Rozwiązania niektórych z około dwustu łatwych zadań z języków formalnych i złożoności obliczeniowej (i jednego nie aż tak trudnego, jak się o nim mówi)

Numeracja zadań jak w zbiorze z 2017 roku

Wrocław, 22 kwietnia 2017

1 Robocze

2 Wskazówki

Patrząc perspektywicznie w stronę zbliżających się egzaminów, ta sekcja wydaje mi się ważniejsza i zachęcam do spędzania z nią czasu podczas samodzielnych wieczornych rozmyślań.

2.1 Języki i automaty

Zadanie 63. *Warto zastanowić się, jak miałby wyglądać niedeterministyczny automat ze stosem rozpoznający taki język. Pomocny może się też okazać pewien lemat.*

2.1.1 Języki rodzynkowe

Zadanie 71. *Probem sprowadza się do rozpoznawania liter języka* L^**.*
Gdyby miał istanieć taki język L*, to pewnie musiałby być nieskończony (dlaczego?). Może istnieje jakaś prosta, nieskończona rodzina słów postaci* a^*ba^**, którą automat ze stosem może łatwo rozpoznawać, ale taki bez stosu będzie miał trudniej? Formalnie, jak to bywa, warto używać lematów.*

2.1.2 Konfluentność

Zadanie 74. *1) To pytanie jest (nieprzypadkowo) podobne (ale nie identyczne) do pytania: Czy każdy automat deterministyczny można zsynchronizować? (zadania 37-39).*
2) Warto zauważyć, że w definicji konfluantności jest równoważność. Może

zatem być tak, że obie jej strony będą zawsze fałszywe, co oznacza, że chcemy "na dobre" zepsuć słowo. Może są języki nieregularne, które łatwo zepsuć?

Zadanie 75. *To zadanie jest podobne do zadania 38.*

Zadanie 76. *Może chodzić o język, który nie jest tak łatwo zepsuć (ma długie słowa psujące).*

2.2 Obliczalność

Zadanie 92. *Jak coś ma nie być r.e. to na pewno chodzi o redukcję z* $\overline{\mathbb{K}}$*. Delikatna modyfikacja 89.*

Zadanie 99. *i) Jak coś ma nie być r.e. to na pewno chodzi o redukcję z* $\overline{\mathbb{K}}$*. Delikatna modyfikacja 89.*
ii) Czy $\Phi_m \neq \Phi_n \iff \exists k \Phi_m(k) \neq \Phi_n(k)$*?*

Zadanie 100. *To zadanie jest podobne do zadania 102. Zaś z zadania 82 wiemy, czym jest* Σ_1*.*

Zadanie 101. *Trzeba wprost zdefiniować redukcję z* B *do* A*.*

Zadanie 102. *a. założenie o nietrywialności zadania b. implikuje odpowiedź w zadaniu a.. Pewna użyteczna redukcja i w tym zadaniu okaże się pomocna. b. formalne sformułowanie tego, co to znaczy że* $n \in B$*, używająca 3 zmiennych, wprost prowadzi do co-r.e. zbioru* A*.*

Zadanie 103. *Należałoby się zastanowić, co wspólnego mają te warunki z monotonicznością* f*.*

Zadanie 104. *Wskazówka do implikacji* $2 \Rightarrow 1$ *podana w treści jest bardzo dobra. Wskazówka do implikacji odwrotnej: to jest podobne do zadania 97. Trzeba powtórzyć tamto rozumowania, z tym że zamiast 2 zbiorów wziąć przeliczalnie wiele.*

Zadanie 107. *Wskazówka sugeruje, że nie. Dodatkowa byłaby taka, że zbiorów r.e. jest przeliczalnie wiele - bo tyle jest programów, które je rozpoznają. Warto też przypomnieć sobie (jak ktoś nie pamięta), dowód tego, że podzbiorów* $\mathbb{N}$ *jest nieprzeliczalnie wiele. Ten argument jest tylko trochę "inteligentniejszy".*

