Inferencia Estadística II, Examen I

Luis Alberto May Custodio

21 de noviembre de 2024

1. Con el fin de investigar el patrón de compra de consumidores hombres y mujeres, un grupo de investigadores reunió a un grupo de consumidores, incluyendo aleatoriamente a 25 hombres y 20 mujeres. Para calificar los intentos de compra se utilizó una escala de cinco puntos, donde:

   - 1= definitivamente no compraría el producto,
   - 2= probablemente no lo compre,
   - 3= me es indistinto comprar o no el producto,
   - 4= es probable que lo compre, y
   - 5= definitivamente compraría el producto.

   Los puntajes dados por los consumidores se presentan en la siguiente tabla, además del género (1= hombres, 2= mujeres).

ID	Genero	Puntaje	Rango	ID	Genero	Puntaje	Rango	ID	Genero	Puntaje	Rango
1	1	5	40.5	16	1	2	10.5	31	2	5	40.5
2	1	1	3.5	17	1	4	30	32	2	4	30
3	1	1	3.5	18	1	2	10.5	33	2	2	10.5
4	1	3	19.5	19	1	2	10.5	34	2	4	30
5	1	4	30	20	1	2	10.5	35	2	4	30
6	1	5	40.5	21	1	1	3.5	36	2	4	30
7	1	2	10.5	22	1	5	40.5	37	2	5	40.5
8	1	4	30	23	1	4	30	38	2	4	30
9	1	3	19.5	24	1	1	3.5	39	2	5	40.5
10	1	3	19.5	25	1	3	19.5	40	2	3	19.5
11	1	1	3.5	26	2	5	40.5	41	2	3	19.5
12	1	3	19.5	27	2	4	30	42	2	3	19.5
13	1	3	19.5	28	2	5	40.5	43	2	4	30
14	1	5	40.5	29	2	3	19.5	44	2	2	10.5
15	1	2	10.5	30	2	5	40.5	45	2	1	3.5

   a) Calcule los valores de los rangos.

   b) ¿Qué sugieren los valores observados de los rangos?

   c) ¿Cómo plantearía la hipótesis a probar, considerando que nos interesa investigar si los hombres tienden a comprar menos que las mujeres?

   d) Haga la prueba de hipótesis adecuada y comente las conclusiones.

2. **Evaluación del Rendimiento de Pruebas de Normalidad**

   En este ejercicio, evaluarás el rendimiento de cinco pruebas diferentes de normalidad: LT, CVMT, AD, SFT y SWT. Se considerarán dos situaciones:

a) **Cuando la hipótesis nula ($\mathbf{H_0}$) es verdadera:** Las pruebas evaluarán su desempeño cuando los datos provienen de una distribución normal. En este caso, el "ganador"(o el mejor) es la prueba que rechaza menos veces H_0.

b) **Cuando la hipótesis nula ($\mathbf{H_0}$) es falsa:** Las pruebas evaluarán su desempeño cuando los datos no provienen de una distribución normal. Aquí, el "ganador.es la prueba que rechaza H_0 la mayor cantidad de veces.

La descripción de la simulación es la siguiente:

- Desde una distribución F (ya sea normal o no), toma una muestra de tamaño n.
- Para cada prueba, decide si rechazas o no H_0 considerando $\alpha = 0.10$.
- Repite el proceso B veces.
- Después, crea una tabla con los resultados (proporción de rechazos o no rechazos, dependiendo de la situación (a) o (b)).
- Basándote en esta tabla, decide en cada situación quién obtiene el 1º, 2º, 3º, 4º y 5º lugar según su desempeño.

Los siguientes puntos detallan los pasos a seguir:

a) Diseña tus propios escenarios para que H_0 se cumpla o no se cumpla; es decir, cuando H_0 se cumple, las muestras provienen de una distribución normal, y cuando H_0 no se cumple, las muestras provienen de una distribución no normal.

b) Considera tres tamaños de muestra: $n = 30$, $n = 120$ y $n = 480$, y repite cada prueba $B = 10\,000$ veces.

c) Para cada situación (H_0 verdadera y H_0 falsa), y para cada n, grafica la distribución de los valores p lado a lado para propósitos de comparación. Comenta sobre la forma de la distribución de ambos conjuntos de valores p.

