Simulación de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Temas Selectos I

Dr. Rubén Blancas Rivera

Universidad de las Américas Puebla
Depto. Actuaría, Física, y Matemáticas

21 de octubre de 2025

Contenido

Proceso de Wiener

- El proceso de Wiener, también conocido como el proceso Browniano o movimiento Browniano.
- Es un tipo fundamental de proceso estocástico continuo que juega un papel importante en la teoría de la probabilidad en diversas aplicaciones.
  - Finanzas
  - Física

Movimiento Browniano

- El primer registro, aunque no así la primera observación, data de 1828, cuando el botánico Robert Brown reportó en una revista científica que granos de poles suspendidos en una cierta substancia y vistos a través de un microscopio realizaban un movimiento irregular e inexplicable.

Definición del Movimiento Browniano

El **Movimiento Browniano**, también conocido como *Wiener Process*, es un proceso estocástico $\{B(t), t \geq 0\}$ con las siguientes propiedades:

- $B(0) = 0$.
- Las trayectorias de $B(t)$ son continuas casi seguramente.
- Tiene incrementos independientes: para $0 \leq s < t$, $B(t) - B(s)$ es independiente de $\{B(u), u \leq s\}$.
- Tiene incrementos estacionarios: $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.
- $B(t)$ es un proceso de tiempo continuo con distribuciones normales y varianza creciente linealmente con el tiempo.

Construcción de Lévy del Movimiento Browniano

La construcción de Lévy del Movimiento Browniano se basa en las siguientes propiedades:

1. Dividir el intervalo de tiempo $[0, 1]$ en 2^n subintervalos de igual longitud.
2. Asignar a cada intervalo un incremento normal $\mathcal{N}(0, 2^{-n})$, independiente de los demás.
3. Sumar estos incrementos para definir la trayectoria continua de $B(t)$.
4. A medida que $n \to \infty$, las trayectorias convergen en distribución a un proceso continuo con incrementos normales.

Esta construcción asegura que el límite es un proceso con las propiedades de un Movimiento Browniano.

Primera Construcción de Lévy

- Comenzamos con $B(0) = 0$.
- En el primer paso, dividimos el intervalo $[0, 1]$ en dos subintervalos de igual tamaño y asignamos un incremento $\mathcal{N}(0, 1/2)$.
- El proceso se construye recursivamente dividiendo en subintervalos más pequeños.

Segunda Construcción de Lévy

En esta construcción, generamos el proceso en diferentes resoluciones y utilizamos interpolación lineal entre los puntos de control.

- A partir de una familia de variables gaussianas independientes y centradas, construimos un proceso con trayectorias continuas.
- Las interpolaciones sucesivas generan trayectorias que convergen casi seguramente a un movimiento Browniano.

Tercera Construcción de Lévy

- En este método, se utilizan particiones cada vez más finas del intervalo temporal para generar los incrementos del proceso.
- Cada incremento es gaussiano, con varianza decreciente en cada paso, convergiendo a un proceso continuo.

Cuarta Construcción de Lévy

- Se basa en construir el proceso mediante el límite de una suma de variables gaussianas independientes.
- Las trayectorias resultantes son casi seguramente continuas y exhiben las propiedades del Movimiento Browniano.

Simulación del Movimiento Browniano

El siguiente algoritmo describe cómo simular un Movimiento Browniano:

1. Establecer los parámetros de la simulación:
   - Tiempo total T.
   - Número de pasos N.
2. Calcular el tamaño del paso de tiempo:

$$dt = \frac{T}{N}.$$

3. Inicializar $B(0) = 0$, la trayectoria del Movimiento Browniano comienza en 0.

4. Para cada $i = 1, 2, \ldots, N$:
   - Generar un incremento ΔB_i que sigue una distribución normal con media 0 y desviación estándar $\sqrt{dt}$:

     $$\Delta B_i \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{dt}).$$

   - Actualizar el valor del Movimiento Browniano:

     $$B(i) = B(i-1) + \Delta B_i.$$

5. Repetir hasta llegar al tiempo T.
6. Devolver la trayectoria $\{B(t), t \in [0, T]\}$.

Explicación de los pasos

- El tamaño del paso de tiempo dt determina la precisión de la simulación. A mayor número de pasos N, más precisa será la trayectoria simulada.
- Los incrementos ΔB_i son variables aleatorias independientes y siguen una distribución normal con varianza proporcional a dt.
- La suma acumulativa de estos incrementos genera la trayectoria del Movimiento Browniano.

