Tema Selecto en Derivados Exóticos

Opciones exóticas

Francisco García Castillo

Introducción

Los derivados como las opciones call y put europeas y americanas son productos *plain vanilla*. Como ya vimos en los días anteriores, tienen propiedades bien definidas y se comercializan de manera activa en el mercado: sus precios y volatilidades se negocian de manera regular.

Sin embargo, se tienen productos no estandarizados que han sido creados en el mercado OTC, llamados **opciones exóticas**.

A pesar de que generalmente forman una pequeña parte de los portafolios, son muy importantes para los *dealers* e inversionistas porque son más redituables que los productos *vanilla*.

Introducción

Los productos exóticos se han desarrollado por un gran número de razones: cobertura en el mercado, razones legales, beneficios fiscales o regulatorias, etc.

A menudo los derivados exóticos se diseñan ante las expectativas de un movimiento potencial en alguna variable del mercado o con el fin de ser más atractivos para un tesorero.

En este curso se analizan los derivados exóticos más comunes y su valuación, en cual generalmente cae en el mundo B-S-M.

Introducción

Tipos de derivados exóticos

Packages

- Principal-protected notes
- Derivados sintéticos
  - Call sintético largo o protective put strategy
  - Put sintético largo o reverse of writing a covered call
  - Call sintético corto o reverse of protective put.
  - Put sintético corto o writing a covered call
  - Spreads

Introducción

Opciones Binarias:

- Gap
- Cash or nothing
- Asset or nothing
- Chooser options

Introducción

Opciones con Valor Dependiente

- Barrera
- Parisinas
- Asiáticas
- Lookback

Introducción

Otras Opciones

- Compuestas
- Opciones que intercambian un activo por otro
- Opciones que involucran más de un activo
- Nonstandard American Options
- Swaps de Volatilidades y Varianzas

Introducción

Derivados de tasas de interés:

- Opciones de bonos;
- Interest rate caps, floors y collars;
- Opciones swap.

Paquetes (Packages)

Un paquete o *packages* es un portafolio que puede consistir en opciones europeas (puts y calls), forwards, efectivo y el mismo activo subyacente.

Entre los productos más conocidos están los *principal-protected notes*, estrategias que involucran opciones y el activo subyacente (V + S), *bull spreads*, *bear spreads*, *butterfly spreads*, *calendar spreads*, *straddles*, *strangles*, etc.

A menudo los paquetes están diseñados para que tengan un costo cercano a cero al momento en que se contratan.

Paquetes (Packages)

Principal-protected notes

Son instrumentos muy utilizados en el mercado retail, ya que son productos atractivos para inversionistas conservadores, puesto que el rendimiento depende del comportamiento de una acción, de un índice accionario o de otro activo con riesgo, **pero el principal invertido no está en riesgo**.

Paquetes (Packages)

El *principal-protected note* es una nota estructurada; pero, ¿qué son las notas estructuradas?

Típicamente, son vehículos que permiten la inversión en un portafolio que combina instrumentos de renta fija con instrumentos derivados. Instrumentos con varios componentes, que al estructurarse en un sólo vehículo, permiten un mayor entendimiento por los inversionistas, facilitándose su distribución.

Estos instrumentos financieros contienen un valor que está ligado a la calidad crediticia de un activo subyacente, un emisor o un índice.

Fuente: Evolución y análisis del mercado de derivados en México. María Luisa Saavedra García y Jorge Octavio Utrilla Armendáriz. Disponible en http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0187-57952009000300012

Paquetes (Packages)

Ejemplo. Sea una inversión ldr a 3 años que genera el 6%, entonces se requiere una inversión de \$835.27 ($=1{,}000e^{-0.06X3}$) para que en 3 años se obtenga \$1,000, y la ganancia obtenida sería de \$164.73.

Además suponga que un portafolio de acciones vale \$1,000 y ofrece un dividendo del 1.5% anual. Suponga además que la prima de una opción de compra europea ATM con vencimiento en 3 años de este portafolio es menor a \$164.73.

Con este escenario, su banco puede ofrecerle una inversión con un capital inicial de \$1,000 que consiste en:

1. Un bono cupón cero a 3 años con un valor nominal de \$1,000.
2. Una opción de compra europea ATM con vencimiento en 3 años sobre el portafolio accionario con un precio menor a \$164.73.

Paquetes (*Packages*)

En el vencimiento se tendrían los siguientes posibles resultados:

1. Si el valor del portafolio accionario se incrementa de tal forma que $S_T>1{,}000$, entonces el inversionista obtiene = $\$1{,}000 + \{S_T-1{,}000\} = S_T$ (>>1,000, es decir, mayor al valor nominal del bono).
2. Si el valor del portafolio S_T cae, la opción no tiene valor, pero el pago del bono cupón cero asegura que el cliente recibirá $1,000 (ganó cero, pues su inversión inicial fue de $1,000).

Lo atractivo de estos productos es que los inversionistas pueden tomar una posición en riesgo sin arriesgar el principal, ya que lo peor que puede ocurrir es que el inversionista pierda sus intereses o dividendos, sobre la inversión inicial.

Paquetes (*Packages*)

Para la construcción de las *principal-protected notes* se tiene un sinfín de variaciones.

Ejemplo. Con base en el ejercicio anterior, si el inversionista considera que el precio de un activo caerá en el futuro, entonces puede construir una Nota que consista en un bono cupón cero con valor nominal de \$1,000 más una posición larga de una opción put. Así, el retorno de la inversión en 3 años sería:

$$\$1{,}000 + Max\{K - S_T, 0\}.$$

Paquetes (*Packages*)

La **ganancia del banco** se obtiene en la construcción misma de la Nota, es decir, de los ejemplos anteriores, el bono cupón cero + la prima de la opción ≤ Valor Nominal del Bono cupón cero.

Para que esto suceda, debe ocurrir que la prima de la opción sea lo suficientemente pequeña para que le garantice al banco tanto la construcción de la nota así como su rendimiento.

Paquetes (*Packages*)

Para lograr lo anterior, el banco puede determinar el precio de ejercicio de la opción.

Por ejemplo, recuerde que a mayor K, el precio del call disminuye; y en la determinación del precio de ejercicio puede que prefiera el promedio del precio observado y no un valor de K específico; o el mínimo, o el máximo; así como también puede considerar el vencimiento: tal vez conformando una Nota a 5 ó 7 años y no a 3 como en el ejemplo.

Paquetes (*Packages*)

Derivados sintéticos

Para la construcción de los derivados sintéticos asumiremos como el activo a una acción, así como el pago del subyacente sobre ésta; es decir, la acción y un derivado sobre la acción.

Existen estrategias donde se involucra una acción y la opción sobre esa acción. Veamos algunos ejemplos de estas estrategias.

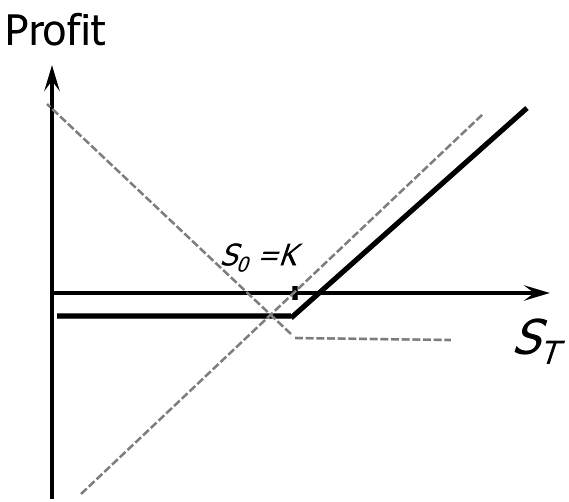
Paquetes (*Packages*)

Call sintético largo o *protective put strategy.* Ante la perspectiva a la alza en el precio de un activo, se puede construir un portafolio con la posición larga de la acción y la posición larga de un put Europeo sobre esa acción ATM (suponiendo que en t_0, $S_0=K$).

Determine la función de pagos de este portafolio.

Paquetes (*Packages*)

Call sintético largo o *protective put strategy*



	$S_T \leq K$	$K \leq S_T$
S_T	$S_T - S_0 = S_T - K$	$S_T - S_0 = S_T - K$
$p(S_T, K, T) = Max\{K - S_T, 0\}$	$\{K - S_T\} - p$	$-p$
Suma	$-p$	$\{S_T - K\} - p$

Claramente, el resultado que se obtiene es un call (sintético) largo, lo cual se explica gracias a la paridad put-call:

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S_t$$

Paquetes (*Packages*)

Put sintético largo o *reverse of writing a covered call.* Ante una perspectiva a la baja en el precio de una acción, se puede construir un portafolio con una posición corta de la acción y una posición larga de un call Europeo sobre esa acción ATM (suponiendo que en t_0, $S_0=K$).

Determine la función de pagos.

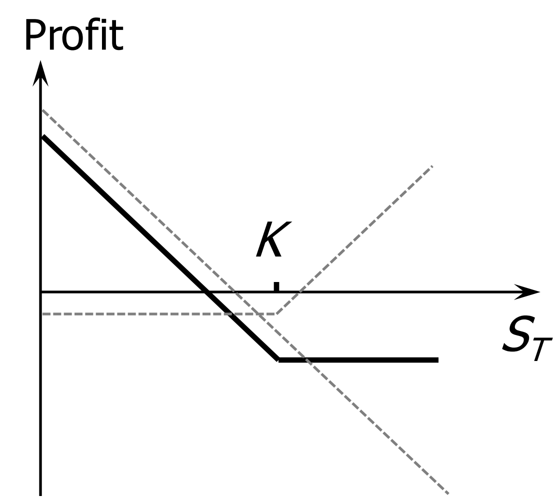
Paquetes (*Packages*)

Put sintético largo o *reverse of writing a covered call*

	$S_T \leq K$	$K \leq S_T$
S_T	$-\{S_T - S_0\} = -\{S_T - K\}$	$-\{S_T - S_0\} = -\{S_T - K\}$
$+c(S_T, K, T) = Max\{S_T - k, 0\}$	$-c$	$\{S_T - k\} - c$
Suma	$\{K - S_T\} - c$	$-c$

Nuevamente, se obtiene un put largo que se explica gracias a la paridad put-call:

$$c - S_t = p - Ke^{-r(T-t)}$$



Paquetes (*Packages*)

Call sintético corto o *reverse of protective put.* Ante una perspectiva a la baja en el precio de una acción, se puede construir un portafolio con la posición corta de la acción y de un put Europeo sobre esa acción ATM (suponiendo que en t_0, $S_0=K$).

Determine la función de pagos.

Paquetes (*Packages*)

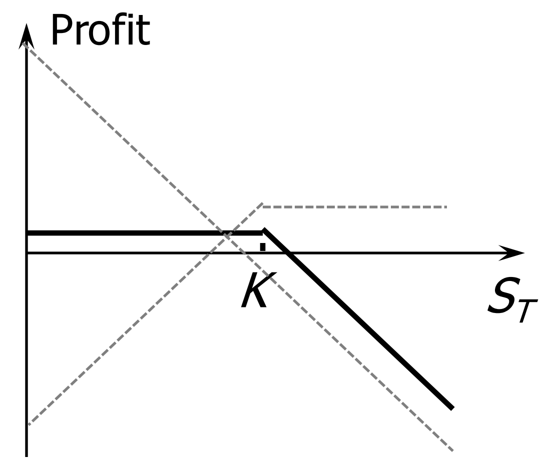
Call sintético corto o *reverse of protective put*

Se obtiene un call corto por la paridad put-call:

	$S_T \leq K$	$K \leq S_T$
S_T	$-\{S_T - S_0\} = -\{S_T - K\}$	$-\{S_T - S_0\} = -\{S_T - K\}$
$p(S_T, K, T) = -Max\{K-S_T, 0\}$	$-\{K - S_T\} + p$	$+p$
Suma	$+p$	$-\{S_T - K\} + p$

Se obtiene un call corto por la paridad put-call:

$$-\mathrm{p} - S_t = -\mathrm{c} - Ke^{-r(T-t)}$$



Paquetes (*Packages*)

Put sintético corto o *writing a covered call*

Ante una perspectiva a la alza en el precio de una acción, se puede construir un portafolio con la posición larga de la acción y una posición corta de un call Europeo sobre esa acción ATM (suponiendo que en t_0, $S_0=K$).

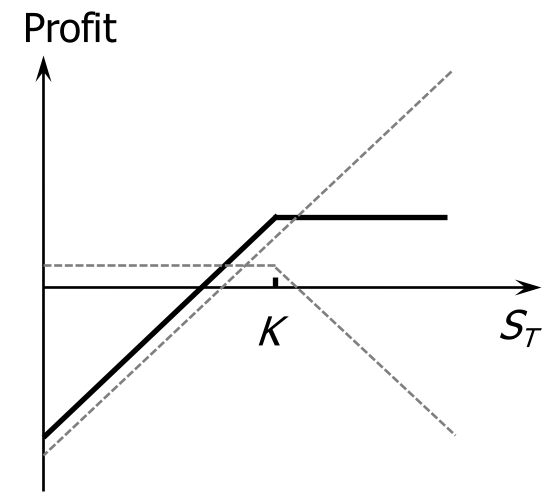
Describa la función de pagos.

Paquetes (*Packages*)

Put sintético corto o *writing a covered call*

Ante una perspectiva a la alza en el precio de una acción, se puede construir un portafolio con la posición larga de la acción y una posición corta de un call Europeo sobre esa acción ATM (suponiendo que en t_0, S_0=K).

	$S_T \leq K$	$K \leq S_T$
S_T	$S_T - S_0 = S_T - K < 0$	$S_T - S_0 = S_T - K > 0$
c(S_T, K, T)= -Max{S_T-K,0}	+ c	- {S_T – K} + c
Suma	{S_T – K} + c	+ c



Paquetes (*Packages*)

Spreads: Es una estrategia que involucra una posición en dos o más opciones del mismo tipo; es decir, dos o más calls o puts. Los productos más conocidos son el Bull Spread, Bear Spread, Box Spreads, Butterfly Spreads, Calendar Spreads y Diagonal Spreads.

Para entender estas estrategias es importante considerar primero el impacto que tiene cada uno de los parámetros en la valoración de las opciones, las cuales se resumen en la siguiente tabla.

Paquetes (*Packages*)

Efecto en el precio de una opción ante el incremento de la variable relevante, manteniendo las demás constantes.

Variable	c	p	C	P
S_0	+	−	+	−
K	−	+	−	+
T	?	?	+	+
σ	+	+	+	+
r	+	−	+	−
D	−	+	−	+

\+ indica que el incremento en la variable de interés incrementa el precio de la opción.
\- indica que el incremento en la variable de interés incrementa el precio de la opción.
? Indica que la relación es incierta.
Fuente: Hull

Paquetes (*Packages*)

RECORDATORIO (B-S-M):

$$c = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$p = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

Donde $d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$; $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ y $\mathrm{N}(d_i) = \int_{-\infty}^{d_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$

Paquetes (*Packages*)

Bull spread. Es una estrategia construida con opciones call o con opciones put que está orientada a la alza en el precio del subyacente; es decir, se construye cuando se espera que el precio del activo se va incrementar. El Bull spread es uno de los spreads más populares.

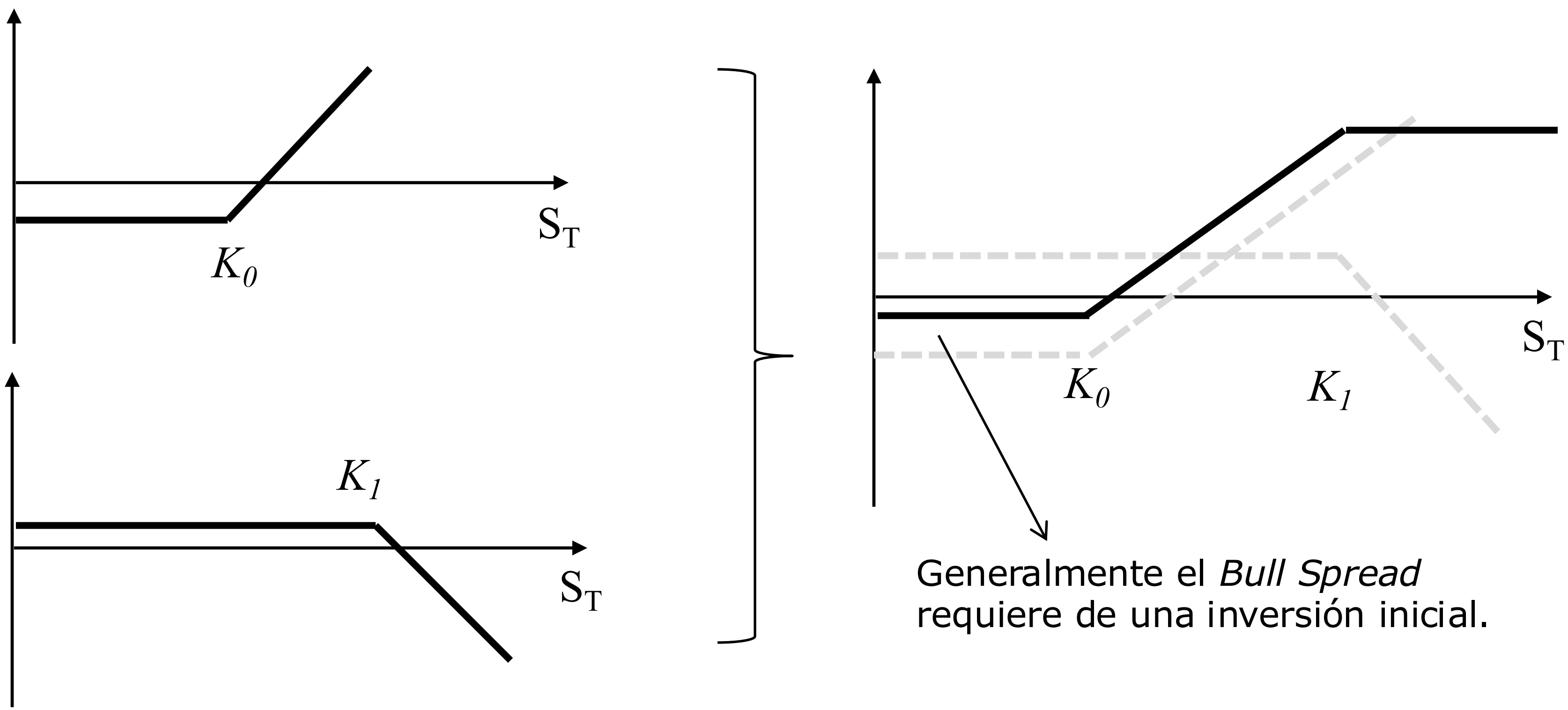
Paquetes (*Packages*)

Bull spread con opciones call. Largo en una opción call con K_0 y corto en una opción call con K_1 tal que $K_1 > K_0$ y la misma T.

Construya la gráfica de la función de pagos de esta estrategia, recordando que dado que el precio del call disminuye cuando K se incrementa, el valor de la opción corta, que tiene un precio de ejercicio de K_1, deberá ser más barata que la opción de compra, que tiene un precio de ejercicio $K_0<K_1$.

Paquetes (*Packages*)

La función de pagos es la siguiente:



La estrategia limita el lado positivo y negativo del inversionista, quien tiene una opción call larga con un precio de ejercicio K_0, pero renunciando a las ganancias si está muy en el dinero al tener un call corto con un precio de ejercicio K_1. A cambio de esta renuncia, el inversionista consigue un precio más barato.

Paquetes (*Packages*)

La tabla de pagos del Bull spread construido con calls es la siguiente, en cual se determina con base en los posibles valores que puede tener S_T:

Rango de S_T	Pago del call largo $Max\{S_T-K_0,0\}$	Pago del call corto $-Max\{S_T-K_1,0\}$	Pago total
$S_T < K_0$	$-c_{Largo}$	$+c_{Corto}$	$c_{Corto} - c_{Largo}$
$K_0 < S_T < K_1$	$S_T - K_0 - c_{Largo}$	$+c_{Corto}$	$S_T - K_0 + c_{Corto} - c_{Largo}$
$K_1 < S_T$	$S_T - K_0 - c_{Largo}$	$K_1 - S_T + c_{Corto}$	$K_1 - K_0 + c_{Corto} - c_{Largo}$

Paquetes (*Packages*)

Laboratorio. Un inversionista compra un call con un vencimiento a 3 meses y un *strike price* de $30 en $3; y vende un call con el mismo vencimiento y un *strike price* de $35 en $1. Determine la función de pagos.

Paquetes (*Packages*)

Laboratorio (Continuación)

Rango de S_T	Pago del call largo Max{S_T-30,0} - 3	Pago del call corto -Max{S_T-35,0} + 1	Pago total
$S_T < 30$			
$30 < S_T < 35$			
$35 < S_T$			

Paquetes (*Packages*)

Laboratorio (Bull spread con opciones put). Largo en una opción put con K_0 y corto en una opción put con K_1 tal que $K_1 > K_0$ y la misma T.

Rango de S_T	Pago del put largo $Max\{K_0-S_T,0\}$	Pago del Put corto $-Max\{K_1-S_T,0\}$	Pago total
$S_T < K_0$			
$K_0 < S_T < K_1$			
$K_1 < S_T$			

Paquetes (*Packages*)

Bear spread. Es una estrategia construida con opciones call o con opciones put que está orientada a la baja en el precio del subyacente; es decir, si se espera que el precio del activo va a disminuir.

