RAPPORT SUR LES TRAVAUX ANTÉRIEURS

HERMAN GOULET-OUELLET

Table des matières

Introduction

Mes travaux antérieurs portent principalement sur des thèmes de dynamique symbolique, théorie des semigroupes et combinatoire des mots. La théorie ergodique ainsi que les semigroupes profinis y jouent un rôle central. Ma recherche s'appuie également sur l'utilisation d'outils informatiques tels que Python, SageMath et Gap [1] à des fins d'exploration et d'expérimentation. On y retrouve trois grands thèmes.

1. **Invariants profinis associés aux systèmes dynamiques symboliques**. Ce thème trouve son origine dans les travaux de J. Almeida sur les interactions entre la dynamique symbolique et les semigroupes profinis. Mes propres travaux à ce sujet portent sur la notion de groupe de Schützenberger et constituent une partie importante de ma thèse.
2. **Densités des langages à groupe**. Cette partie de mes travaux portent sur la densité de certains langages rationnels dans les shifts minimaux. Les résultats obtenus en collaboration avec V. Berthé, C.-F. Nyberg-Brodda, D. Perrin et K. Petersen, ont été présentés dans une prépublication récente en plus de faire l'objet de plusieurs exposés.
3. **Propriétés combinatoires et algébriques des mots de retour**. Ce thème, centrée autour de la notion de mot de retour, est motivé entre autre par les liens avec les deux thèmes précédents, mais aussi plus largement par des questions naturelles en combinatoire des mots et en dynamique. Mes contributions regroupent une partie de ma thèse ainsi que plusieurs collaborations récentes.

Les sections suivantes résument mes principales contributions dans chaque thème. Plusieurs notions clés sont explicités plus en détails dans mon projet de recherche.

1. https://www.python.org/, https://www.sagemath.org/, https://www.gap-system.org/

1. Invariants profinis

Cette partie de mes travaux porte sur la connexion entre la dynamique symbolique et les semi-groupes profinis. Il s'agit d'un sujet de recherche relativement récent, dont l'ouvrage [4] propose un exposé détaillé. Mes contributions concernent principalement les groupes de Schützenberger, certains groupes profinis naturellement associés aux shifts minimaux. En résumé, le groupe de Schützenberger est un sous-groupe maximal contenu dans l'adhérence topologique du langage du shift à l'intérieur du monoïde profini libre (voir le volet « profini » de mon projet de recherche pour plus de détails).

Mes travaux sur les groupes de Schützenberger ont fait l'objet de deux articles [20, 21]. Dans une première publication [20], j'utilise certains résultats d'Almeida et Costa [3] afin d'étudier la structure des quotients pronilpotents maximaux des groupes de Schützenberger correspondant aux shifts substitutifs. En particulier, je montre que les sous-groupes de Sylow des quotients pronilpotents maximaux sont des groupes pro-p libres dont le rang est complètement déterminé par certaines matrices.

En termes plus concrets, mes résultats permettent de lier les matrices naturellement associées aux substitutions à la structure algébrique des groupes de Schützenberger. J'obtiens comme corollaire, par exemple, que le groupe de Schützenberger d'une substitution primitive de longueur constante (donc qui engendre une suite automatique) n'est jamais libre. Ce résultat généralise un résultat antérieur de J. Almeida portant sur le groupe de Schützenberger du mot de Thue–Morse [1].

Une autre partie de mes travaux porte sur le lien entre les propriétés d'inversibilité des substitutions, et leur groupe de Schützenberger [19]. Dans le cadre de mes travaux, je me suis penché sur certaines notions d'inversibilité relative des substitutions (dont l'unimodularité est un exemple connu) et de liberté relative du groupe de Schützenberger. Ces notions sont aussi liés aux variétés de semigroupes ainsi qu'aux topologies profinis. Les résultats publiés dans cet article ont notamment permis de corriger une erreur dans un théorème antérieur de J. Almeida.

Dans l'ensemble, mes travaux sur ce sujet ont contribué à mieux comprendre la structure des groupes de Schützenberger, et plus largement à motiver l'utilisation d'outils profinis d'un point de vue dynamique. Les résultats sur les quotients pronilpotents, malgré leur nature abstraite, permettent d'obtenir des invariants numériques facilement calculables. Ces invariants permettent la création de tests rapides permettant de distinguer les shifts minimaux à isomorphisme près dans plusieurs cas.

