Cálculo de Integrales: Método del Trapecio Compuesto y Punto Medio Compuesto

Enrique Rocha Espinoza

Andrea Hernández Huerta

Mariana Raquel Gonzalez Zozaya

Keren Daniela González García

Heriberto Espino Montelongo

Universidad de las Américas Puebla

O24 LFA3082 1: Análisis Numérico

Dra. Anabel Hernández Ramírez

12 de diciembre de 2024

Índice

Índice de fíguras

Índice de tablas

Cálculo de Integrales: Método del Trapecio Compuesto y Punto Medio Compuesto

Linge y Langtangen (2020)

Introducción

La integración es una de las operaciones fundamentales en el cálculo, utilizada para determinar áreas, volúmenes y otros conceptos matemáticos esenciales. Sin embargo, muchas integrales no pueden resolverse analíticamente, lo que lleva a la necesidad de métodos numéricos que permitan aproximar sus valores.

Existen varios métodos de integración numérica, comenzando con el método del punto medio y el método trapezoidal, que son técnicas básicas para aproximar el área bajo una curva. Estos métodos permiten a los usuarios elegir la técnica más adecuada según la precisión requerida y la naturaleza de la función a integrar.

Este documento explora diversas estrategias y técnicas para la computación numérica de integrales, así como la implementación de estas en lenguajes de programación como Python, destacando la importancia de la precisión y la eficiencia en el proceso.

Método del Trapecio Compuesto

El **método del trapecio compuesto** es una técnica de integración numérica que aproxima la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la suma de áreas de n trapecios. El intervalo $[a,b]$ se divide en n subintervalos de igual tamaño, y la función $f(x)$ se evalúa en los puntos extremos de estos subintervalos.

Primero entenderemos a los trapecios.

El área de un trapecio es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\,h\,(B+b)$$

Donde

h: Altura del trapecio.

B: Base mayor.

b: Base menor.

Dividimos el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de igual longitud:

$$h = \frac{b-a}{n},$$

siendo h es el tamaño de cada subintervalo.

Los puntos de división son:

$$x_0 = a,\ x_1 = a+h,\ x_2 = a+2h,\ \ldots,\ x_n = b.$$

Es claro que usaremos trapecios rectos, donde h es nuestra altura, y $f(x_i), f(x_{i+1})$ son B y b.

Para un único subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, el área bajo la curva se aproxima mediante un trapecio:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}h\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right].$$

Si lo hacemos para todos los subintervalos, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \\
&\approx \frac{1}{2}h\Big[f(x_0) + f(x_1)\Big] + \frac{1}{2}h\Big[f(x_1) + f(x_2)\Big] + \cdots + \frac{1}{2}h\Big[f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big] \\
&= \frac{h}{2}\Big[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big] \\
&= \frac{h}{2}\Big[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big] \\
&= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} 2f(x_i) + f(x_n)\right]
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} 2f(x_i) + f(x_n)\right]$$

