Cociente de Uniformes

Temas Selectos I

Dr. Rubén Blancas Rivera

Universidad de las Américas Puebla

Otoño 2025

Content

Cociente de Uniformes

- En algunos casos, la distribución de una variable aleatoria continua se puede representar como la distribución que se obtiene al tomar el cociente de dos variables aleatorias con distribución uniforme.
- Vamos a mostrar que la manera en la que esta representación, junto con el método de aceptación y rechazo, producen un algoritmo para la simulación de ciertas variables aleatorias.

Cociente de Uniformes

Este método fue propuesto por A. J. Kinderman y J. F. Monahan en 1977 y está basado en el siguiente resultado.

Teorema (Cociente de Uniformes)

Sea $h(x) \geq 0$ una función integrable, acotada y tal que:

1. $0 < \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, dx < \infty$.
2. $\sup_x |x|\ h(x) < \infty$.

Defina la región

$$S = \left\{(u,v) : 0 < u < \sqrt{h(u/v)},\ \tfrac{v}{u} \in \mathrm{sop}(h)\right\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

en donde $\mathrm{sop}(h) = \{x : h(x) > 0\}$ es el soporte de $h(x)$.
Si (U,V) es un vector aleatorio con distribución uniforme sobre la región S, entonces el cociente $\frac{V}{U}$ tiene función de densidad

$$f(x) = \frac{h(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, dt}.$$

Cociente de Uniformes

- A partir de una función $h(x)$ con las características indicadas, se puede construir la función de densidad $f(x)$.
- Valores de esta distribución se pueden obtener a través del cociente $\frac{V}{U}$ de dos variables aleatorias con distribución uniforme sobre la región S.
- A su vez, valores de estas variables aleatorias uniformes pueden obtenerse mediante una transformación simple de la distribución $\mathrm{Unif}(0,1)$.

Área de la región S

El área de la región S es

$$|S| = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx.$$

Distribución Exponencial

Supongamos entonces que X tiene función de densidad

$$f(x) = e^{-x}\, I_{(0,\infty)}(x).$$

Tomaremos a $h(x)$ como la misma función $f(x)$. No es difícil verificar que se cumplen las condiciones

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx < \infty \quad \text{y} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|\,h(x) < \infty.$$

Distribución Exponencial

Siguiendo el procedimiento explicado antes, se debe considerar la región

$$\begin{aligned} S &= \left\{(u,v) : 0 < u < h\left(\tfrac{v}{u}\right),\ \tfrac{v}{u} \in \operatorname{sop}(h)\right\} \\ &= \left\{(u,v) : 0 < u < e^{-v/u},\ \tfrac{v}{u} \in (0,\infty)\right\}. \end{aligned}$$

Distribución Exponencial

Puesto que $u > 0$, tenemos que también $v > 0$, pues se debe satisfacer que $\frac{v}{u} \in (0, \infty)$.
Colocando la raíz cuadrada dentro de la exponencial, obtenemos

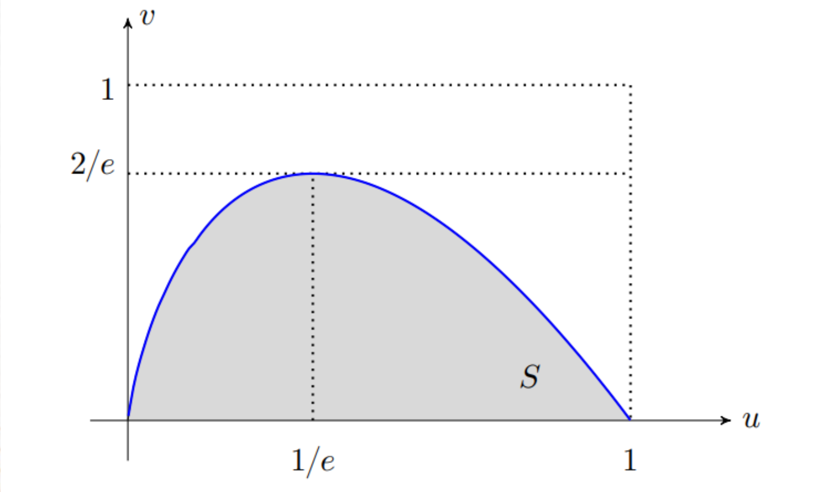
$$S = \left\{ (u, v) : 0 < u < \exp\left(-\tfrac{v}{2u}\right),\ v > 0 \right\}.$$

