Método de Aceptación y Rechazo

Curso: Temas Selectos I: O25 LAT4032 1

Profesor: Rubén Blancas Rivera

Equipo: jijiji, jujuju, jojojo
Universidad de las Américas Puebla

11 de Septiembre de 2025

Índice

Importación de librerías

[1]:
```python
# Importación de librerías
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from style import mpl_apply
import time
import math

# Configuración del estilo
mpl_apply()

# Generador de números aleatorios
rng = np.random.default_rng()
```

Ejercicio 1

Queremos simular una variable aleatoria X con distribución discreta:

$$P(X = k) = p_k, \quad k \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

donde

$$p_1 = \tfrac{1}{2}, \quad p_2 = \tfrac{1}{4}, \quad p_3 = \tfrac{1}{8}, \quad p_4 = \tfrac{1}{8}.$$

a) Distribución de referencia q(k)

Proponga una distribución de referencia $q(k)$ sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ que sea fácil de simular.

Se elige $q(k) = \frac{1}{4}$, uniforme en $\{1, 2, 3, 4\}$

b) Cota con constante c

Determine la constante c tal que

$$p_k \leqslant c\, q(k), \ \forall k.$$

Se necesita $p_k \leqslant c\, q(k)\ \forall k$, es decir $c \geqslant \text{máx}_k \frac{p_k}{q(k)}$.

$$\frac{p_1}{q(1)} = \frac{1/2}{1/4} = 2, \quad \frac{p_2}{q(2)} = \frac{1/4}{1/4} = 1, \quad \frac{p_3}{q(3)} = \frac{1/8}{1/4} = 0.5, \quad \frac{p_4}{q(4)} = \frac{1/8}{1/4} = 0.5.$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \text{máx}\{2, 1, 0.5, 0.5\} = 2.}$$

Regla de aceptación

Se genera $Y \sim q$ y $U \sim \text{Unif}(0,1)$. Se acepta $X = Y$ si

$$U \leqslant \frac{p_Y}{c\, q(Y)} = \frac{p_Y}{2 \cdot (1/4)} = 2\, p_Y.$$

- Si $Y = 1$: acepta si $U \leqslant 1$ (siempre).
- Si $Y = 2$: acepta si $U \leqslant 1/2$.
- Si $Y = 3$ o 4: acepta si $U \leqslant 1/4$.

Eficiencia

La probabilidad de aceptar en una propuesta es

$$\sum_k q(k)\ \text{mín}\Big(1, \frac{p_k}{c\, q(k)}\Big) = \sum_k q(k)\, \frac{p_k}{c\, q(k)} = \frac{1}{c} \sum_k p_k = \frac{1}{c}.$$

Aquí $1/c = 1/2$. El número esperado de intentos por muestra aceptada es $c = 2$.

c) Algoritmo de aceptación--rechazo

Describa el algoritmo de aceptación–rechazo para generar una realización de X.