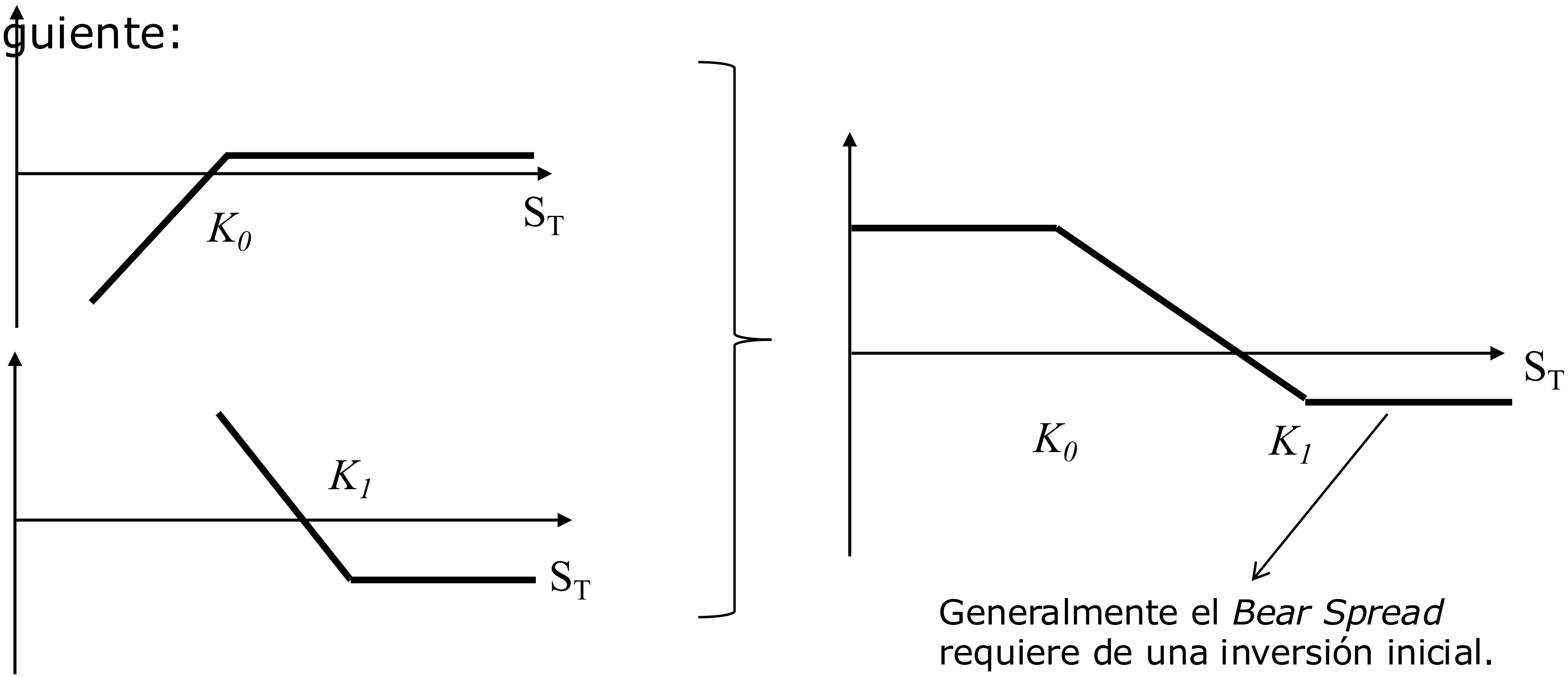
Paquetes (*Packages*)

Bear spread con opciones put. Corto en una opción put con K_0 y largo en una opción put con K_1 tal que $K_1 > K_0$ y la misma T.

Construya la gráfica de la función de pagos de esta estrategia, recordando que el precio del put se incrementa cuando K aumenta. Entonces el valor de la opción corta, que tiene un precio de ejercicio de K_0, deberá ser más barata que la opción de compra, que tiene un precio de ejercicio $K_1 > K_0$.

Paquetes (*Packages*)

La función de pagos del Bear spread construido con opciones put es la siguiente:



La estrategia limita el lado positivo y negativo del inversionista, quien tiene una opción put largo con un precio de ejercicio K_1, pero renunciando a las ganancias si está muy en el dinero al vender un put con un precio de ejercicio K_0. A cambio de esta renuncia, el inversionista consigue un precio más barato.

Paquetes (*Packages*)

Construya la tabla de pagos del Bear spread construido con opciones put.

Rango de S_T	Pago del put corto $-Max\{K_0-S_T,0\}$	Pago del put largo $Max\{K_1-S_T,0\}$	Pago total

Paquetes (*Packages*)

Laboratorio. Un inversionista compra en \$3 un put Europeo con un vencimiento a 3 meses y un *strike price* de \$35, y vende en \$1 un put Europeo con un *strike price* de \$30. Determine la función de pagos y tabule.

Paquetes (*Packages*)

Laboratorio (Continuación)

Rango de S_T	Pago del put corto $-Max\{30-S_T,0\}+1$	Pago del put largo $Max\{35-S_T,0\}-3$	Pago total
$S_T < 30 < 35$			
$30 < S_T < 35$			
$30 < 35 < S_T$			

Paquetes (*Packages*)

Box spread. Es una estrategia construida con opciones call y con opciones put que no tienen alguna expectativa en particular; es decir, es neutral ante movimientos en el precio del subyacente ya que el pago es constante, equivalente a la diferencia de los precios de ejercicio.

El Box spread es una combinación de un Bull y Bear spread. El Bull spread es construido con opciones call y precios de ejercicios K_0 y K_1, y el Bear spread es construido con opciones put con los mismos precios de ejercicio y los mismos vencimientos que el Bull spread.

Con base en esta información, obtenga la función de pagos de esta estrategia.

Paquetes (*Packages*)

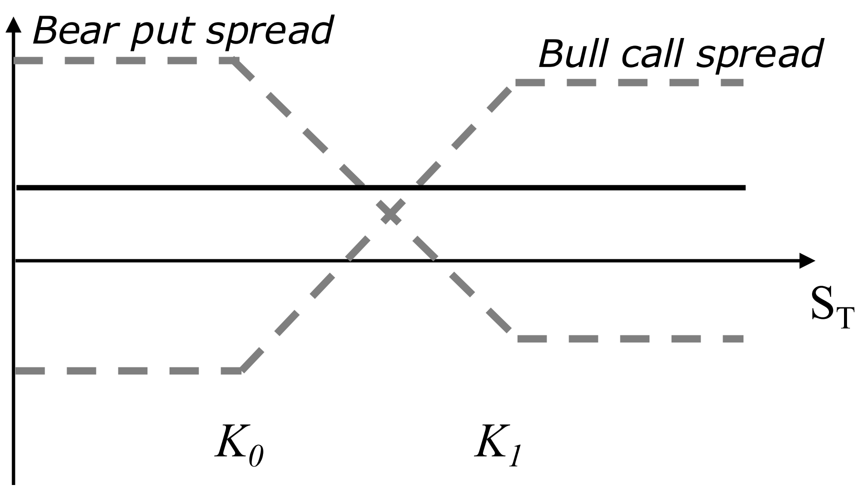
Función de pagos de un Box spread

Rango de S_T	Pago Bull Spread	Pago Bear Spread	Pago total
$S_T < K_0$	$c_{Corto} - c_{Largo}$	$K_1 - K_0 + p_{Corto} - p_{Largo}$	$[K_1 - K_0] + [p_{Corto} - p_{Largo} + c_{Corto} - c_{Largo}]$
$K_0 < S_T < K_1$	$S_T - K_0 + c_{Corto} - c_{Largo}$	$K_1 - S_T + p_{Corto} - p_{Largo}$	$[K_1 - K_0] + [p_{Corto} - p_{Largo} + c_{Corto} - c_{Largo}]$
$K_1 < S_T$	$K_1 - K_0 + c_{Corto} - c_{Largo}$	$p_{Corto} - p_{Largo}$	$[K_1 - K_0] + [p_{Corto} - p_{Largo} + c_{Corto} - c_{Largo}]$

Como se observa en la tabla con la función de pagos, el pago es el mismo independientemente del escenario [$\approx K_1 - K_0$], por lo que el valor de un Box spread debe ser su valor presente [$(K_1 - K_0)\exp^{(-r(T-t)}$].

Paquetes (*Packages*)

La gráfica de la función de pagos del Box spread es la siguiente:



La ganancia del Box spread se deriva si el costo por construir los spreads es menor que la diferencia entre K_0 y K_1 a (el pago es cierto en el Box spread, el cual cabe señalar, es pequeño).

Paquetes (*Packages*)

Laboratorio. Suponga que la acción XYZ tiene un precio spot de USD $45, y se tienen los precios siguientes:

- Put sobre la acción con vencimiento de un mes y K_0=40 ➔ $1.50
- Put sobre la acción con vencimiento de un mes y K_1=50 ➔ $6
- Call sobre la acción con vencimiento de un mes y K_0=40 ➔ $6
- Call sobre la acción con vencimiento de un mes y K_1=50 ➔ $1

Realice lo siguiente:

i. Construya el Bull spread y su patrón de pagos;

ii. Construya el Bear spread y su patrón de pagos;

iii. Construya el Box spread y su patrón de pagos;

Paquetes (*Packages*)

Laboratorio (Continuación)

Función de pagos de un Box spread

Rango de S_T	Pago Bull Spread	Pago Bear Spread	Pago total
$S_T < 40$	-5	+5.5	0.5
$40 < S_T < 50$	$S_T - 40 - 5$	$50 - S_T - 4.5$	50-40-9.5=0.5
$50 < S_T$	5	-4.5	5-4.5=0.5

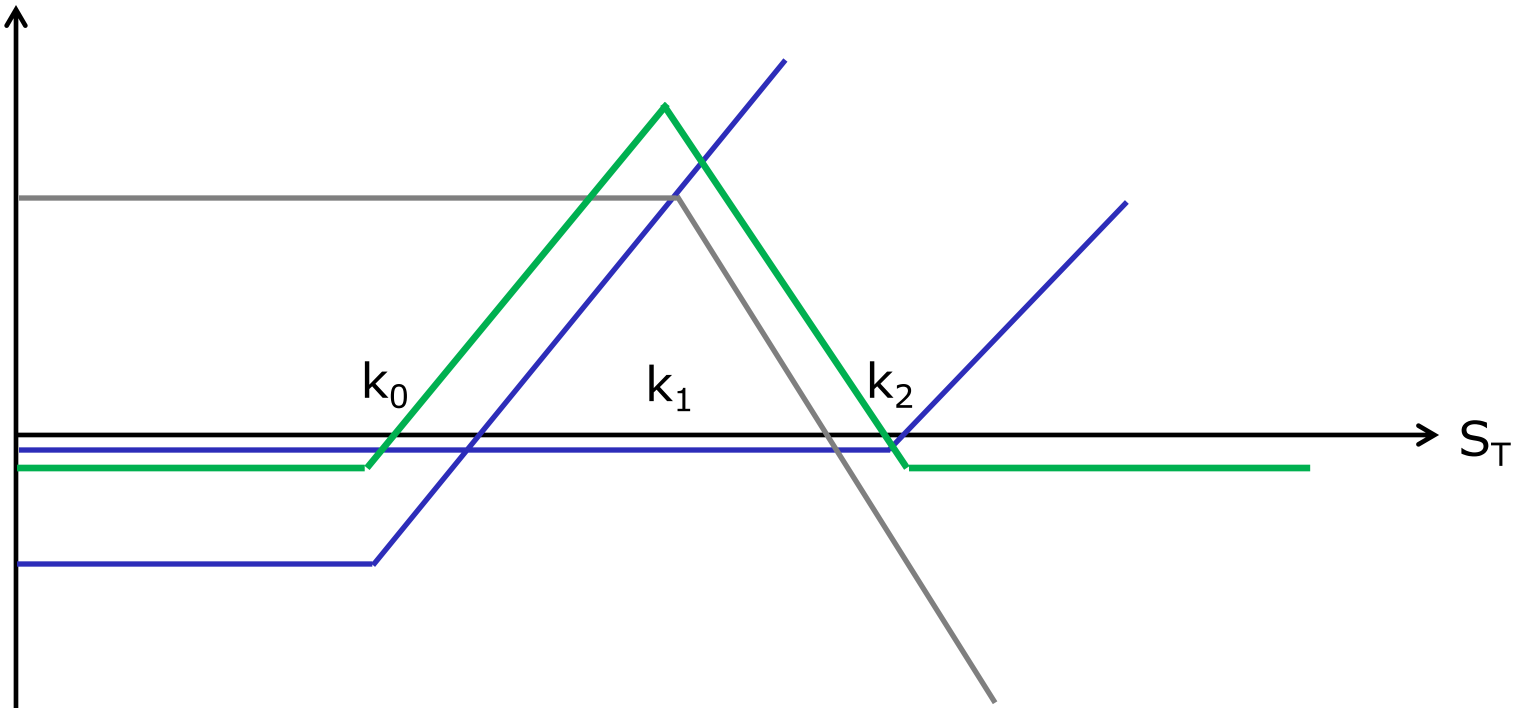
Paquetes (*Packages*)

Butterfly spreads. Es una estrategia que se construye con opciones call y opciones put que está orientada a una baja volatilidad en el precio del subyacente.

Involucra posiciones en opciones con 3 diferentes precios de ejercicio, y pueden construirse con dos posiciones largas de calls Europeos, uno con un relativo bajo precio de ejercicio K_1 y otro con un relativo alto precio de ejercicio K_3, y corto en dos opciones call Europeas con un precio de ejercicio K_2, el cual es un promedio de los dos anteriores y cercano al precio spot del activo.

Paquetes (*Packages*)

Ejemplo de un Butterfly spreads. Largo en una opción call con K_0; largo en otro call con K_2 y corto en dos opciones call con K_1 tal que $K_2 > K_1 > K_0$, y la misma T (generalmente K_1 es cercano al precio spot del activo).



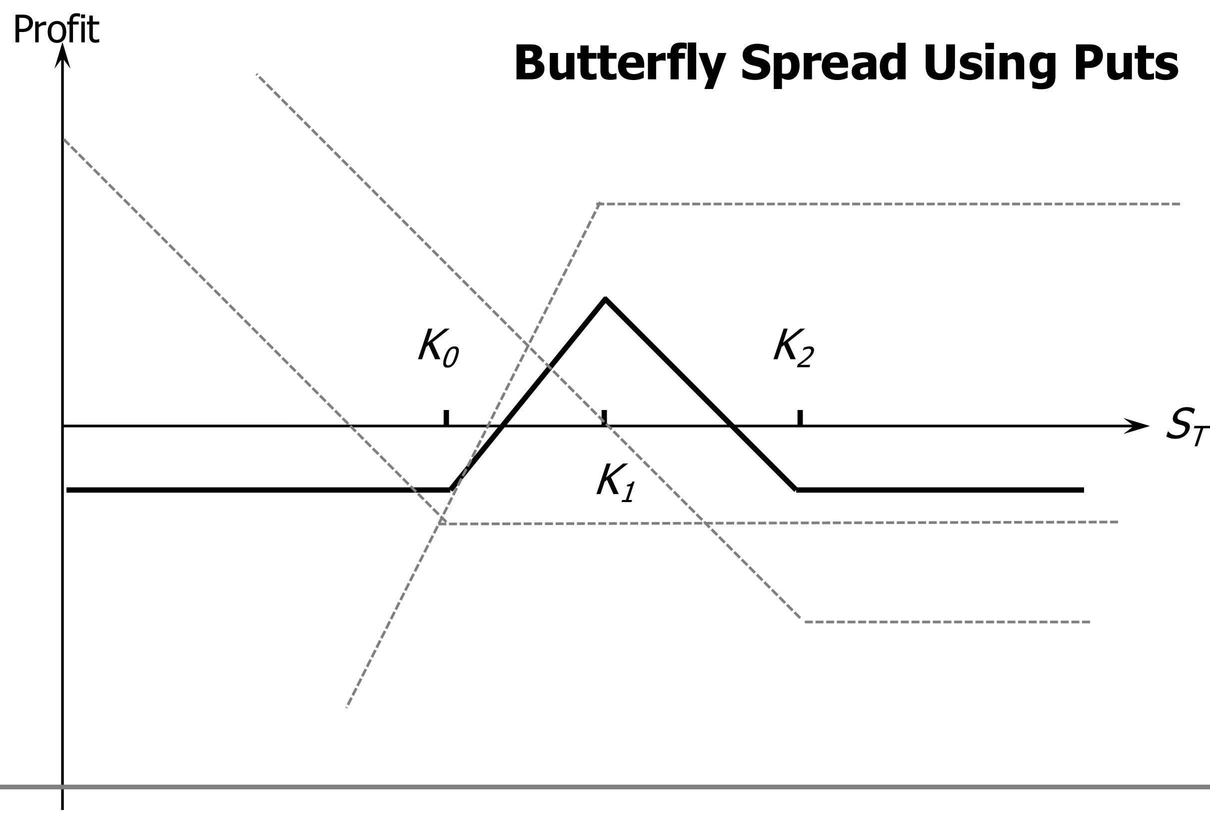
Paquetes (*Packages*)

Ejemplo de un Butterfly spreads. La tabla de pagos de esta estrategia es la siguiente:

Rango de S_T	Pago del call largo K_0 $Max\{S_T - K_0, 0\} - c_0$	Pago del call largo K_2 $Max\{S_T - K_2, 0\} - c_2$	Pago del call corto K_1 $-Max\{S_T - K_1, 0\} + 2c_1$	Pago total
$S_T < K_0$	$-c_0$	$-c_2$	$+2c_1$	$2c_1-c_0-c_2$
$K_0 < S_T < K_1$	$S_T - K_0 - c_0$	$-c_2$	$+2c_1$	$S_T - K_0 + 2c_1-c_0-c_2$
$K_1 < S_T < K_2$	$S_T - K_0 - c_0$	$-c_2$	$2(K_1-S_T)+2c_1$	$2K_1-S_T-K_0+2c_1-c_0-c_2$
$K_2 < S_T$	$S_T - K_0 - c_0$	$S_T - K_2 - c_2$	$2(K_1-S_T)+2c_1$	$2K_1-K_0-K_2+2c_1-c_0-c_2$

Paquetes (*Packages*)

También pueden construirse con opciones put a partir de la compra de dos opciones put Europeas, una con precio de ejercicio K_0 y otro con un precio de ejercicio K_2, y la venta de dos opciones puts Europeas con un precio de ejercicio K_1, tal que $K_0 < K_1 < K_2$.



Paquetes (*Packages*)

Laboratorio. Responda cuando es apropiado para un inversionista comprar un *butterfly spread*.

Laboratorio. Las opciones call sobre una acción están disponibles con precios de ejercicio de USD $15, USD $17.5 y USD $20, la fecha de expiración es en 3 meses. Sus precios son de USD $4, USD $2 y USD $0.5, respectivamente. Explique como puede utilizar estas opciones para construir un *butterfly spread*. Realice la tabla de pagos y grafique.

Laboratorio. Three put options on a stock have the same expiration date and strike prices of $55, $60, and $65. The market prices are $3, $5, and $8, respectively. Explain how a butterfly spread can be created. Construct a table showing the profit from the strategy. For what range of stock prices would the butterfly spread lead to a loss

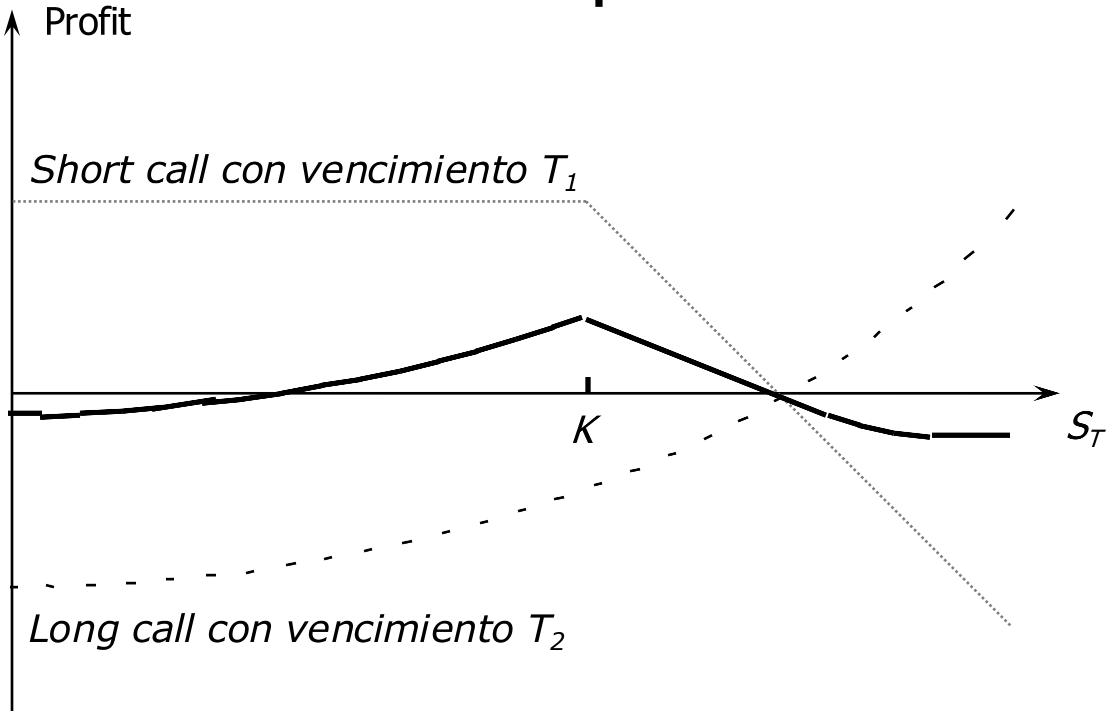
Paquetes (*Packages*)

Otros spreads: Existen otras estrategias en las cuales pueden construirse otros spreads; como por ejemplo, aquellos construidos a partir de combinaciones de opciones con un mismo precio de ejercicio pero diferentes vencimientos, llamados *calendar spreads*, o aquellos spreads que se construyen a partir de combinaciones de opciones sobre un mismo activo pero con diferentes precios de ejercicio y vencimientos, llamados *diagonal spreads*.

La función de pagos del calendar spread se caracteriza porque se obtiene una ganancia si el precio del activo al vencimiento (del call corto) cae cerca del precio de ejercicio, y se tiene una pérdida si el precio del subyacente al vencimiento es significativamente menor o mayor.

Paquetes (*Packages*)

Función de pagos del Calendar spread construido con opciones call



Construcción de un calendar spread:

- Corto en una opción call Europea con K y T_1;
- Largo en una opción call Europea con esa misma K y T_2 (T_2>T_1). Recuerde que a mayor plazo, más costosa es el precio de la opción.

