Universidad de las Américas Puebla

Departamento de Actuaría, Física y Matemáticas

Temas Selectos I: Simulación Estocástica

Actividad 2.1

Instrucciones

Resuelva cuidadosamente cada uno de los siguientes ejercicios. Justifique sus respuestas y, cuando corresponda, incluya simulaciones o gráficas de apoyo.

Ejercicio 1. Demuestre el siguiente resultado que fue utilizado en la derivación del método de Box y Muller. Si (X, Y) es un vector aleatorio continuo con función de densidad

$$f(x, y) \;=\; \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)\right\}, \qquad -\infty < x, y < \infty,$$

entonces el vector

$$(R, \Theta) \;=\; \left(\sqrt{X^2 + Y^2},\, \tan^{-1}(Y/X)\right), \qquad X \neq 0,$$

tiene función de densidad

$$f(r, \theta) \;=\; \frac{r}{2\pi} \exp\left\{-\tfrac{r^2}{2}\right\}, \qquad (r, \theta) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi].$$

Ejercicio 2. Demuestre que si $W \sim \exp(\lambda)$ con $\lambda = \frac{1}{2}$, entonces la variable

$$R = \sqrt{W}$$

tiene la función de densidad $f(r)$ que aparece abajo. Esta es la función de densidad de la variable aleatoria R que aparece en el método de Box y Muller.

$$f(r) = r \exp\left\{-\tfrac{r^2}{2}\right\}, \qquad r \geq 0.$$

Por el método de la función inversa, un valor de W se puede expresar como

$$W = -2 \ln u,$$

en donde u es un valor de la distribución Unif$(0, 1)$. De modo que un valor de R es

$$R = \sqrt{-2 \ln u}.$$

Esta es una expresión equivalente a la indicada en el método de Box y Muller.

Ejercicio 3. Utilizando el método de Box y Muller, elabore un programa de cómputo para generar 1000 valores de una variable aleatoria con distribución

$$N(\mu, \sigma^2),$$

con valores para μ y σ^2 de su elección. Elabore un histograma con los valores obtenidos.

Ejercicio 4. Considere el método del cociente de uniformes para generar valores de una variable aleatoria con función de densidad

$$h(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Determine analíticamente y muestre en un plano la región asociada $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Compruebe que $|S| = 1/2$.

(b) Elabore un programa de cómputo para generar 500 valores de la densidad $h(x)$.

(c) Elabore un histograma (frecuencias relativas) de los datos obtenidos y en la misma gráfica dibuje la función $h(x)$.

Ejercicio 5. Distribución Cauchy estándar. Aplique el método del cociente de uniformes para generar valores de una variable aleatoria con distribución Cauchy estándar, cuya función de densidad es

$$h(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

(a) Determine analíticamente y muestre en un plano la región asociada $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Compruebe que $|S| = 1/2$.

(b) Elabore un programa de cómputo para generar 500 valores de la densidad $h(x)$.

(c) Elabore un histograma (frecuencias relativas) de los datos obtenidos y en la misma gráfica dibuje la función $h(x)$.

Ejercicio 6. Distribución doble exponencial. Aplique el método del cociente de uniformes para generar valores de una variable aleatoria con distribución doble exponencial dada por la expresión que aparece abajo, en donde $\lambda > 0$ es un parámetro.

$$h(x) = \tfrac{1}{2}\,\lambda e^{-\lambda|x|}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

(a) Determine analíticamente y muestre en un plano la región asociada $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Compruebe que $|S| = 1/2$.

(b) Elabore un programa de cómputo para generar 500 valores de la densidad $h(x)$ para un valor λ de su elección.

(c) Elabore un histograma (frecuencias relativas) de los datos obtenidos y en la misma gráfica dibuje la función $h(x)$.

Ejercicio 7. **Distribución gama.** Siga los pasos que aparecen abajo para implementar el método del cociente de uniformes para producir valores de la distribución gama (α, γ). Recordemos que esta distribución tiene función de densidad

$$f(x) \;=\; \frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0.$$

(a) Sea $\lambda > 0$. Demuestre que si $X \sim \text{gama}(\alpha, 1)$, entonces $X/\lambda \sim \text{gama}(\alpha, \lambda)$. Este resultado establece que es suficiente generar valores de la distribución gama $(\alpha, 1)$, cuya función de densidad es

$$f(x) \;=\; \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-x}, \qquad x > 0.$$

Escoja un valor particular de $\alpha > 1$. Se demostró antes la forma en la que el caso $0 < \alpha \leq 1$ se puede obtener a partir del caso $\alpha > 1$.