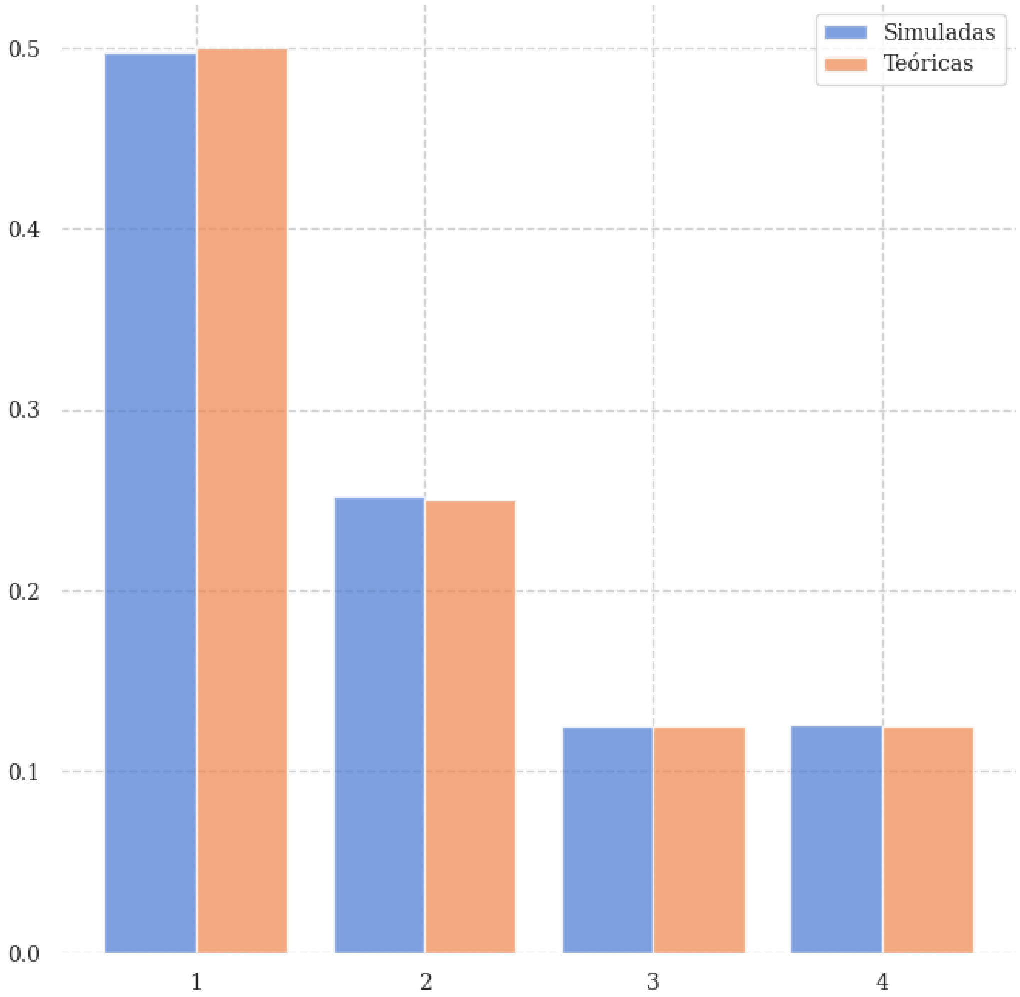
```
1. `repeat:`

2.   Genera $Y\in\{1,2,3,4\}$ con prob. $1/4$ c/u.

3.   Genera $U\sim U(0,1)$.

4.   Si $U\le p_Y/(2\cdot 1/4)=2p_Y$, **acepta** y devuelve $X=Y$; si no, regresa a 1.
```

d) Programa de simulación y estimación de c

Elabore un programa de cómputo que simule la distribución anterior y compare el valor teórico de c con un valor aproximado obtenido de las simulaciones.

[2]:
```
p = {1: 1/2, 2: 1/4, 3: 1/8, 4: 1/8}
q = {1: 1/4, 2: 1/4, 3: 1/4, 4: 1/4}
c = 2.0

def ar_discreto(n=100000):
    X, trials, acc = [], 0, 0
    while len(X) < n:
        y = rng.integers(1,5)         # propuesta uniforme
        u = rng.random()
        trials += 1
        if u <= p[y] / (c*q[y]):      # umbral = 2*p[y]
            X.append(y); acc += 1
    return np.array(X), acc/trials, trials/n

x, acc, intents = ar_discreto(200000)
print(f"Aceptación empírica ≈ {acc:.3f}  (teórica 0.500)")
print(f"Intentos por muestra ≈ {intents:.3f}  (teórica 2.000)")

vals, counts = np.unique(x, return_counts=True)
freq = {int(k): v/len(x) for k, v in zip(vals, counts)}
print("Frecuencias simuladas:", freq)
print("Probabilidades teóricas:", p)

bar_width = 0.4
keys = np.array(list(freq.keys()))
simulated_values = np.array(list(freq.values()))
theoretical_values = np.array([p[k] for k in keys])

plt.bar(keys - bar_width/2, simulated_values, width=bar_width, alpha=0.7, label="Simuladas")
plt.bar(keys + bar_width/2, theoretical_values, width=bar_width, alpha=0.7, label="Teóricas")
plt.xticks(keys)
plt.legend()
plt.show()
```

```
Aceptación empírica ≈ 0.499  (teórica 0.500)
Intentos por muestra ≈ 2.002  (teórica 2.000)
Frecuencias simuladas: {1: np.float64(0.49747), 2: np.float64(0.2517), 3:
np.float64(0.124885), 4: np.float64(0.125945)}
Probabilidades teóricas: {1: 0.5, 2: 0.25, 3: 0.125, 4: 0.125}
```


