Actividad 1.2

Temas Selectos I (Simulación Estocástica)

Prof. Rubén Blancas Rivera

August 22, 2025

Instrucciones:

- El trabajo debe realizarse en equipos de máximo **tres integrantes**.
- La entrega se debe realizar en un solo archivo en formato **PDF**.
- El archivo debe subirse exclusivamente a **Blackboard**, en la actividad correspondiente.

Instructions

1. **Distribución Uniforme**

   Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo (a, b). Use el método de la función inversa para demostrar que un valor x de esta distribución se puede generar a partir de la siguiente expresión, en donde u es un valor de la distribución uniforme $(0, 1)$:

   $$x = a + (b - a)\, u.$$

2. **Distribución Discreta**

Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}4, & x = 1, \\ 0{,}3, & x = 2, \\ 0{,}2, & x = 3, \\ 0{,}1, & x = 4, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se busca aplicar el método de la función inversa para producir valores de esta distribución.

a) Grafique $f(x)$.

b) Encuentre y grafique la función de distribución acumulada $F(x)$.

c) Encuentre y grafique la función inversa $F^{-1}(u)$.

d) Elabore un programa de cómputo que utilice el método de la función inversa para generar $n = 500$ valores $x_1, \ldots, x_n$ de X.

e) Elabore un histograma de probabilidad (en donde el área de las barras suma uno) de los números obtenidos y compare con la gráfica de la función de probabilidad.

3. **Distribución Exponencial** Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial $\exp(\lambda)$, con parámetro $\lambda > 0$. Use el método de la función inversa para demostrar que un valor x de esta distribución se puede obtener a partir de la siguiente expresión, en donde u es un valor de la distribución uniforme $(0, 1)$:

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(u).$$

4. **Distribución Weibull.** Sea X una variable aleatoria con distribución $\text{Weibull}(r, \lambda)$. Use el método de la función inversa para demostrar que un valor x de la variable X se puede obtener a partir de la expresión que aparece abajo, en donde u es un valor de la distribución $\text{Unif}(0, 1)$:

$$x = \frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{1}{r} \ln\big(-\ln(1-u)\big)\right).$$

5. **Distribución Cauchy.** Sea X una variable aleatoria con distribución Cauchy(a, b). Use el método de la función inversa para demostrar que un valor x de esta distribución se puede obtener a partir de la expresión que aparece abajo, en donde u es un valor de la distribución Unif$(0, 1)$:

$$x \;=\; a + b\,\tan\big[\,\pi\,(u - \tfrac{1}{2})\,\big].$$

6. **Distribución Pareto Tipo I.** Sea X una variable aleatoria con distribución Pareto(a, b) de tipo I. Use el método de la función inversa para demostrar que un valor x de esta distribución se puede obtener a partir de la expresión que aparece abajo, en donde u es un valor de la distribución Unif$(0, 1)$:

$$x \;=\; b\,u^{-\frac{1}{a}}.$$

7. **Mínimo.** Encuentre la función de distribución, y su inversa, de la variable aleatoria

$$X_{(1)} := \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\},$$

en términos de la función de distribución $F(x)$ de una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$. Use el método de la función inversa para explicar un método para generar valores de la variable aleatoria $X_{(1)}$.

8. **Distribución mixta.** Sea Y una variable aleatoria con distribución Exp(λ) y sea $M > 0$ una constante. Defina la variable aleatoria

$$X := \text{mín}\{Y, M\},$$

y denote por $F(x)$ su función de distribución.

   a) Encuentre y grafique $F(x)$.
   b) Encuentre y grafique $F^{-1}(u)$.
   c) Compruebe que $F(F^{-1}(u)) \geq u$, para $0 < u < 1$.
   d) Compruebe que $F^{-1}\big(F(x)\big) \leq x$, para x tal que $0 < F(x) < 1$.
   e) Explique la manera en la que pueden obtenerse valores de la variable aleatoria X por el método de la función inversa.

9. **Distribución mixta.** Sea Y una variable aleatoria con distribución Exp(λ) y sea $M > 0$ una constante. Defina la variable aleatoria

$$X := \text{máx}\{Y, M\},$$

y denote por $F(x)$ su función de distribución.

a) Encuentre y grafique $F(x)$.

b) Encuentre y grafique $F^{-1}(u)$.

c) Compruebe que $F(F^{-1}(u)) \geq u$, para $0 < u < 1$.

d) Compruebe que $F^{-1}(F(x)) \leq x$, para x tal que $0 < F(x) < 1$.

e) Explique la manera en la que pueden generarse valores de la variable aleatoria X por el método de la función inversa.

10. Sea X una variable aleatoria con función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \dfrac{x+2}{2}, & -2 < x < -1, \\ \dfrac{1}{2}, & -1 \leq x < 1, \\ \dfrac{x}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

a) Grafique $F(x)$.

b) Encuentre y grafique $F^{-1}(u)$.

c) Compruebe que $F(F^{-1}(u)) \geq u$, para $0 < u < 1$.

d) Compruebe que $F^{-1}(F(x)) \leq x$, para x tal que $0 < F(x) < 1$.

e) Explique la manera en la que pueden generarse valores de la variable aleatoria X por el método de la función inversa.

f) Encuentre y grafique la función de densidad $f(x)$ de la variable X.

g) Usando una computadora y el método de la función inversa, genere $n = 500$ valores $x_1, \ldots, x_n$ de la variable X, elabore un histograma de probabilidad y compare con $f(x)$.

h) Demuestre que $\mathbb{E}[X] = 0$.

i) Compruebe que $\bar{x} = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \approx 0$.

11. **Distribución Bernoulli.** Sea $U \sim \text{Unif}(0,1)$ y defina la variable aleatoria X como aparece abajo, en donde $0 < p < 1$. Demuestre que X tiene distribución Bernoulli(p):

$$X = \mathbf{1}_{(0,p]}(U) \;=\; \begin{cases} 1, & U \leq p, \\ 0, & U > p. \end{cases}$$

12. **Variable aleatoria discreta.** Considere una variable aleatoria X con distribución

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}3, & x = 1, \\ 0{,}5, & x = 2, \\ 0{,}2, & x = 3, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   a) Grafique $f(x)$.
   b) Encuentre y grafique $F(x)$.
   c) Encuentre y grafique $F^{-1}(u)$.
   d) Encuentre $\mathbb{E}[X]$.
   e) Encuentre $\text{Var}(X)$.
   f) Elabore un programa de cómputo que use el método de la función inversa para generar $n = 200$ valores $x_1, \ldots, x_n$ de X.
   g) Elabore un histograma de probabilidad de los valores obtenidos $x_1, \ldots, x_n$ y compare con la gráfica de $f(x)$.
   h) Compruebe que $\mathbb{E}[X] \approx \bar{x} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.
   i) Compruebe que $\text{Var}(X) \approx \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$.

13. Elabore un programa de cómputo que use el método de la función inversa para producir $n = 100$ valores de una variable aleatoria discreta X con distribución:

   a) $\text{Bin}(m,p)$, con $m = 10$ y $p = \frac{1}{3}$.
   b) $\text{Geo}(p)$, con $p = \frac{3}{4}$.
   c) $\text{Poisson}(\lambda)$, con $\lambda = 2$.