

# **Método de la Transformada Inversa**

Curso: Temas Selectos I: O25 LAT4032 1

Profesor: Rubén Blancas Rivera

Equipo: Ana Ximena Bravo, Heriberto Espino, Celeste Núñez

Universidad de las Américas Puebla

2 de Septiembre de 2025

# Índice

<b>Ejercicio 1</b>	<b>2</b>
a) Distribución de referencia $q(k)$	3
b) Cota con constante $c$	4
c) Algoritmo de aceptación–rechazo	5
d) Programa de simulación y estimación de $c$	6
<b>Ejercicio 2</b>	<b>7</b>
Simulación $\text{Beta}(1, 2, 3)$ por aceptación–rechazo	8
<b>Ejercicio 3</b>	<b>9</b>
a) Método de la transformada inversa	10
b) Método de aceptación–rechazo	11
c) Implementación computacional	12
d) Eficiencia comparada	13
<b>Ejercicio 4</b>	<b>14</b>
a) Densidad de $ Z $ para $Z \sim N(0,1)$	15
b) Simetrización con $S \cdot  Z $	16
c) Evento de aceptación con $X \sim \text{Exp}(1)$ y $U \sim \text{Unif}(0,1)$	17
d) Probabilidad con $V1, V2 \sim \text{Exp}(1)$	18
<b>Ejercicio 5</b>	<b>19</b>
a) $\text{Gamma}(1,5, 3)$	20
b) $\text{Gamma}(0,5, 6)$	21

# Ejercicio 1

Queremos simular una variable aleatoria  $X$  con distribución discreta:

$$P(X = k) = p_k, \quad k \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

donde

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{1}{4}, \quad p_3 = \frac{1}{8}, \quad p_4 = \frac{1}{8}.$$

**a) Distribución de referencia  $q(k)$** 

Proponga una distribución de referencia  $q(k)$  sobre  $\{1, 2, 3, 4\}$  que sea fácil de simular.

## b) Cota con constante $c$

Determine la constante  $c$  tal que

$$p_k \leq c q(k), \forall k.$$

## **c) Algoritmo de aceptación--rechazo**

Describa el algoritmo de aceptación-rechazo para generar una realización de  $X$ .

## **d) Programa de simulación y estimación de $c$**

Elabore un programa de cómputo que simule la distribución anterior y compare el valor teórico de  $c$  con un valor aproximado obtenido de las simulaciones.

## Ejercicio 2



## **Simulación Beta(1, 2, 3) por aceptación--rechazo**

Utilice el método de aceptación y rechazo para simular una variable aleatoria con distribución Beta(1, 2, 3). Elabore un programa de cómputo que genere simulaciones de esta variable y compare resultados con la densidad teórica.

## Ejercicio 3

Considere la siguiente función de distribución acumulada

$$F(x) = x^n, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

## **a) Método de la transformada inversa**

Aplice el método de la transformada inversa para dar un algoritmo que simule una variable aleatoria con la función de distribución anterior.

## **b) Método de aceptación--rechazo**

Aplique el método de aceptación y rechazo para el mismo caso.

## **c) Implementación computacional**

Elabore un programa de cómputo para implementar ambos algoritmos.

## **d) Eficiencia comparada**

Compare la eficiencia de ambos métodos y justifique cuál es más recomendable.

## Ejercicio 4

En el contexto del método de aceptación y rechazo para generar valores de la distribución  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , demuestre directamente los siguientes resultados:

**a) Densidad de  $|Z|$  para  $Z \sim N(0,1)$** 

Si  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , entonces  $|Z|$  tiene función de densidad

$$f_{|Z|}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x > 0.$$



**b) Simetrización con  $S|Z|$** 

Si  $S \sim \text{Unif}\{+1, -1\}$  es independiente de  $|Z|$  (con  $Z$  como en (a)), entonces  $S|Z| \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

### c) Evento de aceptación con $X \sim \text{Exp}(1)$ y $U \sim \text{Unif}(0,1)$

Sea  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  con  $\lambda = 1$  y  $U \sim \text{Unif}(0, 1)$  independientes. Considere el evento

$$\{U \leq \exp(-\frac{(X-1)^2}{2})\}.$$

Entonces, la distribución de  $X$  condicionada a este evento tiene densidad

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x > 0,$$

la cual corresponde a la densidad del valor absoluto de una normal estándar  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

**d) Probabilidad con  $V_1, V_2 \sim \text{Exp}(1)$** 

Sean  $V_1$  y  $V_2$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como  $\text{Exp}(\lambda)$  con  $\lambda = 1$ . Entonces se cumple que

$$\mathbb{P}\left(V_1 \geq \frac{(V_2 - 1)^2}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2e}}.$$

## Ejercicio 5

Implemente un algoritmo de simulación para la distribución Gamma con los siguientes parámetros:

**a) Gamma(1.5, 3)**

Gamma(1.5, 3)

**b) Gamma(0.5, 6)**

Gamma(0.5, 6)

Elabore un programa de cómputo que genere simulaciones de ambas distribuciones y compare los resultados empíricos con las densidades teóricas correspondientes.