Je souligne aussi au passage ma collaboration avec J. Almeida et O. Klíma, où nous explorons différentes caractérisations des algèbres profinies en mettant de l'avant le rôle des congruences syntaxiques [5]. Nos contributions permettent de simplifier la preuve de plusieurs résultats connus sur les algèbres profinies (notamment [15, 16, 24]) et donne lieu à de nouvelles caractérisations.

2. Densités

Le deuxième thème concerne une généralisation de la notion de densité naturelle, introduite par Berstel [8], en lien avec les langages formels et les codes. Pour plus de détails sur la notion de densité, voir le deuxième volet de mon projet de recherche. Étant donné une mesure de probabilité borélienne μ sur $A^{\mathbb{Z}}$ (l'espace des mots bi-infinis), on définit la densité d'un langage $L \subseteq A^*$

relativement à μ par

$$\delta_\mu(\mathrm{L}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(\{x \in \mathrm{A}^{\mathbb{Z}} \mid x_{[0,k)} \in \mathrm{L}\}).$$

Dans une collaboration avec V. Berthé, C.-F. Nyberg Brodda, D. Perrin et K. Petersen [12], nous étudions les densités $\delta_\mu(\mathrm{L})$ où L est un langage à groupe et μ est une mesure ergodique sur un shift X. Les langages à groupe sont les langages reconnus par les automates réversibles. Cette condition s'exprime aussi de manière algébrique : L est un langage à groupe précisément lorsqu'il existe un morphisme $\varphi\colon \mathrm{A}^* \to \mathrm{G}$ vers un groupe fini G tel que $\varphi^{-1}(\mathrm{K}) = \mathrm{L}$ pour $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{G}$. Prenons par exemple le langage des mots sur $\{a, b\}$ avec un nombre pair de a, soit

$$\mathrm{L} = \{w : |w|_a \equiv 0 \mod 2\}.$$

Dans cet exemple, le groupe est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et le morphisme $\varphi\colon \{a,b\}^* \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ envoie $a \mapsto 1$ et $b \mapsto 0$.

Notre principale contribution est un théorème montrant l'existence des densités pour tous les langages à groupe sous n'importe quelle mesure ergodique. Notre approche repose sur les méthodes cohomologiques en théorie ergodique [6, 22, 23, 25, 26], en particulier les notions de cocycle et de fonction cobordante. Soit X un shift sur un alphabet A et $\varphi\colon \mathrm{A}^* \to \mathrm{G}$ un morphisme dans un groupe fini G (qui joue ici le rôle de monoïde syntaxique du langage). On associe à ce morphisme la fonction continue $\mathbb{Z} \times \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ définie par

$$\varphi^{(n)}(x) = \begin{cases} \varphi(x_{[0,n)}) & \text{si } n \geq 0; \\ \varphi(x_{[n,0)})^{-1} & \text{si } n < 0, \end{cases}$$

que l'on appelle le cocycle associé à φ et qui satisfait la relation $\varphi^{(n+m)}(x) = \varphi^{(n)}(x)\varphi^{(m)}(\mathrm{S}^n x)$. À ce cocycle correspond l'équation de cobords

$$\alpha(\mathrm{S}^n x) = \alpha(x)\varphi^{(n)}(x). \tag{1}$$

Dans plusieurs cas, nous obtenons des formules explicites pour les densités exprimées en terme des fonctions cobordantes α, c'est-à-dire les solutions à (1). En termes combinatoires, les fonctions cobordantes correspondent à des étiquetages de certains graphes appelés graphes de Rauzy. La figure 1 montre à quoi ressemble une fonction cobordante dans le shift de Thue–Morse. En utilisant cette fonction, on peut démontrer que la densité des mots avec un nombre pair de a dans le shift de Thue–Morse vaut 1/2.

Nous montrons aussi comment l'existence de fonctions cobordantes non-triviales est déterminée par les propriétés algébriques des mots de retour, notion clé au cœur du troisième volet de mon projet de recherche. Nous en déduisons en outre des théorèmes d'équidistribution, où l'on dit qu'un shift est équidistribué dans un groupe G si pour tout morphisme $\varphi\colon \mathrm{A}^* \to \mathrm{G}$, la densité $\delta_\mu(\varphi^{-1}(g))$ vaut $1/|\mathrm{G}|$ quel que soit $g \in \mathrm{G}$. Nous montrons que les shifts sturmiens substitutifs (et plus généralement dendriques) sont équidistribués dans tous les groupes finis. Le Théorème du retour, expliqué à la section suivante, joue un rôle clé dans la preuve de ce résultat.

