

Implementación del Método de Metropolis–Hastings en una Aplicación Actuarial

Valoración Bayesiana de Opciones Asiáticas
mediante Inferencia MCMC

Temas Selectos 1: Simulación Actuarial

Equipo: 1

22 de noviembre de 2025

Índice

1	Introducción y Contexto Actuarial	2
1.1	Motivación	2
1.2	Problema Actuarial	2
1.3	Enfoque Bayesiano	2
2	Descripción del Método Metropolis–Hastings	3
2.1	Fundamento Teórico	3
2.2	Algoritmo	3
2.3	Propuesta Random Walk	4
3	Modelo Estadístico/Bayesiano	4
3.1	Modelo del Activo Subyacente	4
3.2	Discretización y Log-retornos	4
3.3	Verosimilitud	5
3.4	Distribuciones a Priori	5
3.5	Posterior	5
4	Resultados Numéricos	6
4.1	Datos y Configuración	6
4.2	Estimaciones Bayesianas vs. Clásicas	6
4.3	Diagnósticos MCMC	7
4.4	Análisis Visual	7
5	Interpretación Actuarial: Valoración de Opción Asiática	9
5.1	Especificación de la Opción	9
5.2	Metodología de Valoración	10
5.3	Resultados de Valoración	10
5.4	Implicaciones Actuariales (ampliadas)	11
5.5	Análisis de Riesgo	11
6	Conclusiones	12
6.1	Síntesis de Resultados	12
6.2	Ventajas del Enfoque Bayesiano	12
6.3	Limitaciones y Trabajo Futuro	12
6.4	Relevancia Actuarial	13

1 Introducción y Contexto Actuarial

1.1 Motivación

Las opciones asiáticas son instrumentos derivados cuyo *payoff* depende del promedio del precio del activo subyacente durante la vida de la opción, en lugar del precio spot al vencimiento. Este detalle vuelve a estos contratos especialmente útiles cuando el riesgo relevante no es el precio final, sino la evolución promedio del subyacente. En práctica, estas opciones aparecen en:

- **Mercados de commodities:** petróleo, gas natural y metales. El promedio reduce incentivos para manipular el precio en fechas específicas y refleja mejor el costo promedio de insumos.
- **Cobertura corporativa:** empresas con flujos de efectivo continuos que enfrentan riesgo de precio promedio (por ejemplo, aerolíneas con combustible).
- **Gestión de riesgos financieros:** suelen tener primas menores que opciones europeas estándar, porque el promedio suaviza la volatilidad efectiva.

1.2 Problema Actuarial

El problema central consiste en la **valoración** de opciones asiáticas cuando existe incertidumbre sobre los parámetros del proceso estocástico del activo subyacente. En particular:

- El precio del activo sigue un Movimiento Browniano Geométrico (GBM).
- Los parámetros μ (drift) y σ (volatilidad) son desconocidos y deben estimarse desde datos históricos.
- La valoración clásica mediante Máxima Verosimilitud (MLE) entrega estimaciones puntuales, pero ignora **riesgo de modelo** e incertidumbre paramétrica.

Desde una perspectiva actuarial, esta incertidumbre importa porque el *payoff* es una función convexa del promedio; por lo tanto, la dispersión en los parámetros puede generar colas de riesgo que no se observan bajo un único estimador puntual.

1.3 Enfoque Bayesiano

La inferencia bayesiana permite:

1. **Cuantificar la incertidumbre** sobre los parámetros mediante distribuciones posteriores $p(\mu, \sigma | \mathbf{r})$.
2. **Propagar esta incertidumbre** al precio de la opción mediante simulación posterior predictiva.

3. **Obtener intervalos creíbles** que funcionen como medidas directas de riesgo de modelo.

Dado que la posterior conjunta no tiene forma cerrada analítica, recurrimos a métodos de **Monte Carlo** vía **Cadenas de Markov (MCMC)**, específicamente al algoritmo de Metropolis–Hastings.