Simuladas
Teóricas
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
1
2
3
4

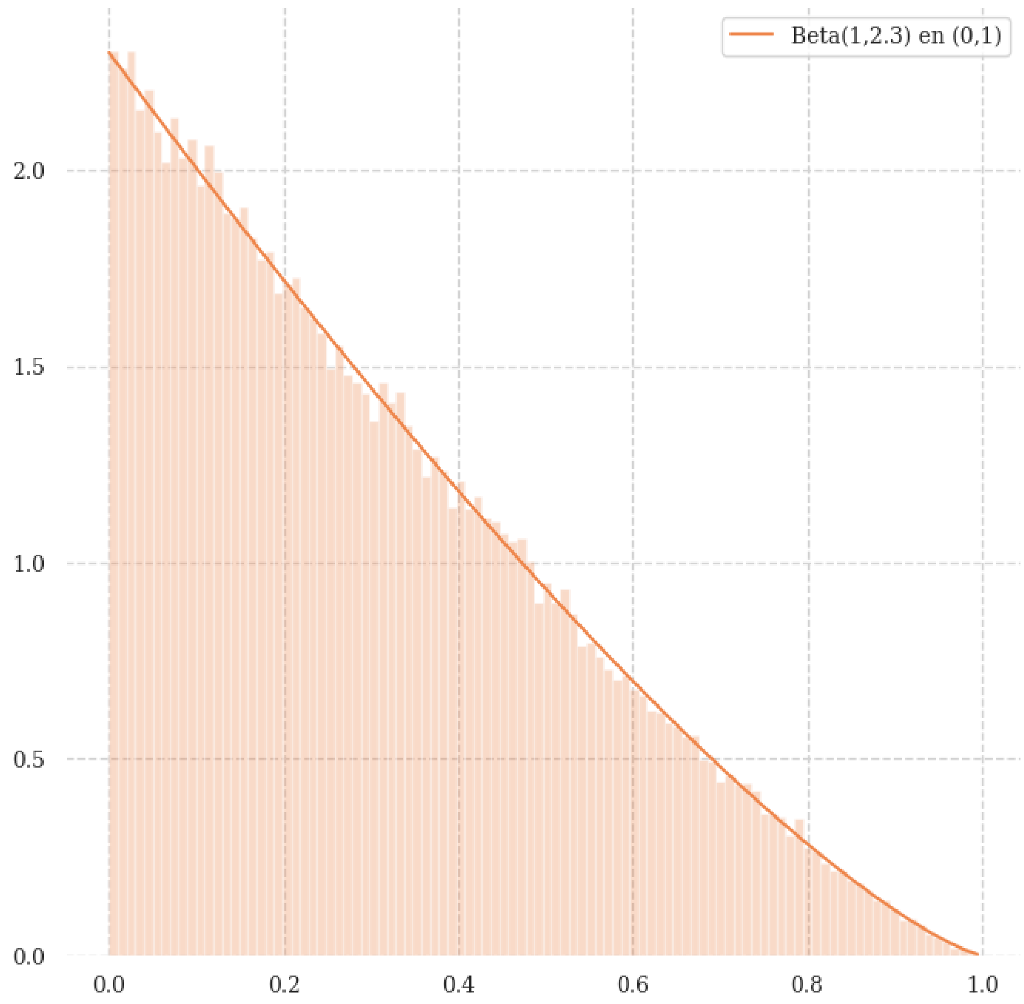
Ejercicio 2

Simulación Beta$(1, 2.3)$ por aceptación--rechazo

Utilice el método de aceptación y rechazo para simular una variable aleatoria con distribución Beta$(1, 2.3)$. Elabore un programa de cómputo que genere simulaciones de esta variable y compare resultados con la densidad teórica.

[3]:
```
def rbeta_alpha1_beta(beta=2.0, s=3.0, n=100000):
    X, trials = [], 0
    while len(X) < n:
        y = rng.random() * s           # Unif(0,s)
        u = rng.random()
        if u <= (1 - y/s)**(beta - 1):
            X.append(y)
        trials += 1
    X = np.array(X)
    acc = len(X)/trials
    return X, acc, trials

# Beta(1, 2.3) en (0,1): beta=2.3, s=1
x1, acc1, tr1 = rbeta_alpha1_beta(beta=2.3, s=1.0, n=100000)
print(f"Beta(1,2.3) en (0,1): aceptación empírica ≈ {acc1:.3f}, teórica = {1/2.3:.3f}, intentos/muestra ≈ {tr1/len(x1):.
↪2f}")

x = np.linspace(0, 3, 200)
plt.plot(x[x<=1], 2.3*(1 - x[x<=1])**1.3, label="Beta(1,2.3) en (0,1)", color='C1')
plt.hist(x1, bins=100, density=True, alpha=0.3, color='C1')
plt.legend()
plt.show()
```

```
Beta(1,2.3) en (0,1): aceptación empírica ≈ 0.433, teórica = 0.435,
intentos/muestra ≈ 2.31
```


Beta(1,2.3) en (0,1)
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Ejercicio 3

