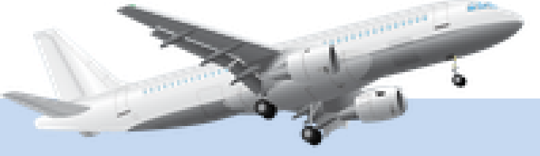
2022

Guía 2

Conceptos de probabilidad y estadística



Un hombre que viajaba mucho estaba preocupado por la posibilidad de que hubiera una bomba en su avión. Calculó la probabilidad de que fuera así y aunque ésta era baja, no lo era lo suficiente para dejarlo tranquilo. Desde entonces lleva siempre una bomba en la maleta. Según él, la probabilidad de que haya dos bombas a bordo es infinitesimal.

John Allen Paulos

El hombre anumérico. TusQuets editores. 1990.

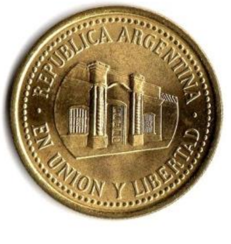
Hace unos años le encargué a dos alumnos que realicen un experimento aleatorio, que consistía en arrojar una moneda cien veces y que anotaran el resultado, los alumnos entregaron los siguientes resultados, uno de los dos mintió porque nunca hizo el experimento, invento los datos, ¿pero, cuál?

Alumno 1

CXXXCXCCCCXCCXCCCXXCXCCXC
XXXCXCXXCXCCXXCCCCXCCCXCX
CCXXCCCCCCCCXCXXXXXCXCXCX
CXCXCXXXXXCXXCCCCCXCCXXCX

Alumno 2

XCCXCCXCXXCCXCXCXCCXXCXCC
XCCXXXCCXCCXCXCXCXXCCXCCX
CXCXCXCXXXCCXCXCXCXXCXCCC
XCXXCXCXCXCXXCCXCXCXCCXXC



C=cara

X=cruz

Definición

Cualquier secuencia ordenada de *k* objetos tomada de un conjunto de *n* objetos distintos se llama **permutación** de tamaño *k* de los objetos. El número de permutaciones de tamaño *k* que se puede construir a partir de *n* objetos se indica por medio de $P_{k,n}$.

El número de permutaciones de tamaño *k* se obtiene de inmediato de la regla general del producto. El primer elemento se puede seleccionar de *n* formas, para cada *n* formas el segundo elemento se puede elegir de *n-1* formas, y así sucesivamente, por lo tanto

$$P_{k,n} = n(n-1)\ldots\ldots..(n-k+1)$$

$$P_{k,n} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ejemplo 2.1

Hay diez asistentes de enseñanza disponibles para calificar los exámenes de un determinado curso. El primer examen consiste en cuatro preguntas, y el profesor desea seleccionar un asistente distinto para calificar cada pregunta (sólo un asistente por pregunta). ¿De cuantas maneras se puede elegir a los asistentes para calificar el examen?

Solución:

Aquí *n*=número de asistentes=10 y *k*=número de preguntas=4. Entonces el número de asignaciones de calificación diferentes es

$$P_{4,10} = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$$

Problema 2.1

Al póker se juega con una baraja francesa de 52 cartas (4 palos con números ordenados, de menor a mayor (1,2,3,4,...,10,J,Q,K,A), repartiéndose 5 cartas a cada jugador. Calcular el número total de manos que puede tener un jugador, y entre ellas el número de formas en las que se pueden obtener las siguientes jugadas:

- Sólo un trío (3 cartas iguales entre sí y las otras 2 distintas entre sí y distintas de las otras 3)
- Full house (3 cartas iguales entre sí y las otras 2 iguales entre sí pero distintas de las primeras)
- Escalera (las 5 cartas con números consecutivos, independientemente del palo)
- Escalera de color (las 5 cartas del mismo palo, y con números consecutivos)
- Sólo color (las 5 cartas del mismo palo, pero no consecutivas)

Problema 2.2

Tenemos 5 rectas en el plano, de forma que no hay tres de ellas que coincidan en un punto. Si ninguna de las rectas es paralela a ninguna otra, ¿cuántos puntos de intersección entre dos rectas hay? ¿cuántos puntos de intersección hay si exactamente 3 de ellas son paralelas y las otras 2 no lo son, ni entre sí ni con las primeras? ¿cuáles son todos los posibles valores que puede tomar el número de puntos de intersección?

Problema 2.3

¿De cuántas maneras pueden sentarse en una fila de cinco sillas, Alberto, Benito, Carlos, Dora y Elena,

- en total;
- si Alberto no puede ir en ninguno de los dos extremos de la fila;
- si Benito debe ir al principio de la fila;
- si Dora y Elena deben ir juntas?

Problema 2.4

Con las letras de la palabra DISCO , ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar ?(tengan sentido o no).

Problema 2.5

¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras **ALERO**,

- en total;
- que comiencen con vocal;
- que comiencen con la letra **A**;
- que comiencen con vocal y terminen con consonante;
- que vayan alternadas vocales con consonantes;
- que lleven juntas las letras **LE**;
- que lleven la sílaba **RO**;
- que lleven dos vocales juntas;
- que lleven las dos consonantes juntas;
- que lleven las tres vocales juntas;
- que no comiencen ni terminen con **L**;
- que la **A** vaya después de la **R**, aunque no sea inmediatamente?

Problema 2.6

¿Cuántos números de tres dígitos pueden formarse con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 si:

- cada uno de ellos puede emplearse solamente una vez;
- cada uno de ellos puede emplearse cuando mucho dos veces, no tres;
- uno de los dígitos debe repetirse exactamente dos veces y el otro debe ser diferente;

Definición

Sea A un conjunto de *n* elementos tales que hay *k* grupos con n_i elementos idénticos,

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

Llamaremos **permutaciones con repetición** de los *n* elementos a las posibles agrupaciones que podamos hacer, teniendo en cuenta que dos elementos de un mismo grupo son indistinguibles.

El número de permutaciones con repetición viene dado por:

$$PR_n^{n_1,n_2,n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots .\, n_k!}$$

Ejemplo 2.2

En una urna hay 9 bolas, 3 blancas, 2 rojas y 4 negras. ¿De cuantas formas distintas se pueden extraer las bolas de la urna?
Al tener tres bolas blancas, a efectos de ordenación se consideran iguales, lo mismo ocurre con las rojas y las negras.

Solución:

En este caso tenemos 9 bolas, de las cuales 3 son blancas (n_1=3), 2 rojas (n_2=2), y 4 negras (n_3=4). De acuerdo con la definición obtenemos:

$$PR_9^{3,4,2} = \frac{9!}{3!\,4!\,2!} = 1260$$

Problema 2.7

Con las cifras 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4; ¿cuántos números de nueve cifras se pueden formar?

Problema 2.8

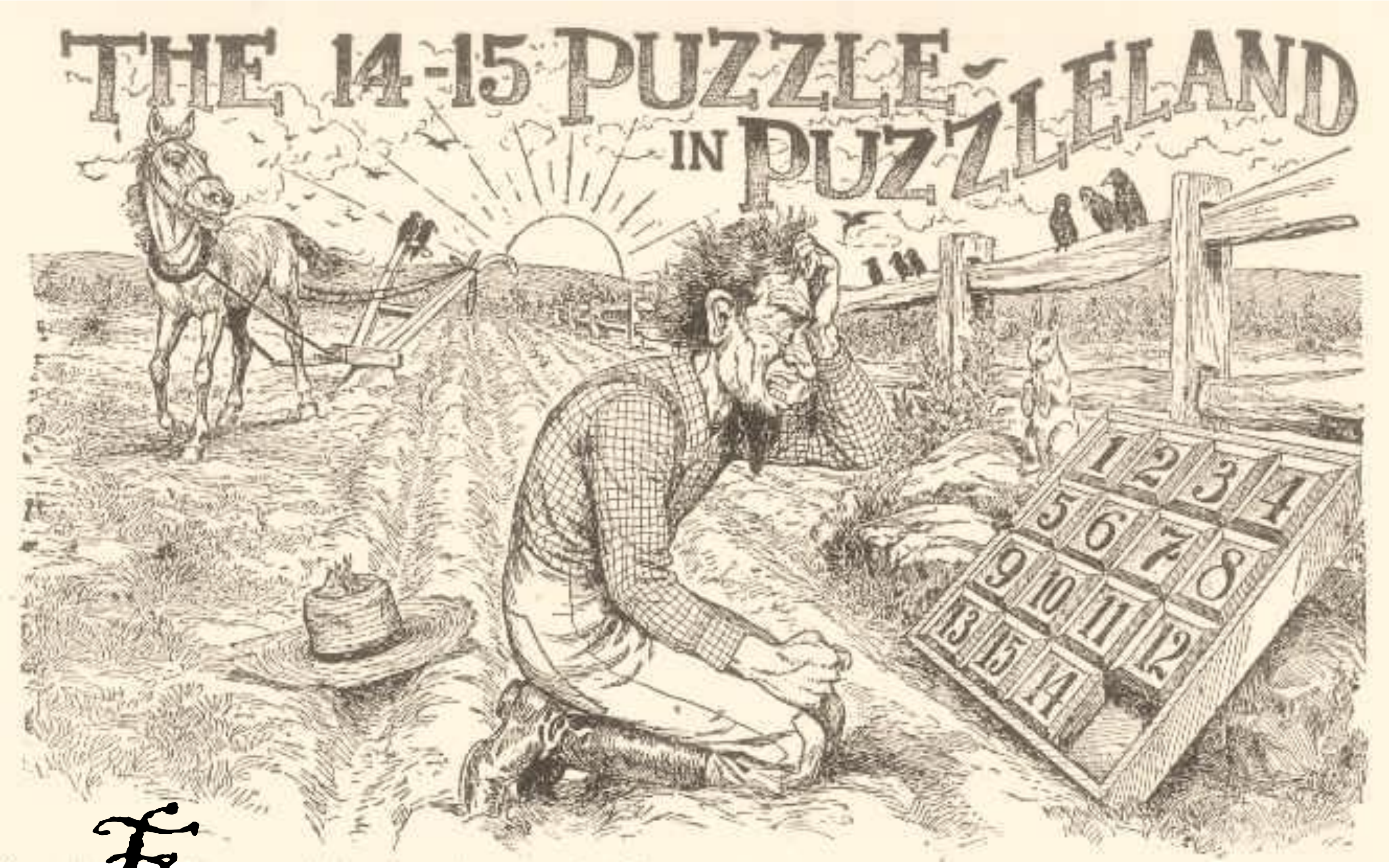
En el palo de señales de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes. ¿Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las nueve banderas?

