Problema de Lagrange

El objetivo es maximizar el área A del trapecio sujeto a las restricciones geométricas.

Área del trapecio

El área A se puede expresar en términos del ángulo θ:

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$

Donde:

- $b_1 = 1$ es la base menor.
- $b_2 = 1 + 2\cos\theta$ es la base mayor.
- $h = \sin\theta$ es la altura.

Por lo tanto, el área A se convierte en:

$$A = \frac{1}{2}\left(1 + (1 + 2\cos\theta)\right)\sin\theta = (1 + \cos\theta)\sin\theta$$

Restricciones

La única restricción es que el ángulo θ debe estar en el rango de $[0, \pi]$.

Problema de Lagrange

Para maximizar el área A, planteamos el problema de Lagrange de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}(\theta, \lambda) = (1 + \cos\theta)\sin\theta + \lambda(\theta - \pi)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange.

Ecuaciones del sistema

Para encontrar los puntos críticos, derivamos $\mathcal{L}$ respecto a θ y λ y los igualamos a cero:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \cos\theta(1 + \cos\theta) + \sin\theta(-\sin\theta) + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} = \theta - \pi = 0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones resultante para encontrar los valores óptimos de θ y λ.