Rozwiązania niektórych z około dwustu łatwych zadań z języków formalnych i złożoności obliczeniowej (i jednego nie aż tak trudnego, jak się o nim mówi)

Numeracja zadań jak w zbiorze z 2017 roku

Wrocław, 14 kwietnia 2017

1 Wskazówki

Patrząc perspektywicznie w stronę zbliżających się egzaminów, ta sekcja wydaje mi się ważnejsza i zachęcam do spędzania z nią czasu podczas samodzielnych wieczornych rozmyślań.

1.1 Języki i automaty

Zadanie 63. *Warto zastanowić się, jak miałby wyglądać niedeterministyczny automat ze stosem rozpoznający taki język. Pomocny może się też okazać pewien lemat.*

1.1.1 Języki rodzynkowe

Zadanie 71. *Probem sprowadza się do rozpoznawania liter języka L^*. Gdyby miał istanieć taki język L, to pewnie musiałby być nieskończony (dlaczego?). Może istnieje jakaś prosta, nieskończona rodzina słów postaci a^*ba^*, którą automat ze stosem może łatwo rozpoznawać, ale taki bez stosu będzie miał trudniej? Formalnie, jak to bywa, warto używać lematów.*

1.2 Obliczalność

Zadanie 92. *Jak coś ma nie być r.e. to na pewno chodzi o redukcję z $\overline{\mathbb{K}}$. Delikatna modyfikacja 89.*

Zadanie 99. *i) Jak coś ma nie być r.e. to na pewno chodzi o redukcję z $\overline{\mathbb{K}}$. Delikatna modyfikacja 89.*
ii) Czy $\Phi_m \neq \Phi_n \iff \exists k \Phi_m(k) \neq \Phi_n(k)$?

Zadanie 101. *Trzeba wprost zdefiniować redukcję z B do A.*

Zadanie 102. *a. założenie o nietrywialności zadania b. implikuje odpowiedź w zadaniu a.. Pewna użyteczna redukcja i w tym zadaniu okaże się pomocna. b. formalne sformułowanie tego, co to znaczy że $n \in B$, używająca 3 zmiennych, wprost prowadzi do co-r.e. zbioru A.*

Zadanie 103. *Należałoby się zastanowić, co wspólnego mają te warunki z monotonicznością f.*

Zadanie 110. *To jest wgl. ważne zadanie i warto mu poświęcić dłuższą chwilę.*
a) Chcemy zakodować Maszynę Turinga (z ustalonym wejściem) jako automat deterministyczny z dwoma stosami.
a_0) Zamienić MT z ustalonym wejściem na równoważną MT z pustym wejściem.
a_1) Trzeba się przyjrzeć dokładniej temu, jak Maszyna wygląda, porysować coś. W szczególności spostrzec, że działa ona bardzo lokalnie. Trochę podobne do zadania 130, może być ono pewną inspiracją.
b) Zamienić stos na licznik.
b_0) Jak zamienić potencjalnie szeroki wybór sweterków (jak u blondynki) na sweterki tylko dwóch kolorów (jak u blondyna)?
b_1) Popatrzeć na taki zamieniony stos i zobaczyć, że w rzeczywistości wystarczy nam pamiętać jedną liczbę zamiast jednego stosu.
b_2) Poświęcić chwilę (!) na względnie dopracowanie wymaganych od stosów operacji w licznikowej implementacji stosów. Przydatne mogą okazać się dwa dodatkowe liczniki.
c) Zachwycić się bogactwem liczb naturalnych - w szczególności można skorzystać ze znanego wszem i wobec kodowania skończonych ciągów liczbowych jako pojedyncze liczby. Np. ciągi 4-elementowe też się da. Zaimplementować wymagane operacje przy użyciu drugiego licznika.

Zadanie 114. *Mocno podobne do zadania 127 (gramatyk ze znikaniem). Tym razem trzeba zrobić dwie gramatyki, osobną dla słów l_i i r_i.*

Zadanie 115. *Warto skorzystać z zadania 114. Udowodnić, że $(L_G)^c$ dla CFG G z zad. 114 jest CFL. Porachować, przypomnieć sobie prawa de Morgana.*

Zadanie 116. *Warto skorzystać z zadania 115.*

Zadanie 118. *To mi wygląda na redukcję z PCP ($\langle a, b\rangle = \langle l_i, r_i\rangle$), ale jeszcze nie wiem.*

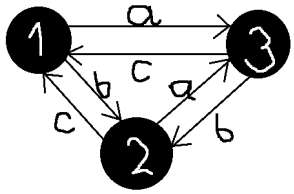
2 Szkice rozwiązań

2.1 Języki i automaty

2.1.1 Synchronizacja automatów częściowych

Zadanie 40.