Problema 2.9

¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras **CABAL**,
- en total;
- que comiencen con vocal;
- que lleven la sílaba **CA**;
- que terminen en consonante?

Problema 2.10

Un batallón está compuesto por tres mexicanos, dos ingleses, cuatro franceses y tres holandeses. ¿De cuántas
maneras pueden acomodarse en una fila, tomando en cuenta únicamente las nacionalidades,
- en total;
- que vaya un mexicano en el extremo derecho de la fila;
- que vaya un mexicano a la derecha de la fila y un inglés en el extremo izquierdo;
- que vayan todos los de misma nacionalidad juntos entre sí;
- que vayan todos los de misma nacionalidad juntos entre sí, pero sin juntarse un francés con un mexicano?



El juego inventado en 1870 por

Noyes Palmer Chapman, consistía de 15 números y un espacio vacío formando un arreglo de 4x4.
Los quince bloques estaban dispuestos dentro de la caja cuadrada en orden, pero con el 14 y el 15 invertidos tal como se ve en la ilustración. El problema consistía en desplazar los bloques, uno por vez, hasta lograr nuevamente la posición inicial pero corrigiendo el error del 14 y el 15.
Para publicitar su lanzamiento Chapman ofrecía como recompensa \$1.000 a quien pudiera acreditar la secuencia de pasos necesarios para obtener la configuración con la secuencia correcta del 14 y 15.

Muestre que el problema no tiene solución, para ello muestre que toda permutación que se realiza involucra una permutación par, mientras que la permutación necesaria para invertir el orden de los números 14 y 15 es impar.

Definición

Sea A un conjunto con *n* elementos y *m* un natural menor o igual que n. Llamamos **combinación con repetición** de *m* elementos de A, a todo subconjunto de *m* elementos de A en el que un elemento puede aparecer hasta *m* veces.

Las combinaciones con repetición de *m* elementos tomados de *n* en *n* ($m \geq n$), son los distintos grupos formados por n elementos de manera que:

$$\binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!\,(m-1)!}$$

Ejemplo 2.3

En una bodega hay cinco tipos diferentes de botellas. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro botellas?

Solución:

No importa el orden. Da igual que se elija 2 botellas de anís y 2 de ron, que 2 de ron y 2 de anís. Se pueden repetir los elementos. Se puede elegir más de una botella del mismo tipo. En este caso m=5 y n=4, por lo tanto

$$\binom{5+4-1}{4} = \frac{(5+4-1)!}{4!\,(5-1)!} = 70$$

Problema 2.11

¿Cuántas combinaciones se pueden hacer con las cifras 1, 2, 3, 4, y 5 tomadas de 3 en 3 de modo que el número 3 se halle en todos los grupos?

Problema 2.12

Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 ¿Cuántos números de 4 cifras puedo escribir que comiencen por 2 y terminen en 5?

Problema 2.13

Con las letras de la palabra **libro**, ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer que empiecen por vocal?

Problema 2.14

¿De cuántas formas podemos pedir que nos sirvan un cucurucho de helado con "dos bolitas" diferentes o iguales si en la heladería hay 5 sabores de helado?

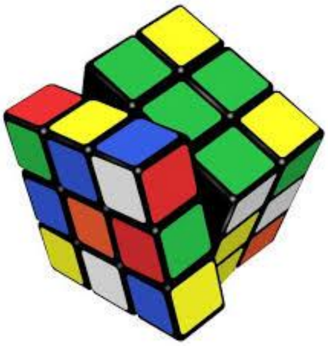
Problema 2.15

¿De cuantas maneras se pueden mezclar los 7 colores del arco iris tomados de 3 en 3.

El cubo de rubik

El cubo de Rubik es un rompecabezas mecánico tridimensional inventado por el escultor y profesor de arquitectura húngaro Ernő Rubik en 1974.
En un cubo mágico clásico, cada una de las seis caras de color uniforme (blanco, rojo, azul, naranja, verde y amarillo), está dividida en nueve partes. Un mecanismo de ejes permite a cada cara girar independientemente, mezclando así los colores. Para resolver el rompecabezas, cada cara debe volver a consistir en un solo color.

Demuestre que con un cubo de rubik tradicional (3x3x3), se pueden obtener cuarenta y tres trillones doscientos cincuenta y dos mil tres billones doscientos setenta y cuatro mil cuatrocientos ochenta y nueve millones ochocientas cincuenta y seis mil combinaciones.
Si por ejemplo se utiliza un segundo por cada movimiento, tomaría 1,4 billones de años pasar por todas las posibles configuraciones. El universo no llega a los 14 mil millones de años de antigüedad, por lo cual sólo existió el tiempo necesario para resolver un 0,0008% de sus posibilidades



43 252 003 274 489 856 000

Nota histórica

Alan Turing y la máquina Enigma

Dentro del gran campo de la criptografía Enigma marca el punto de inflexión entre la criptografía clásica y la moderna, entre la de antes y la de después de la existencia del ordenador. Este es el método de cifrado que pudo hacerse con una máquina que utilizaba la corriente eléctrica pero con principios de funcionamiento mecánicos. El uso de esta máquina tuvo gran importancia en la Segunda Guerra Mundial, y después ha tenido una gran repercusión en la tecnología. Su existencia produjo avances decisivos en la tecnología que, evidentemente con muchos cambios, se han convertido en imprescindibles en la actualidad, como los ordenadores.

En el año 1923 el ingeniero alemán Arthur Scherbius patentó una máquina diseñada para facilitar las comunicaciones seguras. Su nombre, Enigma, se ha convertido en sinónimo del secreto militar y evoca imágenes de laboratorios subterráneos y máquinas de enrevesada estructura.

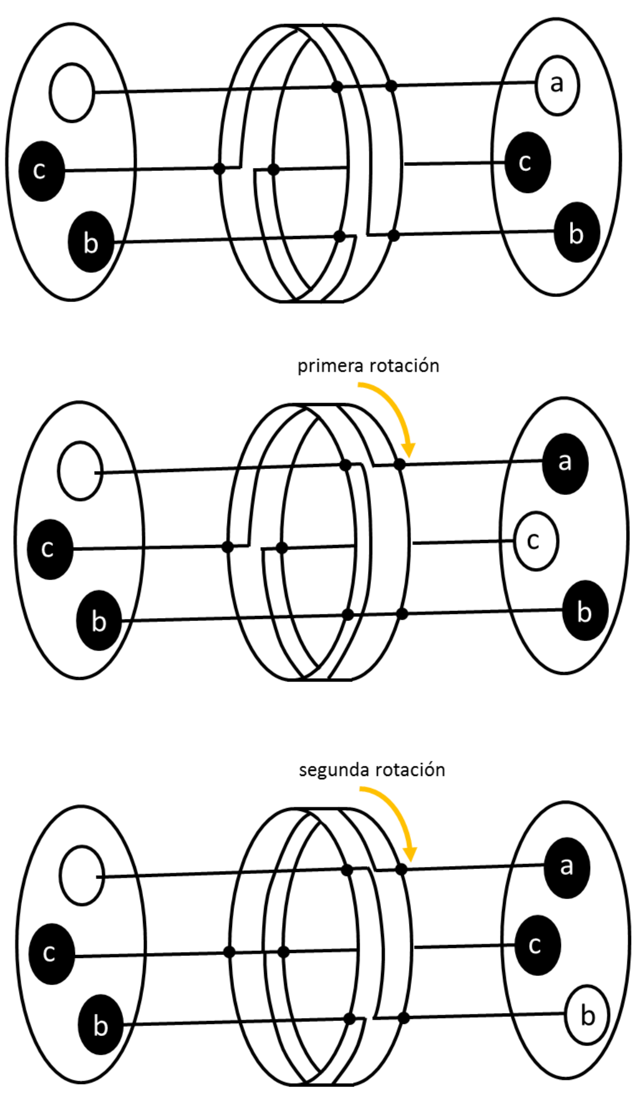
Con toda su sofisticación, Enigma es, en esencia, una versión mejorada del disco de Alberti. La máquina Enigma en sí era un artilugio electromagnético muy parecido a una máquina de escribir.

