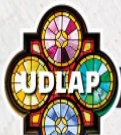


Variables comunes y antitéticas Temas Selectos I

Dr. Rubén Blancas Rivera

Universidad de las Américas Puebla

Otoño 2025



Contenido

Variables Comunes

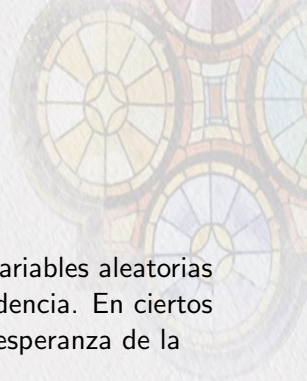
Variables Antitéticas

Ejemplos en Procesos de Poisson

Motivación

- ▶ Cálculo de integrales mediante Monte Carlo para funciones monótonas.
- ▶ Valoración de opciones financieras en modelos de Black–Scholes.
- ▶ Evaluación actuarial de reservas o medidas de riesgo (VaR , $TVaR$).
- ▶ Simulación de procesos físicos o de ingeniería (difusión, transporte, etc.).

Variables Comunes



Sea (X, Y) un vector aleatorio compuesto por variables aleatorias que pueden guardar cualquier relación de dependencia. En ciertos problemas se busca estimar por simulación una esperanza de la forma

$$\theta = \mathbb{E}(X - Y).$$

Variables Comunes

- ▶ La característica principal de una esperanza de este tipo es que se puede llevar a cabo el cálculo por separado en cada variable y, en este sentido, es posible usar únicamente la distribución marginal de cada variable.

Variables Comunes

- ▶ La característica principal de una esperanza de este tipo es que se puede llevar a cabo el cálculo por separado en cada variable y, en este sentido, es posible usar únicamente la distribución marginal de cada variable.

Si X_1, \dots, X_n y Y_1, \dots, Y_n son muestras aleatorias de las distribuciones marginales de X y Y , respectivamente, entonces se puede proponer el estimador insesgado:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i),$$

Cuya varianza es

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} (\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)) .$$

Algoritmo de Variables Comunes

- ▶ Supondremos que X y Y tienen funciones de distribución marginales $F(x)$ y $G(y)$, respectivamente.

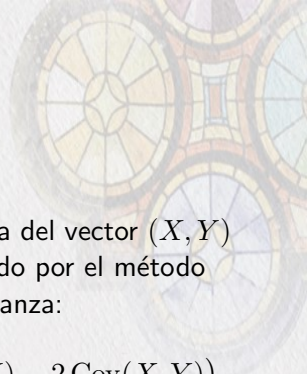
Algoritmo de Variables Comunes

- ▶ Supondremos que X y Y tienen funciones de distribución marginales $F(x)$ y $G(y)$, respectivamente.
- ▶ Consideraremos que el vector (X, Y) puede tener cualquier distribución, es decir, se puede establecer cualquier grado de dependencia entre X y Y , siempre y cuando las distribuciones marginales sean las indicadas: $F(x)$ y $G(y)$, respectivamente.

Algoritmo de Variables Comunes

- ▶ Supondremos que X y Y tienen funciones de distribución marginales $F(x)$ y $G(y)$, respectivamente.
- ▶ Consideraremos que el vector (X, Y) puede tener cualquier distribución, es decir, se puede establecer cualquier grado de dependencia entre X y Y , siempre y cuando las distribuciones marginales sean las indicadas: $F(x)$ y $G(y)$, respectivamente.
- ▶ De esta manera, para estimar el valor θ , se puede considerar la familia de todas las distribuciones bivariadas para (X, Y) que compartan las mismas distribuciones marginales $F(x)$ y $G(y)$.

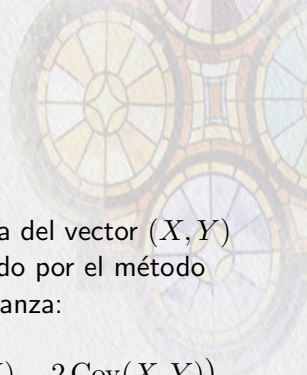
Algoritmo de Variables Comunes



Sea $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria del vector (X, Y) con una distribución dada. El estimador insesgado por el método de Monte Carlo directo dado en ahora tiene varianza:

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} \text{Var}(X - Y) = \frac{1}{n} (\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2 \text{Cov}(X, Y)).$$

Algoritmo de Variables Comunes



Sea $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria del vector (X, Y) con una distribución dada. El estimador insesgado por el método de Monte Carlo directo dado en ahora tiene varianza:

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} \text{Var}(X - Y) = \frac{1}{n} (\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2 \text{Cov}(X, Y)).$$

- La varianza se minimiza cuando la covarianza se maximiza.

