

Sistem Bilangan Real

Heri Purnawan

Departemen Teknik Elektro
Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

Disampaikan pada Matakuliah Kalkulus Dasar
Program Studi Kesehatan Lingkungan, UNISLA

September 10, 2024

Perkenalan Singkat

- ◀ Nama Lengkap: Heri Purnawan
- ◀ Program Studi: Teknik Elektro, Universitas Islam Lamongan (UNISLA)
- ◀ Riwayat Pendidikan:
 - S-1 Matematika ITS (2011 - 2015)
 - S-2 Matematika ITS (2016 - 2018)
 - S-3 Matematika ITS (2020 - 2024)
- ◀ Information:
 - Phone: +62 82140797329
 - Email: heripurnawan@unisla.ac.id
 - Room: Building C, 1st Floor, Campus 1, UNISLA.

Download Materi

<https://github.com/heripurnawan/KesLing-Calculus.git>

Penilaian:

- ◀ Kehadiran : 25%
- ◀ Tugas : 25%
- ◀ Quiz 1 : 10%
- ◀ Quiz 2 : 10%
- ◀ ETS : 15%
- ◀ EAS : 15%

Materi Pembelajaran:

- ◀ Sistem Bilangan Real
- ◀ Fungsi
- ◀ Limit dan Kekontinuan
- ◀ Turunan dan Aplikasinya
- ◀ Integral

Referensi:



Dosen-Dosen Departemen Matematika ITS (2018)

Seri Buku Ajar Matematika 1

Departemen Matematika, ITS

Bilangan Real

- ◀ Himpunan bilangan asli, dinotasikan dengan \mathbb{N} , yaitu

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

- ◀ Himpunan bilangan bulat, dinotasikan dengan \mathbb{Z} , yaitu

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

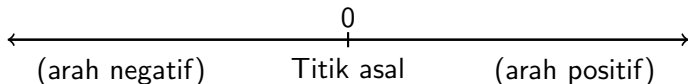
- ◀ Himpunan bilangan rasional, dinotasikan dengan \mathbb{Q} yang merupakan bentuk pembagian bilangan bulat $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$.
Contohnya:

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{8}{1}, \quad -\frac{3}{7} (= \frac{-3}{7} = \frac{3}{-7}), \dots$$

- ◀ Himpunan bilangan irasional adalah himpunan bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam pembagian bilangan bulat. Jika p bilangan irasional, maka $p \neq \frac{a}{b}, \forall a, b \in \mathbb{Z}$. Contohnya:

$$\sqrt{2}, \pi, \sqrt[3]{5}, 1 + \sqrt{2}, \dots$$

- ◀ Dengan pengertian seperti di atas, dapat didefinisikan himpunan bilangan real, dinotasikan dengan \mathbb{R} , sebagai gabungan dari himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irasional. Untuk memudahkan pemahaman tentang pengertian bilangan real, dapat digambarkan menggunakan garis bilangan atau garis koordinat (Gambar 1).



Gambar 1: Garis Bilangan.

Penulisan pertidaksamaan $a \leq b$ dapat diartikan dengan $a < b$ atau $a = b$, sedangkan $a \geq b$ adalah $a > b$ atau $a = b$.

Teorema 1.1.1 Sifat-Sifat Pertidaksamaan

Diberikan bilangan-bilangan real a, b, c , dan d :

- 1 Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$.
- 2 Jika $a < b$, maka $a + c < b + c$ dan $a - c < b - c$.
- 3 Jika $a < b$, maka $ac < bc$ untuk $c > 0$ dan $ac > bc$ untuk $c < 0$.
- 4 Jika $a < b$ dan $c < d$, maka $a + c < b + d$.
- 5 Jika a dan b keduanya positif atau keduanya negatif, dan $a < b$, maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Penulisan selang tertutup dari a ke b ditulis dengan $[a, b]$, dan selang terbuka dari a ke b ditulis dengan (a, b) , didefinisikan dengan:

$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\} \text{ dan } (a, b) = \{x : a < x < b\}$$

Contoh Soal

Contoh 1.1.1

Dapatkan penyelesaian dari pertidaksamaan $4 + 5x \leq 3x - 7$.

Jawab:

$$\begin{aligned}4 + 5x &\leq 3x - 7 && \text{[diketahui]} \\5x &\leq 3x - 11 && \text{[kedua sisi dikurangi 4]} \\2x &\leq -11 && \text{[kedua sisi dikurangi } 3x\text{]} \\x &\leq -\frac{11}{2} && \text{[kedua sisi dikalikan } \frac{1}{2}\text{]}\end{aligned}$$

Contoh 1.1.2

Selesaikan $\frac{2x-5}{x-2} < 1$.

