Temas Selectos en Derivados Exóticos

Derivados *vanilla*

Dr. Francisco García Castillo

Syllabus abreviado

- Derivados vanilla
- Derivados exóticos
- Derivados de crédito
- Opciones reales
- Otros temas

Introducción

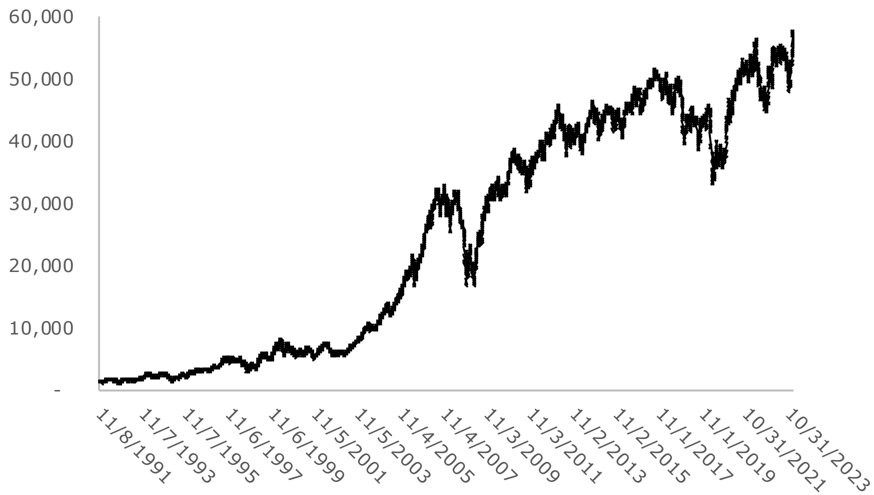
Las acciones de las empresas son el instrumento financiero más básico y representan la propiedad de un pedazo de una empresa.

Sin embargo, los precios de las acciones y de otros activos financieros (como los precios de los *commodities*, los tipos de cambio, los índices accionarios, etc.) están lejos de tener un comportamiento predecible.

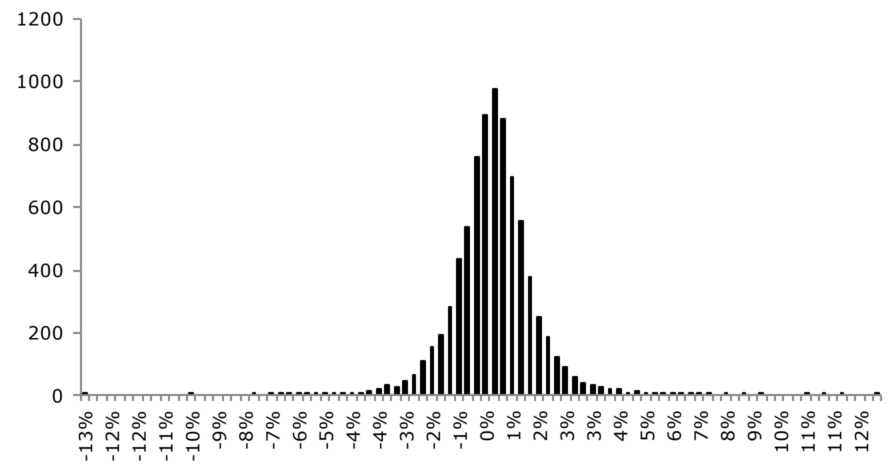
No obstante, a largo plazo se asume que los rendimientos diarios de los precios de los activos se distribuyen normal.

Introducción

Precio diario del IPC 1991-2024



Histograma de frecuencias de los rendimientos diario del IPC 1991-2024



Fuente: Elaboración propia con base en yahoo.finance

Introducción

Si pudiéramos predecir el comportamiento de los precios de las acciones seríamos muy ricos (o cualquier precio, de hecho).

¡¡¡Pero no podemos!!! Además de los vaivenes del mercado, hay casos de manipulación del mercado, donde grandes transacciones mueven el precio de los activos financieros en una dirección que favorece a la persona que hace el movimiento.


BBC NEWS BUSINESS

16 August 2012 Last updated at 07:47 GMT

Libor scandal: Seven banks face US questioning

Seven banks, including HSBC and Royal Bank of Scotland, are to be questioned in the US for alleged manipulation of the Libor inter-bank lending rate.

Barclays, Citigroup, Deutsche Bank, JPMorgan and UBS have also received subpoenas from the attorneys general of New York and Connecticut.

Last month, Barclays was fined £290m by UK and US regulators for rigging Libor.

RBS has admitted it is being investigated over Libor fixing

US regulators said they were investigating potential involvement by other banks in the Barclays scandal.

The investigation is predicated on the assumption that at least one other bank must have colluded with Barclays in any attempts to manipulate Libor

Libor scandal

Former trader charged over Libor

Introducción

En las finanzas modernas se modelan los precios de los activos financieros desde un punto de vista aleatorio, en el cual el modelo de precios de los activos financieros supone que el cambio en el precio se puede estimar desde un punto de vista probabilístico:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

[Véase los apuntes de MGB]

Modelo de Precios MGB

Introducción

Así, se utiliza la **Simulación de Montecarlo**, que se fundamenta en la generación de escenarios de precios a partir de la expresión siguiente:

$$S_T = S_t \cdot e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{T-t}}$$

donde:

- S_t es el precio del activo en el momento t.
- ε es un componente aleatorio, con distribución normal estándar, es decir, con media cero y varianza igual a la unidad.
- $T - t$ es el plazo a simular el activo, expresado como fracción de año.
- μ es el rendimiento anual del activo.
- σ es la volatilidad anual de los rendimientos del activo.

Introducción

La aplicación de la Simulación de Montecarlo para una cartera de activos, como por ejemplo, compuesta por dos títulos, X e Y, presenta ciertos matices; en particular, el proceso de generación de números aleatorios resulta más complicado, ya que éstos deben reflejar la correlación entre ambos activos.

Recibe el nombre de Montecarlo en referencia al **Casino Montecarlo** (que se encuentra en el Principado de Mónaco) por ser la capital del juego de azar, ya que la ruleta es un generador simple de números aleatorios.

Introducción

En este sentido, las expresiones para estimar el precio de los activos son análogas a la anterior:

$$S_{X,t} = S_{X,t-1} \cdot e^{\left(\mu_x - \frac{\sigma_x^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_X \cdot Z_X \cdot \sqrt{t}} \qquad S_{Y,t} = S_{Y,t-1} \cdot e^{\left(\mu_y - \frac{\sigma_y^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_Y \cdot Z_Y \cdot \sqrt{t}}$$

Donde, Z_x y Z_Y son dos componentes aleatorios que cumplen la siguiente condición:

$$\begin{bmatrix} Z_X \\ Z_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho_{XY} & \sqrt{1-\rho_{XY}^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \end{bmatrix}$$

Donde

ε_i es un componente aleatorio del activo i, con distribución normal estándar, es decir, con media cero y varianza igual a la unidad.

ρ_{XY} es la correlación de los rendimientos del activo X y Y.

Introducción

Es decir:

$$\begin{bmatrix} Z_X \\ Z_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho_{XY} & \sqrt{1-\rho_{XY}^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \end{bmatrix}$$

$$\bar{Z} = C \cdot \bar{\varepsilon}$$

donde:

$\bar{Z}$ es un vector de variables normales transformadas que incorporan la correlación histórica, a través del coeficiente de correlación ρ_{XY}.

C es la llamada *matriz de Cholesky.*

$\bar{\varepsilon}$ es un vector de variables normales estándar, de media 0 y varianza 1.

Introducción

Para generar los precios correlacionados de estos dos activos, se generan, por ejemplo, 1,000 veces el vector $\bar{\varepsilon}$, que a su vez genera el vector $\bar{Z}$:

$$Z_X = \varepsilon_X$$

$$Z_Y = \rho_{XY} \cdot \varepsilon_X + \sqrt{1 - \rho_{XY}^2} \cdot \varepsilon_Y$$

Y con este valor es posible estimar el precio de cada uno de los activos $S_{X,t}$ y $S_{Y,t}$ **[Véase laboratorio en Excel para Cemex y Pfizer].**

Introducción

Tarea. Simular la senda del precio de tres activos, así como del IPC al cierre del año con base en el MGB [no en portafolio; de manera individual].

Tarea. Simular al cierre del año el precio de un portafolio de esos cuatro activos.

Recordatorio: Vanilla options

Las opciones financieras son instrumentos que dan a su tenedor el derecho, pero no la obligación, para comprar o para vender un activo en un precio específico hasta una fecha de vencimiento indicada.

El precio específico de la entrega se conoce como el precio de ejercicio (*strike price*) y se denota por K.

Las opciones que no tienen una estructura complicada se les conoce como *vanilla options*, mientras que opciones más complejas se conocen como *opciones exóticas*.

Recordatorio: *Vanilla options*

Las opciones dan el derecho de comprar o vender al comprador y son ejercidas solamente si generan beneficios, a diferencia de los contratos forwards, que implican la obligación y pueden generar beneficios o pérdidas.

Las opciones para comprar el activo son opciones denominadas $call$; las opciones para vender el activo son opciones put.

Recordatorio: *Vanilla options*

Una opción Europea es un contrato que da el derecho, pero no la obligación, de comprar/vender una cantidad determinada del activo subyacente S a un precio específico K al vencimiento T. Así, el comprador del *call europeo* puede ejercer el derecho de comprar si, en T, el precio del activo subyacente es mayor a K; en una opción *put europea*, la opción se ejerce si el precio del activo es menor a K.

Recordatorio: *Vanilla options*

Conforme a lo anterior, una opción se dice que *europea* si se paga al vencimiento.

En el caso de las opciones *americanas,* el tenedor tiene el derecho de ejercer en cualquier tiempo antes del vencimiento.

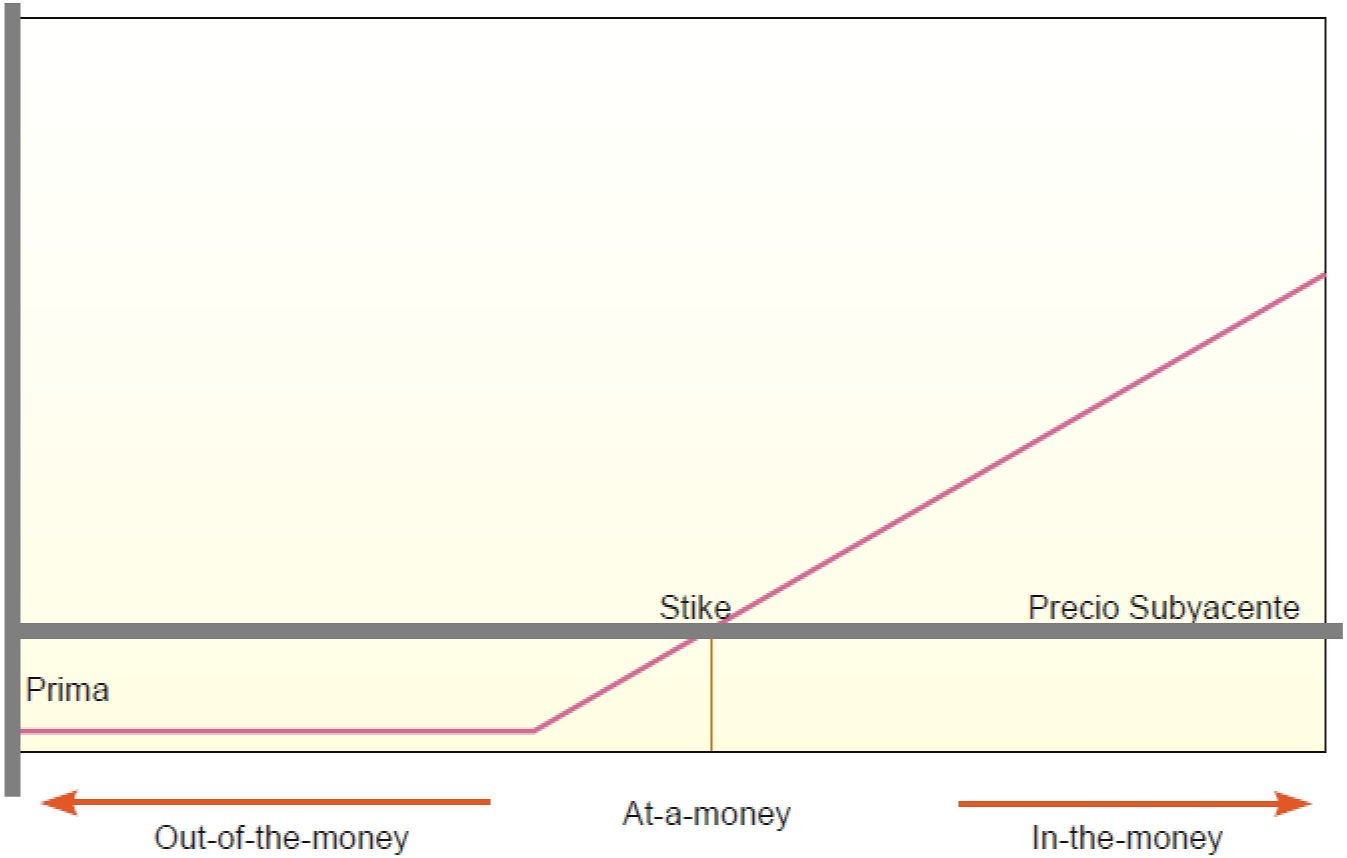
Las opciones tipo *bermuda* dan el derecho de ejercer en un conjunto de fechas establecidas antes del vencimiento (Bermuda está entre Europa y América). De esta manera, se espera que el precio de las opciones americanas sea mayor que el precio de las opciones Bermuda, y éstas que las opciones tipo europeas, *ceteris paribus*.