Algoritmo de Variables Comunes

Definición

Sea (X, Y) un vector aleatorio. Suponga que X tiene función de distribución marginal $F(x)$ y Y tiene función de distribución marginal $G(y)$. Cuando X y Y se expresan en términos de una misma variable $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ como aparece abajo, se dice que se toma una **variable común** para representarlas.

$$X = F^{-1}(U),$$

$$Y = G^{-1}(U).$$

Variables Comunes

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{\theta}) &= \frac{1}{n} \text{Var}(X - Y) \\ &= \frac{1}{n} \text{Var}(F^{-1}(U) - G^{-1}(U)) \\ &= \frac{1}{n} [\text{Var}(F^{-1}(U)) + \text{Var}(G^{-1}(U)) - 2 \text{Cov}(F^{-1}(U), G^{-1}(U))] \\ &= \frac{1}{n} [\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2 \text{Cov}(F^{-1}(U), G^{-1}(U))] .\end{aligned}$$

Variables Comunes

Es posible demostrar que

$$\text{Cov}(F^{-1}(U), G^{-1}(U)) \geq 0,$$

Es posible demostrar que

$$\text{Cov}(F^{-1}(U), G^{-1}(U)) \geq 0,$$

- ▶ Por lo tanto, $\text{Var}(\hat{\theta})$ es menor o igual que la varianza que se obtiene cuando se generan valores separados para X y Y .

Ejemplo

Supongamos que un actuario desea comparar el *valor presente esperado* de dos anualidades vitalicias:

- ▶ **Anualidad A:** paga 1 unidad anual mientras el asegurado viva, con tasa de interés R_A .
- ▶ **Anualidad B:** paga 1 unidad anual mientras el asegurado viva, con tasa de interés R_B .

Ejemplo

El objetivo es estimar y comparar

$$\theta_A = \mathbb{E}[V_A], \quad \theta_B = \mathbb{E}[V_B],$$

donde V_A y V_B son los valores presentes simulados de cada anualidad.

Ejemplo

Sea T el tiempo de vida del asegurado, modelado como $T \sim \text{Exp}(\mu)$ con parámetro $\mu = 0.05$, y sea $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ una variable que representa la fluctuación de la tasa de interés.

$$R_A = 0.03 + 0.01Z,$$

$$R_B = 0.05 + 0.01Z.$$

Ejemplo

Sea T el tiempo de vida del asegurado, modelado como $T \sim \text{Exp}(\mu)$ con parámetro $\mu = 0.05$, y sea $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ una variable que representa la fluctuación de la tasa de interés.

$$R_A = 0.03 + 0.01Z,$$

$$R_B = 0.05 + 0.01Z.$$

- ▶ Ambas rentas se calculan usando el mismo valor de Z en cada simulación; esto constituye el uso de **variables comunes**.

Ejemplo

El valor presente de cada anualidad se obtiene como

$$V_A = \int_0^T e^{-R_A t} dt = \frac{1 - e^{-R_A T}}{R_A}, \quad V_B = \frac{1 - e^{-R_B T}}{R_B}.$$

El actuario desea estimar

$$\mathbb{E}[V_B - V_A],$$

usando el mismo conjunto de números aleatorios (U_i, Z_i) en ambas simulaciones.

Ejemplo

Si generamos $T_i = -\frac{1}{\mu} \ln(U_i)$, con $U_i \sim U(0, 1)$, y usamos el mismo Z_i para ambas rentas, los pares (V_{Ai}, V_{Bi}) estarán positivamente correlacionados. El estimador de la diferencia es entonces

$$\hat{\delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (V_{Bi} - V_{Ai}),$$

Ejemplo

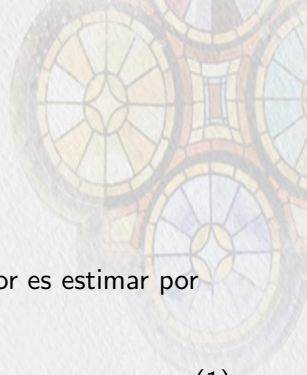
y su varianza

$$\text{Var}(\hat{\delta}) = \frac{1}{n} (\text{Var}(V_B) + \text{Var}(V_A) - 2 \text{Cov}(V_B, V_A)).$$

Dado que $\text{Cov}(V_B, V_A) > 0$, el uso de variables comunes reduce la varianza del estimador.

Ejemplo

- ▶ En términos actuariales, este método permite comparar dos productos de seguro o inversión bajo los mismos escenarios de mortalidad e interés, obteniendo una estimación más precisa de la diferencia esperada entre sus valores presentes.