2 Descripción del Método Metropolis--Hastings

2.1 Fundamento Teórico

El método de Metropolis–Hastings [1, 2] genera muestras de una distribución objetivo $\pi(\theta)$ cuando dicha distribución solo es conocida hasta una constante normalizante. En nuestro caso:

$$\pi(\theta) = p(\mu, \sigma \mid \mathbf{r}) \propto p(\mathbf{r} \mid \mu, \sigma) p(\mu) p(\sigma),$$

donde $\theta = (\mu, \sigma)$.

Definición 1 (Distribución estacionaria). *Una cadena de Markov con matriz de transición P tiene distribución estacionaria π si satisface:*

$$\pi P = \pi.$$

La estrategia es construir P de forma que la posterior sea estacionaria. Una condición suficiente es el **balance detallado**:

$$\pi(\theta) P(\theta \rightarrow \theta') = \pi(\theta') P(\theta' \rightarrow \theta).$$

2.2 Algoritmo

El núcleo del algoritmo es proponer un nuevo estado θ^* desde una distribución $q(\theta^* \mid \theta^{(t-1)})$ y aceptarlo con probabilidad:

$$\alpha(\theta^{(t-1)}, \theta^*) = \min\left(1, \frac{\pi(\theta^*) q(\theta^{(t-1)} \mid \theta^*)}{\pi(\theta^{(t-1)}) q(\theta^* \mid \theta^{(t-1)})}\right).$$

Algorithm 1 Metropolis–Hastings

```

1: Inicializar  $\theta^{(0)}$ 
2: for  $t = 1$  to  $N$  do
3:   Proponer  $\theta^* \sim q(\theta^* | \theta^{(t-1)})$ 
4:   Calcular  $\alpha(\theta^{(t-1)}, \theta^*)$ 
5:   Generar  $u \sim \text{Uniform}(0, 1)$ 
6:   if  $u < \alpha$  then
7:      $\theta^{(t)} = \theta^*$  (aceptar)
8:   else
9:      $\theta^{(t)} = \theta^{(t-1)}$  (rechazar)
10:  end if
11: end for

```

2.3 Propuesta Random Walk

En este proyecto usamos un esquema **Random Walk Metropolis**:

$$\theta^* = \theta^{(t-1)} + \epsilon, \quad \epsilon \sim N(0, \Sigma),$$

lo que implica simetría $q(\theta^* | \theta) = q(\theta | \theta^*)$. Por tanto:

$$\alpha(\theta^{(t-1)}, \theta^*) = \min\left(1, \frac{\pi(\theta^*)}{\pi(\theta^{(t-1)})}\right) = \min\left(1, \exp(\log \pi(\theta^*) - \log \pi(\theta^{(t-1)}))\right).$$

Este detalle es clave para la implementación computacional: basta evaluar la log-posterior no normalizada.

3 Modelo Estadístico/Bayesiano**3.1 Modelo del Activo Subyacente**

Suponemos que el precio del activo S_t sigue un GBM bajo la medida física \mathbb{P} :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde μ representa retorno esperado anualizado, σ la volatilidad anualizada y W_t es Browniano estándar.

3.2 Discretización y Log-retornos

Aplicando el Lema de Itô a $\log S_t$:

$$d(\log S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t.$$

En tiempo discreto con paso Δt :

$$r_t := \log \left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right) \sim N \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t, \sigma^2 \Delta t \right).$$

Esta formulación muestra explícitamente que σ controla la varianza de los retornos, mientras que μ afecta solo la media, lo cual anticipa mayor dificultad para estimar drift con muestras finitas.

