Operador frontera

Demuestra que para cualquier simplejo orientado σ de dimensión $k \geq 0$, se tiene que

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k(\sigma) = \mathbf{0}.$$

(Sugerencia: Evalúa $\partial_{k-1} \circ \partial_k(\sigma)$ como

$$\partial_{k-1}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_{-i}\right) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot \partial_{k-1}(\sigma_{-i}) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j},$$

luego separa la doble suma en las partes donde $j > i$ y $j < i$.)

La actividad vale 0.5 extra (0.2 si solo se hace el caso para k=4) para el tercer parcial, el cual se aplicará una vez que se haya explicado el procedimiento en una exposición a más tardar 5 días hábiles después de la fecha de vencimiento.

Definición

Sea σ un k-simplejo orientado. La **frontera (algebraica)** de σ es la $(k-1)$-cadena

$$\partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_{-i},$$

donde σ_{-i} es la i-ésima cara de σ.

σ simplejo. $\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$$\partial_{k-1}(\sigma) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot \partial_{k-1}(\sigma_{-i})$$

la i esima es

primero le hacemos ∂ a un simplejo

$\partial_k(\sigma) =$

$$\begin{aligned}
\partial_{k-1} \circ \partial_k(\sigma) &= \partial_{k-1}(\sigma)\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_{-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\ \partial_{k-1}(\sigma_{-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j}
\end{aligned}$$

separa la suma donde $i < j$, $j < i$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^i(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j} \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left[\sum_{j=0}^{i}(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j} + \sum_{j=1+i}^{k-1}(-1)^j(\sigma_{-i})_j\right]
\end{aligned}$$

no importa, estamos en $\mathbb{Z}_2$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{k}\left[\sum_{j=0}^{i}(\sigma_{-i})_{-j} + \sum_{j=1+i}^{k-1}(\sigma_{-i})_j\right] \\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(\sigma_{-i})_{-j} + \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1+i}^{k-1}(\sigma_{-i})_j \\
&= (\sigma_{-i})_{-0} + (\sigma_{-i})_{-1} + \dots + (\sigma_{-i})_{-i} + (\sigma_{-i})_{-(i+1)} + \dots + (\sigma_{-i})_{-(k-1)} \\
&\quad (\sigma_{0})_{-j} + (\sigma_{-1})_{-j} + \dots + (\sigma_{-j})_{-j} + (\sigma_{-(j+1)})_{-j} + \dots + (\sigma_{-k})_{-i}
\end{aligned}$$

se está sumando una cantidad par de veces las caras que están antes del vertice v_i

como se están sumando una cantidad par de veces en $\mathbb{Z}_2$. se cancelan $(1+1=0)$

se está sumando una cantidad par de veces las caras que están despues del vertice v_i

como se están sumando una cantidad par de veces en $\mathbb{Z}_2$. se cancelan $(1+1=0)$

$j < i$

$j > i$

$$\begin{aligned}
= &\left(\cancel{\sigma_{-0}}_{-0} + \cancel{\sigma_{-1}}_{-0} + \cancel{\sigma_{-k}}_{-0}\right) + \cancel{\left(\sigma_{-0}{}_{-1} + \sigma_{-k}{}_{-1}\right)} + \left(\cancel{\sigma_{-0}}_{-k-1} + \cancel{\sigma_{-1}}_{-k-1} + \sigma_{-k}{}_{-k-1}\right) \\
+ &\left(\cancel{\sigma_{-0}}_{-0} + \dots + \cancel{\sigma_{-0}}_{-k-1}\right) + \left(\cancel{\sigma_{-1}}_{-0} + \dots + \cancel{\sigma_{-1}}_{-k-1}\right) + \left(\cancel{\sigma_{-k}}_{-0} + \cancel{\sigma_{-k}}_{-1} + \dots + \sigma_{-k}{}_{-k}\right)
\end{aligned}$$