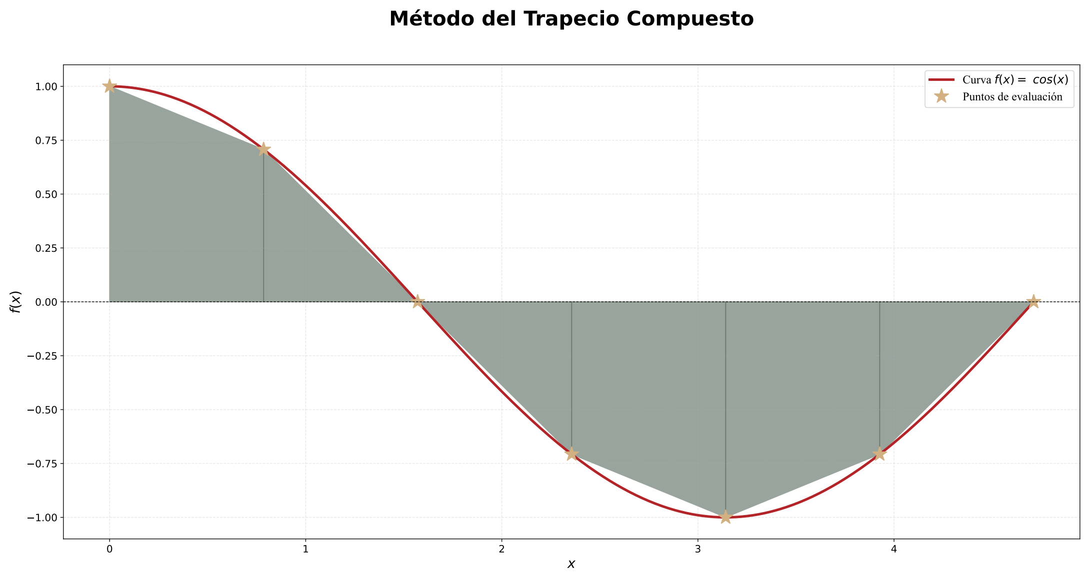
Equivalentemente

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(x_n)\right].$$

Notemos que cuanto mayor sea el número de subintervalos n, más precisa será la aproximación, ya que se reduce el error debido a la curvatura de $f(x)$ dentro de cada subintervalo.

Fun fact: La palabra *compuesta* se utiliza cuando es más de un subintervalo.

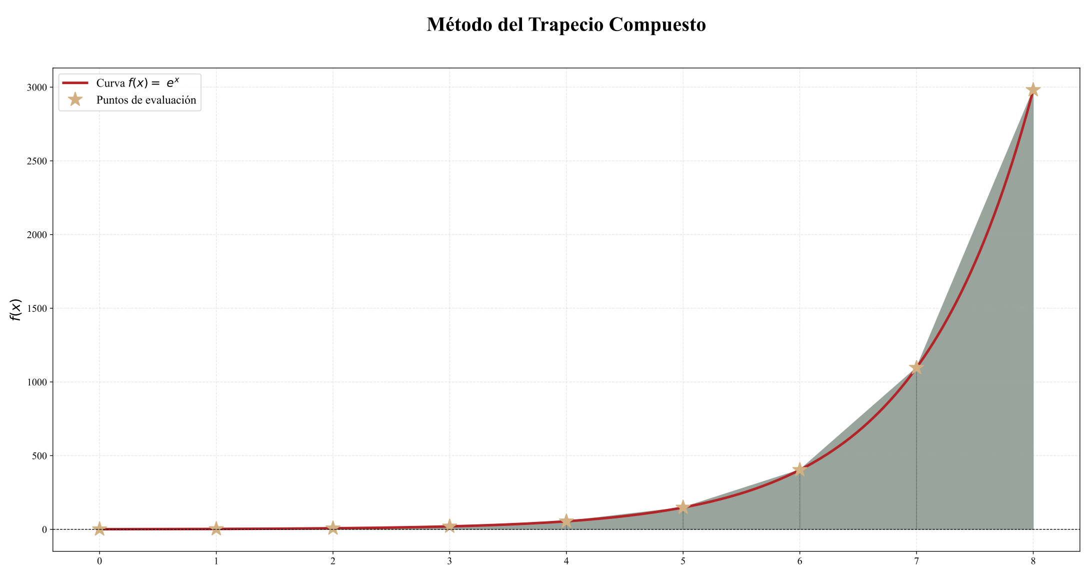
Ejemplos



Valor aproximado de la integral: -0.948059

Valor exacto de la integral: -1.000000

Error: 0.051941



Valor aproximado de la integral: 3224.245129

Valor exacto de la integral: 2979.957987

Error: 244.287142

Método del Punto Medio Compuesto

El **método del punto medio compuesto** también es una técnica de integración numérica, pero en lugar de usar los extremos de los subintervalos para aproximar la integral, la función $f(x)$ utiliza el punto medio de los n subintervalos. Esto puede dar mejores aproximaciones en algunos casos, ya que, toma en cuenta un valor central dentro de $[a, b]$.

Al igual que con el método anterior, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud (siendo h es el tamaño de cada subintervalo).:

$$h = \frac{b-a}{n},$$

Ya que los puntos de división son:

$$x_0 = a,\, x_1 = a + h,\, x_2 = a + 2h,\, \ldots,\, x_n = b.$$

Para cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ el punto medio es:

$$m_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2},$$

Por lo que, si se hace para todos los subintervalos tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \\
&\approx hf\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + hf\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \cdots + hf\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) \\
&= hf(m_0) + hf(m_1) + \cdots + hf(m_n) \\
&= h\Big[f(m_0) + f(m_1) + \cdots + f(m_n)\Big]
\end{aligned}$$