3.3 Verosimilitud

Sea $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ con n log-retornos observados. Entonces:

$$p(\mathbf{r} \mid \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \exp \left(-\frac{(r_i - m)^2}{2\sigma^2\Delta t} \right), \quad (1)$$

$$m = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t. \quad (2)$$

La log-verosimilitud, ignorando constantes, es:

$$\log p(\mathbf{r} \mid \mu, \sigma) = -\frac{n}{2} \log(\sigma^2 \Delta t) - \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{i=1}^n (r_i - m)^2.$$

3.4 Distribuciones a Priori

Usamos priors débiles:

$$\mu \sim N(0, 1), \quad (3)$$

$$\sigma \sim \text{InverseGamma}(2, 0.1). \quad (4)$$

Justificación actuarial:

- El prior para μ centrado en 0 refleja neutralidad direccional sin imponer tendencia fuerte.
- El prior para σ favorece valores positivos y rangos plausibles (de orden 10%–50% anual), evitando pesos exagerados en volatilidades irreales.

3.5 Posterior

Por Bayes:

$$p(\mu, \sigma \mid \mathbf{r}) \propto p(\mathbf{r} \mid \mu, \sigma) p(\mu) p(\sigma).$$

Como la constante normalizante es intractable, M–H opera sobre la densidad no normalizada vía la log-posterior.

4 Resultados Numéricos

4.1 Datos y Configuración

Se simuló una trayectoria sintética con parámetros verdaderos:

$$\mu_{\text{true}} = 0,08, \quad \sigma_{\text{true}} = 0,25, \quad S_0 = 100,$$

durante $T = 1$ año con $n = 252$ observaciones diarias ($\Delta t = T/n$). La trayectoria observada arrojó:

- Precio final $S_T = 103,44$
- Precio promedio $\bar{S} = 92,65$
- Retorno anual observado $\log(S_T/S_0)/T = 0,0338$

El MCMC se ejecutó con 30,000 iteraciones, burn-in de 5,000 y propuesta con SD $[0,01, 0,01]$.

4.2 Estimaciones Bayesianas vs. Clásicas

Cuadro 1: Resultados de Inferencia Bayesiana

Parámetro	Verdadero	Media Post.	Mediana Post.	IC 2.5 %	IC 97.5 %	MLE
μ (drift)	0.0800	0.2041	0.1641	−0,1542	0.5946	0.0629
σ (vol.)	0.2500	0.2422	0.2418	0.2219	0.2650	0.2413

Observaciones:

1. σ se recupera con alta precisión: la posterior es estrecha y cercana al verdadero valor. Esto es coherente con que la varianza de retornos identifica bien la volatilidad.
2. μ muestra intervalo creíble amplio: incluso con 252 retornos diarios, el drift anual es difícil de estimar porque su señal es pequeña frente al ruido.
3. La MLE de σ coincide casi exactamente con la media posterior; para μ aparecen diferencias relevantes debido a la asimetría/dispersión posterior.

4.3 Diagnósticos MCMC

Cuadro 2: Diagnósticos del Algoritmo MCMC

Métrica	Valor
Tasa de aceptación	0.721
ESS_{μ} (tamaño efectivo)	258
ESS_{σ} (tamaño efectivo)	2,601
$Autocorr(1)_{\mu}$	0.9992
$Autocorr(1)_{\sigma}$	0.8059

Interpretación ampliada:

- Una aceptación de 72 % es alta para random-walk; sugiere pasos pequeños y, por ende, autocorrelación elevada.
- La autocorrelación extremadamente alta de μ implica mezcla lenta: aunque hay 25,000 muestras post burn-in, la información efectiva equivale a unas pocas centenas.
- Para σ , la autocorrelación decae mucho más rápido: la cadena explora ese parámetro con mayor eficiencia.

