Tema Selecto

Tópicos de Teoría del Riesgo

Francisco García Castillo

Tema Selecto: Tópicos de Teoría del Riesgo

I. Medidas de riesgo

II. Teoría de la ruina

III. Teoría de la credibilidad

IV. Solvencia II

V. Teoría de la credibilidad

VI. Modelos de Curvas de Tasas de Interés

Parte III

Riesgo y Ruina

En esta parte del libro *Nonlife Actuarial Models. Theory, Methods and Evaluation*, de Yiu-Kuen Tse, se estudian las medidas de riesgo y la probabilidad de la ruina.

En el capítulo 4 de dicho libro se introducen las **medidas de riesgo**, que se construyen con la finalidad de establecer una prima o el nivel de capital con base en el perfil de riesgo.

En particular, se discute el enfoque axiomático de identificar **medidas de riesgo que sean coherentes**.

Medidas de riesgo

Dentro de las medidas analizadas están el Valor en Riesgo (*value at risk*, VaR), y el VaR condicionado (CVaR o *expected shortfall*), entre otros.

Los capítulos subsecuentes analizan la probabilidad de la ruina de una compañía de seguros tanto en tiempo discreto como en tiempo continuo, analizando cómo interactúan las utilidades iniciales, las primas y la distribución de pérdidas de la empresa.

Capítulo 4

Medidas de riesgo

Una compañía de seguros mantiene un portafolio de pólizas, las cuales pueden ser objeto de sufrir reclamaciones. Una buena práctica de la administración de riesgos de la empresa es evaluar la exposición de la compañía a dichos riesgos.

Una medida de riesgo resume todas las exposiciones de la empresa, y le ayuda a evaluar si existe el **suficiente capital** en caso de que sobrevengan eventos adversos.

Medidas de riesgo

También se utilizan medidas de riesgo de bloques de pólizas para asignar de manera adecuada la prima que se cobra.

Desde la implementación de **Basilea I** y **Basilea II** en las instituciones bancarias, las compañías de seguros han realizado esfuerzos para evaluar sus riesgos internos y ofrecer una rendición de cuentas más transparente para sus inversionistas a través del establecimiento de **Solvencia II**.

Con estos enfoques regulatorios, la administración de riesgos ha adquirido gran importancia dentro de la estructura de la administración de una empresa[1].

[1] Crouchy, Michael; Galai, Dan; Mark, Robert. (2014). *The essentials of risk management*.

4.1 Usos de medidas de riesgo

Los principales riesgos que enfrentan las compañías de seguros provienen de las pólizas que emite.

El autor discute diversas medidas de riesgo que resumen los riesgos potenciales que se derivan de las potenciales reclamaciones de las pólizas de aseguramiento.

4.1 Usos de medidas de riesgo

Estas medidas se basan en la v.a. de las pérdidas, con los siguientes propósitos:

- **Determinación del capital económico**. Es la cantidad de dinero que la empresa requiere para evitar la insolvencia. Es un colchón contra ***pérdidas no esperadas*** y se amortiza con capital disponible de la empresa.

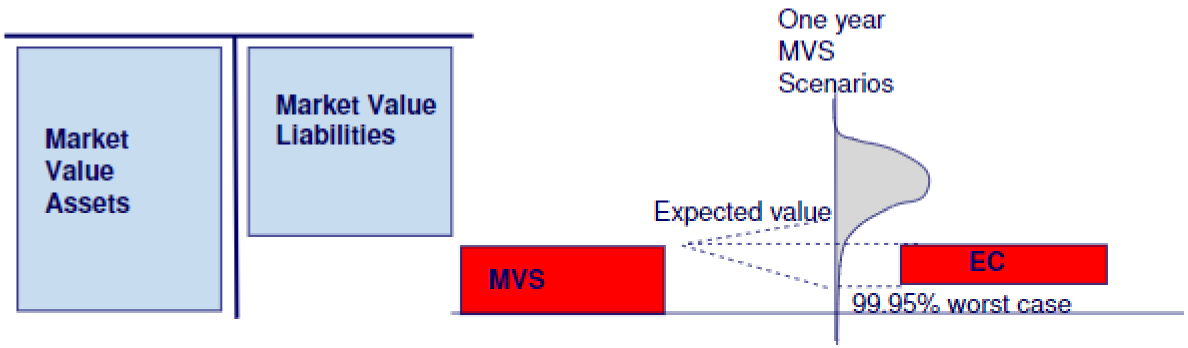
  La cantidad de capital económico depende del nivel de aversión al riesgo de la empresa, lo que implica la calidad crediticia que la empresa desee alcanzar o de la probabilidad de insolvencia que está dispuesta a tolerar.

Medidas de riesgo

4.1 Usos de medidas de riesgo

Overview of ING Economic Capital Framework

Definition: ING Insurance economic capital defined as maximum loss to ING Insurance's Market Value Surplus (MVS) within a 99.95% confidence interval based on shocks which could occur over a one year horizon



Based on total Market Value Surplus
- Current balance sheet value, no future business
- Market Value of Liabilities, including options and guarantees, not best estimate liabilities
- Includes free surplus; no assumption about "duration of equity" or surplus

99.95% confidence interval
- Consistent with AA rating
- More conservative than minimum Solvency II

Consistency with Solvency II
- Maximum loss / "VaR" not tail risk
- One year horizon, not run-off

Fuente: https://studylib.net/doc/8306345/ing-insurance-economic-capital-framework

4.1 Usos de medidas de riesgo

Se describe a continuación algunas medidas de riesgo; y posteriormente se introduce el enfoque axiomático de Artzner et al (1999) en la identificación de propiedades deseables de una medida de riesgo.

Se define una medida de riesgo a partir de la pérdida aleatoria X, que es la reclamación agregada de un conjunto de activos.

4.1 Usos de medidas de riesgo

Definición 4.1. Una medida de riesgo de una pérdida aleatoria X, denotada como $\varrho(X)$, es una función real $\varrho: X \to \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales.

Se observa que $X \geq 0$, pues es una v.a. de pérdidas, por lo que la medida de riesgo $\varrho(X)$ debe ser no negativa.

4.2 Algunas primas basadas en medidas de riesgo

Se denota a la media y a la varianza de la pérdida aleatoria X como μ_X y σ_X^2, respectivamente.

Definición. La medida de riesgo bajo el principio de la *prima del valor esperado* es:

$$\varrho(X) = (1+\theta)\mu_X \tag{4.1}$$

Donde $\theta \geq 0$ es el factor de cargo de prima, y el cargo en exceso de la pérdida promedio μ_X es $\theta\mu_X$.

4.2 Algunas primas basadas en medidas de riesgo

I.- Seguro de Invalidez

e) Inválido(a) sin hijos, cónyuge ni ascendientes

Sea :

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_k p_x^{(inv)} v^k$$

b_1 es el beneficio a pagar por los derechohab ientes

$$b_1 = \max(CB_{iv} \times (1+0.15), PMG) + \frac{1}{12} \times \max(CB_{iv}, PMG)$$

$$\ddot{a}_{incx} = \sum_{k=\delta}^{\omega-60+\delta} {}_k p_x^{(inv)} \times v^k$$

$$A_x^{(iv)} = b_1 \times 12 \times \left\{ \left[(\ddot{a}_x - \frac{11}{24}) \times (1+INC) \right] + \left[(\ddot{a}_{incx} - \frac{11}{24}) \times INC_{bis} \right] \right\}$$

$$PBSI = A_x^{(iv)}$$

II.- Seguro de Invalidez para hijos del Seguro de Invalidez

III.- Prima neta del seguro de invalidez

$$PNSI = FACBI \times (PBSI + PSIH)$$

IV.- Monto Constitutivo del seguro de invalidez

$$MCSI = PNSI \times (1+\alpha) + PV$$

α Porcentaje para margen de seguridad.

