

Audition CNRS

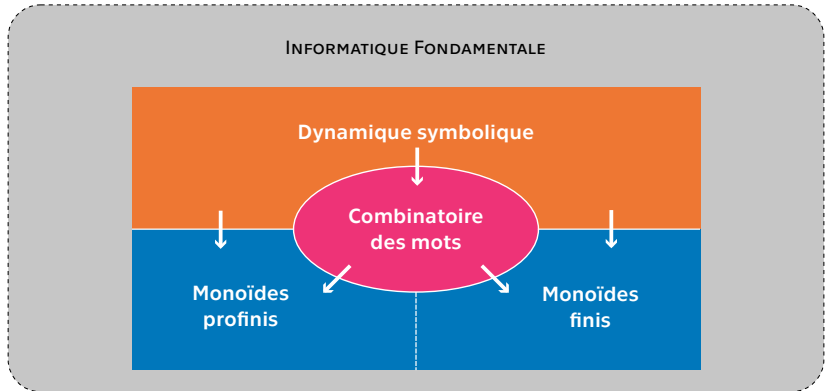
Concours 06/02

Herman Goulet-Ouellet

13 mars 2025

Partie 1

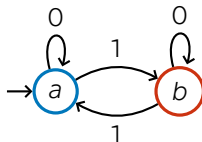
Vue d'ensemble



SHIFT: ESPACE DE MOTS INFINIS VUE COMME OBJET
TOPOLOGIQUE-DYNAMIQUE.

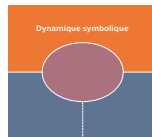
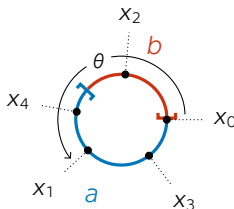
1. Mots **automatiques** (automates sur les expansions d'entiers).

$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 10 & 11 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & b & b & a \end{array}$
 $\begin{array}{ccccccc} b & a & a & b & \dots \end{array}$



2. Mots **sturmiens** (codages de rotations apériodiques).

$\begin{array}{ccccccc} a & b & a & a & b & a & a & b & \dots \end{array}$

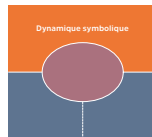


PROBLÈME CENTRAL

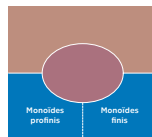
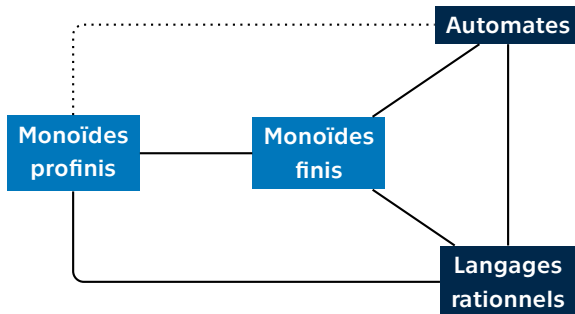
Zoologie des shifts: comportement de différents types de shifts (sturmiens, automatiques, etc.) d'un point de vue algébrique, dynamique, combinatoire...

Motivations naturelles en informatique théorique: **algèbre**, **combinatoire des mots**, logique, modèles de calculs, géométrie des pavages, systèmes de numération, etc.

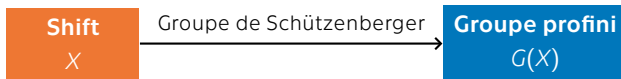
- Lié aux thématiques du groupe de travail Systèmes dynamiques, automates et algorithmes (SDA2) du GDR IFM



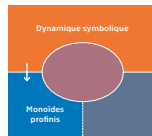
- **Monoïdes profinis**: structures **algébriques-topologiques** qui encodent le comportement des familles de monoïdes finis.
- Liens forts avec les **langages rationnels** (caractérisations topologiques).



GROUPES PROFINIS ASSOCIÉS AUX SHIFTS.



- Étude dynamique des monoïdes profinis (Almeida, 2005).
- $G(X)$ est **invariant** à isomorphisme près (Costa, 2006).
- Distingue algébriquement certaines familles (sturmiens, automatiques, etc.)

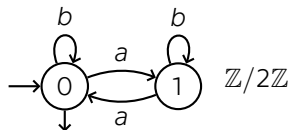


DENSITÉ D'UN LANGAGE RATIONNEL L SOUS UNE MESURE DE PROBABILITÉ μ .

$$\delta_\mu(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(\{x \in X \mid x_{[0,k)} \in L\}).$$

Fréquences moyennes de visites des marches infinies sur un monoïde fini.

