

MBA  
USP  
ESALQ

*Supervised Machine  
Learning:  
Modelos Logísticos  
Binários e Multinomiais*

Prof. Dr. Luiz Paulo Fávero

# MODELOS LOGÍSTICOS



Fundamentação teórica e conceitos

Especificação do modelo e funções de ligação canônica

Modelos logísticos binários e multinomiais

Estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança

*Cutoff*, sensibilidade, especificidade, curva ROC e índice GINI

Estimações em R

# Modelos Lineares Generalizados (GLM)

$$\eta_i = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1i} + \beta_2 \cdot X_{2i} + \dots + \beta_k \cdot X_{ki}$$

Modelos lineares generalizados, características da variável dependente e funções de ligação canônica.

Modelo de Regressão	Característica da Variável Dependente	Distribuição	Função de Ligação Canônica ( $\eta$ )
Linear	Quantitativa	Normal	$\hat{Y}$
Com Transformação de Box-Cox	Quantitativa	Normal Após a Transformação	$\frac{\hat{Y}^\lambda - 1}{\lambda}$
Logística Binária	Qualitativa com 2 Categorias ( <i>Dummy</i> )	Bernoulli	$\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$
Logística Multinomial	Qualitativa $M$ ( $M > 2$ ) Categorias	Binomial	$\ln\left(\frac{p_m}{1-p_m}\right)$
Poisson	Quantitativa com Valores Inteiros e Não Negativos (Dados de Contagem)	Poisson	$\ln(\lambda_{poisson})$
Binomial Negativo	Quantitativa com Valores Inteiros e Não Negativos (Dados de Contagem)	Poisson-Gama	$\ln(\lambda_{bneg})$







Binária

Regressão

Logística

## Regressão Logística Binária

---

- Técnica supervisionada de machine learning utilizada para explicar ou prever a probabilidade de ocorrência de determinado evento em função de uma ou mais variáveis explicativas.
- **Variável dependente:** binária.  
→ Resultados interpretados em termos de probabilidades.
- **Variáveis preditoras  $X$ :** métricas ou não métricas.



## Objetivos da Técnica

- **Atribuição de Probabilidades:**  
Estimar a probabilidade de ocorrência de determinado evento ou de que uma observação venha a se enquadrar nessa ou naquela categoria.
- **Classificação em categorias:**  
Classificar indivíduos ou observações em categorias específicas.



**Conceitos:**

**Probabilidade**

**Chance (*odds*)**

**Logito**

- **Conceito de Probabilidade**

Seja  $Y$  a resposta a um estímulo (sim ou não) - pode ser a preferência por um produto, adimplência, aprovação em um curso, etc.

- $p$ : probabilidade da resposta “sim”.
- $1 - p$ : probabilidade da resposta “não”.



## Conceito de Chance (*Odds*)

- **Chance (*odds*) de ocorrência de um evento:**

$$\text{chance} = \frac{p}{1 - p} \quad \begin{array}{l} \text{(Evento)} \\ \text{(Não Evento)} \end{array}$$

Exemplos: se  $p = 0,50$ ; chance = 1 (1 para 1)  
se  $p = 0,75$ ; chance = 3 (3 para 1)  
se  $p = 0,25$ ; chance =  $\frac{1}{3}$  (1 para 3)

## Conceito de Logito

- **Logito: logaritmo natural da chance de ocorrência de uma resposta do tipo “sim”.**

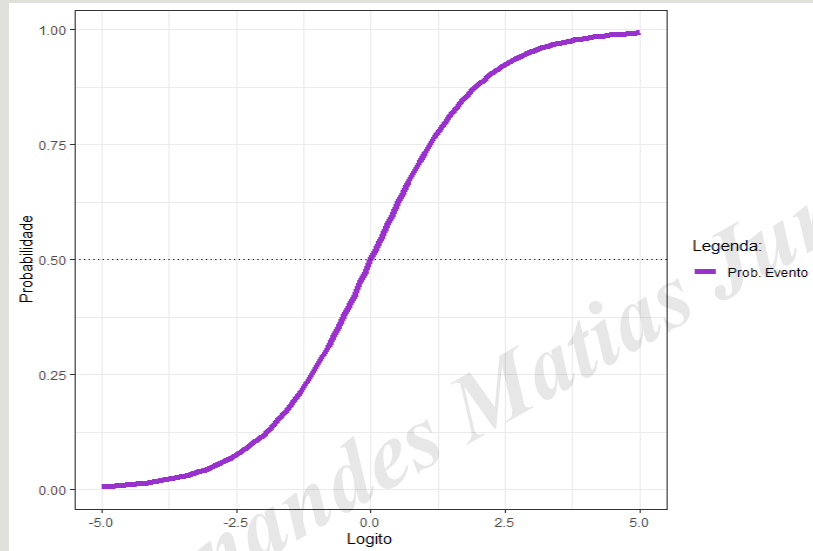
E, a partir do logito, define-se a expressão da probabilidade de ocorrência do evento em estudo, em função das variáveis explicativas.

