Cours: gradients et dérivées directionnelles

Université de Moncton

Herman Goulet-Ouellet

4 avril 2025

Plan pour aujourd'hui

1. Rappels sur les dérivées partielles.
2. Définition des dérivées directionnelles.
3. Définition du gradient.
4. Calcul des dérivées directionnelles par le gradient.
5. Plan tangent.
6. Définition de point critique.

Rappels: dérivées partielles

Définition 1

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de n variables. La dérivée partielle de f par rapport à x_i est définie par la limite (si elle existe):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_n)}{h}$$

Pour une fonction de deux variables $f(x, y)$ on a deux dérivées partielles:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}.$$

Rappels: calcul des dérivées partielles

Pour calculer la dérivée partielle par rapport à une variable donnée, on traite les autres variables comme des constantes.

Exemple 2

Calculons les dérivées partielles de $f(x, y) = 3\sin(x) - 2\cos(y) - xy$.

Rappels: calcul des dérivées partielles

Pour calculer la dérivée partielle par rapport à une variable donnée, on traite les autres variables comme des constantes.

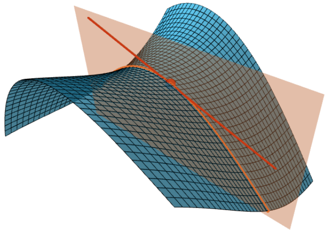
Exemple 2

Calculons les dérivées partielles de $f(x, y) = 3\sin(x) - 2\cos(y) - xy$.

Réponse: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3\cos(x) - y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2\sin(y) - x$.

Rappels: dérivées partielles et droites tangentes

🛈 La dérivée partielle par rapport à x au point $\boldsymbol{a}$ est égale à la pente de la droite tangente passant par $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$ dans la direction parallèle à l'axe des x.



Droite tangente au graphe de $f(x, y) = 3\sin(x) - 2\cos(y) - xy$ dans la direction parallèle à l'axe des x passant par le point $(1, 1, f(1, 1))$.

Dérivées directionnelles, définition

Définition 3

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de n variables. La dérivée directionnelle de f dans la direction $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ est définie par la limite (si elle existe)

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x})}{h}, \qquad \text{où } \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dérivées directionnelles, définition

Définition 3

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de n variables. La dérivée directionnelle de f dans la direction $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ est définie par la limite (si elle existe)

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x})}{h}, \qquad \text{où } \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

🛈 Pour tout scalaire $k \neq 0$, on a $\nabla_{k\boldsymbol{u}} f = k \nabla_{\boldsymbol{u}} f$. On peut donc se restreindre au cas où $\boldsymbol{u}$ est un **vecteur unitaire**, c'est-à-dire dont la norme euclidienne vaut 1 :

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} = 1.$$

Dérivées directionnelles, cas de deux variables

Dans le cas de $\mathbb{R}^2$, les vecteurs unitaires sont de la forme

$$\boldsymbol{u} = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Pour un vecteur de cette forme, la dérivée directionnelle d'une fonction $f(x, y)$ de deux variables est, par définition,

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\cos(\theta), y + h\sin(\theta)) - f(x, y)}{h}$$

Dérivées directionnelles, cas de deux variables

Dans le cas de $\mathbb{R}^2$, les vecteurs unitaires sont de la forme

$$\boldsymbol{u} = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

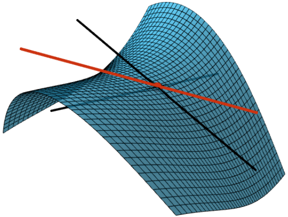
Pour un vecteur de cette forme, la dérivée directionnelle d'une fonction $f(x, y)$ de deux variables est, par définition,

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\cos(\theta), y + h\sin(\theta)) - f(x, y)}{h}$$

- Quand $\theta = 0$, $\boldsymbol{u} = (1, 0)$ et on retrouve $\nabla_{\boldsymbol{u}} f = \partial f / \partial x$.
- Quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\boldsymbol{u} = (0, 1)$ et on retrouve $\nabla_{\boldsymbol{u}} f = \partial f / \partial y$.

Dérivées directionnelles, interprétation géométrique

- La dérivée partielle par rapport à x au point $\boldsymbol{a}$ est égale à la pente de la droite tangente passant par $\boldsymbol{a}$ dans la direction parallèle à l'axe des x.
- La dérivée directionnelle dans la direction $\boldsymbol{u}$ au point $\boldsymbol{a}$ est égale à la pente de la droite tangente passant par $\boldsymbol{a}$ dans la direction parallèle à $\boldsymbol{u}$.