Movimiento Browniano Geométrico (MBG)

Definición:
El Movimiento Browniano Geométrico es un proceso estocástico que modela la evolución de precios de activos en los mercados financieros. El MBG sigue la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t$$

donde:

- S_t es el precio del activo en el tiempo t,
- μ es la tasa de crecimiento esperada del activo,
- σ es la volatilidad del activo,
- W_t es un Movimiento Browniano estándar.

La solución de esta ecuación es:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

Algoritmo para Simular MBG

Algoritmo:

1. Definir los parámetros del modelo: S_0 (precio inicial), μ (tasa de crecimiento), σ (volatilidad), T (tiempo total), N (número de pasos de tiempo).
2. Dividir el intervalo de tiempo T en N pasos de tamaño $\Delta t = \frac{T}{N}$.
3. Generar N valores independientes de una variable aleatoria $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ (distribución normal estándar).
4. Para cada paso $i = 1, 2, \ldots, N$, calcular el valor del activo utilizando la siguiente fórmula discreta:

$$S_{i+1} = S_i \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} Z_i\right)$$

5. Repetir para todos los pasos y obtener la trayectoria simulada del precio del activo.

Proceso de Ornstein-Uhnlenbeck

Un proceso de Ornstein-Uhnlenbeck o proceso de Vasicek es un proceso X definido como la siguiente transformación del Movimiento Browniano estándar B:

$$X_t = X_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \frac{\sigma e^{-at}}{\sqrt{2a}} B(e^{2at} - 1).$$

- Este modelo se utiliza ampliamente para modelar tasas de interés o demográficas.
- Tiene la desventaja de que tiene posibilidad de tomar valores negativos.
- El parámetro b representa la media a largo plazo, al parámetro a se le conoce como velocidad de reversión hacia la media, y σ es la volatilidad del proceso.

Proceso de Ornstein-Uhnlenbeck

- Para llevar a cabo la simulación notemos que los primeros dos sumandos del proceso son deterministas, es decir, no tienen parte aleatorio.
- Sin embargo, el último término depende de un Movimiento Browniano con escala, una función del tiempo.

Simulación

Tenemos que elegir una partición adecuado del intervalo $[0, t]$.
Definamos la transformación

$$u(s) = \frac{ln(s+1)}{2a}.$$

Notemos que simular $B(s)$ en un puntos de la forma $\{u(s) : s \in [0, t]\}$, es equivalente a simular $B(e^{2as} - 1)$ en puntos de la forma $\{s : s \in [0, t]\}$.

Simulación

Algoritmo del proceso de Ornstein-Uhnlenbeck

1. Generar la partición $P = \{t_i | t_i = \frac{it}{n}, t_0 = 0, t_n = t, 0 < i < n\}$
2. Generar la partición Q mediante la transformación $S(t_i) = \frac{ln(t_i+1)}{2a}$.
3. Para cada $q_i \in Q$ y $0 \leq i \leq n$ generamos puntos del Movimiento Browniano.
4. Finalmente, definimos $X_{q_i} = X_0 \exp(-aq_i) + b(1 - exp(aq_i)) + \frac{\sigma exp(-aq_i)}{\sqrt{2a}} B(exp(2aq_i - 1)) = X_0 \exp(-aq_i) + b(1 - \exp(-aq_i)) + \frac{\sigma \exp(-aq_i)}{\sqrt{2a}} B(\exp(t_i))$.

Ejercicio

Usando este ejercicio, generar un proceso de Ornstein-Uhnlenbeck con los siguientes parámetros: $a =$0.01, $b = 0.08$, $\sigma =$0.005 y $x_0 =$0.004.