Recordatorio: *Vanilla options*

Si el precio actual del activo S_t es cercano al precio de ejercicio K, se dice que la opción está *at-the-money*. Si el precio del activo es tal que se obtendría un beneficio, se dice que la opción está *in-the-money*. Si se obtendría una pérdida se dice que está *out-of-the-money*.

- **In-the-money**: Con respecto al precio spot, el precio de ejercicio permite obtener una utilidad, por lo que se ejerce la opción.
- **At-the-money**: Con respecto al precio spot, el precio de ejercicio no permite obtener una utilidad, pero tampoco una pérdida. Generalmente no se ejerce la opción.
- **Out-of-the-money**: Con respecto al precio spot, el precio de ejercicio no permite obtener una utilidad, por lo que no se ejerce la opción.

Recordatorio: *Vanilla options*



Pago del call in-the-money: $S_T - K$

Pago del put in-the-money: $K - S_T$

Recordatorio: *Vanilla options*

Sea la siguiente notación:

c : European call option price

p : European put option price

S_0: Stock price today

S_T: Stock price at option maturity

K : Strike price

T : Life of option

σ: Volatility of stock price

C: American call option price

P: American Put option price

D: Present value of dividends during option's life

r: Risk-free rate for maturity *T* with cont comp

r_f: Risk-free rate of foreign (or dividends) for maturity *T* with cont comp

Recordatorio: *Vanilla options*

Valor intrínseco. Diferencia entre el precio de ejercicio de la opción y el precio spot del activo subyacente en el vencimiento. En el caso de las opciones europeas, se tiene:

- Valor intrínseco de una posición larga de una opción call en la fecha de expiración: $c_T = Max\{S_T - K, 0\}$
- Valor intrínseco de una posición larga de una opción put en la fecha de expiración: $p_T = Max\{K - S_T, 0\}$

El valor presente de c_T es c_0, que es el precio spot de la opción; mientras que el valor presente de p_T es p_0.

Recordatorio: *Vanilla options*

El análisis del valor intrínseco de una posición larga de una opción call en la fecha de expiración es:

$$\underbrace{C_T = Max\{S_T - K, 0\}}_{\text{Se llama función de pago}}$$

Representa la opcionalidad

Observación: A mayor valor de K, el precio de la opción es menor; mientras que a mayor tiempo, mayor sería el precio del call.

Recordatorio: *Vanilla options*

Uno de los hechos más importantes de las opciones financieras es que no tienen una dependencia lineal sobre el activo subyacente (a diferencia de los forwards).

Esta no linealidad es importante para su valuación: la aleatoriedad del activo subyacente y la curva del valor de la opción con respecto a S están íntimamente relacionados.

Recordatorio: *Vanilla options*

En el dinero. Una opción con valor intrínseco positivo:

call ➔ $Max\{S_T - K, 0\} = S_T - K > 0$

put ➔ $Max\{K - S_T, 0\} = K - S_T > 0$

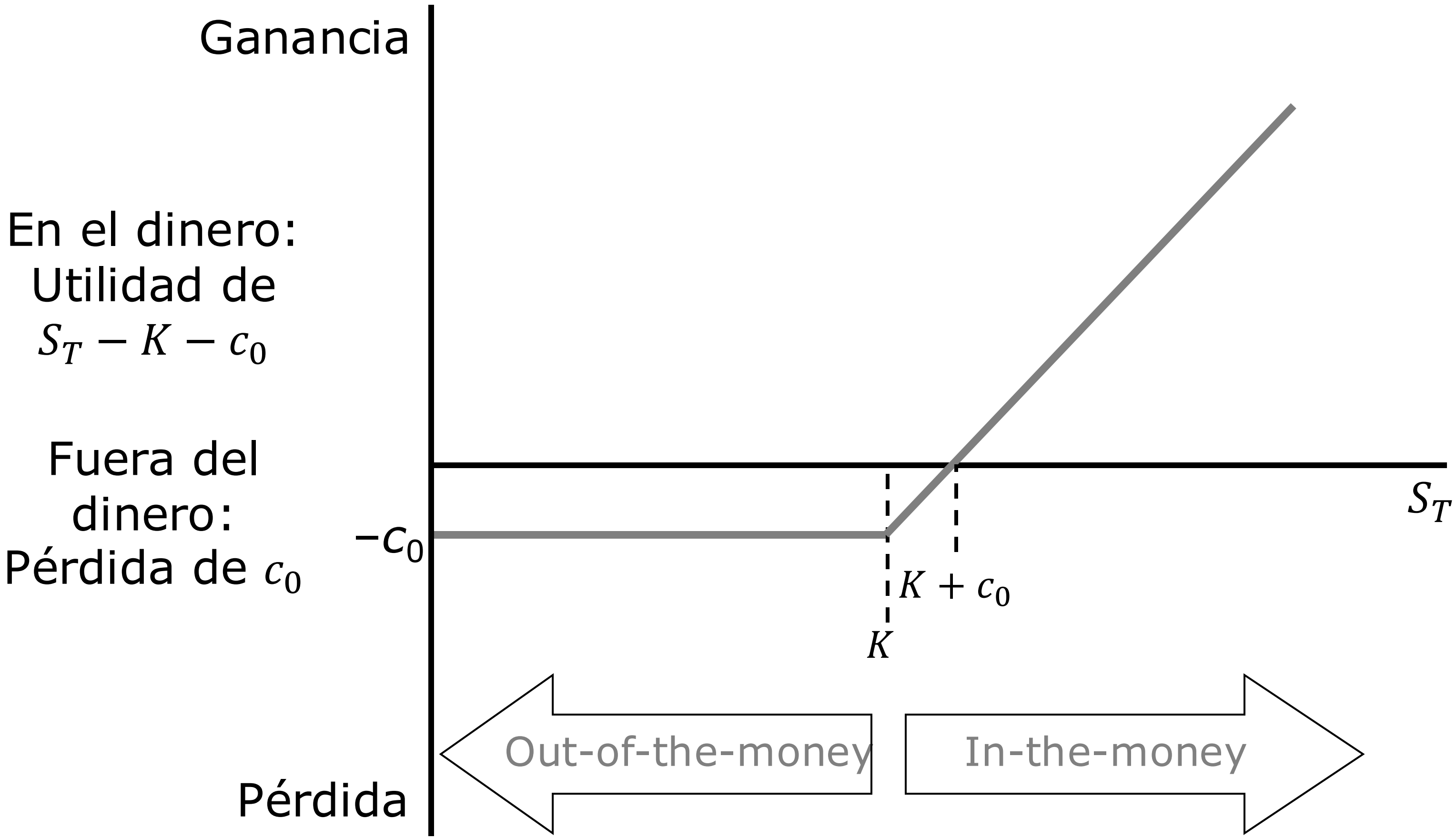
Fuera del dinero. Una opción con valor intrínseco nulo:

