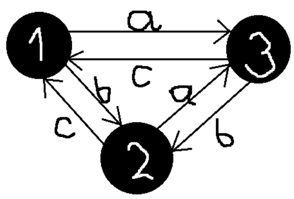
1 Języki i automaty

Zadanie 40

Odp: NIE.



Rysunek 1: $csync(\{1,2\}) \supset \{a\}$; $csync(\{1,3\}) \supset \{b\}$; $csync(\{1,2\}) \supset \{c\}$. Natomiast $csync(Q) = \emptyset$.

Zadanie 41

W obydwu podpunktach wystarczy zbadać funkcję

$$F : 2^Q \times \Sigma \longrightarrow 2^Q$$
$$F(S,a) = \{\delta(q,a) : \ q \in S\}.$$

Oczywiście $s \in csync(S) \iff |\widehat{F}(S,s)| = 1$, gdy zdefiniujemy $\widehat{F}$ w naturalny sposób. Ponadto $1 \leqslant |F(A,a)| \leqslant |A|$, zatem $1 \leqslant |\widehat{F}(S,p)| \leqslant |S|$ dla dowolnego prefiksu p słowa s, czyli $\widehat{F}(S,p)$ może przyjmować co najwyżej $\sum_{k=1}^{|S|} \binom{|Q|}{k}$ różnych wartości. Oznaczmy tę liczbę jako M.

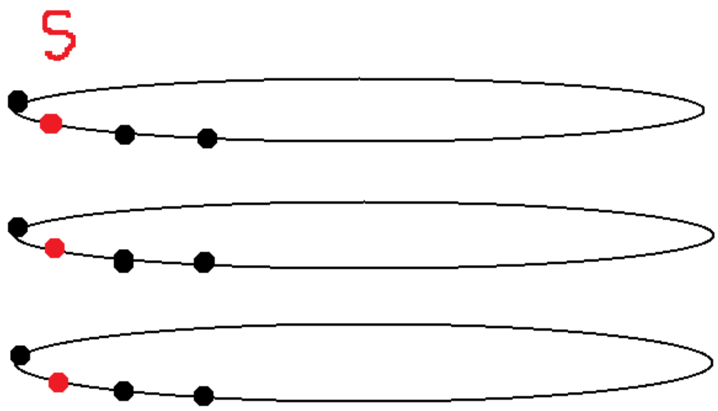
Dla $|s| > M$ istnieją prefiksy p_1 i p_2 słowa $s = p_1 s_1 = p_2 s_2$, $|p_1| < |p_2|$, takie że $\widehat{F}(S,s_1) = \widehat{F}(S,s_2)$ (Zasada Szufladkowa). Wtedy oczywiście $\widehat{F}(S,s) = \widehat{F}(S,p_1 s_2)$, przy czym $|p_1 s_2| < |s|$.

W zwiazku z powyższym $csync(Q) \neq \emptyset \iff \exists s \in S |s| \leqslant M$.
Dokładne odpowiedzi wynikają z tego wprost, po podstawieniu za S a) dowolniego trzyelementowego zbioru stanów b) Q.

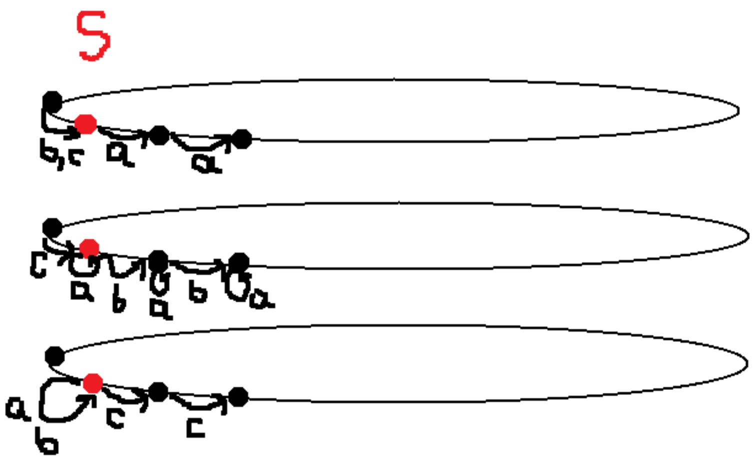
Zadanie 42

Wystarczy rozwiązać M, L i XL wynikają w prosty sposób. Wskazówka jest mylląca.