3. Mots de retour

Ce thème concerne les mots de retour, notion importante en combinatoire des mots et en dynamique. En résumé, un mot de retour est un mot $r \in \mathrm{A}^*$ qui sépare deux occurrences consécutives

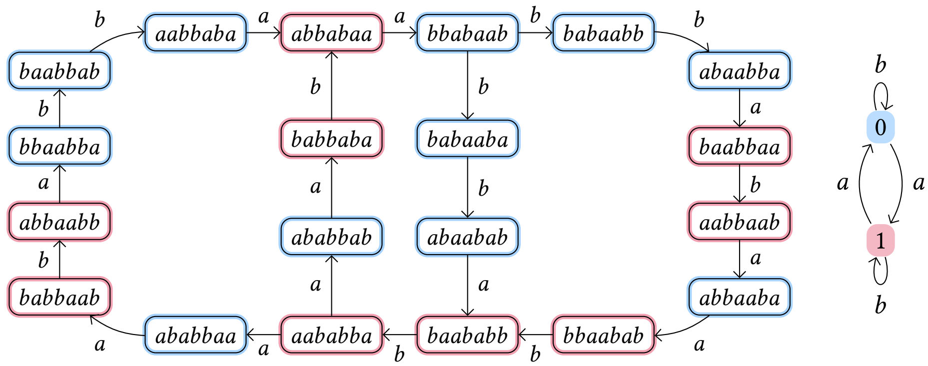

FIGURE 1 – Fonction cobordante dans le shift de Thue–Morse pour le cocycle déterminé par le morphisme $\varphi\colon \{a, b\}^* \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $a \mapsto 1$, $b \mapsto 0$. La fonction cobordante détermine un étiquetage du graphe de Rauzy d'ordre 7 par les éléments du groupe compatible avec l'action des lettres, indiquée à droite.

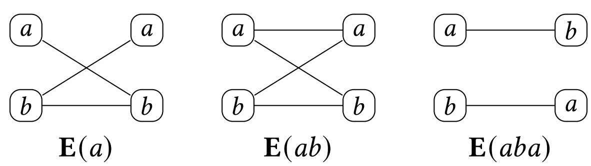

FIGURE 2 – Graphes d'extensions dans le shift de Thue–morse. Les arrêtes indiquent les extensions bilatères des mots dans le shift. Par exemple, les arêtes manquantes dans $\mathbf{E}(aba)$ signifient que $a(aba)a$ et $b(aba)b$ n'apparaissent pas dans le shift.

d'un facteur donné u dans les éléments d'un shift. Mes contributions sur ce thème apparaissent dans les articles [10, 11, 21] ainsi que les prépublications [17, 18]. Mes travaux sur les mots de retour sont motivés en partie par le rôle central qu'ils jouent dans l'étude des densités et des groupes de Schützenberger.

Plusieurs de mes contributions à ce sujet portent sur la dendricité. Les mots dendriques sont une généralisation des mots sturmiens introduite en 2015 par Berthé et al. [13] qui regroupe à la fois les mots épisturmiens et les codages d'échanges d'intervalles réguliers. La définition des mots dendriques se basent sur les graphes d'extensions, graphes bipartis qui encodent la manière dont les facteurs finis peuvent être étendus dans le shift (voir la figure 2). Ces graphes sont liés aux facteurs bispéciaux ainsi qu'à la complexité en facteurs [14]. Par définition, un shift est dendrique précisément si les graphes de tous ses facteurs sont des arbres.

L'une des propriétés les plus remarquables des shifts dendriques est le Théorème du retour : dans un shift dendrique, les ensembles de mots de retour forment des bases du groupe libre. Ce théorème a plusieurs applications, notamment lien avec les groupes de Schützenberger [2] et les groupes de dimension [9].

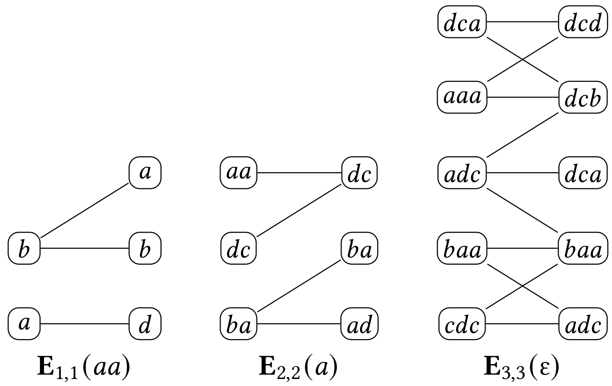

FIGURE 3 – Exemples de graphes d'extensions généralisés intervenant dans la définition de suffixe-connexité (ε dénote le mot vide).