call ➔ $Max\{S_T - K, 0\} = 0$

put ➔ $Max\{K - S_T, 0\} = 0$

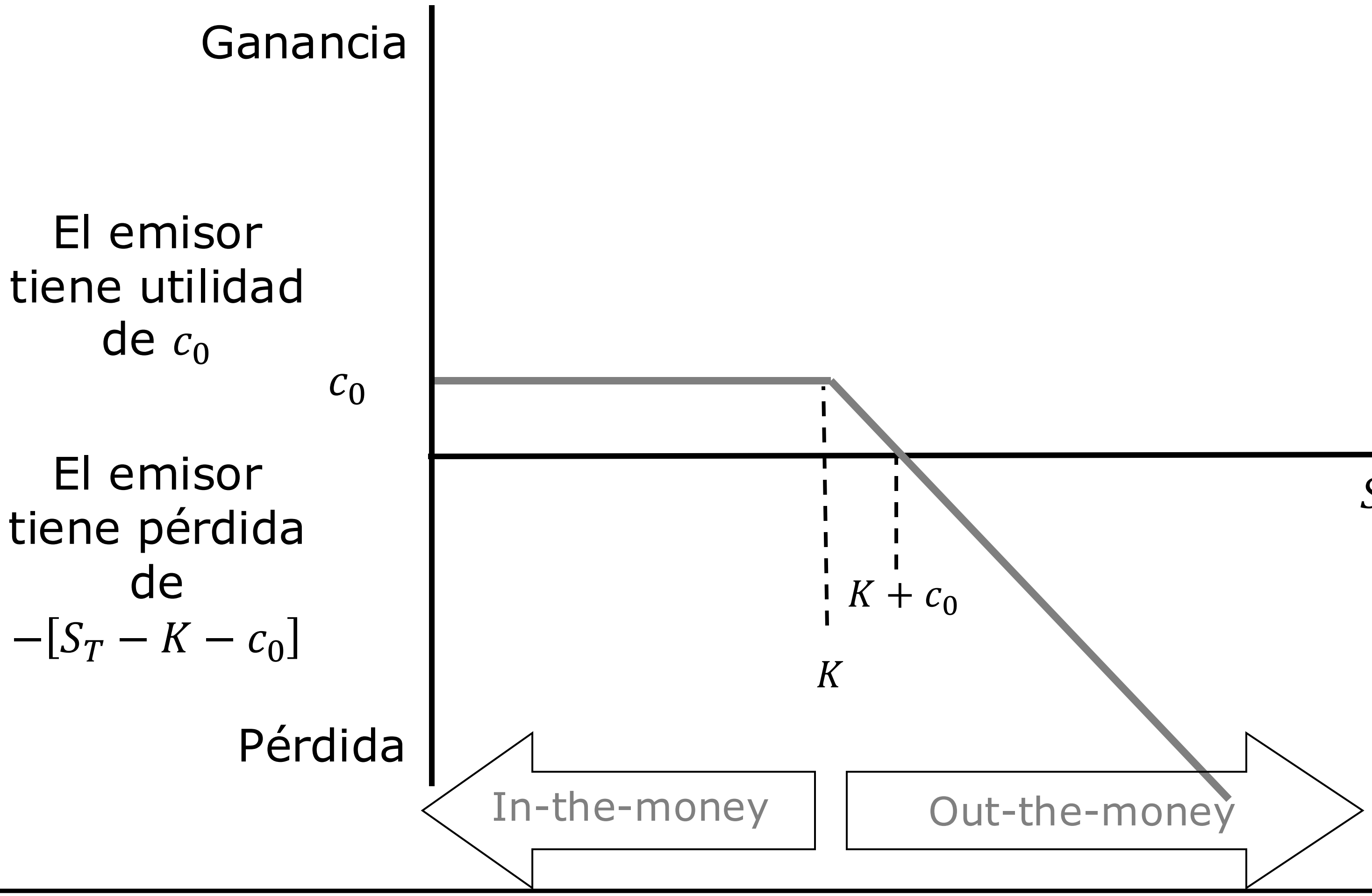
Recordatorio: *Vanilla options*

Función de pago de una posición larga en un call



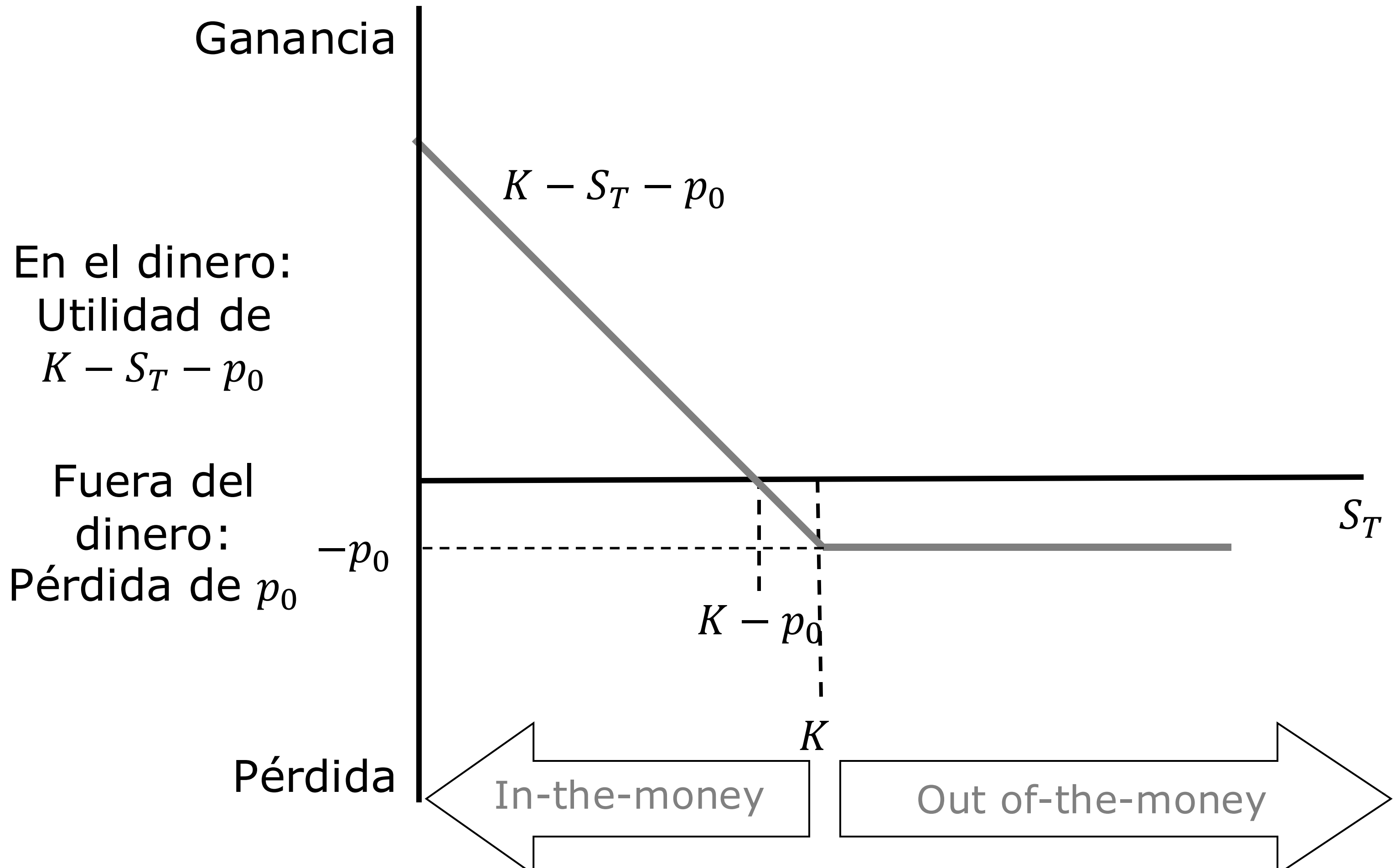
Recordatorio: *Vanilla options*

Función de pago de una posición corta en un call



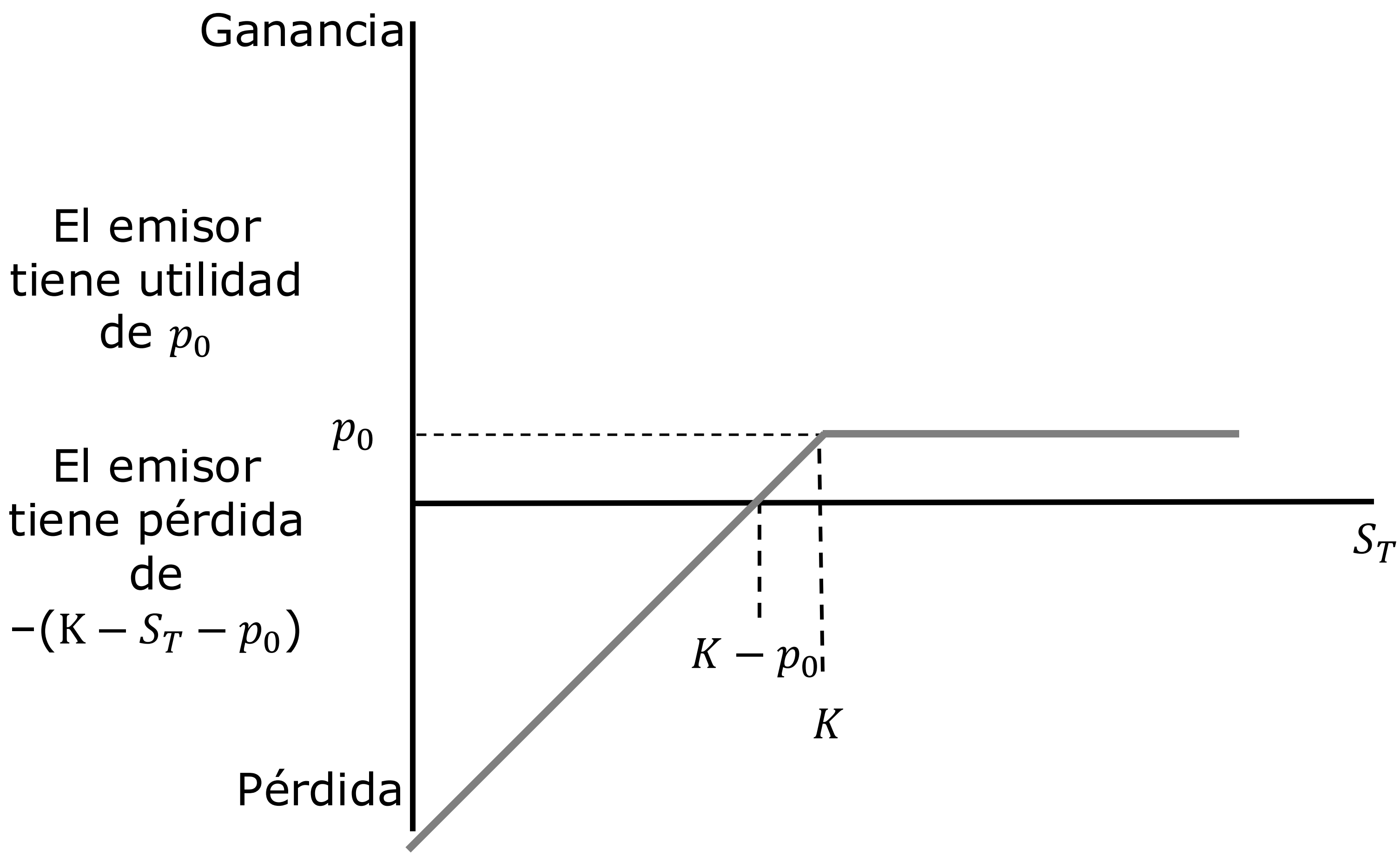
Recordatorio: *Vanilla options*

Función de pago de una posición larga en un put



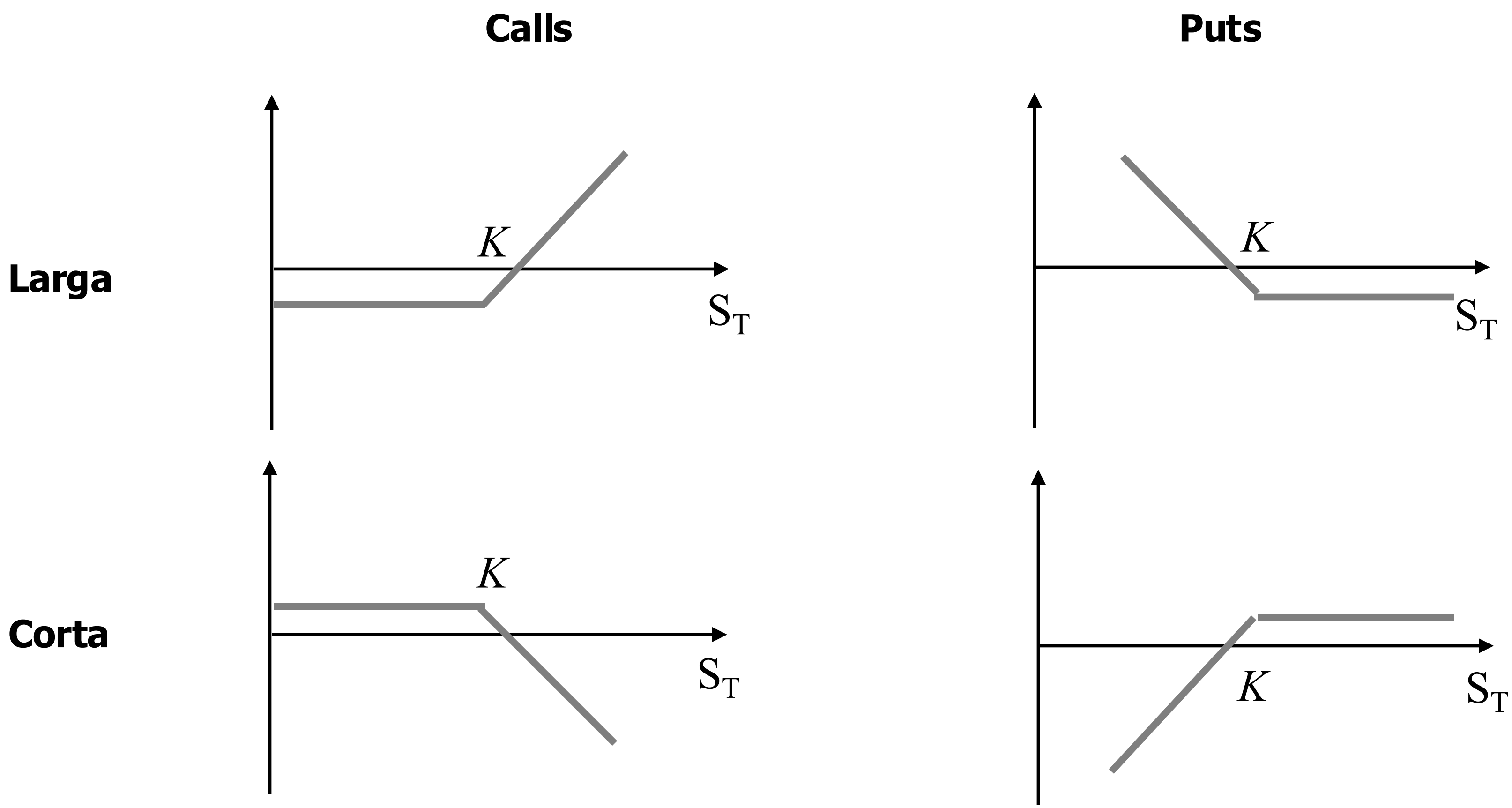
Recordatorio: *Vanilla options*

Función de pago de una posición corta en un put



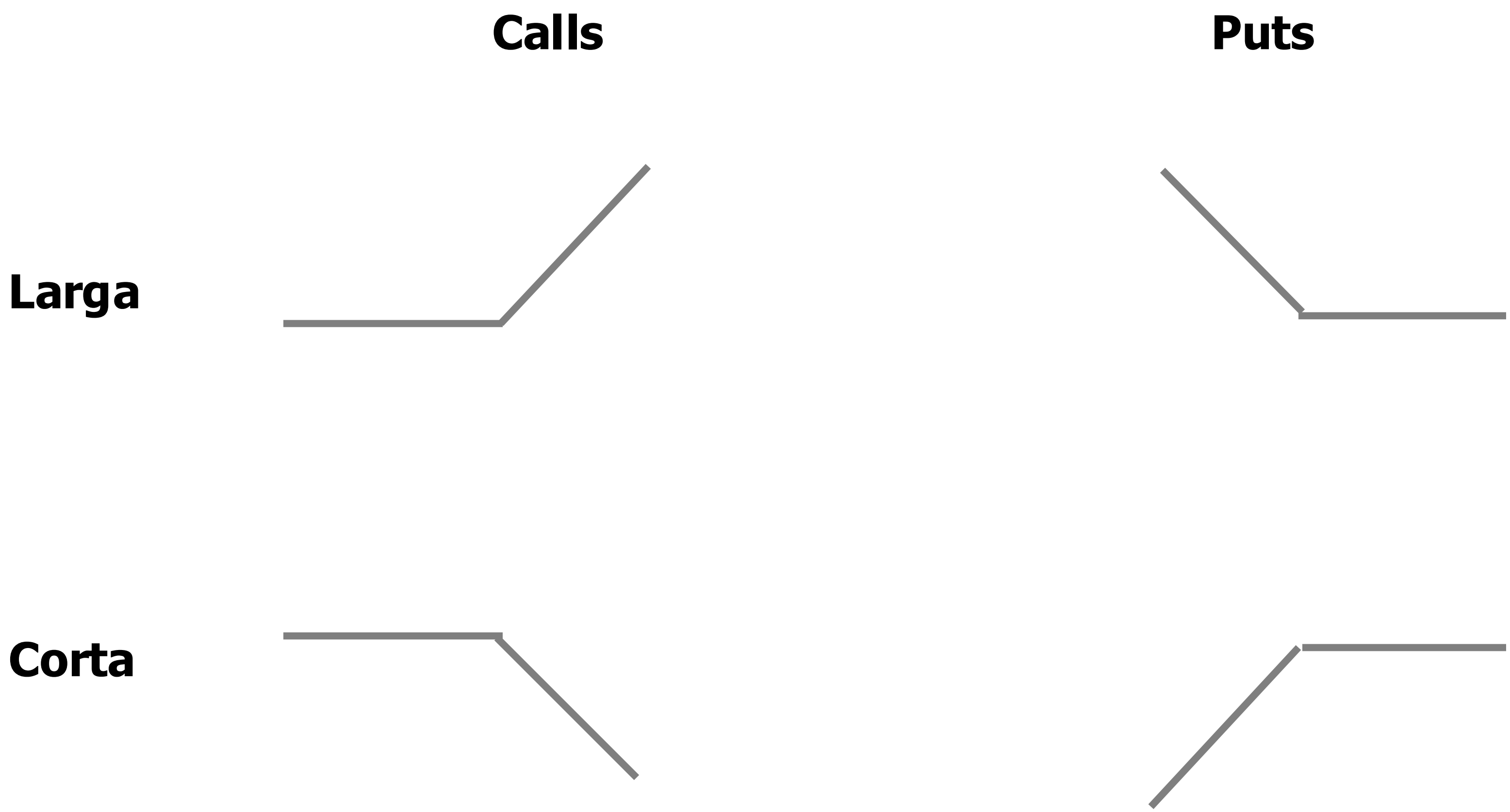
Recordatorio: *Vanilla options*

Resumen: Pagos de opciones, donde K: strike price, S_T: precio del activo en T



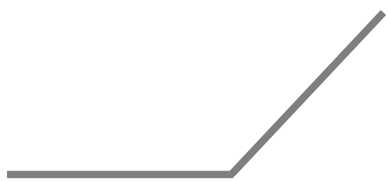
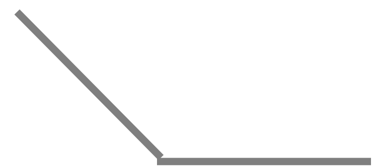
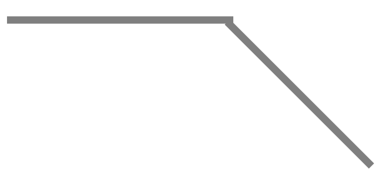
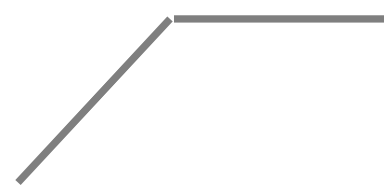
Recordatorio: *Vanilla options*

Resumen



Recordatorio: *Vanilla options*

Resumen

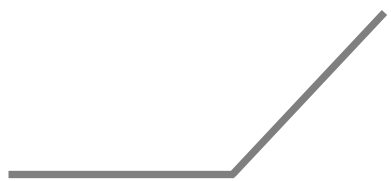
	Calls	**Puts**
Larga	 Pago = Max{S_T-K,0}	 Pago = Max{K-S_T,0}
Corta	Pago = -Max{S_T-K,0} 	Pago = -Max{K-S_T,0} 

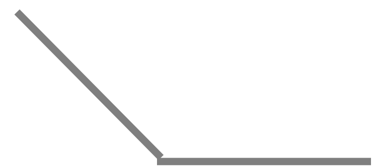
Recordatorio: *Vanilla options*

Resumen

Calls | **Puts**

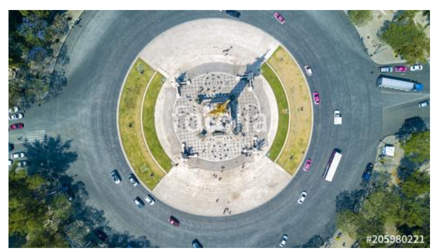
Larga





Pago = Max{S_T-K,0}

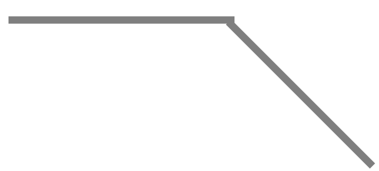
Pago = Max{K-S_T,0}

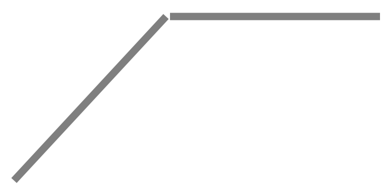


Pago = -Max{S_T-K,0}

Pago = -Max{K-S_T,0}

Corta





Recordatorio: *Vanilla options*

Laboratorios

1. Considere una posición larga de una opción call sobre la libra esterlina. La prima es de USD$ 0.50 por libra. El precio de ejercicio es de USD$ 1.50 por libra esterlina. Describa la función de pagos y determine a partir de qué precio se obtiene una utilidad positiva.