Distribución Exponencial

Ahora observamos que $-\frac{v}{2u}$ es negativo y, por lo tanto, el valor de la exponencial tiene a 1 como cota superior.
Además, resolviendo para v en la desigualdad que involucra a u y v conjuntamente, se encuentra finalmente la siguiente expresión de la región S:

$$S = \left\{(u, v) : 0 < u < 1,\ 0 < v < -2u\ln(u)\right\}.$$

Distribución Exponencial



Distribución Exponencial

Puede comprobarse para este caso particular que el área de la región S es

$$|S| = \int_0^1 \left(-2u \ln u \right) du = -\int_0^1 \left(\frac{d}{du} u^2 \right) \ln u \, du = \tfrac{1}{2}.$$

Algoritmo

1. Generar $(u, v) \sim \mathrm{Unif}(0, 1) \times \mathrm{Unif}(0, 1)$.
2. Si $v < -2u \ln(u)$, aceptar (u, v) como un valor de $\mathrm{Unif}(S)$; en caso contrario, regresar al paso 1.
3. Calcular $x = v/u$.
4. Sea $X = x/\lambda$.
5. Entonces $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Distribución Normal

Aplicaremos el método del cociente de uniformes para generar valores de la distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Recordemos que es suficiente obtener valores de X con distribución $\mathcal{N}(0, 1)$, pues

$$\mu + \sigma X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

Distribución Normal

Sea X con función de densidad

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Podemos considerar a $h(x)$ como $f(x)$, pero por simplicidad en la determinación de la región S tomaremos

$$h(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

No es difícil verificar que se cumplen las condiciones

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx < \infty \quad \text{y} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|\, h(x) < \infty.$$

Distribución Normal

Siguiendo el procedimiento explicado antes, se debe considerar la región

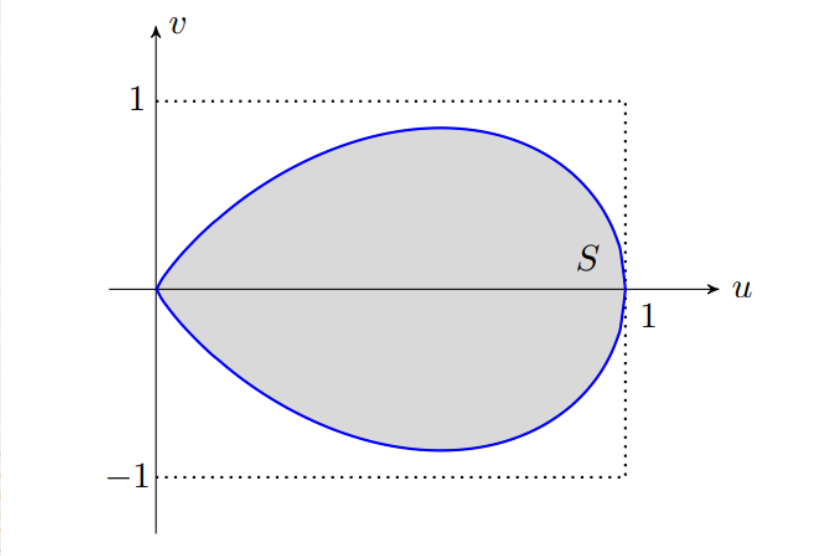
$$S = \left\{(u,v) : 0 < u < \sqrt{h\left(\tfrac{v}{u}\right)},\ \tfrac{v}{u} \in \operatorname{supp}(h)\right\}$$

$$= \left\{(u,v) : 0 < u < \sqrt{\exp\left(-\tfrac{v^2}{2u^2}\right)},\ \tfrac{v}{u} \in (-\infty,\infty)\right\}$$

$$= \left\{(u,v) : 0 < u < \exp\left(-\tfrac{v^2}{4u^2}\right),\ v \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \{(u,v) : 0 < u < 1, v^2 < -4u^2 \ln(u).\}$$

Distribución Normal



Distribución Normal

Puede comprobarse para este caso particular que el área de la región S es

$$
\begin{aligned}
|S| &= 2\int_0^1 \sqrt{-4u^2\ln(u)}\,du \\
&= 2\int_0^1 2u\sqrt{\ln\left(\tfrac{1}{u}\right)}\,du \\
&= 8\int_0^\infty v^2 e^{-2v^2}\,dv, \quad v^2 := \ln\left(\tfrac{1}{u}\right).
\end{aligned}
$$

Distribución Normal

Además,

$$|S| = 4\sqrt{2\pi\sigma^2}\,\mathbb{E}[W^2], \quad W \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2),\ \sigma^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Por lo tanto,

$$|S| = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx.$$

Distribución Normal

1. Generar $(u, v) \sim \mathrm{Unif}(0, 1) \times \mathrm{Unif}(-1, 1)$.
2. Verificar la condición: si $v^2 < -4u^2 \ln(u)$, aceptar (u, v) como un valor de $\mathrm{Unif}(S)$; en caso contrario, regresar al paso 1.
3. Calcular el cociente $x = v/u$.
4. El valor x tiene distribución $\mathcal{N}(0, 1)$.
5. Finalmente, calcular $Y = \mu + \sigma x$, el cual tiene distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Generación de valores de variables aleatorias multivariadas

- Vamos a estudiar el método de von Neumann, y de aceptación y rechazo, para generar valores de vectores aleatorios, tanto en el caso discreto como continuo. Estos procedimientos son similares al caso unidimensional.