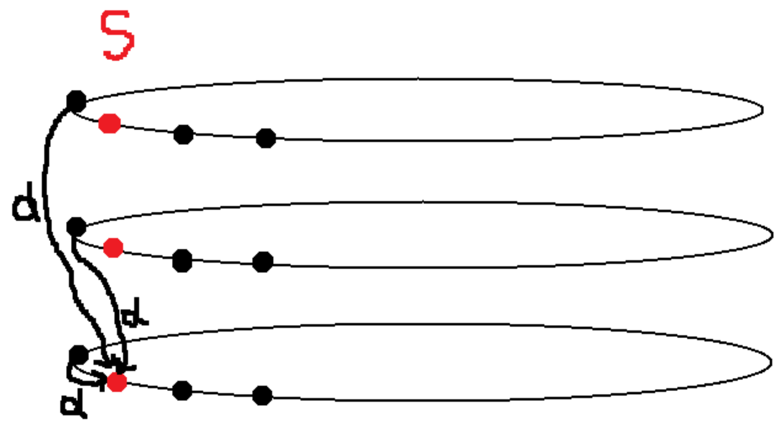
Zbudujmy automat (częściowy) z trzech cykli, ułożonych jeden nad drugim, każdy długości m. Trzy stany, ułożene jeden nad drugim, będą stanowiły nasz początkowy zbiór S



Naszym celem jest, aby co jedną literę zmieniał się stan na górnym cyklu, co m liter stan na drugim, a co m^2 na trzecim. Zapenimy też, że synchronizacja będzie mogła nastąpić dopiero po przejściu przez dolny stan całego cyklu (czyli m^3 krokach).
Możemy to wymusić w następujący sposób:



przy czym pętelki z literą a są przy każdym stanie na drugim dysku, a pętelki z literami a,b są przy każdym stanie na trzecim dysku.
Możliwość synchronizacji zapeniamy przez dodanie przejść z przedostatnich stanów na każdym dysku do pierwszego stanu dolnego dysku. Oznaczenie ich specjalną "literką synchronizacji", jak d, zapewni nam, że skorzystać z niej będzie można dopiero gdy dolny stan dojdzie do przedostatniego miejsca na dolnym dysku (co następuje dopiero po m^3 krokach:



Zauważmy teraz, że ten automat (zanim dojedzie do synchronizacji) jednoznacznie wyznacza słowo, dla którego funkcja przejścia jest określona dla wszystkich stanów z S:

$$s = ((a^{m-1}b)^{m-1}c)^{m-1}d$$

Takie s synchronizuje S i nie istnieje żadne krótsze od niego. Nietrudno wyliczyć, że jest ono odpowiednio długie.

Co do wersji L i XL, wystarczy zauważyć, że:

1. To samo rozumowanie można zastosować dla dowolnie wielu cyki, otrzymując wielomian dowolnie dużego stopnia.

2. Potrzebny nam alfabet, który ma $k+1$ liter (gdzie k jest liczbą cykli). Ale dowolny alfabet można zamienić na dwu(trzy)literowy, zapisując jego litery w systemie bi(try)narnym. Każdy stan trzeba zamienić na stałą liczbę stanów, które wczytają odpowiednią liczbę 0 i 1 (i 2), i w ten sposób będą udawały, że wczytają jedną z naszych $k+1$ liter. Wymaga to około k stanów, ale to tylko stała.

Dodatkowo, dodając pętle z literką przejścia na przedostatnich stanach każdego cyklu, zamienimy nasz automat na taki, który synchronizuje wszystkie stany (pierwszy stan każdego cyklu “zjada” wszystkie kolejne w pierwszym przejściu cyklu):