

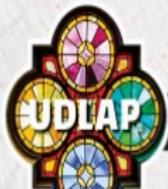
Cadenas de Markov

Temas Selectos I

Dr. Rubén Blancas Rivera

Universidad de las Américas Puebla

Otoño 2025



85 AÑOS DE EXCELENCIA ♦ 55 AÑOS EN PUEBLA

Contenido

Introducción

Repasso de Cadenas de Markov

Probabilidades de Transición en n pasos

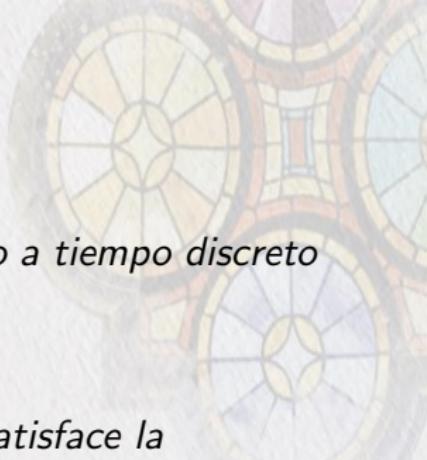
Introducción

- ▶ Ha llegado la última parte del curso. En este módulo 4 vamos a estudiar los métodos Monte Carlo vía cadenas de Markov.
- ▶ Estos son referidos como métodos MCMC (Markov Chains Monte Carlo).
- ▶ Son procedimientos para obtener muestras aleatorias aproximadas de distribuciones arbitrarias y hacen uso de la teoría de las cadenas de Markov.

Introducción

- ▶ El algoritmo original fue propuesto por Nicholas Metropolis y otros autores en (1939).
- ▶ Para referirse a los procedimientos asociados a este algoritmo se puede usar también el nombre **muestreo por cadenas de Markov**
- ▶ Los dos algoritmos MCMC más utilizados son:
 - ▶ Algoritmo Metropolis-Hastings.
 - ▶ Muestreo de Gibbs.

Rapso de Cadenas de Marov



Una *cadena de Markov* es un proceso estocástico a tiempo discreto

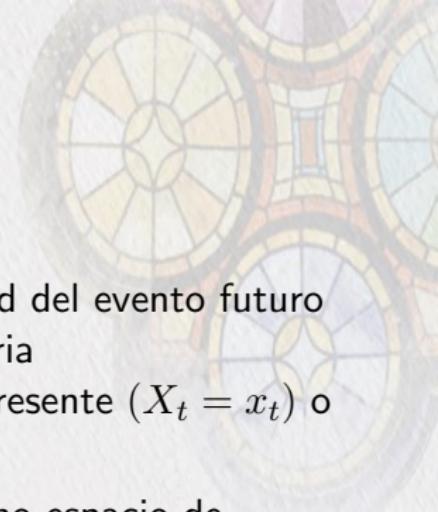
$$\{X_t : t = 0, 1, \dots\}$$

con espacio de estados también discreto y que satisface la propiedad de Markov, esto es, para cualquier tiempo $t \geq 1$ y para cualesquiera estados x_0, \dots, x_t, x_{t+1} ,

$$P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t) = P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t).$$

- ▶ La identidad anterior es conocida como propiedad de Markov.

Rapso de Cadenas de Markov



- ▶ Esta condición establece que la probabilidad del evento futuro ($X_{t+1} = x_{t+1}$) depende del pasado o historia ($(X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t)$ sólo a través del presente ($X_t = x_t$) o del pasado más próximo.
- ▶ Sin pérdida de generalidad, tomaremos como espacio de estados el conjunto discreto $S = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- ▶ En particular, una cadena de Markov es **finita** cuando el espacio de estados es finito; por ejemplo, el conjunto $S = \{0, 1, \dots, k\}$ es un espacio de estados finito.

Rapaso de Cadenas de Markov

- Sea $t \geq 0$ y sean i y j dos estados cualesquiera de una cadena de Markov.
- La probabilidad condicional

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$$

es la probabilidad de transición del estado i al tiempo t , al estado j al tiempo siguiente $t + 1$.

- Se le denota también por $p_{ij}(t, t + 1)$ y se le llama **probabilidad de transición en un paso**.

Rapso de Cadenas de Markov

- ▶ Cuando las probabilidades $p_{ij}(t, t + 1)$ no dependen de t , se dice que la cadena es **estacionaria** o **homogénea** en el tiempo.
- ▶ Regularmente se estudian las cadenas de Markov bajo esta hipótesis, y las probabilidades de transición en un paso se escriben como p_{ij} .
- ▶ Haciendo variar los subíndices i y j en el espacio de estados $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ se obtiene la **matriz de probabilidades de transición en un paso**.

Matriz de Transiciones

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

en donde los renglones y columnas se etiquetan con los valores de los estados $0, 1, \dots$ de tal forma que p_{ij} es la entrada (i, j) de esta matriz, la cual se escribe $\mathbf{P} = (p_{ij})$ y cumple las siguientes dos propiedades:

- $p_{ij} \geq 0.$
- $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1.$

Distribución Inicial

- ▶ Una **distribución inicial** es cualquier distribución para la variable aleatoria inicial X_0 de una cadena de Markov. Esta es una distribución sobre el espacio de estados $S = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- ▶ En ocasiones se establece que la cadena inicia en el estado $x_0 \in S$, es decir, $X_0 = x_0$. Esto significa que la distribución inicial está completamente concentrada en el punto x_0 .

