Método de Aceptación y Rechazo

Temas Selectos I

Dr. Rubén Blancas Rivera

Universidad de las Américas Puebla

Otoño 2025

esta diapo es cuando es dificil encontrar la inversa. eg: normal, gamma (suma de exponenciales)

Content

Introducción

- Supongamos que tenemos un método eficiente para simular una variable aleatoria con función de masa de probabilidad $\{q_j,\ j \geq 0\}$.
- Podemos usar este método como base para simular de la distribución con función de masa $\{p_j,\ j \geq 0\}$ simulando primero una variable aleatoria Y con función de masa $\{q_j\}$ y luego aceptando este valor simulado con una probabilidad proporcional a $\frac{p_Y}{q_Y}$.

Introducción

- Específicamente, sea c una constante tal que

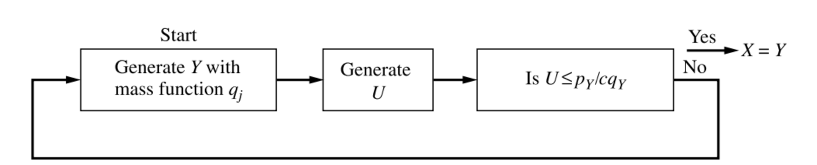
$$\frac{p_j}{q_j} \leq c \quad \text{para todo } j \text{ tal que } p_j > 0.$$

- Ahora tenemos la siguiente técnica, llamada *método de rechazo* o *método de aceptación–rechazo*, para simular una variable aleatoria X con función de masa $p_j = \mathbb{P}\{X = j\}$.

Introducción

Método de Rechazo

1. Simule el valor de Y, con función de masa de probabilidad q_j.
2. Genere un número aleatorio $U \sim \text{Unif}(0,1)$.
3. Si
$$U < \frac{p_Y}{c\, q_Y},$$
entonces fije $X = Y$ y detenga el procedimiento. En caso contrario, regrese al Paso 1.


Start
Generate Y with mass function q_j
Generate U
Is $U \leq p_Y / c q_Y$
Yes
$X = Y$
No

Introducción

Teorema

El algoritmo de aceptación–rechazo genera una variable aleatoria X tal que

$$\mathbb{P}\{X = j\} = p_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Además, el número de iteraciones del algoritmo necesarias para obtener X es una variable aleatoria geométrica con media c.

Prueba.

Para comenzar, determinemos la probabilidad de que una sola iteración produzca el valor aceptado j. Nótese que

$$\mathbb{P}\{Y = j \text{ y es aceptado}\} = \mathbb{P}\{Y = j\}\,\mathbb{P}\{\text{aceptar} \mid Y = j\}.$$

Así,

$$\mathbb{P}\{Y = j \text{ y es aceptado}\} = q_j \cdot \frac{p_j}{cq_j} = \frac{p_j}{c}.$$

Prueba

Sumando sobre todos los valores j obtenemos la probabilidad de que una variable generada sea aceptada:

$$\mathbb{P}\{\text{aceptado}\} = \sum_j \frac{p_j}{c} = \frac{1}{c}.$$

Como cada iteración resulta, de manera independiente, en un valor aceptado con probabilidad $1/c$, se deduce que el número de iteraciones necesarias sigue una distribución geométrica con media c.

Prueba

Además,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X = j\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{j \text{ aceptado en la iteración } n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (1 - 1/c)^{n-1} \frac{p_j}{c} \\
&= p_j .
\end{aligned}$$

Observación

Observación

Observe que la manera en que "aceptamos el valor Y con probabilidad $\frac{p_Y}{cq_Y}$" es generando un número aleatorio U y aceptando Y si

$$U \leq \frac{p_Y}{cq_Y}.$$

Ejemplo

Supongamos que queremos simular el valor de una variable aleatoria X que toma uno de los valores $1, 2, \ldots, 10$ con probabilidades respectivas

$$0.11,\ 0.12,\ 0.09,\ 0.08,\ 0.12,\ 0.10,\ 0.09,\ 0.09,\ 0.10,\ 0.10.$$

Ejemplo

- Una posibilidad sería usar el algoritmo de la transformada inversa.
- Otra alternativa es aplicar el *método de rechazo* con q la densidad uniforme discreta en $\{1, \ldots, 10\}$. Es decir,

$$q_j = \frac{1}{10}, \quad j = 1, \ldots, 10.$$

Ejemplo

Para esta elección de $\{q_j\}$, podemos elegir c de la siguiente forma:

$$c = \max_j \frac{p_j}{q_j} = 1.2.$$

Ejemplo

Por lo tanto, el algoritmo sería el siguiente:

1. Genere un número aleatorio $U_1 \sim \text{Unif}(0,1)$ y fije
$$Y = \text{Int}(10U_1) + 1.$$
2. Genere un segundo número aleatorio $U_2 \sim \text{Unif}(0,1)$.
3. Si
$$U_2 \leq \frac{p_Y}{0.12},$$
entonces fije $X = Y$ y detenga el procedimiento. En caso contrario, regrese al Paso 1.