4.2 Algunas primas basadas en medidas de riesgo

Si $\theta = 0$, entonces $\varrho(X) = \mu_X$, y la medida de riesgo se llama de *prima pura*.

Nótese que en esta medida de riesgo, el riesgo depende únicamente de la media μ_X y del factor de carga θ.

Así, dos variables de pérdidas con la misma media y el mismo factor de carga tendrán el mismo riesgo, a pesar del valor de los momentos de mayor orden como la varianza.

4.2 Algunas primas basadas en medidas de riesgo

Definición. La medida de riesgo con base en el *principio de la varianza de la prima* es:

$$\varrho(X) = \mu_X + \alpha\sigma_X^2 \tag{4.2}$$

Una medida de riesgo similar es la del *principio de la desviación estándar de la prima*, que se define como:

$$\varrho(X) = \mu_X + \alpha\sigma_X \tag{4.3}$$

Donde $\alpha \geq 0$ es el factor de recarga en las ecuaciones (4.2) y (4.3).

Bajo estas medidas de riesgo –principio de la varianza y principio de la desviación estándar–, la distribución de pérdidas que presente una mayor dispersión tendrá un riesgo mayor.

4.2 Algunas primas basadas en medidas de riesgo

Ahora bien, es deseable que las medidas de riesgo tengan ciertas propiedades.

La selección de la medida de riesgo puede enfocarse en que satisfaga estas propiedades deseables.

4.3 Axiomas de medidas de riesgo coherentes

Artzner et al (1999)[3] sugieren ***cuatro axiomas para las medidas de riesgo***.

Los autores argumentan que estos axiomas *"deben cumplirse por cualquier medida de riesgo que se utilice para regular o administrar de manera efectiva los riesgos"*.

Una medida de riesgo que satisfaga estos cuatro axiomas se dice que es ***coherente***.

A continuación se resumen estos cuatro axiomas.

[3] Artzner, Philippe & Delbaen, Freddy & Jean-Marc, Eber & Heath, David. (1999). *Coherent Measures of Risk*. Mathematical Finance. 9. 203 - 228. 10.1111/1467-9965.00068.

4.3 Axiomas de medidas de riesgo coherentes

Axioma 4.1. Invariancia traslacional (T). Para cualquier variable de pérdida X y cualquier constante no negativa a, $\varrho(X + a) = \varrho(X) + a$

El Axioma T establece que si la pérdida X se incrementa en una cantidad fija a, entonces el riesgo se incrementa por la misma cantidad.

4.3 Axiomas de medidas de riesgo coherentes

Axioma 4.2. Subaditividad (S). Para cualesquiera variables aleatorias de pérdidas X y Y, $\varrho(X+Y) \leq \varrho(X) + \varrho(Y)$.

El Axioma S implica que una compañía de seguros no puede reducir su riesgo dividiendo su negocio en bloques más pequeños.

También se interpreta como la consolidación de los bloques de pólizas no hace a la compañía más riesgosa.

En el contexto de portafolios de inversión, esta propiedad dice que la diversificación reduce el riesgo. El cumplimiento de la subaditividad permite prácticas de administración de riesgos más eficientes

4.3 Axiomas de medidas de riesgo coherentes

Axioma 4.3. Homogeneidad positiva (PH). Para cualquier variable de pérdida X y cualquier constante no negativa a, $\varrho(aX) = a\varrho(X)$.

Este axioma asegura que el cambio de unidades monetarias de los riesgos no altera la medida de riesgo; pero lo aumenta en escala.

Por ejemplo, bajo esta propiedad el tamaño del portafolio influye directamente en el riesgo: no es lo mismo invertir USD $1 en activos financieros que invertir USD $1,000,000 en los mismos activos, pues en el segundo caso, el portafolio es un millón de veces más riesgoso.

4.3 Axiomas de medidas de riesgo coherentes

Axioma 4.4 Monotonicidad (M). Para cualesquiera variables de pérdidas X y Y, tal que bajo cualquier estado de la naturaleza ocurre que $X \leq Y$, entonces $\varrho(X) \leq \varrho(Y)$.

El Axioma M establece que, si las pérdidas de un riesgo no son mayores que otro riesgo en todos los estados de la naturaleza, entonces la medida de riesgo del primero no puede ser mayor que la medida de riesgo del segundo.

4.3 Axiomas de medidas de riesgo coherentes

En resumen, los cuatro axiomas que hacen que una medida de riesgo sea coherente son: dadas las variables aleatorias de pérdidas X y Y; y cualquier constante no negativa a:

Axioma 4.1. Invariancia traslacional (T): $\varrho(X+a)=\varrho(X)+a$

Axioma 4.2. Subaditividad (S): $\varrho(X+Y)\leq\varrho(X)+\varrho(Y)$.

Axioma 4.3. Homogeneidad positiva (PH): $\varrho(aX)=a\varrho(X)$.

Axioma 4.4 Monotonicidad (M): Si $X\leq Y$, entonces $\varrho(X)\leq\varrho(Y)$.

4.3 Axiomas de medidas de riesgo coherentes

Ejercicio 4.2. Muestre que la medida de riesgo bajo el principio de la prima del valor esperado, $\varrho(X) = (1+\theta)\mu_X$, satisface el **Axioma S, PH y M**, pero no **T**.

Solución. Sean las variables X y Y cualesquiera v.a. de pérdidas.

- **Se cumple Subaditividad (S)**: La medida de riesgo bajo el principio de la prima del valor esperado es:

$$\varrho(X+Y) = (1+\theta)E[X+Y] = (1+\theta)E[X] + (1+\theta)E[Y] = \varrho(X) + \varrho(Y)$$

Por lo que $\varrho(X+Y) \leq \varrho(X) + \varrho(Y)$

4.3 Axiomas de medidas de riesgo coherentes

- **Se cumple la homogeneidad positiva (PH)**: Sea $\mathrm{Y} = \mathrm{a}X$ con $a \geq 0$, entonces

  $\varrho(Y) = (1+\theta)E[Y] = (1+\theta)E[aX] = a(1+\theta)E[X] = a\varrho(X)$

  Por lo que $\varrho(aX) = a\varrho(X)$.

- **Se cumple Monotonicidad (M)**: Sea $X \geq Y$, lo que implica que $\mu_X \geq \mu_Y$. Entonces:

  $\varrho(X) = (1+\theta)E[X] = (1+\theta)\mu_X \geq (1+\theta)\mu_Y = (1+\theta)E[Y] = \varrho(Y)$

  Por lo que $\varrho(X) \geq \varrho(Y)$.

4.3 Axiomas de medidas de riesgo coherentes

- **No se cumple la invariancia traslacional (T):** Sea a cualquier constante arbitraria tal que $a > 0$, entonces si $\theta > 0$

$$\varrho(X + a) = (1 + \theta)E[X + a] > (1 + \theta)E[X] + a = \varrho(X) + a$$

Por lo que la medida de riesgo bajo el principio del valor esperado, $\varrho(X + a) \neq \varrho(X) + a$

4.3 Axiomas de medidas de riesgo coherentes

Tarea. Muestre que la medida de riesgo basada en la desviación estándar de la prima satisface el **Axioma S, T** y **PH**, pero no el **Axioma M** [Va para la tarea larga].