Método de Euler

Consideremos un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ que es solución a la ecuación diferencial estocástico que es solución a la ecuación diferencia estocástica

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$

con valor inicial determinista $X_{t_0} = x_0$ y un nivel de discretización

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$$

en el intervalo $[0, T]$.

Método de Euler

La aproximación de Euler de X es un proceso estocástico continuo Y, que satiface el siguiente sistema iterativo:

$$Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} + \mu(Y_{t_i}, t_i)\Delta t_i + \sigma(Y_{t_i}, t_i)\Delta W_i$$

para $i = 0, 1, ..., n-1$, con $Y_0 = x_0$ y

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$$
$$\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i},$$

por lo que $\Delta W_i \sim N(0, \Delta t_i)$.

Método de Euler

Entre cualesquiera dos momentos de observación t_i y t_{i+1}, el proceso puede ser definido por una interpolación diferenciable. Una propuesta natural es considerar una interporlación lineal para Y_t, definida

$$Y_t = Y_{t_i} + \frac{t - t_i}{t_{i+1}}(Y_{t_{i+1}} + Y_{t_i})$$

para $t \in [t_i, t_{i+1})$.

Ejemplo del Método de Euler

Se presenta una simulación de un proceso de difusión con el esquema de Euler, consideramos el proceso de Ornstein-Unhlenbeck que es una solución a la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \alpha(b - X_t)dt + \sigma dW_t$$

donde $\alpha > 0, \sigma > 0$ y $b \in \mathbb{R}$ son los parámetros del proceso y W es un proceso de Wiener estándar.

Ejemplo del Método de Euler

Si suponemos que $X_0 = 0$ y consideramos un intervalo de realización $[0, 1]$ con un nivel de discretización $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = 1$, donde $n = 100$ y $\Delta t_i =$0.01, para todo $i = 1, 2, ..., n - 1$, entonces el método de Euler nos da la siguiente aproximación:

$$Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} + \alpha(b - Y_{t_i})\Delta t_i + \sigma \Delta W_i$$

Dar una simulación del proceso con los parámetros α = 0.05, $\sigma = 2{,}5$ y $b = 0$ en el intervalo $[0, 1]$.

Método de Milstein

El esquema de Milstein es un refinamiento del modelo de Euler cuyo objetivo radica en reducir el error de discretización y no se debe confundir con un modelo de reducción de varianza.

En la aproximación de Milstein se utiliza el lema de Ito, perteneciente a la teoría del Cálculo Estocástico, para aumentar la precisión en la aproximación mediante la incorporación del término de segundo orden.

Método de Milstein

Considerando la discretización del tiempo de la siguiente manera $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$. Para cada $i = 0, 1, ..., n-1$ esta aproximación se puede escribir como sigue:

$$Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} + \mu(Y_{t_i}, t_i)\Delta t_i + \sigma(Y_{t_i}, t_i)\Delta W_i + \frac{1}{2}\sigma(Y_{t_i}, t_i)\sigma'(Y_{t_i}, t_i)[(\Delta W_i)^2 -$$

Con

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i, \Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i},$$

por lo que $\Delta W_i \sim N(0, \Delta t_i)$.

Método de Milstein

De donde no es díficil demostrar que $\Delta W_i = \sqrt{\Delta t_i} Z_{t_{i+1}} \sim N(0,1)$. Por lo que simular $Y_{t_{i+1}}$ se reduce a simular

$$Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} + \mu(Y_{t_i}, t_i)\Delta t_i + \sigma(Y_{t_i}, t_i) Z_{t_{i+1}}$$
$$+\frac{1}{2}\sigma(Y_{t_i}, t_i)\sigma'(Y_{t_i}, t_i)[(Z_{t_{i+1}})^2 - \Delta t_i].$$

Ejemplo del Método de Milstein

Para ejemplificar el uso de este método de simulación consideremos el movimiento Browniano geométrico, el cuál es solución a la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \theta_1 X_t dt + \theta_2 X_t dW_t$$

Encontrar el equema de Milstein para este proceso. Luego, suponga que $X_0 = 5$ y consideramos un intervalo de realización $[0, 1]$ con un nivel de discretización $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, para todo $i = 1, 2, ..., n-1$, realizar la simulación.