Definición

- ▶ Una cadena de Markov $\mathbf{P} = (p_{ij})$ determina una dinámica estocástica en el espacio de estados $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ de la siguiente manera:
- ▶ Si i es un estado inicial, a partir de él se genera el siguiente estado de acuerdo a la distribución dada por el vector de probabilidad (p_{i0}, p_{i1}, \dots) . Este es el i -ésimo renglón de la matriz \mathbf{P} .

Definición

- ▶ Supongamos que el valor obtenido es j . A partir de la distribución dada por el j -ésimo renglón de \mathbf{P} , esto es (p_{j0}, p_{j1}, \dots) , se genera el siguiente valor.
- ▶ Supongamos que el valor es k . Se procede de manera sucesiva y se obtiene así una secuencia de puntos en el espacio de estados S .
- ▶ A una sucesión de estos puntos en el espacio de estados se le llama una **trayectoria** o **realización** de la cadena de Markov.

Algoritmo

Entrada.

1. Conjunto de estados finito $S = \{0, 1, \dots, k\}$.
2. Matriz de transición $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{i,j \in S}$ con $p_{ij} \geq 0$ y $\sum_j p_{ij} = 1$.
3. Horizonte n (número de pasos a simular).
4. Estado inicial fijo $X_0 = x_0 \in S$ o distribución inicial $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_k)$.

Algoritmo

Inicialización del estado.

1. Si el estado inicial es aleatorio: genera $U_0 \sim U(0, 1)$ y toma

$$X_0 = \min \left\{ j \in S : \sum_{m=0}^j \pi_m \geq U_0 \right\}.$$

2. Si el estado inicial es fijo, simplemente define $X_0 = x_0$.

Algoritmo

Simulación paso a paso. Para $t = 0, 1, \dots, n - 1$:

1. Genera un uniforme $U_{t+1} \sim U(0, 1)$ independiente.
2. Sea $i = X_t$. Calcula la suma acumulada de la fila i :

$$c_j = \sum_{m=0}^j p_{im}, \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

3. Define el siguiente estado como

$$X_{t+1} = \min \left\{ j \in S : c_j \geq U_{t+1} \right\}.$$

Salida. La trayectoria simulada (X_0, X_1, \dots, X_n) .

Probabilidades de Transición en n pasos



Sean $n \geq 1$ y $m \geq 0$ números enteros, a las cantidades denotadas por

$$P(X_{n+m} = j \mid X_m = i),$$

se les llama **probabilidades de transición** del estado i al estado j en n pasos.

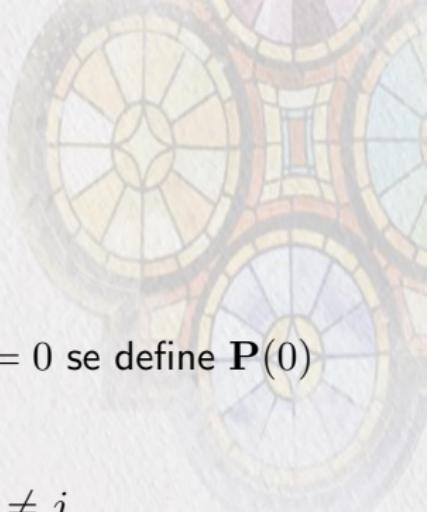
Probabilidades de Transición en n pasos

Dado que hemos supuesto la condición de homogeneidad en el tiempo, esta probabilidad no depende del tiempo m y coincide con $P(X_n = j \mid X_0 = i)$.

Haciendo variar los valores de i y de j en el espacio de estados se obtiene la matriz de probabilidades de transición en n pasos,

$$\mathbf{P}(n) = \begin{pmatrix} p_{00}(n) & p_{01}(n) & \cdots \\ p_{10}(n) & p_{11}(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Probabilidades de Transición en n pasos



Cuando $n = 1$ se obtiene la matriz \mathbf{P} , y para $n = 0$ se define $\mathbf{P}(0)$ como la matriz identidad, es decir,

$$\mathbf{P}(0) = (p_{ij}(0)) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Sean $0 \leq r \leq n$ dos números enteros. Las probabilidades de transición $p_{ij}(n)$ de una cadena de Markov satisfacen

$$p_{ij}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(r) p_{kj}(n-r).$$

Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Aplicando este resultado en $n - 1$ ocasiones usando $r = 1$, se encuentra que $p_{ij}(n)$ resulta ser la entrada (i, j) del producto $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \cdots \mathbf{P} = \mathbf{P}^n$, es decir,

$$p_{ij}(n) = (\mathbf{P} \cdots \mathbf{P})_{ij} = (\mathbf{P}^n)_{ij}.$$

Ecuación de Chapman-Kolmogorov

De forma explícita,

$$\begin{pmatrix} p_{00}(n) & p_{01}(n) & \cdots \\ p_{10}(n) & p_{11}(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^n.$$

Distribución de X_n

Cuando se conoce la matriz potencia \mathbf{P}^n y se tiene una distribución inicial denotada por $p_i := P(X_0 = i)$, entonces la distribución de la variable X_n se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$P(X_n = j) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{ij}(n), \quad j = 0, 1, \dots$$