$\cancel{\sigma_{-0}}_{-1}$

$$\partial_3 \circ \partial_4 (v_0 v_1 v_2 v_3 v_4) = v_0 v_1 v_2 v_3 + v_0 v_1 v_2 v_4 + v_0 v_1 v_3 v_4 + v_0 v_2 v_3 v_4 + v_1 v_2 v_3 v_4$$

$$\partial_3 \left(v_0 v_1 v_2 v_3 + v_0 v_1 v_2 v_4 + v_0 v_1 v_3 v_4 + v_0 v_2 v_3 v_4 + v_1 v_2 v_3 v_4 \right)$$

$$\begin{aligned}
= \; & \cancel{v_0 v_1 v_2} + \cancel{v_0 v_1 v_3} + \cancel{v_0 v_2 v_3} + \cancel{v_1 v_2 v_3} + \\
& \cancel{v_0 v_1 v_2} + \cancel{v_0 v_1 v_4} + \cancel{v_0 v_2 v_4} + \cancel{v_1 v_2 v_4} + \\
& \cancel{v_0 v_1 v_3} + \cancel{v_0 v_1 v_4} + \cancel{v_0 v_3 v_4} + \cancel{v_1 v_3 v_4} + \\
& \cancel{v_0 v_2 v_3} + \cancel{v_0 v_2 v_4} + \cancel{v_0 v_3 v_4} + \cancel{v_2 v_3 v_4} + \\
& \cancel{v_1 v_2 v_3} + \cancel{v_1 v_2 v_4} + \cancel{v_1 v_3 v_4} + \cancel{v_2 v_3 v_4}
\end{aligned}$$

Demuestra que para cualquier simplejo orientado σ de dimensión $k \geq 0$, se tiene que

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k(\sigma) = \mathbf{0}.$$

(Sugerencia: Evalúa $\partial_{k-1} \circ \partial_k(\sigma)$ como

$$\partial_{k-1}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_{-i}\right) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot \partial_{k-1}(\sigma_{-i}) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j},$$

luego separa la doble suma en las partes donde $j > i$ y $j < i$.)

La actividad vale 0.5 extra (0.2 si solo se hace el caso para k=4) para el tercer parcial, el cual se aplicará una vez que se haya explicado el procedimiento en una exposición a más tardar 5 días hábiles después de la fecha de vencimiento.

Definición

Sea σ un k-simplejo orientado. La **frontera (algebraica)** de σ es la $(k-1)$-cadena

$$\partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_{-i},$$

donde σ_{-i} es la i-ésima cara de σ.

σ simplejo. $\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$$\partial_{k-1}(\sigma) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot \partial_{k-1}(\sigma_{-i})$$

la i esima es

primero le hacemos ∂ a un simplejo

$\partial_k(\sigma) =$

$$\begin{aligned}
\partial_{k-1}(\sigma) \circ \partial_k(\sigma) &= \partial_{k-1}(\sigma)\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_{-i}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \; \partial_{k-1}(\sigma_{-i})\\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j}
\end{aligned}$$

separa la suma donde $i < j$, $j < i$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left[\sum_{j=0}^{i}(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j} + \sum_{j=i+1}^{k-1}(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j}\right]\\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sum_{j=0}^{i}(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j} + \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sum_{j=i+1}^{k-1}(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j}\\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(\sigma_{-i})_{-j} + \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=i+1}^{k-1}(\sigma_{-i})_{-j}
\end{aligned}$$

se cancelan ?

$$\begin{aligned}
&= \left((\sigma_{-0})_{-0} + (\sigma_{-0})_{-1} + \dots + (\sigma_{-0})_{-i}\right) + \left((\sigma_{-1})_{-0} + (\sigma_{-1})_{-1} + \dots + (\sigma_{-1})_{-i}\right) + \dots + \left((\sigma_{-k})_{-0} + (\sigma_{-k})_{-1} + \dots + (\sigma_{-k})_{-i}\right) +\\
&\quad \left((\sigma_{-0})_{-(i+1)} + (\sigma_{-0})_{-(i+1)} + \dots + (\sigma_{-0})_{-(i+1)}\right) + \left((\sigma_{-1})_{-(i+2)} + (\sigma_{-1})_{-(i+2)} + \dots + (\sigma_{-1})_{-(i+2)}\right) + \dots + \left((\sigma_{-k})_{-(k+1)} + (\sigma_{-k})_{-(k+1)} + \dots + (\sigma_{-k})_{-(k+1)}\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(\sigma_{-i})_{-j} + \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sum_{j=i+1}^{k-1}(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j}$$

$1_0 \;\; -1_1 \;\; +1_2 \;\; -1_3 \;\; \dots \;\; 1_k$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(\sigma_{-i})_{-j} + \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=i+1}^{k-1}(\sigma_{-i})_{-j}\\
&= \sum_{i=0}^{k}(\sigma_{-i})_{-0} + (\sigma_{-i})_{1} + \dots + (\sigma_{-i})_{-i} + \sum_{i=0}^{k}(\sigma
\end{aligned}$$

Demuestra que para cualquier simplejo orientado σ de dimensión $k \geq 0$, se tiene que

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k(\sigma) = \mathbf{0}.$$

(Sugerencia: Evalúa $\partial_{k-1} \circ \partial_k(\sigma)$ como

$$\partial_{k-1}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_{-i}\right) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot \partial_{k-1}(\sigma_{-i}) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j},$$

luego separa la doble suma en las partes donde $j > i$ y $j < i$.)