Odp: NIE.



Rysunek 1: $csync(\{1,2\}) \supset \{a\};\ csync(\{1,3\}) \supset \{b\};\ csync(\{1,2\}) \supset \{c\}$. Natomiast $csync(Q) = \emptyset$.

Zadanie 41.

W obydwu podpunktach wystarczy zbadać funkcję

$$F : 2^Q \times \Sigma \longrightarrow 2^Q$$
$$F(S,a) = \{\delta(q,a) :\ q \in S\}.$$

Oczywiście $s \in csync(S) \iff |\widehat{F}(S,s)| = 1$, gdy zdefiniujemy $\widehat{F}$ w naturalny sposób. Ponadto $1 \leqslant |F(A,a)| \leqslant |A|$, zatem $1 \leqslant |\widehat{F}(S,p)| \leqslant |S|$ dla dowolnego prefiksu p słowa s, czyli $\widehat{F}(S,p)$ może przyjmować co najwyżej $\sum_{k=1}^{|S|} \binom{|Q|}{k}$ różnych wartości. Oznaczmy tę liczbę jako M.

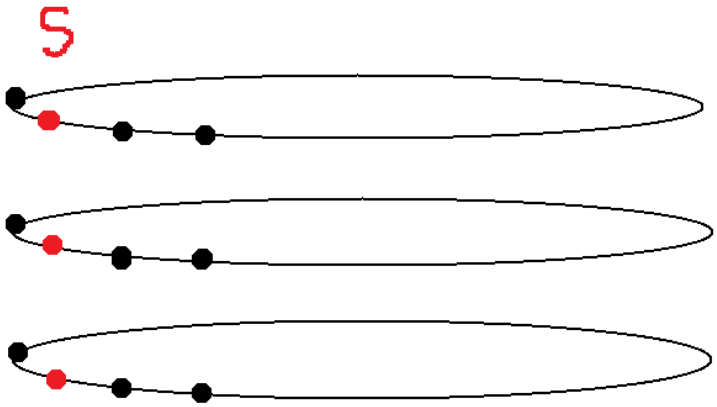
Dla $|s| > M$ istnieją prefiksy p_1 i p_2 słowa $s = p_1 s_1 = p_2 s_2$, $|p_1| < |p_2|$, takie że $\widehat{F}(S,s_1) = \widehat{F}(S,s_2)$ (Zasada Szufladkowa). Wtedy oczywiście $\widehat{F}(S,s) = \widehat{F}(S,p_1 s_2)$, przy czym $|p_1 s_2| < |s|$.

W zwiazku z powyższym $csync(Q) \neq \emptyset \iff \exists s \in S |s| \leqslant M$.
Dokładne odpowiedzi wynikają z tego wprost, po podstawieniu za S a) dowolniego trzyelementowego zbioru stanów b) Q.

Zadanie 42.

Wystarczy rozwiązać M, L i XL wynikają w prosty sposób. Wskazówka jest myląca.

Zbudujmy automat (częściowy) z trzech cykli, ułożonych jeden nad drugim, każdy długości m. Trzy stany, ułożene jeden nad drugim, będą stanowiły nasz początkowy zbiór S