4.3 Axiomas de medidas de riesgo coherentes

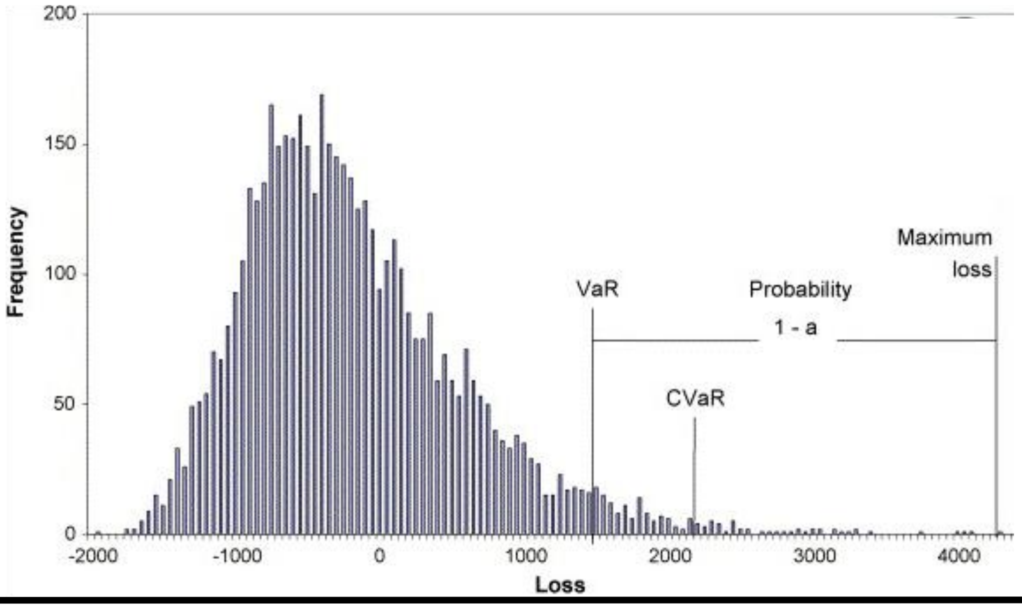
Los axiomas de riesgos coherentes ***limitan el conjunto de medidas*** de riesgo consideradas para su administración y regulación. Sin embargo, no se especifica una medida de riesgo única para su uso en la práctica.

Algunas medidas de riesgo (tal como la medida de riesgo de prima pura) que son coherentes pueden no ser adecuados; así, la elección de cual medida de riesgo utilizar dependerá de consideraciones adicionales.

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

A cotinuación se profundiza en las medidas de riesgo más utilizadas, las cuales se han construido, entre otras cosas, con el propósito de evaluar el capital económico de las instituciones financieras:

- El Valor en Riesgo, $VaR_{\delta}(X)$
- El Valor en Riesgo Condicionado, $CVaR_{\delta}(X)$



4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Valor en riesgo (VaR). Es probablemente la medida de riesgo más utilizada.

El VaR de una variable de pérdida es el valor mínimo de la distribución tal que la probabilidad de obtener una mayor pérdida que este valor no es mayor que una probabilidad dada.

En términos estadísticos, el VaR es un cuantil.

En esta presentación, se aborda el VaR desde el punto de vista paramétrico; sin embargo, la regulación exige determinar el VaR con base en las posiciones reales de la institución financiera.

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Definición 4.2. Sea X una v.a. de pérdidas con función de distribución continua $F_X(.)$, y sea δ un nivel de probabilidad tal que $0 < \delta < 1$, entonces el Valor en Riesgo con nivel de probabilidad δ, denotado como $VaR_\delta(X)$, es el $1 - \delta - cuantil$ de X; es decir:

$$VaR_\delta(X) = F_X^{-1}(\delta) = x_\delta$$

El nivel de probabilidad δ se utiliza cercana a la unidad (Basilea exige 99.9% en riesgo de crédito y 99% y 97.5% para el riesgo de mercado), de tal manera que la probabilidad de que la pérdida X exceda al $VaR_\delta(X)$ no es mayor que $1 - \delta$, por lo que es pequeña.

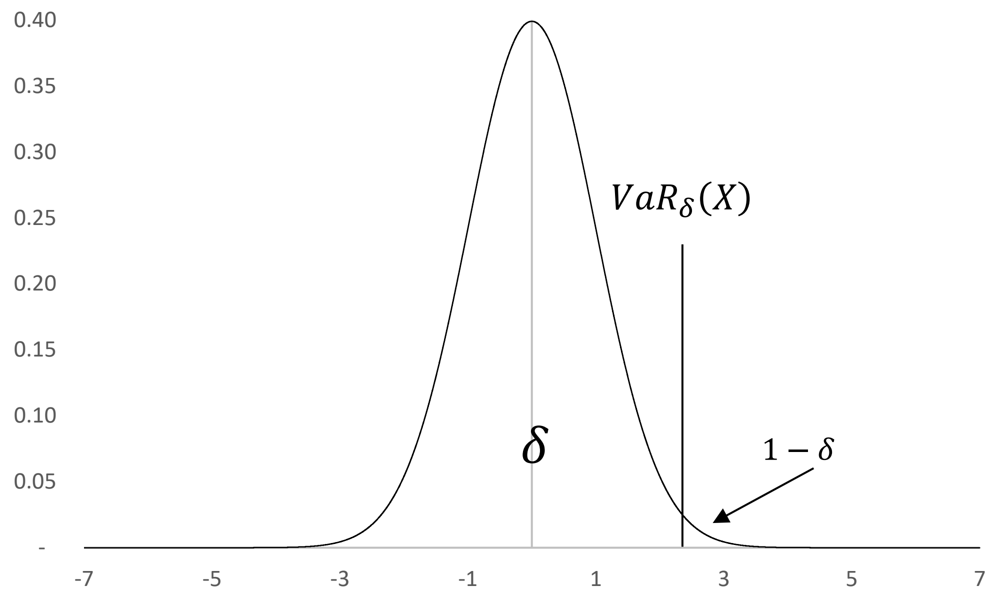
Se denota como $VaR_\delta(X)$ al nivel del VaR con una probabilidad δ, una vez que se comprende que estamos hablando de ***pérdidas***.

Medidas de riesgo

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Si X no es continua, entonces $F_X(.)$ es una función discreta, por lo que una definición más general del $VaR_\delta(X)$ es:

$$VaR_\delta(X) = inf\{x \in [0, \infty): F_X(x) \geq \delta\} \tag{4.5}$$



4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Ejemplo 4.3. Encuentre el VaR_{δ} de las siguientes distribuciones de pérdidas X:

a) Función de densidad exponencial: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ con $x \geq 0$ y $\lambda > 0$

b) Función de densidad lognormal: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

c) Función de densidad de Pareto: $f_X(x) = \frac{\alpha\gamma^{\alpha}}{(x+\gamma)^{\alpha+1}}$ con $x \geq 0$; $\alpha, \gamma > 0$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