  - Dada una muestra de tamaño n, ¿qué forma tiene la distribución de los valores p cuando H_0 se cumple?
  - ¿Qué forma tiene la distribución de los valores p cuando H_0 no se cumple?
  - Reflexiona sobre el efecto del tamaño de la muestra en estas distribuciones, si es que existe alguno.

d) En la situación donde H_0 se cumple, ¿el ganador supera al resto de las pruebas por mucho o es una decisión reñida? ¿Qué sucede al aumentar el tamaño de la muestra? ¿Hay algún cambio importante? Intenta dar una explicación.

e) En la situación donde H_0 no se cumple, ¿el ganador supera al resto de las pruebas por mucho o es una decisión reñida? ¿Qué sucede al aumentar el tamaño de la muestra? ¿Hay algún cambio importante?

f) También verifica el desempeño de las pruebas a medida que aumenta n. En cualquier situación, ¿el ganador considerando un tamaño de muestra pequeño es el mismo que el ganador considerando un tamaño de muestra grande? ¿Cambia el orden de los ganadores cuando aumenta el tamaño de la muestra en cada situación? Intenta reflexionar sobre esto.

g) Intenta dar una conclusión general sobre cuál es la mejor prueba para no rechazar cuando no rechazar es la decisión correcta, y cuál es la mejor para rechazar cuando rechazar es la decisión correcta. Además, incluye algunos comentarios contextualizados dependiendo de los tamaños de muestra.

3. **Análisis de Normalidad de Datos**

   Utilizando los datos del archivo `normality_test.csv`, realiza lo siguiente:

   a) **Visualización de la Distribución:**

   - Realiza un histograma con la densidad normal estimada.
   - Construye la función de distribución empírica (ECF) con la distribución acumulada estimada.
   - Crea el gráfico QQ.

   Comenta sobre la posible normalidad de los datos basándote en estas visualizaciones.

   b) **Partición del Espacio y Prueba de Bondad de Ajuste:**

   - Realiza una partición adecuada del espacio, justificándola.
   - Realiza una prueba de bondad de ajuste chi-cuadrada.

   Repite el histograma y añade la partición como líneas verticales para visualizar la discrepancia entre las categorías.

   c) **Pruebas de Normalidad:**

   - Realiza una prueba de Kolmogorov-Smirnov (KS). Obtén manualmente los valores D^- y D^+.
   - Grafica dichas distancias sobre la gráfica de distribución acumulada.
   - Compara el valor de D con el resultado obtenido usando `ks.test` y `lillie.test`.
   - Además, realiza la prueba de Shapiro-Francia.
   - Concluye si hay evidencia de no normalidad y si las pruebas difieren entre sí.

4. **Pruebas Bootstrap y Monte Carlo para Gráficos QQ**

   En un gráfico QQ, se comparan los cuantiles teóricos contra los cuantiles observados. Los cuantiles observados se toman de la muestra ordenada, es decir, los cuantiles $1/n$, $2/n$, ..., n/n. Por razones teóricas, estos se comparan con los cuantiles distribucionales de probabilidades $1/(n+1)$, ..., $n/(n+1)$.

