CAPÍTULO 5

LAS DISTRIBUCIONES DE FERMI Y DE BOSE

§ 52. La distribución de Fermi

Si la temperatura de un gas perfecto (para una densidad dada del mismo) es suficientemente baja, la estadística de Boltzmann deja de ser aplicable y hay que construir otra estadística en la que los números de ocupación medios de los diferentes estados cuánticos de las partículas no se suponen ya pequeños.

Esta estadística, sin embargo, resulta ser diferente según sea el tipo de funciones de onda que describen al gas considerado como un sistema de N partículas idénticas. Como es sabido, estas funciones deben ser o antisimétricas o simétricas con relación a las permutaciones de un par cualquiera de partículas, dándose el primer caso para partículas con spin semientero, y el segundo, para partículas con spin entero.

Para un sistema de partículas descrito por funciones de onda antisimétricas vale el llamado *principio de Pauli*: en cada estado cuántico no pueden hallarse simultáneamente más de una partícula. La estadística fundada en este principio se llama *estadística de Fermi* (o estadística de Fermi-Dirac) *.

De manera análoga a como se procedió en el § 37, aplicaremos la distribución de Gibbs al conjunto de todas las partículas del gas que se encuentran en un estado cuántico dado; conforme se indicó ya en el § 37, esto es posible incluso cuando existe interacción de intercambio entre las partículas. Designaremos de nuevo por Ω_k el potencial termodinámico de este sistema de partículas, y de acuerdo con la fórmula general (35.3) tendremos:

$$\Omega_k = -T \ln \sum_{n_k} (e^{(\mu-\varepsilon_k)/T})^{n_k}, \tag{52.1}$$

ya que la energía de n_k partículas en el k-ésimo estado es, simplemente, $n_k\varepsilon_k$. Según el principio de Pauli, los números de ocupación de cada estado pueden tomar sola-

* Fue propuesta por FERMI para los electrones, y su relación con la mecánica cuántica fue establecida por DIRAC (1926).

Ω = - T ln { Σ_N [exp(mu*N/T) Σ_n exp(-EnN /T)] } (35.3)

reemplazando EnN por n_k*ϵ_k, y la suma sobre n por el único estado k correspondiente

Ω = - T ln { Σ_nk exp(mu*N/T) exp(-n_k*ϵ_k /T) }

reemplazando la suma en N por los posibles valores de particulas en el sistema (los posibles valores de particulas en el estado k, n_k) y sumando exponentes

Ω = - T ln { Σ_nk exp [(mu*n_k -n_k*ϵ_k) /T] }

luego sacando n_k como potencia llegamos a (52.1).

mente los valores 0 y 1. Por consiguiente, obtenemos:

$$\Omega_k = -T \ln(1+e^{(\mu-\epsilon_k)/T}).$$

Dado que el número medio de partículas en el sistema es igual a la derivada del potencial Ω respecto del potencial químico μ cambiada de signo, en este caso el número medio de partículas en el k-ésimo estado cuántico se obtiene calculando la derivada

$$\bar{n}_k = -\frac{\partial \Omega_k}{\partial \mu} = \frac{e^{(\mu-\epsilon_k)/T}}{1+e^{(\mu-\epsilon_k)/T}},$$

o bien, finalmente:

$$\bar{n}_k = \frac{1}{e^{(\epsilon_k-\mu)/T}+1}. \tag{52.2}$$

Ésta es precisamente la función de distribución para un gas perfecto que obedece a la estadística de Fermi (para abreviar, llamaremos a un gas de este tipo *gas de Fermi*). Para $e^{(\mu-\epsilon_k)/T} \ll 1$ se transforma, como debía ser, en la función de distribución de Boltzmann *.

La distribución de Fermi está normalizada por la condición

$$\sum_k \frac{1}{e^{(\epsilon_k-\mu)/T}+1} = N \tag{52.3}$$

donde N es el número total de partículas del gas. Esta igualdad determina de modo implícito el potencial químico como función de T y N.

El potencial termodinámico Ω del gas conjunto se obtiene sumando Ω_k respecto de todos los estados cuánticos:

$$\Omega = -T \sum_k \ln(1+e^{(\mu-\epsilon_k)/T}). \tag{52.4}$$

§ 53. La distribución de Bose

Pasemos ahora a estudiar la estadística a que obedece un gas perfecto consti-

* En la estadística de Boltzmann la expresión (52.1) debe desarrollarse en potencias de la pequeña cantidad $e^{(\mu-\epsilon_k)/T}$; el primer término del desarrollo es

$$\Omega_k = -Te^{(\mu-\epsilon_k)/T},$$

de donde, derivando respecto de μ, se obtiene de nuevo la fórmula de distribución de Boltzmann.

tuido por partículas cuyo conjunto se describe por funciones de onda simétricas, es decir, a la llamada *estadística de Bose* (o estadística de Bose-Einstein) *.

