Teoremas Fundamentales de Álgebra Lineal (Matrices)

Compilado para Olimpiadas y Putnam

May 28, 2025

1. Teoremas Estructurales

1.1 Teorema de Rango–Nulidad

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces:

$$\dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T) = \dim(V)$$

1.2 Teorema de Cayley–Hamilton

Toda matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{F})$ satisface su propio polinomio característico:

$$p_A(A) = 0$$

1.3 Teorema Espectral (matrices simétricas reales)

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Entonces: - A es diagonalizable. - Sus valores propios son reales. - Existe una base ortonormal de vectores propios.

1.4 Teorema de Jordan

Toda matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es semejante a una matriz en forma canónica de Jordan:

$$A \sim J = \text{diag}(J_1, \dots, J_k)$$

2. Determinantes y Trazas

2.1 Propiedades fundamentales

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ - $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ - $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$ - $\det(A^T) = \det(A)$

2.2 Trazas y valores propios

Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces:

$$\text{tr}(A) = \sum \lambda_i, \quad \det(A) = \prod \lambda_i$$

donde λ_i son los valores propios de A, contados con multiplicidad.

3. Ortogonalidad y Positividad

3.1 Teorema de Descomposición QR

Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m \geq n$ admite una factorización:

$$A = QR, \quad Q^T Q = I, \quad R \text{ triangular superior}$$

3.2 Descomposición de Cholesky

Toda matriz simétrica definida positiva $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ puede escribirse como:

$$A = LL^T$$

donde L es triangular inferior con entradas reales positivas en la diagonal.

3.3 Descomposición espectral (matriz simétrica real)

$$A = Q\Lambda Q^T$$

con Q ortogonal y Λ diagonal.

3.4 Inequidad de Rayleigh

Para A simétrica y $x \neq 0$:

$$\lambda_{\min} \leq \frac{x^T Ax}{x^T x} \leq \lambda_{\max}$$

4. Teoremas de Similitud y Diagonalización

4.1 Condición de Diagonalización

Una matriz A es diagonalizable si y solo si existe una base de vectores propios (i.e., suma de dimensiones de autovalores $= n$).

4.2 Teorema de Schur (complejo)

Toda matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es unitaria-equivalente a una matriz triangular superior:

$$A = UTU^*, \quad \text{con } U \text{ unitaria, } T \text{ triangular superior}$$

4.3 Teorema de Similitud de Matrices Normalizables

Toda matriz normal A (i.e., $AA^* = A^*A$) es unitaria diagonalizable.

5. Aplicaciones Funcionales

5.1 Potencias de matrices diagonalizables

Si $A = PDP^{-1}$, entonces:

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

5.2 Exponencial de matriz (si diagonalizable)

$$e^A = Pe^DP^{-1}, \quad e^D = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$$

5.3 Fórmula de Sylvester para funciones de matrices

Si $A = \sum \lambda_i P_i$ (descomposición espectral), entonces para función f analítica:

$$f(A) = \sum f(\lambda_i) P_i$$

1. Definición del Determinante

Para una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, el determinante se define como:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

donde S_n es el grupo simétrico de permutaciones y $\operatorname{sgn}(\sigma)$ es la signatura de la permutación.

—

2. Propiedades Básicas

- **Linealidad por filas (o columnas):** El determinante es lineal respecto a cada fila (o columna) si las otras se mantienen fijas.
- **Antisimetría:** Si dos filas (o columnas) son iguales, entonces $\det(A) = 0$.
- **Determinante de la identidad:** $\det(I_n) = 1$.
- **Determinante de matriz triangular (superior o inferior):** Es el producto de los elementos diagonales:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

—

3. Efecto de Operaciones Elementales

- Intercambiar dos filas (o columnas): cambia el signo del determinante.
- Multiplicar una fila (o columna) por un escalar λ: el determinante se multiplica por λ.
- Sumar a una fila un múltiplo de otra: el determinante no cambia.

—

4. Propiedades Algebraicas Clave

- **Multiplicación:** $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- **Transpuesta:** $\det(A^T) = \det(A)$
- **Inversa:** Si A es invertible, entonces:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

- **Potencia:** $\det(A^n) = (\det A)^n$
- **Producto escalar:** Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

—

5. Criterios de Invertibilidad

- A es invertible $\iff \det(A) \neq 0$
- Si $\det(A) = 0$, entonces $\operatorname{rank}(A) < n$

—

6. Casos Especiales

6.1 Determinante de matriz diagonal

$$\det \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n$$

6.2 Determinante de una matriz con fila o columna nula

$$\det(A) = 0$$

6.3 Determinante de matriz con dos filas proporcionales

$$\det(A) = 0$$

—

7. Cofactores y Teorema de Laplace

7.1 Cofactor

El cofactor C_{ij} de la entrada a_{ij} es:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

donde M_{ij} es la submatriz obtenida al eliminar la fila i y columna j.

7.2 Teorema de Laplace (Expansión por fila o columna)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \quad \text{(expansión por la fila } i\text{)}$$

—

8. Determinantes con Valor Propio

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A, entonces:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

—

9. Aplicaciones Avanzadas

9.1 Regla de Cramer

Para $Ax = b$, si $\det(A) \neq 0$, entonces:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

donde A_i es A con su i-ésima columna reemplazada por b.