Considere la siguiente función de distribución acumulada

$$F(x) = x^n, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

a) Método de la transformada inversa

Aplique el método de la transformada inversa para dar un algoritmo que simule una variable aleatoria con la función de distribución anterior.
Sea $U \sim \mathrm{Unif}(0,1)$. Definimos

$$X = U^{1/n}.$$

Entonces

$$P(X \leqslant x) = P(U^{1/n} \leqslant x) = P(U \leqslant x^n) = x^n = F(x),$$

luego X tiene CDF $F(x) = x^n$.
Algoritmo: genera U y regresa $U^{1/n}$. Aceptación: 100 %.

b) Método de aceptación--rechazo

Aplique el método de aceptación y rechazo para el mismo caso.
La densidad objetivo es $f(x) = F'(x) = n\,x^{n-1}$ en $(0,1)$.
Toma propuesta $g(x) = 1$ (uniforme en $(0,1)$). Entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} = n\,x^{n-1} \leqslant \max_{x\in(0,1)} n\,x^{n-1} = n \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = n}.$$

Criterio: genera $Y \sim \mathrm{Unif}(0,1)$, $U \sim \mathrm{Unif}(0,1)$ y acepta si

$$U \leqslant \frac{f(Y)}{c\,g(Y)} = \frac{nY^{n-1}}{n} = Y^{\,n-1}.$$

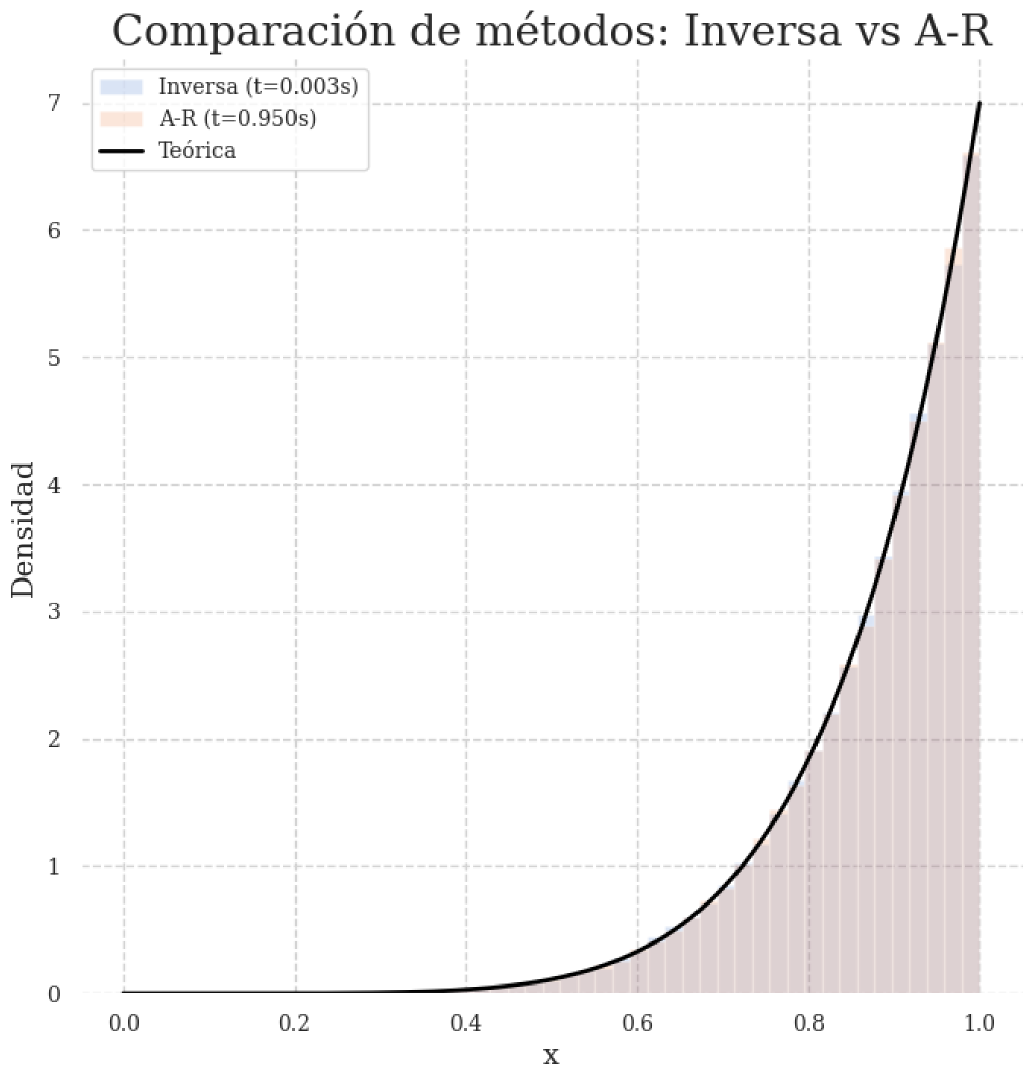
Eficiencia: prob. de aceptación $= 1/c = 1/n$; intentos esperados $= c = n$.

c) Implementación computacional

Elabore un programa de cómputo para implementar ambos algoritmos.