Zadanie 110. *To jest wgl. ważne zadanie i warto mu poświęcić dłuższą chwilę.*
a) Chcemy zakodować Maszynę Turinga (z ustalonym wejściem) jako automat deterministyczny z dwoma stosami.
a_0*) Zamienić MT z ustalonym wejściem na równoważną MT z pustym wejściem.*
a_1*) Trzeba się przyjrzeć dokładniej temu, jak Maszyna wygląda, porysować*

coś. W szczególności spostrzec, że działa ona bardzo lokalnie. Trochę podobne do zadania 130, może być ono pewną inspiracją.
b) Zamienić stos na licznik.
b_0) Jak zamienić potencjalnie szeroki wybór sweterków (jak u blondynki) na sweterki tylko dwóch kolorów (jak u blondyna)?
b_1) Popatrzeć na taki zamieniony stos i zobaczyć, że w rzeczywistości wystarczy nam pamiętać jedną liczbę zamiast jednego stosu.
b_2) Poświęcić chwilę (!) na względnie dopracowanie wymaganych od stosów operacji w licznikowej implementacji stosów. Przydatne mogą okazać się dwa dodatkowe liczniki.
c) Zachwycić się bogactwem liczb naturalnych - w szczególności można skorzystać ze znanego wszem i wobec kodowania skończonych ciągów liczbowych jako pojedyncze liczby. Np. ciągi 4-elementowe też się da. Zaimplementować wymagane operacje przy użyciu drugiego licznika.

Zadanie 114. *Mocno podobne do zadania 127 (gramatyk ze znikaniem). Tym razem trzeba zrobić dwie gramatyki, osobną dla słów l_i i r_i.*

Zadanie 115. *Warto skorzystać z zadania 114. Udowodnić, że $(L_G)^c$ dla CFG G z zad. 114 jest CFL. Porachować, przypomnieć sobie prawa de Morgana.*

Zadanie 116. *Warto skorzystać z zadania 115.*

Zadanie 118. *Czy da się, być może dodając specyficzne zamiany, zasymulować pełny semiproces Thuego, ograniczajc się w **istotnych** zamianych tylko do zamiany początku pierwszego słowa na koniec drugiego?*

Zadanie 120. *Warto rozważyć jakiś nierozstrzygalny problem, który można zakodować w kafelkach o skończonej liczbie kolorów, a poprawność kodowania sprawdzać bardzo lokalnie (to będzie odpowiadało poprawnym czwórkom kolorów). Trochę podobne do rozwiązania z Sipsera zadania 115.*

Zadanie 121. *W obu przypadkach redukcja musi zmodyfikować układ równań tak, żeby:*
a) zwiększyć liczbę możliwych rozwiązań. Wsk: zapisać dowolną zmienną całkowitą jako wielomian o wsp. całkowitych oraz zmiennych naturalnych.
b) zmniejszyć liczbę rozwiązań. Wsk: tutaj warto skorzystać z wskazówki z treści zadania o zapisie liczby naturalnej jako 4 kwadratów liczb całkowitych.

Zadanie 122. *Podobne do zadania 129.*

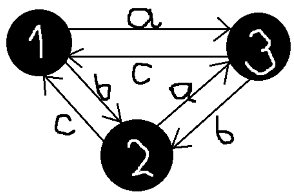
3 Szkice rozwiązań

3.1 Języki i automaty

3.1.1 Synchronizacja automatów częściowych

Zadanie 40.

Odp: NIE.



Rysunek 1: $csync(\{1,2\}) \supset \{a\}$; $csync(\{1,3\}) \supset \{b\}$; $csync(\{1,2\}) \supset \{c\}$. Natomiast $csync(Q) = \emptyset$.

Zadanie 41.

W obydwu podpunktach wystarczy zbadać funkcję

$$F : 2^Q \times \Sigma \longrightarrow 2^Q$$
$$F(S,a) = \{\delta(q,a) :\ q \in S\}.$$

Oczywiście $s \in csync(S) \iff |\widehat{F}(S,s)| = 1$, gdy zdefiniujemy $\widehat{F}$ w naturalny sposób. Ponadto $1 \leqslant |F(A,a)| \leqslant |A|$, zatem $1 \leqslant |\widehat{F}(S,p)| \leqslant |S|$ dla dowolnego prefiksu p słowa s, czyli $\widehat{F}(S,p)$ może przyjmować co najwyżej $\sum_{k=1}^{|S|} \binom{|Q|}{k}$ różnych wartości. Oznaczmy tę liczbę jako M.