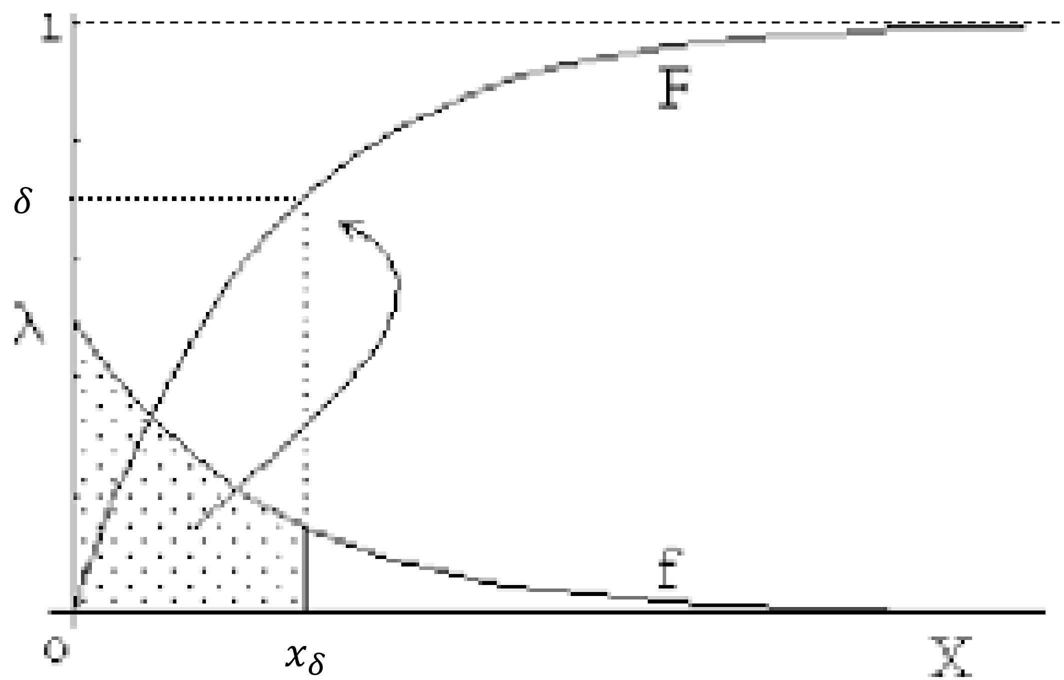
Solución.

a) La función de distribución de la exponencial es $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, entonces con base en la **Definición 4.2**, para determinar el $VaR_\delta(X)$ se debe despejar x tal que $F_X(x_\delta) = 1 - e^{-\lambda x_\delta} = \delta$

$$VaR_\delta(X) = F_X^{-1}(\delta)$$

$$\Rightarrow$$

$$x_\delta = -\frac{ln(1-\delta)}{\lambda}$$



4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

b) De la función de distribución de la lognormal se obtiene:

$$\delta = Prob[X \leq x_\delta]$$

Como $X \sim \log normal$: $X = e^W$ con $W \sim Normal(\mu, \sigma^2)$;
entonces $ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$= Prob[ln(X) \leq ln(x_\delta)]$$

$$= Prob[N(\mu, \sigma^2) \leq ln(x_\delta)]$$

$$= Prob\left[Z \leq \frac{ln(x_\delta) - \mu}{\sigma}\right]$$

Donde $Z \sim Normal(0,1)$.

$$= \Phi\left[\frac{ln(x_\delta) - \mu}{\sigma}\right]$$

Y se despeja x_δ:

$$\Phi^{-1}(\delta) = \frac{ln(x_\delta) - \mu}{\sigma}$$

$$x_\delta = exp^{(\mu + \Phi^{-1}(\delta)\sigma)}$$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Entonces, el $VaR_{\delta}(X)$ es:

$$VaR_{\delta}(X) = F_X^{-1}(\delta)$$

$$\Rightarrow \quad x_{\delta} = exp^{\left(\mu+\Phi^{-1}(\delta)\sigma\right)}$$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

c) Sabemos que la función de distribución de Pareto es:

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}\right)^{\alpha} \text{ para } x \geq 0$$

El $VaR_\delta(X)$ se obtiene al despejar x tal que $F_X(x_\delta) = \delta$

$$1 - \left(\frac{\gamma}{x_\delta+\gamma}\right)^{\alpha} = \delta$$

$$x_\delta = \gamma(1-\delta)^{-\frac{1}{\alpha}} - \gamma$$

Entonces, el $VaR_\delta(X)$ es:

$$VaR_\delta(X) = F_X^{-1}(\delta) = x_\delta = \gamma(1-\delta)^{-\frac{1}{\alpha}} - \gamma$$ ∎

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Ejemplo 4.4. Encuentre el VaR_δ, para $\delta = 0.95, 0.96, 0.98\ y\ 0.99$ de la siguiente distribución de pérdidas X:

$$X = \begin{cases} 100 & con\ probabilidad\ 0.02 \\ 90 & con\ probabilidad\ 0.02 \\ 80 & con\ probabilidad\ 0.04 \\ 50 & con\ probabilidad\ 0.12 \\ 0 & con\ probabilidad\ 0.80 \end{cases}$$

Solución.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & con\ probabilidad\ 0.80 \\ 50 & con\ probabilidad\ 0.92 \\ 80 & con\ probabilidad\ 0.96 \\ 90 & con\ probabilidad\ 0.98 \\ 100 & con\ probabilidad\ 1.00 \end{cases}$$

Dado que X es discreta, entonces con base en la ecuación 4.5 para determinar el $VaR_\delta(X)$ se obtiene:

$$VaR_{\delta=0.95}(X) = inf\{x \in [0,\infty): F_X(x) \geq \delta\} = 80$$

$$VaR_{\delta=0.96}(X) = inf\{x \in [0,\infty): F_X(x) \geq \delta\} = 80$$

$$VaR_{\delta=0.98}(X) = inf\{x \in [0,\infty): F_X(x) \geq \delta\} = 90$$

$$VaR_{\delta=0.99}(X) = inf\{x \in [0,\infty): F_X(x) \geq \delta\} = 100$$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Recordemos los cuatro axiomas que hacen que una medida de riesgo sea coherente, dadas las variables de pérdidas X y Y; y cualquier constante no negativa a:

- Axioma 4.1. Invariancia traslacional (T): $\varrho(X+a)=\varrho(X)+a$
- Axioma 4.2. Subaditividad (S): $\varrho(X+Y)\leq\varrho(X)+\varrho(Y)$.
- Axioma 4.3. Homogeneidad positiva (PH): $\varrho(aX)=a\varrho(X)$.
- Axioma 4.4 Monotonicidad (M): Si $X\leq Y$, entonces $\varrho(X)\leq\varrho(Y)$.

Dado lo anterior, se afirma que el **VaR no es una medida coherente de riesgo**.

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

El **VaR no es una medida coherente de riesgo**.

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

El VaR satisface el Axioma M. Si $X \leq Y$ bajo todos los estados de la naturaleza, entonces

$$Pr[X \leq VaR_{\delta}(Y)] \geq Pr[Y \leq VaR_{\delta}(Y)] \; y \; Pr[X \leq VaR_{\delta}(Y)] \geq \delta$$

Implica que $VaR_{\delta}(X) \leq VaR_{\delta}(Y)$ por lo que se cumple el Axioma M. ✓

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

El VaR satisface el Axioma T. Para cualquier riesgo X y cualquier constante positiva a, sea $Y = X + a$. Tenemos

$$
\begin{aligned}
VaR_\delta(X+a) &= VaR_\delta(Y) \\
&= inf\{y: Prob[Y \leq y] \geq \delta\} \\
&= inf\{x+a: Prob[X+a \leq x+a] \geq \delta\} \\
&= a + inf\{x: Prob[X+a \leq x+a] \geq \delta\} \\
&= a + inf\{x: Prob[X \leq x] \geq \delta\} \\
&= a + VaR_\delta(X) \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

El VaR satisface el Axioma PH. Sea $Y = aX$ para $a \geq 0$, tenemos

$$
\begin{aligned}
VaR_\delta(aX) &= VaR_\delta(Y) \\
&= inf\{y: Prob[Y \leq y] \geq \delta\} \\
&= inf\{ax: Prob[aX \leq ax] \geq \delta\} \\
&= inf\{ax: Prob[X \leq x] \geq \delta\} \\
&= a \times [inf\{x: Prob[X \leq x] \geq \delta\}] \\
&= a \times VaR_\delta(X) \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

El VaR no satisface el Axioma S. Consideremos dos bonos idénticos, con valor nominal de \$100, X y Y, cada uno con $PD = 0.03$ –y una probabilidad de no incumplimiento de $1 - 0.03 = 0.97$–. Además, asuma que si ocurre el incumplimiento del emisor del bono, se tiene una pérdida del 100% del valor nominal del bono, y 0% si no ocurre el incumplimiento.