Vetor com variáveis explicativas

$$\text{logito} = Z = \ln \left( \frac{p}{1-p} \right)$$
$$e^{\text{logito}} = e^Z = \frac{p}{1-p} = \text{odds}$$
$$p = \frac{e^Z}{1+e^Z} = \frac{1}{1+e^{-Z}}$$



# O Modelo de Regressão Logística Binária



A curva logística, ou sigmóide, descreve a relação entre a probabilidade associada à ocorrência de determinado evento e um conjunto de variáveis preditoras.

A função logística assume valores entre 0 e 1 para qualquer Z entre  $-\infty$  e  $+\infty$

$$p_i = \frac{1}{1 + e^{-Z_i}} = \frac{1}{1 + e^{-(\alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki})}}$$

## Função Logística

---

$$p_i = \frac{1}{1 + e^{-Z_i}} = \frac{1}{1 + e^{-(\alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki})}}$$

- Definida para que se estabeleça a probabilidade de ocorrência de determinado evento e a importância das variáveis explicativas para esta ocorrência.
- **Estimação dos parâmetros:** processo iterativo para maximizar o acerto da probabilidade de ocorrência de um evento à sua real ocorrência (**Método de Máxima Verossimilhança**).
- Os **resultados** atribuíveis à variável dependente estarão entre 0 e 1.
- **Análise do ajuste do modelo:** testes de significância dos parâmetros e tabela de classificação (matriz de confusão).







# Regressão Logística Multinomial

## Regressão Logística Multinomial

- Variável dependente se apresenta na forma **qualitativa com mais de duas categorias**.
- Por exemplo, para três possíveis respostas (*labels* 0, 1 ou 2, por exemplo), e sendo 0 a categoria de referência escolhida, teremos duas outras possibilidades de evento em relação a esta categoria (1 ou 2).
- Dessa forma, são definidos dois vetores de variáveis explicativas, com os respectivos parâmetros estimados (dois logitos):

$$Z_{1i} = \alpha_1 + \beta_{11}X_{1i} + \dots + \beta_{k1}X_{ki}$$

$$Z_{2i} = \alpha_2 + \beta_{12}X_{1i} + \dots + \beta_{k2}X_{ki}$$

- Logo, **número de logitos estimados será  $(M - 1)$** , sendo  $M$  o número de categorias de  $Y$ .

## Funções Logísticas Multinomiais

---

- Sendo  $p_i = \frac{e^{Z_i}}{1 + e^{Z_i}}$  a **probabilidade de ocorrência do evento**, temos que:
- **Probabilidade de ocorrência da categoria 0 (referência):** 
$$P_{i_0} = \frac{1}{1 + e^{Z_{1i}} + e^{Z_{2i}}}$$
- **Probabilidade de ocorrência da categoria 1:** 
$$P_{i_1} = \frac{e^{Z_{1i}}}{1 + e^{Z_{1i}} + e^{Z_{2i}}}$$
- **Probabilidade de ocorrência da categoria 2:** 
$$P_{i_2} = \frac{e^{Z_{2i}}}{1 + e^{Z_{1i}} + e^{Z_{2i}}}$$



## Interpretação e Eficiência Global do Modelo Multinomial

---

- Como na regressão logística binária, deve-se avaliar o resultado do **teste  $\chi^2$**  para o modelo de regressão logística multinomial, bem como os resultados dos **testes z** para os parâmetros estimados das variáveis preditoras.
- **Interpretação:** os parâmetros das variáveis devem ser analisados em relação à categoria de referência da variável dependente.
- **Eficiência do modelo:** a classificação das observações deve ser realizada a partir da maior probabilidade estimada para cada observação (aqui, ao contrário da regressão logística binária, não faz sentido a definição de um *cutoff*).



EXCEL

R





**MUITO OBRIGADO!**

**Prof. Dr. Luiz Paulo Fávero**

