Problema de Lagrange

El objetivo es maximizar el área A del trapecio sujeto a las restricciones geométricas.

Área del trapecio

El área A se puede expresar en términos del ángulo θ:

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$

Donde:

- $b_1 = 1$ es la base menor.
- $b_2 = 1 + 2\cos\theta$ es la base mayor.
- $h = \sin\theta$ es la altura.

Por lo tanto, el área A se convierte en:

$$A = \frac{1}{2}\left(1 + (1 + 2\cos\theta)\right)\sin\theta = (1 + \cos\theta)\sin\theta$$

Restricciones

La única restricción es que el ángulo θ debe estar en el rango de $[0, \pi]$.

Problema de Lagrange

Para maximizar el área A, planteamos el problema de Lagrange de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}(\theta, \lambda) = (1 + \cos\theta)\sin\theta + \lambda(\theta - \pi)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange.

Ecuaciones del sistema

Para encontrar los puntos críticos, derivamos $\mathcal{L}$ respecto a θ y λ y los igualamos a cero:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \cos\theta(1 + \cos\theta) + \sin\theta(-\sin\theta) + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \theta - \pi = 0$$

Resolución del sistema

Resolvemos el sistema de ecuaciones para encontrar los valores óptimos de θ y λ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \cos\theta(1+\cos\theta) - \sin^2\theta + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \theta - \pi = 0 \implies \theta = \pi$$

Sustituyendo $\theta = \pi$ en la primera ecuación:

$$\cos(\pi)(1+\cos(\pi)) - \sin^2(\pi) + \lambda = 0$$

Dado que:

$$\cos(\pi) = -1 \quad \text{y} \quad \sin(\pi) = 0$$

Sustituimos estos valores:

$$-1(1-1) + 0 + \lambda = 0 \implies \lambda = 0$$

Conclusión

El valor óptimo de θ que maximiza el área A del trapecio es $\theta = \pi$. En este caso, el área es cero, lo que indica que hemos cometido un error en la configuración del problema con Lagrange. Es más adecuado resolver este problema utilizando la derivada del área respecto a θ como se mostró anteriormente.