Así, el VaR al 95% de confianza para cada bono es \$0:

$$VaR_{95\%}(X) = VaR_{95\%}(Y) = 0$$

Y además se tiene que:

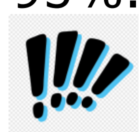
$$VaR_{95\%}(X) + VaR_{95\%}(Y) = 0$$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Si los incumplimientos de los bonos son independientes, entonces el portafolio tiene:

- Una pérdida de \$0 con probabilidad $(0.97)^2 = 0.9409$
- Una pérdida de \$200 con probabilidad $(0.03)^2 = 0.0009$
- Una pérdida de \$100 con probabilidad $1 - 0.9409 - 0.0009 = 0.0582$

Entonces $F_{X+Y}(x) = \begin{cases} 0 & con\, probabilidad\ 0.9409 \\ 100 & con\, probabilidad\ 0.9991 \\ 200 & con\, probabilidad\ 1.000 \end{cases}$

Por lo que $VaR(X+Y) = 100$ al 95%.... peeeero ya vimos que para este portafolio, $VaR(X) + VaR(Y) = 0$. 

Esto prueba que el VaR no es subaditivo; i.e., $VaR(X+Y) \not\leq VaR(X) + VaR(Y)$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Example. Consider a trader with an investment in a corporate bond with face value of USD $100,000 and default probability of 0.5%.

Over the next period, we can either have no default with a return of zero or default with a loss of USD $100,000. The loss payoffs are thus −$100,000 with probability of 0.5% and +$0 with probability 99.5%. Since the probability of getting $0 is greater than 99%, the VAR at the 99% confidence level is $0, without taking the mean into account. This is consistent with the definition that VAR is the smallest loss such that the right-tail probability is at least 99%.

Now, consider a portfolio invested in three bonds (A, B, and C) with the same characteristics and independent payoffs. The VAR numbers add up to $VaR_{\Pi} = \sum_{i=1}^{3} VaR_i = USD\ \$0$. We report the payoffs and probabilities in Table 15.3.

TABLE 15.3 Subadditivity and VAR: Example

State	Bonds	Probability	Payoff
No default		$0.995 \times 0.995 \times 0.995 = 0.9850749$	$0
1 default	A, B, or C	$3 \times 0.005 \times 0.995 \times 0.995 = 0.0148504$	−$100,000
2 defaults	AB, AC, or BC	$3 \times 0.005 \times 0.005 \times 0.995 = 0.0000746$	−$200,000
3 defaults	A, B, and C	$0.005 \times 0.005 \times 0.005 = 0.0000001$	−$300,000

Here, the probability of zero default is 0.9851, which is less than 99%. The portfolio $VaR_{99\%}$ is therefore USD $100,000, which is the lowest number such that the probability exceeds 99%.

Thus the portfolio VAR is greater than the sum of individual VARs, which is zero. In this example, VAR is not subadditive. *Fuente: Financial Risk Manager Handbook. Philippe Jorion.*

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Laboratorio. Demuestre que el VaR al 90% de confianza no satisface la propiedad de subaditividad al considerar dos v.a. de pérdidas X, Y, independientes e idénticamente distribuidas con la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.05 \; si \; x \in \; [-2,0] \\ 0.90 \quad si \; x \in (0,1] \\ 0 \qquad\qquad OL \end{cases}$$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

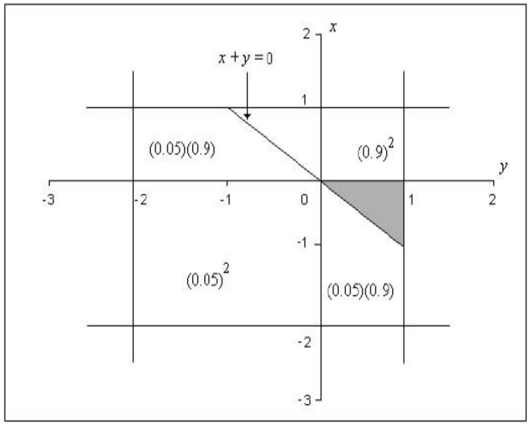
Respuesta:

- Obtener el valor en riesgo al 90% para X y Y [Hint: valúe la función de -2 a 0].
- Obtenga la función conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ [Hint: recuerde que son funciones independientes]
- Grafique la función conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ en un plano cartesiano.
- Trace la ecuación $X+Y=0$, y determine la $Prob[X+Y\geq 0]$, para luego encontrar $Prob[X+Y\leq 0]$

  [Como se observará, $Prob[X+Y\geq 0]=0.855$, entonces $Prob[X+Y\leq 0]=0.145$. Para que $Prob[X+Y\leq 0]=0.10$, debe ocurrir que $Prob[X+Y\geq 0]=0.855+algo$; es decir, requiere más área, y eso solo sucede si $Prob[X+Y>0]$].

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}(0.05)^2 & \text{si } -2\leq x\leq 0 \text{ y } -2\leq y\leq 0,\\ (0.05)(0.9), & \text{si } -2\leq x\leq 0 \text{ y } 0<y\leq 1,\\ (0.9)(0.05), & \text{si } 0<x\leq 1 \text{ y } -2\leq y\leq 0,\\ (0.9)^2, & \text{si } 0<x\leq 1 \text{ y } 0<y\leq 1,\end{cases}$$

la cual se muestra en la Gráfica 65.4.

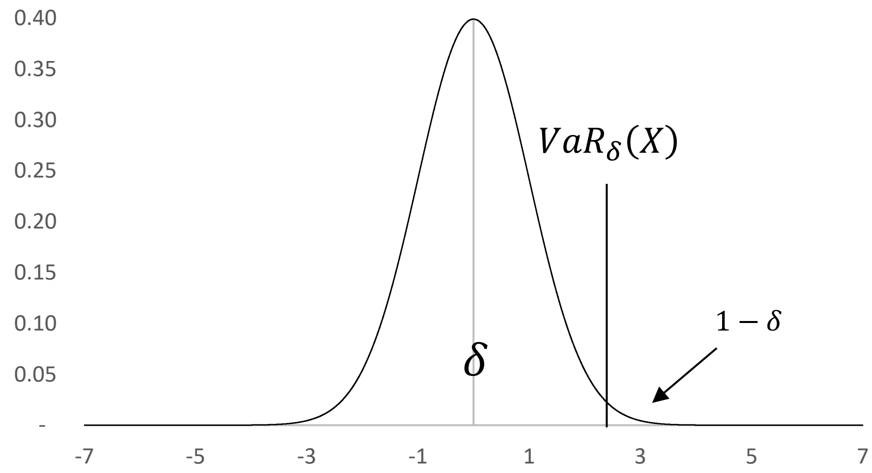


Gráfica 65.4 Función de densidad conjunta de las variables aleatorias X y Y.

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

4.4.2 Esperanza condicionada de la cola (*conditional tail expectation*, CTE). Un inconveniente del VAR es que hace uso del punto correspondiente al nivel de probabilidad δ y no utiliza ninguna información sobre la distribución de la cola más allá de δ.

La esperanza condicionada de la cola (CTE) corrige esto.



