Definición

Sean M una nube de puntos en un espacio métrico (X, d) y $\epsilon > 0$. El **complejo de Čech** $C_\epsilon(M, d)$ es el complejo simplicial donde:

- un subconjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\} \subset M$ forma un simplejo k-dimensional en $C_\epsilon(M)$ si y solo si

$$\bigcap_{i=0}^{k} B(x_i, \epsilon) \neq \varnothing;$$

equivalente

primero encontramos caras
luego intersectamos

o equivalentemente: existe algún $x \in X$ tal que $d(x, x_i) < \epsilon$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

desventaja: necesitamos info de afuera

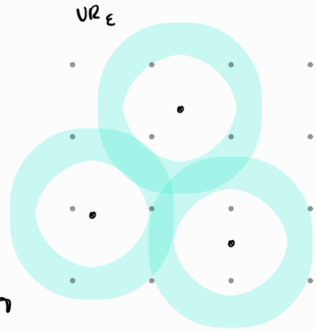
Definición

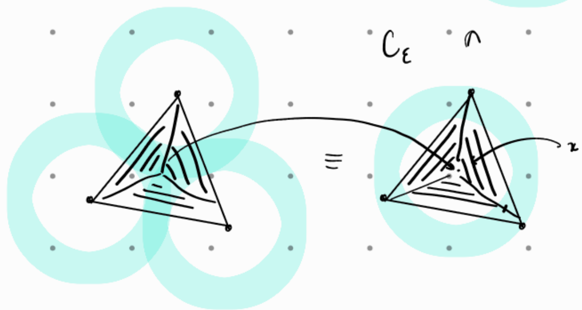
Sena (M, d) un espacio métrico finito y $\epsilon \geqslant 0$. El **complejo de Vietoris-Rips** de M, $\mathrm{VR}_\epsilon(M)$, es el complejo simplicial donde:

- un subconjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\} \subset M$ forma un simplejo k-dimensional en $\mathrm{VR}_\epsilon(M)$ si y solo si $d(x_i, x_j) \leqslant \epsilon$ para todo $i, j \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

(ε puede ser 0)

· siempre es un conjunto simplicial





P.d] cada simplejo σ en $VR(M)$ está en $C(M)$

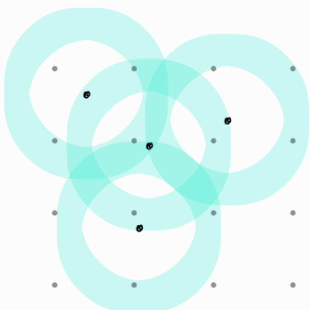
En $VR(M)$ se forma un simplejo σ cuando la $d(x_i, x_j) \leq \varepsilon$. La distancia entre dos puntos es menor o igual a ε.

En $C(M)$ se forma un simplejo σ cuando la $d(x, x_i) < \varepsilon$, siendo x el baricentro de los x_i del simplejo, o equivalentemente, las bolas centradas en los puntos se intersectan.

Para cada punto x_i en M consideremos una bola de radio ε.

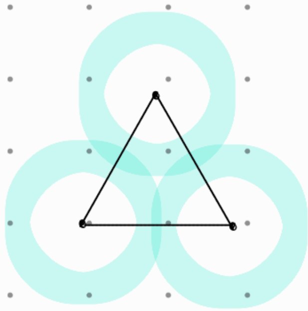
Dado un simplejo k en $VR(M)$. la distancia entre sus puntos es menor o igual a ε.

Si agarramos un punto x_i, todos los puntos que forman un simplejo del que x_i forme parte comparten estar a distancia menor o igual que ε para todos los x_i en el simplejo.



mientras en $C(M)$ se forma un simplejo al haber un baricentro x, siendo $x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ donde x_i son los otros puntos que forman el simplejo, formando un simplejo de dim $= n$. Visto de otra forma, $\forall x_i \in M$, $x_i \in B_\varepsilon(x)$ donde x es el baricentro y x_i las componentes del simplejo. mientras que en VR se formaría una cara de ese simplejo, ya que necesita que la distancia sea $d(x_i, x_j) \leq \varepsilon$, llegando a formar simplejos solo con los puntos en M que estén a distancia menor o igual que ε, es decir, $\forall x_i, x_j \in M$, $x_i \in B_\varepsilon(x_j)$.

$C_\varepsilon(M) \subset VR_{2\varepsilon}(M) \subset C_{2\varepsilon}(M)$



$C_\varepsilon(M) \subset VR_{2\varepsilon}(M)$

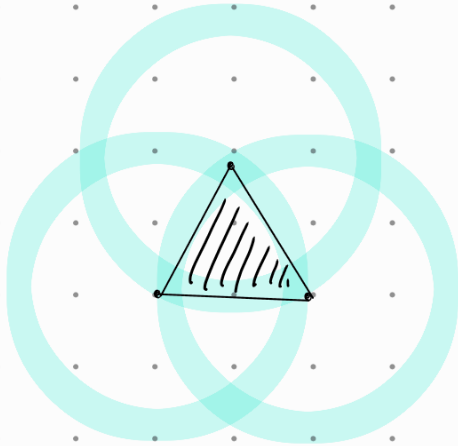
Sea σ un simplejo,

El complejo de Čech se define como:

$\exists x \in X : d(x, x_i) < \varepsilon \quad , \forall i \in \{0, 1, \dots, k\}$

Por desigualdad del triángulo:

$$d(x, x_j) \le d(x, x_i) + d(x_i, x_j)$$
$$\le \varepsilon + \varepsilon$$
$$= 2\varepsilon$$



Entonces todos los puntos estan a una distancia menor que 2ε.

Por lo que σ también es un simplejo en $VR_{2\varepsilon}(M)$

$VR_{2\varepsilon}(M) \subset C_{2\varepsilon}(M)$

Sea $\varepsilon' = 2\varepsilon$.

Cuando $VR_{\varepsilon'}$ y $C_{\varepsilon'}$ tienen la misma ε',

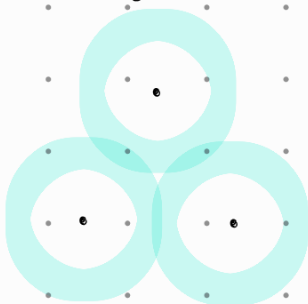
VR_ε es subcomplejo de $C_{\varepsilon'}$, la distancia que necesita $C_{\varepsilon'}$ para formar un simplejo es menor que la distancia que necesita $VR_{\varepsilon'}$ para formar un simplejo.

porque en Čech ε' es suficiente con que se intersecten,

mientras que en VR ε' es la distancia entre los puntos, por lo que todos los simplejos en $VR_{\varepsilon'}(M)$ están en $C_{\varepsilon'}(M)$

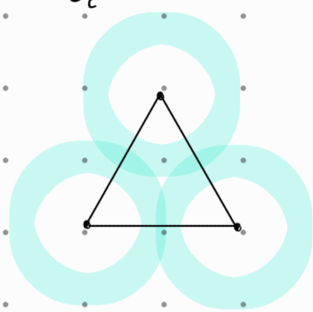
$VR_{\varepsilon'}(M) \subset C_{\varepsilon'}(M)$

VR_ε



$\cap$

C_ε



Por transitividad: $C_\varepsilon(M) \subseteq VR_{2\varepsilon}(M) \subseteq C_{2\varepsilon}(M)$