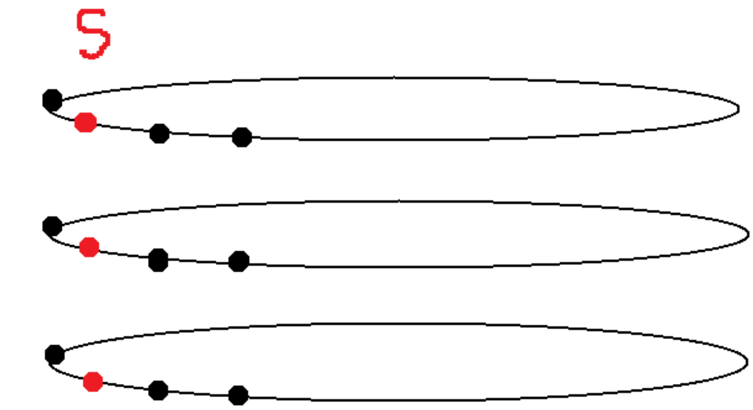
Dla $|s| > M$ istnieją prefiksy p_1 i p_2 słowa $s = p_1 s_1 = p_2 s_2$, $|p_1| < |p_2|$, takie że $\widehat{F}(S,s_1) = \widehat{F}(S,s_2)$ (Zasada Szufladkowa). Wtedy oczywiście $\widehat{F}(S,s) = \widehat{F}(S,p_1 s_2)$, przy czym $|p_1 s_2| < |s|$.

W zwiazku z powyższym $csync(Q) \neq \emptyset \iff \exists s \in S |s| \leqslant M$.
Dokładne odpowiedzi wynikają z tego wprost, po podstawieniu za S a) dowolnego trzyelementowego zbioru stanów b) Q.

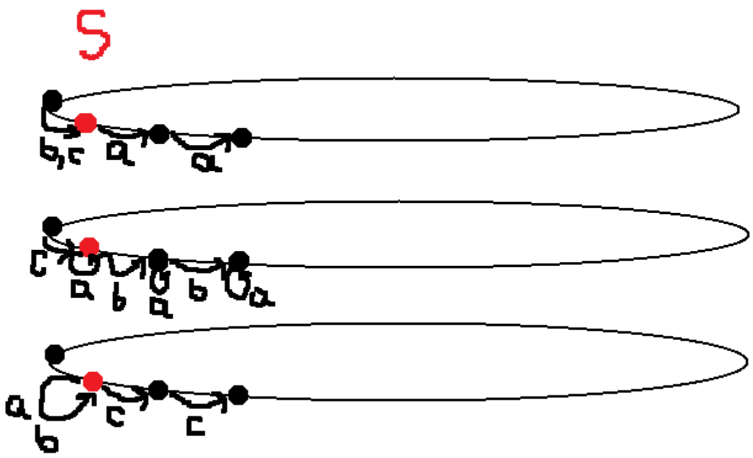
Zadanie 42.

Podpunkt M można rozwiązać w naturalny sposób. W kolejnych podpunktach warto jednak skorzystać ze wskazówki.

Zbudujmy automat (częściowy) z trzech cykli, ułożonych jeden nad drugim, każdy długości m. Trzy stany, ułożene jeden nad drugim, będą stanowiły nasz początkowy zbiór S

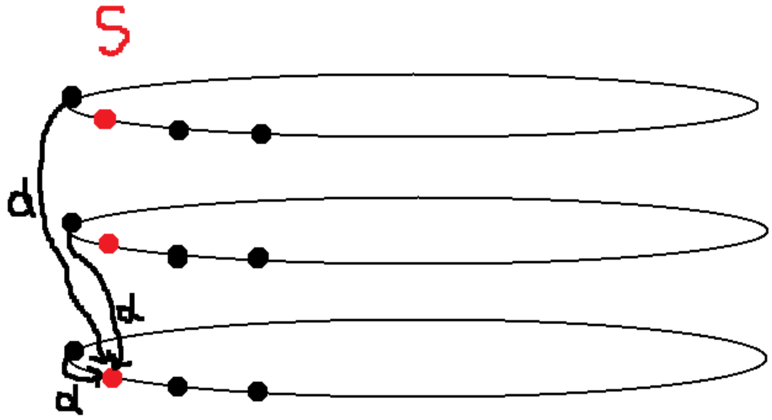


Naszym celem jest, aby co jedną literę zmieniał się stan na górnym cyklu, co m liter stan na drugim, a co m^2 na trzecim. Zapenimy też, że synchronizacja będzie mogła nastąpić dopiero po przejściu przez dolny stan całego cyklu (czyli m^3 krokach).
Możemy to wymusić w następujący sposób:



przy czym pętelki z literą a są przy każdym stanie na drugim dysku, a pętelki z literami a,b są przy każdym stanie na trzecim dysku.