Ejemplo

La constante 0.12 en el Paso 3 surge porque

$$cq_Y = \frac{1.2}{10} = 0.12.$$

Ejemplo

La constante 0.12 en el Paso 3 surge porque

$$cq_Y = \frac{1.2}{10} = 0.12.$$

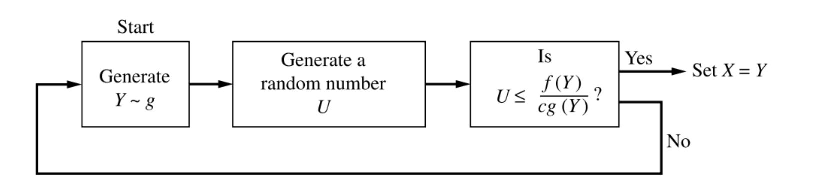
- El poder del método de rechazo, una versión del cual fue propuesta inicialmente por el famoso matemático John von Neumann, se hará aún más evidente cuando consideremos su análogo para la generación de variables aleatorias continuas.

Introducción

Supongamos que tenemos un método para generar una variable aleatoria con función de densidad $g(x)$. Podemos usarlo como base para generar de la distribución continua con función de densidad $f(x)$, generando $Y \sim g$ y luego aceptando este valor generado con una probabilidad proporcional a

$$\frac{f(Y)}{g(Y)}.$$

El Método



Start
Generate
$Y \sim g$
Generate a
random number
U
Is
$U \leq \dfrac{f(Y)}{cg(Y)}$?
Yes
Set $X = Y$
No

El Método

Específicamente, sea c una constante tal que

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq c \quad \text{para todo } y.$$

Entonces tenemos la siguiente técnica (ilustrada en la Figura 5.1) para generar una variable aleatoria con función de densidad f.

Algoritmo

Método de Rechazo (caso continuo)

1. Genere Y con densidad g.
2. Genere un número aleatorio $U \sim \text{Unif}(0,1)$.
3. Si
$$U \leq \frac{f(Y)}{c\,g(Y)},$$
entonces fije $X = Y$. En caso contrario, regrese al Paso 1.

Algoritmo

- Observe que el método de rechazo es exactamente el mismo que en el caso de variables aleatorias discretas, con la única diferencia de que aquí las densidades reemplazan a las funciones de probabilidad.
- De la misma manera que en el caso discreto, podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema

Theorem

(i) *La variable aleatoria generada por el método de rechazo tiene densidad f.*

(ii) *El número de iteraciones necesarias del algoritmo es una variable aleatoria geométrica con media c.*

Comentarios

- Al igual que en el caso discreto, debe notarse que la manera en que se acepta el valor Y con probabilidad

$$\frac{f(Y)}{c\,g(Y)}$$

es generando un número aleatorio $U \sim \mathrm{Unif}(0, 1)$ y aceptando Y si

$$U \leq \frac{f(Y)}{c\,g(Y)}.$$

Beta

Usemos el método de rechazo para generar una variable aleatoria con densidad

$$f(x) = 20\,x(1-x)^3, \qquad 0 < x < 1.$$

Dado que esta variable aleatoria (que es *beta* con parámetros $(2,4)$) está concentrada en el intervalo $(0,1)$, elegimos como propuesta la uniforme en $(0,1)$:

$$g(x) = 1, \qquad 0 < x < 1.$$

Beta

Para hallar c tal que $\frac{f(x)}{g(x)} \leq c$ para todo $x \in (0,1)$, maximizamos $f(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left[x(1-x)^3\right] = (1-x)^2(1-4x) = 0 \;\Rightarrow\; x^\star = \tfrac{1}{4},$$

y entonces

$$c = \max_{0<x<1} f(x) = f\left(\tfrac{1}{4}\right) = 20\left(\tfrac{1}{4}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right)^3 = \frac{135}{64}.$$

Beta

El algoritmo de rechazo queda:

1. Genere $Y \sim \mathrm{Unif}(0,1)$.
2. Genere $U \sim \mathrm{Unif}(0,1)$ independiente.
3. Si

$$U \leq \frac{f(Y)}{c\,g(Y)} = \frac{20\,Y(1-Y)^3}{135/64} = \frac{1280}{135}\,Y(1-Y)^3,$$

   acepte y ponga $X = Y$; en caso contrario, regrese al paso 1.

La probabilidad de aceptación es $1/c = 64/135$ (media geométrica $c = 135/64$).

Variable Aleatoria Gamma

Supongamos que queremos generar una variable aleatoria con densidad gamma

$$f(x) = K\,x^{1/2}e^{-x}, \qquad x > 0,$$

donde $K = \frac{1}{\Gamma(3/2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ (esto es, $X \sim \mathrm{Gamma}(3/2, 1)$).