4.4 Análisis Visual

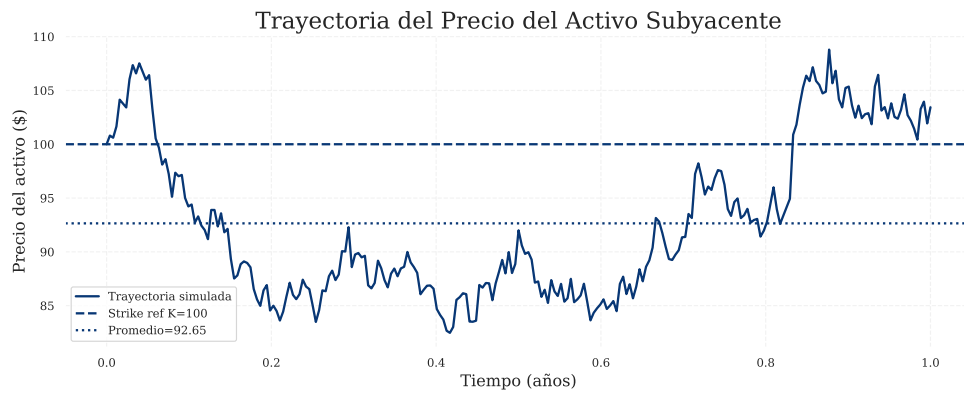


Figura 1: Trayectoria simulada del precio del activo subyacente. El promedio aritmético ($\bar{S} = 92,65$) es inferior al strike ($K = 100$), lo que afecta la valoración de la call asiática.

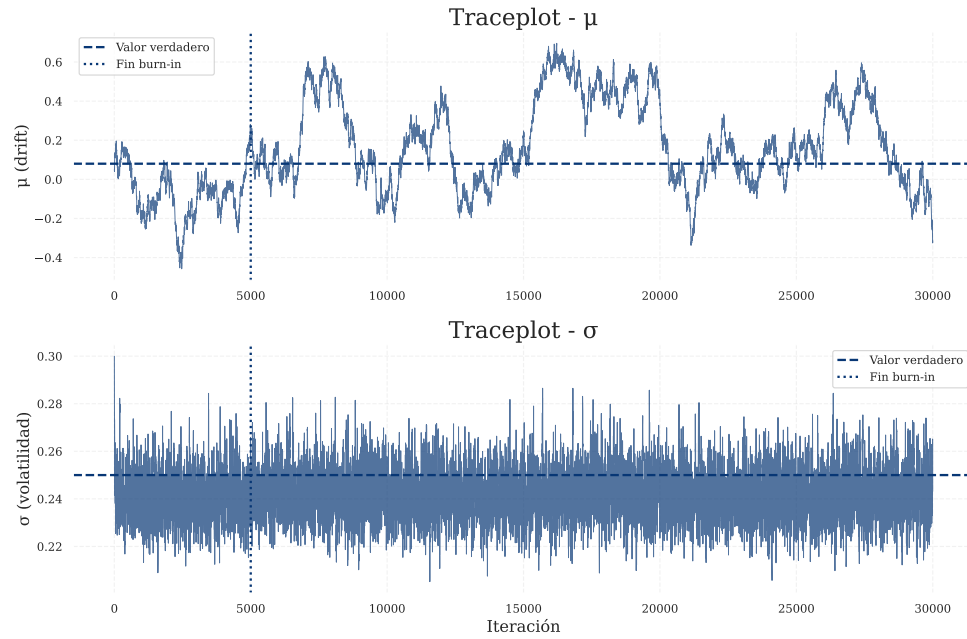


Figura 2: Traceplots de μ y σ . Tras burn-in, σ estaciona y mezcla bien; μ presenta persistencia y cambios lentos.

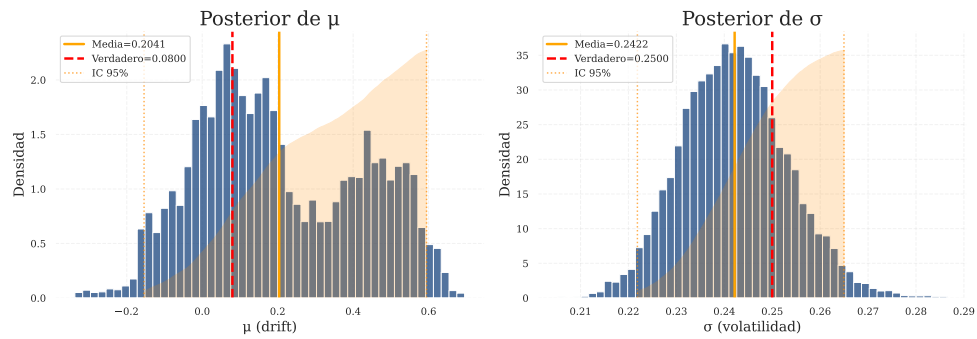


Figura 3: Posteriores marginales. μ es amplia y sesgada; σ es concentrada y casi simétrica alrededor del verdadero valor.

