notebook

August 19, 2025

Actividad 1: Simulación Estocástica

Curso: TEMAS SELECTOS 1 (O25-LAT4032-1)
Profesor: Rubén Blancas Rivera
Alumno: Heriberto Espino
Universidad: Universidad de las Américas Puebla
Fecha: 2025-08-15 **Selection of exercises:** Pares.

1 Ejercicio

Si $x_0 = 5$ y $x_n = 2x_{n-1} \bmod 150$. Encontrar $x_1, \ldots, x_{10}$.

$$x_n = ax_{n-1} \bmod m$$

$10 = 2 * 5 \bmod 15020 = 10 * 5 \bmod 15040 = 20 * 5 \bmod 15080 = 40 * 5 \bmod 15010 = 80 * 5 \bmod 150 \vdots$

[3]:
```python
pseudoaleatorios = []

x0 = 5
a = 2
m = 150

for i in range(10):
    xn = (a * x0) % m
    x0 = xn
    pseudoaleatorios.append(xn)

print(pseudoaleatorios)
```

```
[10, 20, 40, 80, 10, 20, 40, 80, 10, 20]
```

2 Ejercicio

$$\int_0^1 \exp(e^x)\, dx$$

Sea

$$\theta = \int_0^1 \exp(e^x)\,dx.$$

Reescritura como valor esperado con $U \sim \text{Unif}(0,1)$:

$$\theta = \mathbb{E}\left[\exp(e^U)\right].$$

Estimador Monte Carlo con $u_1, \ldots, u_K \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Unif}(0,1)$:

$$\hat{\theta}_K = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} \exp(e^{u_i}).$$

[8]:
```
import numpy as np

def h(u):
    return np.exp(np.exp(u))

k = 1000

u = np.random.random(k)

h(u).mean()
```

[8]:
```
np.float64(6.229521839385485)
```

3 Ejercicio

$$\int_{-2}^{2} e^{x+x^2}\,dx$$

Sea

$$\theta = \int_{-2}^{2} e^{x+x^2}\,dx.$$

Cambio de variable a ([0,1]):

$$u = \frac{x-(-2)}{2-(-2)} = \frac{x+2}{4}, \qquad x = -2+4u, \qquad dx = 4\,du.$$

Entonces

$$\theta = \int_0^1 4\,\exp\left[(-2+4u) + (-2+4u)^2\right] du.$$

Forma de valor esperado con $U \sim \text{Unif}(0,1)$:

$$\theta = \mathbb{E}\left[g(U)\right], \qquad g(u) = 4\,\exp\left[(-2+4u) + (-2+4u)^2\right].$$

Estimador Monte Carlo:

$$\hat{\theta}_K = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} g(u_i), \qquad u_i \overset{iid}{\sim} \mathrm{Unif}(0,1).$$

[19]:
```
def h(u):
    return (b-a)*np.exp(a+(b-a)*u + (a+(b-a)*u)**2)

k = 10000
a = -2
b = 2
u = np.random.random(k)
h(u).mean()
```

[19]: `np.float64(94.60588956711096)`

4 Ejercicio

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Sea

$$\theta = \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Cambio (pág. 21):

$$y = \frac{1}{x+1}, \qquad dy = -\frac{dx}{(x+1)^2} = -y^2\,dx.$$

Entonces

$$\theta = \int_0^1 h(y)\,dy, \qquad h(y) = \frac{g\left(\frac{1}{y}-1\right)}{y^2}, \quad g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

Cálculo explícito de h:

$$x = \frac{1-y}{y} \;\Rightarrow\; h(y) = \frac{(1-y)\,y}{\left(1-2y+2y^2\right)^2}, \qquad y \in (0,1).$$

Forma de esperanza con $U \sim \mathrm{Unif}(0,1)$:

$$\theta = \mathbb{E}[\,h(U)\,].$$

Estimador Monte Carlo:

$$\hat{\theta}_K = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} h(u_i), \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Unif}(0,1).$$

Chequeo analítico:

$$\theta = \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \tfrac{1}{2}.$$

[33]:
```python
def h(u):
    return ((((1/u)-1)/(1+((1/u)-1)**2)**2))/(u**2)

k = 10000000

u = np.random.random(k)
h(u).mean()
```

[33]: np.float64(0.5000960390593421)

Sea

$$\theta = \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

1) Integral impropia:

$$\theta = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

2) Sustitución $u = 1 + x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$: cuando $x = 0 \Rightarrow u = 1$, cuando $x = b \Rightarrow u = 1 + b^2$. Entonces

$$\int_0^b \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{1+b^2} u^{-2}\,du.$$

3) Primitiva:

$$\int u^{-2}\,du = -u^{-1} + C.$$

4) Evaluación:

$$\frac{1}{2}\Big[-u^{-1}\Big]_1^{1+b^2} = \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{1+b^2} + 1\Big).$$

5) Límite:

$$\theta = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{1+b^2}\Big) = \frac{1}{2}.$$

(Equivalente por antiderivación directa: $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2(1+x^2)} + C$, y luego $\theta = \lim_{b\to\infty}\big[-\frac{1}{2(1+x^2)}\big]_0^b = \frac{1}{2}$.)