[4]:
```python
def sample_inverse(n, size):
    u = rng.random(size)
    return u**(1.0/n)

def sample_ar(n, size):
    X, trials = [], 0
    while len(X) < size:
        y = rng.random()
        u = rng.random()
        trials += 1
        if u <= y**(n-1):
            X.append(y)
    return np.array(X), len(X)/trials, trials

# Demo
n, N = 7, 100_000

t0 = time.perf_counter()
x_inv = sample_inverse(n, N)
t_inv = time.perf_counter() - t0

t0 = time.perf_counter()
x_ar, acc_ar, props = sample_ar(n, N)
t_ar = time.perf_counter() - t0

print(f"[Inversa]  tiempo={t_inv:.3f}s,   rechazos=0,            uniformes≈{N}")
print(f"[A-R]      tiempo={t_ar:.3f}s,   aceptación≈{acc_ar:.3f} (teórica {1/n:.3f}), "
      f"propuestas={props} (~{props/N:.2f} por muestra), uniformes≈{2*props}")

# Chequeo de momentos (teóricos: E[X]=n/(n+1), Var[X]=n/[(n+2)(n+1)^2])
def stats(name, x):
    mean = x.mean()
    var  = x.var()
    mt   = n/(n+1)
    vt   = n/((n+2)*(n+1)**2)
    print(f"{name}: mean≈{mean:.4f} vs {mt:.4f}, var≈{var:.4f} vs {vt:.4f}")

stats("Inversa", x_inv)
stats("A-R    ", x_ar)

# Plot histograms for both methods
bins = np.linspace(0, 1, 50)
plt.hist(x_inv, bins=bins, density=True, alpha=0.2, label=f"Inversa (t={t_inv:.3f}s)")
plt.hist(x_ar, bins=bins, density=True, alpha=0.2, label=f"A-R (t={t_ar:.3f}s)")

# Overlay the theoretical density
x_vals = np.linspace(0, 1, 200)
theoretical_density = n * x_vals**(n - 1)
plt.plot(x_vals, theoretical_density, label="Teórica", color="black", linewidth=2)

plt.title("Comparación de métodos: Inversa vs A-R")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("Densidad")
plt.legend()
plt.show()
```

```
[Inversa]  tiempo=0.003s,   rechazos=0,            uniformes≈100000
[A-R]      tiempo=0.950s,   aceptación≈0.142 (teórica 0.143), propuestas=703088
(~7.03 por muestra), uniformes≈1406176
Inversa: mean≈0.8749 vs 0.8750, var≈0.0121 vs 0.0122
A-R    : mean≈0.8749 vs 0.8750, var≈0.0122 vs 0.0122
```


Comparación de métodos: Inversa vs A-R
Inversa (t=0.003s)
A-R (t=0.950s)
Teórica
Densidad
x
0
1
2
3
4
5
6
7
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

d) Eficiencia comparada

Compare la eficiencia de ambos métodos y justifique cuál es más recomendable.

- **Transformada inversa:** 1 uniforme por muestra, 0 rechazos → **siempre más eficiente** aquí.
- **A–R:** aceptación $1/n$ (requiere $\approx n$ propuestas y $\approx 2n$ uniformes por muestra aceptada).

Ejercicio 4

En el contexto del método de aceptación y rechazo para generar valores de la distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, demuestre directamente los siguientes resultados:

a) Densidad de |Z| para Z∼N(0,1)

Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, entonces $|Z|$ tiene función de densidad

$$f_{|Z|}(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, e^{-x^2/2}, \qquad x > 0.$$

Sea $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Para $x > 0$:

$$P(|Z| \leqslant x) = P(-x \leqslant Z \leqslant x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1.$$

Derivando:

$$f_{|Z|}(x) = \frac{d}{dx}\,[2\Phi(x) - 1] = 2\phi(x) = \boxed{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-x^2/2}}, \quad x > 0.$$

b) Simetrización con S·|Z|

Si $S \sim \text{Unif}\{+1, -1\}$ es independiente de $|Z|$ (con Z como en (a)), entonces $S\,|Z| \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
Sea $S \sim \text{Unif}\{+1, -1\}$ independiente de $|Z|$. Para $z \in \mathbb{R}$:

$$f_{S|Z|}(z) = \tfrac{1}{2} f_{|Z|}(|z|) + \tfrac{1}{2} f_{|Z|}(|z|) = f_{|Z|}(|z|) = \phi(z),$$

luego $\boxed{S\,|Z| \sim \mathcal{N}(0, 1)}$.