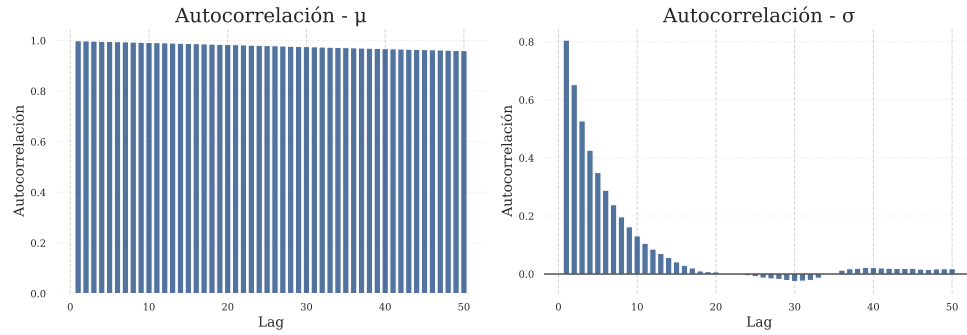


Figura 4: Autocorrelaciones. Persistencia elevada en μ (decaimiento lento); mezcla moderada en σ .

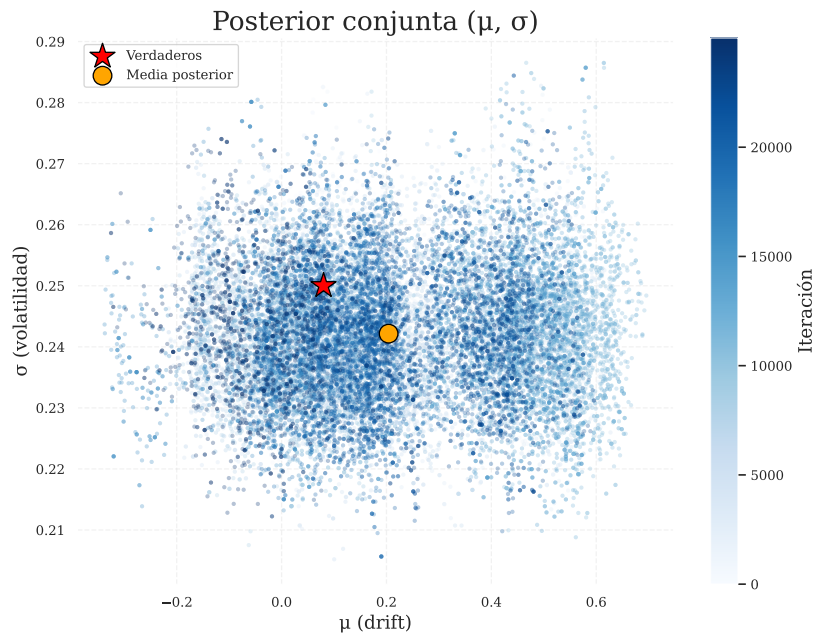


Figura 5: Posterior conjunta (μ, σ) . Se aprecia región de alta densidad y proximidad de la media posterior a los valores verdaderos.

5 Interpretación Actuarial: Valoración de Opción Asiática

5.1 Especificación de la Opción

Se valora una **opción call asiática de promedio aritmético continuo** con:

- $S_0 = 100$

- $K = 100$ (at-the-money)
- madurez $T = 1$ año
- tasa libre de riesgo $r = 0,03$

Payoff:

$$\text{Payoff} = \max(\bar{S}_T - K, 0), \quad \bar{S}_T = \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt.$$

5.2 Metodología de Valoración

1. **Enfoque bayesiano:** para cada muestra posterior $(\mu^{(i)}, \sigma^{(i)})$, se simulan trayectorias GBM y se calcula un precio $C^{(i)}$ por Monte Carlo.
2. **Enfoque MLE:** se usa el precio puntual C_{MLE} evaluando en $(\hat{\mu}_{\text{MLE}}, \hat{\sigma}_{\text{MLE}})$.
3. **Referencia teórica:** precio C_{true} con $(\mu_{\text{true}}, \sigma_{\text{true}})$.