5 Ejercicio

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{(x+y)^2}\,dy\,dx$$

[39]:
```python
def h(u1, u2):
    return 1/4 * np.exp((u1 + u2)**2)

k = 10000
```

```
u1 = np.random.random(k)
u2 = np.random.random(k)
h(u1, u2).mean()
```

[39]: np.float64(1.2140555137345483)

[ ]:
```
# plot in 3d
```

6 Ejercicio 11

Usar simulación para aproximar $\mathrm{Cov}(U, e^U)$, donde $U \sim \mathcal{U}(0,1)$. Comparar con la respuesta exacta.

[47]:
```
def valor_esperado_1(u):
    return u * np.exp(u)

def valor_esperado_2(u):
    return u

def valor_esperado_3(u):
    return np.exp(u)

k = 1000000

u = np.random.random(k)

valor_esperado_1(u).mean() - valor_esperado_2(u).mean() * valor_esperado_3(u).
 ↪mean()
```

[47]: np.float64(0.1409069042870994)

[48]:
```
1 - 1/2*(np.e -1)
```

[48]: 0.14085908577047745

6.1 Ejercicio 13

Para variables aleatorias uniformes $U_1, U_2, \ldots$ definir

$$N = \min\left\{n : \sum_{i=1}^{n} U_i > 1\right\}.$$

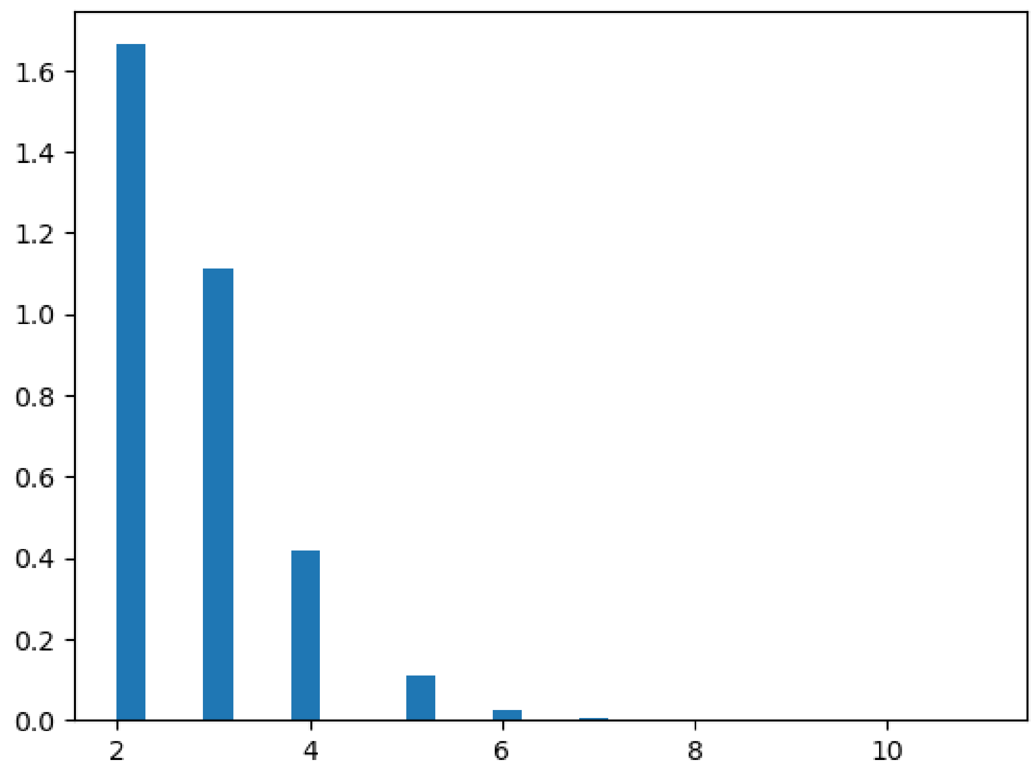
Estimar $\mathbb{E}[N]$ por simulación con: a) 100 valores, b) 1000 valores, c) 10000 valores, d) Discutir el valor esperado.

[ ]:
```
def minimo_N(k):
    lista_contadores = []
    for _ in range(k):
        suma = 0
        contador = 0
```

```python
        while suma < 1:
            contador += 1
            suma += np.random.random()
        lista_contadores.append(contador)
    return lista_contadores
```

[89]:
```python
lista_para_dist = minimo_N(1000000)
```

[90]:
```python
import matplotlib.pyplot as plt
plt.hist(lista_para_dist, bins=30, density=True)
plt.show()
```



[80]:
```python
minimo_N(1_000)
```

[80]: np.float64(2.725)

[81]:
```python
minimo_N(10_000)
```

[81]: np.float64(2.7227)

[ ]:
```python

```

```
---------------------------------------------------------------------------
KeyboardInterrupt                         Traceback (most recent call last)
Cell In[82], line 1
----> 1 minimo_N(1000000000)

Cell In[58], line 6, in minimo_N(k)
      4 suma = 0
      5 contador = 0
----> 6 while suma < 1:
      7     contador += 1
      8     suma += np.random.random()

KeyboardInterrupt:
```