-satu. Jadi, menurut Teorema 2.5.2, fungsi $f(x) = x^2$ tidak mempunyai invers.

Teorema 2.5.4

Jika f mempunyai invers, maka grafik $y = f(x)$ dan $y = f^{-1}(x)$ merupakan pencerminan yang satu dari yang lain terhadap garis $y = x$.



(a) (b) (c)



(a) (b)