La distribución posterior del precio se interpreta como:

$$p(C | \mathbf{r}) = \int p(C | \mu, \sigma) p(\mu, \sigma | \mathbf{r}) d\mu d\sigma.$$

5.3 Resultados de Valoración

Cuadro 3: Precio de la Opción Asiática Call

Método	Precio Medio (\$)	SD/SE	IC 95 %
Parámetros Verdaderos	7.74	0.10	—
Estimación MLE	7.16	0.10	—
Inferencia Bayesiana	14.11	9.76	[2.39, 35.11]

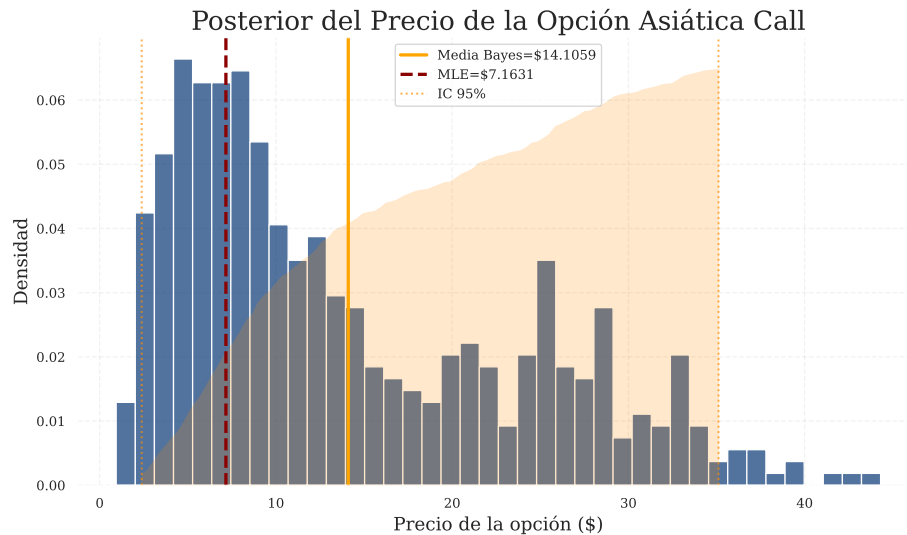


Figura 6: Posterior del precio. Dispersión y cola derecha pesada por incertidumbre de μ .

5.4 Implicaciones Actuariales (ampliadas)

1. **Riesgo de modelo explícito:** el precio no es un escalar sino una variable aleatoria inducida por $p(\mu, \sigma \mid \mathbf{r})$. La MLE, al ser puntual, equivale a asumir conocimiento perfecto de parámetros.
2. **Subestimación con MLE:** aunque $C_{MLE} = 7,16$ es cercano a $C_{true} = 7,74$, la posterior contiene escenarios plausibles donde el precio supera 30. Esto ocurre porque el payoff es convexo en la tendencia, amplificando valores altos de μ .
3. **Capital económico y reservas:** para una institución que vende estos contratos, reservar solo C_{MLE} puede ser insuficiente. Un criterio prudente sería usar percentiles altos de $p(C \mid \mathbf{r})$ como capital: por ejemplo, el 95 % sugiere un capital cercano a 35.
4. **Pricing conservador:** en práctica actuarial/financiera, un precio de venta puede fijarse en percentiles 75–90 de la posterior (aprox. 17–25), incorporando margen de seguridad y apetito de riesgo.
5. **Sensibilidad al drift:** el driver dominante de incertidumbre es μ , no σ . Esto es estructural: derivados dependientes de promedios aritméticos son especialmente sensibles a la tendencia media de las trayectorias.