Możliwość synchronizacji zapeniamy przez dodanie przejść z przedostatnich stanów na każdym dysku do pierwszego stanu dolnego dysku. Oznaczenie ich specjalną "literką synchronizacji", jak d, zapewni nam, że skorzystać z niej będzie można dopiero gdy dolny stan dojdzie do przedostatniego miejsca na dolnym dysku (co następuje dopiero po m^3 krokach:



Zauważmy teraz, że ten automat (zanim dojedzie do synchronizacji) jednoznacznie wyznacza słowo, dla którego funkcja przejścia jest określona dla wszystkich stanów z S:

$$s = ((a^{m-1}b)^{m-1}c)^{m-1}d$$

Takie s synchronizuje S i nie istnieje żadne krótsze od niego. Nietrudno wyliczyć, że jest ono odpowiednio długie.

Zadanie 63.

Przypuśćmy nie wprost, że ten język jest bezkontekstowy. Niech N będzie stałą z lematu o pompowaniu dla tego języka. Wystarczy rozważyć słowo $0^{2N}1^{2N}0^{2N}1^{2N}$ i pamiętać, że przy podziale z lematu (ozn. $vwxyz$) zachodzi $|wxy| \leqslant N$. Odpowiednio cierpliwe rozpatrywanie przypadków (gdzie w oryginalnym słowie ląduje podsłowo wxy) prowadzi nas do wniosku, że zawsze można odpowiedni fragment podpompować (lub spompować) i uzyskać słowo spoza języka.

3.1.2 Języki rodzynkowe

Zadanie 71.

Rozważmy $L = \{a^n b a^n : n \in \mathbb{N}\}$. Łatwo sprawdzić, że nawet deterministyczny automat ze stosem daje sobie radę z językiem L^*, bo rozpoznawanie liter tego języka (czyli słów języka L) jest bardzo łatwe.
Z lematu o pompowaniu bardzo łatwo pokazać, że L^* nie jest regularny (L też nie jest).

3.1.3 Konfluentność

Zadanie 74.

1) $\{0^n : k|n\}$ dla $k > 1$ jest przykładem na regularny język niekonfluentny.
2) $\{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ jest przykładem na nieregularny język konfluentny. Uniwersalnym słowem x dla tego języka jest 10.

Zadanie 75.

Rozwiązanie tego zadania jest identyczne do rozwiązania zadania 38.

Zadanie 76.

Język dobrych nawiasowań jest dobrym przykładem. Dowód przebiega nie wprost, a jeśli oznaczymy przez c stałą wynikającą z założenia nie wprost, to słowa $s_1 =)^{c+1}$ i $s_2 = (^{c+1}$ są kontrprzykładami, gdyż trzeba zepsuć s_1 aby je ukonfluentnić, a nie można tego zrobić słowem długości mniejszej niż $c + 2$.

3.1.4 Transducery

Zadanie 77.

Podpunkt 1: definiujemy $\sigma_{Mealy} = \sigma_{Moore} \circ \delta$. Reszta zostaje.
Podpunkt 2: definiujemy (dla transducera Mealy'ego $\langle \Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma_{Mealy} \rangle$)

1. $Q' = Q \times \Sigma \cup q'_0$. Stan (q, a) = stan do którego doszlibyśmy w starym automacie ze stanu q wczytując literę a. Stan q'_0 - dodatkowy stan początkowy.
2. $$\delta'((q, a), b) = (\delta(q, a), b) \text{ dla pary } (q, a) \in Q \times \Sigma$$
   $$\delta'(q'_0, a) = (q_0, a)$$
3. $$\sigma_{Moore}((q, a)) = \sigma_{Mealy}(q, a)$$
   $$\sigma_{Moore}(q'_0) = \varepsilon$$

Otrzymujemy transducer Moore'a $\langle \Sigma, \Sigma_1, Q', q'_0, \delta', \sigma_{Moore} \rangle$ równoważny z pierwotnym t. Mealy'ego.
Dowód w obu przypadkach zapewne angażuje Zasadę Indukcji Matematycznej względem długości słowa.

Zadanie 78.

bso. (77) zajmijmy się transducerem Mealy'ego $\langle \Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma_{Mealy} \rangle$, który świadczy że $A \leqslant_{reg} B$. Niech przy okazji $A_B = \langle \Sigma_1, Q^B, q_0^B, F^B, \delta^B \rangle$ będzie DFA rozpoznającym B. Definiujemy $\delta'(q, a) = \widehat{\delta^B}(q, \sigma_{Mealy}(q, a))$. Udajemy, że jesteśmy słowem z języka B i chodzimy po automacie A_B. Wtedy $\langle \Sigma, Q^B, q_0^B, F^B, \delta' \rangle$ jest DFA rozpoznającym A (d-d. indukcyjny względem długości słowa).