c) Evento de aceptación con X∼Exp(1) y U∼Unif(0,1)

Sea $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ con $\lambda = 1$ y $U \sim \text{Unif}(0,1)$ independientes. Considere el evento

$$\{U \leqslant \exp\big(-\tfrac{(X-1)^2}{2}\big)\}.$$

Entonces, la distribución de X condicionada a este evento tiene densidad

$$f(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, e^{-x^2/2}, \qquad x > 0,$$

la cual corresponde a la densidad del valor absoluto de una normal estándar $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Propuesta $g(x) = e^{-x}$ en $x > 0$ y objetivo $f(x) = f_{|Z|}(x)$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{-x^2/2}}{e^{-x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\, e^{1/2}.$$

El máximo es en $x = 1$, así

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}}, \qquad \frac{f(x)}{c\,g(x)} = e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}.$$

Regla: genera $Y \sim \text{Exp}(1)$, $U \sim U(0,1)$; acepta $|Z| = Y$ si

$$\boxed{U \leqslant \exp\Big(-\tfrac{(Y-1)^2}{2}\Big)}.$$

Luego toma $Z = S|Z|$ con $S \sim \text{Unif}\{\pm 1\}$. Prob. de aceptación $= 1/c = \boxed{\sqrt{\pi/(2e)}}$.

d) Probabilidad con V1,V2∼Exp(1)

Sean V_1 y V_2 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como $\mathrm{Exp}(\lambda)$ con $\lambda = 1$. Entonces se cumple que

$$\mathbb{P}\Big(V_1 \geqslant \tfrac{(V_2-1)^2}{2}\Big) = \sqrt{\tfrac{\pi}{2e}}\,.$$

Si $V_1, V_2 \overset{iid}{\sim} \mathrm{Exp}(1)$,

$$\begin{aligned} P\Big[V_1 \geqslant \frac{(V_2-1)^2}{2}\Big] &= \int_0^\infty P\Big[V_1 \geqslant \tfrac{(y-1)^2}{2}\Big]\, e^{-y}\, dy = \int_0^\infty e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}\, e^{-y}\, dy \\ &= \int_0^\infty \exp\Big(-\tfrac{y^2+1}{2}\Big)\, dy = e^{-1/2}\int_0^\infty e^{-y^2/2}\, dy = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2e}}}. \end{aligned}$$

Coincide con la prob. de aceptación de (c).

Ejercicio 5

Implemente un algoritmo de simulación para la distribución Gamma con los siguientes parámetros:

