Turunan

Heri Purnawan

Departemen Teknik Elektro
Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

Disampaikan pada Matakuliah Kalkulus Dasar
Program Studi Kesehatan Lingkungan, UNISLA

November 5, 2024

Pokok bahasan

Meliputi:

Pokok bahasan

Meliputi:

- Fungsi Turunan.

Pokok bahasan

Meliputi:

- Fungsi Turunan.
- Diferensiasi

Pokok bahasan

Meliputi:

- Fungsi Turunan.
- Diferensiasi
- Aturan Rantai dan Diferensiasi Implisit

Pokok bahasan

Meliputi:

- Fungsi Turunan.
- Diferensiasi
- Aturan Rantai dan Diferensiasi Implisit
- Aplikasi Turunan

Referensi:

Dosen-Dosen Departemen Matematika ITS (2018)
Seri Buku Ajar Matematika 1
Departemen Matematika, ITS

Fungsi Turunan

Definisi 4.1.1

Fungsi f' yang didefinisikan dengan

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

disebut turunan dari f terhadap x. Domain f' adalah semua x dalam domain f dengan limit tersebut ada.

Fungsi Turunan

Contoh 4.1.1 Dapatkan turunan terhadap x dari $f(x) = \sqrt{x}$.

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{x}}}
\end{aligned}
$$

Fungsi Turunan

Definisi 4.1.2

Suatu fungsi f dikatakan dapat diturunkan (*differensiable*) di x_0 jika

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{2}$$

ada. Jika f dapat diturunkan disetiap titik dari selang terbuka (a, b), maka dikatakan f dapat diturunkan pada (a, b).

Teorema 4.1.3

Jika suatu fungsi f dapat diturunkan di x_0, maka f kontinu di x_0.

Fungsi Turunan

Contoh 4.1.2 Tunjukkan bahwa $f(x) = |x|$ tidak mempunyai turunan di $x = 0$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

tetapi

$$\frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h > 0 \\ -1, & h < 0 \end{cases}$$

yang berarti

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1 \quad \text{dan} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

Fungsi Turunan

Dengan demikian limit-limit satu sisinya tidak sama, sehingga limit dalam (2) tidak ada, dan f tidak dapat diturunkan di $x = 0$.

Rumus turunan dari $f(x) = |x|$ adalah

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Turunan suatu fungsi didefinisikan dengan limit dua sisi, sehingga untuk fungsi yang didefinisikan pada selang tertutup $[a, b]$, tidak didefinisikan $f'(x)$ untuk x titik-titik ujung selang. Untuk itu, didefinisikan berikut

Fungsi Turunan

Turunan Kiri

$$f'_{-}(x) = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Turunan Kanan

$$f'_{+}(x) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

yang dinamakan juga *turunan satu-sisi*. Jelas bahwa, f mempunyai turunan di x_0 apabila turunan kiri di x_0 sama dengan turunan kanan di x_0, yaitu: $f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0)$.

Diferensiasi

Teorema 4.2.1

Jika f suatu fungsi konstan, misal $f(x) = k$ untuk sebarang bilangan real k, maka

$$\frac{d}{dx}[k] = 0$$

Contoh 4.2.1

$$\frac{d}{dx}[5] = 0, \quad \frac{d}{dx}[-9] = 0, \quad \frac{d}{dx}[\pi] = 0, \quad \frac{d}{dx}[-\sqrt{3}] = 0$$

Diferensiasi

Teorema 4.2.2

Jika n suatu bilangan bulat positif, maka

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

Contoh 4.2.2

$$\frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}[x^7] = 7x^6, \quad \frac{d}{dx}[x^{13}] = 13x^{12}$$

Diferensiasi

Teorema 4.2.3

Jika f fungsi yang dapat diturunkan di x dan k sebarang bilangan real, maka kf juga dapat diturunkan di x, yaitu

$$\frac{d}{dx}[kf(x)] = k\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Contoh 4.2.3

$$\frac{d}{dx}[4x^3] = 4\frac{d}{dx}[x^3] = 4[3x^2] = 12x^2$$
$$\frac{d}{dx}[-10x^8] = -10\frac{d}{dx}[x^8] = -10[8x^7] = -80x^7.$$

Diferensiasi

Teorema 4.2.4

Jika f dan g fungsi yang dapat diturunkan di x, maka $f+g$ dan $f-g$ juga dapat diturunkan di x, dan

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$$
$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]$$

Contoh 4.2.4

$$\frac{d}{dx}[5x^4-3x^2] = \frac{d}{dx}[5x^4] - \frac{d}{dx}[3x^2] = 20x^3 - 6x$$

Diferensiasi

Teorema 4.2.5

Jika f dan g fungsi yang dapat diturunkan di x, maka $f \cdot g$juga dapat diturunkan di x, dan