Zadanie 79.

Definiujemy transducer Mealy'ego T_{Mealy}:

1. $\Sigma = \{1, 2, 3, ..., n\}$
2. $Q = \Sigma$
3. $q_0 = 1$
4. $\delta(q, a) = a$
5. $\Sigma_1 = Q \times \Sigma$
6. $\sigma_{Mealy} = Id$

Niech $T_{Moore} = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q', q_0', \delta', \sigma_{Moore} \rangle$ będzie transducerem Moore'a równoważnym z T_{Mealy}.

Obserwacja 1. *Możemy założyć, że każdy stan z Q' jest osiągany przez DFA stowarzyszony z T_{Moore}. W przeciwnym razie możemy usunąć te stany, a powstały T'_{Moore} wciąż będzie równoważny z T_{Mealy}.*

Obserwacja 2. $s \in Im(\sigma_{Mealy}) \Rightarrow |s| = 1$. *Zatem* $s \in Im(\sigma_{Moore}) \Rightarrow |s| = 1$.

Gdyby było $|Q'| < n^2$, to $Im(\sigma_{Mealy}) \nsubseteq Im(\sigma_{Moore})$. Niech $s \in Im(\sigma_{Mealy}) \setminus Im(\sigma_{Moore})$. $s = (k, l)$ dla pewnych $k, l \in \Sigma$. Rozważmy słowo $t = kl$. Wtedy $f_{T_{Mealy}}(t) = \sigma_{Mealy}(1, k)\sigma_{Mealy}(k, l) = (1, k)(k, l)$.
Załóżmy nie wprost, że $f_{T_{Moore}}(t) = f_{T_{Mealy}}(t)$. Jest to równoważne (obs. 2) z tym, że $\sigma_{Moore}(\delta'(q_0', k)) = \sigma_{Mealy}(1, k)$ oraz $\sigma_{Moore}(\widehat{\delta'}(q_0', kl)) = \sigma_{Mealy}(k, l) = (k, l)$. Druga równość stoi w jawnej sprzeczności z naszym założeniem, że $(k, l) \notin Im(\sigma_{Moore})$.

Zadanie 80.

Zdaje się, że świadczy o tym następujący transducer Mealy'ego:

1. $\Sigma = \{(,),[,],\langle,\rangle\}$
2. $Q = \{q_0\}$
3. $q_0 = q_0$
4. $\delta \equiv q_0$
5. $\Sigma_1 = \{(,),[,]\}$
6. $$\sigma_{Mealy}(q_0, (/)) = ((/))$$ $$\sigma_{Mealy}(q_0, [/]) = [[/]]$$ $$\sigma_{Mealy}(q_0, \langle/\rangle) = [(/)]$$

Dowód pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

3.2 Obliczalność

Zadanie 89.

Niech $B = \{n : Dom(\Phi_n) = \mathbb{N}\}$. Robimy redukcję f_{89} z $\overline{\mathbb{K}}$.
Definiujemy $f_{89}(n)$ jako numer następującego programu:

```
wczytaj k
odpal Φn(n) na k kroków
jeżeli się skończył : zapętl się
w p.p. : zwróć 1
```

Sprawdzenie, że zachodzi $n \in \overline{\mathbb{K}} \iff f_{89}(n) \in B$ pozostawiamy jako proste ćwiczenie.

Zadanie 92.

Robimy redukcję f z $\overline{\mathbb{K}}$.
Definiujemy $f(n)$ jako numer następującego programu:

```
wczytaj k
jeżeli k jest parzyste : zapętl się
w p.p. :
odpal Φn(n) na k kroków
jeżeli się skończył : zapętl się
w p.p. : zwróć 1
```

Oczywiście $Dom(\Phi_{f(n)}) = (2\mathbb{N}+\{1\}) \cap \{t \in \mathbb{N} : t <$ czas wykonania się $\Phi_n(n)\}$.
Sprawdzenie, że zachodzi $n \in \overline{\mathbb{K}} \iff f(n) \in B$ pozostawiamy jako proste ćwiczenie.

