Universidad de las Américas Puebla

Departamento de Actuaría, Física y Matemáticas

Temas Selectos I: Simulación Estocástica

Actividad 3.2

Instrucciones

Resuelva cuidadosamente cada uno de los siguientes ejercicios. Justifique sus respuestas y, cuando corresponda, incluya simulaciones o gráficas de apoyo.

Ejercicio 1. Sea $\phi(x)$ la función de densidad $\mathcal{N}(0,1)$. El cuantil al 95 % de esta distribución es $c_p = 1{,}65$, es decir, el valor c_p es tal que

$$\int_{-\infty}^{c_p} \phi(x)\,dx \;=\; 0{,}95.$$

Elabore un programa de cómputo que use el método clásico de Monte Carlo para corroborar este resultado. Considere que el intervalo sobre el que se lleva a cabo la integración es el intervalo acotado $(-4,\ 1{,}65)$.

Ejercicio 2. Escriba el algoritmo para llevar a cabo la integración Monte Carlo en su procedimiento clásico cuando la función a integrar es:

(a) $g(x) = c$ (constante), para $a < x < b$.

(b) $g(x) = 2x$ para $0 < x < 1$, cuando se toma $c = 1$.

Ejercicio 3. Elabore un programa de cómputo que utilice el método clásico de integración Monte Carlo para calcular el volumen de una esfera de radio 1. Para corroborar su resultado, recuerde que el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Ejercicio 4. Usando simulación, aproxime el área de la región

$$\left\{(x,y) :\ -1 < x < 1,\ y > 0,\ \sqrt{1-2x^2} < y < \sqrt{1-2x^4}\right\}.$$

Ejercicio 5. Suponga que se tienen 3 tipos de riesgos en una aseguradora. Cada riesgo puede provocar una reclamación cuya cantidad en miles de pesos se modela con una variable aleatoria X_i, para $i = 1,2,3$. Los tres riesgos se consideran independientes y, en cada caso, $X_i \sim \text{Unif}(0,15)$. La aseguradora desea calcular el valor x tal que

$$Pr\big(X_1 + X_2 + X_3 \le x\big) = 0{,}95.$$

Exprese la probabilidad anterior como la integral triple que corresponde. Aproxime el valor de x realizando simulaciones de X_1, X_2, X_3 y probando distintos valores de x.

Ejercicio 6. Se tiene el siguiente modelo para el comportamiento de una partícula al tiempo t:

$$X_t = 3\sqrt{t} + B_t, \qquad t > 0,$$

en donde B_t es una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}(0{,}2t,\ 0{,}32t)$. Exprese la probabilidad siguiente como una integral y después apróxime usando simulación:

$$Pr(X_{10} > 12)\,.$$

Ejercicio 7. Dentro de la teoría del riesgo se tiene el siguiente modelo para el capital C_t de una compañía aseguradora al tiempo $t \geq 0$:

$$C_t = u + ct - \sum_{j=0}^{N_t} Y_j, \qquad t \geq 0,$$

en donde $u \geq 0$ y $c > 0$ son constantes, $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ con $\lambda > 0$, y $Y_1, Y_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes entre sí e independientes de N_t. Suponga que $Y_0 := 0$ y que $Y_j \sim \text{Exp}(1)$ para $j \geq 1$. Suponga también que $u = 1$, $c = 3$ y $\lambda = 2$. Usando simulación, aproxime:

(a) $Pr(C_5 < 0)$.

(b) $Pr(C_5 < 0 \mid Y_1 < 1)$.

Ejercicio 8. Sea $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Estime $\theta = Pr(Z > 2)$ mediante muestreo por importancia utilizando la función de densidad exponencial trasladada $f(x)$ que aparece abajo. Tome un tamaño de muestra suficientemente grande para obtener precisión de dos dígitos. Compare con el valor que se obtiene de una tabla de probabilidades de la distribución normal.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-2)}, & x > 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejercicio 9. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución $\text{Unif}(-1,1) \times \text{Unif}(-1,1)$. Use muestreo condicional para encontrar una aproximación a las probabilidades que aparecen abajo. Calcule el valor exacto de estas probabilidades y compruebe si las aproximaciones obtenidas son razonables.

(a) $Pr(4X - 2Y > 0)$.

(b) $Pr(X^2 + Y^2 < 1)$.

(c) $Pr\Big(\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{2} < 1\Big)$.

Ejercicio 10. Sea (X, N) un vector aleatorio discreto con función de probabilidad $f(x,n)$ como aparece abajo y suponga que X_1 y X_2 son dos copias independientes de X.

$$f(x,n) \;=\; \frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{nx}, \qquad n = 1, 2;\; x = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Usando muestreo condicional sobre N, encuentre una aproximación a la esperanza de la variable aleatoria S indicada abajo:

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

(b) Encuentre el valor exacto de $\mathbb{E}(S)$ y compruebe si la aproximación obtenida es razonable.

Ejercicio 11. Defina la variable aleatoria $S := X^N$, en donde X y N son independientes y son tales que $X \sim \text{Unif}(0,1)$ y $N \sim \text{Unif}\{1,\ldots,10\}$.

(a) Usando muestreo condicional sobre N, encuentre una aproximación para $\mathbb{E}(S)$.

(b) Encuentre el valor exacto de $\mathbb{E}(S)$ y compruebe si la aproximación obtenida es razonable.