Maximización del Área de un Trapecio usando el Método Analítico

Queremos maximizar el área A de un trapecio isósceles con base menor $b_1 = 1$, lados $a = 1$, y ángulo θ entre los lados y la base menor.

Definición del Área

El área A del trapecio se puede expresar como:

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$

Donde:

- $b_1 = 1$ es la base menor.
- $b_2 = 1 + 2\cos\theta$ es la base mayor.
- $h = \sin\theta$ es la altura.

Sustituyendo estos valores, obtenemos:

$$A = \frac{1}{2}\left(1 + (1 + 2\cos\theta)\right)\sin\theta = (1 + \cos\theta)\sin\theta$$

Derivada del Área

Para encontrar los puntos críticos, derivamos A respecto a θ:

$$A'(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left[(1 + \cos\theta)\sin\theta\right]$$

Usando la regla del producto, obtenemos:

$$A'(\theta) = \cos\theta(1 + \cos\theta) + \sin\theta(-\sin\theta)$$

Simplificando, tenemos:

$$A'(\theta) = \cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

Usamos la identidad trigonométrica $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta)$, entonces:

$$A'(\theta) = \cos\theta + \cos(2\theta)$$

Igualación a Cero

Para encontrar los puntos críticos, igualamos la derivada a cero:

$$\cos\theta + \cos(2\theta) = 0$$

Usamos la identidad $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$:

$$\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 = 0$$

Esto se convierte en una ecuación cuadrática:

$$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$

Resolución de la Ecuación Cuadrática

Resolvemos la ecuación cuadrática en $\cos\theta$:

$$x = \cos\theta$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

Usamos la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 2$, $b = 1$, y $c = -1$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{-4}{4} = -1$$

Descartamos $\cos\theta = -1$ porque no está en el rango $[0, \pi]$. Entonces:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

Esto corresponde a:

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Cálculo del Área Máxima

Con $\theta = \frac{\pi}{3}$:

$$h = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b_2 = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$A = \frac{1}{2}(1+2)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Así, el área máxima del trapecio es:

$$\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$