PROTOTYPE DE FEUILLE D'EXERCICE

HERMAN GOULET-OUELLET

1. Calculez le gradient et la dérivée dans la direction donnée pour les fonctions suivantes.
a) $f(x,y)=xy$ dans la direction $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.
b) $f(x,y)=e^x\sin(y)$ dans la direction $(1,0)$.
c) $f(x,y,z)=xyz$ dans la direction $(2,1,-1)$.
d) $f(x,y)=xy$ dans la direction $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.
e) $f(x,y)=x^2-y^2$ dans la direction $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$.
f) $f(x,y)=3x+4y+7$ dans la direction $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$.

2. Trouvez l'équation du plan tangent au point donné pour les fonctions suivantes.
a) $f(x,y)=e^x\cos(y)$ au point $(0,\frac{\pi}{2})$.
b) $f(x,y)=y^{10}$ au point $(1,-1)$.
c) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ au point $(1,2)$.
d) $f(x,y)=x^2y$ au point $(-5,5)$.

3. Calculez les dérivées directionnelles suivantes directement à partir de la définition.
a) $f(x,y)=5-2x^2-\frac{1}{2}y^2$ au point $(3,4)$ dans la direction $(\cos(\frac{\pi}{4}),\sin(\frac{\pi}{4}))$.
b) $f(x,y)=y^2\cos(2x)$ au point $(\frac{\pi}{3},2)$ dans la direction $(\cos(\frac{\pi}{4}),\sin(\frac{\pi}{4}))$.
c) $f(x,y)=y^2\sin(2x)$ au point $(\frac{\pi}{4},2)$ dans la direction $(5,12)$.

4. Démontrez la formule $\nabla_{k\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{x})=k\nabla_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{x})$.

5. Soit $f(x,y)=xy/(x^2+y^2)$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$. Expliquez pourquoi la dérivée au point $(0,0)$ n'existe pas dans la direction $(1,1)$. Quelle valeur de $f(0,0)$ permet d'obtenir l'existence de cette dérivée directionelle?

6. Trouvez l'équation paramétrique pour la droite normale au graphe d'une fonction différentiable $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ passant par un point donné.

7. La température T dans une bille de métal est inversement proportionnelle à la distance au centre (l'origine $(0,0,0)$). La températeur au point $(1,2,2)$ est 120°C.
(a) Quelle est la variation instantanée de la température au point $(1,2,2)$ dans la direction pointant vers $(2,1,3)$?

Date: 4 avril 2025.
Certains exercices sont tirés du cours en libre accès Calculus 3 d'Open Stax (en anglais).

(b) Montrez qu'en tout point de la sphère, la direction de plus grande croissance instantanée est donnée par le vecteur pointant vers l'origine.

8. La tension électrique d'une région de l'espace est déterminée par la fonction $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

(a) Déterminez la taux de changement de la tension électrique au point $(3, 4, 5)$ dans la direction $(1, 1, -1)$.
(b) Dans quelle direction la tension électrique varie-t-elle le plus rapidement au point $(3, 4, 5)$?
(c) Quel est le taux de changement de la tension électrique autour du point $(3, 4, 5)$?

9. En deux dimensions, le movement d'un fluide idéal est dicté par un potentiel des vitesses φ. Les composantes (u, v) de l'écoulement d'un fluide dans les directions x et y sont données par la formule $(u, v) = \nabla\varphi$. Trouvez les composantes de l'écoulement associé au potentiel des vitesses $\varphi(x, y) = \sin(\pi x)\sin(2\pi y)$.