4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

La CTE al nivel de probabilidad δ, denotada como $CTE_\delta(X)$, se define como:

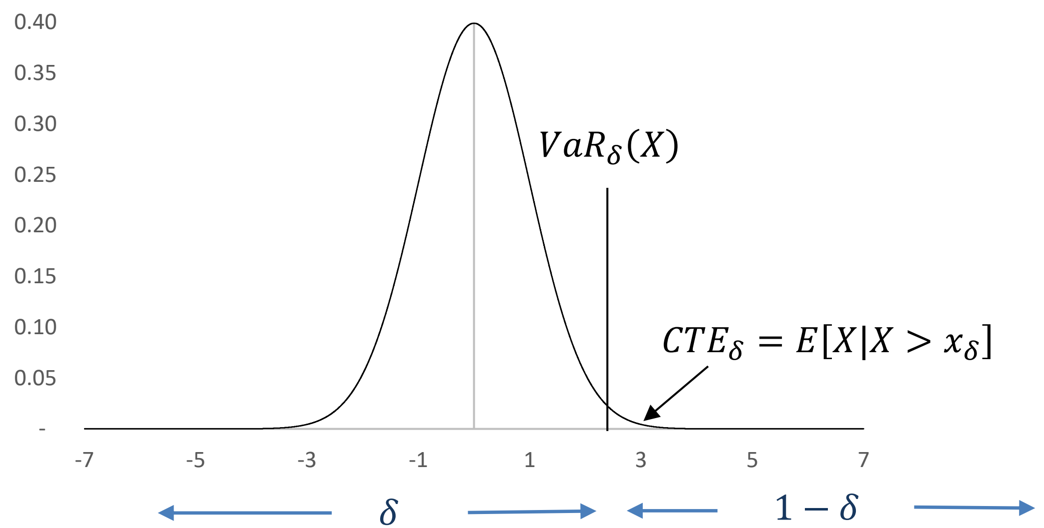
$$CTE_\delta(X) = E[X|X > x_\delta] \tag{4.9}$$

Ya sea que X sea discreta o continua, $CTE_\delta(X)$ se define como:

$$CTE_\delta(X) = E[X|X > VaR_\delta(X)] \tag{4.10}$$

Esta es la definición de CTE que se utilizará como ***medida de riesgo***.

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital



4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Para calcular el CTE_δ, sea la función de densidad de X tal que $X > x_\delta$, denotada por $f_{X|X>x_\delta}(x)$, entonces:

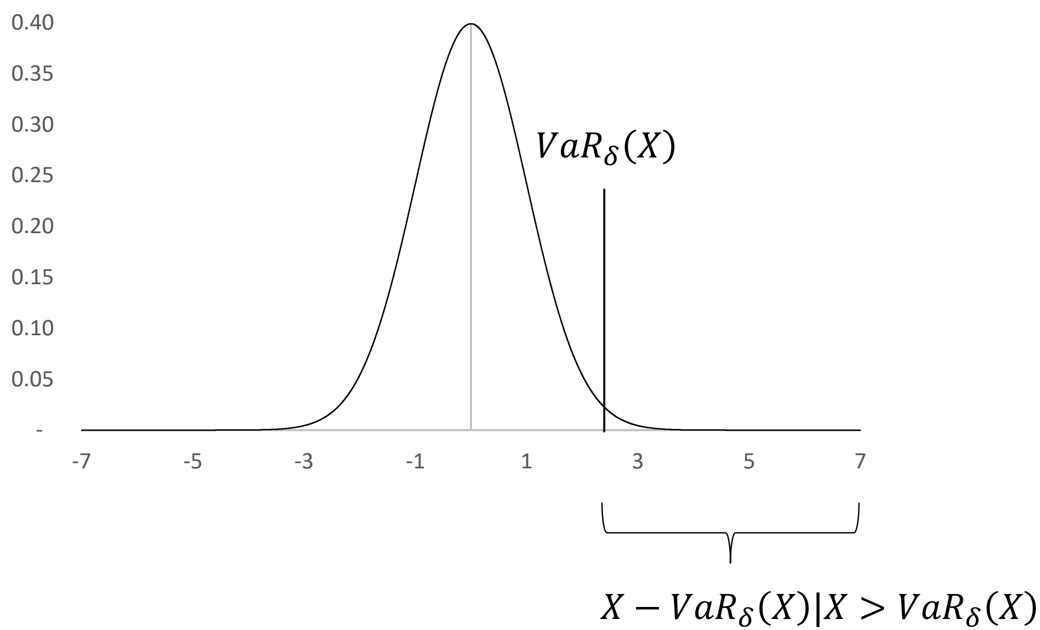
$$f_{X|X>x_\delta}(x) = \frac{f_X(x)}{Prob[X>x_\delta]} = \frac{f_X(x)}{S_X(x_\delta)}$$ para $x \in (x_\delta, \infty)$, entonces:

$$CTE_\delta = E[X|X > x_\delta] = \int_{x_\delta}^{\infty} x \cdot f_{X|X>x_\delta}(x) dx = \int_{x_\delta}^{\infty} x \frac{f_X(x)}{S_X(x_\delta)}\ dx = \int_{x_\delta}^{\infty} x \frac{f_X(x)}{1-\delta}\ dx = \frac{1}{1-\delta}\int_{x_\delta}^{\infty} x f_X(x)\ dx$$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Una medida de interés es la pérdida en exceso del VaR:

$$X - VaR_{\delta}(X) | X > VaR_{\delta}(X) \tag{4.11}$$



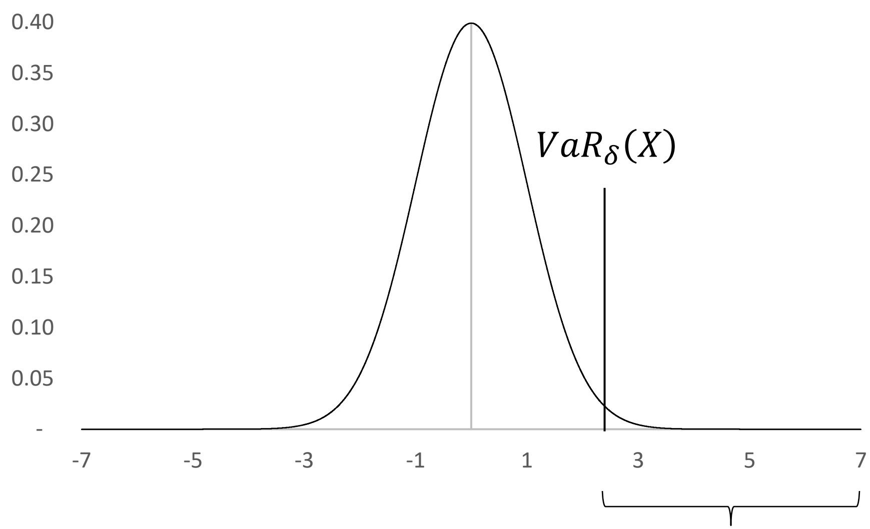
4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

En particular, nos interesa el valor esperado de las pérdidas en exceso al VaR, llamada **Valor en Riesgo Condicionado**, $CVaR_{\delta}(X)$:

$$CVaR_{\delta}(X) = E[X - VaR_{\delta}(X)|X > VaR_{\delta}(X)] \tag{4.12}$$

$$= E[X|X > VaR_{\delta}(X)] - E[VaR_{\delta}(X)|X > VaR_{\delta}(X)]$$

$$= CTE_{\delta}(X) - VaR_{\delta}(X) \tag{4.13}$$



$CVaR_{\delta}(X) = E[X - VaR_{\delta}(X)|X > VaR_{\delta}(X)]$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Aplicación

La evaluación de la adecuación del capital es uno de los aspectos más críticos de la supervisión bancaria.

Al completar esta evaluación, los supervisores se centran en una comparación de la protección de capital disponible de un banco con sus necesidades de capital en función del perfil de riesgo general del banco.

Asimismo, la dirección del banco debe evaluar continuamente la adecuación del capital en relación con el riesgo.

En los últimos años, muchos bancos han adoptado técnicas de modelado avanzadas destinadas a mejorar su capacidad para cuantificar y gestionar los riesgos.