Zadanie 99.

i) Robimy redukcję f z $\overline{\mathbb{K}}$, pamiętając o redukcji f_{89}.
Niech c będzie numerem następującego programu:

```
wczytaj k
zwróć 1
```

Definiujemy $f(n) = \langle c, f_{89}(n) \rangle$. Jest oczywiste (po zrobieniu zadania 89), że zachodzi

$$n \in \overline{\mathbb{K}} \Longleftrightarrow f(n) \in T.$$

ii) Nie. Robimy redukcję f z $\overline{\mathbb{K}}$.
Niech $f_a(n)$ będzie numerem następującego programu:

```
wczytaj k
jeżeli k > 1 : zapętl się
w p.p. :
odpal Φ_n(n)
zwróć 1
```

Niech $f_b(n)$ będzie numerem następującego programu:

```
wczytaj k
jeżeli k > 1 : zapętl się
w p.p. :
zwróć 1
```

Definiujemy $f(n) = \langle f_a(n), f_b(n) \rangle$. Oczywiste zachodzi

$$n \in \overline{\mathbb{K}} \Longleftrightarrow f(n) \in \overline{T}.$$

Zadanie 100.

Oczywiście $\Pi_0 = \Sigma_0$. Z zadań 81-82 wynika, że $\Sigma_1 =$ zbiory rekurencyjnie przeliczalne. Pokażemy, że $L \notin \Sigma_1$. Świadczy o tym następująca redukcja f z $\overline{\mathbb{K}}$: definiujemy $f(n)$ jako numer programu:

```
wczytaj k
jeżeli k < n : zwróc 1
w p.p. odpal Φ_n(n)
zwróc 1
```

Widzimy, że gdy $n \in \overline{\mathbb{K}}$ to $Dom(\Phi_{f(n)}) = \{1, 2, ..., n\}$, w przeciwnym razie $Dom(\Phi_{f(n)}) = \mathbb{N}$.
Następnie pokażemy, że $L \in \Sigma_2$. W tym celu zdefiniujmy zbiory

$$B_0 = \{ \ (n,m) : \Big(\exists l < \pi_1(f^{-1}(m)) \ \Phi_n(l) \text{ zakończy się po } \pi_2(f^{-1}(m)) \text{ krokach}\Big) \wedge \Big(\forall l \geqslant \pi_1(f^{-1}(m)) \ \Phi_n(l) \text{ nie kończy się}\Big) \ \}$$

$$B = f(B_0)$$

gdzie f jest naszą ustaloną, obliczalną bijekcją $\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, natomiast π_i jest rzutem na i-tą współrzędną.

Oczywiście L jest rzutem zbioru B_0, zatem żeby uzasadnić, że $L \in \Sigma_2$, wystarczy pokazać, że jest on $B \in \Pi_1$. Dowód tego faktu pozostawiamy jako ćwiczenie.

Zadanie 101.

Definiujemy f^{-1} w następujący sposób:
`wczytaj n`
`Dla` $k = 1, 2, 3...$ `:`
`jeżeli` $f(k) = n$ `: zwróć k`
Oczywiście f^{-1} jest całkowita, bo f jest "na". Łatwo sprawdzić, że zachodzi również $f \circ f^{-1} = Id$ (a czy $f^{-1} \circ f = Id$?).
Pokażemy, że f^{-1} jest redukcją z B do A :

$$n \in B \iff Id(n) \in B \iff f(f^{-1}(n)) \in B \iff f^{-1}(n) \in A,$$

przy czym ostatnia równoważność wynika z tego, że f jest redukcją z A do B. Oczywiście powyższe oznacza doładnie to, że f^{-1} jest redukcją z B do A.

Zadanie 102.

a) Nie. Wysztarczy pokazać redukcję z $\mathbb{K}$ (dlaczego?). O dziwo, jest to dokładnie f_{89}.

b) Definiujemy $A = \{(n, k, t) : \Phi_n(i)$ kończy się po co najwyżej t krokach dla $i = 1, 2, ..., k$ oraz nie kończy się dla $i > k\}$. Ten zbiór jest dobry, a sprawdzenie pozostawiamy jako ćwiczenie.