5.5 Análisis de Riesgo

Value-at-Risk (VaR) del precio:

- $\text{VaR}_{95\%} \approx 35,11$
- $\text{VaR}_{99\%}$ mayor a 40 (cola derecha pesada)

Expected Shortfall:

$$\text{ES}_{95\%} = \mathbb{E}[C \mid C > \text{VaR}_{95\%}] \approx 38.$$

Estas medidas muestran que el riesgo extremo está gobernado por la incertidumbre en tendencia. Para gestión de solvencia, ES es preferible a VaR por ser coherente bajo colas pesadas.

6 Conclusiones

6.1 Síntesis de Resultados

1. Se implementó Metropolis–Hastings desde cero para inferir parámetros GBM bajo un marco bayesiano.
2. La cadena converge, con aceptación alta (72 %), pero con mezcla lenta en μ reflejada en ESS bajo.
3. σ se estima con alta precisión (posterior estrecha, ESS alto); μ conserva incertidumbre inherente a la naturaleza de los datos financieros anuales.
4. La valoración bayesiana produce una posterior del precio amplia, evidenciando riesgo de modelo ausente en MLE.
5. Para decisiones actuariales prudentes, el precio debe considerarse distribucional y no puntual.

6.2 Ventajas del Enfoque Bayesiano

- **Cuantificación completa de incertidumbre:** se obtiene $p(\mu, \sigma \mid \mathbf{r})$ y, por extensión, $p(C \mid \mathbf{r})$.
- **Decisiones robustas:** permite pricing y capital basados en percentiles/ES coherentes con aversión al riesgo.
- **Actualización secuencial:** los priors se actualizan naturalmente al incorporar nueva información.

6.3 Limitaciones y Trabajo Futuro

1. **Autocorrelación alta en μ :** se puede mejorar con propuestas adaptativas, reparametrización o HMC/NUTS.
2. **Datos sintéticos:** en aplicación real sería necesario calibrar con datos de mercado, donde hay colas pesadas, volatilidad estocástica y posibles saltos.

3. Extensiones:

- Heston (volatilidad estocástica)
 - Merton (saltos)
 - Opciones asiáticas de promedio geométrico
 - Opciones sobre canastas multivariadas
4. **Validación externa:** comparar precios con métodos PDE, Fourier o benchmarks de mercado para cuantificar sesgo y robustez.

6.4 Relevancia Actuarial

Este proyecto muestra que MCMC es crucial en acturía moderna cuando:

- Los modelos financieros carecen de soluciones analíticas.
- La regulación exige cuantificar incertidumbre (Solvencia II, ORSA).
- Las decisiones de pricing y reservas deben ser robustas ante riesgo de modelo.

Metropolis–Hastings, pese a su simplicidad, ofrece un puente práctico entre teoría estocástica, inferencia estadística y gestión prudente de derivados.

Referencias

- [1] Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., & Teller, E. (1953). *Equation of state calculations by fast computing machines*. The Journal of Chemical Physics, 21(6), 1087–1092.
- [2] Hastings, W. K. (1970). *Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications*. Biometrika, 57(1), 97–109.
- [3] Robert, C. P., & Casella, G. (2004). *Monte Carlo Statistical Methods* (2nd ed.). Springer.
- [4] Hull, J. C. (2018). *Options, Futures, and Other Derivatives* (10th ed.). Pearson.
- [5] Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer.
- [6] Klugman, S. A., Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (2012). *Loss Models: From Data to Decisions* (4th ed.). Wiley.
- [7] Ntzoufras, I. (2011). *Bayesian Modeling Using WinBUGS*. Wiley.
- [8] Scollnik, D. P. (2001). *Implementing a Bayesian analysis of the compound Poisson-gamma distribution using WinBUGS*. Journal of Actuarial Practice, 9, 5–28.
- [9] Vehtari, A., & Ojanen, J. (2012). *A survey of Bayesian predictive methods for model assessment, selection and comparison*. Statistics Surveys, 6, 142–228.