$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1}\mathbf{Z}^\top\mathbf{Z}$$

Sea $\boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ es la matriz diagonal de autovalores ordenados $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$.

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{V}^\top$$

Proyectamos los datos en la base de eigenvectores ortonormales $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{T} = \mathbf{Z}\mathbf{V}$$

Esta matriz $\mathbf{T}$ contiene las componentes principales del pca.

Para la matriz de covarianza de la matriz de covarianza:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}' &= \frac{1}{n-1}\mathbf{T}^\top\mathbf{T} \\
&= \frac{1}{n-1}(\mathbf{Z}\mathbf{V})^\top(\mathbf{Z}\mathbf{V}) \\
&= \mathbf{V}^\top\left(\frac{1}{n-1}\mathbf{Z}^\top\mathbf{Z}\right)\mathbf{V} \\
&= \mathbf{V}^\top\mathbf{S}\mathbf{V} \\
&= \mathbf{V}^\top(\mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{V}^\top)\mathbf{V} \\
&= \mathbf{V}^\top\mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{V}^\top\mathbf{V} \\
&= \mathbf{I}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{I} = \boldsymbol{\Lambda}
\end{aligned}$$