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

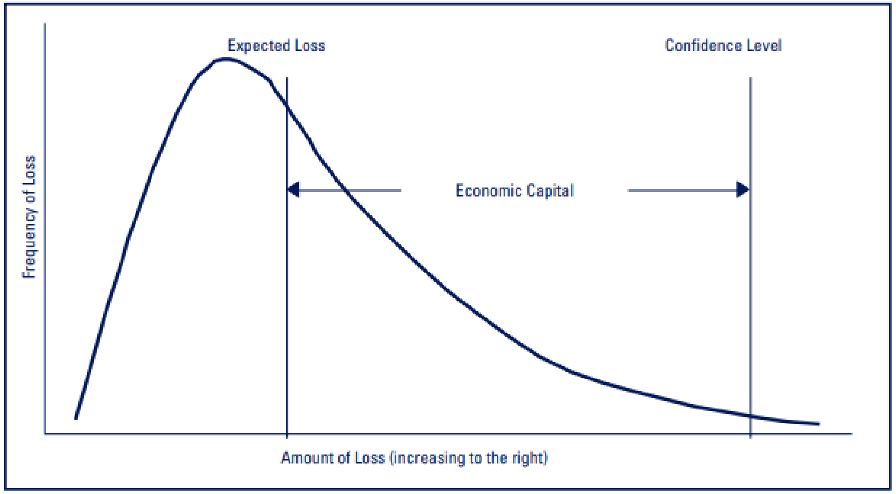
Estas técnicas de modelado frecuentemente incorporan la asignación interna de *capital económico* que se considera necesario para respaldar los riesgos asociados con líneas de negocios, carteras o transacciones individuales dentro del banco.

Como resultado, los modelos de capital económico pueden brindar información valiosa que los banqueros y los supervisores utilizan en su evaluación general de la suficiencia de capital de un banco.

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Conceptualmente, el capital económico se expresa como una protección contra pérdidas futuras no esperadas dado un nivel de confianza seleccionado. Véase el Chart 1.

Chart 1. Economic Capital



La ***pérdida esperada*** es la pérdida promedio esperada durante un período definido, y representan el costo de hacer negocios por lo que se establece en el precio.

Las ***pérdidas no esperadas*** son la posibilidad de que la pérdida real supere la pérdida esperada, por lo que es una medida de la incertidumbre inherente a la estimación de la pérdida. Es esta posibilidad de que ocurran pérdidas no esperadas la que requiere la tenencia de protección de capital.

El ***capital económico*** se define como la diferencia entre algún percentil dado de una distribución de pérdidas y la pérdida esperada.

El nivel de confianza lo establece la alta dirección del banco y puede verse como el riesgo de insolvencia durante un período definido en el que la administración ha elegido operar. Cuanto mayor sea el nivel de confianza seleccionado, menor será la probabilidad de insolvencia.

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Específicamente, el uso de tales modelos puede:

- Contribuir a un sistema de precios más completo que cubra las pérdidas esperadas;
- Ayudar en la evaluación de la adecuación del capital en relación con el el perfil de riesgo general del banco;
- Desarrollar medidas de rendimiento ajustadas al riesgo que proporcionen una mejor evaluación de los rendimientos y la volatilidad de los rendimientos, y
- Mejorar los esfuerzos de gestión de riesgos proporcionando una moneda común para el riesgo.

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Ejemplo 4.5. Determine el CTE_δ y el $CVaR_\delta(X)$ de las distribuciones de pérdidas X siguientes:

a) $X \sim exp(\lambda)$

b) $X \sim lognormal(\mu, \sigma^2)$

c) $X \sim Pareto(\alpha, \gamma)$ con $\alpha > 1$.

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Solución. a) Encontremos $CTE_\delta(X)$ para $X \sim exp(\lambda)$.

Sabemos que $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$; y que

$$CTE_\delta(X) = E[X|X > x_\delta] = \frac{1}{1-\delta}\int_{x_\delta}^{\infty} x f_X(x)\ dx = \frac{1}{1-\delta}\int_{x_\delta}^{\infty} x\,\lambda e^{-\lambda x} dx$$

Hacemos $\lambda \int_{x_\delta}^{\infty} x e^{-\lambda x} dx$ por partes:

$u = x \Rightarrow du = dx$ (los límites de integración de u son los mismos que x)

$dv = e^{-\lambda x} dx \ \Rightarrow v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$

$$\lambda \int_0^M x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_{x_\delta}^{\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_{x_\delta}^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right] = -\left(0 - x_\delta e^{-\lambda x_\delta}\right) - \frac{1}{\lambda}\left(0 - e^{-\lambda x_\delta}\right) = x_\delta e^{-\lambda x_\delta} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x_\delta}$$

$$= \frac{1}{1-\delta}\left[x_\delta e^{-\lambda x_\delta} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x_\delta} \right] = \frac{e^{-\lambda x_\delta}}{1-\delta}\left[x_\delta + \frac{1}{\lambda} \right] = x_\delta + \frac{1}{\lambda}$$

pues $1 - \delta = Prob[X > x_\delta] = 1 - F_X(x_\delta) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda x_\delta}\right) = e^{-\lambda x_\delta}$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Ahora encontremos el $CVaR_\delta$ para $X \sim exp(\lambda)$:

$$CVaR_\delta(X) = CTE_\delta(X) - VaR_\delta(X)$$

Y dado que $VaR_\delta(X) = x_\delta$, entonces:

$$= \left[x_\delta + \frac{1}{\lambda}\right] - [x_\delta]$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

Por lo tanto, para $X \sim exp(\lambda)$:

$$CTE_\delta(X) = x_\delta + \frac{1}{\lambda}$$

y

$$CVaR_\delta(X) = \frac{1}{\lambda}$$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

b) Encontramos $CTE_\delta(X)$ para $X \sim lognormal(\mu, \sigma^2) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$:

$$CTE_\delta(X) = E[X|X > x_\delta] = \frac{1}{1-\delta}\int_{x_\delta}^{\infty} x f_X(x)\ dx = \frac{1}{1-\delta}\int_{x_\delta}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Sea $z = \frac{ln(x)-\mu-\sigma^2}{\sigma}$, entonces $e^{-\frac{(z+\sigma)^2}{2}} = e^{-\frac{\left(\frac{ln(x)-\mu-\sigma^2}{\sigma}+\sigma\right)^2}{2}} = e^{-\frac{(ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Por otro lado: $e^{-\frac{(z+\sigma)^2}{2}} = e^{-\frac{z^2}{2}} e^{-\sigma z-\frac{\sigma^2}{2}}$

Además, dado que $z = \frac{ln(x)-\mu-\sigma^2}{\sigma}$, entonces $e^{(z+\sigma)\sigma+\mu} = x$, que usamos para obtener