La actividad vale 0.5 extra (0.2 si solo se hace el caso para k=4) para el tercer parcial, el cual se aplicará una vez que se haya explicado el procedimiento en una exposición a más tardar 5 días hábiles después de la fecha de vencimiento.

Definición

Sea σ un k-simplejo orientado. La **frontera (algebraica)** de σ es la $(k-1)$-cadena

$$\partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_{-i},$$

donde σ_{-i} es la i-ésima cara de σ.

σ simplejo. $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

$$\partial_{k-1}(\sigma) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot \partial_{k-1}(\sigma_{-i})$$

la i ésima es

primero le hacemos ∂ a un simplejo

$\partial_k(\sigma) =$

$$\begin{aligned}
\partial_{k-1} \circ \partial_k(\sigma) &= \partial_{k-1}(\sigma)\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_{-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \; \partial_{k-1}(\sigma_{-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j} \\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^i(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j} \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left[\sum_{j=0}^{i}(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j} + \sum_{j=i+1}^{k-1}(-1)^j(\sigma_{-i})_{j}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^i(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j}^{\;j<i} + \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=i+1}^{k-1}(-1)^i(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j}^{\;j>i} \\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(\sigma_{-i})_{-j} + \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=i+1}^{k-1}(\sigma_{-i})_{-j} \\
&= \sum_{i=0}^{k}(\sigma_{-i})_{-0} + (\sigma_{-i})_{-1} + \ldots + (\sigma_{-i})_{-i} + \\
&\quad \sum_{i=0}^{k}(\sigma_{-i})_{-(i+1)} + (\sigma_{-i})_{-(i+2)} + \ldots + (\sigma_{-i})_{-(k+1)} \\
&= \big((\sigma_{-0})_{-0} + (\sigma_{-1})_{-0} + \ldots + (\sigma_{-k})_{-0}\big) + \big((\sigma_{-0})_{-1} + (\sigma_{-1})_{-1} + \ldots + (\sigma_{-k})_{-1}\big) + \ldots + \big((\sigma_{-0})_{-i} + (\sigma_{-1})_{-i} + \ldots + (\sigma_{-k})_{-i}\big) + \\
&\quad \big((\sigma_{-0})_{-(i+1)} + (\sigma_{-1})_{-(i+1)} + \ldots + (\sigma_{-k})_{-(i+1)}\big) + \big((\sigma_{-0})_{-(i+2)} + (\sigma_{-1})_{-(i+2)} + \ldots + (\sigma_{-k})_{-(i+2)}\big) + \ldots + \big((\sigma_{-0})_{-(k+1)} + (\sigma_{-1})_{-(k+1)} + \ldots + (\sigma_{-k})_{-(k+1)}\big) \\
&= \big((\sigma_{-0})_{-0} + (\sigma_{-1})_{-0} + \ldots + (\sigma_{-k})_{-0}\big) + \big((\sigma_{-0})_{-1} + (\sigma_{-1})_{-1} + \ldots + (\sigma_{-k})_{-1}\big) + \ldots + \big((\sigma_{-0})_{-i} + (\sigma_{-1})_{-i} + \ldots + (\sigma_{-k})_{-i}\big) + \\
&\quad \big((\sigma_{-0})_{-i-1} + (\sigma_{-1})_{-i-1} + \ldots + (\sigma_{-k})_{-i-1}\big) + \big((\sigma_{-0})_{-i-2} + (\sigma_{-1})_{-i-2} + \ldots + (\sigma_{-k})_{-i-2}\big) + \ldots + \big((\sigma_{-0})_{-k-0} + (\sigma_{-1})_{-k-1} + \ldots + (\sigma_{-k})_{-k-1}\big)
\end{aligned}$$

separa la suma donde $i < j$, $j < i$

se cancelan ?

cero ?

no importa estamos en $\mathbb{Z}_2$

Demuestra que para cualquier simplejo orientado σ de dimensión $k \geq 0$, se tiene que

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k(\sigma) = 0.$$

(Sugerencia: Evalúa $\partial_{k-1} \circ \partial_k(\sigma)$ como

$$\partial_{k-1}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_{-i}\right) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot \partial_{k-1}(\sigma_{-i}) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j},$$

luego separa la doble suma en las partes donde $j > i$ y $j < i$.)