Paquetes (*Packages*)

Combinaciones. Una combinación es una estrategia que involucra tomar una posición de calls y puts sobre el mismo activo; entre los que se encuentran los straddles, straps y strangles.

Paquetes (*Packages*)

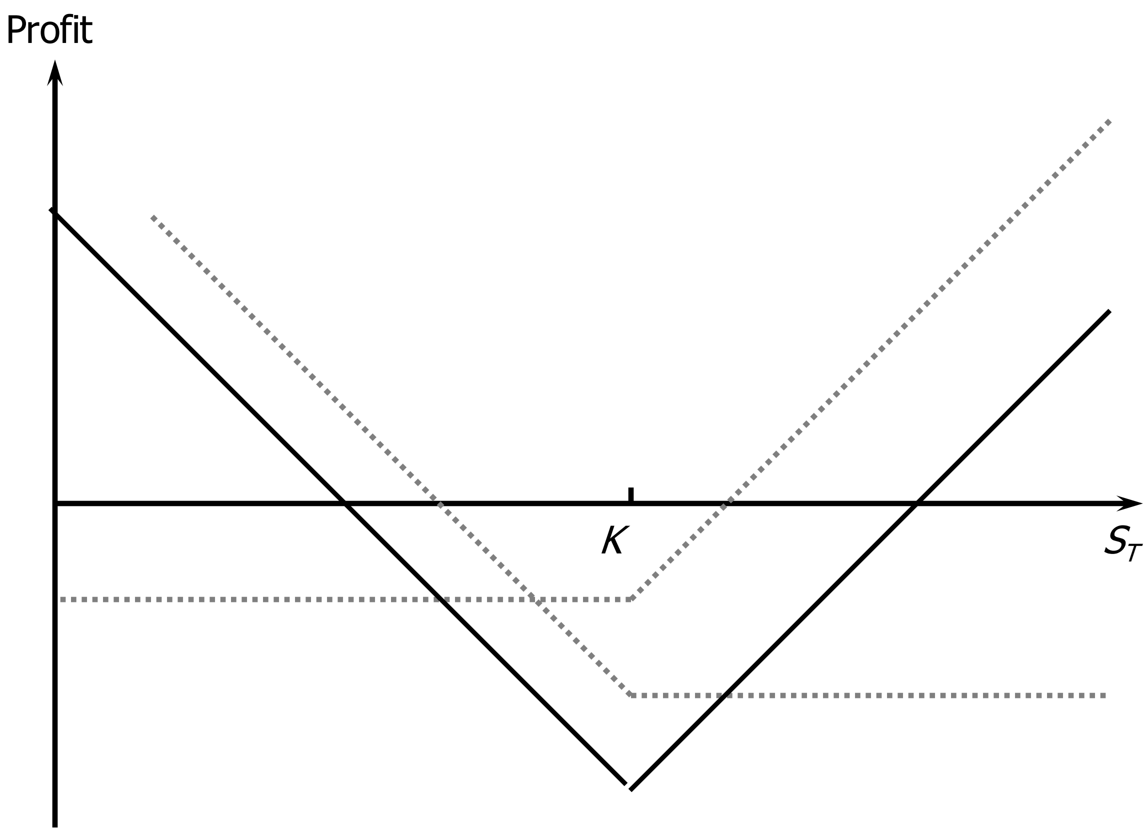
Long Straddle. Es una estrategia orientada a la volatilidad del precio del subyacente, y se construye comprando un call y put Europeo con el mismo precio de ejercicio y vencimiento.

Construya la gráfica y la tabla de la función de pagos de esta estrategia.

Rango de S_T	Pago del call largo K $Max\{S_T-K,0\}$ - c	Pago del put largo $Max\{K-S_T,0\}$ - p	Pago total
$S_T < K$	-c	$K - S_T - p$	$K - S_T - c - p$
$K < S_T$	$S_T - K - c$	-p	$S_T - K - c - p$

Paquetes (*Packages*)

Función de pagos de un straddle



Si el precio del activo al vencimiento está alrededor de K, entonces el *straddle* genera una pérdida; sin embargo, se obtiene una ganancia si ocurre un movimiento lo suficientemente grande en cualquier dirección.

Paquetes (*Packages*)

Laboratorio. Un call con un precio de ejercicio de USD \$60 cuesta USD \$6. Un put con el mismo precio de ejercicio y vencimiento cuesta USD \$4. Construya la función de pagos de un ***long straddle*** y determine el rango en el cual genera una pérdida.

Paquetes (*Packages*)

Short Straddle. En un mercado con volatilidad que se espera tienda a estabilizarse o la volatilidad sea decreciente. Se construye vendiendo un call y put Europeo con el mismo precio de ejercicio y vencimiento.

Construya la gráfica y la tabla de la función de pagos de esta estrategia.

Rango de S_T	Pago del call corto K $-Max\{S_T-K,0\}+c$	Pago del put corto $-Max\{K-S_T,0\}+p$	Pago total
$S_T < K$	c	$-\{K - S_T\} + p$	$S_T - K + c + p$
$K < S_T$	$-\{S_T - K\} + c$	$+ p$	$K - S_T + c + p$

Paquetes (*Packages*)

Barings case of study. From 1992, Leeson made unauthorized speculative trades that at first made huge contributions for Barings - up to 10% of the banks profits at the end of 1993. He became a star within the organisation, earning unlimited trust from his London bosses who considered him nearly infallible.

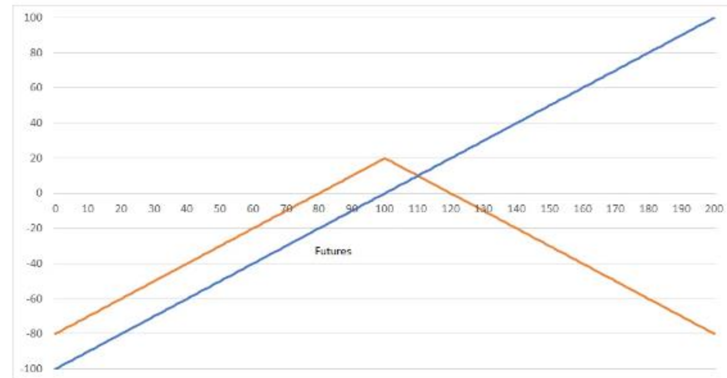
However, he soon lost money in his operations and hid the losses in an error account, 88888.

At the same time, Leeson hid documents from statutory auditors of the bank, making the internal control of Barings seem completely inefficient. At the end of 1994, his total losses amounted to more than 208 million pounds, almost half of the capital of Barings.

On January 16th, 1995, with the aim of "recovering" his losses, Leeson placed a ***short straddle*** on Singapore Stock Exchange and on Nikkei Stock Exchange, betting that Nikkei would drop below 19,000 points. But the next day, the unexpected earthquake of Kobé shattered his strategy. Nikkei lost 7% in the week while the Japanese economy seemed on the verge of recovery after 30 weeks of recession.

Productos Estructurados. Derivados Exóticos

Paquetes (*Packages*)



Profit and Loss of a Futures Position and a Straddle

A short straddle is a strategy a short put option and a short call option with the same strike prices are simultaneously combined. The only way a short straddle can earn profits is if the price of the underlying asset does not move substantially in either direction.

A short straddle looks like a mountain or an iceberg, with most of its mass underwater (i.e., below zero).

Notice how little of the straddle is above zero, compared to the total profit-and-loss profile. The portion of the short straddle that is above zero depends on the size of the premium relative to the total exposure.

Productos Estructurados. Derivados Exóticos

Paquetes (*Packages*)

Nick Leeson took a USD $7 billion value futures position in Japanese equities and interest rates, linked to the variation of Nikkei. He was "long" on Nikkei. In the three days following the earthquake of Kobé, Leeson bought more than 20,000 futures, each worth USD $180,000.

He tried to recoup his losses by taking even more risky positions, betting that the Nikkei Stock Exchange would make a rapid recovery; he believed he could move the market but he lost his bet, worsening his losses. They attained an abysmal low, (USD $1.4 billion), more than double the bank's capital who is now bankrupt because its own capital would be insufficient to absorb the losses generated by Leeson.

Profit and Loss of One Long Futures + One Short Straddle

Paquetes (*Packages*)

When taking into consideration the total losses and the initiatives taken by Leeson, how can one explain the lack of reaction from a bank as reputable as Barings? There were several factors that played to Leeson’s advantage:

- In Singapore, Leeson enjoyed a freedom within the local office - even an internal memo from 1993 proved to have no consequence; this would shown the lack of surveillance in this office as well as the risk of possible disaster.
- What’s more, Leeson operated in both the dealing desk (front office) and the back office. So he confirmed and settled trades transacted by the front office - which he himself passed! He was therefore able to hide what he wanted.
- The profits brought in by Leeson instilled confidence in management who lacked knowledge in subtile trading techniques and financial markets, and therefore did not pose any questions at Leeson. They did not seem to be aware of the risks incurred by the bank.
- Leeson made false declarations to regulation authorities which allowed him to accumulate his losses and to avoid a margin call which should have audited losses from day to day. It is true that these false declarations did not attract the attention of control authorities in Singapore.

Paquetes (*Packages*)

- Barings benefited from special privileges from the Bank of England (an exception to the rule that a bank could not lend more that 25% of its capital to any one entity.)
- Finally, nothing was detected by statutory auditors and control interns, despite the fact that Leeson had hidden certain losses and had forged documents - both of which should have drawn attention to him. This proves that the account regulation procedures within the institution were completely inefficient.

Feeling that his losses had become to great and seeing that the bank was on the verge of a crisis, Leeson decided to flee, leaving a note which read "I'm sorry". He went to Malaysia, Thailand and finally Germany. Here he was arrested upon landing and extradited back to Singapore on 2 March 1995. He was condemned to six and a half years in prison but was released in 1999 after a diagnosis of colon cancer.

Paquetes (*Packages*)

In 1996 he published an autobiography "Rogue Trader" in which he detailed his acts leading to the collapse of Barings. The book was later made into a film starring Ewan McGregor as Leeson.

The fall of Barings caused an unprecedented crisis within the city. Nine senior managers were accused of having badly managed the situation and in March 1995 the bank (only the parent company) was bought by Dutch group ING. It was the less than glorious disappearance of a bank founded in the 18th century after 223 years of existence.

The bankruptcy of Barings had a world-wide impact, affecting even those who were not among the financial circles. The public expressed concern about the use of by-products and about the "madness of financial markets" where young "golden boys" of less than 30 years can cause the demise of financial institutions which nevertheless had experienced a dozen crises during two hundred years.

Paquetes (*Packages*)

At the end of the day, there are always risks in the financial markets that even teams with the best specialists who hold Nobel prizes are not able to avoid.

This affair has nevertheless lead to the creation of new jobs such as "compliance officers," has strengthened the role of risk control within investment banks and has created a separation between Front, Middle and Back Office functions.

Paquetes (*Packages*)

Laboratorio 20. Suponga que la acción XYZ tiene un precio spot de USD $40, y un trader toma un ***short straddle*** al vender en $2.00 un put con vencimiento en un mes y un precio de ejercicio de 40; así como vender un call por el mismo precio, vencimiento y precio de ejercicio. Construya la función de pagos.

Paquetes (*Packages*)

Strangles. Es una estrategia orientada a la volatilidad del precio del subyacente.

Si se considera que las opciones están baratas debido a una baja volatilidad, y la expectativa que se tiene del mercado es que va a tener un movimiento muy violento, incluso mayor al esperado en el Straddle de compra, aunque no se tiene la seguridad del sentido que tomará este movimiento.

Paquetes (*Packages*)

Un *long Strangle* puede construirse con una posición larga en un put y un call (Europeos), con el mismo vencimiento pero el precio de ejercicio del call, K_1, mayor que el precio de ejercicio del put, K_0.

Construya la gráfica y la tabla de la función de pagos de esta estrategia.

Rango de S_T	**Pago del put largo K_0**	**Pago del call largo K_1**	**Pago total**
$S_T < K_0$			
$K_0 < S_T < K_1$			
$K_1 < S_T$			

Paquetes (*Packages*)

Laboratorio. Una opción call con un precio de ejercicio de USD $50 tiene un precio de USD $2. Una opción put con un precio de ejercicio de USD $45 tiene un precio de USD $3. Explique cómo puede construir un *strangle* con estas dos opciones, construya la función de pagos y grafique.

Paquetes (*Packages*)

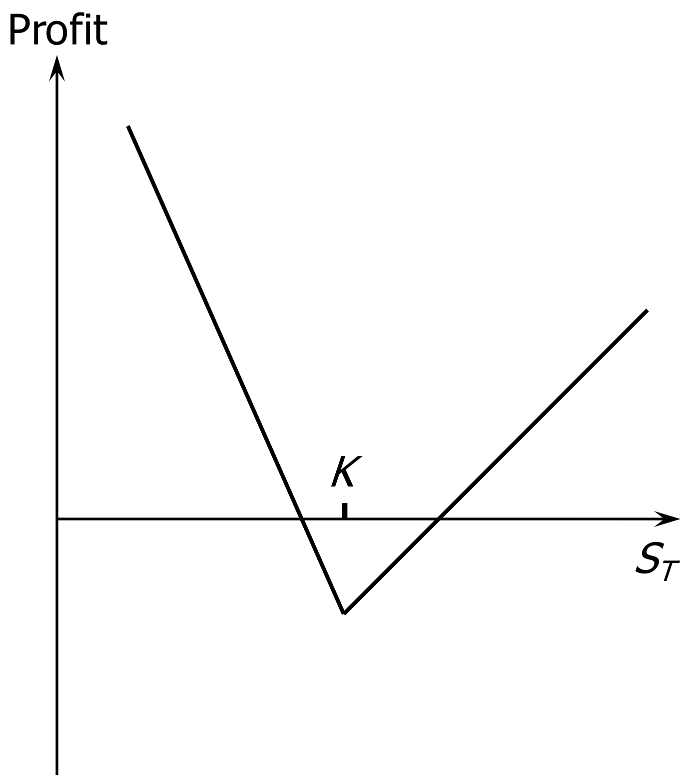
Otras combinaciones. Existen otras estrategias como los llamados *strips* y *straps*.

En ambas estrategias se espera un movimiento (grande) en el precio del activo; sin embargo, en el *strip* se considera que este gran movimiento sea a la baja con mayor probabilidad; mientras que al construir un *strap* se espera con una mayor probabilidad que el precio del activo se incremente. Las gráficas que describen la función de pagos de estos instrumentos son las siguientes:

Productos Estructurados. Derivados Exóticos

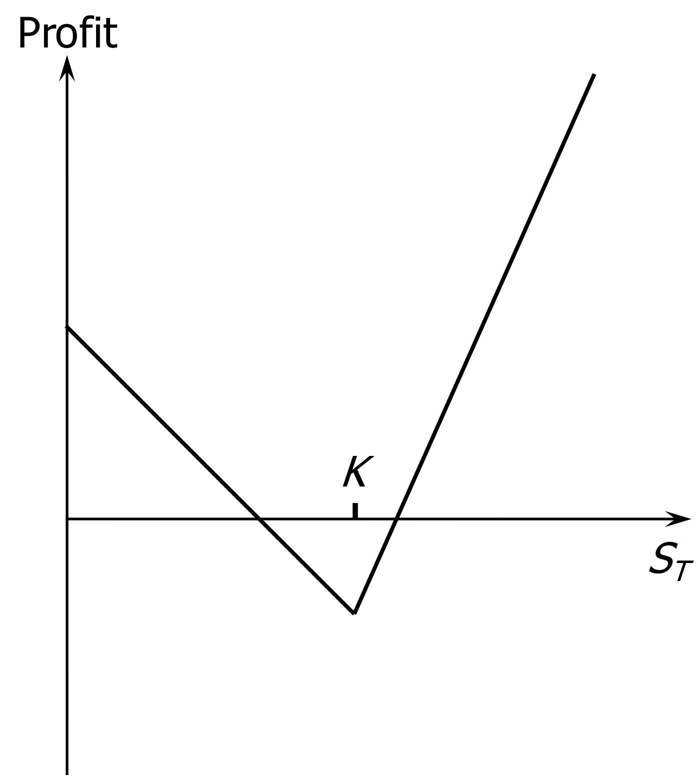
Paquetes (*Packages*)

Strip



Un call + Dos puts con la misma K y T

Strap



Dos calls + Un put con misma K y T

Paquetes (*Packages*)

Laboratorio. Suponga que la acción XYZ tiene un precio spot de USD $40, y un trader toma un *strap* al comprar dos calls en $4.00 y un put en $2.00, el precio de ejercicio es de 40 en ambas opciones y tienen el mismo vencimiento. Construya la función de pagos.

Productos Estructurados. Derivados Exóticos

Opciones Binarias

Las opciones binarias o digitales son muy populares en los mercados OTC para especular o realizar coberturas. Se utilizan para la construcción de productos más complejos (llamados productos estructurados). El pago de estas opciones es discontinuo y existen varios tipos de opciones digitales:

- Opciones gap
- Opciones *cash or nothing*
- Opciones *asset or nothing*
- Opciones *cash or nothing* de dos activos

Opciones Gap. Es una extensión directa de una opción Europea tipo *vanilla*, pero tienen dos precios de ejercicio: K_1 y K_2.

En el caso de que sea una opción call gap, paga $S_T - K_1$ si ocurre que $S_T > K_2$. Así, la diferencia entre un call tipo Gap y una opción call *vanilla* con precio de ejercicio K_2 es que el pago [si ocurre que $S_T > K_2$] cambia en $K_2 - K_1$ (el cual puede ser positivo o negativo); es decir:

$$Pago\ Call\ Gap = \begin{cases} 0 & si\ S_T \leq K_2 \\ S_T - K_1 & si\ S_T > K_2 \end{cases}$$

Para una opción put el pago es:

$$Pago\ Put\ Gap = \begin{cases} 0 & si\ S_T > K_2 \\ K_1 - S_T & si\ S_T \leq K_2 \end{cases}$$

Opciones Binarias

Estas opciones se pueden valorar analíticamente con el modelo de Reiner y Rubinstein (1991). Por ejemplo, para el precio de una opción call gap:

$$c_{Gap} = S_0 e^{-q(T-t)} N(d_1) - K_1 e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

con $d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{K_2}\right)+\left(r-q+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$; $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

El precio de esta fórmula es mayor que el arrojado por B-S-M para una opción call tipo vanilla con precio de ejercicio K_2 en:

$$\Delta c = (K_2 - K_1) e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

Esto debido a que la probabilidad de que la opción sea ejercida es $N(d_2)$, y cuando se ejerce, el pago de la opción call gap es mayor en $K_2 - K_1$ respecto a la opción call tipo vanilla.

Opciones Binarias

El precio de una opción put gap con precio de ejercicio $K_1 - S_T$ cuando $S_T < K_2$ es:

$$p_{Gap} = K_1 e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_0 e^{-q(T-t)} N(-d_1)$$

con $d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{K_2}\right)+\left(r-q+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$; $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

Productos Estructurados. Derivados Exóticos

Opciones Binarias

Laboratorio. Un activo tiene un precio spot de $90, y se espera que en un año tenga una volatilidad del 20%. La tasa libre de riesgo es del 1% y no se generan ingresos. Suponga que una compañía de seguros acuerda comprar el activo en $K_1 = 75$ si su valor cae por debajo de $75 al final del año.

Se observa que la compañía de seguros tiene una posición corta de una opción put Europea tipo *vanilla* (la compañía de seguros tiene el riesgo). **Grafique la función de pagos y obtenga el precio**.

Ahora suponga que el costo de transferir el activo es de $10, el cual lo paga **el tenedor** de la opción (recuerde que la compañía de seguros está corta). Entonces le ejercerán la opción solamente si el valor del activo es menor a $65. En este caso, el costo para la compañía de seguros es $K_1 - S_T$ cuando $S_T < K_2 = 65$; $K_1 = 75$ y S_T es el precio del activo en un año, por lo que es una opción put gap. **Grafique la función de pagos y obtenga su precio**.

Opciones Binarias

Laboratorio. Grafique la función de pagos y determine el valor de una opción call y put tipo gap que vence dentro de 6 meses. El precio del activo subyacente es de \$100, el primer strike es \$100, el segundo strike es \$110, la tasa libre de riesgo es del 5%, los dividendos del 2% y la volatilidad del activo subyacente 30%.

Compruebe la parida put-call en este caso.

Nota: La prima del put tiene sentido cuando el precio va a la baja, es decir, para K_1= 110 y K_2=100 (\$10 de costos de acarreo).

Opciones Binarias

Opciones *Cash or Nothing*. Es una opción que ofrece pagos discontinuos y es una de las opciones binarias más simples.

En el caso de una opción *call cash or nothing* paga cero si el precio del activo termina por debajo del precio de ejercicio al vencimiento, o paga una cantidad fija, digamos Q, si termina por arriba del precio de ejercicio; es decir:

$$Pago\ Call_{Cash\ or\ Nothing} = \begin{cases} 0\ si\ S_T \leq K \\ Q\ si\ S_T > K \end{cases}$$

Para una opción put el pago es:

$$Pago\ Put_{Cash\ or\ Nothing} = \begin{cases} 0\ si\ S_T \geq K \\ Q\ si\ S_T < K \end{cases}$$

Opciones Binarias

Estas opciones se pueden valorar analíticamente con el modelo de Reiner y Rubinstein (1991) y son fáciles de obtener: en el mundo neutral al riesgo, la probabilidad que el precio del activo esté por arriba de K en T es $N(d_2)$, por lo que el valor de una opción call *cash or nothing* es:

$$c_{Cash\ or\ Nothing} = Qe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Para una opción put *cash or nothing* el valor de la opción es:

$$p_{Cash\ or\ Nothing} = Qe^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

Donde:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-q+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ y } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Opciones Binarias

Laboratorio. Grafique la función de pagos y determine el valor de una opción call y una opción put tipo *cash-or-nothing* que vence en 1 año. El precio del activo subyacente es de $25, el strike es $27, el cash que recibimos en caso de que la opción acabe dentro del dinero es $12, la tasa libre de riesgo es del 5%, los dividendos son del 2.5% y la volatilidad del activo subyacente es del 42%.