2. Considere una posición corta de una opción put sobre la libra esterlina. La prima es de USD$ 0.75 por libra esterlina. El precio de ejercicio es de USD$ 1.50 por libra. Describa la función de pagos y determine el intervalo de precios donde se obtiene una utilidad positiva.

3. Grafique la función de pagos de vender una opción call europea a un precio de USD$ 2.5, y con un precio de entrega de USD$ 90. Además determine el intervalo de precios donde se obtiene una utilidad positiva.

4. Grafique la función de pagos de vender una opción put europea a un precio de USD$ 9.5, y con un precio de entrega de USD$ 50. Además determine el intervalo de precios donde se obtiene una utilidad positiva.

Recordatorio: *Vanilla options*

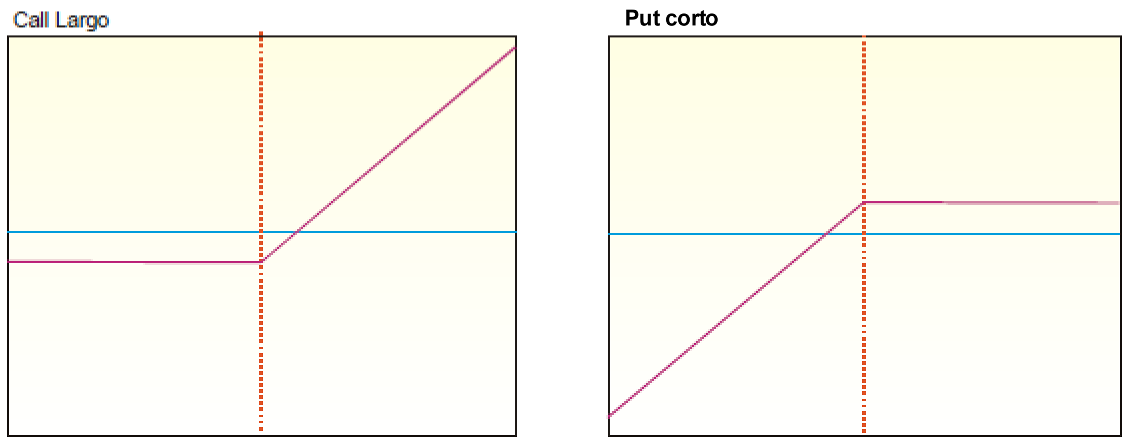
Compra y venta de opciones call y put

	Call		Put	
	Compra	Venta	Compra	Venta
Expectativas	Alcista	Bajista	Bajista	Alcista
Beneficio potencial	Ilimitada	Limitada	Ilimitada	Limitada
Pérdida potencial	Limitada	Ilimitada	Limitada	Ilimitada
Efecto del tiempo	En contra	A favor	A favor	En contra

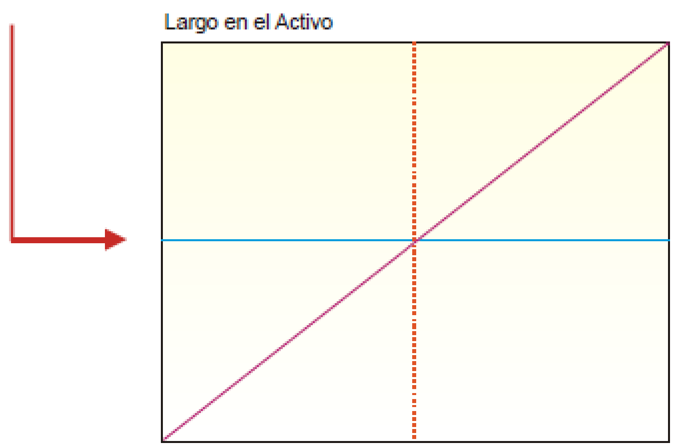
Recordatorio: *Paridad Put-Call*

Si se tiene una posición larga de un call con K y T, y una posición corta de un put con misma K y T, entonces el pago del portafolio es:

Call Largo



Put Corto



Pago del call + pago del put = Pago del portafolio

$\Rightarrow$

$Max\{S_T - K, 0\} - Max\{K - S_T, 0\} = S_T - K$

Recordatorio: *Paridad Put-Call*

Paridad Put-Call: Otra forma de obtener este pago en T es comprar hoy (t) el activo (S_t), el cual valdrá S_T en T, y corto en K, con valor presente Ke^{-rT}.