Variable Aleatoria Gamma

Como el soporte está concentrada en el eje positivo y $\mathbb{E}[X] = 3/2$, es natural usar el método de rechazo con una propuesta exponencial de la misma media. Tomemos

$$g(x) = \frac{2}{3}\,e^{-2x/3}, \qquad x > 0.$$

Entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{K\,x^{1/2}e^{-x}}{(2/3)e^{-2x/3}} = \frac{3K}{2}\,x^{1/2}e^{-x/3}.$$

Variable Aleatoria Gamma

Para maximizar esta razón, derivamos y anulamos la derivada (equivalentemente, maximizamos $\log r(x) = \frac{1}{2}\log x - \frac{x}{3}$):

$$\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}\log x - \tfrac{x}{3}\right) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{3} = 0 \implies x^{\star} = \frac{3}{2}.$$

Así,

$$c = \max_{x>0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3K}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} e^{-1/2} = \frac{3^{3/2}}{\sqrt{2\pi e}} = 3\sqrt{\frac{3}{2\pi e}}.$$

De aquí,

$$\frac{f(x)}{c\,g(x)} = \sqrt{\frac{2e}{3}}\, x^{1/2} e^{-x/3}.$$

Variable Aleatoria Gamma

Algoritmo (rechazo).

1. Genere $U_1 \sim \mathrm{Unif}(0,1)$ y ponga $\quad Y = -\frac{3}{2}\log U_1 \quad$ (entonces $Y \sim \mathrm{Exp}(2/3)$).
2. Genere $U_2 \sim \mathrm{Unif}(0,1)$ independiente.
3. Si
$$U_2 < \sqrt{\frac{2eY}{3}}\, e^{-Y/3},$$
acepte y fije $X = Y$; en caso contrario, regrese al paso 1.

Variable Aleatoria Gamma

Eficiencia. La probabilidad de aceptación es $1/c = \frac{\sqrt{2\pi e}}{3^{3/2}} \approx 0.796$ y el número de iteraciones requerido es geométrico con media

$$c = 3\sqrt{\frac{3}{2\pi e}} \approx 1.257.$$

Generalización

Supongamos que queremos generar una v.a. con densidad

$$f(x) = K\, e^{-\lambda x}\, x^{\alpha-1}, \qquad x > 0,$$

donde $\lambda > 0$, $\alpha > 0$ y $K = \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ (distribución Gamma(α, λ)).

Generalización

- La anterior es la función de densidad de una variable aleatoria gamma con parámetros α y λ, y se sabe que su media es α/λ.
- Supongamos que planeamos generar este tipo de variable aleatoria mediante el método de rechazo, basado en la densidad exponencial con tasa μ.
- Entonces,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Ke^{-\lambda x}x^{\alpha-1}}{\mu e^{-\mu x}} = \frac{K}{\mu}x^{\alpha-1}e^{(\mu-\lambda)x}.$$

Generalización

Observamos que cuando $0 < \alpha < 1$ se cumple que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty,$$

lo que muestra que en este caso no puede utilizarse la técnica de rechazo con una exponencial.

Generalización

Dado que la densidad gamma se reduce a la exponencial cuando $\alpha = 1$, supongamos ahora que $\alpha > 1$.
Entonces, cuando $\mu < \lambda$ se cumple que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty,$$

y por lo tanto podemos restringir nuestra atención a valores de μ estrictamente menores que λ.

Generalización

Con tal valor de μ, el número medio de iteraciones del algoritmo que se requerirá es

$$c(\mu) = \max_{x>0} \frac{f(x)}{g(x)} = \max_{x>0} \frac{K}{\mu} x^{\alpha-1} e^{(\mu-\lambda)x}.$$

Generalización

Para obtener el valor de x en el cual ocurre el máximo anterior, derivamos y lo igualamos a cero:

$$0 = (\alpha - 1)\, x^{\alpha-2} e^{(\mu-\lambda)x} - (\lambda - \mu)\, x^{\alpha-1} e^{(\mu-\lambda)x}.$$

De aquí se obtiene que el máximo ocurre en

$$x = \frac{\alpha - 1}{\lambda - \mu}.$$

Generalización

Sustituyendo de nuevo se obtiene que

$$c(\mu) = \frac{K}{\mu}\left(\frac{\alpha-1}{\lambda-\mu}\right)^{\alpha-1} e^{(\mu-\lambda)\frac{\alpha-1}{\lambda-\mu}} = \frac{K}{\mu}\left(\frac{\alpha-1}{\lambda-\mu}\right)^{\alpha-1} e^{1-\alpha}.$$

Generalización

Por lo tanto, el valor de μ que minimiza $c(\mu)$ es aquel que maximiza

$$\mu(\lambda - \mu)^{\alpha - 1}.$$

La derivada es

$$\frac{d}{d\mu}\left[\mu(\lambda - \mu)^{\alpha-1}\right] = (\lambda - \mu)^{\alpha-1} - (\alpha - 1)\mu(\lambda - \mu)^{\alpha-2}.$$

Generalización

Igualando la expresión anterior a cero se obtiene que el mejor valor de μ satisface

$$\lambda - \mu = (\alpha - 1)\mu,$$

o equivalentemente,

$$\mu = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Es decir, la exponencial que minimiza el número medio de iteraciones necesarias en el método de rechazo para generar una variable gamma con parámetros α y λ tiene la misma media que la gamma; a saber,

$$\frac{\alpha}{\lambda}.$$