Opciones Binarias

Laboratorio. Determine el valor de un derivado que paga \$150 en 6 meses si el índice S&P 500 es mayor que 1,000 y cero si no. Suponga el actual nivel del S&P 500 es de 960, la tasa libre de riesgo es del 0.25%, la tasa de los dividendos asociados al índice es del 3% y la volatilidad del índice es del 20%.

Presente la función de pagos para las posiciones largas.

Opciones Binarias

Opciones *Asset-or-Nothing*.- El pago de estas opciones depende de si al vencimiento acaban dentro del dinero. Si es así pagan el precio del activo subyacente.

En el caso de una opción call *asset-or-nothing* paga cero si el precio del activo termina por debajo del precio de ejercicio al vencimiento, o paga el precio del activo si termina por arriba del precio de ejercicio; es decir:

$$Pago\ Call_{Asset\ or\ Nothing} = \begin{cases} 0\ \ si\ S_T \leq K \\ S_T\ si\ S_T > K \end{cases}$$

Para una opción put *asset-or-nothing* el pago es:

$$Pago\ Put_{Asset\ or\ Nothing} = \begin{cases} 0\ \ si\ S_T \geq K \\ S_T\ si\ S_T < K \end{cases}$$

Opciones Binarias

Estas opciones se pueden valorar analíticamente con el modelo de Cox y Rubinstein (1985). El valor de una opción *call asset-or-nothing* es:

$$c_{Asset\ or\ Nothing} = S_0 e^{-q(T-t)} N(d_1)$$

Para una opción put *asset-or-nothing* el valor de la opción es:

$$p_{Asset\ or\ Nothing} = S_0 e^{-q(T-t)} N(-d_1)$$

Donde:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ y } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Opciones Binarias

Laboratorio. Grafique la función de pagos y determine el valor de una opción call y una opción put *asset-or-nothing* que vence dentro de 9 meses. El precio del activo subyacente es de \$35, el strike es \$32, la tasa libre de riesgo 5%, la acción no paga dividendos y la volatilidad del activo subyacente es 31%. Dibuje su función pagos si la posición es larga.

Observación. Para calcular el precio de la opción *asset or nothing* se tiene la expresión $N(d_1)$, ¿por qué no $N(d_2)$, si sabemos que la probabilidad de ejercer la opción es precisamente $N(d_2)$?

Respuesta: Una forma de demostrar la fórmula del precio de la opción *asset or nothing* es construyendo el siguiente portafolio:

$$call = long\ asset\ or\ nothing\ +\ short\ cash\ or\ nothing \quad [con\ Q = K]$$

$$call = asset\ or\ nothing - cash\ or\ nothing$$

$$asset\ or\ nothing = call + cash\ or\ nothing$$

$$= S_0 e^{-q(T-t)} N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) + Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$= S_0 e^{-q(T-t)} N(d_1)$$

Opciones de Elección (Chooser options)

Opciones de elección o *Chooser options*. Ofrecen al tenedor de la opción la posibilidad de elegir en una fecha (o fechas) determinada(s) si la opción es una opción call o una opción put.

Existen dos tipos de opciones chooser:

- **Simples y conocidas como "*as-you-like-it option*"**. Ofrecen la posibilidad de elegir en una sola fecha futura, digamos en T_1, entre una opción call o put con las mismas características: mismo strike y mismo vencimiento T_2, donde $T_2 > T_1$.
- **Complejas**. Ofrecen la posibilidad de elegir en una sola fecha futura, digamos en T_1, entre una opción call o put, pero con diferentes características en el strike o en el vencimiento.

Opciones de Elección (Chooser options)

Las opciones *as-you-like-it* son más simples pero suelen ser caras. Dado que el tenedor de esta opción tiene una fecha específica en la que puede decidir la naturaleza de la opción (call o put), el valor de esta opción en T_1 es:

$$Pago\ Opción_{As\ you\ like\ it} = Max\{c, p\}$$

Donde c es el valor del call de la opción subyacente y p es el valor del put de la opción subyacente.

Opciones de Elección (Chooser options)

La valuación de las opciones *as-you-like-it* se base en la paridad put-call (véase Rubinstein, 1991): sea S_1 el precio del activo en T_1, K el precio de ejercicio, T_2 el vencimiento de las opciones (Europeas y con la misma K) y r la tasa libre de riesgo, entonces:

$$Prima\ Opción_{As\ you\ like\ it} = Max\{c, p\} \text{ ... pero } c + Ke^{-r(T_2-T_1)} = p + S_{T_1}e^{-q(T_2-T_1)}$$

$$= max\left\{c, c + Ke^{-r(T_2-T_1)} - S_{T_1}e^{-q(T_2-T_1)}\right\}$$

$$= c + e^{-q(T_2-T_1)}max\left\{0, Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)} - S_{T_1}\right\}$$

Es decir, el pago se descompone como un call largo con vencimiento en T_2 y precio de ejercicio K, y $e^{-q(T_2-T_1)}$ puts largos con vencimiento T_1 y precio de ejercicio $Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)}$:

$$Prima\ Opción_{As\ you\ like\ it} = c + e^{-q(T_2-t)}p$$

Opciones de Elección (Chooser options)

Es decir:

$$Prima\ Opción_{As\ you\ like\ it} = S_0 e^{-q(T_2-t)} N(d_1) - K e^{-r(T_2-t)} N(d_2) +$$

$$e^{-q(T_2-T_1)}\left[K e^{-(r-q)(T_2-T_1)} N(-e_2) - S_0 N(-e_1)\right]$$

Donde d_i se refiere al vencimiento T_2 y e_i al vencimiento T_1.

Laboratorio. Valorar una opción *chooser* simple que vence dentro de 1 año. El precio del activo subyacente es $12, el strike es $10, los dividendos son del 1%, la tasa libre de riesgo es del 5% y la volatilidad del activo subyacente es del 24%. El tiempo de elección T_1 es de 3 meses.

Opciones de Elección (Chooser options)

Example of a Chooser Option on a Stock. Assume a trader wants to have an option position for the updating Bank of America Corporation (BAC) earnings release. They think the stock will have a big move, but they are not sure in which direction.

The earnings release is in one month, so the trader decides to buy a chooser option that will expire about three weeks after the earnings release. They believe this should provide enough time for the stock to make a significant move if it is going to make one, and fully digest the earnings release. Therefore, the option they choose will expire in seven to eight weeks.

The chooser option allows them to exercise the option as a call if the price of BAC rises, or as a put if the price falls.

At the time of the chooser option purchase, BAC is trading at $28. The trader chooses an at-the-money strike price of $28 and pays a premium of $2 or $200 for one contract ($2 x 100 shares).

Opciones de Elección (Chooser options)

The buyer can't exercise the option prior to expiry since it is a European option. At expiry, the trader will determine if they will exercise the option as a call or put.

Assume the price of BAC at the time of expiry is $31. This is higher than the strike price of $28, therefore the trader will exercise the option as a call. Their profit is $1 ($31 - $28 - $2) or $100.

If BAC is trading between $28 and $29.99 the trader will still choose to exercise the option as a call, but they will still be losing money since the profit is not enough to offset their $2 cost. $30 is the breakeven point on the call.

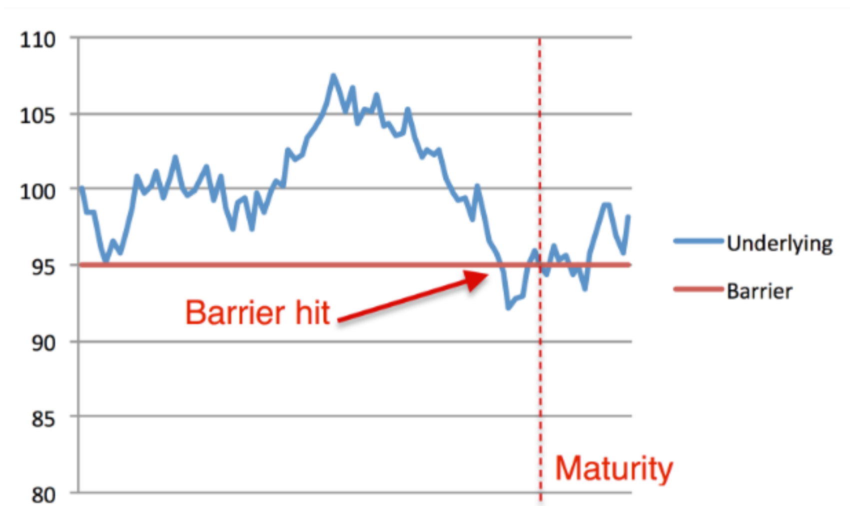
If the price of BAC is below $28, the trader will exercise the option as a put. In this case, $26 is the breakeven point ($28 - $2). If the underlying is trading between $28 and $26.01 the trader will lose money since the price didn't fall enough to offset the cost of the option.

If the price of BAC falls below $26, say to $24, the trader will make money on the put. Their profit is $2 ($28 - $24 - $2) or $200.

Opciones con valor dependiente

Existen opciones cuyo valor depende de la evolución histórica de los precios del activo subyacente. Se tienen cuatro tipos básicos de estas opciones:

- Opciones con barrera.
- Opciones *lookback*.
- Opciones con doble barrera.
- Opciones asiáticas o con precio promedio del subyacente.



Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Estas opciones se comercializan en el mercado OTC y son más baratas que las opciones regulares.

El pago de estas opciones depende de que el precio del activo subyacente S_t alcance un nivel previamente determinado en un periodo dado. Es decir, si el precio de activación se alcanza antes del vencimiento, entonces causa una opción con características predeterminadas como las siguientes:

- Opciones *knock-in*.- La **opción comienza su existencia** en el momento que el precio del activo subyacente alcance cierta barrera.

- Opciones *knock-out*.- La opción **deja de existir** en el momento que el precio del activo subyacente alcance cierta barrera.

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

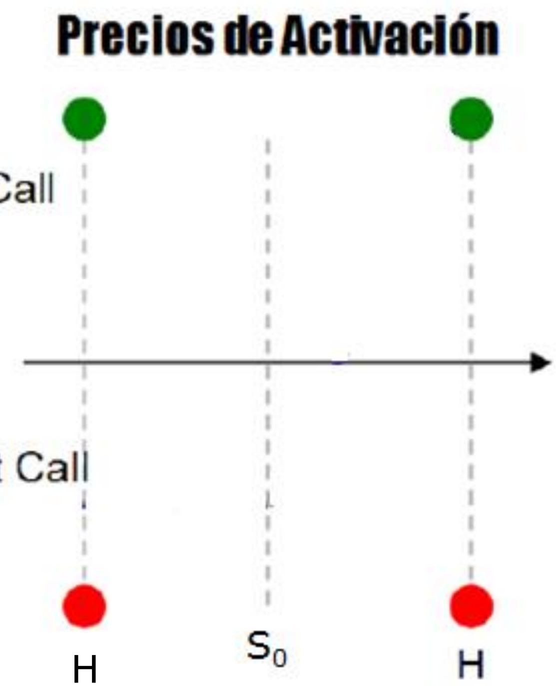
Con base lo anterior, se tienen las siguientes clasificaciones de las opciones con barrera:

Es una opción call regular que **empieza a existir** si el precio del activo baja hasta alcanzar el nivel H antes del vencimiento, donde H < S_0, es decir, la barrera está por debajo del precio spot del activo.

Down-and-In Call

Es una opción call regular que **deja de existir** si el precio del activo baja hasta alcanzar el nivel H antes del vencimiento [H < S_0].

Down-and-Out Call



Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Utilización de opciones con barrera

Las opciones con barrera son opciones que se cancelan o activan dependiendo de los valores tomados por el subyacente al que están referidas durante un período predeterminado, independientemente del valor tomado por el subyacente en el momento de expiración de la opción.

Si durante ese período el subyacente alcanza un determinado nivel, la opción condicional se convierte desde ese momento en una opción de compra o de venta simple (*knock-in*) o, por lo contrario, puede ser que por haberse alcanzado ese nivel, la opción deje de existir desde ese momento (*knock-out*).

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

La principal ventaja de utilizar opciones con barrera es su **menor precio**, con respecto a una opción simple equivalente. El ahorro de utilizar opciones con barrera frente a opciones simples está en función de:

- La proximidad de la barrera del valor actual del subyacente: a mayor proximidad, mayor ahorro en las de tipo «out» e, inversamente, a mayor distancia mayor ahorro en las de tipo «in».
- De la vida de la opción: a mayor vencimiento, mayor probabilidad de tocar la barrera y por tanto mayor ahorro en las de tipo «out», e inversamente en las de tipo «in».
- De la volatilidad: a mayor volatilidad mayor probabilidad de tocar la barrera y por tanto mayor ahorro en las de tipo «out», e inversamente en las de tipo «in».

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Las opciones con barrera pueden ser de gran utilidad en la cobertura de precios de mercancías y de divisas, proporcionando protección a un menor precio que las opciones tradicionales para la cobertura de riesgos de operaciones puntuales en el tiempo, como veremos en los siguientes ejemplos.

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Ejemplo. Cobertura del riesgo de precios de suministros. Sea una cooperativa agrícola que espera vender en un año 2,000 toneladas de trigo al precio de ese momento. Ante la incertidumbre de los precios futuros, y temiendo que estos bajen, la cooperativa desea asegurarse un precio de al menos €150 la tonelada, que le supondrán ingresos de €300,000.

La cooperativa considera que si el precio de la tonelada sube por arriba de €180, éste no volverá a bajar por debajo de €150.

Entonces la cooperativa puede comprar una opción de venta con barrera *up-and-out* con un precio de ejercicio $K = €150$ la tonelada y con una barrera de desactivación de la opción en $H = €180$ por tonelada.

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

La inclusión de la barrera en € 180 significa que si en algún momento durante la vida de la opción el precio de la tonelada supera ese precio, la opción se desactiva y deja de existir.

De esta manera, se consigue reducir el precio de la opción (i.e., menor coste de la cobertura) al incorporar el hecho que si el precio de la tonelada sube más allá de la barrera, no existe una gran probabilidad que baje por debajo del precio de ejercicio antes de que la opción expire.

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Así se pueden presentar los siguientes escenarios:

- **Que el precio de la tonelada no supere en ningún momento los € 180 y que al vencimiento éste sea menor de € 150 por tonelada**. En este caso la cooperativa vende la tonelada al precio que esté en el mercado y recibirá de quien le vendió la opción un pago que le compensará exactamente el menor ingreso obtenido por la venta del trigo debido a la bajada del precio.

Por ejemplo, si el precio del trigo al vencimiento estuviera en € 130 la tonelada, la cooperativa agrícola obtendría € 260,000 (2,000 toneladas X € 130) por su venta en el mercado. Como consecuencia del cobro al que le da derecho la opción recibiría:

Max [150 - 130, 0] X 2,000 toneladas = € 40,000

Es decir, obtendría un ingreso total de € 300,000 que deseaba.

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

- **Que el precio de la tonelada no supere en ningún momento los € 180 y que al vencimiento el precio sea superior a € 150**.- En este caso la cooperativa podrá vender la tonelada al precio de ese momento y no ejercerá la opción, obteniendo por la venta más de los € 300,000 que requería como ingresos mínimos.

- **Que el precio de la tonelada supere en algún momento los € 180 y que al vencimiento éste sea superior a € 150**.- En este caso, la opción se desactivó y la cooperativa venderá la tonelada de trigo al precio de ese momento, que será superior a los € 150.

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

- **Que el precio de la tonelada supere en algún momento los € 180 y que al vencimiento éste sea inferior a € 150**.- En este caso, la opción se desactivó y la cooperativa se quedó sin cobertura teniendo que vender, si no pone remedio, la tonelada a un precio inferior a € 150.

Si bien, esta circunstancia es poco probable, ya que la cooperativa esperaba que dado que llegó a € 180 no podía bajar a € 150, significó un ahorro en la prima inicialmente pagada.

De todos modos, entre el momento que se desactiva la opción [€ 180 la tonelada] hasta que el precio del trigo bajase [€ 150], a la cooperativa le daría tiempo de realizar cualquier otra estrategia de cobertura, como por ejemplo comprar otra opción de venta put, para no tener que vender por debajo de los € 150 y evitar de esta forma la merma de sus ingresos.

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Lógicamente, en todos los casos considerados se debe reducir el gasto por la prima de la opción que le proporcionaba la cobertura de la opción con barreras, pero que en todo caso sería menor que el costo de cubrirse con una opción de venta tradicional.

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Ejemplo. Cobertura del riesgo de tipo de cambio de un importador. Sea un importador español de componentes electrónicos que debe realizar un pago de USD $550,000 dentro de 90 días, siendo el tipo de cambio actual de €1,09/USD, deseando asegurarse contra una posible apreciación del dólar y esperando que, en ningún caso, una depreciación del dólar superior a € 0.9/USD.

El importador podría comprar una opción de compra de tipo barrera *down-and-out* con un tipo de cambio de ejercicio de €1,09/USD y con una barrera situada en un tipo de cambio de € 0.9/USD. Esta estrategia de cobertura sería en lugar de comprar una opción de compra tradicional con el mismo tipo de cambio de ejercicio, la cual le proporcionaría una mayor cobertura, y por tanto a un mayor coste, pero para un escenario de depreciación del dólar que el importador no cree probable.

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Si en cualquier momento antes del vencimiento de la opción el tipo de cambio traspasa la barrera, el importador se encontrará sin cobertura pero en una situación de tipo de cambio que le resulta más ventajosa dada la no esperada depreciación del dólar.

En este caso, el importador puede comprar los USD $550,000 a € 0.9/USD (pagando por ellos € 495,000 en lugar de € 599,500 en caso de que se hubiera producido la apreciación del dólar) e invertir esta cantidad haciendo un depósito hasta el momento de que deba entregarlos. Además el depósito le proporcionará una rentabilidad extra que le servirá para compensar el coste de haber tenido que financiar la compra de dólares anticipadamente.

De esta forma, aunque la protección de la opción hubiera desaparecido, la posición estaría cubierta con la compra de los dólares a un menor precio.

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Observemos en este ejemplo que, además de obtener una cobertura más barata utilizando la opción con barrera descrita que con una opción tradicional, en el caso de perder la cobertura también resulta beneficioso para el importador.

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Ejemplo. Cobertura del riesgo de tipo de cambio de un exportador. Sea una empresa española que recibirá dentro de 6 meses ChF 503,272 y quiere asegurarse ante una posible depreciación del franco suizo frente al €: como el exportador recibe francos suizos, los cambiará por €, y si el franco suizo se deprecia, valdrán menos €.

Sin embargo, si ocurre lo contrario, es decir, que el € se deprecie, entonces el exportador acepta disminuir su protección a partir de una determinada depreciación del €, pues considera que no volverá a apreciarse antes del vencimiento hasta un nivel no deseado para sus resultados.

En esta situación, el exportador compraría una opción con barrera put tipo *up-and-out* en el nivel de depreciación del € aceptable para él, la cual tendrá un menor costo del que tendría que pagar por una opción put tradicional.

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Imaginemos que el tipo de cambio que desea asegurarse es de (1/1.54)€ por ChF, y que la barrera se establece en (1/1.4)€ por ChF. Con esta cobertura el exportador se aseguraría un ingreso mínimo de € 326,800 (menos la prima de la opción), excepto en el caso en que durante la vida de la opción se produjese una depreciación del € que situase el tipo de cambio por encima de ChF 1.4/€. En este caso la opción se desactivaría, y podría vender los ChF 503,272 a un tipo de cambio alrededor de los CHF 1.4/€.

Las ventajas de este caso son un ahorro en la cobertura mediante opciones con barrera frente a opciones tradicionales y la obtención de un mejor tipo de cambio en caso de que la opción se desactive.