Estaba constituido por un teclado y un tablero luminoso de 26 letras; tres rotores o modificadores, que podían permutar sus posiciones, montados sobre sendos ejes, con 26 posiciones posibles, y un clavijero, cuyo cometido era llevar a cabo un primer intercambio de letras en función del modo en que se dispusieran las clavijas.

El proceso físico de cifrado era relativamente sencillo. En primer lugar, el emisor disponía las clavijas y los rotores en una posición de salida especificada por el libro de claves que estuviera vigente en ese momento. A continuación, tecleaba la primera letras del mensaje llano y la máquina, de forma automática, generaba una letra alternativa que se mostraba en el tablero luminoso: la primera letra del mensaje cifrado. Una vez completado este proceso, el primer rotor llevaba a cabo una rotación que lo situaba en la siguiente de sus 26 posiciones posibles. La nueva posición del modificador traía consigo un nuevo cifrado de los caracteres, y el emisor introducía entonces la segunda letras, y así sucesivamente.

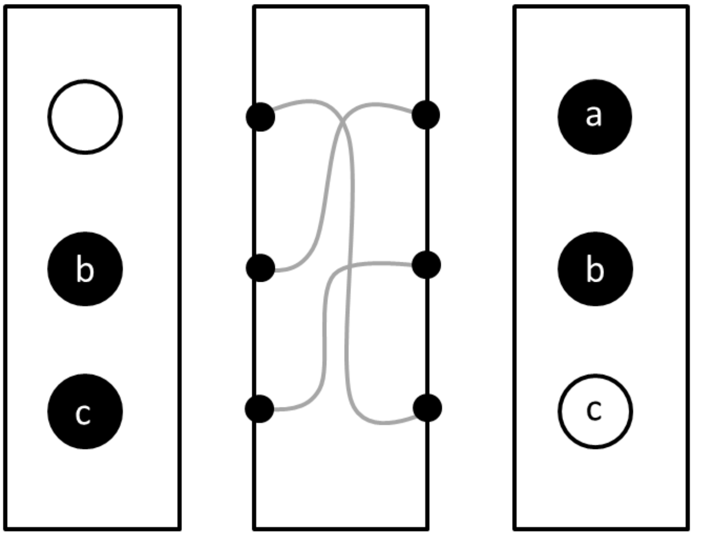
Para descodificar el mensaje, bastaba con introducir los caracteres cifrados en otra máquina Enigma, con la condición de que los parámetros de salida de esta última fueran iguales a los de la máquina con la que se había llevado a cabo la encriptación.

En el dibujo siguiente se esquematiza, de forma muy simplificada, el mecanismo de encriptación de los rotores, con una alfabeto de sólo tres letras y un rotor, por tanto, con sólo tres posiciones posibles:

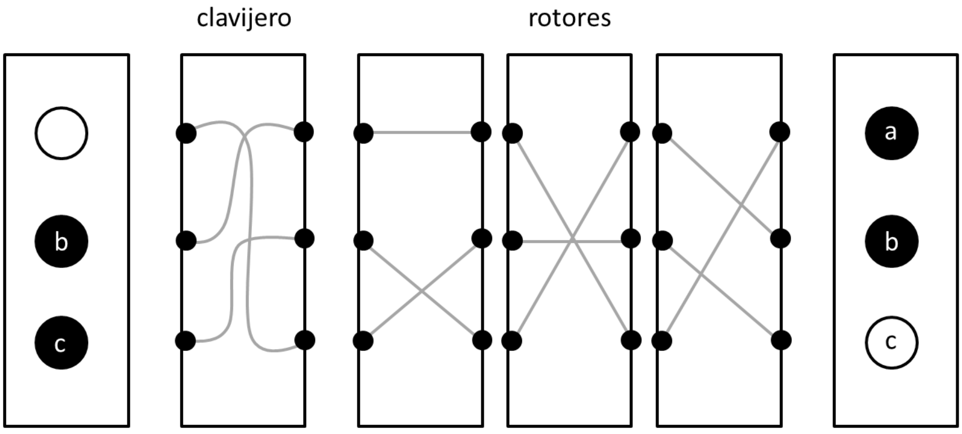


Como puede observarse, con el rotor en la posición inicial, cada letra del mensaje original se sustituye por una distinta, excepto la A, que queda inalterada. Tras el cifrado de la primera letras, el rotor e desplaza 1/3 de vuelta. En esta nueva posición, las letras son sustituidas ahora por otras distintas a las del primer cifrado. El procesos se completa con la tercera letra, momento en el cual el rotor vuelve a su posición inicial y la secuencia de cifrado volvería a repetirse. Como ya se ha indicado, los modificadores de la Enigma estándar tenían 26 posiciones, una para cada letra del alfabeto. En consecuencia, un modificador era capaz de llevar a cabo 26 cifrados distintos. La posición inicial del modificador era capaz de llevar a cabo 26 cifrados distintos. La posición inicial del modificador es, por tanto, la clave. Para aumentar el número de claves posibles, el diseño de Enigma incorporaba hasta tres rotores, conectados de forma mecánica uno con otro. Así, cuando el primer rotor completaba una vuelta, el siguiente iniciaba otra, y así hasta completar las rotaciones completas de los tres rotores para un total de 26*26*26=17.576 posibles cifrados. Adicionalmente, el diseño de Scherbius permitía intercambiar el orden de los rotores, aumentando todavía más el número de claves, como veremos más adelante.

En adición a los tres rotores, Enigma disponía también de un clavijero situado entre el primero de ellos y el teclado. Este clavijero permitía intercambiar entre sí pares de letras antes de su conexión con el rotor, y añadía de este modo un número considerable de clave adicionales al cifrado. El diseño estándar de la máquina Enigma poseía seis cables, con los que se podían intercambiar hasta seis pares de letras. En el siguiente gráfico se muestra el funcionamiento del clavijero intercambiador, de nuevo con una estructura simplificada de tan sólo tres letras y tres cables:



De este modo, la A se intercambiaba con la C, la B con la A y la C con la B. Con el añadido del clavijero, una máquina Enigma simplificada de 3 letras quedaría de la siguiente manera:



Los aliados obtuvieron la primera información de valor relativa a Enigma en 1931 de mano de un espía alemán, Hans-Thilo Schmidt, y consistía en varios manuales para el uso práctico de la máquina. El contacto con Schmidt había sido establecido por la inteligencia polaca, que en esos años sentía ya a sus espaldas el resuello de una Alemania cada vez más belicosa. El departamento de criptoanálisis polaco, conocido como Byuro Szyfrów, se puso a trabajar con los documentos de Schmidt y se agenció para ello varios ejemplares de máquinas Enigma sustraídas a los alemanes.

En 1939, con el conflicto ya desatado en el corazón de Europa y su País conquistado, los polacos remitieron sus máquinas Enigma y toda su información a sus aliados británicos, que en agosto de ese año decidieron concentrar y reubicar a sus dispersas unidades de criptoanálisis. El lugar escogido fue una casa señorial situada en las afueras de Londres, en una hacienda llamada Bletchey Park. Uno de los más brillantes criptoanalistas que el gobierno había incorporado al equipo de Bletchey Park era un joven matemático llamado **Alan Turing**. Turing era un autoridad mundial en el ámbito de la computación, por aquel entonces un campo todavía virgen y presto a nuevos y revolucionarios desarrollos. Estos conocimientos fueron clave a la hora de descifrar la máquina Enigma. Los expertos de Bletchley Park se centraron en fragmentos cortos de texto cifrado sobre los cuales tenían fundadas sospechas de cuál era su correspondencia con textos llanos. Por ejemplo, merced al trabajo de sus espías sobre el terreno, se sabía que los alemanes tenían la costumbre de transmitir un mensaje codificado acerca de las condiciones meteorológicas en varias posiciones del frente alrededor de las 6 de la tarde de todos los días. Por tanto, estaban razonablemente seguros de que un mensaje interceptado pocos minutos después de esa hora contenía la versión cifrada de textos llanos como “clima” o “lluvia”.

Turing ideó un sistema eléctrico que permitía reproducir todas y cada una de las 1.054.650 combinaciones posibles de orden y posición de los tres rotores en un tiempo inferior a las 5 horas. Este sistema era alimentado con las palabras cifradas que, por la longitud de los caracteres y otras pistas, se sospechaba que correspondían con fragmentos de texto como, por ejemplo, las anteriormente citadas “clima” o “lluvia”.

Nota histórica

Supongamos que se sospechaba que el texto cifrado FGRTY fuera la versión encriptada de "clima". Se introducía la cifra en la máquina y si existía una combinación de rotores que devolvía como resultado la palabra "clima", los criptoanalistas sabía que habían hallado, de las claves, la correspondiente a la configuración de los modificadores. A continuación, el operario introducía el texto cifrado en una máquina Enigma real con los rotores dispuestos según la clave. Si la máquina mostraba el texto descifrado CIMLA, por ejemplo, era evidente que la parte de la clave relativa a la posición de los cables incluía la trasposición entre las letras I y L. De este modo, se obtenía la clave en su totalidad. Los secretos de Enigma salían definitivamente a la luz. En el proceso de desarrollo y refinamiento de las máquinas analíticas mencionadas, el equipo de Bletchley Park acabó desarrollando el primer prototipo de ordenador moderno de la historia, bautizado como **Colossus.**

Actividades:

De acuerdo con lo explicado anteriormente referente al funcionamiento de la máquina Enigma, muestre que las máquinas de encriptación Enigma podían cifrar un texto utilizando más de **diez mil billones** de combinaciones diferentes.