(b) Considere la función $h(x) = x^{\alpha-1}e^{-x}$, para $x > 0$, y determine la expresión analítica que define a la región S para el valor escogido $\alpha > 1$.

(c) Grafique en una computadora la región S. Aquí es necesario encontrar la gráfica de una función implícita.

(d) Demuestre analíticamente, o por integración Monte Carlo (método de aceptación y rechazo), que el área de S es

$$|S| = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}\,\Gamma(\alpha).$$

(e) Genere 500 valores de la función de densidad gama $(\alpha, 1)$ usando el método del cociente de uniformes con los elementos anteriores. Elabore un histograma de probabilidad con los datos obtenidos y en la misma gráfica dibuje la función de densidad gama $(\alpha, 1)$ para el valor $\alpha > 1$ escogido.

Ejercicio 8. Usando el método de aceptación y rechazo, elabore un programa de cómputo para generar 200 valores (x, y) de la distribución especificada abajo. En un plano cartesiano dibuje el círculo unitario y marque con un punto cada uno de los datos obtenidos.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejercicio 9. Grafique las siguientes funciones de densidad bivariadas y proporcione los detalles de cada una de ellas para generar valores de estas distribuciones usando el método de aceptación y rechazo.

(a)

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x^2y, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejercicio 10. **Método secuencial.** Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio con función de densidad o de probabilidad $f(x_1, \ldots, x_n)$. Demuestre la identidad

$$f(x_1, \ldots, x_n) \;=\; f(x_1)\, f(x_2 \mid x_1) \cdots f(x_n \mid x_{n-1}, \ldots, x_1).$$

Esta fórmula sugiere un método secuencial para producir valores del vector $(X_1, \ldots, X_n)$ de la siguiente manera:

- Se genera un valor x_1 de X_1 con función de densidad $f(x_1)$.
- Dado $X_1 = x_1$, se genera un valor x_2 de X_2 con función de densidad $f(x_2 \mid x_1)$.
- Etcétera.

Por supuesto, el método requiere que se conozca una forma de generar valores de las funciones de densidad condicionales indicadas en la fórmula.

Ejercicio 11. Use el método de composición para dar un algoritmo simulación de X, cuya función de probabilidad en los puntos $j = 5, 6, \ldots, 14$ es

$$p_j = \begin{cases} 0{,}11, & \text{si } j \text{ es impar y } 5 \le j \le 13, \\ 0{,}09, & \text{si } j \text{ es par y } 6 \le j \le 14. \end{cases}$$

Ejercicio 12. **Método de composición.** Suponga que es relativamente fácil generar variables aleatorias a partir de cualquiera de las distribuciones F_i, $i = 1, \ldots, n$. ¿Cómo podríamos generar una variable aleatoria que tenga la función de distribución

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, F_i(x),$$

donde p_i, $i = 1, \ldots, n$, son números no negativos cuya suma es 1?

Ejercicio 13. Usando el resultado del Ejercicio 11, dé algoritmos para generar variables aleatorias a partir de las siguientes distribuciones:

(a)

$$F(x) = \frac{x + x^3 + x^5}{3}, \qquad 0 \le x \le 1.$$

(b)

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-2x} + 2x}{3}, & 0 < x < 1, \\[2ex] \dfrac{3 - e^{-2x}}{3}, & 1 < x < \infty. \end{cases}$$

(c)

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i, \qquad 0 \leq x \leq 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Ejercicio 14. Dé un método para generar una variable aleatoria cuya función de distribución sea

$$F(x) = \int_0^{\infty} x^y e^{-y}\, dy, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Sugerencia: piense en términos del método de composición del Ejercicio 7. En particular, sea F la función de distribución de X, y suponga que la distribución condicional de X dado que $Y = y$ es

$$P\{X \leq x \mid Y = y\} = x^y, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Ejercicio 15. Muestre cómo generar una variable aleatoria cuya función de distribución es

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\,(x + x^2), \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Utilice el método de composición.