Zadanie 103.

a) Tak. Bo istnieje takie duże N, że na zbiorze $\{N, N+1, ...\}$ f jest niemalejąca. Z zadania 86 wynika więc, że $f(\{N, N+1, ...\})$ jest rekurencyjny. Zatem $f(\mathbb{N}) = f(\{1, 2, ..., N-1\}) \cup f(\{N, N+1, ...\})$ jest rekurencyjny, jako suma dwóch zbiorów rekurencyjnych.

b) Nie. Niech $A = \{1\}$. Niech g będzie całkowitą funkcją rekurencyją, taką że $g(\mathbb{N}) = \mathbb{K}$ (skądinąd wiemy, że taka istnieje - np. 87). Rozważmy następującą funkcję f:
`wczytaj n`
`jeżeli n jest parzyste : zwróć` $g(\frac{n}{2})$
`w p.p. : zwróć 1`
f spełnia warunek z zadania, ale $f(\mathbb{N}) = \mathbb{K} \cup \{1\}$, a to nie jest zbiór rekurencyjny.

Zadanie 104.

$1 \Rightarrow 2$:
Niech $\mathbb{D} = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$. Niech $\phi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ będzie dowolną ustaloną obliczalną bijekcją. Definiujemy zbiór B następująco:

$$\varphi(i, n) \in B \Longleftrightarrow n \in A_i$$

Ten zbiór jest dobry, a o tym, że $A_i \leqslant_{rek} B$, świadczy redukcja $\varphi(i, \cdot)$.
$2 \Rightarrow 1$:
Odpowiedź na pytanie ze wskazówki: 1. Jest to zbiór $f^{-1}(B)$. Z tego wynika, przy uwzględnieniu faktu, że redukcji (jako programów), jest tylko przeliczalnie wiele, że dla ustalonego zbioru B istnieje tylko przeliczalnie wiele zbiorów A_i takich, że $A_i \leqslant_{rek} B$. Zatem, z tego, że $\mathbb{D} \subseteq \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ wynika, że zbiór $\mathbb{D}$ musi być przeliczalny.

Zadanie 105.

Uwaga: N_{emp} jest r.e. Semi-rozstrzyga go następujący program $\Phi_{N_{emp}}$:
`wczytaj n`
`dla` $k = 1, 2, 3, ...$ `:`
`odpal` $\Phi_n(i)$ `na` k `kroków dla` $i = 1, 2, ..., k$
`jeżeli na którymś z argumentów` Φ_n `się zatrzymał : zwróć 1`

a) Tak. Świadczy o tym następująca redukcja f:
Jako $f(n)$ przyjmijmy numer następującego programu:
`wczytaj k`
`odpal` $\Phi_{N_{emp}}(n)$
`zwróć 1`
Dowód poprawności pozostawiamy jako ćwiczenie.

b) Nie, bo Tot nie jest r.e. (zadanie 89), a N_{emp} jest.

Zadanie 107.

Niech zbiory A_i będą wszystkimi nieskończonymi zbiorami r.e.
Definiujemy indukcyjnie zbiory B i C w następujący sposób:

1. $B_0 = C_0 = \emptyset$
2. Niech $b_i, c_i \in A_i \setminus C_{i-1},\ b_i \neq c_i$. Dla każdego j zbiór C_j jest skończony, więc zawsze znajdziemy takie elementy
3. $B_i = B_{i-1} \cup \{b_i\}$
4. $C_i = C_{i-1} \cup \{b_i, c_i\}$

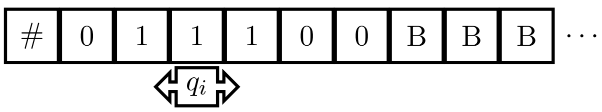
5. $B = \bigcup_i B_i$

6. $C = \bigcup_i C_i$

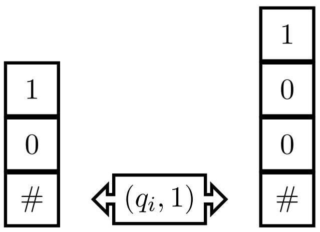
Oczywiście zbiór B jest nieskończony, bo na każdym kroku dodajemy do niego jeden element. Z drugiej strony, dla każdego A_i istnieje jego element c_i, taki że $c_i \notin B$. W związku z tym, dla każdego i zachodzi $A \not\subseteq B$. Zatem B jest nieskończonym zbiorem bez nieskończonego podzbioru r.e.

Zadanie 110.