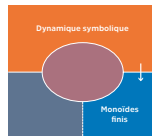
"mots avec un nombre pair de a "
 $\{w \in A^* \mid \#_a w \equiv 0 \pmod{2}\}$



ERGODIQUE Veech, 1969

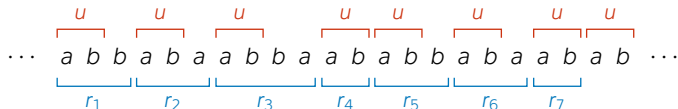
LOGIQUE Lynch, 1993

LANGAGE Berstel, 1972; Sin'ya, 2015

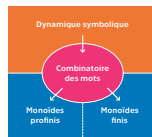
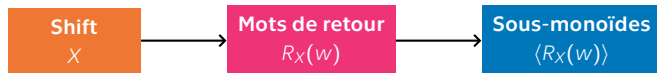


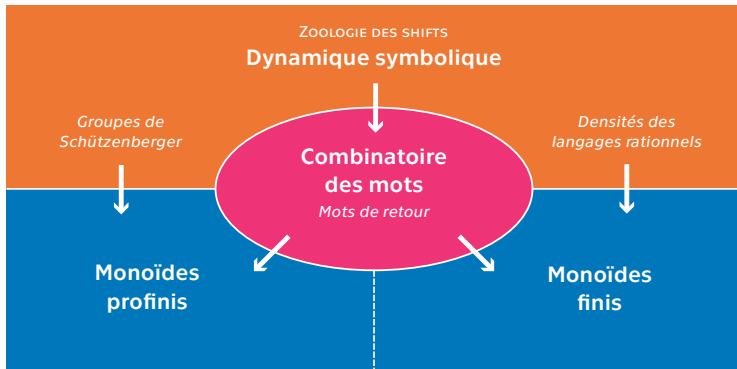
Point de rencontre **combinatoire** entre les densités et les groupes de Schützenberger.

MOTS DE RETOUR: SÉPARATIONS ENTRE LES OCCURRENCES D'UN FACTEUR DANS UN SHIFT.



$$R_X(ab) = \{ab, aba, abb, abba\}$$



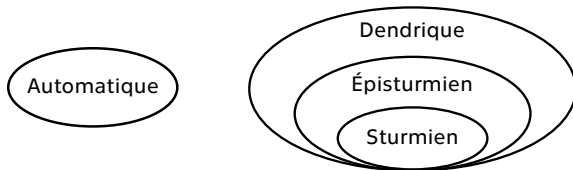


Partie 2

Travaux

1. **Caractérisation algébrique de la dendricité.**
2. **Invariants associés aux groupes de Schützenberger.**
3. **Densités et équidistribution.**

ZOOLOGIE DES SHIFTS



COMPOTEMENTS ALGÈBRIQUES DES MOTS DE RETOUR



F. Gheeraert, H. Goulet-Ouellet, J. Leroy, P. Stas (2025). **Algebraic characterization of dendricity**. *Electron. J. Comb.*

Théorème

Un shift X est dendrique \iff tous les $R_X(w)$ sont des bases du groupe libre.

- \implies : "Théorème du retour" de Berthé, De Felice, Dolce, Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone, 2015.
- \impliedby : Gheeraert, Goulet-Ouellet, Leroy, Stas, 2025.
- Obtenu dans le cadre d'un projet plus large.

H. Goulet-Ouellet (2022). **Pronilpotent quotients associated with primitive substitutions.** *J. Algebra* 606.



Extraction d'invariants simplifiés (**empreinte nilpotente**) par des méthodes algébriques utilisant les mots de retour $R_X(w)$.

SHIFT SUBSTITUTIF	EMPREINTE NILPOTENTE
$a \mapsto ab, b \mapsto ba$	1,2,2,2,...
$a \mapsto ab, b \mapsto a$	2,2,2,2,...
$a \mapsto aba, b \mapsto baa$	1,0,1,1,...
$a \mapsto aab, b \mapsto ccb, c \mapsto bba$	1,2,3,3,...

V. Berthé, H. Goulet-Ouellet, C.-F. Nyberg-Brodda, D. Perrin, K. Petersen (2024).

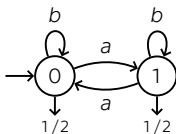
Density of group languages in shift spaces. Preprint.

$$\delta_\mu(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(\{x \in X \mid x_{[0,k)} \in L\}).$$

Théorème

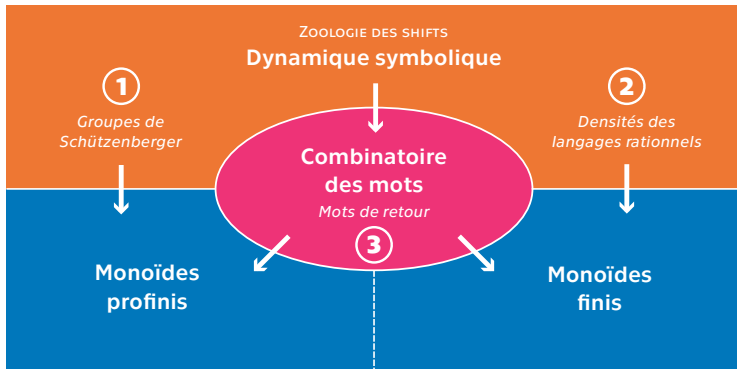
Pour tout **langage à groupe** L et toute **mesure ergodique** μ , la densité $\delta_\mu(L)$ existe.