Droite tangente au graphe de $f(x) = 3\sin(x) - 2\cos(y) - xy$ dans la direction $\boldsymbol{u} = (3/5, 4/5)$ passant par le point $(1, 1, f(1, 1))$.

Les droites tangentes dans la direction de l'axe des x et des y sont est indiquées en noir.

Dérivées directionnelles, droites tangentes

La dérivée directionnelle dans la direction $\boldsymbol{u}$ au point $\boldsymbol{a}$ est égale à la pente de la droite tangente passant par $\boldsymbol{a}$ dans la direction parrallèle à $\boldsymbol{u}$.

- En d'autres mots, la droite tangente admet la description paramétrique:

$$D = \{(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u}, f(\boldsymbol{a}) + t\nabla_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a})) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

- Dans le cas d'une fonction de deux variables, cette description prend la forme:

$$D = \{(a_1 + tu_1, a_2 + tu_2, f(a_1, a_2) + t\nabla_{\boldsymbol{u}} f(a_1, a_2)) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Formule pour deux variables

Calculer $\nabla_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x})$ directement à partir de la définition est possible, mais difficile.

Théorème 4

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. En tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ où f est **différentiable**,

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} f(x, y) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Formule pour deux variables

ℹ Calculer $\nabla_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x})$ directement à partir de la définition est possible, mais difficile.

Théorème 4

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. En tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ où f est **différentiable**,

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} f(x, y) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

(On verra la définition de **différentiable** dans un prochain cours. Pour l'instant on ne travaillera qu'avec des fonctions différentiables.)

Formule pour deux variables, exemple

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} f(x, y) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Exemple 5

Soit la fonction $f(x, y) = 3\sin(x) - 2\cos(y) - xy$, et $\boldsymbol{u} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, où $\theta = \arccos(3/5)$. Calculons $\nabla_{\boldsymbol{u}} f(x, y)$ en utilsant le théorème.

Formule pour deux variables, exemple

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} f(x,y) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Exemple 5

Soit la fonction $f(x,y) = 3\sin(x) - 2\cos(y) - xy$, et $\boldsymbol{u} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, où $\theta = \arccos(3/5)$. Calculons $\nabla_{\boldsymbol{u}} f(x,y)$ en utilsant le théorème.

Réponse: $\nabla_{\boldsymbol{u}} f(x,y) = \frac{3}{5}(\cos(x) - y) + \frac{4}{5}(\sin(y) - x)$.

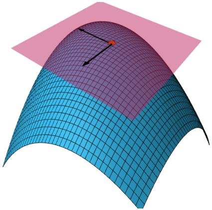
Plan tangent

Corollaire 6

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. En tout point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ où f est différentiable, toutes les droites tangentes au graphe de f passant par $(a, b, f(a, b))$ sont contenues dans le plan d'équation

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b)$$

appelé **plan tangent**.



Plan tangent, exemple

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b).$$

Example 7

Calculons l'équation du plan tangent au graphe de $f(x, y) = -(x^2 + xy + y^2)$ passant par le point $(-1/2, 1/2, -1/4)$.

Plan tangent, exemple

$$z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot (x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot (y-b).$$

Example 7

Calculons l'équation du plan tangent au graphe de $f(x,y) = -(x^2 + xy + y^2)$ passant par le point $(-1/2, 1/2, -1/4)$.

Réponse: l'équation du plan tangent est $z = x/2 - y/2 + 1/4$.

Gradient

Définition 8

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de n variables. Le gradient de f est la fonction

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f}{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, \frac{\partial f}{x_n}(\boldsymbol{x}) \right), \qquad \text{où } \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Autrement dit, $\nabla f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Gradient

Définition 8

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de n variables. Le gradient de f est la fonction

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f}{x_1}(\boldsymbol{x}), \dots, \frac{\partial f}{x_n}(\boldsymbol{x})\right), \qquad \text{où } \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Autrement dit, $\nabla f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Exemple 9

Soit la fonction $f(x, y, z) = x^2 - xyz - z^2$. Calculons le gradient $\nabla f(x, y, z)$.

Gradient

Définition 8

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de n variables. Le gradient de f est la fonction

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f}{x_1}(\boldsymbol{x}), \dots, \frac{\partial f}{x_n}(\boldsymbol{x})\right), \qquad \text{où } \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Autrement dit, $\nabla f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Exemple 9

Soit la fonction $f(x, y, z) = x^2 - xyz - z^2$. Calculons le gradient $\nabla f(x, y, z)$.