La actividad vale 0.5 extra (0.2 si solo se hace el caso para k=4) para el tercer parcial, el cual se aplicará una vez que se haya explicado el procedimiento en una exposición a más tardar 5 días hábiles después de la fecha de vencimiento.

Definición

Sea σ un k-simplejo orientado. La **frontera (algebraica)** de σ es la $(k-1)$-cadena

$$\partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_{-i},$$

donde σ_{-i} es la i-ésima cara de σ.

σ simplejo, $\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$$\partial_{k-1}(\sigma) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot \partial_{k-1}(\sigma_{-i})$$

la i esima es

primero le hacemos ∂ a un simplejo

$\partial_k(\sigma) =$

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k(\sigma) = \partial_{k-1}(\sigma)\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_{-i}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\ \partial_{k-1}(\sigma_{-i})$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j}$$ separa la suma donde $i<j$, $j<i$

$$= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^i(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j}$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left[\sum_{j=0}^{i}(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j} + \sum_{j=i+1}^{k-1}(-1)^j(\sigma_{-i})_{-j}\right]$$ no importa, estamos en $\mathbb{Z}_2$

$$= \sum_{i=0}^{k}\left[(\sigma_{-i})_{-0} + \dots + (\sigma_{-i})_{-i} + (\sigma_{-i})_{-(i+1)} + \dots + (\sigma_{-i})_{-(k-1)}\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\left[(\sigma_{-i})_{-0} + \dots + (\sigma_{-i})_{-i} + (\sigma_{-i})_{-(i+1)} + \dots + (\sigma_{-i})_{-(k-1)}\right]$$

$$= (\sigma_{-0})_{-0} + (\sigma_{-1})_{-0} + (\sigma_{-2})_{-0} + \dots + (\sigma_{-k})_{-0} +$$???

$$(\sigma_{-0})_{-1} + (\sigma_{-1})_{-1} + (\sigma_{-2})_{-1} + \dots + (\sigma_{-k})_{-1} +$$

$\vdots$

$$(\sigma_{-0})_{-i-1} + (\sigma_{-1})_{-i-1} + (\sigma_{-2})_{-i-1} + \dots + (\sigma_{-k})_{-i-1} +$$

$$(\sigma_{-0})_{-i-1} + (\sigma_{-1})_{-i-1} + (\sigma_{-2})_{-i-1} + \dots + (\sigma_{-k})_{-i-1} +$$

$$(\sigma_{-0})_{-i} + (\sigma_{-1})_{-i} + (\sigma_{-2})_{-i} + \dots + (\sigma_{-k})_{-i}$$??

$$(\sigma_{-0})_{-(i+1)} + (\sigma_{-1})_{-(i+1)} + (\sigma_{-2})_{-(i+1)} + \dots + (\sigma_{-k})_{-(i+1)} +$$

$$(\sigma_{-0})_{-(i+2)} + (\sigma_{-1})_{-(i+2)} + (\sigma_{-2})_{-(i+2)} + \dots + (\sigma_{-k})_{-(i+2)} +$$

$\vdots$

$$(\sigma_{-0})_{-k+2} + (\sigma_{-1})_{-k+2} + (\sigma_{-2})_{-k+2} + \dots + (\sigma_{-k})_{-0} +$$

$$(\sigma_{-0})_{-k+1} + (\sigma_{-1})_{-k+1} + (\sigma_{-2})_{-k+1} + \dots + (\sigma_{-k})_{-1} +$$

$$= (\sigma_{-0})_{-0} + (\sigma_{-1})_{-0} + (\sigma_{-2})_{0} + \dots + (\sigma_{-k})_{-0}$$

$$(\sigma_{-0})_{-i} + (\sigma_{-1})_{-i} + (\sigma_{-2})_{-i} + \dots + (\sigma_{-k})_{-i}$$

0
1
2
3
4
5
4
3
2
1

$\partial_4 (v_0 v_1 v_2 v_3)$

$= v_0 v_1 v_2 + v_0 v_1 v_3 + v_0 v_2 v_3 + v_1 v_2 v_3$

$\partial_3 (v_0 v_1 v_2 + v_0 v_1 v_3 + v_0 v_2 v_3 + v_1 v_2 v_3)$