Nilai Mutlak

Definisi 1.2.1 Nilai Mutlak

Nilai mutlak suatu bilangan real x , dituliskan dengan $|x|$, didefinisikan dengan

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0, \\ -x, & \text{jika } x < 0. \end{cases}$$

Contoh 1.2.1

$$|6| = 6$$

$$|-2| = -(-2) = 2$$

$$|0| = 0$$

Contoh 1.2.2

Selesaikan persamaan nilai mutlak dari $|7x - 4| = 2$

Jawab: Berdasarkan Definisi 1.2.1, maka persamaan tersebut terdiri dari dua persamaan, yaitu

$$\begin{aligned} (1) \quad & 7x - 4 = 2, \quad \text{untuk } 7x - 4 \geq 0, \\ & 7x = 6, \quad \text{untuk } 7x \geq 4, \\ & x = \frac{6}{7}, \quad \text{untuk } x \geq \frac{4}{7}, \text{ memenuhi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & -(7x - 4) = 2, \quad \text{untuk } 7x - 4 < 0, \\ & -7x = -2, \quad \text{untuk } 7x < 4, \\ & x = \frac{2}{7}, \quad \text{untuk } x < \frac{4}{7}, \text{ memenuhi} \end{aligned}$$

Contoh 1.2.3

Selesaikan persamaan $|3x - 2| = |5x + 4|$.

Teorema 1.2.2 Nilai Akar Kuadrat

Untuk setiap bilangan real x , berlaku

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Teorema 1.2.3 Sifat Dasar Nilai Mutlak

Jika a dan b bilangan real, maka berlaku:

- (a) $|a| \geq 0$ Nilai mutlak suatu bilangan selalu tak negatif.
- (b) $|-a| = |a|$ suatu bilangan dan negatifnya mempunyai nilai mutlak yang sama.
- (c) $|ab| = |a||b|$ Nilai mutlak dari perkalian sama dengan perkalian nilai mutlak.
- (d) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$ Nilai mutlak dari pembagian sama dengan pembagian nilai mutlak.

Teorema 1.2.4 Rumus Jarak

Jika P dan Q adalah titik-titik pada garis koordinat yang masing-masing dengan koordinat p dan q , maka jarak d antara P dan Q adalah

$$d = |q - p|$$

Teorema 1.2.5 Pertidaksamaan Segitiga

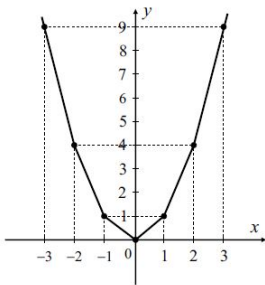
Jika a dan b bilangan real, maka

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Definisi 1.3.1 Grafik Suatu Persamaan

Grafik suatu persamaan yang menghubungkan dua peubah x dan y adalah himpunan semua titik pada bidang- xy yang koordinat-koordinatnya merupakan anggota himpunan penyelesaian persamaan tersebut.

Contoh grafik persamaan $y = x^2$



x	$y = x^2$	(x, y)
-3	9	$(-3, 9)$
-2	4	$(-2, 4)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	4	$(2, 4)$
3	9	$(3, 9)$

Garis, Persamaan Linier

Definisi 1.4.1 Kemiringan Garis atau *Gradient*

Misal $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ titik-titik pada bidang koordinat. Kemiringan garis yang melalui P dan Q didefinisikan dengan

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Teorema 1.4.2 Hubungan Dua Garis

Jika garis l_1 mempunyai kemiringan m_1 dan garis l_2 mempunyai kemiringan m_2 , maka

- ◀ l_1 sejajar l_2 jika dan hanya jika $m_1 = m_2$.
- ◀ l_1 tegak lurus terhadap l_2 jika dan hanya jika $m_1 m_2 = -1$.

Bentuk-Bentuk Persamaan Garis

- ▶ $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ adalah persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan titik (x_2, y_2) .
- ▶ $y - y_1 = m(x - x_1)$ adalah persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan mempunyai kemiringan m .
- ▶ $y = ax + b$ adalah persamaan garis dengan kemiringan a dan memotong sumbu- y di titik $(0, b)$.
- ▶ $x = a$ adalah persamaan garis vertikal melalui titik $(a, 0)$.
- ▶ $y = b$ adalah persamaan garis horizontal melalui titik $(0, b)$.
- ▶ $ax + by + c = 0$ dengan $a \neq 0, b \neq 0$, dan c konstanta, adalah persamaan umum garis atau persamaan linier dalam x dan y .

Contoh 1.4.1 Dapatkan kemiringan garis yang melalui:

- 1 titik $(2, 1)$ dan $(4, 5)$
- 2 titik $(-1, 1)$ dan $(3, -3)$

Jawab:

$$1 \quad m = \frac{5-1}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$2 \quad m = \frac{-3-1}{3-(-1)} = \frac{-4}{4} = -1$$

Contoh 1.4.2

Diketahui l_1 garis dengan kemiringan $m_1 = \frac{3}{2}$, dan garis l_2 berpotongan tegak lurus dengan l_1 di titik $(4, -1)$. Persamaan garis l_2 adalah ...

Jawab:

Karena garis l_1 dan garis l_2 tegak lurus, maka $m_1 m_2 = -1$. Jadi,
 $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$.

Persamaan garis l_2 adalah $y - (-1) = -\frac{2}{3}(x - 4) \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$