Definición

Un **experimento aleatorio** es aquel que puede producir resultados diferentes, aun cuando se repita siempre de la misma manera.

Ejemplo 2.4

Todos los juegos de azar son experimentos aleatorios. Como ejemplos podemos poner:

- Lanzar una moneda al aire podrá salir cara o cruz.
- Sacar una bola de una urna que contiene bolas de distinto color, si no vemos su interior,
- Obtener una carta de una baraja, etc...

Definición

Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, se le llama **espacio muestral** del experimento. El espacio muestral se denota por Ω.
Un **evento** es un subconjunto del espacio muestral de un experimento aleatorio y se denota con la letra E.

Ejemplo 2.5

Si jugamos a la ruleta, defina el espacio muestral, defina los eventos de que salga par o de que salga primera fila..

Solución:

El espacio muestral se compone de todos los valores posibles que puede tomar el experimento, en este caso $\Omega=\{0,1,2,\ldots,36\}$.
En el caso del evento de que salga par el subconjunto de valores es $A=\{2,4,6,\ldots,36\}$.
El subconjunto de valores $B=\{1,4,7,\ldots,34\}$ corresponde al evento de primera fila.

Definición

Un espacio muestral es **discreto** si tiene un conjunto finito (o contablemente infinito) de resultados.

Definición

Siempre que un espacio muestral conste de N resultados posibles que son igualmente factibles, la probabilidad de cada resultado es $1/N$.
Para un espacio muestral discreto, la **probabilidad de un evento** se define

$$P_r = lim_{N\to\infty}\frac{N_r}{N}$$

Donde N_r es el número de sistemas que presentan el valor r del total N.

Ejemplo 2.6

Se saca una carta de una baraja. ¿Cuál es la probabilidad ?
- de que sea roja
- de que sea espada
- de que sea un rey
- de que no sea el as de corazones

Solución:

Una carta roja se puede sacar de la baraja de 26 maneras diferentes, por lo tanto

$$P_{roja} = \frac{26}{52} = 1/2$$

Se puede sacar de la baraja una espada de 13 maneras diferentes, la probabilidad resulta entonces

$$P_{espada} = \frac{13}{52} = 1/4$$

Se puede sacar un rey de 4 maneras distintas, la probabilidad pedida es

$$P_{rey} = \frac{4}{52} = 1/13$$

El as de corazones puede extraerse de 1 sola manera, la probabilidad de sacar el as de corazones es 1/52, de modo que la probabilidad de no sacarlo es

$$P_{no\ as} = 1 - \frac{1}{52} = 51/52$$

Definición

Una **probabilidad** (o medida de probabilidad) es una función P que a cada evento E le hace corresponder un número real $P(A)$ con las siguientes probabilidades:

- $0 \leq P(E) \leq 1$ para todo $E \subseteq \Omega$
- $P(\Omega) = 1$
- $A \cap B = \emptyset$
- $P(A \cup B) = P(A) + \mathrm{P(B)}$

propiedades

¿Cuál es la probabilidad de que se presente el suceso *r* o el suceso *s*?.

$$P(r\ o\ s) = P_r + P_s$$

¿Cuál es la probabilidad de que se presenten ambos sucesos *r* y *s*?.

$$P(rs) = P_r P_s$$

Ejemplo 2.7

Se arroja un dado equilibrado, ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número menor o igual a 3.

Solución:

La probabilidad de cada número es 1/6, así la probabilidad de sacar un número menor o igual a 3 es,

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 2.8

Se arroja un par de dados equilibrados, ¿Cuál es la probabilidad que en uno de los dados salga un número impar y en el segundo el número 2?.

Solución:

En este caso

$$P = P_{impar}P_2 = \frac{3}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Problema 2.16

Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 4 negras, una segunda bola contiene 3 bolas blancas y 6 negras y una tercera bolsa contiene 1 bola blanca y 5 negras.
Si se saca una bola de cada bolsa, hallar la probabilidad de que sean todas blancas

Problema 2.17

Se extraen dos cartas de una baraja. Hallar la probabilidad de que ambas sean figuras (rey, reina, etc), si

- Si la primera carta que se saca se devuelve al mazo antes de sacar la segunda.
- Si la primera carta no se devuelve al mazo al sacar la segunda.

Problema 2.18

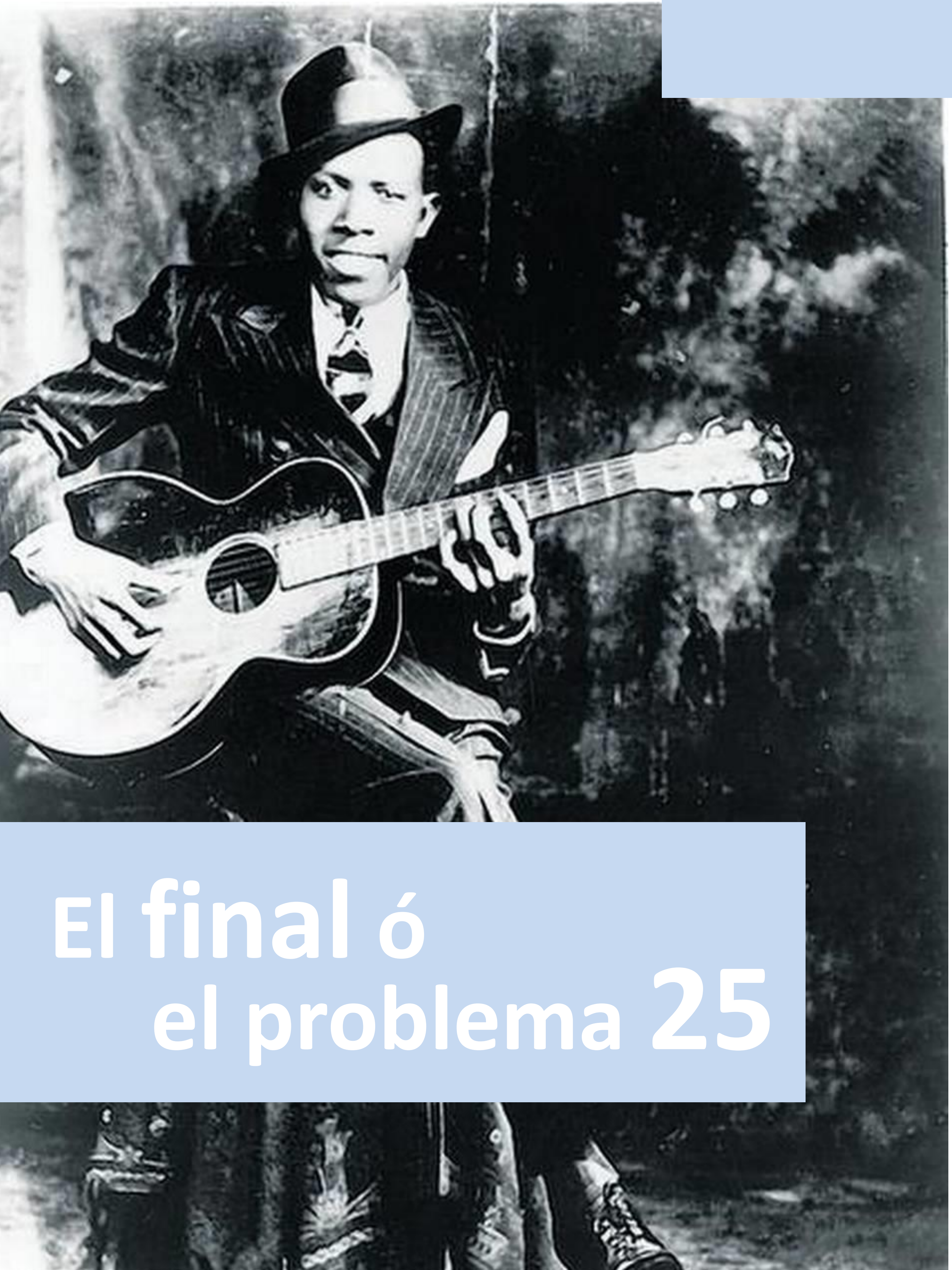
Se saca una bola de una bolsa que contiene 3 bolas blancas, 4 rojas y 5 negras. ¿Cuál es la probabilidad de que sea ?

- blanca
- blanca o roja
- no roja

Problema 2.19

Si se lanzan dos dados, ¿Cuál es la probabilidad de?

- hacer 7 puntos
- obtener un total de 8 puntos
- de hacer 10 puntos o más
- de que ambos dados den el mismo número.



El final ó el problema 25

Cuenta la leyenda, que cierto día de abril, un perverso profesor desafió a sus alumnos con el siguiente reto:

«El que me entrega resuelto el problema 25, con todas las combinaciones posibles de los errores en el libro, tiene un 10 y no rinde el final»

La propuesta parecía tentadora, después de todo solo era necesario dedicar un poco de tiempo en armar las posibilidades de distribución de los errores en el libro, algunos alumnos se vieron atraídos a esta posibilidad:

«¿Es en serio?»
«¿Sé puede usar Matlab?»

