Universidad de las Américas Puebla

Departamento de Actuaría, Física y Matemáticas

Temas Selectos I: Simulación Estocástica

Actividad 3.3

Instrucciones

Resuelva cuidadosamente cada uno de los siguientes ejercicios. Justifique sus respuestas y, cuando corresponda, incluya simulaciones o gráficas de apoyo.

Ejercicio 1. Estimación de una integral.
Considere la integral

$$\theta = \int_0^1 e^x \, dx.$$

Estime θ mediante el método Monte Carlo clásico con $n = 10^4$ simulaciones, y luego utilizando **variables antitéticas**, donde si $U_i \sim \text{Uniform}(0,1)$, se emplean los pares $(U_i, 1 - U_i)$.
Compare la varianza de ambos métodos.

Ejercicio 2. Estimación de una probabilidad de cola.
Sea $X = Z^2$ con $Z \sim N(0,1)$. Se desea estimar

$$p = \mathbb{P}(X > 4)$$

usando simulación Monte Carlo. Genere pares antitéticos $(Z_i, -Z_i)$ para reducir la varianza.
Compare la varianza del estimador clásico y del estimador antitético.

Ejercicio 3. Estimación de una esperanza con función convexa.
Sea $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ y $U \sim \text{Uniform}(0,1)$. Estime $\mathbb{E}[f(U)]$ mediante el método clásico y mediante el método de **variables antitéticas** usando los pares $(U_i, 1 - U_i)$.
Compare la varianza de ambos métodos.

Ejercicio 4. Comparación de dos procesos de Poisson.
Simule dos procesos de Poisson $N_1(t)$ y $N_2(t)$ con tasas $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 4$ hasta el tiempo $t = 10$.
Estime $\mathbb{E}[N_2(10) - N_1(10)]$ usando:

(a) Corridas independientes.

(b) **Variables comunes**, utilizando los mismos números uniformes U_i para generar los interarribos:
$$E_i^{(j)} = -\frac{\ln U_i}{\lambda_j}, \quad j = 1, 2.$$

Compare la varianza de las dos estimaciones.

Ejercicio 5. Comparación de dos activos financieros con movimiento browniano geométrico.
Considere dos activos cuyos precios siguen movimientos brownianos geométricos:

$$S_1(t) = S_0\, e^{(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)t + \sigma_1 W(t)},$$
$$S_2(t) = S_0\, e^{(\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2)t + \sigma_2 W(t)},$$

donde $W(t)$ es un proceso de Wiener estándar.

Simule ambos precios al tiempo $T = 1$ con $S_0 = 100$, $\mu_1 = 0{,}05$, $\mu_2 = 0{,}07$, $\sigma_1 = 0{,}20$ y $\sigma_2 = 0{,}25$.

(a) Genere simulaciones **independientes** para cada activo.

(b) Use **variables comunes**, es decir, la misma secuencia de valores de $Z_i \sim N(0, 1)$ para ambos procesos:

$$S_j(T) = S_0\, e^{(\mu_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2)T + \sigma_j Z_i \sqrt{T}}, \quad j = 1, 2.$$

Estime la diferencia en el valor esperado $\mathbb{E}[S_2(T) - S_1(T)]$ mediante ambos métodos y **compare la varianza de las dos estimaciones**.

Ejercicio 6. Modelo de riesgo compuesto.
Sea $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$, donde $N(t)$ es un proceso de Poisson con tasa $\lambda = 2$ y Y_i son severidades.
Considere dos escenarios:

$$\text{Caso A: } Y_i \sim \text{Exp}(1), \qquad \text{Caso B: } Y_i \sim \text{Exp}(0{,}8).$$

Use **variables comunes** compartiendo los mismos tiempos de arribo y los mismos uniformes V_i para generar las severidades por transformada inversa.
Estime $\mathbb{E}[S_B(t) - S_A(t)]$ y **compare la varianza** entre el método clásico y el método con variables comunes.