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Valuación de una opción *down-and-in call*. Recuerden que es una opción call regular que entra en vigor cuando el precio del activo toque el nivel de la barrera. Para la valuación de este tipo de opciones consideramos dos casos:

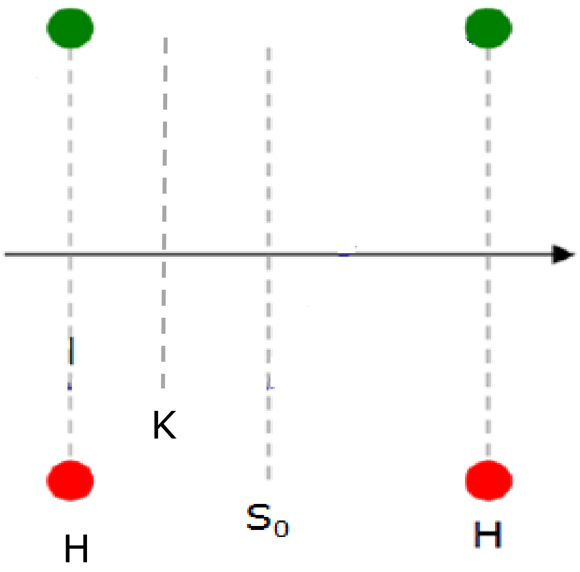
- $H \leq K$:

$$c_{di} = S_0 e^{-q(T-t)} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} N(y) - K e^{-r(T-t)} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} N\left(y - \sigma\sqrt{T}\right)$$

donde:

$$\lambda = \frac{r - q + \sigma^2/2}{\sigma^2}$$

$$y = \frac{ln[H^2/(S_0 K)]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$



Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Valuación de una opción *down-and-out call*.- Recuerde que esta es una opción call regular que deja de tener vigencia si el precio del activo alcanza la barrera H (con $H \leq K$), entonces se parte del hecho que un call regular $\boldsymbol{c}$ es igual al valor de un ***down-and-in call + down-and-out call*** :

$$c = c_{di} + c_{do}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{c_{do} = c - c_{di}}$$

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

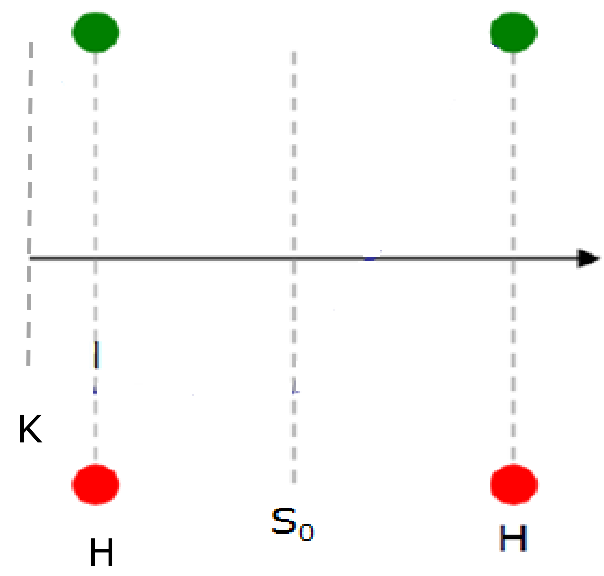
- Si $H \geq K$ entonces el *down-and-out* call es:

$$c_{do} = S_0 N(x_1) e^{-q(T-t)} - K e^{-r(T-t)} N\left(x_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right)$$

$$-S_0 e^{-q(T-t)} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} N(y_1) - K e^{-r(T-t)} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda - 2} N\left(y_1 - \sigma\sqrt{T}\right)$$

donde:

$$x_1 = \frac{ln[S_0/H]}{\sigma\sqrt{T-t}} + \lambda\sigma\sqrt{T-t} \qquad y_1 = \frac{ln[H/S_0]}{\sigma\sqrt{T-t}} + \lambda\sigma\sqrt{T-t}$$

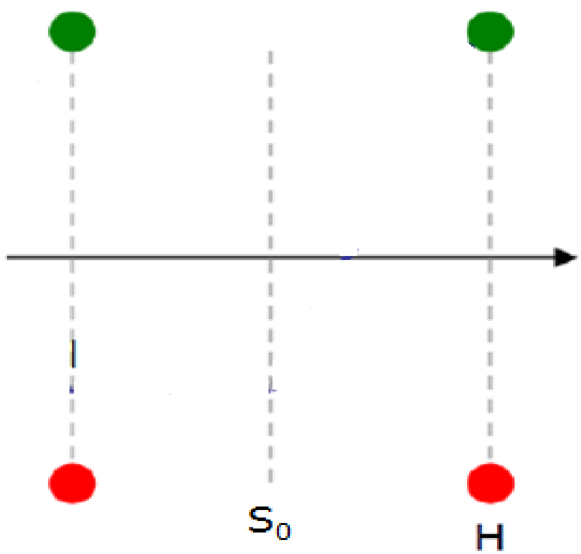


y el *down-and-in* call es:

$$\boldsymbol{c_{di} = c - c_{do}}$$

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Adicionalmente, se tienen las siguientes clasificaciones en caso que el precio del activo suba:



Up-and-*in* *call*.- Es una opción call que **empieza a existir** si el precio del activo sube al alcanzar el nivel H antes del vencimiento, donde $H > S_0$.

***Up-and-out call*.**- Es una opción call que **deja de existir** si el precio del activo sube hasta alcanzar el nivel H antes del vencimiento, donde $H > S_0$.

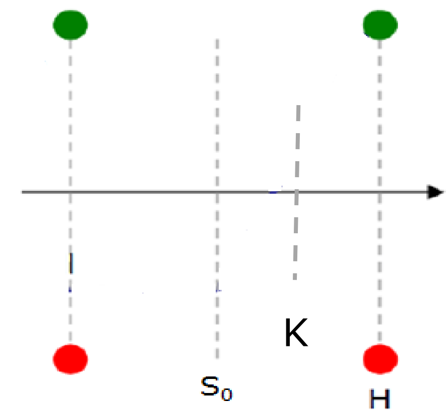
Productos Estructurados. Derivados Exóticos

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

- Si $H > K$, entonces el precio del *up-and-in call* es:

$$c_{ui} = S_0 N(x_1)e^{-q(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}N\left(x_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right)$$

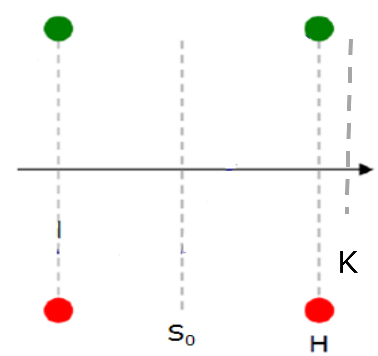
$$-S_0 e^{-q(T-t)}\left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda}[N(-y) - N(y_1)] + Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2}\left[N\left(-y - \sigma\sqrt{T-t}\right) - N\left(-y_1 + \sigma\sqrt{T-t}\right)\right]$$



y la prima del *up-and-out* call es:

$$\boldsymbol{c_{uo} = c - c_{ui}}$$

- Si $H \leq K$, ➔ el precio del *up-and-in call* es:



$$c_{uo} = 0$$

$$c_{ui} = c$$

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

La valuación de las opciones put con barrera es similar:

- $\boldsymbol{H \geq K}$

$$p_{ui} = -S_0 e^{-q(T-t)} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} N(-y) + K e^{-r(T-t)} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} N\left(-y + \sigma\sqrt{T}\right)$$

$$\boldsymbol{p_{uo} = p - p_{ui}}$$

- $\boldsymbol{H \leq K}$

$$p_{uo} = -S_0 N(-x_1) e^{-q(T-t)} + K e^{-r(T-t)} N\left(-x_1 + \sigma\sqrt{T-t}\right)$$
$$+ S_0 e^{-q(T-t)} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} N(-y_1) - K e^{-r(T-t)} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} N\left(-y_1 + \sigma\sqrt{T-t}\right)$$

$$\boldsymbol{p_{ui} = p - p_{uo}}$$

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

El precio de las opciones con barrera tipo put, *down-and-in* y *down-and-out* se calcula de la siguiente manera:

- $\boldsymbol{H > K}$

$$\boldsymbol{p_{do} = 0}$$

$$\boldsymbol{p_{di} = p}$$

- $\boldsymbol{H \leq K}$

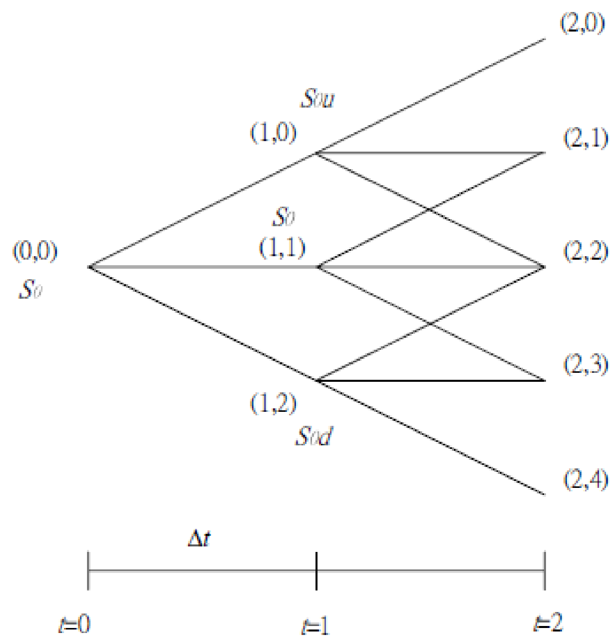
$$p_{di} = -S_0 N(-x_1) e^{-q(T-t)} + K e^{-r(T-t)} N\left(-x_1 + \sigma\sqrt{T-t}\right)$$
$$+S_0 e^{-q(T-t)} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} [N(y) - N(y_1)]$$
$$-K e^{-r(T-t)} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} \left[N\left(y - \sigma\sqrt{T-t}\right) - N\left(y_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{p_{do} = p - p_{di}}$$

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Valuación de las opciones con barrera usando árboles trinomiales. Los modelos de valuación de opciones usando árboles son aproximaciones numéricas ampliamente utilizados en la industria.

Ilustración de un árbol trinomial con dos periodos



La idea es simular el proceso del precio del activo en un tiempo discreto, y calcular el valor de la opción dado el precio.

Tomado de *Pricing Parisian-Type Options*, Ya-Ching Tung, 2003

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Let $ud = 1$ and p_u, p_m, p_d be the probabilities of an up, middle, down movements of stock price from time t to time $t + \Delta t$. The three possible stock price after time Δt would be

$$S_{t+\Delta t} = \begin{cases} S_t u & \text{with probability } p_u \\ S_t & \text{with probability } p_m \\ S_t d & \text{with probability } p_d. \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(S_{t+\Delta t}) = S_t e^{r\Delta t},$$

$$\mathrm{Var}(S_{t+\Delta t}) = S_t^2 e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1)$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 1 &= p_u + p_m + p_d, \\ \mathrm{E}(S) &= S\Big(p_u u + p_m + p_d d\Big), \\ \mathrm{Var}(S) &= p_u\Big(S_t u - \mathrm{E}(S)\Big)^2 + p_m\Big(S_t - \mathrm{E}(S)\Big)^2 + p_d\Big(S_t d - \mathrm{E}(S)\Big)^2 \end{aligned}$$

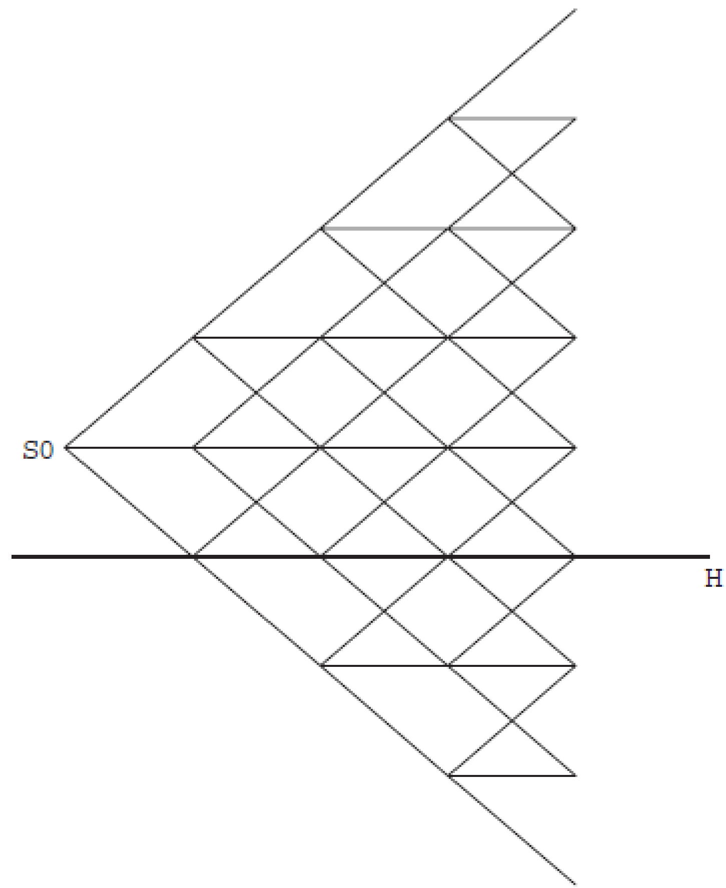
The probabilities can be derived as follows:

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{u(V + M^2 - M) - (M - 1)}{(u-1)(u^2-1)}, \\ p_d &= \frac{u^2(V + M^2 - M) - u^3(M - 1)}{(u-1)(u^2-1)} \\ p_m &= 1 - p_u - p_d, \end{aligned}$$

where $M \equiv e^{r\Delta t}$ and $V \equiv M^2(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1)$

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Ilustración de un árbol trinomial



Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Las opciones con barrera tiene características distintas que las opciones regulares, por ejemplo, a menudo vega es negativa, es decir, $\partial c/\partial\sigma<0$.

Lo anterior se ejemplifica con un call *up-and-out*: si el precio del activo está cerca de la barrera H, entonces al incrementarse la volatilidad, se incrementa la probabilidad de que se alcance la barrera, dando como resultado que la opción expire. Por lo tanto, un incremento en la volatilidad puede hacer que el precio de la opción disminuya en estas circunstancias.

Opciones con valor dependiente: Opciones con barrera

Laboratorio. Sea una opción *call down-and-out* sobre el futuro de la plata con vencimiento en 3 meses y con un precio de ejercicio de USD $20 la onza, una barrera es de USD $18, el precio spot del futuro de la plata es de USD $19, la t.l.r. es del 5% y la volatilidad del precio futuro de la plata es del 40% anual. Explique cómo funciona la opción (es decir, grafique la función de pagos) y determine su precio.

Determine el precio de una opción *call vanilla* sobre el futuro de la plata con los mismos términos y compare.

Determine el valor de una opción *call down-and-in* sobre el futuro de la plata con los mismos términos.

Opciones Parisinas

Una desventaja de las opciones con barrera es que el precio del activo puede dar un solo brinco, de tal forma que se toque la barrera e inmediatamente se regrese a sus niveles normales, pero eso originaría que la opción entre en vigor o venza. Ante esta situación se crearon las Opciones Parisinas, donde el precio del activo tiene que estar arriba/debajo de la barrera **durante un periodo** para que la opción entre en vigor o venza.

Así, la opción parisina es una opción con barrera pero con una característica adicional: las opciones parisinas se activan si el precio del subyacente **ha permanecido un cierto lapso de tiempo** por encima (o debajo) de la barrera.

Opciones con valor dependiente: Opciones Parisinas

Esta situación implica que las opciones parisinas tienen un nuevo parámetro, digamos t_w, que define la ventana de tiempo durante la cual el precio del subyacente deberá estar por encima (o por debajo) de la barrera.

Se observa que estas opciones son más restrictivas que las opciones con barrera normales, y habrá muchas más trayectorias que paguen cero en una opción parisina, pero que no necesariamente habrían pagado cero en una opción con barrera. Esto hace que la opción parisina sea más barata que la opción con barrera con parámetros similares.

Opciones con valor dependiente: Opciones Parisinas

Al igual que las opciones con barrera, las opciones parisinas se establecen dependiendo si la opción se activa (in) o se desactiva (out) cuando el precio del activo cruza la barrera, y se mantiene arriba (up) o abajo (down) de la misma durante un tiempo mayor o igual a de la ventana de la opción.

Las opciones parisinas se clasifican también de acuerdo **con la forma como se mide el tiempo** que el precio del subyacente está por debajo o por encima de la barrera:

- Cuando el tiempo se empieza a contar desde cero cada vez que el precio del subyacente cruza la barrera se dice que es una opción parisina continua.
- Cuando se adicionan los intervalos de tiempo en los que el precio del subyacente cruza la barrera sin volver la cuenta a cero cada vez, se dice que es una opción parisina acumulativa.

Opciones con valor dependiente: Opciones Parisinas

Estas opciones se modelan con simulación usando dos técnicas: La transformada de Laplace (al introducir una medida de probabilidad equivalente) y por aproximaciones a las ecuaciones diferenciales parciales. Véase por ejemplo, Garritz (2008) o Rivera (2006).

Adobe Acrobat Document

Adobe Acrobat Document

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Opciones Asiáticas

Las opciones asiáticas se llaman así porque fueron creadas por dos ejecutivos de Bankers Trust en Tokio, Japón (Asia) en el año de 1987, al desarrollar un tipo de opciones vinculadas al ***precio promedio del petróleo***.

Las opciones asiáticas son opciones cuyo pago depende del promedio aritmético del precio del activo subyacente observado durante la vida de la opción.

Las opciones asiáticas son más baratas que las opciones tipo *vanilla* debido a que la volatilidad sobre el precio promedio del subyacente es menor que la volatilidad sobre el precio del subyacente. Además, es más difícil manipular el promedio de un precio que el precio mismo.

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Se tienen ocho variaciones de opciones asiáticas:

- ¿Es un call o un put?
- ¿Es promedio aritmético o geométrico?
- ¿Es un *average price* o *average strike*?

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

El promedio aritmético se define así:

$$S_{average} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} S_t$$

El promedio geométrico se define así:

$$S_{average} = \sqrt[n]{\prod_{t=1}^{n} S_t}$$

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

El pago de un **call asiático** con precio promedio (*average price*) es:

$$Max\left\{S_{Average} - K, 0\right\}$$

El pago de un **put asiático** con precio promedio (*average price*) es:

$$Max\left\{K - S_{Average}, 0\right\}$$

Donde $S_{average}$ es el precio promedio del activo subyacente. La valuación de estas opciones se obtiene asumiendo que $S_{average}$ ~ lognormal, lo cual es factible.

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

El pago de un call asiático con precio de ejercicio promedio (*average strike*) es:

$$Max\{S_T - K(= S_{Average}), 0\}$$

El pago de un put asiático con precio de ejercicio promedio (*average strike*) es:

$$Max\{K(= S_{Average}) - S_T, 0\}$$

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Laboratorio. Considere una opción asiática a 6 meses sobre una acción con precio de ejercicio \$50. Suponga que los precios de la acción al final de cada mes fueron de \$30, 40, 35, 55, 45 y 53.

1. Obtenga la función de pagos si es un call y un put average price o average strike

    a) Con promedio aritmético

    b) Con promedio geométrico

2. Compare sus pagos con el pago de un call y put vanilla Europeos.

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Laboratorio. El 8 de febrero de 2023, el precio de la acción de NVIDIA fue de €207.652023; usted espera que el precio de la acción suba, por lo que decide irse largo en un call vanilla a 1 año. Obtenga el pago si $K = €300$.

Si en vez de irse largo en un call vanilla decide hacerlo con una opción call asiática, donde la ventana para determinar el promedio serán los últimos 3 meses. Si $K = €300$; obtenga la función de pagos si es *average price* y *average strike* con promedio aritmético y promedio geométrico.

Hoja de cálculo
de Microsoft Excel

Productos Estructurados. Derivados Exóticos

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

El precio promedio del activo tiene una menor volatilidad que un precio único sobre el mismo activo. Por lo tanto, debe ocurrir que el precio de la opción asiática es más barata que la opción Europea:

$$Varianza_{Promedio\_S_t} < Varianza_{S_t}$$
$$\Rightarrow$$
$$Opción_{Asiática} < Opción_{Europea}$$

Además, si N es el número de veces que se promedia, tal que $N_1 > N_2$, entonces:

$$Varianza_{Promedio_{S_t,N_1}} < Varianza_{Promedio_{S_t,N_2}}$$
$$\Rightarrow$$
$$Opción_{Asiática,\,N_1} < Opción_{Asiática,\,N_2}$$

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Por último, dado que Geometric (S_t) < Average (S_t), entonces:

Asian Call [G(S_t)] < Asian Call [A(S_t)]

Asian Put [G(S_t)] > Asian Put [A(S_t)]

si N el número de veces que se promedia, tal que $N_1 > N_2$, entonces:

Var [Ave_{N_1}(S_t)] < Var [Ave_{N_2}(S_t)] ➔ Asian Option (N_1) > Asian Option (N_2)

Por último, dado que Geometric (S_t) < Average (S_t), entonces:

Asian Call [G(S_t)] > Asian Call [A(S_t)]

Asian Put [G(S_t)] < Asian Put [A(S_t)]

Productos Estructurados. Derivados Exóticos

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Laboratorio. Grafique la función de pagos de la siguiente situación que se presentó en 2016 en México:

A. Opción Asiática de venta tipo *average price* con precio de ejercicio de USD $49 el barril de petróleo con vencimiento a un año.

B. La prima fue de USD $1,090 millones, cubriendo 212 millones de barriles.

Comunicado 1 SHCP

Comunicado 2 SHCP

Hoja de cálculo de Microsoft Excel

Productos Estructurados. Derivados Exóticos

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Valuación de opciones Asiáticas con árboles binomiales. You are given the following information about a non-dividend paying stock and a ***3-month Asian arithmetic average price put*** $[Max\{K - S_{Average}, 0\}]$ with strike price \$39 on the stock:

i. The current stock price is \$40

ii. The stocks volatility is 20%.

iii. The stock price is modeled with a 3- period binomial tree with u = 1.1 and d = 0.9.

iv. The option is priced using this binomial tree.

v. The continuously compounded risk-free interest rate is 5%.

Calculate the value of this option.

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

The following table shows 8 possibilities for a stock and option payoff:

Scenario	Month 1	Month 2	Month 3	Arithmetic Average	Put Payoff
uuu	44	48.40	53.24	48.5467	0
uud	44	48.40	43.56	45.32	0
udu	44	39.60	43.56	42.3867	0
udd	44	39.60	35.64	39.7467	0
duu	36	39.60	43.56	39.72	0
dud	36	39.60	35.64	37.08	1.92
ddu	36	32.40	35.64	34.68	4.32
ddd	36	32.40	29.16	32.52	6.48

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

The risk neutral probability of u is:

$$p^* = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d} = \frac{e^{0.05/12} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.5209$$
$$1 - p^* = 1 - 0.5209 = 0.4791$$

The probabilities of the non-zero payoff scenarios:

$$dud \text{ and } ddu : p^* \cdot (1-p^*)^2 = 0.5209 \cdot 0.4791^2 = 0.1196$$
$$ddd : (1-p^*)^3 = 0.4791^3 = 0.11$$

Hence, the option price:

$$AP = e^{-0.05/4}\left(0.1196(1.92 + 4.32) + 0.11 \cdot 6.48\right) = 1.4407 \approx 1.44$$

Productos Estructurados. Derivados Exóticos

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Valuación de opciones Asiáticas con árboles binomiales. You are given the following information about a non-dividend paying stock and a ***3-month Asian geometric average strike call*** $\left[Max\left\{S_T - K\left(= S_{Average_{Geo}}\right), 0\right\}\right]$ on the stock:

i. The current stock price is $40

ii. The stocks volatility is 20%.

iii. The stock price is modeled with a 3- period binomial tree with u = 1.1 and d = 0.9.

iv. The option is priced using this binomial tree.

v. The continuously compounded risk-free interest rate is 5%.

Calculate the value of this option.