- **Formules closes** dans plusieurs cas importants.
- **Propriétés d'équidistribution** dans le cas dendrique.



Partie 3

Projet de recherche

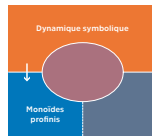


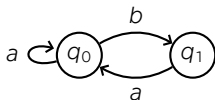
Substitutif $A^* \xleftarrow{\sigma} A^* \xleftarrow{\sigma} A^* \xleftarrow{\sigma} A^* \leftarrow \dots$ (une seule substitution)

S-adique $A_0^* \xleftarrow{\sigma_0} A_1^* \xleftarrow{\sigma_1} A_2^* \xleftarrow{\sigma_2} A_3^* \leftarrow \dots$ (plusieurs substitutions)

Objectifs

1. Établir une théorie S-adique profinie.
 - Les groupes $G(X)$ sont mal compris hors du cadre substitutif.
 - Le cadre S-adique offre un degré de généralité plus large.
 - Questions de **décidabilité** pour les quotients finis de $G(X)$.
2. Étudier les quotients résolubles des groupes de Schützenberger.
 - Étendre l'idée d'**empreinte nilpotente** pour obtenir des invariants plus forts.





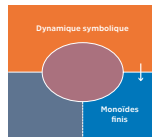
Automate

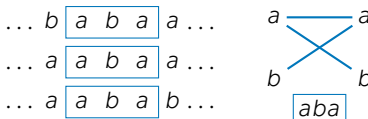
1	a	ab
	ba	b
		0

Monoïde de transition

Objectifs

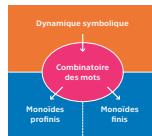
1. Calculer les densités pour les langages rationnels quelconques.
 - Étude fine de la structure des monoïdes de transition.
 - Premiers résultats soumis à ICALP (avec V. Berthé et D. Perrin).
2. Étudier les probabilités induites par les densités sur les monoïdes profinis.
 - Pont entre les aspects ergodiques et profinis des shifts.





Objectifs

1. Généraliser et implémenter l'algorithme de Klouda, 2012, pour le calcul des **facteurs bispéciaux**.
 - Premiers résultats soumis à Words (avec K. Klouda et Š. Starosta).
 - Implémentation en SageMath d'abord, puis Python.
2. Développer une approche systématique au calcul des **mots de retour**.
 - Applications aux deux autres volets.
 - Lien vers d'autres problèmes en combinatoire des mots (exposants critiques).



1. *Formalisation de la combinatoire des mots* Š. Starosta (Isabelle/HOL).
2. *Semigroupes d'Ellis des mots substitutifs*, avec R. Yassawi.

Intégration sur des thèmes de **dynamique symbolique**, **combinatoire des mots**, **algèbre** et **théorie des automates** (GT SDA2).

IRIF *Automates et applications / Combinatoire.*

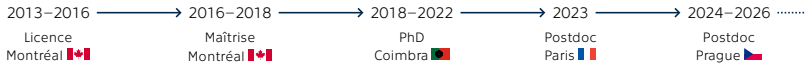
V. Berthé, W. Steiner, O. Carton, S. van Gool, T. Colcombet.

LIGM *Bases de données, automates, analyses d'algorithmes et modèles / Algorithmique discrète et applications.*

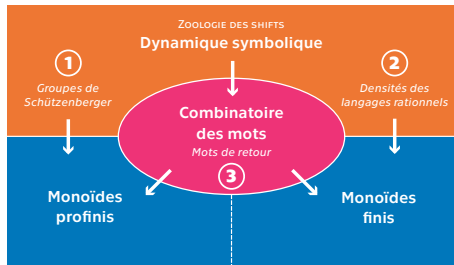
D. Perrin, M.-P. Béal, P. Rotondo, C. Nicaud, V. Marsault, V. Jugé, G. Kucherov.

LABRI *Combinatoire et Algorithmique / Méthodes et Modèles formels.*

S. Labbé, V. Delecroix, P. Narbel, S. Lombardy, T. Place, M. Zeitoun.



- **7 articles** publiés.
- **2 articles** soumis récemment à des conférences (ICALP et Words 2025).
- **2 articles** en cours de révision pour des revues.
- **5+ articles** en préparation.
- **1 chapitre** de livre en préparation (CANT).
- **20+ exposés** (conf, séminaires).



Jorge Almeida 🇵🇹 Valérie Berthé 🇫🇷 Alfredo Costa 🇵🇹 France Gheeraert 🇧🇪 Karel Klouda 🇨🇪
 Julien Leroy 🇧🇪 Dominique Perrin 🇫🇷 Karl Petersen 🇺🇸 Štěpán Starosta 🇨🇪 Pierre Stas 🇧🇪