   Por ejemplo, si tenemos una muestra x de tamaño n (por ejemplo, gamma), podemos reproducir el gráfico QQ comparándola con la distribución normal de la siguiente manera:

```r
n <- 100
x <- rgamma(n, shape = 20)
df <- data.frame(x = x,theoretical_quantiles =
         qnorm((1:n) / (n + 1), mean(x), sd(x)))
```

```r
df$observed_quantiles <- sort(df$x)
library(ggplot2)
ggplot(df, aes(x = observed_quantiles, y = theoretical_quantiles
   )) +
    geom_point() +
    geom_abline(intercept = 0, slope = 1) +
    labs(x = "Cuantiles observados", y = "Cuantiles teoricos",
       title = "Grafico QQ")
```

Supón que deseas realizar una prueba de bondad de ajuste para una distribución continua utilizando el gráfico QQ. Existen dos alternativas para realizarla mediante metodologías de simulación:

a) **Alternativa Monte Carlo (MC):**
Bajo H_0, la muestra sigue una distribución F_0, de la cual se pueden simular M muestras de tamaño n. Ordena cada muestra para obtener las estadísticas de orden y luego obtén los cuantiles de cada estadístico de orden. De esta manera, tendrás un intervalo de confianza (IC) del 99 % para el gráfico QQ bajo H_0. Si los datos no están dentro de las bandas, puedes pensar que la distribución es diferente a la real.

b) **Alternativa Bootstrap:**
Realiza B muestras Bootstrap y obtén, de igual manera, las bandas Bootstrap para los estadísticos de orden. Ahora, las bandas no reflejan H_0 sino los datos observados. Por lo tanto, si la línea de identidad se sale de las bandas, tienes evidencia para rechazar H_0.

Para una muestra lognormal y una muestra gamma simulada de tamaño $n = 30$ con parámetros de tu elección, realiza pruebas de bondad de ajuste considerando una prueba para gamma y otra para lognormal utilizando ambas metodologías. Comenta tus resultados, utiliza las gráficas apropiadas y discute las diferencias entre ambas pruebas. Indica si consideras que alguna es mejor en ciertos escenarios.

5. **Análisis de Emisiones de CO2**

   Utilizando los datos disponibles aqui, realiza lo siguiente:

   a) Filtra los datos para incluir solo las observaciones desde 1930 en adelante.

   b) Remueve todas las observaciones que son 0 y todos los datos vacíos.

   c) Escoge dos países (por ejemplo, USA y Canadá) y realiza la prueba de Mann-Whitney (`mW`) para verificar si hay evidencia de que las emisiones de CO_2 en USA son estocásticamente mayores que en Canadá.

   d) En `R`, realiza los cálculos necesarios para obtener el estadístico y el valor p utilizando la aproximación normal.

   e) Compara el resultado obtenido con `wilcox.test` y comenta las diferencias, si las hay.

f) Realiza la prueba t para diferencia de medias y comenta si existe evidencia que respalde los supuestos necesarios de la prueba. En caso de que no se cumplan los supuestos, compara el resultado de la prueba de Mann-Whitney con la prueba t y con la prueba t Bootstrap.

6. **Efecto de una Dieta Especial sobre el Colesterol**

   Considera el estudio donde participantes usaron margarina Clora durante 8 semanas. Su colesterol (en mmol/L) fue medido antes de la dieta especial, después de 4 semanas y después de 8 semanas. Queremos realizar una prueba que nos indique si el estudio tuvo un efecto significativo sobre los participantes. Realiza lo siguiente:

   a) Realiza una prueba no paramétrica adecuada. Discute por qué la prueba de Mann-Whitney no es adecuada en este contexto y realiza la prueba necesaria para evaluar el efecto de la dieta.

   b) Compara los resultados obtenidos con la prueba de `wilcox.test`, usada adecuadamente, y comenta las diferencias, si las hay.

Cuadro 1: Niveles de Colesterol antes y después de 4 semanas

Sujeto	**Antes**	**Después 4 semanas**
1	6.42	5.83
2	6.76	6.20
3	6.56	5.83
4	4.80	4.27
5	8.43	7.71
6	7.49	7.12
7	8.05	7.25
8	5.05	4.63
9	5.77	5.31
10	3.91	3.70
11	6.77	6.15
12	6.44	5.59
13	6.17	5.56
14	7.67	7.11
15	7.34	6.84
16	6.85	6.40
17	5.13	4.52
18	5.73	5.13