La respuesta del profesor fue afirmativa. Según cuenta la leyenda, algunos alumnos aprobaron la materia meses después de cursarla, otros todavía continúan trabajando incansablemente en el problema 25. ¿Por qué el profesor estaba tan seguro de su apuesta?, en parte por conocer sobre los sesgos cognitivos de los seres humanos y la gran dificultad que conlleva en pensar y tomar dimensión de grandes números. Hagamos algunas cuentas.
En principio el problema parece razonable, 1400 páginas y 700 errores no son números exorbitantes. Todo cambia cuando comenzamos a trabajar con factoriales y el cálculo de las combinaciones posibles. En este caso obtenemos como resultado que el número de combinaciones posibles es:

$$total\ de\ combinaciones = \frac{(700+1399)!}{700!\,1399!} = ???$$

Ayúdanos Stirling, recordemos que si el número del factorial es grande (mayor a 10), podemos utilizar la aproximación de Stirling, en este caso:

$$Ln(2000!) \approx 2000Ln(2000) - 2000 \approx 13202$$

Tampoco parece un número tan grande, ah, pero eso es el logaritmo, ósea que ese es el exponente de una exponencial, es decir, que en realidad, la cantidad de combinaciones es:

$$2000! \approx \exp(13202) \approx 3{,}31x10^{5735}$$

Esto se empieza a complicar. Pero momento, falta dividir por 700! Y 1399!, tenemos entonces:

$$\frac{2000!}{700!\,1399!} \approx 3{,}9x10^{247}$$

Bastante menos, ya lo tenemos!!!. Veamos, si utilizamos una hoja A4 para cada combinación necesitaríamos unas 10^{243} resmas, teniendo en cuenta que el número de átomos en el Universo es aproximadamente 10^{80}, no parece una buena idea. Maldito profesor!!!!!!!!!!
Un momento, puedo utilizar la compu, lo programo en Matlab, lo dejo calculando unos días y lo tengo. Supongamos que me lleva un segundo armar cada combinación serian unos 10^{247} segundos. Teniendo en cuenta que el Universo tiene unos 13800 millones de años, esto es 10^{17} segundos, tendría que esperar…. Maldito profesor!!!!!!!!!!

Problema 2.20

Si se arrojan cinco monedas, ¿Cuál es la probabilidad de que ?
- todas caigan cara.
- tres caigan cara.
- al menos tres caigan cara.

Problema 2.21

Si se sacan tres cartas de una baraja, hallar la probabilidad de:
- que todas sean rojas.
- que todas sean del mismo palo.
- que todas sean ases.

Problema 2.22

Un jugador arroja un par de dados y obtiene un total de 5 puntos. Hallar la probabilidad de sacar otros 5 puntos antes de sacar 7 puntos

Problema 2.23

Una bolsa contiene 2 bolas blancas y 3 negras. Se saca 5 veces una bola volviéndose a echar en la bolsa antes de sacar otra. Hallar la probabilidad de que
- las primeras 4 bolas sean blancas y la ultima sea negra.
- 4 de estas bolas sean blancas.
- al menos 4 sean blancas
- al menos 1 bola sea blanca.

Problema 2.24

Se escoge al azar un número entre 0 y 1. ¿Cuál es la probabilidad que exactamente 5 de las primeras 10 cifras decimales sean dígitos menores que 5?

Problema 2.25

Un libro de 1400 páginas contiene 700 errores. Calcular la probabilidad de que
- una página no contenga ningún error,
- una página contenga dos errores. (Ayuda: pensar de cuantas formas se pueden distribuir x errores en y páginas).

El problema de Monty Hall

El problema de Monty Hall es un problema matemático de probabilidad basado en el concurso televisivo estadounidense Let's Make a Deal (Hagamos un trato). El problema fue bautizado con el nombre del presentador de dicho concurso: Monty Hall.

El concursante debe elegir una puerta de entre tres (todas cerradas), el premio consiste en llevarse lo que se encuentra detrás de la elegida. Se sabe con certeza que tras una de ellas se oculta un automóvil, y tras las otras dos hay sendas cabras. Una vez que el concursante haya elegido una puerta y comunicado su elección a los presentes, Monty, el presentador, que sabe lo que hay detrás de cada puerta, abrirá una de las otras dos y mostrará que detrás hay una cabra. A continuación, le da la opción al concursante de cambiar, si lo desea, de puerta (tiene dos opciones) ¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia?

Definición

Una **variable aleatoria**, es una función que asigna un número real a cada resultado del espacio muestral de un experimento aleatorio.
Una variable aleatoria **discreta** es una variable aleatoria con un rango finito (o infinitamente contable).
Una variable aleatoria **continua**, es una variable aleatoria que tiene como rango un intervalo (finito o infinito) de números reales

Definición

Para una variable aleatoria discreta X con valores posibles $x_1, x_2, \dots, x_n$ la **función de masa de probabilidad** es

$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

Ejemplo 2.9

Sea que la variable aleatoria X denote el número de obleas de semiconductores que es necesario analizar a fin de detectar una partícula grande de contaminación. Supóngase que la probabilidad de que una oblea contenga una partícula grande es de 0,01 y que las obleas son independientes.
Determine la distribución de probabilidad de X.

Solución:

Denotaremos con p a la oblea que presenta una partícula grande de contaminación y sea a la etiqueta para las obleas libre de contaminación. El espacio muestral es infinito y puede representarse como todas las secuencias posibles que empiecen con una cadena de *aes* y termine con una p, por ejemplo $\Omega = [p, ap, aap, aaap, \dots]$.
Consideremos algunos casos especiales, por ejemplo

$$P(X = 1) = P(p) = 0{,}01$$
$$P(X = 2) = P(ap) = 0{,}99(0{,}01) = 0{,}0099$$

Una fórmula general es

$$P(X = x) = P(aa \dots ap) = 0{,}99^{x-1}0{,}01$$

¿Aleatorio?

Volvamos al profundo tema del azar. La mecánica cuántica solo predice probabilidades acerca del resultado de un experimento. Hemos de volver atrás y pensar con más detenimiento qué es el azar en el mundo clásico.
Lanzo dos dados. Salen dos 6. Gano unos cuantos dólares en las Vegas. ¡Qué suerte! El azar me ha sonreído.
¿Es cierto que los dados eligieron el 6 en forma aleatoria? La verdad es que no. Si hubiésemos medido con precisión las formas de los dados, tuviésemos en cuenta la mesa en la que cayeron y las velocidades en las que fueron lanzados, hubiera sido posible predecir el resultado en forma exacta. El esfuerzo de cálculo sería increíble, tal vez hubiera precisado utilizar todos los ordenadores de la tierra para predecir el resultado de un lanzamiento de dos dados. Pero el esfuerzo de cálculo es irrelevante. LOS DADOS NO TENÍAN OPCIÓN. Sus movimientos siguieron leyes precisas, ajenas a todo azar.
El dado no tiene alma, no tiene mente, no decide. No existe el azar en el mundo del dado.

Complejidad y azar

El dado es un ejemplo de un mal entendido azar clásico. Confundimos el hecho de que algo sea difícil de predecir con el de que sea aleatorio. Si sumo cien mil números, el resultado es difícil de obtener pero no aleatorio. La suma es la que es. Si integro las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de un dado, el resultado final de cómo caerá es el que es. Está dictado.
Otro ejemplo. Es difícil predecir si lloverá un día preciso de aquí a un mes. Es muy, muy difícil. Las ecuaciones que controlan el clima son extremadamente intrincadas. Cada molécula de aire afecta a otras muchas, se asocia con las del mar, la tierra, se mueve rápidamente, es absorbida y reemitida a la atmósfera. Parece imposible tratar las ecuaciones que determinan el clima. Aun así, podemos predecir el tiempo a pocos días vista. Podemos predecir porque no hay azar clásico.

En la física clásica, nada interfiere en las ecuaciones de los fluidos. No sabes si dentro de un mes lloverá o no porque el cálculo necesario para responder a esta pregunta supera a la capacidad de nuestros ordenadores actuales.
Pero el hecho de que llueva ya está determinada a día de hoy, y también cuando falleció Julio César o cuando nació el Sol. En el mundo clásico, toda la evolución está determinada y forma una secuencia dictada por las leyes de la física.
El azar de los sistemas complejos es un espejismo.

El azar en el mundo clásico no es certificable.

Azar cuántico
En contraposición al azar del mundo clásico, tenemos el azar que aporta la mecánica cuántica. El azar en las leyes de la física clásica no existe. En cambio, el azar cuántico es postulado. Einstein se opuso con toda la fuerza de su intelecto al concepto de azar cuántico en su célebre frase:

Dios no juega a los dados

Lo cierto es que nada contradice que nuestro acceso al conocimiento se probabilístico. Dicho de otra forma, nadie ha logrado crear una teoría determinista capaz de sustituir a la mecánica clásica. De ser así, podríamos predecir cuando un núcleo inestable se va a desintegrar.

El azar cuántico si es certificable.

Extraído de: *Cuántica*. **José Ignacio Latorre**. Ariel. 2017

En el cuartel general de la compañía **Cloudflare**, en San Francisco, hay una pared con **más de cien lámparas de lava en una estantería** que no están ahí solo por adorno. Esta empresa cubre el 10 por ciento del tráfico internacional de la web y presta servicios a gigantes como Uber o FitBit, de manera que tiene que ser especialmente cuidadosa con la seguridad. De hecho, **las lámparas de lava están ahí como parte de su sistema de encriptación** que impide que ningún intruso pueda acceder a los datos que albergan y circulan por sus servidores.