Posición	Valor en t	Valor en T
Call	c	$Max\{S_T - K, 0\}$
-put	$-p$	-$Max\{K - S_T, 0\}$
Largo en activo	S_t	S_T
Corto en K	$-Ke^{-rT}$	$-K$

$S_T - K$

$S_T - K$

Dado que los flujos en T dan lo mismo, los flujos en t deben ser los mismos:

$$c - p = S_t - Ke^{-r(T-t)} \Rightarrow c + Ke^{-r(T-t)} = p + S_t$$

paridad put-call

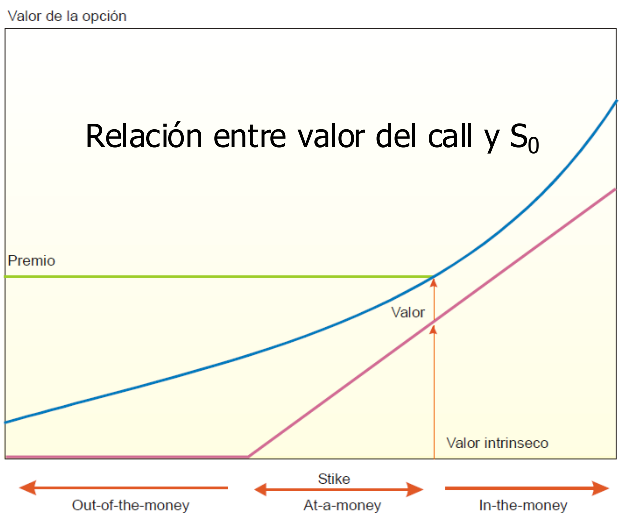
Recordatorio: *Paridad Put-Call*

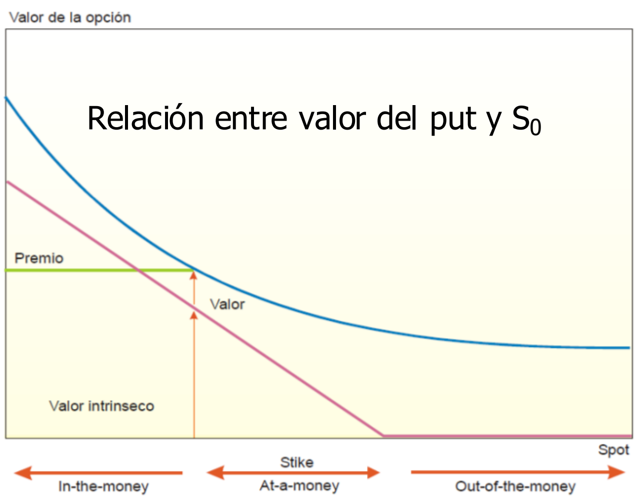
Laboratorio. Calcule el precio de equilibrio de un contrato de *opción put* sobre una acción, si el precio de ejercicio es de MXN $35.00 y el plazo a vencimiento del contrato es de 6 meses. Considere que el precio de la acción en el mercado de contado es de MXN $30.00, el precio del contrato de la *opción call* es de MXN $1.25 y la tasa de interés cupón cero para el plazo a vencimiento del contrato es del 7%.

Recordatorio: Black-Scholes-Merton

El valor de una opción se descompone en su valor intrínseco y el valor en el tiempo.

- **Valor Intrínseco**. Consiste del valor de la opción si se ejerciera hoy. Call: $Max\{S_t - K, 0\}$, put: $Max\{k - S_t, 0\}$.
- **Valor en el tiempo**. Es la diferencia entre el valor de mercado y el valor intrínseco. Refleja la posibilidad de que la opción cambie de valor en el futuro.





Las líneas azules reflejan el valor de la opción [$V(S,t)$] para alguna $t < T$.

Recordatorio: Black-Scholes-Merton

Así, los dos factores que afectan a los precios de los productos derivados más importantes son t y S_t, los cuales varían en la vida del contrato.

Otro parámetro importante es la volatilidad, que mide la fluctuación del precio del activo subyacente, y se usa como una medida de aleatoriedad. La volatilidad se estima como la desviación estándar anualizada de los retornos de los activos.

El problema con la volatilidad es que no permanece constante y es impredecible, i.e., la volatilidad es ella misma otra variable aleatoria.

Recordatorio: Black-Scholes-Merton

En 1973, Fischer Black y Myron Scholes publicaron su artículo "*The pricing of options and corporate liabilities*", en donde derivaron una fórmula cerrada para valuar opciones europeas sobre activos sin dividendos. Por su parte, en ese mismo año, Robert Merton [*Theory of rational option pricing*] expandió el modelo con supuestos más relajados y para el caso de acciones que pagan una tasa de dividendo continuo.

Garman y Kohlhagen (1983) extendieron el modelo a tipos de cambio, reinterpretando el rendimiento del subyacente como la tasa continua de rendimiento de la moneda extranjera.

Black (1976) aplica la misma fórmula para opciones sobre futuros, reinterpretando el rendimiento como la tasa doméstica libre de riesgo y el precio spot como el precio forward.

Recordatorio: Black-Scholes-Merton

Supuestos del modelo *Black-Scholes-Merton*:

- El precio del activo subyacente se mueve de una forma continua [i.e. no hay brincos] y tienen una distribución Log-Normal [los rendimientos son normales].
- Las tasas de interés son conocidas y constantes.
- La varianza de los retornos del activo subyacente es constante.
- Los mercados de capitales son perfectos [es decir, se permiten ventas en corto, no hay costos o impuestos por la transacción, y los mercados operan continuamente].

Recordatorio: Black-Scholes-Merton

El retorno logarítmico implica que [considerando que $\varepsilon \sim N(0,1)$].

$$\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{S}} = \mu dt + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma\sqrt{t}\varepsilon$$

Ya vimos que este proceso implica que, discretizando, el logaritmo de los precios es:

$$\ln(S_T) = \ln(S_t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\varepsilon$$

Un portafolio compuesto por el activo y la opción en las proporciones correctas es “localmente” libre de riesgo. Para evitar arbitraje, el portafolio debe rendir la tasa libre de riesgo.

Recordatorio: Black-Scholes-Merton

Como resultado, podemos calcular directamente el valor presente del pago esperado del valor subyacente.

Representa el valor presente

Representa el valor subyacente

$$c = e^{-r(T-t)}E[Max\{S_T - K, 0\}]$$

Representa el valor esperado

La metodología de valuación neutral al riesgo es la herramienta para la valuación de derivados financieros.

Recordatorio: Black-Scholes-Merton

B-S-M

Recordatorio: Black-Scholes-Merton

Así, las formulas de Black-Scholes-Merton para la valuación de opciones europeas call y put de activos que no tienen ingresos ni costos durante su vigencia son:

$$c = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$p = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

Donde $N(d_i)$ es la función de distribución de una normal estándar:

$$\mathrm{N}(d_i) = \int_{-\infty}^{d_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Con $d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$; $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

Recordatorio: Black-Scholes-Merton

NO SE LES OLVIDE:

$$c = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$p = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

Donde $d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$; $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ y $\mathrm{N}(d_i) = \int_{-\infty}^{d_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$

Se considera la fórmula *del chicharronero financiero*.

Recordatorio: Black-Scholes-Merton

Laboratorio. Sean los siguientes valores:

- S_0 = $21
- K = $20
- T = 9 meses
- σ = 23.5% anual
- r = 10%

Encuentre el valor de una opción call Europea *c*. Grafique la función de pagos.

Encuentre el valor de una opción put Europea *p* . Grafique la función de pagos.

Recordatorio: Black-Scholes-Merton

Laboratorio. Sean los siguientes valores:

- S_0 = USD$ 42
- T = 1/2
- σ = 20% anual
- r = 10%

Encuentre el valor de una opción call Europea c a seis meses con un *strike price* de USD$ 50. Grafique la función de pagos.

Encuentre el valor de una opción put Europea p a seis meses con un *strike price* de USD$ 38. Grafique la función de pagos.

Recordatorio: Black-Scholes-Merton

Laboratorio. Calcule el valor de una opción call y put si:

- S_0 = \$90
- K = \$85
- T = 3/12
- σ = 30%
- r = 11.33%

Extensiones a Black-Scholes-Merton

Las fórmulas de Black-Scholes-Merton para la valuación de opciones call y put de **activos con ingresos discretos D** durante la vigencia de la opción son:

$$c = (S_0 - D)N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - (S_0 - D)N(-d_1)$$

Donde D es el valor presente de los ingresos que el activo otorgará durante la vigencia de la opción; $d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0 - D}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$; $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, y σ es la volatilidad del precio del activo.

Extensiones a Black-Scholes-Merton

Laboratorio. Para los tres laboratorios anteriores, asuma que el activo recibirá un dividendo en 2 y 5 meses, el cual se espera de USD $0.50 cada uno.

Extensiones a Black-Scholes-Merton

Si el activo paga un ingreso continuo de q sobre su valor [como un dividendo], el valor actual del call y del put sobre dicho activo está dado por:

$$c = S_0 e^{-q(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$p = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_0 e^{-q(T-t)} N(-d_1)$$

donde $d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-q+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$; $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, y σ es la volatilidad del precio del activo.

Extensiones a Black-Scholes-Merton

Laboratorio. Para los laboratorios anteriores, asuma que el activo pagará un dividendo a una tasa $q = 5\%$.

Extensiones a Black-Scholes-Merton

La fórmula anterior aplica para divisas, donde S_0 ahora es el tipo de cambio (valor de unidad de moneda extrajera por pesos) y el ingreso continuo q es la tasa libre de riesgo foránea, r_f. Así, se tiene el valor del call y del put para divisas:

$$c = S_0 e^{-r_f(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$p = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_0 e^{-r_f(T-t)} N(-d_1)$$

donde $d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-r_f+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$; $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, y σ es la volatilidad del tipo de cambio.

Extensiones a Black-Scholes-Merton

Laboratorio. Obtenga la prima de un call y un put sobre el tipo de cambio (pesos por dólar) con un vencimiento a 1 año.

Extensiones a Black-Scholes-Merton

Para opciones en **futuros**, se reemplaza el precio del activo spot S_0 por el precio futuro actual $F_0\left[= S_0 e^{(r-q)(T-t)}\right]$. La fórmula se expresa como sigue:

$$c = e^{-r(T-t)}[F_0 N(d_1) - K N(d_2)]$$

$$p = e^{-r(T-t)}[K N(-d_2) - F_0 N(-d_1)]$$

$d_1 = \frac{ln\left(\frac{F_0}{K}\right)+\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$; $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, **donde** σ **es la volatilidad del precio del futuro**.

Extensiones a Black-Scholes-Merton

Laboratorio. Calcule el valor de una opción put europea de un futuro a 5 meses, el precio futuro es de USD $19, el precio de entrega es de USD $20, la tasa libre de riesgo es del 12% y la volatilidad del precio del futuro es del 20% anual.

- F_0 = $19
- K = $20
- T = 5/12
- σ = 20%
- r = 12%

$$c = e^{-r(T-t)}[F_0 N(d_1) - KN(d_2)]$$

$$p = e^{-r(T-t)}[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)]$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{F_0}{K}\right)+\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \; ; \; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Entendiendo $N(d_1)$ y $N(d_2)$ en Black-Scholes-Merton

De la ecuación de B-S-M:

$$c = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

la expresión $N(d_2)$ es la probabilidad neutral al riesgo que la opción call sea ejercida; es decir, $N(d_2)$ es la probabilidad que la opción termine en el dinero, pues a partir de

$$c(S,t) = e^{-r(T-t)} E[Máx\{S_T - K, 0\}]$$

$$= e^{-r(T-t)} \int_0^\infty Máx\{s - K, 0\}\, f_{S_T}(s) ds$$

Se hace la integral tal que $s \geq \mathrm{K}$:

$$c(S,t) = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (s - K)\, f_{S_T}(s) ds$$

Entendiendo $N(d_1)$ y $N(d_2)$ en Black-Scholes-Merton

Así:

$$S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\,\varepsilon} \geq \mathrm{K}$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon \geq \frac{ln\left(\frac{K}{S_t}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$\Rightarrow$

$$-\varepsilon \leq \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_2$$

$\therefore$ $N(d_2)$ representa la probabilidad de ejercer la opción.