Le Théorème du retour soulève plusieurs questions : par exemple, existe-t-il des shifts non-dendriques qui satisfont des propriétés analogues ? L'une de mes contributions à ce sujet est l'introduction d'une condition appelée suffixe-connexité qui généralise la dendricité. La définition de suffixe-connexité fait intervenir des graphes d'extensions généralisés (illustrés à la figure 3). Dans [21], je montre que les ensembles de retour d'un shift suffixe-connexe engendrent un nombre fini de sous-groupes du groupe libre, conjugués les uns aux autres, et calculables de manière effective. En utilisant ces résultats, je montre qu'il existe un shift suffixe-connexe non-dendrique dans lequel une infinité d'ensembles de mots de retour (mais pas tous) forment des bases du groupe libre.

Une autre contribution plus récente plus récente plus récente est une preuve de la réciproque du Théorème du retour en collaboration avec F. Gheeraert, J. Leroy et P. Stas [17]. Autrement dit, nous montrons que si tous les ensembles de mots de retours forment des bases du groupe libre, alors le shift est dendrique. La preuve de ce résultat utilise manière cruciale certains de mes résultats sur la suffixe-connexité.

Ce dernier résultat s'inscrit dans le cadre d'un projet plus large où nous nous sommes intéressés aux propriétés de stabilité algébrique des mots de retour. Plutôt que de considérer les mots de retour comme éléments du groupe libre, nous les considérons comme éléments d'un groupe quelconque où chaque lettre représente un élément du groupe. La question centrale est de comprendre l'évolution des sous-groupes engendrés par les ensembles de mots de retour à l'intérieur de divers groupes. Nous introduisons la notion suivante de stabilité : les mots de retour à u est (algébriquement) stable si tous les sous-groupes engendrés par les mots de retour aux facteurs de la forme uv sont égaux. Plusieurs cas particuliers de cette définition apparaissent déjà dans la littérature, par exemple dans l'étude des shifts dendriques et suffixe-connexes, mais aussi dans le contexte des générateurs de nombres aléatoires [7] ainsi que dans l'étude des densités et des groupes de Schützenberger.

Nous avons obtenu plusieurs résultats intéressants sur la stabilité des mots de retour, notamment des théorèmes de décidabilité dans le cas des groupes finis [18]. Nos travaux montrent aussi que l'étude générale de ces phénomènes est possible dans le cadre plus large des groupes LERF (*locally* *extended residually finite*), une classe importante de groupes qui contient par exemple les groupes finis, les groupes libres et les groupes abéliens libres. Ces travaux font aussi suite à certains résultats que j'ai obtenus en collaboration avec V. Berthé où nous étudions les sous-groupes du groupe libre engendrés par les mots de retour dans certains shifts substitutifs non-dendriques (incluant Thue–Morse) ainsi que dans les shifts épisturmiens [10, 11].

Références

[1] J. Almeida. « Profinite groups associated with weakly primitive substitutions ». *J. Math. Sci.* 144.2 (2007), p. 3881-3903. doi : 10.1007/s10958-007-0242-y.

[2] J. Almeida et A. Costa. « A geometric interpretation of the Schützenberger group of a minimal subshift ». *Ark. Math.* 54.2 (2016), p. 243-275. doi : 10.1007/s11512-016-0233-7. arXiv : 1507.06885.

[3] J. Almeida et A. Costa. « Presentations of Schützenberger groups of minimal subshifts ». *Israel J. Math.* 196.1 (2013), p. 1-31. doi : 10.1007/s11856-012-0139-4. arXiv : 1001.1475.

[4] J. Almeida, A. Costa, R. Kyriakoglou et D. Perrin. *Profinite semigroups and symbolic dynamics.* Springer International Publishing, 2020. doi : 10.1007/978-3-030-55215-2.

[5] J. Almeida, H. Goulet-Ouellet et O. Klíma. « What makes a Stone topological algebra profinite ». *Algebra Univers.* 84.1 (2023). doi : 10.1007/s00012-023-00804-w. arXiv : 2109.07286v1.

[6] H. Anzai. « Ergodic skew product transformations on the torus ». eng. *Osaka Math. J.* 3.1 (1951), p. 83-99. doi : 10.18910/11966.

[7] Ľ. Balková, M. Bucci, A. De Luca, J. Hladký et S. Puzynina. « Aperiodic pseudorandom number generators based on infinite words ». *Theor. Comput. Sci.* 647 (2016), p. 85-100. doi : 10.1016/j.tcs.2016.07.042. arXiv : 1311.6002.

