# Rozwiązania niektórych z około dwustu łatwych zadań z języków formalnych i złożoności obliczeniowej (i jednego nie aż tak trudnego, jak się o nim mówi)

Numeracja zadań jak w zbiorze z 2017 roku

Wrocław, 2 kwietnia 2017

## 1 Wskazówki

Patrząc perspektywicznie w stronę zbliżających się egzaminów, ta sekcja wydaje mi się ważnejsza i zachęcam do spędzania z nią czasu podczas samodzielnych wieczornych rozmyślań.

### 1.1 Języki i automaty

**Zadanie 63.** *Warto zastanowić się, jak miałby wyglądać niedeterministyczny automat ze stosem rozpoznający taki język. Pomocny może się też okazać pewien lemat.*

#### 1.1.1 Języki rodzynkowe

**Zadanie 71.** *Probem sprowadza się do rozpoznawania liter języka* $L^*$. *Gdyby miał istanieć taki język* $L$*, to pewnie musiałby być nieskończony (dlaczego?). Może istnieje jakaś prosta, nieskończona rodzina słów postaci* $a^*ba^*$*, którą automat ze stosem może łatwo rozpoznawać, ale taki bez stosu będzie miał trudniej? Formalnie, jak to bywa, warto używać lematów.*

**Zadanie 72.** *Wskazówka z treści zadania wydaje się bardzo dobra. Tu cytat: "Warto rozważyć słowa postaci* $a^k(ba^{2n})^l$*, dla odpowiednich liczb* $k$ *i* $l$*."*

**Zadanie 73.** *Raczej chodzi o oszacowanie* $i(L_nL_n) \geqslant c2^{i(L_n)}$*, przy założeniu że* $i(L_n) \geqslant n$*, inaczej to nie ma sensu. Możnaby najpierw pomyśleć, dlaczego w przypadku NDFA nie można udowodnić takiego oszacowania. A potem zmusić DFA, żeby pamiętał dużo tego, co NDFA pamiętać nie musi, bo może zgadnąć.*

### 1.2 Obliczalność

**Zadanie 92.** *Jak coś ma nie być r.e. to na pewno chodzi o redukcję z* $\overline{K}$*. Delikatna modyfikacja 89.*

**Zadanie 99.** *i) Jak coś ma nie być r.e. to na pewno chodzi o redukcję z* $\overline{K}$*. Delikatna modyfikacja 89.*
*ii) Czy* $\Phi_m \neq \Phi_n \iff \exists k \Phi_m(k) \neq \Phi_n(k)$*?*

**Zadanie 101.** *Trzeba wprost zdefiniować redukcję z B do A.*

**Zadanie 102.** *a. założenie o nietrywialności zadania b. implikuje odpowiedź w zadaniu a.. Pewna użyteczna redukcja i w tym zadaniu okaże się pomocna. b.*

**Zadanie 103.** *Należałoby się zastanowić, co wspólnego mają te warunki z monotonicznością f.*

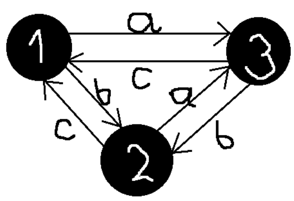
# 2 Szkice rozwiązań

## 2.1 Języki i automaty

### 2.1.1 Synchronizacja automatów częściowych

**Zadanie 40.**

Odp: NIE.




Rysunek 1: $csync(\{1,2\}) \supset \{a\}$; $csync(\{1,3\}) \supset \{b\}$; $csync(\{1,2\}) \supset \{c\}$. Natomiast $csync(Q) = \emptyset$.

**Zadanie 41.**

W obydwu podpunktach wystarczy zbadać funkcję

$$F : 2^Q \times \Sigma \longrightarrow 2^Q$$
$$F(S,a) = \{\delta(q,a) : \ q \in S\}.$$

Oczywiście $s \in csync(S) \iff |\widehat{F}(S,s)| = 1$, gdy zdefiniujemy $\widehat{F}$ w naturalny sposób. Ponadto $1 \leqslant |F(A,a)| \leqslant |A|$, zatem $1 \leqslant |\widehat{F}(S,p)| \leqslant |S|$ dla dowolnego prefiksu $p$ słowa $s$, czyli $\widehat{F}(S,p)$ może przyjmować co najwyżej $\sum_{k=1}^{|S|} \binom{|Q|}{k}$ różnych wartości. Oznaczmy tę liczbę jako $M$.