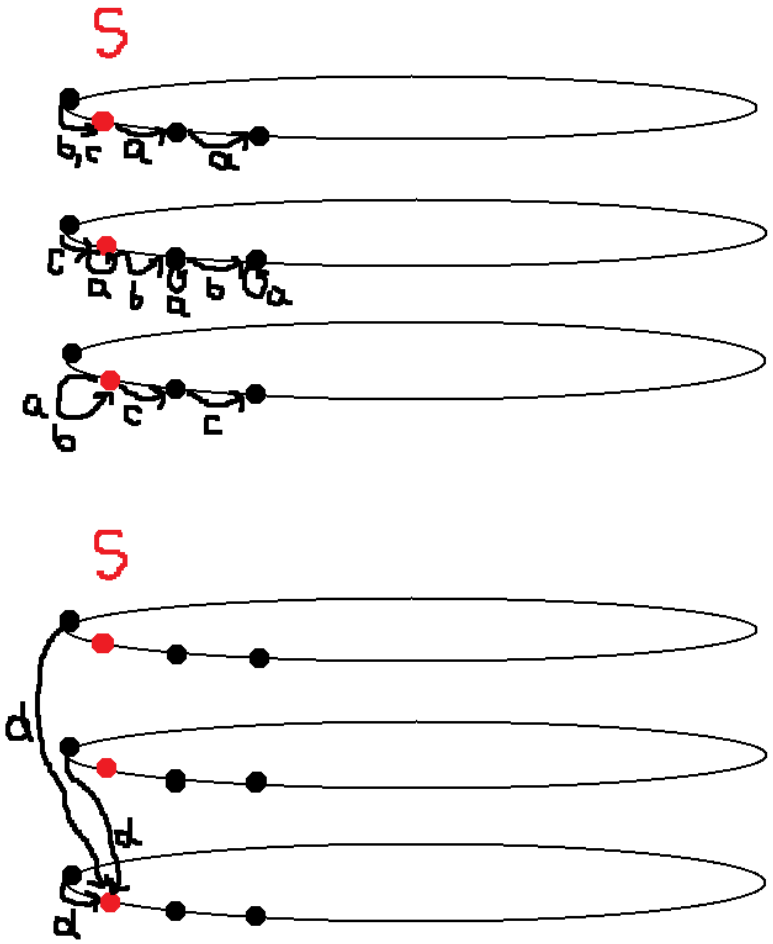


Naszym celem jest, aby co jedną literę zmieniał się stan na górnym cyklu, co m liter stan na drugim, a co m^2 na trzecim. Zapenimy też, że synchronizacja będzie mogła nastąpić dopiero po przejściu przez dolny stan całego cyklu (czyli m^3 krokach).
Możemy to wymusić w następujący sposób:

przy czym pętelki z literą a są przy każdym stanie na drugim dysku, a pętelki z literami a,b są przy każdym stanie na trzecim dysku.
Możliwość synchronizacji zapeniamy przez dodanie przejść z przedostatnich stanów na każdym dysku do pierwszego stanu dolnego dysku. Oznaczenie ich specjalną "literką synchronizacji", jak d, zapewni nam, że skorzystać z niej będzie można dopiero gdy dolny stan dojdzie do przedostatniego miejsca na dolnym dysku (co następuje dopiero po m^3 krokach:

Zauważmy teraz, że ten automat (zanim dojedzie do synchronizacji) jednoznacznie wyznacza słowo, dla którego funkcja przejścia jest określona dla wszystkich stanów z S:

$$s = ((a^{m-1}b)^{m-1}c)^{m-1}d$$



Takie s synchronizuje S i nie istnieje żadne krótsze od niego. Nietrudno wyliczyć, że jest ono odpowiednio długie.

Zadanie 63.

Przypuśćmy nie wprost, że ten język jest bezkontekstowy. Niech N będzie stałą z lematu o pompowaniu dla tego języka. Wystarczy rozważyć słowo $0^{2N}1^{2N}0^{2N}1^{2N}$ i pamiętać, że przy podziale z lematu (ozn. $vwxyz$) zachodzi $|wxy| \leqslant N$. Odpowiednio cierpliwe rozpatrywanie przypadków (gdzie w oryginalnym słowie ląduje podsłowo wxy) prowadzi nas do wniosku, że zawsze można odpowiedni fragment podpompować (lub spompować) i uzyskać słowo spoza języka.

2.1.2 Języki rodzynkowe

Zadanie 71.

Rozważmy $L = \{a^n b a^n : n \in \mathbb{N}\}$. Łatwo sprawdzić, że nawet deterministyczny automat ze stosem daje sobie radę z językiem L^*, bo rozpoznawanie liter tego języka (czyli słów języka L) jest bardzo łatwe.
Z lematu o pompowaniu bardzo łatwo pokazać, że L^* nie jest regularny (L też nie jest).

2.1.3 Transducery

Zadanie 77.

Podpunkt 1: definiujemy $\sigma_{Mealy} = \sigma_{Moore} \circ \delta$. Reszta zostaje.
Podpunkt 2: definiujemy (dla transducera Mealy'ego $\langle \Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma_{Mealy} \rangle$)

1. $Q' = Q \times \Sigma \cup q_0'$. Stan (q, a) = stan do którego doszlibyśmy w starym automacie ze stanu q wczytując literę a. Stan q_0' - dodatkowy stan początkowy.

2. $\delta'((q, a), b) = (\delta(q, a), b)$ dla pary $(q, a) \in Q \times \Sigma$
   $\delta'(q_0', a) = (q_0, a)$

3. $\sigma_{Moore}((q, a)) = \sigma_{Mealy}(q, a)$
   $\sigma_{Moore}(q_0') = \varepsilon$

Otrzymujemy transducer Moore'a $\langle \Sigma, \Sigma_1, Q', q_0', \delta', \sigma_{Moore} \rangle$ równoważny z pierwotnym t. Mealy'ego.
Dowód w obu przypadkach zapewne angażuje Zasadę Indukcji Matematycznej względem długości słowa.