¿Y cómo lo hacen? Pues generando **números aleatorios** que sean prácticamente imposibles de predecir por ningún asaltante. Una cámara de vídeo graba de manera constante las progresiones de las lámparas y **un ordenador convierte esas variaciones impredecibles en un código virtualmente imposible de descifrar**. Dado que la mayoría de cifrados los producen las máquinas, y estas no son todavía muy buenas creando series verdaderamente aleatorias, un código basado en un algoritmo sería vulnerable porque alguien acabaría encontrando el patrón. Si las secuencias aleatorias siguen las evoluciones de algo tan aparentemente caótico como las lámparas de lava, quien quiera vulnerar la seguridad de Cloudflare lo tiene bastante complicado. Sobre el hecho de que la gente pueda acceder y ver las lámparas, no solo no es un problema, sino que el **trajín de la gente yendo** y viniendo añade más aleatoriedad al sistema, según sus responsables.

¿Aleatorio?

Mozart

y su vals aleatorio

Es por todos conocido que Mozart fue un gran músico y compositor, pero lo que muchos no saben es que también era un aficionado a las matemáticas y en el estudio de sus obras se han encontrado relaciones con el número Pi, y la combinatoria.

El ejemplo más claro de esta relación lo encontramos en su obra *Musikalisches Würfelspiel* (juego de dados musical en alemán), esta obra consiste en un generador de valses de 16 compases que utiliza el azar para su composición. La obra esta formada por 176 compases que Mozart agrupo en 16 conjuntos de 11 compases cada uno. Para componer un vals se realizan 16 tiradas de los dos dados, anotando en cada tirada la suma de los números obtenidos. Para cada suma buscamos en la columna correspondiente al compás en el que nos encontramos la fila correspondiente al número y escribimos el compás en nuestro pentagrama.

El número de valses distintos que se pueden generar con este juego es de:

$$\mathbf{11^{16} = 45949729863572160}$$

Este número es tan grande que se estima que si se interpretan con un orden sistemático todas las partituras posibles de manera ininterrumpida, de día y de noche, y cada interpretación durara 30 segundos, se tardaría mas de 43000 millones de años en interpretarlas todas. Para hacerse una idea de la magnitud de dicho número, la edad de la tierra es de 4470 millones de años, lo que quiere decir que tardaríamos en reproducirlas todas mas de 9 veces la edad de la tierra.

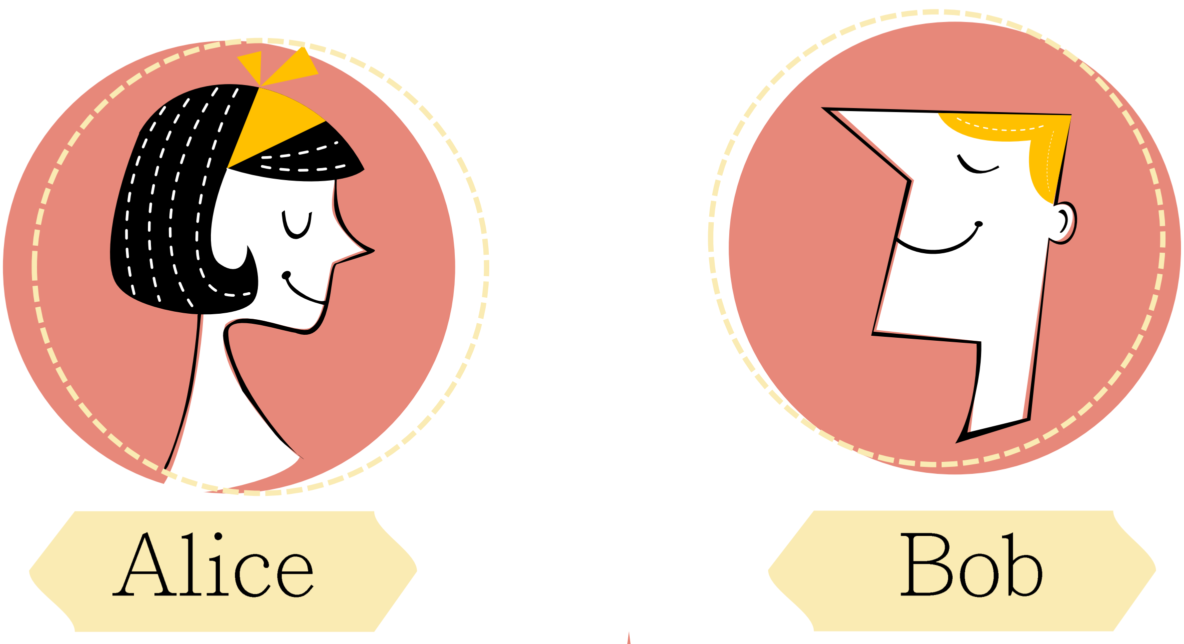
Por tanto, es posible que cuando escuches un vals generado de manera aleatoria con este juego seas la única persona en el mundo que lo haya escuchado jamás.

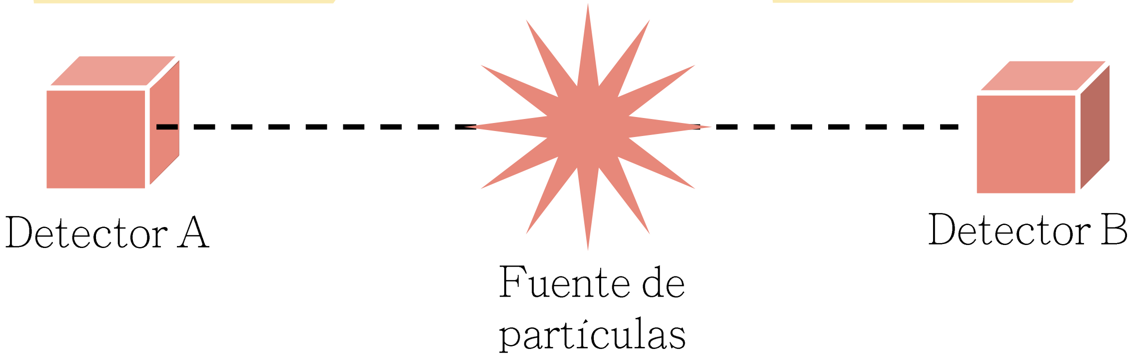
Si tocamos un vals generado de manera aleatoria, no todos los valses tienen la misma probabilidad de ser tocados puesto que no todas las sumas tienen la misma probabilidad de salir. Calcule la probabilidad de obtener el vals generado por la secuencia (7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7), y por la secuencia (2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2).

For whom the Bell Tolls

27

Supongamos que tenemos dos personas, que llamaremos Alice y Bob, que cuentan con detectores de partículas que pueden orientarse en tres posiciones **a**, **b** y **c**. El sistema se completa con un generador de partículas totalmente anti-correlacionadas de forma que si un detector da un conteo positivo, el otro nos dará un conteo negativo. En su tiempo libre Alice y Bob se dedican experimentar con sus detectores y anotar sus resultados.





Tanto Alice como Bob, realizaron sus anotaciones, y obtuvieron:

Ahora, con estos resultados podemos ver que:

$$P(a+,b+) = P3 + P4$$
$$P(a+,c+) = P2 + P4$$
$$P(c+,b+) = P3 + P7$$

por lo tanto,

$$P3 + P4 \leq P3 + P4 + P2 + P7$$
$$P(a+,b+) \leq P(a+,c+) + P(c+,b+)$$

El resultado al que llegamos ha sido definido cómo «el más importante de la ciencia» *. Pongamos el problema en contexto. Supongamos que las partículas son electrones, entonces desde la fuente se emiten ambos electrones con spin total cero, es decir uno up y el otro down. Los detectores no son otros que los famosos detectores tipo Stern-Gerlach para determinar la orientación del spin. En este caso usamos tres orientaciones posibles. Lo interesante es que si intentamos realizar el mismo cálculo con mecánica cuántica observamos una violación a la desigualdad antes obtenida, **hemos llegado al Teorema de Bell.**

*Quántum. Manjit Kumar Editorial Kairós. 2010.

Definición

La **media** o **valor esperado** de la variable aleatoria discreta X, denotada como $< X >$ es

$$\langle X \rangle = \sum_x x f(x)$$

La **varianza** de X, denotada como σ^2 es

$$\sigma^2 = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \sum_x (x - \langle X \rangle)^2 f(x)$$

La **desviación estándar** es

$$\sigma = [\sigma^2]^{1/2}$$

Ejemplo 2.10

El número de mensajes por hora enviados en una red de computadoras tiene la siguiente distribución:

x=número de mensajes	10	11	12	13	14	15
f(x)	0,08	0,15	0,3	0,2	0,2	0,07

Determine la media y la desviación estándar del número de mensajes por hora enviados

Solución:

De acuerdo con las definiciones antes presentadas, obtenemos

$$\langle X \rangle = 10(0{,}08) + 11(0{,}15) + \cdots + 15(0{,}07) = 12{,}5$$
$$\sigma^2 = 10^2(0{,}08) + 11^2(0{,}15) + \cdots + 15^2(0{,}07) = 1{,}85$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1{,}36$$

Definición

Un experimento aleatorio que consta de n ensayos repetidos que
• los ensayos son independientes
• cada ensayo produce únicamente dos resultados posibles, etiquetados como «éxito», o «fracaso», y
• la probabilidad de un éxito en cada ensayo, denotada como p permanece constante
Se llama experimento binomial.
La variable aleatoria X que es igual al número de ensayos que producen un éxito tiene una **distribución binomial** con parámetros p y $n = 1,2, \dots$.
La función de masa de probabilidad de X es

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0,1, \dots, n$$

propiedades

Si X es una variable aleatoria binomial con parámetros p y n, entonces
• $\langle X \rangle = np$
• $\sigma^2 = np(1-p)$

Ejemplo 2.11

Un caminante aleatorio camina con probabilidad p y permanece quieto con probabilidad $1 - p$.
• Encuentre el valor esperado de pasos dados en N intentos.
• Encuentre la desviación en torno a este valor.