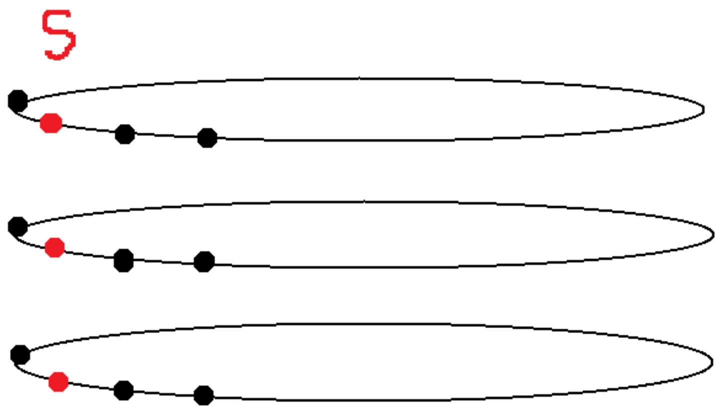
Dla $|s| > M$ istnieją prefiksy $p_1$ i $p_2$ słowa $s = p_1 s_1 = p_2 s_2$, $|p_1| < |p_2|$, takie że $\widehat{F}(S,s_1) = \widehat{F}(S,s_2)$ (Zasada Szufladkowa). Wtedy oczywiście $\widehat{F}(S,s) = \widehat{F}(S,p_1 s_2)$, przy czym $|p_1 s_2| < |s|$.

W zwiazku z powyższym $csync(Q) \neq \emptyset \iff \exists s \in S |s| \leqslant M$.
Dokładne odpowiedzi wynikają z tego wprost, po podstawieniu za $S$ a) dowolnego trzyelementowego zbioru stanów b) Q.

**Zadanie 42.**

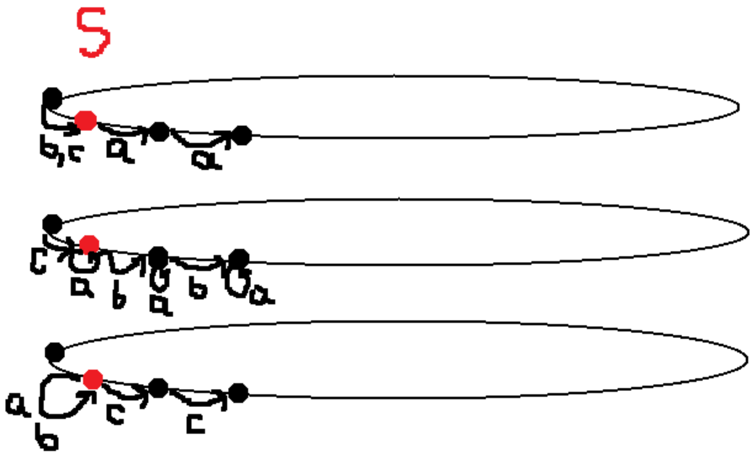
Wystarczy rozwiązać M, L i XL wynikają w prosty sposób. Wskazówka jest myląca.

Zbudujmy automat (częściowy) z trzech cykli, ułożonych jeden nad drugim, każdy długości m. Trzy stany, ułożene jeden nad drugim, będą stanowiły nasz początkowy zbiór S

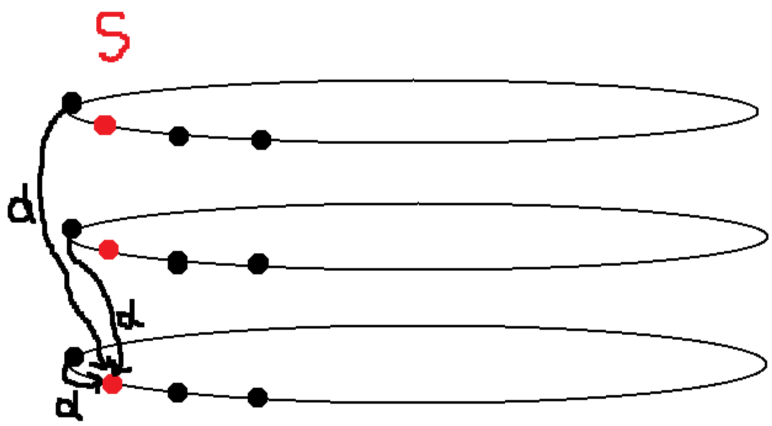



Naszym celem jest, aby co jedną literę zmieniał się stan na górnym cyklu, co $m$ liter stan na drugim, a co $m^2$ na trzecim. Zapenimy też, że synchro-