Método de Von Neumann

Proposición

Sea $f(x, y)$ una función de probabilidad bivariada con soporte el conjunto finito $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \times \{y_1, \ldots, y_m\}$. Sea (X, Y) una variable con distribución uniforme sobre S e independiente de $U \sim \text{Unif}(0, 1)$. Entonces, se cumple que

$$\mathbb{P}\big(X = x,\, Y = y \,\big|\, U \leq f(X, Y)\big) = f(x, y), \quad \text{para } (x, y) \in S.$$

Método de Von Neumann

- Si tienes una función de probabilidad bivariada $f(x, y)$ con soporte finito S,
- puedes construir un procedimiento que, a partir de una distribución uniforme sobre S y un número uniforme independiente $U \sim \text{Unif}(0, 1)$,
- genere una pareja (X, Y) que efectivamente sigue la distribución $f(x, y)$.

Método de Von Neumann

La igualdad

$$\mathbb{P}\big(X = x, Y = y \,\big|\, U \leq f(X,Y)\big) = f(x,y), \quad (x,y) \in S,$$

nos dice que, al condicionar en el evento de aceptación $U \leq f(X,Y)$, el par (X,Y) termina distribuyéndose exactamente según la ley deseada $f(x,y)$.

Método de Von Neumann

Demostración.
Sea $(x, y) \in S$. Observemos primero que

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \frac{1}{nm},$$

y además

$$\mathbb{P}\big(U \leq f(X,Y) \,\big|\, X = x, Y = y\big) = \mathbb{P}\big(U \leq f(x,y)\big) = f(x,y).$$

Método de Von Neumann

or definición de probabilidad condicional:

$$\mathbb{P}\big(X = x, Y = y \,\big|\, U \leq f(X,Y)\big) = \frac{\mathbb{P}\big(X = x, Y = y, U \leq f(X,Y)\big)}{\mathbb{P}\big(U \leq f(X,Y)\big)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\big(U \leq f(X,Y) \,\big|\, X = x, Y = y\big)\,\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\sum_{(u,v)\in S} \mathbb{P}\big(U \leq f(X,Y) \,\big|\, X = u, Y = v\big)\,\mathbb{P}(X = u, Y = v)}$$

$$= \frac{f(x,y)\,\frac{1}{nm}}{\sum_{(u,v)\in S} f(u,v)\,\frac{1}{nm}}$$

$$= f(x,y).$$

Ejemplo

Sea el soporte

$$S = \{0,1\} \times \{0,1\},$$

y definamos la función de probabilidad bivariada

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.4 & \text{si } (x,y) = (0,0), \\ 0.1 & \text{si } (x,y) = (0,1), \\ 0.2 & \text{si } (x,y) = (1,0), \\ 0.3 & \text{si } (x,y) = (1,1). \end{cases}$$

Algoritmo

El procedimiento del método de von Neumann es el siguiente:

1. Generamos un candidato (X, Y) uniforme sobre S. Cada punto tiene probabilidad $\frac{1}{4}$.
2. Generamos $U \sim \text{Unif}(0, 1)$.
3. Aceptamos el candidato (x, y) si $U \leq f(x, y)$.

Método de Von Neumann

Proposición.

Sea $f(x, y)$ una densidad bivariada con soporte $(a, b) \times (c, d)$, acotada por $M > 0$. Sean $U_1, U_2, U_3 \sim \text{Unif}(0, 1)$ independientes y definamos

$$X = a + (b - a)U_1, \quad Y = c + (d - c)U_2, \quad U = MU_3.$$

Entonces, la distribución de (X, Y) condicionada a $\{U \leq f(X, Y)\}$ es $f(x, y)$.

Demostración.
Sea $f(x, y)$ una densidad bivariada con soporte $(a, b) \times (c, d)$, acotada por $M > 0$. Sean $U_1, U_2, U_3 \sim \mathrm{Unif}(0, 1)$ independientes y definamos

$$X = a + (b - a)U_1, \quad Y = c + (d - c)U_2, \quad U = MU_3.$$

Entonces, la distribución de (X, Y) condicionada a $\{U \leq f(X, Y)\}$ es $f(x, y)$.