Zadanie 78.

bso. (77) zajmijmy się transducerem Mealy'ego $\langle \Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma_{Mealy} \rangle$, który świadczy że $A \leqslant_{reg} B$. Niech przy okazji $A_B = \langle \Sigma_1, Q^B, q_0^B, F^B, \delta^B \rangle$ będzie DFA rozpoznającym B. Definiujemy $\delta'(q, a) = \widehat{\delta^B}(q, \sigma_{Mealy}(q, a))$.
Udajemy, że jesteśmy słowem z języka B i chodzimy po automacie A_B.
Wtedy $\langle \Sigma, Q^B, q_0^B, F^B, \delta' \rangle$ jest DFA rozpoznającym A (d-d. indukcyjny względem długości słowa).

Zadanie 79.

Definiujemy transducer Mealy'ego T_{Mealy}:

1. $\Sigma = \{1, 2, 3, ..., n\}$
2. $Q = \Sigma$
3. $q_0 = 1$
4. $\delta(q, a) = a$
5. $\Sigma_1 = Q \times \Sigma$
6. $\sigma_{Mealy} = Id$

Niech $T_{Moore} = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q', q_0', \delta', \sigma_{Moore} \rangle$ będzie transducerem Moore'a równoważnym z T_{Mealy}.

Obserwacja 1. *Możemy założyć, że każdy stan z Q' jest osiągany przez DFA stowarzyszony z T_{Moore}. W przeciwnym razie możemy usunąć te stany, a powstały T'_{Moore} wciąż będzie równoważny z T_{Mealy}.*

Obserwacja 2. *$s \in Im(\sigma_{Mealy}) \Rightarrow |s| = 1$. Zatem $s \in Im(\sigma_{Moore}) \Rightarrow |s| = 1$.*

Gdyby było $|Q'| < n^2$, to $Im(\sigma_{Mealy}) \nsubseteq Im(\sigma_{Moore})$. Niech $s \in Im(\sigma_{Mealy}) \setminus Im(\sigma_{Moore})$. $s = (k, l)$ dla pewnych $k, l \in \Sigma$. Rozważmy słowo $t = kl$. Wtedy $f_{T_{Mealy}}(t) = \sigma_{Mealy}(1, k)\sigma_{Mealy}(k, l) = (1, k)(k, l)$.
Załóżmy nie wprost, że $f_{T_{Moore}}(t) = f_{T_{Mealy}}(t)$. Jest to równoważne (obs. 2) z tym, że $\sigma_{Moore}(\delta'(q_0', k)) = \sigma_{Mealy}(1, k)$ oraz $\sigma_{Moore}(\widehat{\delta'}(q_0', kl)) = \sigma_{Mealy}(k, l) = (k, l)$. Druga równość stoi w jawnej sprzeczności z naszym założeniem, że $(k, l) \notin Im(\sigma_{Moore})$.

Zadanie 80.

Zdaje się, że świadczy o tym następujący transducer Mealy'ego:

1. $\Sigma = \{(,), [,], \langle, \rangle\}$
2. $Q = \{q_0\}$
3. $q_0 = q_0$
4. $\delta \equiv q_0$
5. $\Sigma_1 = \{(,), [,]\}$
6. $\sigma_{Mealy}(q_0, (/)) = ((/))$
   $\sigma_{Mealy}(q_0, [/]) = [[/]]$
   $\sigma_{Mealy}(q_0, \langle/\rangle) = [(/)]$

Dowód pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

2.2 Obliczalność

Zadanie 89.

Niech $B = \{n : Dom(\Phi_n) = \mathbb{N}\}$. Robimy redukcję f_{89} z $\overline{\mathbb{K}}$.
Definiujemy $f_{89}(n)$ jako numer następującego programu:
`wczytaj k`
`odpal` $\Phi_n(n)$ `na` k `kroków`
`jeżeli się skończył : zapętl się`
`w p.p. : zwróć 1`
Sprawdzenie, że zachodzi $n \in \overline{\mathbb{K}} \iff f_{89}(n) \in B$ pozostawiamy jako proste ćwiczenie.

Zadanie 92.

Robimy redukcję f z $\overline{\mathbb{K}}$.
Definiujemy $f(n)$ jako numer następującego programu:
`wczytaj k`
`jeżeli k jest parzyste : zapętl się`
`w p.p. :`
`odpal` $\Phi_n(n)$ `na` k `kroków`
`jeżeli się skończył : zapętl się`
`w p.p. : zwróć 1`
Oczywiście $Dom(\Phi_{f(n)}) = (2\mathbb{N}+\{1\}) \cap \{t \in \mathbb{N} : t <$ czas wykonania się $\Phi_n(n)\}$.
Sprawdzenie, że zachodzi $n \in \overline{\mathbb{K}} \iff f(n) \in B$ pozostawiamy jako proste ćwiczenie.