Bso. przyjmujemy, że mamy Maszynę Turinga z pustą taśmą wejściową i alfabetem złożonym z 0 i 1 oraz symbolu pustej taśmy - B.
a) Bedziemy utrzymawać jako stan automatu ze stosami dwie części aktualnie używanego skrawka taśmy MT: na lewo i na prawo od głowicy (lewy i prawy stos). W stanie będziemy pamiętali aktualny stan MT oraz komórkę na której jest głowica ($Q' = Q \times \Sigma$).



zamieniamy na



Operacje MT implementuje się w prosty sposób.
b) zamienimy stos na licznik: patrzeć na stos jako na liczbę w systemie binarnym (najbardziej znaczące cyfry na dole stosu). Dodatkowo, aby uniknąć kłopotu z zerami wiodącymi, traktujemy symbol dna stosu # jako 1.
Operacje stosowe (zdejmowanie i dodawanie symboli) implementujemy jako odpowiednio dzielenie całkowite oraz mnożenie przez 2 + ewentualne dodanie 1 . Do tego wykorzystujemy pozostałe dwa liczniki.
c) konfiguracja 4 liczników jest ciągiem 4 liczb naturalnych (a, b, c, d). W związku z tym w prosty sposób można ją zakodować jako jedną liczbę równą $2^a 3^b 5^c 7^d$. Drugi licznik jest potrzebny do implementacji wymaganych operacji na 4 licznikach: dodawania i odejmowania ze starego licznika $\longrightarrow$ mnożenia i dzielenia nowego licznika przez odpowiednią liczbę. Ponadto łatwo sprawdzać, czy któryś ze starych liczników jest pusty - wystarczy sprawdzić podzielność przez odpowiednią liczbę.

Zadanie 114.

Redukcja z PCP do problemu niepustego przekroju gramatyk:
Dostajemy instancję PCP: $P = \{\langle l_i, r_i\rangle : i \in \{1, 2, ..., n\}\}$. Budujemy następujące gramatyki G i H:

1. $N = \Sigma \cup \{1, 2, ..., n\}$
2. $T = \{S\}$
3. $\Pi_G = \{S \longrightarrow l_i S i \mid \varepsilon\}$
4. $\Pi_H = \{S \longrightarrow r_i S i \mid \varepsilon\}$

Oczywiście $L_G \cap L_H \neq \emptyset\,(\{\varepsilon\}) \iff$ zadana instancja PCP ma rozwiązanie.

Zadanie 115.

Skoro języki L_G i L_H z zadania 114 są rozpoznawane w naturalny sposób przez deterministyczne automaty ze stosem, to ich dopełnienia są rozpoznawane przez dopełnicze automaty $\Rightarrow$ języki L_G^c i L_H^c są bezkontekstowe. Z praw de Morgana rachunku zbiorów wynika, że

$$L_G \cap L_H = (L_G^c \cup L_H^c)^c$$

czyli $L_G \cap L_H = \emptyset \iff (L_G^c \cup L_H^c) = A^* \iff$ zadana instancja PCP nie ma rozwiązania.
Teraz wystarczy pokazać, jak program ma wygenerować gramatykę dla $L_G^c \cup L_H^c$, co będzie redukcją z dopełnienia PCP, które jest oczywiście nierozstrzygalne. Być może najłatwiej zbudować deterministyczny automat ze stosem, rozpoznający L_G, i powiedzieć, że ponieważ jest deterministyczny, to można wywrócić stany akceptujące na lewą stronę i dostaniemy automat rozpoznający dopełnienie. A z niego można wyprodukować gramatykę (ponoć wykład).

Zadanie 116.

Nie. Redukcja z zadania 115:
Weż gramatykę G z problemu $L_G =?A^*$. Wyprodukuj gramatykę G_{all}, taką że $L_{G_{all}} = A^*$. Zwróć parę gramatyk G i G_{all}.
Oczywiście zachodzi $L_G = A^* \iff L_G = L_{G_{all}}$, co kończy dowód poprawności.

Zadanie 118.

Redukcja z semiThuego:
Dostajemy zbiór produkcji P oraz słowa v i w. Idea: zapętlić słowo (skleić początek z końcem), dodając przy tym specjalny znak początku słowa (#). Formalnie:

1. $\Sigma' = \Sigma \cup \{\#\}$

2. $v' = \#v$

3. $w' = \#w$

4. $P' = P \cup \{\langle a, a\rangle : a \in \Sigma'\}$

Implikacja w prawo jest, jak zwykle, dość oczywista. Do implikacji w lewo trzeba uzasadnić przekonywująco, że jeżeli $v' \longrightarrow^*_{P'} w'$, to można naśladować potrzebne produkcje i z v otrzymać w w zwykłym semiThu.