Números Aleatorios

Universidad de las Américas Puebla

Dr. Rubén Blancas Rivera

Universidad de las Américas Puebla
Departamento de Actuaría, Física y Matemáticas

Otoño 2025

Temas

Introducción

Introducción

- La simulación es una herramienta poderosa ampliamente utilizada en las ciencias actuales para analizar problemas complejos.
- La idea básica de la simulación es reproducir artificialmente un fenómeno.
- El inicio de la simulación estocástica se remonta a 1940, cuando John Von Neumann y Stanislaw Marcin Ulam trabajando en problemas matemáticos relativos a la física nuclear, cuya solución analítica era intratable y la solución de manera experimental resultaba muy costosa, acuñaron el término **Análisis de Monte Carlo**.

Introducción

- La Simulación Estocástica en la actualidad, consiste en resolver un problema determinista simulando computacionalmente algún proceso estocástico cuyas características probabilistas satisfacen las condiciones matemáticas del problema original.
- En palabras más simples: con la ayuda de una computadora, se recrean condiciones aleatorias para analizar a una cierta dinámica o fenómeno determinista, y se analizan los resultados computacionales obtenidos.

Definición de simulación estocástica

Definir formalmente al concepto de *Simulación* no es una tarea sencilla. Shannon R. (1975) la define como el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y realizar experimento con éste para entender su comportamiento. Una definición formal fue propuesta por Churchman C. (1963)

Definición 3

X simula a Y si:

1. X e Y son sistema formales.
2. Y se considera un sistema real.
3. X es una aproximación de tal sistema real.
4. La validez de X no está exente de error.

Números pseudoaleatorios

Generación de números pseudoaleatorios

Al principio, los números aleatorios se generaban en forma manual o mecánica, utilizando técnicas como:

- ruedas giratorias
- lanzamiento de dados
- barajas

el planteamiento moderno consiste en utilizar una computadora para generar de manera sucesiva números pseudoaleatorios.

Método Congruencial

Uno de los métodos más comunes para generar números pseudoaleatorios comienza con un valor inicial x_0, llamado semilla, y luego se calcula de manera recursiva los valores sucesivos x_n, $n \geq 1$, haciendo

$$x_n = ax_{n-1} \text{ módulo } m$$

donde a y m son eneteros positivos dados y lo anterior significa que ax_{n-1} se divide entre m y el residuo se considera como el valor de x_n.

Método Congruencial

Cada x_n es 0,1,...,$m-1$ y la cantidad x_n/m (llamada número pseudoaleatorio) se considera como una aproximación del valor de una variable aleatoria uniforme en $(0,1)$.

Ejemplo

Sea $a=3$ y $m=5$, con $x_0=4$

- Se tiene que después de cierto número finito (a lo más m) de valores generados, alguno debe repetirse.

En general, las constantes a y m deben satisfacer tres criterios:

1. Para cualquier semilla inicial, la sucesión resultante tiene la apariencia de ser una sucesión de variables aleatorias independientes y uniformes en $(0, 1)$.
2. Para cualquier semilla inicial, el número de variables que se pueden generar antes de que comience la repetición es grande.
3. Los valores se pueden calcular de manera eficiente en una computadora digital.

Excel

- `=RAND()` Genera un número decimal entre 0 y 1.
- `=RANDBETWEEN(inferior, superior)` Genera un número entero entre los valores dados.
  - Ejemplo: `=RANDBETWEEN(1, 10)`

R y Python

En R

- `runif(0,1,0)`

En Python

- random.random()
- np.random.random()

Uso de números aleatorios para evaluar integrales

Uso de números aleatorios para evaluar integrales

Una de las primeras aplicaciones de los números aleatorios fue en el cálculo de integrales. Sea $g(x)$ una función y supongamos que queremos calcular θ, donde

$$\theta = \int_0^1 g(x)dx$$

Uso de números aleatorios para evaluar integrales

Una de las primeras aplicaciones de los números aleatorios fue en el cálculo de integrales. Sea $g(x)$ una función y supongamos que queremos calcular θ, donde

$$\theta = \int_0^1 g(x)dx$$

Para calcular el valor de θ note que si U está distribuida uniformemente en $(0, 1)$, entonces podemos expresar como

$$\theta = \mathbb{E}[g(U)]$$

Uso de números aleatorios para evaluar integrales

Si $U_1, ..., U_k$ son variables aleatorias independientes y uniformes en $(0, 1)$, esto implica que $g(U_1), ..., g(U_k)$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media θ.

Uso de números aleatorios para evaluar integrales

Si $U_1, ..., U_k$ son variables aleatorias independientes y uniformes en $(0, 1)$, esto implica que $g(U_1), ..., g(U_k)$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media θ. Por la Ley Fuerte de los Grandes Números, se tiene, con probabilidad 1,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{g(U_i)}{k} \to \mathbb{E}[g(U)] = \theta \;\; cuando \;\; k \to \infty. \tag{1}$$

Uso de números aleatorios para evaluar integrales

Si $U_1, ..., U_k$ son variables aleatorias independientes y uniformes en $(0, 1)$, esto implica que $g(U_1), ..., g(U_k)$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media θ. Por la Ley Fuerte de los Grandes Números, se tiene, con probabilidad 1,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{g(U_i)}{k} \rightarrow \mathbb{E}[g(U)] = \theta \ \ \textit{cuando} \ \ k \rightarrow \infty. \tag{1}$$