Entendiendo $N(d_1)$ y $N(d_2)$ en Black-Scholes-Merton

De la ecuación de B-S-M: $c = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$, acabamos de explicar que el término $N(d_2)$ es la probabilidad de que la opción de compra se ejerza en el mundo neutral al riesgo.

Sin embargo, el término $N(d_1)$ no es tan sencillo de interpretar: la expresión $S_t e^{r(T-t)} N(d_1)$ se interpreta como el precio esperado del activo en T en un mundo neutral al riesgo, cuando el precio del activo menor al precio de ejercicio tiene un valor de cero.

Por lo tanto, el pago esperado de la opción call en el mundo neutral al riesgo es:

$$S_t e^{r(T-t)} N(d_1) - KN(d_2)$$

Y el valor presente de este valor esperado es la fórmula de B-S-M.

Entendiendo $N(d_1)$ y $N(d_2)$ en Black-Scholes-Merton

Aplicación: Merton (1974) propuso un modelo en el cual el valor del capital de una empresa se puede expresar como el de una opción financiera sobre los activos de la empresa. Suponga que la empresa emitió un bono cupón cero, el cual vence en T. Sea:

- V_0: Valor de mercado los activos de la empresa, hoy;
- V_T Valor de mercado de los activos de la empresa, en T;
- E_0: Valor del capital de la empresa, hoy;
- E_T: Valor del capital de la empresa, en T;
- D: Deuda que debe saldarse en T;
- σ_V: Volatilidad del valor de mercado de los activos (constante)
- σ_E : Volatilidad del capital

Entendiendo $N(d_1)$ y $N(d_2)$ en Black-Scholes-Merton

En el vencimiento de la deuda en T, se tienen solo dos posibles situaciones:

- Si $V_T > D \Rightarrow$ la empresa realizará el pago en T y el valor del capital de la empresa es $E_T = V_T - D$

Porque se debe cumplir la ecuación contable *Activo* = *Pasivo* + *Capital*; i.e., al vencimiento:

$$\Rightarrow \begin{array}{l} V_T = D + E_T \\ V_T - D = E_T \end{array}$$

Entendiendo $N(d_1)$ y $N(d_2)$ en Black-Scholes-Merton

- Si $V_T < D \Rightarrow$ la empresa incumple en el pago de la deuda en T y el valor del capital es cero: $E_T = 0$;

¿Qué forma tiene el valor del *equity* en el vencimiento de la deuda?

$$\text{En } T \begin{cases} \text{Si } V_T > D \Rightarrow E_T = V_T - D \\ \text{Si } V_T < D \Rightarrow E_T = 0 \end{cases}$$

Ahora, ¿a qué se parece este valor del *equity*?... Les suena..

$$E_T = Máx\{V_T - D, 0\} \approx C_T = Máx\{S_T - K, 0\}$$

El valor del capital se comporta como el pago de una opción financiera *call* sobre el valor de los activos V_T, con un precio de ejercicio igual al valor de la deuda D.

Entendiendo $N(d_1)$ y $N(d_2)$ en Black-Scholes-Merton

$$E_T = Máx\{V_T - D, 0\} \approx C_T = Máx\{S_T - K, 0\}$$

Entendiendo $N(d_1)$ y $N(d_2)$ en Black-Scholes-Merton

A partir de esta isomorfía en el valor del capital de la empresa al vencimiento de la deuda con una opción call financiera, se utiliza la fórmula de Black-Scholes-Merton para determinar el precio del *equity* en el tiempo t_0 como (suponiendo que no hay pago de dividendos):

Valuación del *equity* en t_0:

$$E_0 = V_0 N(d_1) - De^{-rT} N(d_2)$$

Donde:

$$d_1 = \frac{ln(V_0/D) + \left(r + \sigma_V^2/2\right)T}{\sigma_V \sqrt{T}} \quad \text{y}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T}$$

Valuación de una opción financiera tipo call en t_0:

$$c_0 = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

Donde:

$$d_1 = \frac{ln(S_t/K) + \left(r + \sigma_{S_t}^2/2\right)T}{\sigma_S \sqrt{T}} \quad \text{y}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_S \sqrt{T}$$

Entendiendo $N(d_1)$ y $N(d_2)$ en Black-Scholes-Merton

Este modelo nos ayuda a determinar las probabilidades de incumplimiento de las empresas.

En el modelo de Black-Scholes-Merton, $N(d_2)$ es la probabilidad de ejercer la opción financiera call; i.e., $Prob(S_T > K)$.

Para el caso que nos atañe de las empresas, es la probabilidad que la empresa no incurra en incumplimiento en el pago de su deuda; es decir $Prob(V_T > D)$.

Por el contrario, $1 - N(d_2) = N(-d_2)$ es la probabilidad neutral al riesgo de incumplimiento de la empresa en el pago de la deuda; i.e., $Prob(V_T < D)$.

Entendiendo $N(d_1)$ y $N(d_2)$ en Black-Scholes-Merton

Para determinar $N(-d_2)$ se requiere conocer el valor de los activos en t_0 (es decir, V_0) y su volatilidad, σ_V, que se determinan al resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineal con dos ecuaciones y dos incógnitas, V_0 y σ_V (σ_E se estima a partir de datos históricos)*/:

$$E_0 = V_0 N(d_1) - De^{-rT} N(d_2)$$

$$\sigma_E E_0 = N(d_1)\sigma_V V_0$$

Para resolver estas dos ecuaciones no lineales, se expresan de la forma

$$F(x, y) = 0$$

$$G(x, y) = 0$$

Y se utiliza Solver de Excel® para que encuentre las variables (x, y) que minimicen $[F(x, y)]^2 + [G(x, y)]^2$.

*/ Véase Hull, John C. *Options, Futures and Other Derivatives*. 2022

Entendiendo $N(d_1)$ y $N(d_2)$ en Black-Scholes-Merton

Pasos para determinar la probabilidad de incumplimiento bajo el modelo de Merton:

1. Obtener el valor de los pasivos de largo plazo; el valor de mercado del capital de la empresa; la tasa libre de riesgo y los últimos 500 precios de la acción de la empresa;
2. Obtenga la volatilidad anual de los rendimientos de la empresa, σ_E;
3. Expresar $d_1 = \frac{ln(V_0/D)+\left(r+\sigma_V^2/2\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}}$ y $d_2 = d_1 - \sigma_V\sqrt{T}$.
4. Expresar $E_0 = V_0 N(d_1) - De^{-rT}N(d_2)$ e igualarla a cero. Esta ecuación será $F(x, y) = 0$
5. Expresar $\sigma_E E_0 = N(d_1)\sigma_V V_0$ e igualarla a cero. Esta ecuación será $G(x, y) = 0$
6. Utilizar Solver de Excel® para encontrar las variables (x, y) que minimicen el sistema de ecuaciones no lineales $[F(x, y)]^2 + [G(x, y)]^2$.
7. Los valores (x, y) anteriores que arroja Solver de Excel® son V_0 y σ_V.
8. Se obtiene la PD mediante $N(-d_2)$ [Obs. La PD final será $Max\{N(-d_2), 0.03\%\}$].

Propiedades de Black-Scholes-Merton

Veamos que sucede con B-S-M cuando toma valores extremos: En primer lugar, consideremos que el precio spot del activo S_t es mucho mayor a K, por lo que la opción se ejercerá ciertamente:

$$c = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

En este caso, d_1 y d_2 son más grandes, por lo que $N(d_1)$ y $N(d_2)$ tienden a la unidad. El valor del call tiende entonces a:

$$c(S \gg K) = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Esta es la fórmula de valuación de un contrato forward; así, un call que está *deep in-the-money* es equivalente a una posición larga de un contrato forward, ya que estamos casi ciertos de ejercer.

Propiedades de Black-Scholes-Merton

Ahora analicemos qué ocurre con el precio de la opción si la volatilidad $\sigma \to 0$. En este caso, el activo es prácticamente libre de riesgo por lo que su precio se incrementará a la tasa r, es decir, en T será $S_t e^{r(T-t)}$ y el pago de un call es:

$$Max\left\{S_t e^{r(T-t)} - K, 0\right\}$$

Descontando a la tasa r, el valor del call es:

$$e^{-r(T-t)} Max\left\{S_t e^{r(T-t)} - K, 0\right\} = Max\left\{S_t - K e^{-r(T-t)}, 0\right\}$$

Opciones americanas

Las opciones americanas se pueden ejercer en cualquier tiempo durante su vida, por lo que su prima es mayor al de la prima de las opciones europeas:

$$C_A(t,K,T) \geq c_E(t,K,T)$$

$$P_A(t,K,T) \geq p_E(t,K,T)$$

Un tema de interés es determinar cuándo es óptimo ejercer una opción americana.

Se demuestra que las opciones americanas **no deben ejercerse** en ausencia de pagos de dividendos; y en caso que presenten dividendos, deberán cumplir que estos (los dividendos) sean mayores que la tasa de rendimiento al vencimiento. Veamos el siguiente razonamiento.

Opciones americanas

Solo es óptimo ejercer una opción americana si, al existir el pago de dividendos, se ejerce justo antes de que se realice dicho pago:

Suponga que se tienen n pagos de dividendos conocidos en $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, con un monto de $D_1, D_2, \ldots, D_n$, respectivamente.

Considere que se ejerce la opción justo antes del último pago de dividendos, es decir, en el momento t_n, entonces el inversionista recibe:

$$S(t_n) - K$$

Donde $S(t_n)$ el precio del activo en t_n.

Opciones americanas

Si la opción no se ejerce, el precio del activo cae a $S(t_n) - D_n$. El valor de la opción c entonces debe ser mayor que:

$$S(t_n) - D_n - Ke^{-r(T-t_n)}$$

pues no convino ejercer la opción.

Demostración: Sean dos portafolios: A y B, los cuales se componen de:

- Portafolio A: Una opción call Europea más una cantidad en efectivo de $De^{-rT} + Ke^{-rT}$;
- Portafolio B: Una acción.

Opciones americanas

Sea el tiempo T, entonces:

El portafolio A vale:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \text{Si } S_T > K \Rightarrow (S_T - K) + (D + K) = S_T + D \\ \bullet \quad \text{Si } S_T < K \Rightarrow D + K \gg S_T + D \end{array}\right\} Max\{S_T + D, D + K\}$$

(i.e., mayor al valor del portafolio B)

El portafolio B vale: $S_T + D$.