[8] J. Berstel. « Sur la densité asymptotique de langages formels ». Dans : *Automata Languages and Programming*. Sous la dir. de M. Nivat. North-Holland, 1972, p. 345-358.

[9] V. Berthé et al. « On the dimension group of unimodular S-adic subshifts ». *Monatsh. Math.* 194.4 (2021), p. 687-717. doi : 10.1007/s00605-020-01488-3. arXiv : 1911.07700.

[10] V. Berthé et H. Goulet-Ouellet. « Obstructions to return preservation for episturmian morphisms ». *Theory Comput. Syst.* (2024). doi : https://doi.org/10.1007/s00224-024-10190-y. arXiv : 2404.08072.

[11] V. Berthé et H. Goulet-Ouellet. « On substitutions preserving their return sets ». Dans : *Combinatorics on words.* Sous la dir. d'A. Frid et R. Mercas. T. 13899. Lecture Notes in Computer Science. 2023, p. 77-90. doi : 10.1007/978-3-031-33180-0_6. hal : hal-04311379.

[12] V. Berthé, H. Goulet-Ouellet, C.-F. Nyberg-Brodda, D. Perrin et K. Petersen. *Density of group languages in shift spaces.* Preprint. 2024. doi : 10.48550/arxiv.2403.17892. arXiv : 2403.17892.

[13] V. Berthé et al. « Acyclic, connected and tree sets ». *Monatsh. Math.* 176.4 (2015), p. 521-550. doi : 10.1007/s00605-014-0721-4. arXiv : 1308.4260.

[14] J. Cassaigne. « Complexité et facteurs spéciaux ». *Bull. Bel. Math. Soc. Simon Stevin* 4.1 (1997), p. 67-88. doi : 10.36045/bbms/1105730624.

[15] D. M. Clark, B. A. Davey, R. S. Freese et M. Jackson. « Standard topological algebras : syntactic and principal congruences and profiniteness ». *Algebra Univers.* 52.2-3 (2005), p. 343-376. doi : 10.1007/s00012-004-1917-6.

[16] M. Gehrke. « Stone duality, topological algebra, and recognition ». *J. Pure Appl. Algebra* 220.7 (2016), p. 2711-2747. doi : 10.1016/j.jpaa.2015.12.007. arXiv : 1309.2422.

[17] F. Gheeraert, H. Goulet-Ouellet, J. Leroy et P. Stas. *Algebraic characterization of dendricity*. Preprint. 2024. doi : 10.48550/arxiv.2406.15075. arXiv : 2406.15075.

[18] F. Gheeraert, H. Goulet-Ouellet, J. Leroy et P. Stas. *Stability properties for subgroups generated by return words*. Preprint. 2024. doi : 10.48550/arxiv.2410.12534. arXiv : 2410.12534.

[19] H. Goulet-Ouellet. « Freeness of Schützenberger groups of primitive substitutions ». *Int. J. Algebra Comput.* 32.06 (2022), p. 1101-1123. doi : 10.1142/S0218196722500473. arXiv : 2109.11957v1.

[20] H. Goulet-Ouellet. « Pronilpotent quotients associated with primitive substitutions ». *J. Algebra* 606 (2022), p. 341-370. doi : 10.1016/j.jalgebra.2022.05.021. arXiv : 2204.05706v1.

[21] H. Goulet-Ouellet. « Suffix-connected languages ». *Theor. Comput. Sci.* 923 (2022), p. 126-143. doi : 10.1016/j.tcs.2022.05.001. arXiv : 2106.00452v1.

[22] G. W. Mackey. « Ergodic theory and virtual groups ». *Math. Ann.* 166.3 (1966), p. 187-207. doi : 10.1007/BF01361167.

[23] K. Schmidt. *Cocycles of ergodic transformation groups*. MacMillan India, 1977.

[24] F. M. Schneider et J. Zumbrägel. « Profinite Algebras and Affine Boundedness ». *Adv. Math.* 305 (2017), p. 661-681. doi : 10.1016/j.aim.2016.10.001.

[25] W. A. Veech. « Strict Ergodicity in Zero Dimensional Dynamical Systems and the Kronecker–Weyl Theorem Mod 2 ». *Trans. Amer. Math. Soc.* 140 (1969), p. 1. doi : 10.2307/1995120.

[26] R. J. Zimmer. « Extensions of ergodic group actions ». *Illinois J. Math.* 20.3 (1976).