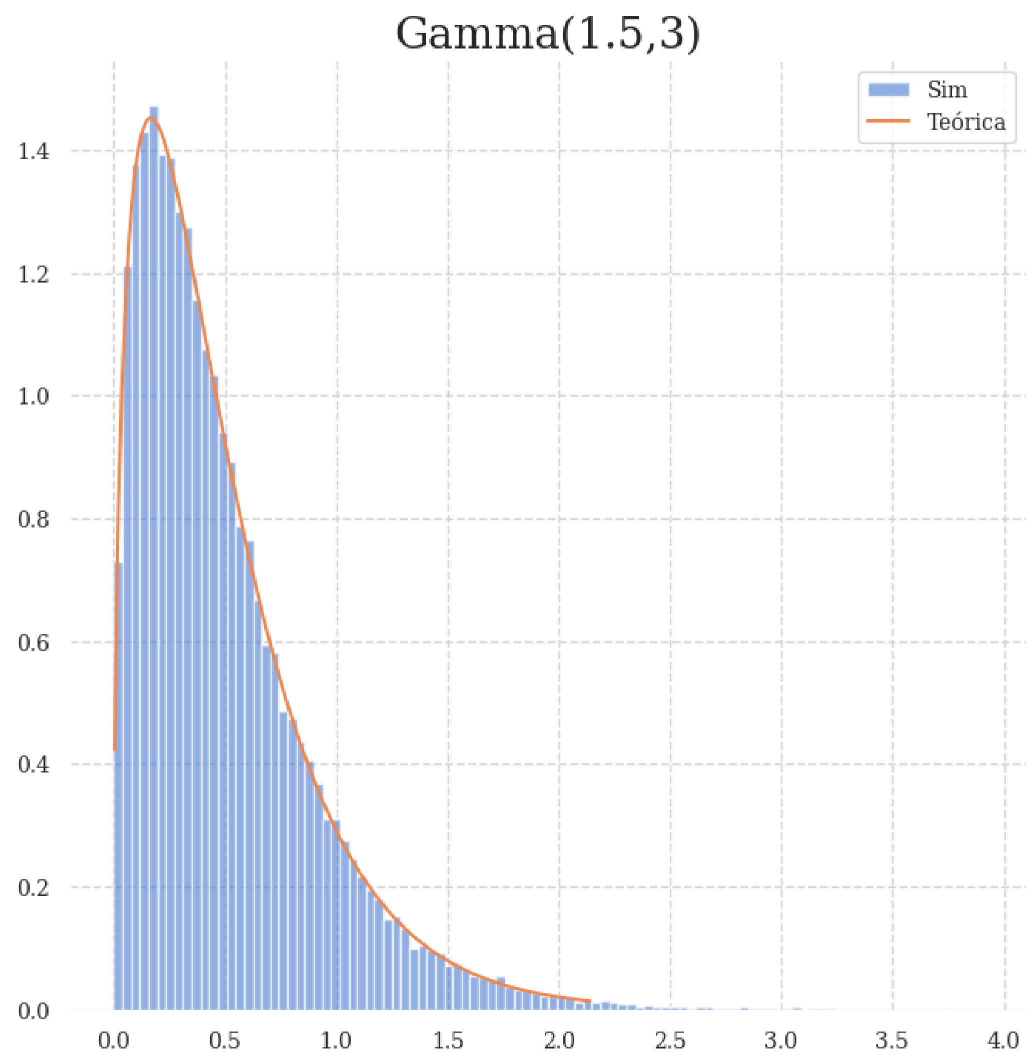
Elabore un programa de cómputo que genere simulaciones de ambas distribuciones y compare los resultados empíricos con las densidades teóricas correspondientes.

a) Gamma$(1.5, 3)$

Gamma$(1.5, 3)$

[5]:
```python
# (i) A-R para alpha>1 con mu = lambda/alpha (óptimo)
def rgamma_alpha_gt1(alpha, lam, n=60000):
    mu = lam / alpha
    K = lam**alpha / math.gamma(alpha)  # constante de f
    # c(mu) evaluada en el máximo:
    c = (K/mu) * ((alpha-1)/(lam-mu))**(alpha-1) * math.e**(1-alpha)
    X, trials = [], 0
    while len(X) < n:
        y = rng.exponential(1/mu)                    # Exp(mu): media 1/mu
        u = rng.random()
        if u <= (K * y**(alpha-1) * math.exp(-lam*y)) / (c * (mu * math.exp(-mu*y))):
            X.append(y)
        trials += 1
    return np.array(X), len(X)/trials, c

# (ii) Reducción de orden para alpha in (0,1)
def rgamma_alpha_lt1(alpha, lam, n=60000):
    Y, accY, cY = rgamma_alpha_gt1(alpha+1, lam, n)  # primero Gamma(alpha+1, lam)
    U = rng.random(n)
    X = Y * (U ** (1.0/alpha))
    return X

# (a) Gamma(1.5, 3)
x_a, acc_a, c_a = rgamma_alpha_gt1(1.5, 3.0, 60000)
print(f"Gamma(1.5,3): aceptación≈{acc_a:.3f}, 1/c≈{1/c_a:.3f}")

# Comparación con densidad teórica
xs = np.linspace(0, np.quantile(x_a, 0.995), 400)[1:]
f = (3.0**1.5 / math.gamma(1.5)) * xs**(1.5-1) * np.exp(-3.0*xs)
plt.figure(); plt.hist(x_a, bins=100, density=True, alpha=0.6, label="Sim")
plt.plot(xs, f, label="Teórica"); plt.legend(); plt.title("Gamma(1.5,3)")
plt.show()
```