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Contoh 4.2.5 Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ untuk $y = (3x^2 - 2)(3 - 2x^3)$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[(3x^2 - 2)(3 - 2x^3)] \\
&= (3x^2 - 2)\frac{d}{dx}[3 - 2x^3] + (3 - 2x^3)\frac{d}{dx}[3x^2 - 2] \\
&= (3x^2 - 2)(-6x^2) + (3 - 2x^3)(6x) = -30x^4 + 12x^2 + 18x
\end{aligned}$$

Diferensiasi

Teorema 4.2.6

Jika f dan g fungsi yang dapat diturunkan di x, dan $g(x) \neq 0$, maka f/g juga dapat diturunkan di x, dan

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

Diferensiasi

Contoh 4.2.6 Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ untuk $y = \frac{3x^2-x-18}{3x+7}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(3x+7)\frac{d}{dx}[3x^2-x-18]-(3x^2-x-18)\frac{d}{dx}[3x+7]}{(3x+7)^2}\\ &= \frac{(3x+7)(6x-1)-(3x^2-x-18)(3)}{(3x+7)^2}\\ &= \frac{(18x^2+39x-7)-(9x^2-3x-54)}{(3x+7)^2}\\ &= \frac{9x^2+42x+47}{9x^2+42x+49}\end{aligned}$$

Aturan Rantai

Ilustrasi

Misal suatu mesin produksi memerlukan 1 liter bahan bakar untuk dapat bekerja 10 jam. Harga bahan bakar 5 ribu rupiah per liter. Diinginkan informasi berapa jam mesin tersebut bekerja untuk setiap seribu rupiah.

Dalam hal ini dapat digambarkan fungsi $y = f(u)$, dengan y lama kerja mesin (dalam jam) dan u banyaknya liter bahan bakar yang tersedia dalam tangki; dan $u = g(x)$, dengan x banyaknya ribu rupiah untuk membeli bahan bakar yang diisikan ke dalam tangki mesin. Jadi,

$$f'(u) = \frac{dy}{du} = 10 \text{ jam per liter.}$$

Aturan Rantai

Karena harga bahan bakar 5 ribu rupiah per liter, maka tiap seribu rupiah mendapatkan 1/5 liter bahan bakar, sehingga

$$g'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{5} \text{ liter per seribu rupiah.}$$

Perhatikan bahwa lama kerja mesin juga merupakan fungsi dari banyaknya rupiah untuk membeli bahan bakar; yaitu diperoleh fungsi komposisi

$$y = f(u) = f(g(x))$$

Jadi y juga merupakan fungsi dari x, dan dy/dx dapat berarti lama kerja mesin per seribu rupiah. Dalam hal ini merupakan perkalian laju perubahan yang ada, yaitu laju y yang berubah terhadap u dikalikan laju u yang berubah terhadap x. Jadi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{10 \text{ jam}}{1 \text{ liter}} \cdot \frac{1 \text{ liter}}{5 \text{ ribu rupiah}} = 2 \text{ jam/seribu rupiah.}$$

Aturan Rantai

Teorema 4.3.1 (Aturan Rantai)

Jika g dapat diturunkan di x, dan f dapat diturunkan di $g(x)$, maka komposisi $f \ o \ g$ dapat diturunkan di x. Selain itu, jika

$$y = f(g(x)) \quad \text{dan} \quad u = g(x)$$

maka $y = f(u)$ dan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{3}$$

Aturan Rantai

Contoh 4.3.1 Dapatkan $\frac{ds}{dt}$ jika $s = 2x^2$ dan $x = t^2 - 2t$.

Penyelesaian: Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}[2x^2] \cdot \frac{d}{dt}[t^2 - 2t] \\ &= (4x) \cdot (2t - 2) = 4(t^2 - 2t) \cdot (2t - 2) \\ &= 8t^3 - 24t^2 + 16t. \end{aligned}$$

Rumus (3) dapat dinyatakan dalam bentuk yang hanya menampilkan satu peubah bebas:

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = (f \ o \ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{4}$$

Aturan Rantai

Contoh 4.3.2 Dapatkan $h'(x)$ jika $h(x) = (3x^2 + 7x - 3)^{-6}$.