Otro problema similar al de la subsección anterior es estimar por simulación una esperanza de la forma

$$\theta = E(X + Y). \quad (1)$$

Variables Antitéticas

- ▶ Nuevamente, la característica principal de este tipo de esperanzas es que se puede llevar a cabo un cálculo por separado en cada variable y es posible usar únicamente la distribución marginal de las variables.
- ▶ Como antes, supondremos que X y Y tienen funciones de distribución marginales $F(x)$ y $G(y)$, respectivamente.

Variables Antitéticas

Si X_1, \dots, X_n y Y_1, \dots, Y_n son muestras aleatorias de las distribuciones marginales de X y Y , respectivamente, entonces se puede proponer el estimador insesgado

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i),$$

cuya varianza es

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} (\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)).$$

Variables Antitéticas



Si $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ es una muestra aleatoria del vector (X, Y) , el estimador insesgado por el método de Monte Carlo directo para θ es

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i),$$

Variables Antitéticas

Cuya varianza es

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\theta}) &= \frac{1}{n} \text{Var}(X + Y) \\ &= \frac{1}{n} (\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)). \end{aligned}$$

Definición

Sea (X, Y) un vector aleatorio. Suponga que X tiene función de distribución marginal $F(x)$ y Y tiene función de distribución marginal $G(y)$. Cuando X y Y se expresan en términos de una variable $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ como aparece abajo, se dice que se toman **variables antitéticas** para representarlas:

$$X = F^{-1}(U),$$

$$Y = G^{-1}(1 - U).$$

Variables Antitéticas

Así, bajo la representación de la definición anterior (variables antitéticas),

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\theta}) &= \frac{1}{n} \text{Var}(X + Y) \\ &= \frac{1}{n} \text{Var}(F^{-1}(U) + G^{-1}(1 - U)) \\ &= \frac{1}{n} \left[\text{Var}(F^{-1}(U)) + \text{Var}(G^{-1}(1 - U)) \right. \\ &\quad \left. + 2 \text{Cov}(F^{-1}(U), G^{-1}(1 - U)) \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(F^{-1}(U), G^{-1}(1 - U)) \right]. \end{aligned}$$

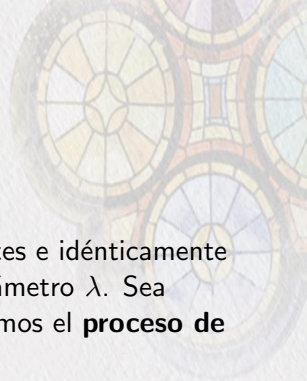
Varianza Mínima

- ▶ Es posible demostrar que

$$\text{Cov}(F^{-1}(U), G^{-1}(1 - U)) \leq 0,$$

- ▶ Por lo tanto, la varianza de $\hat{\theta}$ es menor o igual que la varianza $X + Y$ que se obtiene cuando se generan valores separados para X y Y .

Procesos de Poisson



Sean T_1, T_2, \dots variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial de parámetro λ . Sea $\tau_0 = 0$ y $\tau_n = T_1 + \dots + T_n$ para $n \geq 1$. Definimos el **proceso de Poisson de parámetro (intensidad) λ** por

$$N(s) = \max\{n : \tau_n \leq s\}, \quad s \geq 0.$$

Procesos de Poisson

- ▶ Las variables T_n representan los intervalos de tiempo entre eventos sucesivos (por ejemplo, llegadas de clientes a una cola, de llamadas a una central telefónica o de pacientes a la emergencia de un hospital).
- ▶ El valor $\tau_n = T_1 + \cdots + T_n$ es el instante en que ocurre el n -ésimo evento, y $N(s)$ es el número de eventos que han ocurrido hasta el instante s .

Procesos de Poisson

1. **Entrada:** intensidad $\lambda > 0$, horizonte $T_{\max} > 0$.
2. Inicializa: $t \leftarrow 0$, $k \leftarrow 0$. (Aquí t es el tiempo actual y k el número de eventos.)
3. **Mientras** $t < T_{\max}$ **hacer:**

3.1 Genera $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ y calcula el interarribo

$$T = F^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \quad (\text{equiv. } -\frac{1}{\lambda} \ln U).$$

3.2 Actualiza el tiempo: $t \leftarrow t + T$.

3.3 **Si** $t \leq T_{\max}$ **entonces:**

3.3.1 $k \leftarrow k + 1$ (ocurrió un evento).

3.3.2 Registra el tiempo de llegada $\tau_k \leftarrow t$.

3.4 **Si no**, termina el ciclo.

4. **Salida:** número de eventos $N(T_{\max}) = k$ y tiempos de llegada τ_1, \dots, τ_k .