Por lo tanto, podemos aproximar θ generando un gran número de números aleatorios u_i y considerando como nuestra aproximación a θ el valor promedio de $g(u_i)$. Este método de aproximación de integrales es el método **Método Monte Carlo.**

Aproximación de Integrales por Monte Carlo

Algoritmo

Entrada: función $g(x)$, número de muestras k
Salida: estimación θ

$S \leftarrow 0$
Para $i = 1$ hasta k **hacer**:

- Generar $u_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$
- $S \leftarrow S + g(u_i)$

Fin Para

$\theta \leftarrow \dfrac{S}{k}$
Devolver: θ

Ejemplo

Usar el Método Monte Carlo para aproximar la siguiente integral:

$$\theta = \int_0^1 \exp(e^x)dx$$

Use los siguientes números pseudoaleatorios: 0.7284, 0.1539, 0.5872, 0.9126, 0.3467

Más general

Si queremos resolver

$$\theta = \int_a^b g(x)dx$$

entonces, haciendo el cambio de variable

$$y = (x-a)/(b-a), dy = dx/(b-a)$$

vemos que

$$\begin{aligned}\theta &= \int_0^1 g(a+[b-a]y)(b-a)dy \\ &= \int_0^1 h(y)dy\end{aligned}$$

donde $h(y) = (b-a)g(a+(b-a)y)$.

Ejemplo

Usar el Método Monte Carlo para aproximar la siguiente integral:

$$\theta = \int_{-2}^{2} e^{x+x^2} dx$$

Usar los siguientes números pseudoaleatorios 0.6834,0.2917,0.9572,0.1346,0.7481.

Más General

Si queremos encontrar

$$\theta = \int_0^\infty g(x)dx$$

aplicando el cambio de variable $y = 1/(x+1)$, $dy = -dx/(x+1)^2 = -y^2 dx$ así

$$\theta = \int_0^1 h(y)dy$$

donde $h(y) = \frac{g(\frac{1}{y}-1)}{y^2}$

Integrales múltiples

La utilidad de usar números aleatorios para aproximar integrales se vuelve más evidente en el caso de las integrales multidimensionales.

Supongamos que g es una función con un argumento n-dimensional y que estamos interesados en calcular

$$\theta = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1, ..., x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

Integrales múltiples

La clave del enfoque de Monte Carlo para estimar θ radica en el hecho de que θ puede expresarse como la siguiente esperanza matemática:

$$\theta = \mathbb{E}[g(U_1, \ldots, U_n)]$$

donde $U_1, \ldots, U_n$ son variables aleatorias independientes $\mathcal{U}(0, 1)$.

Integrales múltiples

Generamos k conjuntos independientes, cada conjunto consiste de n variables variables aleatorias uniformes $(0, 1)$:

$$
\begin{gathered}
U_1^1, \cdots U_n^1 \\
U_1^2, \cdots U_n^2 \\
\vdots \\
U_1^k, \cdots, U_n^k
\end{gathered}
$$

entonces, ya que las variables aleatorias $g(U_1^i, \cdots, U_n^i)$, $i = 1, ..., k$, son todas independientes e idénticamente distribuidas con media θ, podemos estimar

$$\sum_{i=1}^{k} g(U_1^i, \cdots, U_n^i)/k.$$

Estimación π

Supongamos que el vector aleatorio (X, Y) tiene una distribución uniforme en el cuadrado de área 4 centrado en el origen.

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } -1 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Estimación de π

Estimación de π

Ahora consideramos la probabilidad que este vector aleatorio (X, Y) en el cuadrado está contenido dentro del círculo inscrito de radio 1.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}[(X, Y) \text{ este en el círculo}] \\
&= \mathbb{P}[X^2 + Y^2 \leq 1] = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2} \frac{1}{4} dxdy = \frac{\pi}{4} = \frac{\text{Áre del círculo}}{\text{Área del cuadrado}}
\end{aligned}
$$

Estimación de π

Vamos a estimar $p = \mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

- Observe $X \sim \mathcal{U}(-1, 1)$ y $Y \sim \mathcal{U}(-1, 1)$.
- Si tomamos $U_1 \sim \mathcal{U}(0, 1)$ y $U_2 \sim \mathcal{U}(0, 1)$, entonces $X = 2U_1 - 1$ y $Y = 2U_2 - 1$.
- Considere

$$I = \begin{cases} 1 & \text{si } X^2 + Y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Observe que $I \sim Ber(p)$.
- $\frac{\pi}{4} = p = E[I] \approx \frac{\#:(2u_1-1)^2+(2u_2-1)^2\leq 1}{k}$, k repeticiones.

Estimación de π

Algoritmo

Entrada: número de puntos k
Salida: estimación de π

Contador $\leftarrow 0$
Para $i = 1$ **hasta** k **hacer**:

- Generar $u_1 \sim \text{Uniform}(0, 1)$
- Generar $u_2 \sim \text{Uniform}(0, 1)$
- **Si** $(2u_1 - 1)^2 + (2u_2 - 1)^2 \leq 1$ **entonces**:
  - Contador $\leftarrow$ Contador + 1

Fin Para

Devolver: $\pi \approx 4 \times \dfrac{\text{Contador}}{k}$