Actividad 1.3

Temas Selectos I (Simulación Estocástica)

Prof. Rubén Blancas Rivera

1 de septiembre de 2025

Instrucciones:

- El trabajo debe realizarse en equipos de máximo **tres integrantes**.
- La entrega se debe realizar en un solo archivo en formato **PDF**.
- El archivo debe subirse exclusivamente a **Blackboard**, en la actividad correspondiente.
- Entregar todos los ejercicios.

Ejercicios

1. Queremos simular una variable aleatoria X con distribución discreta:

$$\mathbb{P}(X = k) = p_k, \qquad k = 1, 2, 3, 4,$$

donde

$$p_1 = \tfrac{1}{2}, \quad p_2 = \tfrac{1}{4}, \quad p_3 = \tfrac{1}{8}, \quad p_4 = \tfrac{1}{8}.$$

(a) Proponga una **distribución de referencia** $q(k)$ sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ que sea fácil de simular.-

(b) Determine la constante c tal que

$$p_k \ \leq \ c\, q(k), \qquad \forall k.$$

(c) Describa el **algoritmo de aceptación–rechazo** para generar una realización de X.

(d) Elabore un programa de cómputo que simule la distribución anterior y compare el valor teórico de c con un valor aproximado obtenido de las simulaciones.

2. Utilice el método de aceptación y rechazo para simular una variable aleatoria con distribución Beta$(1, 2{,}3)$. Elabore un programa de cómputo que genere simulaciones de esta variable y compare resultados con la densidad teórica.

3. Considere la siguiente función de distribución acumulada

$$F(x) = x^n, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

a) Aplique el método de la transformada inversa para dar un algoritmo que simule una variable aleatoria con la función de distribución anterior.

b) Aplique el método de aceptación y rechazo para el mismo caso.

c) Elabore un programa de cómputo para implementar ambos algoritmos.

d) Compare la eficiencia de ambos métodos y justifique cuál es más recomendable.

4. En el contexto del método de aceptación y rechazo para generar valores de la distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, demuestre directamente los siguientes resultados:

(a) Si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, entonces $|Z|$ tiene función de densidad

$$f_{|Z|}(x) \;=\; \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, e^{-x^2/2}, \qquad x > 0.$$

(b) Si $S \sim$ Unif$\{+1, -1\}$ es independiente de $|Z|$ (con Z como en (a)), entonces $S\,|Z| \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

(c) Sea $X \sim$ Exp(λ) con $\lambda = 1$ y $U \sim$ Unif$(0, 1)$ independientes. Considere el evento

$$\{\, U \leq \exp\Big(-\tfrac{(X-1)^2}{2}\Big) \,\}.$$

Entonces, la distribución de X condicionada a este evento tiene densidad

$$f(x) \;=\; \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, e^{-x^2/2}, \qquad x > 0,$$

la cual corresponde a la densidad del valor absoluto de una normal estándar $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

(d) Sean V_1 y V_2 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como $\mathrm{Exp}(\lambda)$ con $\lambda = 1$. Entonces se cumple que

$$\mathbb{P}\Big(V_1 \;\geq\; \tfrac{(V_2-1)^2}{2}\Big) = \sqrt{\tfrac{\pi}{2e}}.$$

5. Implemente un algoritmo de simulación para la **distribución Gamma** con los siguientes parámetros:

   a) Gamma(1.5, 3)

   b) Gamma(0.5, 6)

   Elabore un programa de cómputo que genere simulaciones de ambas distribuciones y compare los resultados empíricos con las densidades teóricas correspondientes.