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

The following table shows 8 possibilities for a stock and option payoff:

Scenario	Month 1	Month 2	Month 3	Geometric Average	Call Payoff
uuu	44	48.40	53.24	48.40	4.84
uud	44	48.40	43.56	45.2684	0
udu	44	39.60	43.56	42.3395	1.2205
udd	44	39.60	35.64	39.60	0
duu	36	39.60	43.56	39.60	3.96
dud	36	39.60	35.64	37.0378	0
ddu	36	32.40	35.64	34.6414	0.9986
ddd	36	32.40	29.16	32.40	0

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

The risk neutral probability of u is the same as before:

P* = 0.5209 y (1-P*) = 0.4791

The probabilities of the non-zero pay off scenarios:

$$uuu : p^{*3} = 0.5209^3 = 0.1413$$
$$udu \text{ and } duu : p^{*2} \cdot (1 - p^*) = 0.5209^2 \cdot 0.4791 = 0.13$$
$$ddu : p^* \cdot (1 - p^*)^2 = 0.5209 \cdot 0.4791^2 = 0.1196$$

Hence, the option price:

$$\begin{aligned} AC &= e^{-0.05/4}(4.84 \cdot 0.1413 + 0.13(1.2205 + 3.96) + \\ &\quad +0.1196 \cdot 0.9986) = 1.4585 \approx 1.46 \end{aligned}$$

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Valuación de opciones Asiáticas con promedio aritmético (versión Hull). Turnbull y Wakeman (1991) derivaron una expresión para el precio de las opciones asiáticas con promedio aritmético en el subyacente, utilizando los dos primeros momentos $(M_1 \, y M_2)$ de $S_{Average}$:

$$c_{TW} \approx e^{-r(T-t)}[F_0 N(d_1) - KN(d_2)]$$

$$p_{TW} \approx e^{-r(T-t)}[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)]$$

Donde $F_0 = M_1$, $\sigma^2 = \frac{1}{(T-t)} ln\left(\frac{M_2}{{M_1}^2}\right)$, $M_1 = \frac{e^{(r-q)(T-t)}-1}{(r-q)(T-t)} S_0$,

$M_2 = \frac{2e^{[2(r-q)+\sigma^2](T-t)} {S_0}^2}{(r-q+\sigma^2)(2(r-q)+\sigma^2)(T-t)^2} + \frac{2{S_0}^2}{(r-q)(T-t)^2}\left(\frac{1}{2(r-q)+\sigma^2} - \frac{e^{(r-q)(T-t)}}{r-q+\sigma^2}\right)$, $d_1 = \frac{ln\left(\frac{F_0}{K}\right)+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ y $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, con $r, \ q \ y \ \sigma$ constantes.

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

De manera general, si el promedio se obtiene a partir de observaciones de las F_i en T_i, con $1 \leq T_i \leq m$; entonces:

$$M_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} F_i \quad \text{y} \quad M_2 = \frac{1}{m^2}\left[\sum_{i=1}^{m} {F_i}^2\, e^{{\sigma_i}^2 T_i} + 2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{j-1} F_i F_j e^{{\sigma_i}^2 T_i}\right]$$

Donde F_i y σ_i es el precio forward y la volatilidad implícita al vencimiento T_i.

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Laboratorio. Valuate an ***average price call option*** on a non-dividend-paying stock where the stock price is USD $50, the strike price is USD $50, the stock price volatility is 40% per annum, the risk-free rate is 10% per annum, and the time to maturity is 1 year. Compare it to vanilla option.

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Laboratorio. Considere una opción [call & put] sobre monedas con **promedio aritmético** en el precio, el plazo a vencimiento es de 6 meses. El precio del subyacente se ubica en $6.80, el precio de ejercicio en $6.90, la tasa libre de riesgo en 7%, la tasa extranjera es del 9% y la volatilidad del subyacente es 14%. La opción está referenciada al promedio de los siguientes seis meses.

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Ahora bien, asuma que la opción no es nueva, de tal manera que se han observado algunos precios para la determinación del promedio. Suponga que este periodo es hasta t_1 y la opción aún tiene una vigencia de t_2. Suponga que el precio promedio del activo durante t_1 es $\bar{S}$. El pago de un call sobre el precio promedio es:

$$Max\left\{\frac{\bar{S}t_1 + S_{average}t_2}{t_1 + t_2} - K, 0\right\}$$

Donde $S_{average}$ es el precio promedio durante lo que le queda de vigencia a la opción. Esto es lo mismo a

$\frac{t_2}{t_1+t_2} Max\{S_{average} - K^*, 0\}$, donde $K^* = \frac{t_1+t_2}{t_2} K - \frac{t_1}{t_2}\bar{S}$

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Si $K^* > 0$, la opción se valúa normal, como una opción Asiática, pero usando como precio de ejercicio K^* y no K y multiplicando el resultado por el factor $t_2/(t_1+t_2)$.

Si $K^* < 0$, la opción ciertamente será ejercida y se valúa como un contrato forward.

El valor es $\frac{t_1+t_2}{t_2}[M_1 e^{-rt_2} - K^* e^{-rt_2}]$.

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Valuación de opciones Asiáticas con promedio aritmético (Versión original)**.**

Turnbull y Wakeman (1991) expresaron el precio de las opciones asiáticas con promedio aritmético en el subyacente :

$$c_{TW} \approx e^{-r(T-t)}[FN(d_1) - KN(d_2)]$$

$$p_{TW} \approx e^{-r(T-t)}[KN(-d_2) - FN(-d_1)]$$

Donde T es el vencimiento, r es la tasa libre de riesgo, F es el precio futuro y K es el precio de ejercicio.

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{{\sigma_A}^2}{2}T}{\sigma_A\sqrt{T}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma_A\sqrt{T}$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{ln(M)}{T}} \qquad M = \frac{2e^{\sigma^2 T} - 2e^{\sigma^2\tau}[1 + \sigma^2(T-\tau)]}{\sigma^4(T-\tau)^2}$$

Donde τ es el momento en que empieza a promediarse el precio del activo, y σ es la volatilidad del contrato de futuros.

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Si la opción está en el periodo del promedio, entonces el precio de ejercicio debe ajustarse de la siguiente manera:

$$\widehat{K} = K\frac{T_2}{T} - F_A\frac{(T_2 - T)}{T}$$

Donde T_2 es el tiempo original del periodo a promediar y F_A es el precio promedio de los futuros durante el periodo T_2-T. El valor de la opción en este caso debe multiplicarse por T/T_2.

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Valuación de opciones Asiáticas con promedio aritmético

Otra versión de Turnbull-Wakeman:

Opciones con Rendimiento Aritmético Promedio

1

$$S_E = \frac{S}{t(r-q)}\left(e^{qt_2} - e^{-rt_2}\right)$$

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{V}}\left[\frac{\ln(D)}{2} - \ln(E^*)\right] \qquad d_2 = d_1 - \sqrt{V}$$

2

$$E^* = E - \frac{t - t_2}{t} S_A$$

$$V = \ln(D) - 2\left[rt_2 + \ln(S_E)\right] \qquad D = \frac{M}{t^2}$$

3

$$M = \frac{2S^2}{(r-q)\sigma^2}\left[\frac{e^{(2(r-q)+\sigma^2)t_2} - 1}{2(r-q)+\sigma^2} - \frac{e^{(r-q)t_2} - 1}{r-q}\right]$$

4

$$c_{Asian} \approx S_E N(d_1) - X^* e^{-rT_2} N(d_2)$$

$$p_{Asian} \approx c_{Asian} - S_E + X^* e^{-rT_2}$$

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Valuación de opciones Asiáticas con promedio aritmético

Levy (1990) derivó la siguiente expresión para el precio de las opciones asiáticas con promedio aritmético en el subyacente, la cual se considera más atinado:

$$c_{Levy} \approx S_Z N(d_1) - K_Z e^{-rT_2} N(d_2)$$

$$p_{Levy} \approx c_{Levy} - S_Z + K_Z e^{-rT_2}$$

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{K}}\left[\frac{ln(L)}{2} - ln(K_Z)\right]; \quad d_2 = d_1 - \sqrt{K}$$

$$S_Z = \frac{S}{(r-q)T}\left[e^{-qT_2} - e^{-rT_2}\right] \qquad K_Z = K - S_{average}\frac{T - T_2}{T} \qquad K = ln(L) - 2[rT_2 + ln(S_Z)]$$

$$L = \frac{M}{T^2} \qquad M = \frac{2{S_0}^2}{r-q+\sigma^2}\left(\frac{e^{(2(r-q)+\sigma^2)T_2 - 1}}{2(r-q)+\sigma^2}\right) - \frac{e^{(r-q)T_2} - 1}{r-q}$$

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Valuación de opciones Asiáticas con promedio geométrico (Kemmna & Vorst, 1990)

Opciones con Rendimiento Geométrico Promedio

1

Volatilidad ajustada

$$\sigma_A = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$$

Costo de acarreo ajustado

$$b_a = 0.5\left((r-q) - \frac{\sigma^2}{6}\right)$$

2

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + \left(b_a + \sigma_a^2/2\right) t}{\sigma_a \sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_a \sqrt{t}$$

3

$$c = Se^{(b_a - r)t} N(d_1) - Ee^{-rt} N(d_2)$$

$$p = Ee^{-rt} N(-d_2) - Se^{(b_a - r)t} N(-d_1)$$

Opciones con valor dependiente: Opciones Asiáticas

Laboratorio. ¿Cuál es el valor de una opción *put* con rendimiento **geométrico promedio** con plazo a vencimiento de 3 meses? Considere que el precio de ejercicio es de $85, el precio del activo subyacente es de $80, la tasa libre de riesgo es 5%, el costo de acarreo es 8%, y la volatilidad es del 20%.

Calcule también las opciones Vanilla y compare.

Tarea (se encuentra en el repositorio de tareas)

Opciones con valor dependiente: Opciones Look-Back

Opciones Look-Back

Los pagos dependen del valor máximo y mínimo alcanzado en el precio del activo durante la vigencia de la opción.

	Floating lookback option	***Fixed lookback option***
	Opciones con precio de ejercicio flotante	**Opciones con precio de ejercicio fijo**
Call	El strike es el precio mínimo del subyacente	El precio final del subyacente es el máximo observado durante la vida de la opción
Put	El strike es el precio máximo del subyacente	El precio final del subyacente es el mínimo observado durante la vida de la opción

Suelen ser relativamente caras, por no tener un precio de ejercicio predefinido, ya que se fija al vencimiento con base en la evolución del precio del subyacente.

Opciones con valor dependiente: Opciones Look-Back

Así, el pago de un *floating lookback call* es la cantidad que el precio del activo en el vencimiento excede el precio mínimo observado durante la vida de la opción:

$$Pago\ Call_{floating\ lookback} = Max\left\{S_T - Min\left\{S_{t|t=t_0,T}\right\}, 0\right\}$$

El tenedor de la opción puede comprar el activo al precio más bajo observado durante la vigencia de la opción; esto es $Min\left\{S_{t|t=t_0,T}\right\}$.

Opciones con valor dependiente: Opciones Look-Back

Valuación del *floating lookback call*

$$c_{fl} = S_0 e^{-q(T-t)} N(a_1) - S_0 e^{-q(T-t)} \frac{\sigma^2}{2(r-q)} N(-a_1) - S_{Min} e^{-r(T-t)} \left[N(a_2) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)} e^{Y_1} N(-a_3) \right]$$

Donde:

$$a_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{S_{min}}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$Y_1 = -\frac{2\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) ln\left(\frac{S_0}{S_{min}}\right)}{\sigma^2}$$

$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$a_3 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{S_{min}}\right) + \left(-r + q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Donde S_{min} es el precio mínimo a la fecha. Si la opción apenas se ha originado, $S_{min} = S_0$.

Opciones con valor dependiente: Opciones Look-Back

El pago de un *floating lookback put* es la cantidad que el precio máximo del activo observado durante la vida de la opción excede el precio final:

$$Pago\ Put_{floating\ lookback} = Max\left\{Max\left\{S_{t|t=t_0,T}\right\} - S_T, 0\right\}$$

El tenedor de la opción puede vender el activo al precio más alto observado durante la vigencia de la opción esto es $Max\left\{S_{t|t=t_0,T}\right\}$.

Opciones con valor dependiente: Opciones Look-Back

Valuación del *floating lookback put*

$$p_{fl} = S_{Max}e^{-r(T-t)}\left[N(b_1) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)}e^{Y_2}N(-b_3)\right] + S_0e^{-q(T-t)}\frac{\sigma^2}{2(r-q)}N(-b_2) - S_0e^{-q(T-t)}N(b_2)$$

Donde:

$$b_1 = \frac{ln\left(\frac{S_{Max}}{S_0}\right) + \left(-r + q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$Y_2 = \frac{2\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)ln\left(\frac{S_{Max}}{S_0}\right)}{\sigma^2}$$

$$b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$b_3 = \frac{ln\left(\frac{S_{Max}}{S_0}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Donde S_{max} es el precio máximo a la fecha. Si la opción apenas se ha originado, $S_{Max} = S_0$.

Opciones con valor dependiente: Opciones Look-Back

El pago de un *fixed lookback call* es idéntico a un call Europeo tipo vanilla, salvo que el precio final del activo (S_T) se remplaza por el valor máximo observado durante la vida de la opción:

$$Pago\ Call_{fixed\ lookback} = Max\left\{Max\left\{S_{t|t=t_0,T}\right\} - K, 0\right\}$$

Opciones con valor dependiente: Opciones Look-Back

Valuación del *fixed lookback call*

$$c_{fixed\,lookback} = p_{fl}^{*} + S_0 e^{-q(T-t)} - K e^{-r(T-t)}$$

Donde p_{fl}^{*} es el valor de una opción *floating lookback put* con el mismo vencimiento.

Opciones con valor dependiente: Opciones Look-Back

El pago de un *fixed lookback put* es idéntico a un put Europeo tipo vanilla, salvo que el precio final del activo (S_T) se remplaza por el valor mínimo observado durante la vida de la opción:

$$Pago\ Put_{fixed\ Lookback} = Max\left\{K - Min\left\{S_{t|t=t_0,T}\right\}, 0\right\}$$

Opciones con valor dependiente: Opciones Look-Back

Valuación del *fixed lookback put*

$$p_{fix} = c_{fl}^{*} + Ke^{-r(T-t)} - S_0 e^{-q(T-t)}$$

Donde c_{fl}^{*} es el valor de una opción *floating lookback call* con el mismo vencimiento.

Productos Estructurados. Derivados Exóticos

Opciones con valor dependiente: Opciones Look-Back

Laboratorio.

a) Recordando el laboratorio sobre el precio de la acción de NVIDIA, en el sentido que estamos a 8 de febrero de 2023 y el precio de dicha acción es de €207.652023; y se espera que el precio de la acción suba, por lo que decide irse largo en un *call floating lookback* a 1 año. Compare sus resultados si el call es vanilla.

b) Recordando el laboratorio sobre el precio de la acción de NVIDIA, en el sentido que estamos a 8 de febrero de 2023 y el precio de dicha acción es de €207.652023; y se espera que el precio de la acción suba, por lo que decide irse largo en un *call fixed lookback* a 1 año. Compare sus resultados si el call es vanilla. Utilice una $K = €300$

Opciones con valor dependiente: Opciones Look-Back

Laboratorio. Valúe una opción call *floating lookback* que se está emitiendo sobre un índice accionario que paga 4% en dividendos, el nivel actual del índice es de 400. La volatilidad del índice es del 20% anual. La tasa libre de riesgo es del 6% anual y el vencimiento es en 9 meses. Después valúe una opción call Europea tipo Vanilla y compare su precio con la opción call *floating lookback* .

Opciones con valor dependiente: Opciones Look-Back

- Valuación del *floating lookback call*

$$c_{fl} = S_0 e^{-q(T-t)} N(a_1) - S_0 e^{-q(T-t)} \frac{\sigma^2}{2(r-q)} N(-a_1) - S_{Min} e^{-r(T-t)} \left[N(a_2) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)} e^{Y_1} N(-a_3) \right]$$

Donde:

$$a_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{S_{min}}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad Y_1 = -\frac{2\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) ln\left(\frac{S_0}{S_{min}}\right)}{\sigma^2}$$

$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$a_3 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{S_{min}}\right) + \left(-r + q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Donde S_{min} es el precio mínimo a la fecha. Si la opción apenas se ha originado, $S_{min} = S_0$.

Opciones con valor dependiente: Opciones Look-Back

Laboratorio. Valúe una opción put *floating lookback* que se está emitiendo sobre una acción que no paga dividendos, el precio spot de la acción es de $50. La volatilidad de la acción es del 40% anual. La tasa libre de riesgo es del 10% anual y el vencimiento es en 3 meses. Después valúe una opción put Europea tipo Vanilla y compare su precio con la put *floating lookback* .

Opciones con valor dependiente: Opciones Compuestas

Opciones Compuestas

Las opciones compuestas son opciones sobre opciones. Existen cuatro tipos de opciones compuestas:

- Call-on-call (CaCall)
- Put-on-call (PuCall)
- Call-on-put (CaPut)
- Put-on-put (PuPut)

Las opciones compuestas tienen dos precios de ejercicio y dos fechas de vencimiento.

Opciones con valor dependiente: Opciones Compuestas

Veamos primero la opción call sobre call: en el primer vencimiento, T_1, el tenedor de la opción compuesta tiene el derecho más no la obligación de comprar una opción call. La opción call le da derecho al tenedor a comprar el activo en la cantidad K_2 en T_2.

La opción compuesta será ejercida en T_1 solo si el valor de la opción en esa fecha es mayor que K_1.

Opciones con valor dependiente: Opciones Compuestas

La valuación de estas opciones tiene fórmula cerrada para las opciones tipo Europeas:

$$c_{call} = S_0 e^{-q(T_2-t)} M\left(a_1, b_1; \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right) - K_2 e^{-r(T_2-t)} M\left(a_2, b_2; \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right) - K_1 e^{-r(T_1-t)}\ N(a_2)$$

Donde:

$$a_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{S^*}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T_1 - t)}{\sigma\sqrt{T_1 - t}} \qquad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1 - t}$$

$$b_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K_2}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T_2 - t)}{\sigma\sqrt{T_2 - t}} \qquad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2 - t}$$

$M(a, b; \rho)$ es la función de distribución acumulada normal bivariada, con la primera variable menor que a, la segunda menor que b, y el coeficiente de correlación entre las dos es ρ.

S* es el precio del activo en T_1 tal que el precio de la opción es K_1; es decir, el valor de S* se encuentra al resolver la ecuación $c_{BSM}(S^*, K_2, T_2 - T_1) = K_1$

Opciones con valor dependiente: Opciones Compuestas

El resto de las opciones se valúan de la siguiente manera:

$$p_{call} = K_2 e^{-r(T_2-t)} M\left(-a_2, b_2; -\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right) - S_0 e^{-q(T_2-t)} M\left(-a_1, b_1; -\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right) + K_1 e^{-r(T_1-t)} N(-a_2)$$

$$c_{put} = K_2 e^{-r(T_2-t)} M\left(-a_2, -b_2; \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right) - S_0 e^{-q(T_2-t)} M\left(-a_1, -b_1; \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right) - K_1 e^{-r(T_1-t)} N(-a_2)$$

$$p_{put} = S_0 e^{-q(T_2-t)} M\left(a_1, -b_1; -\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right) - K_2 e^{-r(T_2-t)} M\left(a_2, -b_2; -\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right) + K_1 e^{-r(T_1-t)}\ N(a_2)$$

S* es el precio del activo en T_1 tal que el precio de la opción es K_1; es decir, el valor de S* se encuentra al resolver la ecuación $c_{BSM}(S^*, K_2, T_2 - T_1) = K_1$ [Esto aplica para el *call-on-call* y el *put-on-call*]

Opciones con valor dependiente: Opciones Compuestas

El código siguiente permite calcular las probabilidades normales bivariadas [Python]:

```
import numpy as np
from scipy.stats import multivariate_normal

def pnbivariada(x, y, rho):
    # Calcula la matriz de covarianza
    cov_matrix = [[1, rho], [rho, 1]]

    # Crea el objeto de distribución normal bivariada
    bivariada = multivariate_normal(mean=[0, 0], cov=cov_matrix)

    # Calcula la probabilidad acumulada en el punto (x, y)
    probabilidad = bivariada.cdf([x, y])

    print(f"{probabilidad}")

#### Datos que se modifican
T1=0.25
T2=0.5
a1=-0.2630062
a2=-0.4380062
b1=0.0662833
b2=-0.1812040

####
print("Put on a call")
print("M[-a2, b2, -raiz(T1/T2)] =")
pnbivariada(-a2,b2,-np.sqrt(T1/T2))
print("M[-a1, b1, -raiz(T1/T2)] =")
pnbivariada(-a1,b1,-np.sqrt(T1/T2))
print("    ")

#####
print("Call on a call")
print("M[a1, b1, raiz(T1/T2)] =")
pnbivariada(a1,b1,np.sqrt(T1/T2))
print("M[a2, b2, raiz(T1/T2)] =")
pnbivariada(a2,b2,np.sqrt(T1/T2))
print("    ")

#####
print("Call on a put")
print("M[-a2, -b2, raiz(T1/T2)] =")
pnbivariada(-a2,-b2,np.sqrt(T1/T2))
print("M[-a1, -b1, raiz(T1/T2)] =")
pnbivariada(-a1,-b1,np.sqrt(T1/T2))
print("    ")
####
print("Put on a put")
print("M[a1, -b1, -raiz(T1/T2)] =")
pnbivariada(a1,-b1,-np.sqrt(T1/T2))
print("M[a2, -b2, -raiz(T1/T2)] =")
pnbivariada(a2,-b2,-np.sqrt(T1/T2))
```

Productos Estructurados. Derivados Exóticos

Opciones con valor dependiente: Opciones Compuestas

El código siguiente permite calcular las probabilidades normales bivariadas [R]:

```
library(mvtnorm)
# Datos que se modifican
T1=0.25
T2=0.5
a1=-0.2630062
a2=-0.4380062
b1=0.0662833
b2=-0.1812040
rho=-sqrt(T1/T2)

# Definir media y matriz de covarianza
mu <- c(0, 0)
Sigma <- matrix(c(1, rho,
            rho, 1), nrow=2 , byrow = TRUE)
####
print("Put on a call")
print("M[-a2, b2, -raiz(T1/T2)] =")
M1<-pmvnorm(mean=mu, sigma=Sigma,
     lower=c(-Inf, -Inf), upper=c(-a2, b2))
print("M[-a2, b2, -raiz(T1/T2)] =")
M1[1]

M2<-pmvnorm(mean=mu, sigma=Sigma,
     lower=c(-Inf, -Inf), upper=c(-a1, b1))
print("M[-a1, b1, -raiz(T1/T2)] =")
M2[1]
```

Opciones con valor dependiente: Opciones Compuestas

Laboratorio. Considere una opción put-on-call que da al tenedor el derecho a vender una opción call en USD $50 en 3 meses a partir de hoy. El strike sobre la opción call subyacente es USD $520, el vencimiento del call es de 6 meses a partir de hoy, y el precio del índice de la acción subyacente es de USD $500, la t.l.r. es del 8% anual, el índice ofrece un dividendo del 3% anual y tiene una volatilidad del 35%. Así:

$S_0 = 500$ $\quad$ $T_2 = \frac{6}{12} = 0.5$ $\quad$ $r = 8\%$

$T_1 = \frac{3}{12} = 0.25$ $\quad$ $K_2 = 520$ $\quad$ $\sigma = 35\%$

$q = 3\%$

$K_1 = 50$

Put-on-call=$Max\{K_1 - S_{T_1}, 0\} = Max\{50 - c_{T_1}, 0\}$

Donde $c_{T_2} = Max\{S_{T_2} - K_2, 0\} = c_{T_2} = Max\{S_{T_2} - 520{,}0\}$

Opciones con valor dependiente: Opciones Compuestas

Laboratorio. Considere el ejercicio anterior, pero ahora calcule una opción *call-on-call*.