nizacja będzie mogła nastąpić dopiero po przejściu przez dolny stan całego cyklu (czyli $m^3$ krokach).
Możemy to wymusić w następujący sposób:




przy czym pętelki z literą a są przy każdym stanie na drugim dysku, a pętelki z literami a,b są przy każdym stanie na trzecim dysku.
Możliwość synchronizacji zapeniamy przez dodanie przejść z przedostatnich stanów na każdym dysku do pierwszego stanu dolnego dysku. Oznaczenie ich specjalną "literką synchronizacji", jak d, zapewni nam, że skorzystać z niej będzie można dopiero gdy dolny stan dojdzie do przedostatniego miejsca na dolnym dysku (co następuje dopiero po $m^3$ krokach:




Zauważmy teraz, że ten automat (zanim dojedzie do synchronizacji) jednoznacznie wyznacza słowo, dla którego funkcja przejścia jest określona dla wszystkich stanów z $S$:

$$s = ((a^{m-1}b)^{m-1}c)^{m-1}d$$

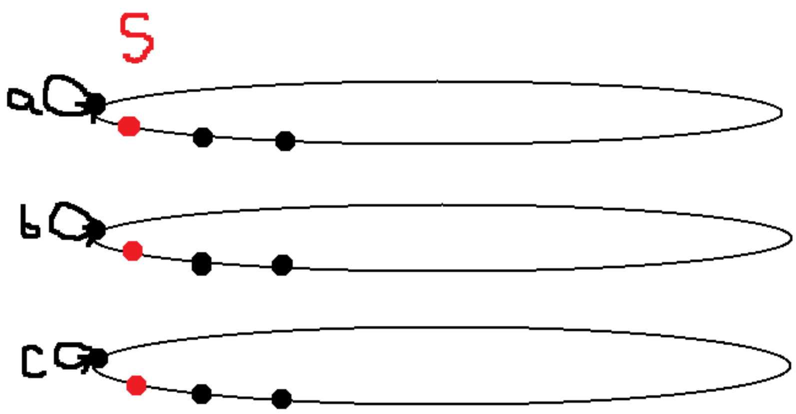
Takie $s$ synchronizuje $S$ i nie istnieje żadne krótsze od niego. Nietrudno wyliczyć, że jest ono odpowiednio długie.

Co do wersji L i XL, wystarczy zauważyć, że:

1. To samo rozumowanie można zastosować dla dowolnie wielu cykli, otrzymując wielomian dowolnie dużego stopnia.

2. Potrzebny nam alfabet, który ma $k+1$ liter (gdzie $k$ jest liczbą cykli). Ale dowolny alfabet można zamienić na dwuliterowy, zapisując jego $l$-tą literę w postaci $0^l1$. To działa.

Dodatkowo, dodając pętle z literką przejścia na przedostatnich stanach każdego cyklu, zamienimy nasz automat na taki, który synchronizuje wszystkie stany ( pierwszy stan każdego cyklu "zjada" wszystkie kolejne w pierwszym przejściu cyklu):




### 2.1.2 Transducery

**Zadanie 77.**

Podpunkt 1: definiujemy $\sigma_{Mealy} = \sigma_{Moore} \circ \delta$. Reszta zostaje.
Podpunkt 2: definiujemy (dla transducera Mealy'ego $\langle \Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma_{Mealy} \rangle$)

1. $Q' = Q \times \Sigma \cup q_0'$. Stan $(q, a)$ = stan do którego doszlibyśmy w starym automacie ze stanu $q$ wczytując literę $a$. Stan $q_0'$ - dodatkowy stan początkowy.