$dx = \sigma e^{(z+\sigma)\sigma+\mu} dz = \sigma e^{z\sigma+\sigma^2+\mu} dz$, entonces:

$$\frac{1}{1-\delta}\int_{x_\delta}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{1-\delta}\int_{z*}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cancel{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} e^{\cancel{-\sigma z}-\frac{\sigma^2}{2}} \cancel{\sigma} e^{\cancel{z\sigma}+\sigma^2+\mu} dz = \frac{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{1-\delta}\int_{z*}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{1-\delta} \times [1-\Phi(z^*)] \quad \text{donde } z^* = \frac{ln(x_\delta)-\mu-\sigma^2}{\sigma}$$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Ahora bien, para determinar x_δ, se tiene que:

$$\delta = Prob[X \leq x_\delta]$$

$$= Prob[ln(X) \leq ln(x_\delta)]$$

$$= Prob[N(\mu, \sigma^2) \leq ln(x_\delta)]$$

$$= Prob\left[Z \leq \frac{ln(x_\delta) - \mu}{\sigma}\right]$$

Donde $Z \sim N(0,1)$. Entonces $\frac{ln(x_\delta)-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\delta)$; donde $\Phi^{-1}(\cdot)$ es el cuantil de la función normal estándar. Así entonces

$$x_\delta = e^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(\delta)}$$

$$CTE_\delta(X) = \frac{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{1-\delta} \times [1 - \Phi(z^*)] \text{ con } z^* = \frac{ln\left(e^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(\delta)}\right)-\mu-\sigma^2}{\sigma} = \Phi^{-1}(\delta) - \sigma$$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Ahora se determina el $CVaR_\delta(X)$ para $X \sim lognormal(\mu, \sigma^2)$:

$$CVaR_\delta(X) = CTE_\delta(X) - VaR_\delta(X)$$

$$= \frac{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{1-\delta} \times [1-\Phi(z^*)] - exp^{(\mu+\Phi^{-1}(\delta)\sigma)}$$

Por lo tanto, para $X \sim lognormal(\mu, \sigma^2)$:

$$CTE_\delta(X) = \frac{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{1-\delta} \times [1-\Phi(z^*)] \text{ con } z^* = \frac{ln\left(e^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(\delta)}\right) - \mu - \sigma^2}{\sigma} = \Phi^{-1}(\delta) - \sigma$$

y

$$CVaR_\delta(X) = \frac{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{1-\delta} \times [1-\Phi(z^*)] - exp^{(\mu+\Phi^{-1}(\delta)\sigma)}$$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

c) Encontramos $CTE_\delta(X)$ para $X\sim Pareto(\alpha,\gamma) \Rightarrow f_X(x) = \frac{\alpha\gamma^\alpha}{(x+\gamma)^{\alpha+1}}$ con $x \geq 0$; $\alpha > 1$; $\gamma > 0$:

$$CTE_\delta(X) = E[X|X > x_\delta] = \frac{1}{1-\delta}\int_{x_\delta}^{\infty} x f_X(x)\ dx = \frac{\alpha\gamma^\alpha}{1-\delta}\int_{x_\delta}^{\infty}\frac{x}{(x+\gamma)^{\alpha+1}}dx$$

Sea $u = x$, entonces $du = dx$; $dv = \frac{1}{(x+\gamma)^{\alpha+1}}dx$, entonces $v = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{(x+\gamma)^\alpha}$

Entonces haciendo la integral por partes queda:

$$\frac{\alpha\gamma^\alpha}{1-\delta}\int_{x_\delta}^{\infty} udv = \frac{\alpha\gamma^\alpha}{1-\delta}\left[uv\Big|_{x_\delta}^{\infty} - \int_{x_\delta}^{\infty} vdu\right] = \frac{\alpha\gamma^\alpha}{1-\delta}\left[-x\frac{1}{\alpha}\frac{1}{(x+\gamma)^\alpha}\ \Bigg|_{x_\delta}^{\infty} - \int_{x_\delta}^{\infty} -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{(x+\gamma)^\alpha}dx\right]$$

$$= \frac{\gamma^\alpha}{1-\delta}\left[-\frac{x}{(x+\gamma)^\alpha}\ \Bigg|_{x_\delta}^{\infty} + \int_{x_\delta}^{\infty}\frac{1}{(x+\gamma)^\alpha}dx\right] = \frac{\gamma^\alpha}{1-\delta}\left[-\left(0 - \frac{x_\delta}{(x_\delta+\gamma)^\alpha}\right) + \int_{x_\delta}^{\infty}\frac{1}{(x+\gamma)^\alpha}dx\right]$$

$$= \frac{\gamma^\alpha}{1-\delta}\left[\frac{x_\delta}{(x_\delta+\gamma)^\alpha} + \frac{1}{-\alpha+1}\times\frac{1}{(x+\gamma)^{\alpha-1}}\Bigg|_{x_\delta}^{\infty}\right] = \frac{\gamma^\alpha}{1-\delta}\left[\frac{x_\delta}{(x_\delta+\gamma)^\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}\times\left(-0 + \frac{1}{(x_\delta+\gamma)^{\alpha-1}}\right)\right]$$

$$= \frac{\gamma^\alpha}{1-\delta}\left[\frac{x_\delta}{(x_\delta+\gamma)^\alpha} - \frac{1}{\alpha-1}\times\frac{1}{(x_\delta+\gamma)^{\alpha-1}}\right] = \frac{1}{1-\delta}\left[x_\delta\left(\frac{\gamma}{(x_\delta+\gamma)}\right)^\alpha + \frac{\gamma^\alpha}{(\alpha-1)(x_\delta+\gamma)^{\alpha-1}}\right]$$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Y sabemos que el VaR para la Pareto es $\delta = 1 - \left(\frac{\gamma}{x_\delta+\gamma}\right)^\alpha \Rightarrow \left(\frac{\gamma}{x_\delta+\gamma}\right)^\alpha = 1 - \delta$, entonces sustituyendo en el resultado de la integral, se obtiene:

$$CTE_\delta(X) = E[X|X > x_\delta] = \frac{1}{1-\delta}\int_{x_\delta}^{\infty} x f_X(x)\ dx$$

$$= \frac{1}{1-\delta}\left[x_\delta\left(\frac{\gamma}{(x_\delta+\gamma)}\right)^\alpha + \frac{\gamma^\alpha}{(\alpha-1)(x_\delta+\gamma)^{\alpha-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{1-\delta}\left[x_\delta(1-\delta) + \frac{(x_\delta+\gamma)}{(\alpha-1)}\frac{\gamma^\alpha}{(x_\delta+\gamma)^\alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{1-\delta}\left[x_\delta(1-\delta) + \frac{(x_\delta+\gamma)}{(\alpha-1)}(1-\delta)\right]$$

$$= x_\delta + \frac{x_\delta+\gamma}{\alpha-1}$$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Ahora se determina el $CVaR_\delta(X)$ para $X \sim Pareto(\alpha, \gamma)$:

$$CVaR_\delta(X) = CTE_\delta(X) - VaR_\delta(X)$$

$$= x_\delta + \frac{x_\delta + \gamma}{\alpha - 1} - x_\delta$$

$$= \frac{x_\delta + \gamma}{\alpha - 1}$$

Por lo tanto, para $X \sim lognormal(\mu, \sigma^2)$:

$$CTE_\delta(X) = x_\delta + \frac{x_\delta + \gamma}{\alpha - 1}$$

y

$$CVaR_\delta(X) = \frac{x_\delta + \gamma}{\alpha - 1} \quad \blacksquare$$

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

Si X es continua, entonces $CTE_\delta = E[X|X > VaR_\delta]$ satisface los Axiomas siguientes:

- Axioma 4.1. Invariancia traslacional (T): $\varrho(X+a) = \varrho(X) + a$
- Axioma 4.2. Subaditividad (S): $\varrho(X+Y) \leq \varrho(X) + \varrho(Y)$.
- Axioma 4.3. Homogeneidad positiva (PH): $\varrho(aX) = a\varrho(X)$.
- Axioma 4.4 Monotonicidad (M): Si $X \leq Y$, entonces $\varrho(X) \leq \varrho(Y)$.

Recuerde además que si X es continua, se tiene que $CVaR = ES = TVaR = CTE_\delta$.

Es decir, $CVaR = ES = TVaR = CTE_\delta$ **es una medida coherente de riesgo**.

Medidas de riesgo

4.4 Algunas medidas de riesgo basadas en el capital

$CVaR = ES = TVaR = CTE_{\delta}$ **es una medida coherente de riesgo**.

Tema Selecto

Tópicos de Teoría del Riesgo

Francisco García Castillo