Por lo tanto, dado que el pago en T del portafolio A es mayor o igual que el pago del portafolio B, debe ocurrir que en t el portafolio A tenga un mayor valor que el portafolio B. Así, en ausencia de arbitraje se tiene lo siguiente:

$$c(t, K, T) + De^{-r(T-t)} + Ke^{-r(T-t)} \geq S_t$$

$$C_A(t, K, T) \geq c(t, K, T) \geq S_t - De^{-r(T-t)} - Ke^{-r(T-t)} \quad \triangle$$

Opciones americanas

En cualquier tiempo t en la vida de una opción americana se ejerce si su prima es menor que el pago que se va a recibir:

$$S_t - K > C_A(t, K, T)$$

$$S_t - K > S_t - De^{-r(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}$$

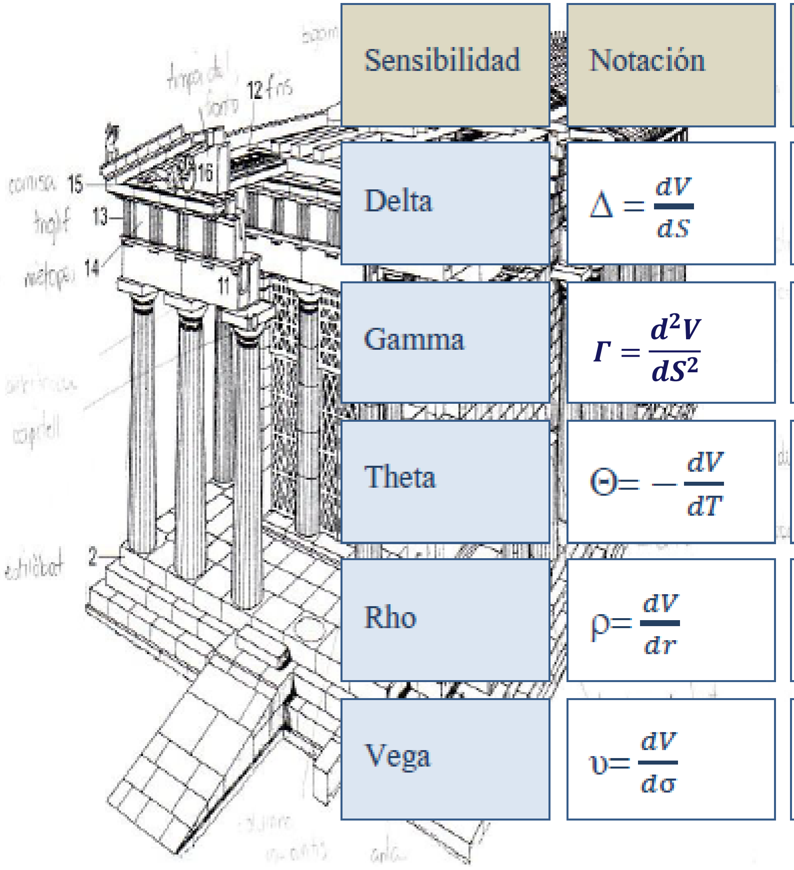
$$D > K\left(e^{r(T-t)} - 1\right)$$

Dado que $[e^{r(T-t)} - 1]$ se aproxima a $r(T-t)$, se tiene:

$$\frac{D}{K} > r(T-t)$$

Así, es óptimo ejercer la opción americana si los dividendos son mayores que la tasa de rendimiento al vencimiento. Si la acción no paga dividendos, no hay un tiempo óptimo para ejercer la opción americana.

Sensibilidades básicas de las Opciones



Sensibilidad	Notación	Medida de Sensibilidad
Delta	$\Delta = \frac{dV}{dS}$	A los cambios en el Precio del Activo Subyacente.
Gamma	$\Gamma = \frac{d^2V}{dS^2}$	A los cambios en la Delta.
Theta	$\Theta = -\frac{dV}{dT}$	Al paso del tiempo.
Rho	$\rho = \frac{dV}{dr}$	Al cambio en la tasa de interés o de dividendo aplicable.
Vega	$\upsilon = \frac{dV}{d\sigma}$	Al cambio en la volatilidad del Activo Subyacente. *También recibe el nombre de Kappa (κ) o de tau (τ)*

Sensibilidades básicas de las Opciones

Delta. Medida de sensibilidad del precio de la opción que refleja el cambio en su precio ante un cambio en el precio del activo subyacente S_t; i.e., $\frac{\partial c}{\partial S}$.

	Δ ***Call***	Δ ***Put***
Sin Dividendo	$N(d_1)$	$-[1 - N(d_1)]$
Con Dividendo	$e^{-q(T-t)}N(d_1)$	$-e^{-q(T-t)}[1 - N(d_1)]$

$c = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$

$p = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_t N(-d_1)$

Donde $d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ y $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

Interpretación

- Proporción de cambio en el valor de la opción con respecto al subyacente, el signo representa el sentido en el que se moverá el precio del contrato.
- Probabilidad de ejercicio del contrato de opción, si es cercana a 1 o -1 su probabilidad de ejercicio es mayor.
- Medida lineal de primer orden

Analogía

- Call largo y Put corto tienen Delta positivas
- Call corto y Put largo tienen Delta negativas

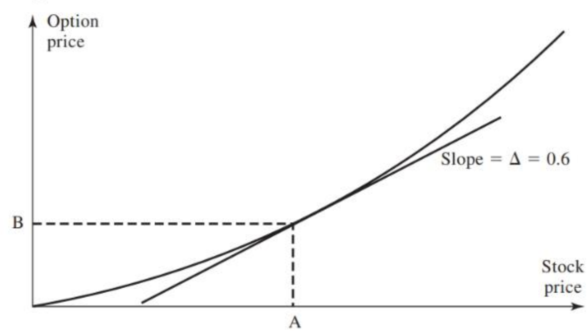
Sensibilidades básicas de las Opciones

La delta es un parámetro importante en la fijación de precios y cobertura de las opciones financieras.

Al ser la delta la relación entre el cambio en el precio de la opción y el cambio en el precio del subyacente, nos da la pendiente de la curva que relaciona el precio de la opción con el precio del activo subyacente.

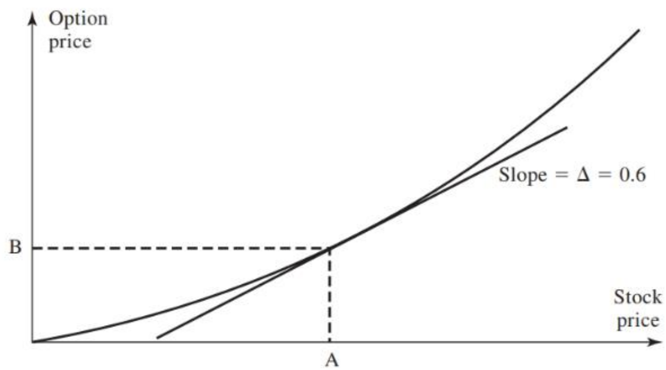
Supongamos que la delta de una opción de compra es de 0.6, esto significa que, cuando el precio del activo subyacente cambia en una pequeña cantidad, el precio de la opción cambia aproximadamente en el 60% de esa cantidad.

Figure 19.2 Calculation of delta.



Sensibilidades básicas de las Opciones

Figure 19.2 Calculation of delta.

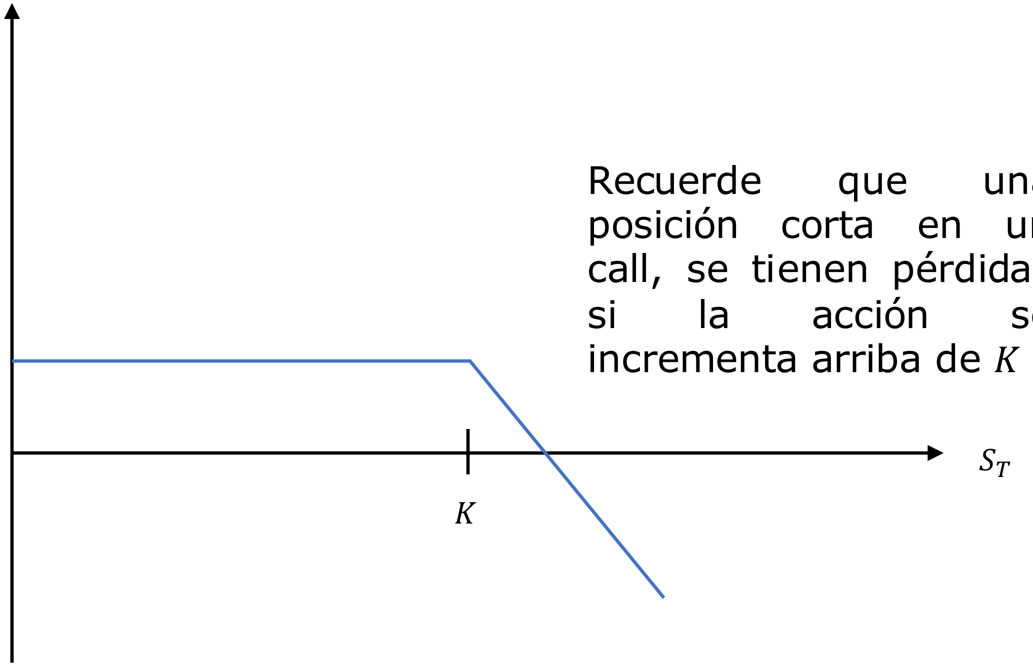


En la Figura 19.2, suponga que el precio de la acción es de USD \$100 y que el de la opción es de USD \$10; además, suponga un inversionista que se fue corto en opciones call sobre 2,000 acciones.

Entonces, la posición del inversionista se cubre al comprar $0.6 \times 2{,}000 = 1{,}200$ acciones, pues las ganancias (pérdidas) en la posición de acciones compensa las pérdidas (ganancias) en la posición de opciones:

Sensibilidades básicas de las Opciones

- Si el precio de las acciones sube USD \$1, produce una ganancia de USD \$1,200 por las acciones compradas, pero el precio de la opción tenderá a subir $0.6 \times 1 = USD\ \$0.60$, lo que produce una pérdida de $USD\ \$0.60 \times 2{,}000 = USD\ \$1{,}200$ por las opciones ***emitidas***.



Recuerde que una posición corta en un call, se tienen pérdidas si la acción se incrementa arriba de K

Sensibilidades básicas de las Opciones

- Si la acción baja USD $1, produce una pérdida de USD $1,200 por las acciones compradas, pero el precio de la opción tenderá a bajar USD $0.60, lo que produce una ganancia de USD $1,200 por las opciones emitidas.

En este ejemplo, la delta de la posición corta del operador en 2,000 opciones es $0.6 \times -2{,}000 = -1{,}200$, lo que significa que el operador pierde $1{,}200\Delta S$ en la posición de la opción cuando el precio de las acciones aumenta en ΔS.

Sensibilidades básicas de las Opciones

Así, la delta de la posición de acciones compensa la delta de la posición de opciones. Una posición con un delta de cero se denomina *delta neutral*.

Es importante que, ***dado que la delta de una opción no permanece constante***, la posición del operador permanece cubierta por delta (o delta neutral) sólo durante un período relativamente corto. ***La cobertura debe ajustarse periódicamente***. Esto se conoce como rebalanceo del portafolio.

Por lo anterior, la delta representa el número de unidades de la acción que debemos mantener por cada opción en corto para crear una cartera sin riesgos. La delta de una opción de compra es positiva, mientras que la delta de una opción de venta es negativa.

Sensibilidades básicas de las Opciones

Example 19.1. Consider a call option on a non-dividend-paying stock, where the stock price is USD \$49, the strike price is USD \$50, the risk-free rate is 5%, the time to maturity is 20 weeks (= 0.3846 years), and the volatility is 20%. Obtain and explain delta.

Solución. Sabemos que $\Delta = N(d_1)$, entonces:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{49}{50}\right) + \left(5\% + \frac{20\%^2}{2}\right)\left(\frac{20}{52}\right)}{20\%\sqrt{\frac{20}{52}}} = 0.0542$$

Entonces

$$\Delta = N(d_1) = N(0.0542) = 0.522$$

Así, si el precio de la acción cambia en ΔS, el precio de la opción cambia en $0.522\Delta S$.

Sensibilidades básicas de las Opciones

Exercise 19.1 How can a short position in 1,000 options be made delta neutral when the delta of each option is 0.7?

Answer. A delta of 0.7 means that, when the price of the stock increases by a small amount, the price of the option increases by 70% of this amount.

Similarly, when the price of the stock decreases by a small amount, the price of the option decreases by 70% of this amount.

So, a short position in 1,000 options has a delta of 700 purchase of 700 shares.

Sensibilidades básicas de las Opciones

Gamma. Medida de sensibilidad del precio de la opción respecto de cambios en la Delta. Indica la velocidad con la que se mueve el precio del contrato; i.e., $\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$.

	Γ ***Call***	Γ ***Put***
Sin Dividendo	$\frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T-t}}$	$\frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T-t}}$
Con Dividendo	$e^{-q(T-t)} \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T-t}}$	$e^{-q(T-t)} \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T-t}}$

Donde $N'(x) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi}} \boldsymbol{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

Interpretación

- Una Gamma alta significa mayor riesgo (es mayor mientras esté más en la situación ITM) y, por el contrario, si es baja menor riesgo.
- La Gamma del Call y del Put con igual precio de Ejercicio y plazo es la misma.
- A mayor plazo a vencimiento menor es la Gamma, a menor plazo será mayor.
- Representa la curvatura
- Influyen en la Gamma: tiempo, situación “al dinero” y la volatilidad.
- Los signos de Theta y Gamma son opuestos, sin embargo están muy correlacionadas.