Zadanie 99.

i) Robimy redukcję f z $\overline{\mathbb{K}}$, pamiętając o redukcji f_{89}.
Niech c będzie numerem następującego programu:
`wczytaj k`
`zwróć 1`
Definiujemy $f(n) = \langle c, f_{89}(n)\rangle$. Jest oczywiste (po zrobieniu zadania 89), że zachodzi

$$n \in \overline{\mathbb{K}} \iff f(n) \in T.$$

ii) Nie. Robimy redukcję f z $\overline{\mathbb{K}}$.
Niech $f_a(n)$ będzie numerem następującego programu:
`wczytaj k`
`jeżeli k > 1 : zapętl się`
`w p.p. :`
`odpal` $\Phi_n(n)$
`zwróć 1`
Niech $f_b(n)$ będzie numerem następującego programu:
`wczytaj k`

`jeżeli k > 1 : zapętl się`
`w p.p. :`
`zwróć 1`
Definiujemy $f(n) = \langle f_a(n), f_b(n) \rangle$. Oczywiste zachodzi

$$n \in \overline{\mathbb{K}} \iff f(n) \in \overline{T}.$$

Zadanie 101.

Definiujemy f^{-1} w następujący sposób:
`wczytaj n`
`Dla` $k = 1, 2, 3...$ `:`
`jeżeli` $f(k) = n$ `: zwróć k`
Oczywiście f^{-1} jest całkowita, bo f jest "na". Łatwo sprawdzić, że zachodzi również $f \circ f^{-1} = Id$ (a czy $f^{-1} \circ f = Id$?).
Pokażemy, że f^{-1} jest redukcją z B do A :

$$n \in B \iff Id(n) \in B \iff f(f^{-1}(n)) \in B \iff f^{-1}(n) \in A,$$

przy czym ostatnia równoważność wynika z tego, że f jest redukcją z A do B. Oczywiście powyższe oznacza doładnie to, że f^{-1} jest redukcją z B do A.

Zadanie 102.

a) Nie. Wysztarczy pokazać redukcję z $\mathbb{K}$ (dlaczego?). O dziwo, jest to dokładnie f_{89}.

b) Definiujemy $A = \{(n, k, t) : \Phi_n(i)$ kończy się po co najwyżej t krokach dla $i = 1, 2, ..., k$ oraz nie kończy się dla $i > k\}$. Ten zbiór jest dobry, a sprawdzenie pozostawiamy jako ćwiczenie.

Zadanie 103.

a) Tak. Bo istanieje takie duże N, że na zbiorze $\{N, N+1, ...\}$ f jest niemalejąca. Z zadania 86 wynika więc, że $f(\{N, N+1, ...\})$ jest rekurencyjny. Zatem $f(\mathbb{N}) = f(\{1, 2, ..., N-1\}) \cup f(\{N, N+1, ...\})$ jest rekurencyjny, jako suma dwóch zbiorów rekurencyjnych.

b) Nie. Niech $A = \{1\}$. Niech g będzie całkowitą funkcją rekurencyją, taką że $g(\mathbb{N}) = \mathbb{K}$ (skądinąd wiemy, że taka istnieje - np. 87). Rozważmy następującą funkcję f:
`wczytaj n`
`jeżeli n jest parzyste : zwróć` $g(\frac{n}{2})$
`w p.p. : zwróć 1`
f spełnia warunek z zadania, ale $f(\mathbb{N}) = \mathbb{K} \cup \{1\}$, a to nie jest zbiór rekurencyjny.

Zadanie 105.

Uwaga: N_{emp} jest r.e. Semi-rozstrzyga go następujący program $\Phi_{N_{emp}}$:
`wczytaj n`
`dla` $k = 1, 2, 3, ...$ `:`
`odpal` $\Phi_n(i)$ `na` k `kroków dla` $i = 1, 2, ..., k$
`jeżeli na którymś z argumentów` Φ_n `się zatrzymał : zwróć 1`

a) Tak. Świadczy o tym następująca redukcja f:
Jako $f(n)$ przyjmijmy numer następującego programu:
`wczytaj k`
`odpal` $\Phi_{N_{emp}}(n)$
`zwróć 1`
Dowód poprawności pozostawiamy jako ćwiczenie.

b) Nie, bo Tot nie jest r.e. (zadanie 89), a N_{emp} jest.