Réponse: $\nabla f(x, y, z) = (2x - yz, -xz, -2z - xy)$.

Produit scalaire

Définition 10

Étant donné deux vecteurs $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, on définit leur produit scalaire par

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Produit scalaire

Définition 10

Étant donné deux vecteurs $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, on définit leur produit scalaire par

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Proposition 11 (propriétés du produit scalaire)

1. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \cos(\theta)$, où θ est l'angle entre $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$.
2. $|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| \leq \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|$ (inégalité de Cauchy–Schwarz).
3. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \iff \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont perpendiculaires).
4. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\|^2$.

Formule du gradient

Théorème 12

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de n variables et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$. En tout point $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ où f est **différentiable**,

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u}.$$

- Pour $n = 2$ on retrouve la formule énoncée précédemment.
- La preuve utilise la règle de **dérivation en chaîne** multivariée (prochain cours).

Formule du gradient, exemples

Exemple 13

Calculons le gradient $\nabla f(\boldsymbol{x})$ et la dérivée directionnelle $\nabla_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x})$ pour les exemples suivants:

(a) $f(x,y) = x^2 - xy + 3y^2, \quad \boldsymbol{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), \quad \boldsymbol{a} = (\frac{5}{2}, \frac{5}{7}).$

(b) $\sin(3x)\cos(3y), \quad \boldsymbol{u} = (\frac{5}{13}, \frac{12}{13}), \quad \boldsymbol{a} = (\pi, \frac{\pi}{2}).$

(c) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 + x_1^2 - x_2 + x_2 x_3 + x_2^2 + 3x_3^2, \quad \boldsymbol{u} = (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \quad \boldsymbol{a} = (1, -2, \frac{3}{2}).$

Formule du gradient, exemples

Exemple 13

Calculons le gradient $\nabla f(\boldsymbol{x})$ et la dérivée directionnelle $\nabla_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x})$ pour les exemples suivants:

(a) $f(x,y) = x^2 - xy + 3y^2, \quad \boldsymbol{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), \quad \boldsymbol{a} = (\frac{5}{2}, \frac{5}{7}).$

Réponse: $\nabla f(x,y) = (2x - y, -x + 6y)$ et $\nabla_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a}) = 4.$

(b) $\sin(3x)\cos(3y), \quad \boldsymbol{u} = (\frac{5}{13}, \frac{12}{13}), \quad \boldsymbol{a} = (\pi, \frac{\pi}{2}).$

(c) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 + x_1^2 - x_2 + x_2x_3 + x_2^2 + 3x_3^2, \quad \boldsymbol{u} = (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \quad \boldsymbol{a} = (1, -2, \frac{3}{2}).$

Formule du gradient, exemples

Exemple 13

Calculons le gradient $\nabla f(\boldsymbol{x})$ et la dérivée directionnelle $\nabla_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x})$ pour les exemples suivants:

(a) $f(x,y) = x^2 - xy + 3y^2, \quad \boldsymbol{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), \quad \boldsymbol{a} = (\frac{5}{2}, \frac{5}{7}).$
Réponse: $\nabla f(x,y) = (2x - y, -x + 6y)$ et $\nabla_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a}) = 4.$

(b) $\sin(3x)\cos(3y), \quad \boldsymbol{u} = (\frac{5}{13}, \frac{12}{13}), \quad \boldsymbol{a} = (\pi, \frac{\pi}{2}).$
Réponse: $\nabla f(x,y) = (3\cos(3x)\cos(3y), -3\sin(3x)\sin(3y))$ et $\nabla_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a}) = 0.$

(c) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_3 + x_1^2 - x_2 + x_2x_3 + x_2^2 + 3x_3^2, \quad \boldsymbol{u} = (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \quad \boldsymbol{a} = (1, -2, \frac{3}{2}).$

Formule du gradient, exemples

Exemple 13

Calculons le gradient $\nabla f(\boldsymbol{x})$ et la dérivée directionnelle $\nabla_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x})$ pour les exemples suivants:

(a) $f(x, y) = x^2 - xy + 3y^2, \quad \boldsymbol{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), \quad \boldsymbol{a} = (\frac{5}{2}, \frac{5}{7})$.
Réponse: $\nabla f(x, y) = (2x - y, -x + 6y)$ et $\nabla_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a}) = 4$.