Analogía

- Call largo y Put largo tienen Gamma positiva
- Call corto y Put corto tienen Gamma negativa

Sensibilidades básicas de las Opciones

Example 19.4. As in Example 19.1, consider a call option on a non-dividend-paying stock where the stock price is \$49, the strike price is \$50, the risk-free rate is 5%, the time to maturity is 20 weeks 1= 0.3846 years2, and the volatility is 20%. The option's gamma is…

Respuesta. La gamma de la opción es

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{0.0542^2}{2}}}{49(20\%)\sqrt{\frac{20}{52}}} = 0.066$$

Entonces, cuando el precio del activo cambia en ΔS, la Δ de la opción cambia en $0.066\Delta S$.

Sensibilidades básicas de las Opciones

Theta. Medida de sensibilidad del precio de la opción respecto al vencimiento del contrato; i.e., $\frac{\partial c}{\partial t}$.

	Θ *Call*	Θ *Put*
Sin Dividendo	$-\frac{S_0\, N'(d_1)\, \sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-\frac{S_0\, N'(d_1)\, \sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2)$
Con Dividendo	$-\frac{S_0\, N'(d_1)\, \sigma e^{-q(T-t)}}{2\sqrt{T-t}} + qS_0\, N(d_1)\, e^{-q(T-t)} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-\frac{S_0\, N'(d_1)\, \sigma e^{-q(T-t)}}{2\sqrt{T-t}} + qS_0\, N(-d_1)\, e^{-q(T-t)} - rKe^{-r(T-t)}N(-d_2)$

Observación 1. El tiempo está expresado en años; sin embargo es práctica común que en la pizarra aparezca en días; de tal manera que theta es el cambio en el valor de la opción cuando pasó un día, *ceteris paribus*.

Observación 2. Theta suele ser negativo en las opciones, porque a medida que pasa el tiempo y todo lo demás permanece igual, la opción tiende a perder valor.

Sensibilidades básicas de las Opciones

Interpretación

- Los valores máximos ocurren cuando la situación está ITM y a corto plazo, aunque el riesgo se incrementa.
- Los signos de Theta y Gamma son opuestos; sin embargo están muy correlacionadas, ya que si la Gamma es fuerte la Theta es fuerte, lo que ocasiona fuertes pérdidas por movimientos en el subyacente y por el tiempo.

Analogía

- Call largo y Put largo tienen Theta negativa.
- Call corto y Put corto tienen Theta positiva

Sensibilidades básicas de las Opciones

Example 19.2. As in Example 19.1, consider a call option on a non-dividend-paying stock where the stock price is $49, the strike price is $50, the risk-free rate is 5%, the time to maturity is 20 weeks (= 0.3846 years), and the volatility is 20%. In this case, $S_0 = 49$, $K = 50$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.20$, and $T = 0.3846$. The option's theta is…

Respuesta. La theta de la opción es

$$\Theta = -\frac{S_0\, N'(d_1)\, \sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2) = -4{,}31$$

Entonces, la theta de la opción es $\frac{-4.31}{252} = -0.0171$ por *trading day*.

Sensibilidades básicas de las Opciones

Rho. Medida de sensibilidad del precio de la opción respecto de cambios en la tasa de referencia; i.e., $\frac{\partial c}{\partial r}$.

	$\rho\ Call$	$\rho\ Put$
Sin Dividendo	$K\ T\ e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-\ K\ T\ e^{-r(T-t)}N(-d_2)$
Con Dividendo	$K\ T\ e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-\ K\ T\ e^{-r(T-t)}N(-d_2)$

Interpretación

- La Rho es grande si el plazo a vencimiento es mayor.

Analogía

- Call largo y put corto tienen rho positiva
- Call corto y put largo tienen rho negativa.

Sensibilidades básicas de las Opciones

Example 19.7. As in Example 19.1, consider a call option on a non-dividend-paying stock where the stock price is \$49, the strike price is \$50, the risk-free rate is 5%, the time to maturity is 20 weeks (= 0.3846 years), and the volatility is 20%. In this case, $S_0 = 49$, $K = 50$, $r = 0.05$, $\sigma = 20\%$, and $T = 0.3846$. The option's rho is…

Respuesta. La rho de la opción es

$$\rho = K\,T\,e^{-r(T-t)}N(d_2) = 8.91$$

Esto significa que si la tasa libre de riesgo se incrementa en un punto porcentual (del 5% al 6%, en este caso), el precio de la opción se incrementa en $1\% \times 8.91 = 0.0891$.

Sensibilidades básicas de las Opciones

Vega. Medida de Sensibilidad del precio de la opción respecto de cambios en la volatilidad del activo subyacente; i.e., $\frac{\partial c}{\partial \sigma}$.

	$\boldsymbol{\nu}$ ***call & put***
Sin Dividendo	$S_0\sqrt{T-t}\;\; N'(d_1)$
Con Dividendo	$S_0\sqrt{T-t}\;\; N'(d_1)\; e^{-q(T-t)}$

Interpretación de la Vega:

- La vega es mayor cuando si situación es ITM y menor cuando es ATM y OTM, lo que significa que se dan cambios mayores en la prima cuando está ITM.
- La vega es mayor cuando el plazo es mayor y disminuye a la fecha de vencimiento, por el grado de certidumbre.

Analogía

- Call largo y put largo tienen vega positiva
- Call corto y put corto tienen vega negativa

Sensibilidades básicas de las Opciones

Observación. Si bien vega pertenece a las Griegas en derivados, la vega no pertenece al alfabeto griego, y se utiliza la letra griega niu ($\boldsymbol{\nu}$) para denotarla.

La siguiente imagen muestra las **24 letras griegas** en su versión mayúscula y minúscula, junto con el nombre de cada letra.

Α α	Β β	Γ γ	Δ δ	Ε ε	Ζ ζ
alfa	beta	gamma	delta	épsilon	dseta
Η η	Θ θ	Ι ι	Κ κ	Λ λ	Μ μ
eta	theta	iota	kappa	lambda	mi
Ν ν	Ξ ξ	Ο ο	Π π	Ρ ρ	Σ σ
ni	xi	ómicron	pi	rho	sigma
Τ τ	Υ υ	Φ φ	Χ χ	Ψ ψ	Ω ω
tau	ípsilon	fi	ji	psi	omega

Sensibilidades básicas de las Opciones

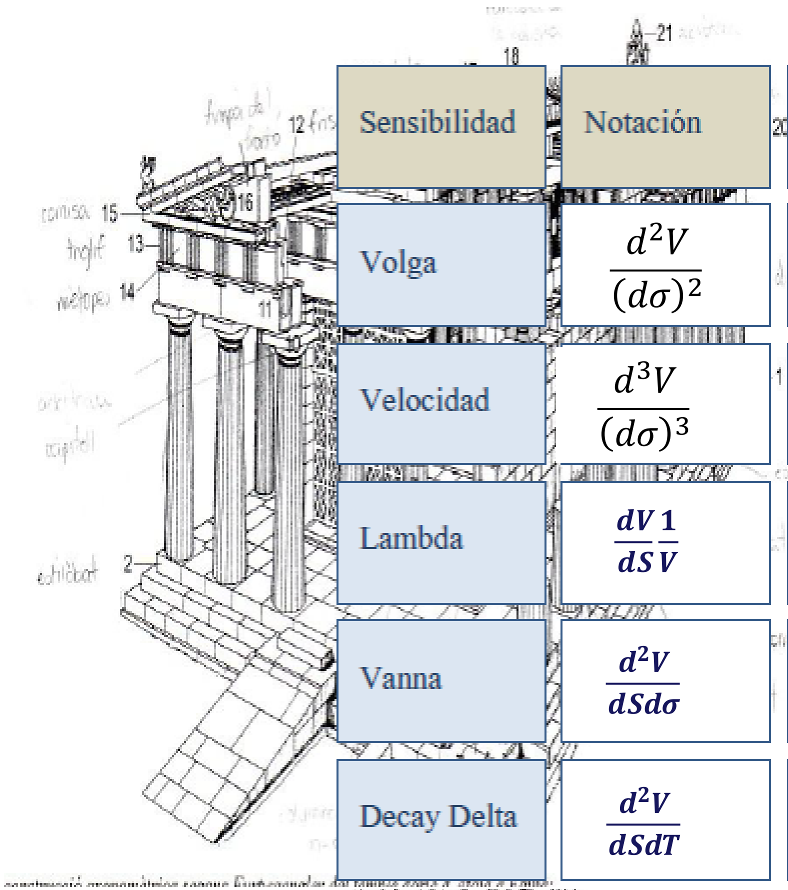
Example 19.6. As in Example 19.1, consider a call option on a non-dividend-paying stock where the stock price is \$49, the strike price is \$50, the risk-free rate is 5%, the time to maturity is 20 weeks (= 0.3846 years), and the volatility is 20%. In this case, $S_0 = 49$, $K = 50$, $r = 0.05$, $\sigma = 20\%$, and $T = 0.3846$. The option's vega is…

Respuesta. La vega de la opción es

$$\boldsymbol{\nu} = S_0 \sqrt{T - t}\ N'(d_1) = 12.1$$

Esto significa que, ante un incremento de un punto porcentual en la volatilidad (del 20% al 21%, en este caso), el precio de la opción se incrementa en $1\% \times 12.1 = 0.121$.

Sensibilidades básicas de las Opciones



Sensibilidad	Notación	Medida de Sensibilidad
Volga	$\frac{d^2V}{(d\sigma)^2}$	A los cambios en Vega También se le conoce como Vomma
Velocidad	$\frac{d^3V}{(d\sigma)^3}$	A los cambios en la Volga
Lambda	$\frac{dV}{dS}\frac{1}{V}$	Expresada en términos porcentuales. Mide los cambios en el precio del Activo Subyacente con respecto al valor de la Opción.
Vanna	$\frac{d^2V}{dSd\sigma}$	Cruzada del valor del instrumento con respecto a la volatilidad y el precio del subyacente
Decay Delta	$\frac{d^2V}{dSdT}$	Que mide el tiempo en deteriorarse la delta. Además de Deterioro de delta (delta decay), también se le conoce como encanto (charm),
Dual Delta	$\frac{dV}{dK}$	Es la probabilidad de que una opción termine en K.

Sensibilidades básicas de las Opciones

Sensibilidad	Notación	Call	Put
Volga	$\frac{d^2V}{(d\sigma)^2}$	$volga = Se^{-q\tau}N(d1)\sqrt{\tau}\frac{d_1 d_2}{\sigma} = \upsilon\frac{d_1 d_2}{\sigma}$	
Lambda	$\frac{dV}{dS}\frac{1}{V}$	$\Delta = e^{-qt}\frac{N(d1)}{V}$	$\Delta = -e^{-qt}\frac{N(-d1)}{V}$
Vanna	$\frac{d^2V}{dSd\sigma}$	$vanna = -e^{-q\tau}N(d1)\frac{d_2}{\sigma} = \frac{\upsilon}{S}\left[1-\frac{d_1}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]$	
Decay Delta	$\frac{d^2V}{dSdT}$	$-qe^{-q\tau}N(d1)+e^{-q\tau}N(d1)\frac{2(r-q)\tau-d_2\sigma\sqrt{\tau}}{2\tau\sigma\sqrt{\tau}}$	$qe^{-q\tau}N(-d1)-e^{-q\tau}N(d1)\frac{2(r-q)\tau-d_2\sigma\sqrt{\tau}}{2\tau\sigma\sqrt{\tau}}$
Dual Delta	$\frac{dV}{dK}$	$-e^{-r\tau}N(d_2)$	$e^{-r\tau}N(-d_2)$

Más la que se acumulen esta semana….

Temas Selectos en Derivados Exóticos

LAT4092

Dr. Francisco García Castillo