2. $\delta'((q,a),b) = (\delta(q,a),b)$ dla pary $(q,a) \in Q \times \Sigma$

   $\delta'(q_0', a) = (q_0, a)$

3. $\sigma_{Moore}((q,a)) = \sigma_{Mealy}(q,a)$

   $\sigma_{Moore}(q_0') = \varepsilon$

Otrzymujemy transducer Moore'a $\langle \Sigma, \Sigma_1, Q', q_0', \delta', \sigma_{Moore} \rangle$ równoważny z pierwotnym t. Mealy'ego.
Dowód w obu przypadkach zapewne angażuje Zasadę Indukcji Matematycznej względem długości słowa.

**Zadanie 78.**

bso. (77) zajmijmy się transducerem Mealy'ego $\langle \Sigma, \Sigma_1, Q, q_0, \delta, \sigma_{Mealy} \rangle$, który świadczy że $A \leqslant_{reg} B$. Niech przy okazji $A_B = \langle \Sigma_1, Q^B, q_0^B, F^B, \delta^B \rangle$ będzie DFA rozpoznającym $B$. Definiujemy $\delta'(q,a) = \widehat{\delta^B}(q, \sigma_{Mealy}(q,a))$. Udajemy, że jesteśmy słowem z języka $B$ i chodzimy po automacie $A_B$. Wtedy $\langle \Sigma, Q^B, q_0^B, F^B, \delta' \rangle$ jest DFA rozpoznającym $A$ (d-d. indukcyjny względem długości słowa).

**Zadanie 79.**

Definiujemy transducer Mealy'ego $T_{Mealy}$:

1. $\Sigma = \{1, 2, 3, ..., n\}$
2. $Q = \Sigma$
3. $q_0 = 1$
4. $\delta(q,a) = a$
5. $\Sigma_1 = Q \times \Sigma$
6. $\sigma_{Mealy} = Id$

Niech $T_{Moore} = \langle \Sigma, \Sigma_1, Q', q_0', \delta', \sigma_{Moore} \rangle$ będzie transducerem Moore'a równoważnym z $T_{Mealy}$.

**Obserwacja 1.** *Możemy założyć, że każdy stan z $Q'$ jest osiągany przez DFA stowarzyszony z $T_{Moore}$. W przeciwnym razie możemy usunąć te stany, a powstały $T'_{Moore}$ wciąż będzie równoważny z $T_{Mealy}$.*

**Obserwacja 2.** $s \in Im(\sigma_{Mealy}) \Rightarrow |s| = 1$. *Zatem* $s \in Im(\sigma_{Moore}) \Rightarrow |s| = 1$.

Gdyby było $|Q'| < n^2$, to $Im(\sigma_{Mealy}) \nsubseteq Im(\sigma_{Moore})$. Niech $s \in Im(\sigma_{Mealy}) \setminus Im(\sigma_{Moore})$. $s = (k,l)$ dla pewnych $k,l \in \Sigma$. Rozważmy słowo $t = kl$. Wtedy $f_{T_{Mealy}}(t) = \sigma_{Mealy}(1,k)\sigma_{Mealy}(k,l) = (1,k)(k,l)$.
Załóżmy nie wprost, że $f_{T_{Moore}}(t) = f_{T_{Mealy}}(t)$. Jest to równoważne (obs. 2) z tym, że $\sigma_{Moore}(\delta'(q'_0,k)) = \sigma_{Mealy}(1,k)$ oraz $\sigma_{Moore}(\widehat{\delta'}(q'_0,kl)) = \sigma_{Mealy}(k,l) = (k,l)$. Druga równość stoi w jawnej sprzeczności z naszym założeniem, że $(k,l) \notin Im(\sigma_{Moore})$.

**Zadanie 80.**

Zdaje się, że świadczy o tym następujący transducer Mealy'ego:

1. $\Sigma = \{(,),[,],\langle,\rangle\}$
2. $Q = \{q_0\}$
3. $q_0 = q_0$
4. $\delta \equiv q_0$
5. $\Sigma_1 = \{(,),[,]\}$
6. $$\sigma_{Mealy}(q_0,(/)) = ((/))$$ $$\sigma_{Mealy}(q_0,[/]) = [[/]]$$ $$\sigma_{Mealy}(q_0,\langle/\rangle) = [(/)]$$

Dowód pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.