9.2 Relación con el producto mixto en $\mathbb{R}^3$

Si $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, entonces:

$$\det([u\,v\,w]) = u \cdot (v \times w)$$

1 Espacios Vectoriales y Subespacios Asociados a Matrices

1.1 Núcleo o Kernel

Para una matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, el *núcleo* (o kernel) es el conjunto

$$\ker(A) = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}.$$

1.2 Imagen o Rango

La *imagen* (o rango) de A es el subespacio generado por las columnas de A:

$$\mathrm{Im}(A) = \{y \in \mathbb{K}^m : y = Ax \text{ para algún } x \in \mathbb{K}^n\}.$$

1.3 Teorema Rango-Nulidad

Para $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, se cumple

$$\dim(\ker A) + \dim(\mathrm{Im} A) = n.$$

1.4 Espacio fila y espacio columna

El *espacio fila* de A es el subespacio generado por las filas de A (en $\mathbb{K}^n$). El *espacio columna* es el espacio generado por sus columnas (en $\mathbb{K}^m$).

1.5 Espacio ortogonal y complemento ortogonal

Dado un subespacio $V \subseteq \mathbb{K}^n$ con producto interno usual, el complemento ortogonal es

$$V^\perp = \{w \in \mathbb{K}^n : \langle v, w\rangle = 0 \ \forall v \in V\}.$$

Para una matriz A, el espacio ortogonal al espacio fila es el núcleo:

$$(\mathrm{Fila}(A))^\perp = \ker(A).$$

2 Matrices Especiales y sus Propiedades

2.1 Matriz simétrica

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es *simétrica* si $A = A^T$.

Los valores propios de una matriz simétrica real son todos reales.

La matriz simétrica es diagonalizable por una matriz ortogonal.

2.2 Matriz antisimétrica

A es *antisimétrica* si $A = -A^T$.

2.3 Matriz ortogonal

Una matriz $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es ortogonal si

$$Q^T Q = I.$$

Los valores propios de una matriz ortogonal Q cumplen $|\lambda| = 1$.

2.4 Matriz idempotente

A es idempotente si

$$A^2 = A.$$

2.5 Matriz nilpotente

A es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$A^k = 0.$$

2.6 Matriz estocástica

Una matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es estocástica si sus entradas son no negativas y cada fila suma 1:

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

3 Formas Canónicas

3.1 Forma canónica de Jordan

Para $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, existe una base en la que A se expresa como una matriz de bloques Jordan:

$$J = \bigoplus_{i=1}^{r} J_{k_i}(\lambda_i),$$

donde cada bloque $J_k(\lambda)$ tiene la forma

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

3.2 Matriz diagonalizable

A es diagonalizable si existe invertible P tal que

$$P^{-1}AP = D,$$

con D diagonal.

3.3 Forma de Smith normal

Para matrices sobre enteros o anillos polinómicos, existe P, Q invertibles tales que

$$PAQ = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0),$$

donde d_i divide a d_{i+1}.

4 Funciones de Matrices

4.1 Exponencial de matrices

4.2 Exponencial de matriz

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Si $A = PDP^{-1}$ con D diagonal, entonces

$$e^A = Pe^D P^{-1},$$

donde e^D es la matriz diagonal con entradas $e^{d_{ii}}$.

4.3 Logaritmo de matrices

4.4 Logaritmo de matriz

Si A es invertible, se define el logaritmo como

$$\log A = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(A - I)^k}{k},$$

cuando esta serie converge.

4.5 Polinomios de matrices

Para un polinomio $p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, se define

$$p(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k.$$

5 Valores y Vectores Propios

5.1 Valor propio y vector propio

$\lambda \in \mathbb{C}$ es valor propio si existe $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ con

$$Av = \lambda v.$$

5.2 Multiplicidad algebraica y geométrica

La multiplicidad algebraica de λ es su multiplicidad como raíz del polinomio característico. La geométrica es la dimensión del espacio propio asociado.

5.3 Descomposición espectral

Si A es diagonalizable, entonces

$$A = \sum_i \lambda_i P_i,$$

donde P_i son proyectores ortogonales.

6 Normas y Métricas

6.1 Norma inducida (operador)

Para una norma vectorial $\|\cdot\|$,

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

6.2 Normas comunes

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} \quad \text{(Frobenius)},$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|, \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

6.3 Número de condición

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|,$$

mide la sensibilidad numérica de la matriz.

7 Sistemas Lineales y Factorizaciones

7.1 Factorización LU

Para A invertible, existe L (inferior, unitriangular) y U (superior) tales que

$$A = LU.$$

7.2 Factorización QR

Para $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, existe Q ortogonal y R triangular superior con

$$A = QR.$$

7.3 Factorización de Cholesky

Si A es simétrica definida positiva,

$$A = LL^T,$$

con L triangular inferior.

7.4 Pseudoinversa de Moore-Penrose

La pseudoinversa A^+ es la matriz que satisface cuatro propiedades canónicas y permite resolver sistemas sobredeterminados o subdeterminados.

8 Técnicas Computacionales y Trucos

- Eliminación gaussiana con pivoteo para estabilidad numérica.
- Uso de invariantes como el rango para simplificar problemas.
- Descomposiciones para matrices dispersas (sparse).

9 Aplicaciones Avanzadas

- Matrices de adyacencia para grafos y problemas combinatorios.
- Matrices que representan transformaciones geométricas (rotaciones, reflexiones, proyecciones).
- Proyecciones ortogonales: $P = P^2 = P^T$.
- Reflexiones: $R = I - 2uu^T$ para u unitario.

Bonus: Álgebra Lineal Avanzada

9.1 Teoremas de Fredholm

Relacionan el rango de una transformación lineal con el rango de su adjunta, y las soluciones del sistema homogéneo.

9.2 Espacio dual

El espacio dual V^* es el conjunto de todas las formas lineales $f : V \to \mathbb{K}$.

9.3 Transformaciones bilineales y formas cuadráticas

Una forma bilineal es $B : V \times V \to \mathbb{K}$, lineal en cada argumento. La forma cuadrática asociada es $Q(v) = B(v, v)$.