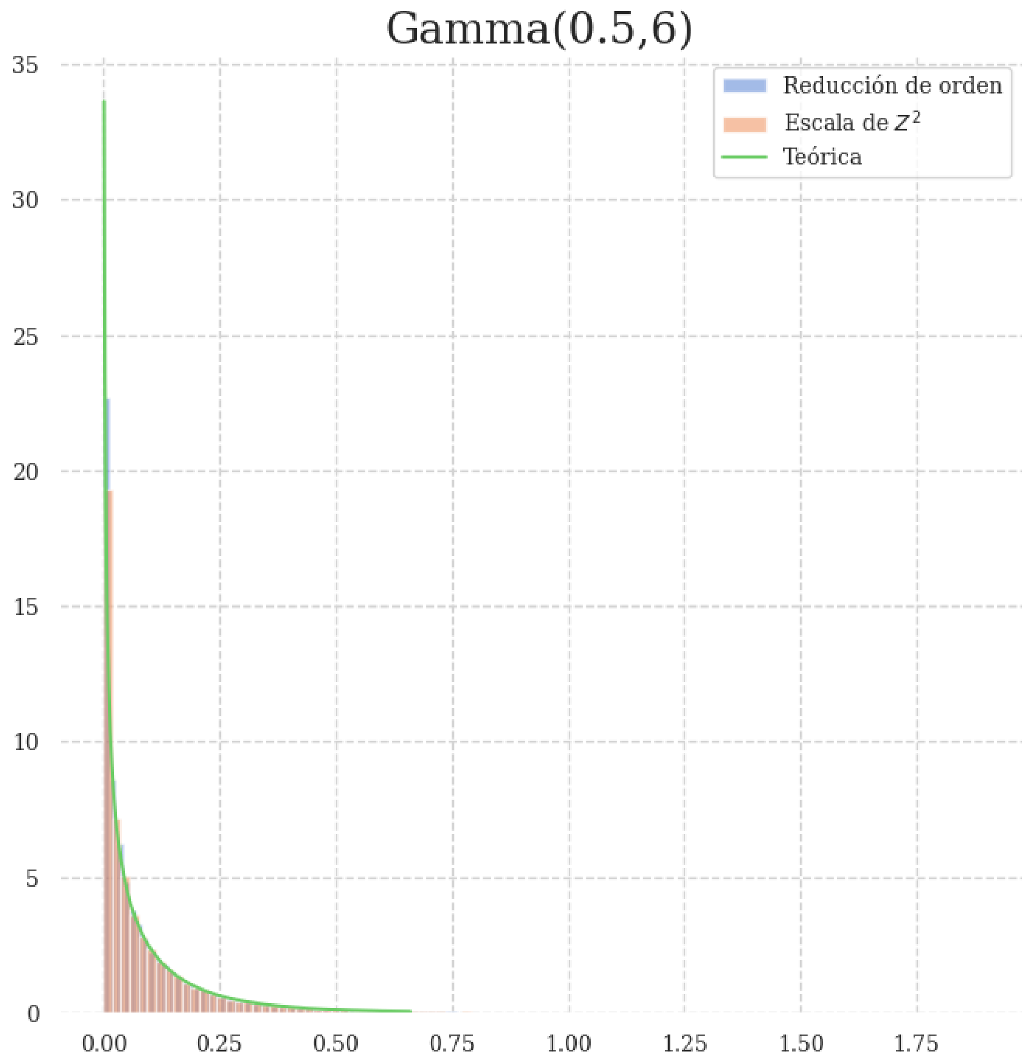
```
Gamma(1.5,3): aceptación≈0.797, 1/c≈0.795
```


Gamma(1.5,3)
Sim
Teórica
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0

b) Gamma$(0.5, 6)$

Gamma$(0.5, 6)$

[6]:
```
# (b) Gamma(0.5, 6) por dos vías
x_b1 = rgamma_alpha_lt1(0.5, 6.0, 60000)   # reducción de orden

# vía chi-cuadrado: Z^2 ~ Gamma(0.5, 0.5)  =>  (Z^2)/12 ~ Gamma(0.5, 6)
Z = rng.standard_normal(60000)
x_b2 = (Z**2) / 12.0

# Densidad teórica
xs = np.linspace(0, np.quantile(x_b1, 0.995), 400)[1:]
f = (6.0**0.5 / math.gamma(0.5)) * xs**(0.5-1) * np.exp(-6.0*xs)

plt.figure()
plt.hist(x_b1, bins=100, density=True, alpha=0.5, label="Reducción de orden")
plt.hist(x_b2, bins=100, density=True, alpha=0.5, label=r"Escala de $Z^2$")
plt.plot(xs, f, label="Teórica"); plt.legend(); plt.title("Gamma(0.5,6)")
plt.show()

print(f"Medias: b1≈{x_b1.mean():.4f}, b2≈{x_b2.mean():.4f}, teórica={0.5/6:.4f}")
print(f"Varianzas: b1≈{x_b1.var():.4f}, b2≈{x_b2.var():.4f}, teórica={0.5/6**2:.4f}")
```




```
Medias: b1≈0.0832, b2≈0.0836, teórica=0.0833
Varianzas: b1≈0.0139, b2≈0.0143, teórica=0.0139
```