Penyelesaian: Fungsi h dapat dipandang sebagai komposisi $f(g(x))$, dengan $g(x) = 3x^2 + 7x - 3$ dan $f(x) = x^{-6}$. Selanjutnya menggunakan rumus (4) dihasilkan

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) = (-6)(g(x))^{-6-1} \cdot (6x + 7) \\ &= -6(6x + 7)(3x^2 + 7x - 3)^{-7} \end{aligned}$$

Dengan aturan rantai dapat diperoleh perumuman bentuk turunan fungsi, yaitu jika u suatu fungsi dari x, maka

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\frac{du}{dx} \tag{5}$$

Diferensiasi Implisit

Dalam banyak kasus, untuk mendapatkan turunan fungsi implisit tidaklah mudah, karena peubah bebasnya cukup sulit untuk dipisahkan dari peubah tak-bebasnya. Perhatikan contoh dengan persamaan sederhana ini

$$xy = 1 \tag{6}$$

Untuk mendapatkan dy/dx, persamaan tersebut diubah ke bentuk

$$y = \frac{1}{x} \tag{7}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \tag{8}$$

Diferensiasi Implisit

Cara lain adalah dengan mengingat y sebagai fungsi dari x, kemudian diferensiasi dilakukan pada kedua sisi dari (6) terhadap x, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[xy] &= \frac{d}{dx}[1] \\ x\frac{d}{dx}[y] + y\frac{d}{dx}[x] &= 0 \\ x\frac{dy}{dx} + y &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan substitusi (7), diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \tag{9}$$

Diferensiasi Implisit

Hasil (9) sesuai dengan Persamaan (8). Cara mendapatkan turunan seperti ini disebut dengan **diferensiasi implisit**.

Contoh 4.3.3 Gunakan diferensiasi implisit untuk mendapatkan dy/dx dari $xy^2 + x^2y = x$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[xy^2 + x^2y] &= \frac{d}{dx}[x] \\
\frac{d}{dx}[xy^2] + \frac{d}{dx}[x^2y] &= 1 \\
\left[y^2 + 2xy\frac{dy}{dx}\right] + \left[2xy + x^2\frac{dy}{dx}\right] &= 1 \\
(2xy + x^2)\frac{dy}{dx} &= 1 - y^2 - 2xy \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1 - y^2 - 2xy}{2xy + x^2}.
\end{aligned}$$

Aplikasi Turunan

- Laju-laju yang Berkaitan

Aplikasi Turunan

- Laju-laju yang Berkaitan
- Masalah Nilai Maksimum dan Minimum

Laju-laju yang berkaitan

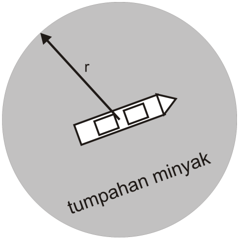
Langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah-masalah yang berkaitan dengan laju perubahan adalah

1. Gambar dan beri label besaran yang berubah.
2. Identifikasi laju-laju yang perubahannya diketahui dan laju perubahan yang akan dicari.
3. Tentukan persamaan yang mengaitkan kuantitas yang laju perubahannya dicari dengan kuantitas yang laju perubahannya diketahui.
4. Turunkan kedua sisi persamaan terhadap waktu dan selesaikan turunan yang akan memberi laju perubahan yang tidak diketahui.
5. Evaluasi turunan pada titik yang dimaksud.

Laju-laju yang berkaitan

Contoh 4.4.1 Misalkan sebuah tanker menumpahkan minyak yang kemudian menyebar dalam bentuk lingkaran. Misalkan suatu saat, jari-jari tumpahannya adalah 60 m dan terus bertambah dengan laju konstan 2 m/s. Seberapa cepatkah luas tumpahan tersebut bertambah saat itu?

Penyelesaian:
Langkah-1



Laju-laju yang berkaitan

Langkah-2

Variabel:

- t : waktu (dalam s)
- r : jari-jari tumpahan minyak (dalam m)
- A : luas tumpahan minyak (dalam m)

Laju perubahan yang diketahui:

- $\dfrac{dr}{dt} = 2\ m/s$

Laju perubahan yang dicari:

- $\left.\dfrac{dA}{dt}\right|_{r=60}$

Laju-laju yang berkaitan

Langkah-3

Persamaan yang mengaitkan A dan r adalah

$$A = \pi r^2$$

Langkah-4

Diturunkan terhadap t, didapatkan

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

Langkah-5

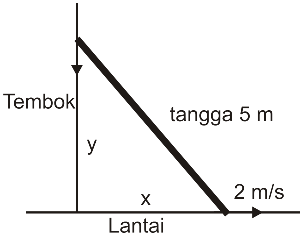
Disubstitusikan $r = 60$ dan $dr/dt = 2$, didapatkan

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=60} = 2\pi(60)(2) = 240\pi\ m^2/s$$

Laju-laju yang berkaitan

Contoh 4.4.2 Sebuah tangga dengan panjang 5 m bersandar pada dinding, tergelincir sedemikian sehingga bagian bawahnya bergerak menjauhi dinding dengan laju 2 m/s ketika bagian bawah berjarak 4 m dari dinding. Berapa cepat tangga bagian atas turun ke bawah saat itu?