(b) $\sin(3x)\cos(3y), \quad \boldsymbol{u} = (\frac{5}{13}, \frac{12}{13}), \quad \boldsymbol{a} = (\pi, \frac{\pi}{2})$.
Réponse: $\nabla f(x, y) = (3\cos(3x)\cos(3y), -3\sin(3x)\sin(3y))$ et $\nabla_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a}) = 0$.

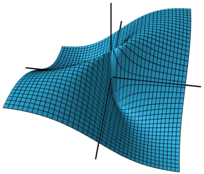
(c) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 + x_1^2 - x_2 + x_2 x_3 + x_2^2 + 3x_3^2, \quad \boldsymbol{u} = (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \quad \boldsymbol{a} = (1, -2, \frac{3}{2})$.
Réponse: $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, 2x_2 + x_3 - 1, x_1 + x_2 + 6x_3)$ et $\nabla_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a}) = 4\sqrt{3}$.

Exemple non différentiable

⚠ La formule du gradient ne fonctionne pas si la fonction n'est pas différentiable.

Exemple 14

Soit $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Le gradient ∇f existe partout, y compris en (0,0). Cependant f n'est pas différentiable en (0,0) et les dérivées directionnelles $\nabla_{\boldsymbol{u}} f(0,0)$ n'existent pas pour $\boldsymbol{u} \notin \{(0,1),(1,0)\}$.



Conséquence de la formule du gradient

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}.$$

Corollaire 15

En tout point $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ où f est différentiable:

1. Le gradient $\nabla f(\boldsymbol{a})$ donne la direction qui **maximise la croissance instantanée**.
2. Dans les directions perpendiculaires à $\nabla f(\boldsymbol{a})$, **la croissance instantané est nulle**.

Conséquence de la formule du gradient

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}.$$

Corollaire 15

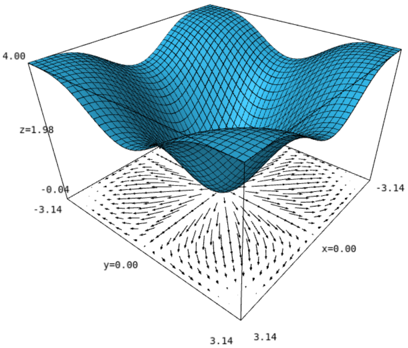
En tout point $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ où f est différentiable:

1. Le gradient $\nabla f(\boldsymbol{a})$ donne la direction qui **maximise la croissance instantanée**.
2. Dans les directions perpendiculaires à $\nabla f(\boldsymbol{a})$, **la croissance instantané est nulle**.

Ce corollaire est très utile pour résoudre des problèmes d'optimisation. Il est à la base de l'**algorithme du gradient**, dont la variante appelée **algorithme du gradient stochastique** est utilisée en apprentissage automatique.

Visualiser le gradient

Soit $f(x, y) = 4 - (\cos^2(x/2) + \cos^2(y/2))^2$. La figure suivante illustre f et ∇f (représenté sur le plan $z = 0$).



Points critiques, rappel

Les points critiques d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'une seule variable sont les points $x \in \mathbb{R}$ tels que $f'(x) = 0$.

Si la fonction est deux fois différentiable alors les points critiques peuvent prendre trois différentes formes:

1. maximum local, quand $f''(x) < 0$.
2. minimum local, quand $f''(x) > 0$.
3. point d'inflexion, quand $f''(x) = 0$.

Points critiques

Définition 16

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de n variables. On appelle **point critique** un point $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que où $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$.

Points critiques

Définition 16

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de n variables. On appelle **point critique** un point $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que où $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$.

Pour trouver les points critiques d'une fonction de n variables, il faut donc résoudre un système à n équations et n inconnues:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \end{array}\right.$$

Points critiques, exemple

Exemple 17

Trouvons les points critiques de la fonction
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 + x_1^2 - x_2 + x_2x_3 + x_2^2 + 3x_3^2$.

Points critiques, exemple

Exemple 17

Trouvons les points critiques de la fonction
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 + x_1^2 - x_2 + x_2x_3 + x_2^2 + 3x_3^2.$

Réponse: On a $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + 2x_1,\ -1 + x_3 + 2x_2,\ x_1 + x_2 + 6x_3)$. Donc les points critiques sont les solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x_1 & & & + & x_3 & = 0 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & = 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & = 0. \end{array} \right.$$

En utilisant notre trousse à outils d'algèbre linéaire, on trouve un seul point critique, soit $\left(\frac{1}{20}, \frac{11}{20}, \frac{-1}{10}\right)$.