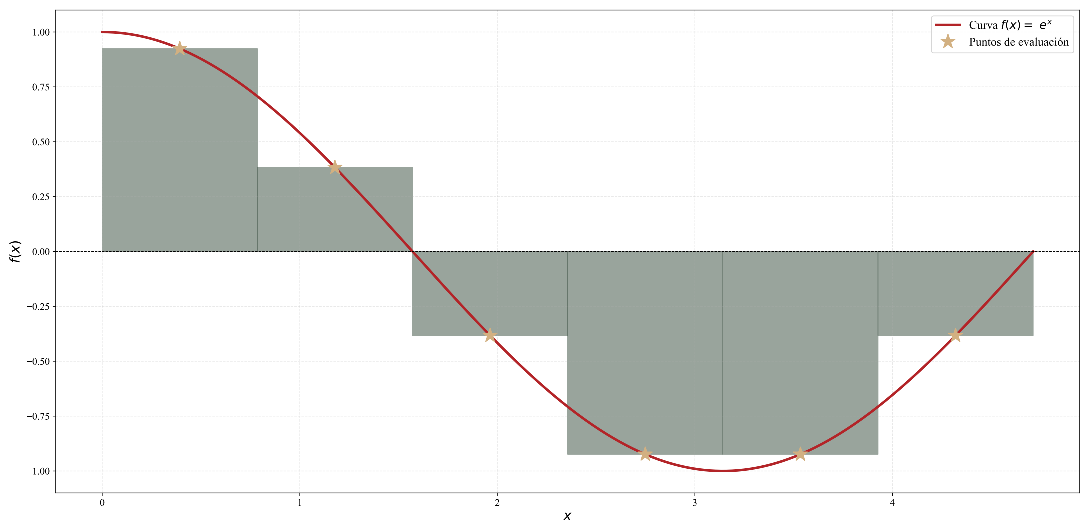
Concluyendo que:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{i=1}^{n-1} f(m_i)$$

¡ojo! Este método tiene un margen de error menor que el anterior.

Ejemplos

Método del Punto Medio Compuesto

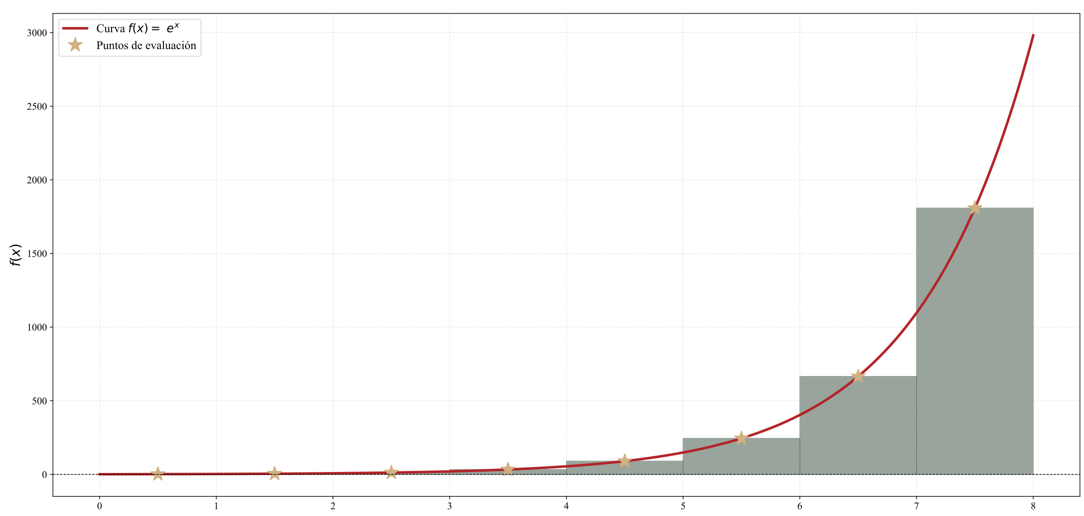


Valor aproximado de la integral: -1.026172

Valor exacto de la integral: -1.000000

Error: 0.026172

Método del Punto Medio Compuesto



Valor aproximado de la integral: 2859.321467

Valor exacto de la integral: 2979.957987

Error: 120.636520

Referencias

Linge, S., y Langtangen, H. P. (2020). *Programming for computations – python.* Springer.