Penyelesaian:
Langkah-1



Laju-laju yang berkaitan

Langkah-2

Variabel:

- t : waktu (dalam s)
- x : jarak bagian bawah tangga ke dinding (dalam m)
- y : jarak bagian atas tangga ke lantai (dalam m)

Laju perubahan yang diketahui:

- $\dfrac{dx}{dt} = 2\ m/s$

Laju perubahan yang dicari:

- $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{x=4}$

Laju-laju yang berkaitan

Langkah-3

Persamaan yang mengaitkan x dan y adalah

$$x^2 + y^2 = 25$$

Langkah-4

Diturunkan terhadap t, didapatkan

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \;\rightarrow\; \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Langkah-5

Saat $x = 4$, maka pasti $y = 3$. Jika nilai-nilai tersebut dan $dx/dt = 2$ disubstitusikan, didapatkan

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=4} = -\frac{4}{3}(2) = -\frac{8}{3}\ m/s$$

Tanda $(-)$ puncak tangga pada dinding bergerak ke bawah.

Masalah Nilai Maksimum dan Minimum

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Gambar dan tentukan variabel-variabelnya.
2. Tentukan persamaan yang akan dicari maksimum atau minimumnya.
3. Gunakan syarat/batasan yang ada untuk merubah persamaan menjadi fungsi dengan satu variabel.
4. Tentukan domain dari persamaan tersebut.
5. Gunakan teori (uji turunan pertama dan/atau kedua; serta nilai maksimum dan minimum suatu fungsi) untuk mencari maksimum atau minimumnya.

Masalah Nilai Maksimum dan Minimum

Contoh 4.4.3 Tentukan ukuran persegi panjang yang mempunyai keliling 100 m agar luasnya sebesar mungkin.

Penyelesaian:
Langkah 1
Variabel:

- x : panjang (dalam m)
- y : lebar (dalam m)
- L : luas (dalam m^2)

Langkah 2

$$L(x, y) = xy$$

Masalah Nilai Maksimum dan Minimum

Langkah 3
Karena diketahui kelilingnya adalah 100, maka berlaku $2(x+y) = 100$. Atau bisa ditulis $y = 50 - x$. Disubstitusi ke persamaan L akan didapat

$$L(x) = x(50 - x) = 50x - x^2$$

Langkah 4
Karena x tidak mungkin negatif dan $2x$ tidak mungkin lebih besar dari 100, maka didapatkan domain

$$0 \leq x \leq 50$$

Masalah Nilai Maksimum dan Minimum

Langkah 5

Titik ujung selangnya adalah $x = 0$ dan $x = 50$. Titik kritisnya didapat dengan

$$\begin{aligned} L'(x) &= 0 \\ 50 - 2x &= 0 \quad \rightarrow \quad x = 25 \end{aligned}$$

Maka maksimumnya terjadi di salah satu titik $x = 0$, $x = 25$, atau $x = 50$. Jelas bahwa L paling besar saat $x = 25$, yaitu $L = 625$. Maka ukuran persegi panjang agar luasnya maksimum adalah $x = 25$ dan $y = 25$.

Masalah Nilai Maksimum dan Minimum

Contoh 4.4.4 Kotak terbuka dibuat dari satu lembar karton berukuran 16×30 dengan menggunting empat sudutnya berbentuk persegi yang berukuran sama dan melipatnya ke atas. Berapakah ukuran persegi agar diperoleh kotak dengan volume terbesar?

Penyelesaian:

Langkah 1

Variabel :

- x : panjang (dalam cm) sisi persegi yang digunting.
- V : volume/isi (dalam cm^3) kotak yang dihasilkan.

Langkah 2

$$V = p \cdot l \cdot t$$

Masalah Nilai Maksimum dan Minimum

Langkah 3

Karena persegi bersisi x dibuang dari masing-masing sudut, kotak yang dihasilkan mempunyai ukuran $(16 - 2x)$, $(30 - 2x)$, x, maka diperoleh

$$V = p \cdot l \cdot t = (16 - 2x)(30 - 2x)x = 480x - 92x^2 + 4x^3$$

Langkah 4

Nilai x tidak boleh negatif dan $2x$ tidak boleh lebih besar dari 16, maka didapatkan domain $0 \leq x \leq 8$

Masalah Nilai Maksimum dan Minimum

Langkah 5

Titik ujung selangnya adalah $x = 0$ dan $x = 8$. Titik kritisnya didapat dengan

$$\begin{aligned} V'(x) &= 0 \\ 480 - 184x + 12x^2 &= 0 \\ 3x^2 - 46x + 120 &= 0 \\ (3x - 10)(x - 12) &= 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{10}{3} \ \text{atau} \ x = 12 \end{aligned}$$

Namun $x = 12$ tidak berada pada selang $[0, 8]$, sehingga maksimumnya terjadi di salah satu titik $x = 0$, $x = 8$, atau $x = \frac{10}{3}$. Jelas bahwa V maksimum saat $x = \frac{10}{3}$, yaitu $V = \frac{19600}{27}\ cm^3$.