Métodos de Generación de Variables Aleatorias Normales

Temas Selectos I

Dr. Rubén Blancas Rivera

Universidad de las Américas Puebla

Otoño 2025

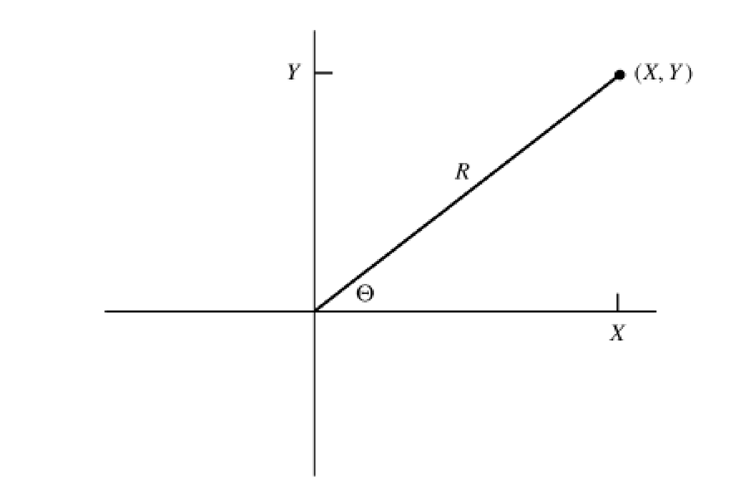
Content

Método de Box y Muller

Sean X y Y variables aleatorias normales estándar independientes y sea (R, Θ) la representación en coordenadas polares del vector (X, Y). Es decir

$$R^2 = X^2 + Y^2, \qquad \tan \Theta = \frac{Y}{X}.$$

Método de Box y Muller



Método de Box y Muller

- El método de Box y Muller, es un mecanismo para producir valores de la distribución $\mathcal{N}(0,1)$.

Sean X y Y dos variables aleatorias independientes, ambas con distribución normal estándar, es decir, su función de densidad conjunta es

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right), \qquad -\infty < x, y < \infty.$$

Método de Box y Muller

El método de Box y Muller está basado en la transformación de $\mathbb{R}^2$ que lleva las coordenadas cartesianas a coordenadas polares:

$$(r, \theta) = \varphi(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \tan^{-1}\left(\tfrac{y}{x}\right)\right), \qquad x \neq 0.$$

Método de Box y Muller

Usando el teorema de cambio de variable para vectores aleatorios, puede comprobarse que la función de densidad del vector aleatorio $(R, \Theta) = \varphi(X, Y)$ es

$$f(r, \theta) = \frac{r}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right), \qquad r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi).$$

Método de Box y Muller

Usando el teorema de cambio de variable para vectores aleatorios, puede comprobarse que la función de densidad del vector aleatorio $(R, \Theta) = \varphi(X, Y)$ es

$$f(r, \theta) = \frac{r}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right), \qquad r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi).$$

Está claro que generar un valor de la función de densidad $f(x, y)$ es equivalente a generar un valor de la función de densidad $f(r, \theta)$.

Método de Box y Muller

Veremos una forma de obtener valores (r, θ) de la función de densidad $f(r, \theta)$. De la expresión para $f(r, \theta)$, se desprenden las siguientes afirmaciones:

a) Las variables aleatorias R y Θ son independientes.

b) El ángulo Θ tiene función de densidad uniforme en $[0, 2\pi)$.

c) El radio R tiene función de densidad

$$f_R(r) = r\, e^{-r^2/2}, \qquad r \geq 0.$$

Método de Box y Muller

Estos resultados ayudan a obtener valores del vector (R, Θ). Para el ángulo Θ, podemos tomar una variable aleatoria $V \sim \text{Unif}(0, 1)$ y expresarla como

$$\Theta = 2\pi V.$$

Método de Box y Muller

Para el radio R, se puede usar el método de la función inversa para producir sus valores. Primero calculamos su función de distribución La función de distribución acumulada es

$$F_R(r) = \mathbb{P}(R \leq r) = \int_0^r f_R(t)\,dt = \int_0^r te^{-t^2/2}\,dt.$$

Hacemos el cambio de variable:

$$u = \frac{t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad du = t\,dt,$$

con lo cual, cuando $t = 0 \implies u = 0$, y cuando $t = r \implies u = \frac{r^2}{2}$.

Método de Box y Muller

Así, la integral se transforma en

$$F_R(r) = \int_0^{r^2/2} e^{-u}\, du.$$

Evaluando,

$$F_R(r) = \left[-e^{-u}\right]_0^{r^2/2} = \left(-\, e^{-r^2/2}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-r^2/2}.$$

Método de Box y Muller

Por lo tanto,

$$F_R(r) = 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right), \qquad r \geq 0.$$

Método de Box y Muller

Por lo tanto,

$$F_R(r) = 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right), \qquad r \geq 0.$$

Así la función inversa

$$F_R^{-1}(u) = \sqrt{-2\ln(1-u)}, \qquad 0 < u < 1.$$

Por lo tanto, si $U \sim \text{Unif}(0,1)$, entonces R se puede expresar como

$$R = \sqrt{-2\ln U}.$$

Método de Box y Muller

Generado un valor de (R, Θ) se puede obtener un valor de (X, Y) regresando a coordenadas cartesianas,

$$(X, Y) = \varphi^{-1}(R, \Theta) = (R \cos \Theta,\ R \sin \Theta).$$

Método de Box y Muller

Proposición (Método de Box y Muller)

Sean U y V dos variables aleatorias independientes, cada una con distribución Unif$(0,1)$. Las variables del vector aleatorio (X,Y) especificado abajo son independientes y tienen distribución $\mathcal{N}(0,1)$.

$$(X,Y) := \sqrt{-2\ln U}\,\big(\cos(2\pi V),\, \sin(2\pi V)\big).$$

Método de Box y Muller

Finalmente, recordemos que si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, entonces la transformación

$$\sigma X + \mu$$

tiene distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Método de Box y Muller

Ahora podemos generar un par de variables aleatorias normales estándar independientes X y Y utilizando el Método de Box y Muller para generar primero sus coordenadas polares y luego transformarlas de regreso a coordenadas rectangulares. Esto se realiza de la siguiente manera:

1. Generar números aleatorios U_1 y U_2.
2. Calcular

$$R^2 = -2 \ln U_1 \quad \text{(y por lo tanto } R^2 \text{ es exponencial con media 2)},$$

$$\Theta = 2\pi U_2 \quad \text{(y por lo tanto } \Theta \text{ es uniforme entre } 0 \text{ y } 2\pi\text{)}.$$

3. Definir

$$X = R\cos\Theta = \sqrt{-2\ln U_1}\,\cos(2\pi U_2),$$

$$Y = R\sin\Theta = \sqrt{-2\ln U_1}\,\sin(2\pi U_2).$$

Método de Marsaglia

- Este es otro procedimiento para generar valores de la distribución normal.
- Fue propuesto por G. Marsaglia y T. A. Bray en 1964.
- El método está basado en el siguiente resultado.

Método de Marsaglia

Proposición

Sea (U, V) un vector aleatorio con distribución uniforme sobre el disco unitario

$$\{(u, v) : 0 < u^2 + v^2 < 1\},$$

omitiendo el origen. Sea

$$S = U^2 + V^2.$$

Entonces, el vector (X, Y) especificado abajo está compuesto por variables aleatorias independientes, cada una con distribución $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$(X, Y) := \left(U\sqrt{\frac{-2\ln S}{S}}, V\sqrt{\frac{-2\ln S}{S}} \right).$$