Opciones que intercambian un activo por otro

Opciones que intercambian un activo por otro

Las opciones que intercambian un activo por otro (denominadas opciones de intercambio) tienen diversos contextos: Una opción para comprar yenes con dólares australianos es, desde el punto de vista de un inversionista de los EE.UU., una opción para cambiar un activo denominado en moneda extranjera por otro activo denominado en otra moneda extranjera.

Considere la opción Europea que da al tenedor el derecho, más no la obligación, de **entregar un activo con valor U_T** en T y **recibirá a cambio un activo con valor V_T**, entonces el pago de la opción es:

$$c_{U\times V} = Max\{V_T - U_T, 0\}$$

Opciones que intercambian un activo por otro

Margrabe (1978) ofrece una fórmula para la valuación de estas opciones, al asumir que los precios de los activos U y V siguen un movimiento geométrico Browniano con volatilidades σ_U y σ_V, respectivamente.

Asuma también que la correlación instantánea entre U y V es ρ, y los rendimientos que ofrecen U y V son q_U y q_V, respectivamente.

El valor de la opción es:

$$c_{U\times V} = V_0 e^{-q_V(T-t)} N(d_1) - U_0 e^{-q_U(T-t)} N(d_2)$$

Donde $d_1 = \frac{ln\left(\frac{V_0}{U_0}\right)+\left(q_U-q_V+\frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)(T-t)}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}}$; $d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T-t}$ y $\hat{\sigma} = \sqrt{{\sigma_U}^2 + {\sigma_V}^2 - 2\rho\sigma_U\sigma_V}$ y V_0 y V_0 son los precios spot de U y V.

Productos Estructurados. Derivados Exóticos

Opciones que intercambian un activo por otro

Tarea corta. Ver el video de cómo se obtiene la fórmula de Margrabe (1978) a partir de un cambio en el espacio de probabilidad (cambios de numeraria):

https://www.youtube.com/watch?v=GAW9ZT3SiLc

1. Investigue qué es un cambio de numerario y porqué se tiene que hacer.

2. Replique el procedimiento realizado por el expositor y entréguelo.

Opciones que intercambian un activo por otro

Laboratorio. Determine el precio de una opción a un año, tipo Europea que entrega 100 onzas de plata a cambio de una onza de oro. El precio actual del oro y de la plata es de $1,520 y $16, respectivamente. La tasa libre de riesgo es del 10%, la volatilidad del precio de los dos activos es del 20% y la correlación observada entre el precio de estos dos activos es del 70% (ignore los costos de acarreo).

Opciones que involucran más de un activo

Opciones que involucran más de un activo

Las opciones que involucran dos o más activos riesgosos se denominan **Opciones Arcoíris**. Probablemente la Opción Arcoíris más popular es la *opción de cesta Europea*, en donde el pago depende del valor de un portafolio (o canasta) de activos. Estos activos pueden ser acciones, índices de bonos o índices de monedas.

El número de activos es el número de colores de la Opción Arcoíris. Se denominan Opciones Arcoíris porque la opción se basa en la combinación de varios activos, de la misma forma que el arcoíris es una combinación de varios colores.

Opciones que involucran más de un activo

Las opciones arcoíris se refieren a las opciones cuyo rendimiento depende de más de un activo subyacente; y a cada activo se conoce como un color del arco iris. Ejemplos de estos incluyen:

Tipo de opción arcoíris europea	Pago
Opción “best of assets”. Entrega el máximo observado.	$Max\{S_1, S_2, \dots, S_n, K\}$
Opción “Call on max”. Otorga el derecho de comprar el activo máximo al precio de ejercicio al vencimiento.	$Max[max\{S_1, S_2, \dots, S_n\} - K, 0]$
Opción “call on min”. Otorga el derecho de comprar el activo del mínimo precio al precio de ejercicio.	$Max[min\{S_1, S_2, \dots, S_n\} - K, 0]$
Opción “put on max”. Otorga el derecho de vender al máximo precio observado de los activos.	$Max[K - Max\{S_1, S_2, \dots, S_n\}, 0]$
Opción “put on min”. Otorga el derecho a vender al mínimo precio observado de los activos.	$Max[K - min\{S_1, S_2, \dots, S_n\}, 0]$

Opciones que involucran más de un activo

Se tiene otro tipo de opciones arcoíris, donde el pago es el promedio ponderado de los activos que integran la canasta:

- Por ejemplo, un *rainbow call* con ponderaciones 50, 30 y 20% sobre una canasta que incluye un índice accionario, un índice de bonos y una moneda foránea. Esta opción implica el pago en el vencimiento del 50% del mejor rendimiento entre el índice accionario, el índice del bono y la moneda extranjera; 30% del segundo mejor y 20% del tercer mejor. Para ello, los activos se ordenan de acuerdo a su desempeño al vencimiento.

La idea de las Opciones Arcoíris es tener un pago que dependa del valor de los activos, ordenados éstos por desempeño al vencimiento. Por ejemplo, cuando la Opción Arcoíris solo pague el mejor (o el peor) desempeño de los activos de la canasta, se llama *best-of* (*worst-of*).

Opciones que involucran más de un activo

- Se tienen otros esquemas de pago como los siguientes:

Nombre	Pago
Multi-strike Rainbow Option	$\mathrm{Max}\{S_T^1-K_1, S_T^2-K_2, \ldots, S_T^N-K_N\}$
Pyramid Rainbow Option	$\mathrm{Max}\{\lvert S_T^1-K_1\rvert+\lvert S_T^2-K_2\rvert+ \ldots+\lvert S_T^N-K_N\rvert-K,0\}$
Madonna Rainbow Option	$Max\left\{\sqrt{(S_T^1-K_1)^2+(S_T^2-K_2)^2+ \ldots+(S_T^N-KN)^2}-K,0\right\}$

Generalmente, las Opciones Arcoíris se valúan con simulación de Monte Carlo, asumiendo que el rendimiento de cada activo sigue un proceso geométrico Browniano correlacionado.

Productos Estructurados. Derivados Exóticos

Opciones Americanas no estándar (*Nonstandard American options*)

Nonstandard American options

Una Opción Americana estándar se caracteriza porque es posible ejercer en cualquier momento durante la vigencia de la opción y el precio de ejercicio no cambia; sin embargo, algunas opciones en el mercado OTC a menudo no contienen estas características:

- El ejercicio puede darse solo en ciertas fechas, es decir, la opción no puede ser ejercida en otras fechas que no sean las estipuladas. Estas opciones se denominan **opciones Bermuda** (dado que las islas Bermuda se sitúan entre Europa y América, las Opciones Bermuda son opciones intermedias entre las opciones Europeas y Americanas).

- La opción se ejerce en ciertas fechas, *una vez concluido cierto periodo*. Estas opciones se les llama **Opciones Canaria** (más hacia Europa).

Productos Estructurados. Derivados Exóticos

Opciones Americanas no estándar (*Nonstandard American options*)

- El precio de ejercicio puede cambiar durante la vigencia de la opción. Por ejemplo, aquellas que dan al tenedor el derecho más no la obligación de comprar (o vender) en cada fecha previamente estipulada t_i a un precio de ejercicio K_i.

Las opciones americanas no estándar generalmente se valúan usando el árbol binomial, donde en cada nodo se verifica el valor del ejercicio anticipado. Sin embargo, existe una gran literatura sobre diferentes formas de valuación de este tipo de opciones.

Introducción

Ya hemos visto que los inversionistas pueden obtener utilidades si consideramos que los precios de los activos subyacentes tendrán un gran movimiento en el futuro. Véase por ejemplo, los straddles o strangles.

Adicionalmente existen otros instrumentos que consideran la comercialización de las volatilidades o las varianzas de los precios de los subyacentes. De estos instrumentos, los más simples son los swaps de volatilidad y de varianza.

Un swap de volatilidad es un acuerdo para intercambiar la volatilidad realizada de un activo entre (T, t) por una volatilidad fija determinada.

Swaps de Volatilidad y Varianza

Estos instrumentos permiten diversificar un portafolio de activos a largo plazo, ya que cuando los mercados caen, la volatilidad se incrementa: si se toma una posición larga de un swap de varianza puede contrarrestarse el efecto de una caída en los mercados.

Los usos de estos contratos tienen los siguientes beneficios al utilizarse como vehículos de cobertura:

- Incrementan la liquidez cuando aumenta la volatilidad;
- Cubren los fondos de bonos convertibles al incrementarse o disminuir la volatilidad, ya que estos fondos tienen posiciones largas en bonos y cortas en acciones.
- Se elimina o disminuye la necesidad de las coberturas delta-neutral en portafolios de opciones, por lo que abaratan la estrategia.

Swaps de volatilidad

Un swap de volatilidad es un contrato forward sobre la volatilidad futura que presente el precio de un activo. Es un acuerdo para intercambiar la volatilidad observada entre t_0 y T de un activo subyacente por la volatilidad fija previamente establecida σ_K. La volatilidad observada generalmente se determina de la siguiente manera:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{252}{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}\left[ln\left(\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right)\right)\right]^2}$$

Donde S_i es la i-ésima observación del precio del activo.

De esta manera, estos swaps permiten comercializar la volatilidad del activo de manera directa, de manera similar que se comercializa el precio.

Swaps de Volatilidad y Varianza

El pago de este swap en T para el que paga la volatilidad fija es:

$$Pago = L_{Vol}(\bar{\sigma} - \sigma_K)$$

Donde L_{vol} es el nocional principal y σ_K es la volatilidad acordada.

Nótese que este swap solo es de volatilidades, no incluye el valor del nocional. Este derivado se comercializa principalmente en el mercado OTC (si bien la CBOE opera futuros de varianzas) y permite especular o cubrir los riesgos asociados con la magnitud del movimiento del activo subyacente.

El activo subyacente que más se utiliza en estos instrumentos es el mercado de tipos de cambio, ya que es un mercado muy líquido, si bien también se usa en precios de activos o en índices.

Swaps de varianza. Un swap de varianza es un acuerdo para intercambiar la varianza observada entre t_0 y T de un activo por una varianza fija previamente establecida, V_K. La varianza es el cuadrado de la volatilidad observada:

$$\bar{V} = \bar{\sigma}^2$$

El pago de este swap es, para el que paga la varianza fija:

$$Pago = L_{Var}(\bar{V} - V_K)$$

Donde L_{var} es el nocional principal y V_K es la varianza fija. A menudo $L_{var}=L_{vol}/2\sigma_K$.

Valuación del swap de varianza. El valor de recibir la varianza observada y pagar V_K sobre un nocional L_{var} entre t_0 y T es:

$$Valor = L_{Var}\left[\hat{E}[\bar{V}] - V_K\right]$$

Donde:

$$\hat{E}[\bar{V}] = \frac{2}{T}ln\left(\frac{F_0}{S^*}\right) - \frac{2}{T}\left[\frac{F_0}{S^*} - 1\right] + \frac{2}{T}\left[\int_{K=0}^{S^*}\frac{1}{K^2}e^{r(T-t)}p(K)dK + \int_{K=S^*}^{\infty}\frac{1}{K^2}e^{r(T-t)}c(K)dK\right]$$

Donde S^* es un valor del precio del activo, F_0 es el precio forward del activo, T es el vencimiento, $c(K)$ y $p(K)$ son los precios de una opción call y put Europea, respectivamente, con precio de ejercicio K y vencimiento T.

Dada la complejidad de los últimos dos sumandos de la expresión anterior, se tiene la siguiente relación:

$$\hat{E}[\bar{V}] = \frac{2}{T} ln\left(\frac{F_0}{S^*}\right) - \frac{2}{T}\left[\frac{F_0}{S^*} - 1\right] + \frac{2}{T}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta K_i}{{K_i}^2} e^{r(T-t)} Q(K_i)\right]$$

Donde $\Delta k_i = 0.5(K_{i+1}-K_{i-1})$ para i Є [2,n-1]. La función $Q(K_i)$ es el precio de una opción put Europea con precio de ejercicio K_i si $K_i<S^*$; y el precio de una opción call Europea con precio de ejercicio K_i si $K_i>S^*$, cunado $K_i=S^*$ ➔ $Q(K_i)$ es el promedio de los precios de las opciones Europeas call y put con precio de ejercicio K_i.

Entonces el valor del swap de varianzas es:

$$Valor = L_{Var}\left[\hat{E}[\bar{V}] - V_K\right]e^{-r(T-t)}$$

Swap de volatilidades. El pago del swap de volatilidades es $L_{Vol}(\bar{\sigma} - \sigma_K)$, y para su valuación se requiere estimar $\hat{E}[\bar{\sigma}]$, donde $\bar{\sigma}$ se expresa de la siguiente manera:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\hat{E}[\bar{V}]}\sqrt{1 + \frac{\bar{V} - \hat{E}[\bar{V}]}{\hat{E}[\bar{V}]}}$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\hat{E}[\bar{V}]}\left\{1 + \frac{\bar{V} - \hat{E}[\bar{V}]}{2\hat{E}[\bar{V}]} - \frac{1}{8}\left[\frac{\bar{V} - \hat{E}[\bar{V}]}{\hat{E}[\bar{V}]}\right]^2\right\}$$

Tomando esperanzas ambos lados de la igualdad se obtiene lo siguiente:

$$\hat{E}[\bar{\sigma}] = \sqrt{\hat{E}[\bar{V}]}\left\{1 - \frac{1}{8}\left[\frac{var[\bar{V}]}{\hat{E}[\bar{V}]^2}\right]\right\}$$

Donde $var[\bar{V}]$ es la varianza de $\bar{V}$.

Swaps de Volatilidad y Varianza

Así, la valuación de un swap de volatilidades requiere la estimación de la varianza de la varianza promedio durante la vigencia del contrato.

El valor de un swap que acuerda recibir la volatilidad observada entre t_0 y T y pagar la volatilidad fija σ_K, cuando el nocional es L_{vol}, es:

$$L_{Vol}\left(\hat{E}[\bar{\sigma}] - \sigma_K\right)e^{-r(T-t)}$$

Derivados de tasas de interés

Modelos en el mercado estándar

Los derivados de tasas de interés son instrumentos cuyo pago depende del nivel de la tasa de interés. Estos instrumentos se comercializan tanto en el mercado OTC como en el centralizado.

A diferencia de las opciones de activos, los derivados de tasas de interés tienen las siguientes características:

- El comportamiento de una tasa de interés en particular es más complicada que el comportamiento del precio de una acción o de una moneda;
- Para la valuación de cualquier derivado de tasas de interés, es necesario desarrollar un modelo que describa el comportamiento de la curva del bono cupón cero.

Derivados de tasas de interés

- Las volatilidades en puntos diferentes de la curva son diferentes.
- La tasa de interés se usa para descontar el pago así como para definir el pago.

Los productos derivados de tasas de interés más populares son:

- Opciones de bonos;
- Interest rate caps, floors y collars;
- Opciones swap.

Derivados de tasas de interés: Opciones de Bonos

Opciones de bonos

Las Opciones de bonos son opciones para comprar o vender un bono en particular en una fecha dada y a un precio dado. En el mercado OTC, las opciones de bonos están engrapadas en los bonos al momento de la emisión para hacerlos más atractivos a los emisores y compradores.

Un ejemplo de un bono con una opción engrapada es un **bono llamable** (*callable bond*), el cual es un bono que contiene provisiones que permiten a la empresa **emisora** comprar de vuelta el bono en un precio determinado en un tiempo futuro. El tenedor de dicho bono ha vendido una opción call al emisor. Es por ello que los bonos con estas características ofrecen generalmente un mayor yield que los bonos tradicionales.

Derivados de tasas de interés: Opciones de Bonos

El precio de ejercicio (llamado call price) es el precio acordado que el emisor deberá pagar al tenedor del bono. Normalmente, los bonos *callable* no pueden ser comprados durante los primeros años (*lock-out period*). Después a este periodo, el call price depende negativamente del tiempo.

Ejemplo. Sea un bono llamable a 10 años, no puede haber llamada durante los primeros 2 años; pero después de este tiempo, el emisor tiene el derecho de comprar el bono al precio de $110 en los años 3 y 4; a un precio de $107.5 en los años 5 y 6, a un precio de $106 en los años 7 y 8, y a un precio de $103 en los años 9 y 10.

Derivados de tasas de interés: Opciones de Bonos

Otro tipo de bono con una opción engrapada es un bono vendible (*puttable bond*), el cual contiene provisiones que permite al **tenedor** demandar el término prematuro en un precio determinado en un tiempo previamente establecido. Debido a que la opción de venta incrementa el valor del bono para el tenedor, los bonos con estas características ofrecen generalmente un menor yield que los bonos tradicionales.

Ejemplo. Sea un bono vendible a 10 años donde el tenedor tiene el derecho a ser repagado en el año 5.

Derivados de tasas de interés: Opciones de Bonos

Valuación de Opciones de Bonos Europeos

Las opciones de bonos OTC son Europeas, suponiendo que el precio forward del bono tiene volatilidad σ_B, entonces:

$$c = P(0,T)[F_B N(d_1) - KN(d_2)]$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{F_B}{K}\right) + \frac{{\sigma_B}^2}{2}T}{\sigma_B\sqrt{T}}$$

$$p = P(0,T)[KN(-d_2) - F_B N(-d_1)]$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_B\sqrt{T}$$

Donde K es el precio de ejercicio de la opción del bono, T es el vencimiento, P(0,T) es el factor de descuento libre de riesgo al vencimiento T y F_B es el precio forward del bono, con $F_B = \frac{B_0 - I}{P(0,T)}$, donde B_0 es el precio del bono en t=0 e I es el valor presente de los cupones del bono pagaderos durante la vida de la opción.

Productos Estructurados. Derivados Exóticos

Derivados de tasas de interés: Opciones de Bonos

Laboratorio. Considere una opción call Europea a 10 meses, sobre un bono a 9.75 años con un valor nominal de USD $1,000. El valor actual del bono es de USD $960, el precio de entrega es de USD $1,000, **la tasa libre de riesgo a 10 meses es del 10% anual**, y la volatilidad del precio forward del bono con un vencimiento a 10 meses es del 9% anual. El bono paga un cupón del 10% anual, pagaderos semestralmente. Los cupones por USD $50 se pagarán en 3 y 9 meses. Suponga que **la tasa libre de riesgo a 3 y 9 meses es del 9 y 9.5% anual**, respectivamente.

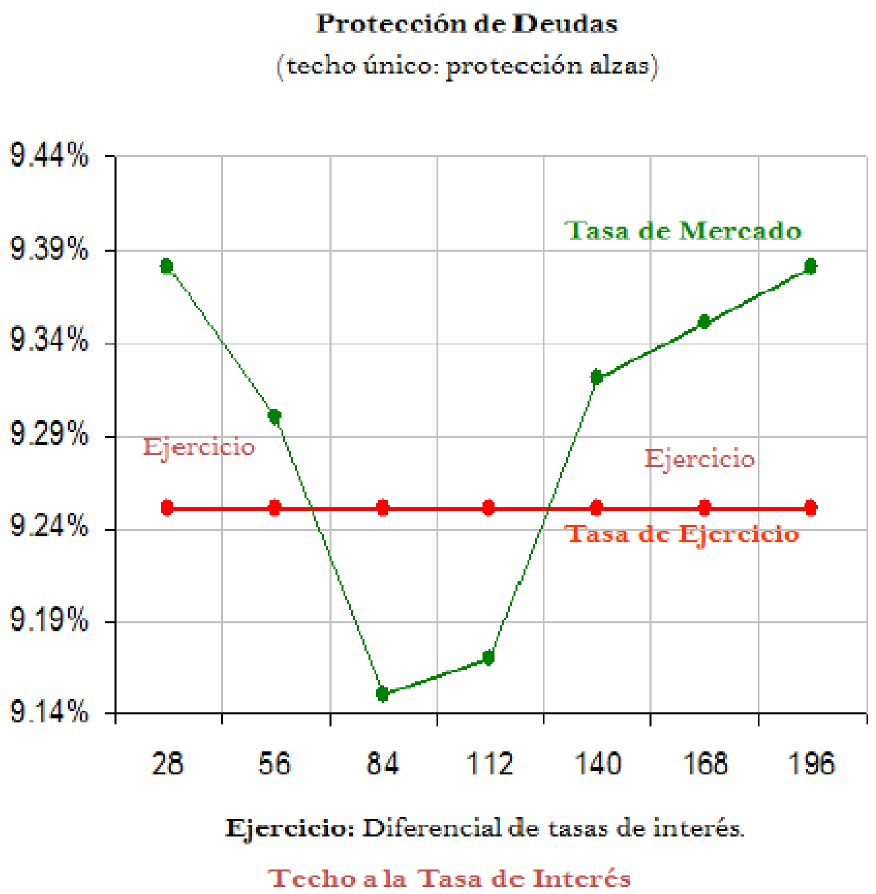
Interest Rate Caps & Floors

El *interest rate cap* es una opción muy popular de tasas de interés en el mercado OTC. Funcionan de la siguiente manera: considere una nota a tasa flotante donde la tasa de interés se reajusta periódicamente igual a la tasa LIBOR. El tiempo entre reajustes se le llama tenor. Suponga que el tenor es de 3 meses. La tasa de interés de la nota por los primeros 3 meses es la tasa LIBOR inicial a 3 meses, la tasa de interés por los siguientes 3 meses es igual a la tasa de interés LIBOR a 3 meses que esté en el mercado dentro de 3 meses, y así sucesivamente.