Nada limita los números de ocupación de los estados cuánticos en el caso de funciones de onda simétricas y dichos números pueden tomar valores arbitrarios. La función de distribución se puede deducir de la misma manera como en el párrafo anterior; escribiremos:

$$\Omega_k = -T \ln \sum_{n_k=0}^{\infty} (e^{(\mu-\varepsilon_k)/T})^{n_k}.$$

La serie geométrica que aquí aparece converge sólo si $e^{(\mu-\varepsilon_k)/T} < 1$. Dado que esta condición debe cumplirse para todos los valores ε_k (en particular, también para $\varepsilon_k = 0$), es claro que en cualquier caso debe ser:

$$\mu < 0. \tag{53.1}$$

Así, pues, en la estadística de Bose el potencial químico es siempre negativo. En relación con esto recordemos que en la estadística de Boltzmann el potencial químico tiene siempre valores negativos (grandes en valor absoluto); en la estadística de Fermi, en cambio, μ puede ser tanto negativo como positivo.

Sumando la serie geométrica, obtenemos:

$$\Omega_k = T \ln(1-e^{(\mu-\varepsilon_k)/T}).$$

De aquí se siguen los números medios de ocupación $\bar{n}_k = -\partial \Omega_k/\partial\mu$:

$$\bar{n}_k = \frac{1}{e^{(\varepsilon_k-\mu)/T}-1}. \tag{53.2}$$

Esta es precisamente la función de distribución de un gas perfecto que obedece a la estadística de Bose (o, como diremos para abreviar, de un gas de Bose). Esta función difiere de la función de distribución de Fermi en el signo ante la unidad en el denominador. Como esta última distribución, para $e^{-(\mu-\varepsilon_k)/T} \ll 1$ se transforma, naturalmente, en la función de distribución de Boltzmann. El número total de partículas en el gas se expresa por la fórmula

$$N = \sum_k \frac{1}{e^{(\varepsilon_k-\mu)/T}-1}, \tag{53.3}$$

y el potencial termodinámico Ω del gas en conjunto se obtiene sumando Ω_k respecto de todos los estados cuánticos:

* Fue introducida para los cuantos de luz por Bose, y luego generalizada por Einstein (1924).

$$\Omega = T \sum_k \ln(1 - e^{(\mu - \epsilon_k)/T}). \tag{53.4}$$

§ 54. Gases de Fermi y de Bose no en equilibrio

De manera análoga a como se procedió en el § 40, también para los gases de Fermi y de Bose que no están en equilibrio se puede calcular la entropía, y así, a partir de la condición de máximo de ésta, obtener de nuevo las funciones de distribución de Fermi y de Bose.

En el caso de Fermi, en cada uno de los estados cuánticos no se puede encontrar más de una partícula, pero los números N_j no son pequeños y, en general, son del mismo orden que los números G_j (todas las notaciones son las mismas que en el § 40).

El número de maneras posibles de distribuir N_j partículas idénticas entre G_j estados (sin que se encuentre más de una en cada uno de ellos) no es sino el número de maneras como es posible elegir N_j de los G_j estados, es decir, el número de combinaciones de G_j elementos de orden N_j. De esta manera tenemos:

$$\Delta\Gamma_j = \frac{G_j!}{N_j!(G_j - N_j)!}. \tag{54.1}$$

Tomando logaritmos en esta expresión y utilizando para los logaritmos de las tres factoriales la fórmula $\ln N! = N \ln N/e$, se encuentra:

$$S = \sum_j \{G_j \ln G_j - N_j \ln N_j - (G_j - N_j) \ln(G_j - N_j)\}. \tag{54.2}$$

Introduciendo de nuevo los números medios de ocupación de los estados cuánticos $\bar{n}_j = N_j/G_j$, obtenemos finalmente la siguiente expresión para la entropía de un gas de Fermi que no está en equilibrio:

$$S = -\sum_j G_j\{\bar{n}_j \ln \bar{n}_j + (1 - \bar{n}_j) \ln(1 - \bar{n}_j)\} \tag{54.3}$$

A partir de la condición de máximo de esta expresión de acuerdo con las ecuaciones (40.8), es fácil hallar que la distribución de equilibrio viene determinada por la fórmula

$$\bar{n}_j = \frac{1}{e^{\alpha + \beta\epsilon_j} + 1}$$

es decir, coincide con la distribución de Fermi, como debía ser.

Finalmente, en el caso de la estadística de Bose, en cada estado cuántico se puede encontrar un número cualquiera de partículas, de modo que el peso estadístico $\Delta\Gamma_j$ es el número de todas las maneras de distribuir N_j partículas entre G_j estados.