El *interest rate cap* está diseñado para ofrecer una cobertura ante el posible incremento de la tasa de interés establecida en la nota a tasa flotante, por arriba de cierto nivel previamente establecido (llamado tasa límite o techo, *cap rate*).

Productos Estructurados. Derivados Exóticos

Derivados de tasas de interés: Interest Rate Caps & Floors



Derivados de tasas de interés: Interest Rate Caps & Floors

Si el principal es USD $10 millones, el tenor es 3 meses, la vida del cap es de 5 años y la tasa cap es del 4% ➔ el cap ofrece una cobertura si la tasa de interés de la nota a tasa flotante se incrementa por arriba del 4%: Suponiendo que el tenor es exactamente ¼ de año, y que en una fecha en particular la tasa LIBOR a 3 meses es del 5%, entonces la nota a tasa flotante pagará en 3 meses:

$$\$10{,}000{,}000 \times \frac{1}{4} \times 5\% = \$125{,}000$$

Este pago se compensa con la *rate cap* del 4%:

$$\$10{,}000{,}000 \times \frac{1}{4} \times 4\% = \$100{,}000$$

$$Pago = Nocional \times tenor \times \text{Máx}\{R_i - R_K, 0\}$$

Así, el cap ofrece un pago neto de USD $25,000, el cual no ocurre sino 3 meses después. Si la tasa LIBOR < 4% ➔ no hay pago del cap.

Derivados de tasas de interés: Interest Rate Caps & Floors

En resumen, las opciones Caps consisten en pactar una tasa de ejercicio a cambio del pago de una prima, para un número dado de periodos sucesivos iguales (tenor de por ejemplo cada 28 días) a cambio del derecho de recibir al vencimiento de cada periodo la diferencia entre la tasa variable observada al inicio del periodo y la tasa de ejercicio única prepactada, aplicada a un nocional también prefijado.

Este ejercicio es automático y sólo se paga en caso que la tasa variable supere a la tasa de ejercicio pactada.

$$Pago\ Caps = L \times \delta_i \times Max\{R_i - R_K, 0\}$$

Donde $\delta_i = t_{i+1} - t_i$; R_i es la tasa de interés variable para el periodo entre t_i y t_{i+1}, observada en t_i; y tanto R_i como R_K están expresadas como tasas continuamente capitalizables, equivalentes a la frecuencia del tenor.

Derivados de tasas de interés: Interest Rate Caps & Floors

Se observa que la expresión $L \times \delta_i \times Max\{R_i - R_K, 0\}$ corresponde al pago de una opción call sobre la tasa LIBOR observada en t_i (y cuyo pago se realiza en t_{i+1}).

Entonces el Cap consiste en un portafolio de n opciones de este tipo.

La tasa Libor se observa en $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ y los pagos se hacen en $t_2, t_3, \dots, t_{n+1}$.

A las n opciones call se les llama *caplets*, y el valor del caplet es:

$$c = L\delta_i P(0, t_{i+1})[F_i N(d_1) - R_K N(d_2)]$$

Donde $d_1 = \frac{ln\left(\frac{F_i}{R_K}\right) + \frac{\sigma_i{}^2}{2} t_n}{\sigma_i \sqrt{t_i}}$, $d_2 = d_1 - \sigma_i \sqrt{t_i}$ y F_i es el forward de la tasa de interés, valuada en t_0, entre t_i y t_{i+1}, y σ_i es la volatilidad de los precios forward de las tasas de interés.

Productos Estructurados. Derivados Exóticos

Derivados de tasas de interés: Interest Rate Caps & Floors

Laboratorio. Considere un contrato que limita la tasa LIBOR sobre un nocional de USD $10 millones al 8% anual (convertible trimestral) por 3 meses empezando en 1 año. Si la tasa libre de riesgo es plana del 7% anual (convertible trimestral) y la volatilidad del forward a 3 meses sobre la tasa subyacente es del 20% anual, obtenga el precio del caplet.

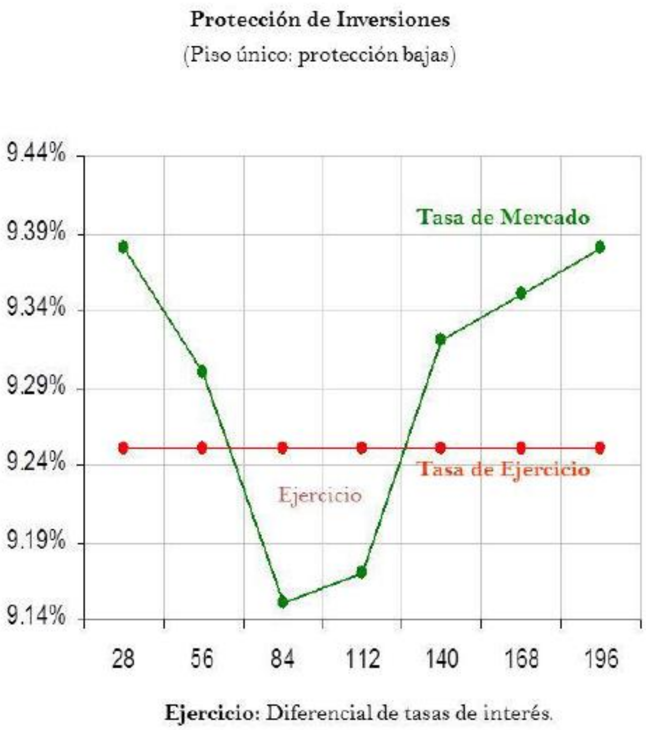
Derivados de tasas de interés: Interest Rate Caps & Floors

Opciones Floors

Para cubrir una inversión (pérdida si baja mucho la tasa de interés) debe utilizarse otro tipo de inversión con la misma lógica, pero que otorgue al tenedor, a cambio del pago de la prima, una tasa piso de tal forma que, si se da el escenario de baja en las tasas, la contraparte esté obligada a liquidarle la diferencia entre la tasa de ejercicio y la tasa spot.

Productos Estructurados. Derivados Exóticos

Derivados de tasas de interés: Interest Rate Caps & Floors



Es decir, el floor da un pago cuando la tasa de interés del activo subyacente cae debajo de cierto nivel:

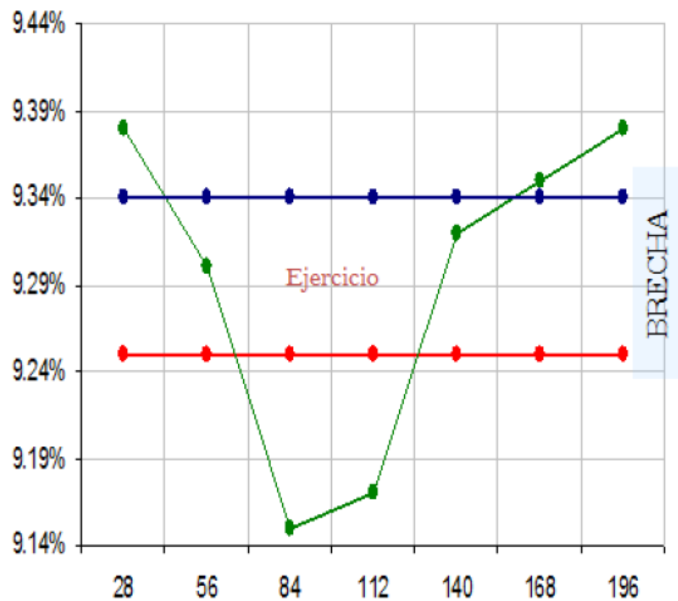
$$Pago\ Floor = L \times \delta_i \times Max\{R_K - R_i, 0\}$$

El valor de la opción floorlet es:

$$p = L\delta_i P(0, t_{i+1})[R_K N(-d_2) - F_i N(-d_1)]$$

Opciones Collars

Un Collar es un instrumento diseñado para garantizar que la tasa de interés subyacente en un nota siempre caiga entre dos niveles. De esta manera, el collar es un portafolio donde simultáneamente se toma una posición larga en un CAP y una posición corta en un Floor, o viceversa, y el resultado es una brecha.



Derivados de tasas de interés: Interest Rate Caps & Floors

Ejemplo. Sea un inversionista A, quien tiene la obligación de pagar a tasa LIBOR a 6 meses sobre un nocional L (suponga que dicha tasa está actualmente al 6%). Un incremento en la tasa LIBOR perjudica al inversionista, mientras que una disminución lo beneficia.

Por lo anterior, el inversionista se va largo en un **interest rate cap**, que paga si la tasa LIBOR se incrementa por arriba del 7%. La contraparte, llamémosle B, pagará {LIBOR - 7%} cuando LIBOR > 7%. Suponga que la prima es de 40pb sobre L.

Para compensar esta prima, el inversionista se va corto en un **interest rate floor** con C, por lo que A pagaría {LIBOR - 5%} cuando LIBOR < 5%. Por este instrumento, el inversionista recibe 30pb del nocional.

Derivados de tasas de interés: Interest Rate Caps & Floors

A partir de la estrategia realizada por A, se tienen los siguientes posibles escenarios:

- **Incremento en la tasa LIBOR**.- A pagará un máximo de 7% sobre su obligación original. Cualquier nivel de tasa por arriba del 7% se compensará con lo que recibirá de B bajo el acuerdo del *interest rate cap*. Por lo tanto, A no tiene exposiciones para incrementos mayores a 1 punto porcentual.

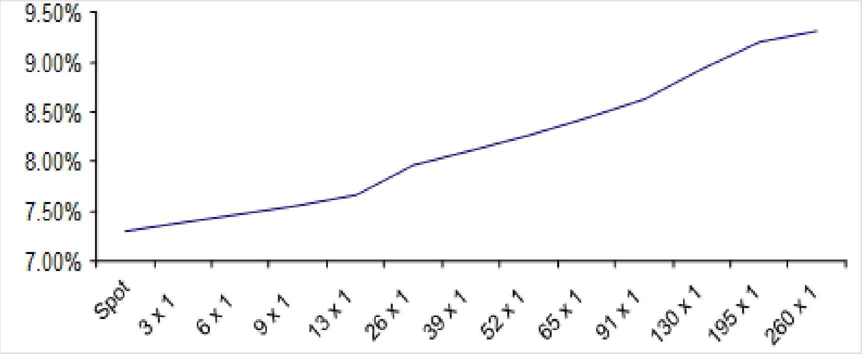
- **At the money**.- Mientras la tasa LIBOR se mantenga alrededor del 6%, A no se ve afectado.

- **Caída de la tasa LIBOR**.- A se verá beneficiado solamente si la tasa de interés no es menor a 5%. En caso de que la tasa LIBOR caiga más de 1 punto porcentual, A tendrá que pagar a C por el acuerdo del *interest rate floor*.

Derivados de tasas de interés: Interest Rate Caps & Floors

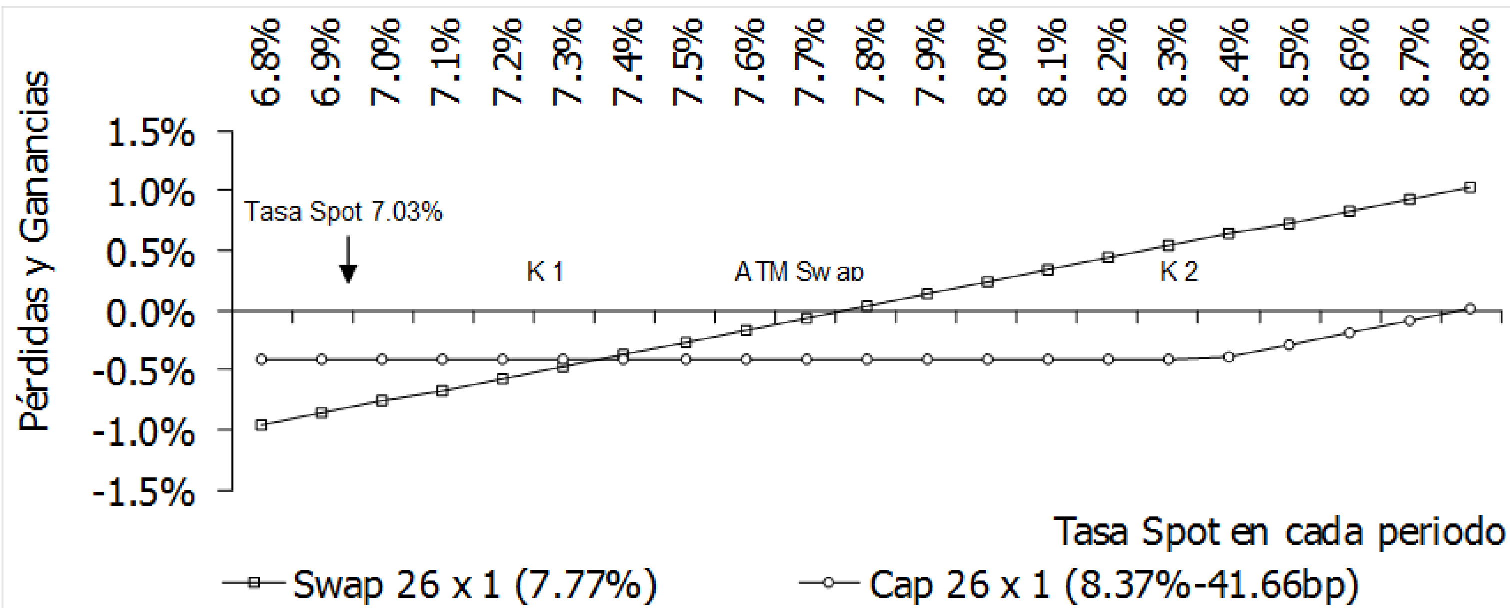
Ejemplo. En el año 2006 una institución tiene obligaciones a tasa variable, donde un aumento en las tasas de interés tiene efectos negativos. Las operaciones de cobertura consideradas fueron swaps lineales, *interest rate cap* e *interest rate swap-collar* :

- La estructura de tasas de interés swap de ese momento mostraba una pendiente positiva en todos sus plazos, por lo que cubrir el crédito con un swap conllevaba costos; por ejemplo, el costo de un swap lineal 26 x 1 era de **65 bp.** Adicionalmente, se consideraba que las tasas de interés de corto plazo en México **se mantendrían**.



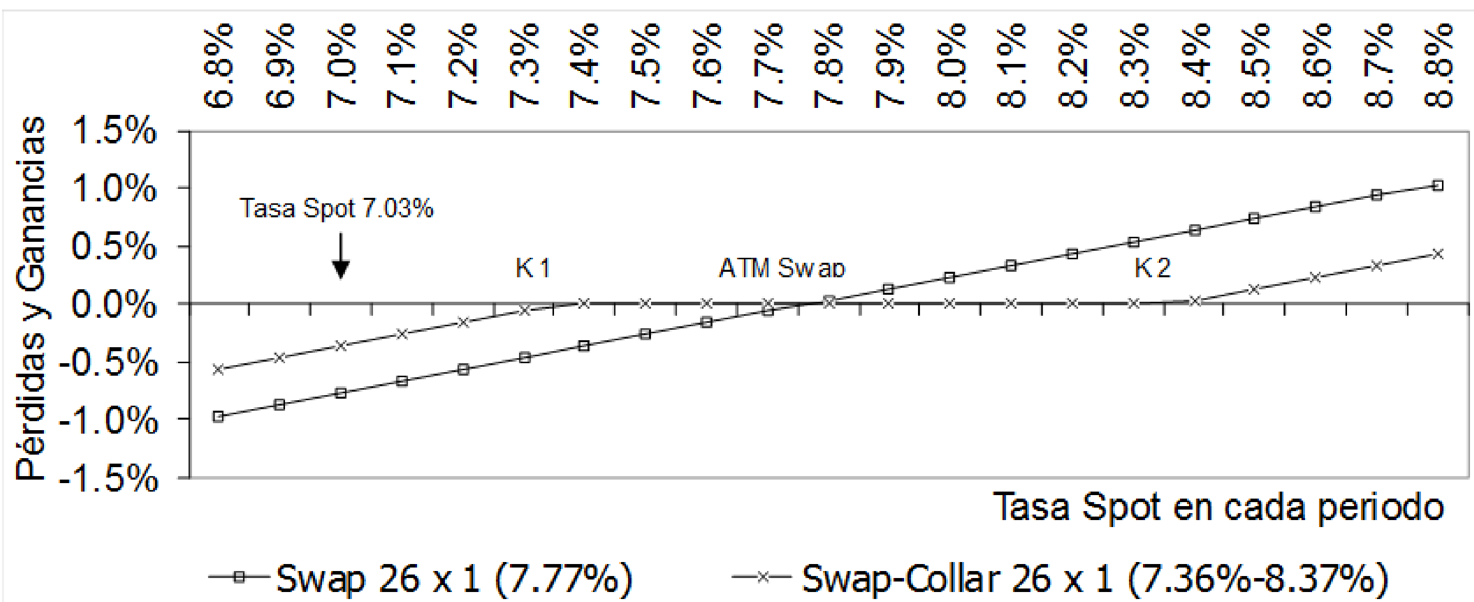
Derivados de tasas de interés: Interest Rate Caps & Floors

- El *interest rate cap* proporciona una cobertura si la tasa de interés es mayor que la tasa de ejercicio. Solo hay intercambio de flujos si la tasa spot se encuentra por arriba de la tasa de ejercicio (ingresos). La prima de esta estrategia fue de **42 bp**.



Derivados de tasas de interés: Interest Rate Caps & Floors

- Por su parte, el esquema de pagos en cada periodo de un *interest rate swap-collar* es que solo hay intercambio de flujos si la tasa spot se encuentra por abajo del límite inferior (egresos) o por arriba del límite superior (ingresos). Esta estrategia permite pagar menos carry (**aprox. 33 bp**) si la tasa de interés spot se mantiene cerca de los niveles actuales.



Opciones de swaps

Las opciones de swaps, o swaptions, son opciones sobre swaps de tasas de interés (*interest rate swap*, IRS) que dan al tenedor el derecho más no la obligación de entrar en un IRS en un cierto tiempo futuro.

Ejemplo. Una empresa contratará un crédito dentro de 6 meses a tasa flotante a 5 años y desea cubrirse ante subidas en la tasa flotante. La empresa entonces puede entrar en un swaption dando el derecho de recibir LIBOR a 6 meses y pagar una tasa fija, supongamos 3% anual, durante 5 años comenzando en 6 meses. Si en 6 meses la tasa LIBOR es menor al 3%, la empresa no ejerce el swaption y contrata un swap con las condiciones imperantes del mercado; pero si la LIBOR es mayor al 3% la empresa ejerce el swaption y obtiene un swap con términos más favorables que los del mercado.

Derivados de tasas de interés: Interest Rate Caps & Floors

Para valuar este tipo de opciones, suponemos que es una opción Europea donde la tasa subyacente al swap es lognormal. Considere un swaption donde el tenedor tiene el derecho a pagar la tasa s_K y recibir LIBOR, la vigencia es n años empezando en T años.

Supondremos que hay m pagos al año y el principal nocional es L. así, asumiremos que cada pago fijo es s_K X L/m.

Si la tasa swap durante n-años empezando en T es S_T, se comparan los flujos donde la tasa fija es S_T con aquellos si la tasa fija es S_K, por lo que el pago del swaption es la siguiente serie de flujos:

$$Flujo = \frac{L}{m} \times Max\{S_T - S_K, 0\}$$

Derivados de tasas de interés: Interest Rate Caps & Floors

Los flujos se reciben m veces al año por n años. Suponga que los pagos del swap son en T_1, T_2, …, T_{mn}, medidos en años a partir de hoy. Cada flujo es un pago de una opción call de S_T con precio de ejercicio S_K. Nótese que el swaption es una opción sobre la tasa swap con pagos repetidos. El modelo estándar del precio del swaption donde el tenedor tiene el derecho de pagar S_K es:

$$c = L \times A \times [s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

Donde $d_1 = \frac{ln\left(\frac{s_0}{s_K}\right)+\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$, $A(t) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{mn} P(0,T_i)$ y $s(t) = \frac{P(t,T_0)-P(t,T_N)}{A(t)}$, con $P(t,T_N)$ siendo el valor de $1 recibido en T_N, σ es la volatilidad del forward swap rate.

Derivados de tasas de interés: Interest Rate Caps & Floors

Si el swaption da al tenedor el derecho a recibir la tasa fija s_K y pagar LIBOR, entonces el flujo es:

$$Flujo = \frac{L}{m} \times Max\{S_K - S_T, 0\}$$

Que se valúa como una opción put sobre S_T, cuyo precio es:

$$p = L \times A \times [s_K N(-d_2) - s_0 N(-d_1)]$$

Derivados de tasas de interés: Interest Rate Caps & Floors

Laboratorio. Suponga que la curva yield LIBOR es plana del 6% anual continuamente capitalizable. Valúe un swaption que da al tenedor el derecho a pagar 6.2% en un swap a 3 años que comienza en 5 años. La volatilidad del forward rate swap es del 20%, los pagos se hacen semestralmente y el principal es de USD $100 millones.

Tema Selecto en Derivados Exóticos

Opciones exóticas

Francisco García Castillo

Primavera 2024