Solución:

La distribución de pasos en binomial, por lo tanto el valor esperado de pasos es:

$$\langle pasos \rangle = \sum_{n}^{N} n \frac{N!}{(N-n)!\,n!} p^{n}(1-p)^{N-n}$$

Reordenando la ecuación anterior obtenemos

$$= Np \sum_{n=1}^{N} \frac{(N-1)!}{(N-n)!\,(n-1)!} p^{n-1}(1-p)^{N-n}$$

Realizamos un cambio de variables $n-1=m$y obtenemos

$$= Np \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-1-m)!\,m!} p^{m}(1-p)^{N-1-m}$$

Finalmente

$$= Np(p+1-p)^{N-1}$$

$$\boldsymbol{\langle pasos \rangle = Np}$$

Para calcular la desviación debemos obtener el valor de pasos $\langle pasos^2 \rangle$, es decir

$$\langle pasos^2 \rangle = \sum_{n=0}^{N} n^2 \frac{N!}{(N-n)!\,n!} p^{n}(1-p)^{N-n}$$

Podemos reescribir la expresión anterior como

$$\langle pasos^2 \rangle = \sum_{n=1}^{N} n \frac{N!}{(N-n)!\,(n-1)!} p^{n}(1-p)^{N-n}$$

Haciendo un cambio de variables $n-1=m$

$$\sum_{m=0}^{N-1} m \frac{N!}{(N-1-m)!\,m!} p^{m-1}(1-p)^{N-1-m} + \sum_{m=0}^{N-1} \frac{N!}{(N-1-m)!\,m!} p^{m-1}(1-p)^{N-1-m}$$

Podemos sacar factor común , y obtenemos

$$N(N-1)p^2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{(N-2)!}{(N-1-m)(m-1)!} p^{m-1}(1-p)^{N-1-m} +$$

$$Np \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(N-2)!}{(N-1-m)!\,m!} p^{m}(1-p)^{N-1-m}$$

En el primer término hacemos la sustitución $m-1=k$. Para el segundo término basta con notar que la suma da la unidad, con lo cual

$$= N(N-p)p^2\sum_{k=0}^{N-2}\frac{(N-2)!}{(N-2-k)!\,k!}p^k(1-p)^{N-2-k}+Np$$

Finalmente

$$\langle pasos^2\rangle = N(N-1)p^2+Np$$

Utilizando la expresión $\sigma=\sqrt{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2}$, obtenemos

$$\boldsymbol{\sigma=\sqrt{Np(1-p)}}$$

Problema 2.26

Dos ebrios comienzan a caminar unidimensional y aleatoriamente desde el origen del eje x. Dado que la probabilidad de caminar hacia la derecha es igual que la probabilidad de caminar hacia la izquierda, encuentre la probabilidad de que se encuentren después de N pasos.

Problema 2.27

En el juego de la ruleta rusa, se inserta solamente una bala en el barril de un revolver **Importante: no hagan esto en sus casas.** El tambor luego se hace girar y se cierra súbitamente. El revolver es luego apuntado a la sien y es disparado. Encuentre:

- La probabilidad de sobrevivir N juegos.
- La probabilidad de sobrevivir (N-1) juegos y morir al N´esimo.
- El promedio de jugadas que dura el juego.

Problema 2.28

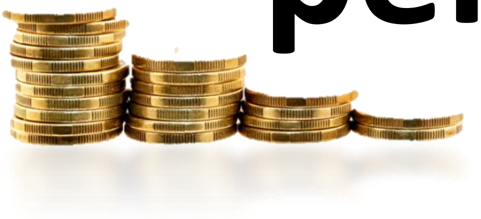
Para una distribución de Poisson

$$P(n)=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

- normalice la función
- calcule su valor esperado
- su varianza

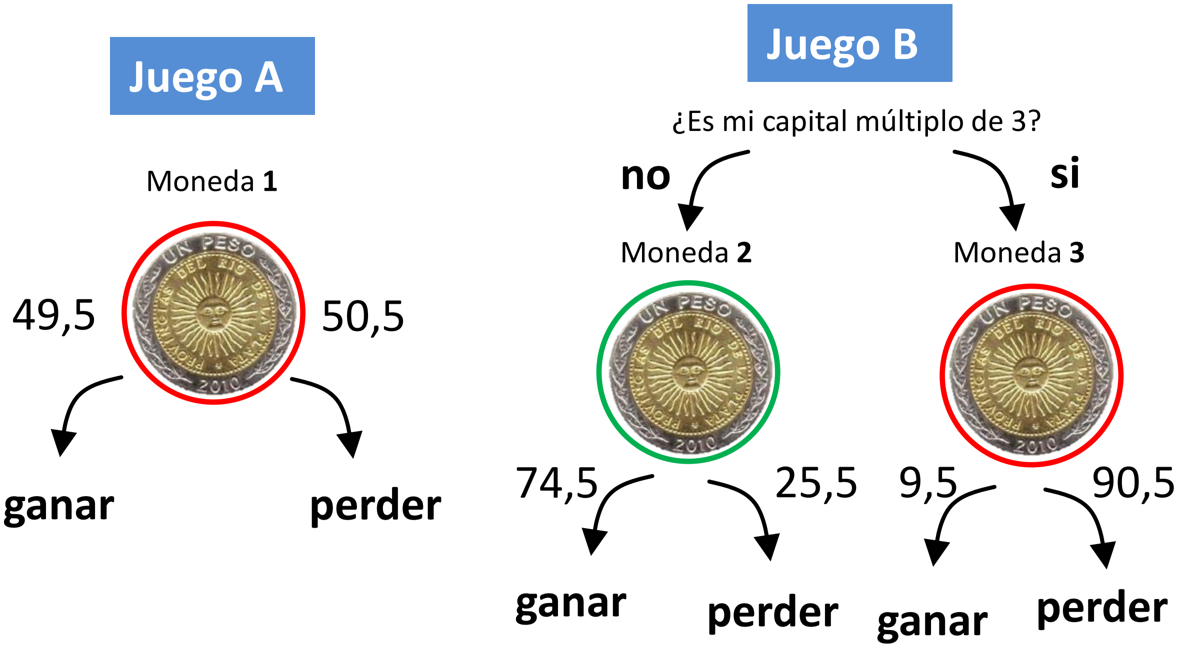
Cómo ganar perdiendo

33

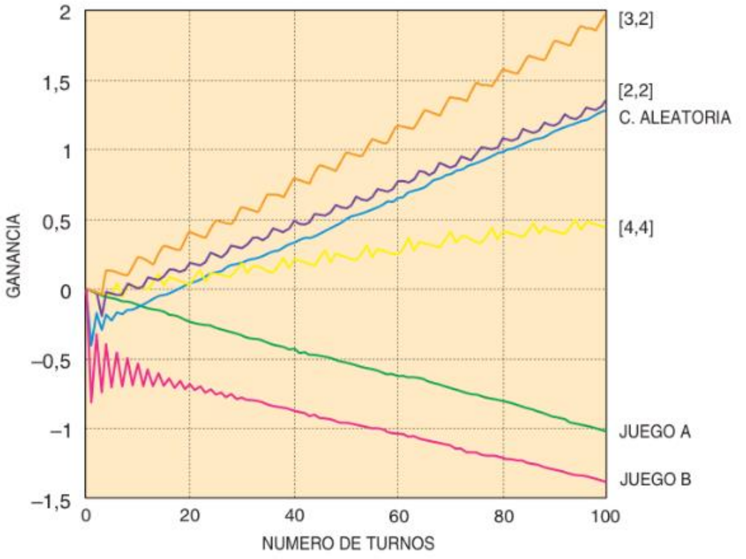


(o una breve introducción a la teoría de juegos)

Consideremos dos juegos de azar en los que un jugador puede ganar o perder un peso con cierta probabilidad. En el primero de los juegos, llamémoslo A, el jugador gana un peso con probabilidad 49,5% y pierde con probabilidad 50,5%. Este juego, debido al pequeño sesgo que separa las probabilidades del 50%, es un juego perdedor. El jugador, en media, pierde de forma sistemática. En el juego B, las probabilidades dependen de lo que el jugador ha ganado hasta el momento (llamaremos a esa cantidad el *capital*). Si lo que lleva ganado es múltiplo de 3, entonces gana con probabilidad 9,5% y pierde con probabilidad 90,5%. Si el capital no es múltiplo de 3, la probabilidad de ganar es 74,5% y la de perder 25,5%. Como se ve, el juego B es en ocasiones bastante favorable, pero en otras (cuando el capital es múltiplo de 3) es muy desfavorable. Los números están escogidos para que, en media, el juego sea perdedor. En el siguiente esquema se resumen la reglas de los dos juegos:



En la figura se representan las probabilidades mediantes distintas monedas, una de ellas favorable (en verde) y las otras dos desfavorables (en rojo). Esta representación es conveniente para la discusión posterior. Como hemos dicho, en los dos juegos el jugador pierde, en media, de forma sistemática. Sin embargo, si se alternan siguiendo la secuencia AABBAABB… el jugador gana. Y no es ésta la única secuencia que produce ganancias. Jugando A tres turnos, seguidos de dos turnos de B, la ganancia es aún mayor. Incluso si en cada turno se elige al azar el juego A ó B (combinación aleatoria), también gana el jugador de forma sistemática. En la siguiente figura se puede ver la ganancia media de 5000 jugadores en función del número de turnos, jugando a A y B únicamente o a distintas secuencias (los números entre paréntesis [a,b] indican la secuencia utilizada: a turnos del juego A, seguidos de b turnos del juego B):



La ganancia media es pequeña, no llega a dos pesos en 100 turnos, pero el efecto “paradójico” es perfectamente visible. ¿Cuál es el mecanismo que da lugar a este comportamiento? La clave está en lo que ocurre en el juego B cuando el capital es múltiplo de 3. En ese caso se juega una moneda muy desfavorable (la moneda 3 en la figura anterior), con una probabilidad de ganar inferior al 10%. Si representamos el capital del jugador mediante casillas en una línea:

las casillas múltiplo de 3 son muy difíciles de superar cuando jugamos a B. Lo que hace el juego A es ayudar a superar esas casillas difíciles. Este mecanismo es de hecho el que inspiró la paradoja original y era conocido en física como “efecto ratchet” (en inglés ratchet es una rueda dentada con dientes asimétricos y que puede girar sólo en una dirección. En relojes y otros dispositivos, las ratchets se utilizan, entre otras cosas, para rectificar un movimiento fluctuante u oscilatorio convirtiéndolo en movimiento en una dirección), otro ejemplo son los denominados motores brownianos.

Problema 2.29

En una reunión hay n personas . ¿Cuál es la probabilidad de que dos de ellas cumplan años el mismo día?

Problema 2.30

Supongamos que barajamos una baraja de 52 cartas y tomamos las dos cartas que han quedado en la parte superior del mazo.

- ¿Cuántos pares ordenados de cartas podemos obtener como resultado?
- ¿Qué probabilidad de tenemos de que la primera carta sea un as?
- ¿Qué probabilidad tenemos de que la segunda carta sea un as?
- ¿y de que ambas cartas sean ases?
- ¿y de que al menos tengamos un as entre las dos cartas?

Problema 2.31

Proporcionamos a **A** un trozo de papel para que escriba aun signo + o un signo -, sabiendo que escribe el primero con probabilidad 1/3. El papel pasa a **B**, quien lo deja como está o cambia el signo antes de pasarlo a **C**. A continuación **C**, que puede o no haber cambiado el signo, lo pasa a **D**, quien finalmente nos lo devuelve tras haber introducido o no algún cambio. Si comprobamos que el papel tiene escrito un signo + y sabemos que la probabilidad de que **B**, **C** y **D** cambiaran el signo es 2/3, obtener la probabilidad de que **A** escribiera originalmente un signo +.

Problema 2.32

El color de la flores de una cierta planta depende de dos genes, uno que recibe del padre y el otro de la madre. Si los dos genes son idénticos entonces la flor tiene ese color, sin embargo, con genes diferentes la flor tiene bandas con cada uno de los colores. Los genes presentes en la población corresponden a los colores azul, amarillo y verde y su proporción en la población es p , q y r (de modo que p + q + r=1). Seleccionamos los padres de una planta aleatoriamente dentro de la población y consideramos : el suceso A consiste en que las flores del hijo tiene color azul, el suceso B consiste en que la s flores tengan más de un color.

Se pide:

- determinar la probabilidad de los dos procesos
- demostrar que los dos sucesos son independientes si p=2/3 y q=r=1/6
- ¿son estos los únicos valores de p, q y r que hacen a los sucesos A y B independientes?

Problema 2.33

Tres prisioneros **A**, **B** y **C** son informados por su carcelero de que se ha elegido al azar a uno de ellos para ser ejecutado y que los otros dos van a ser liberados. El prisionero **A** le pide al carcelero que le diga en privado cual de sus compañeros va a ser liberado, asegurándole que no pasa nada porque le de esa información puesto que el sabe que al menos uno de los otros dos quedará libre. El carcelero no quiere contestar la pregunta porque dice que si **A** supiera cual de sus dos compañeros va a ser liberado entonces su propia probabilidad de ser ejecutado subiría de 1/3 a 1/2, porque entonces sería uno de los dos que podría ser ejecutado. ¿Qué piensas del razonamiento del carcelero?.

Definición

Para una variable aleatoria continua X, **una función de densidad de probabilidad** $f(x)$ es una función tal que

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

propiedades

Suponga que X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$.
La media o valor esperado de X, denotada como $\langle X \rangle$,es

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

La varianza de X, denotada como σ^2,es

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle X \rangle)^2 f(x) dx$$

La desviación estándar de X, es

$$\sigma = [\sigma^2]^{1/2}$$

Ejemplo 2.12

La distribución de velocidades de un gas ideal se conoce con el nombre de distribución de Maxwell -Boltzmann, y presenta la siguiente densidad de probabilidad:

$$f(v) = \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^3} 4\pi v^2 Exp[\frac{-mv^2}{2kT}]$$

Donde m es la masa de las moléculas, k la constante de Boltzmann y T la temperatura
Calcule , la velocidad media de las partículas que componen el gas.

Solución:

La velocidad media de las moléculas es

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

La aguja de Buffon

El problema de probabilidad conocido como la aguja de Buffon fue planteado por el naturalista francés Buffon en 1711 y reproducido por él mismo ya resuelto en 1757. Se trata de lanzar una aguja sobre un papel en el que se han trazado rectas paralelas distanciadas entre sí de manera uniforme. Se puede demostrar que si la distancia entre las rectas es igual a la longitud de la aguja, la probabilidad de que la aguja cruce alguna de las líneas es 2/π .

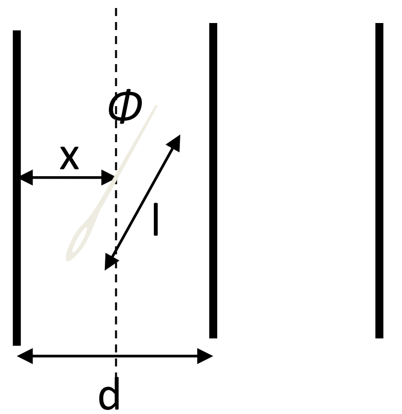
De esta manera se puede estimar el valor de π, a través de un simple experimento contabilizando la cantidad de agujas lanzadas y la cantidad de agujas que cortan una recta.

Sea una aguja de longitud l, lanzada sobre una hoja donde se han dibujado rectas paralelas separadas una distancia d.

La densidad de probabilidad de que la aguja corte una recta depende de dos variables, la primera es la distancia entre el centro de la aguja y una de las rectas (x), y la segunda el ángulo que forma la aguja con la recta (*Φ*).

La densidad de x se distribuye entre los valores 0 y d/2 . Por lo tanto podemos expresar

$$f_x = \frac{2}{d}dx$$



La densidad de *Φ*, se distribuye entre 0 y 2 π.

$$f_\phi = \frac{2}{\pi}d\phi$$

El producto de ambas densidades nos define la densidad total, por lo tanto

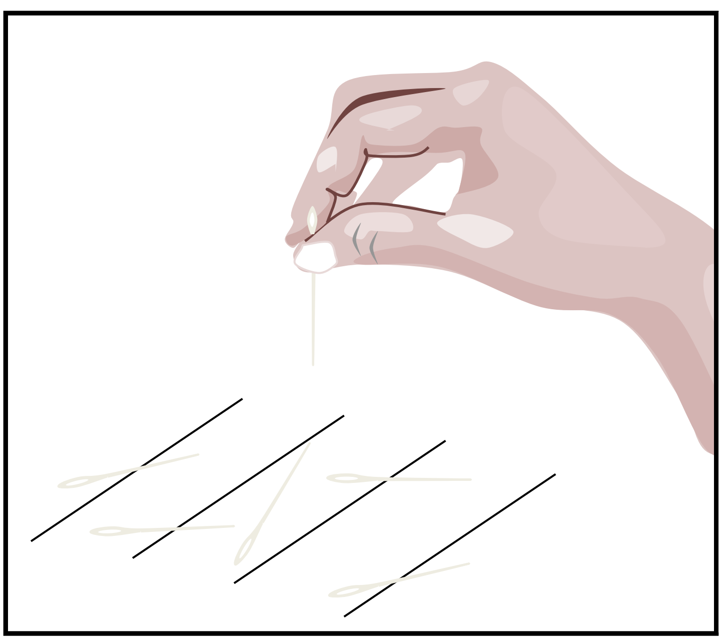
$$f = \frac{2}{d}\frac{2}{\pi}dxd\phi$$

La condición para que la aguja corte una línea es

$$x \le \frac{l}{2}sen(\phi)$$

Por lo tanto la probabilidad total será

$$P = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{l}{2}sen(\phi)} \frac{2}{d}\frac{2}{\pi}dxd\phi = 2l/d\pi$$



De esta manera si contabilizamos con n la cantidad total de agujas que lanzamos y con m la cantidad que cortan la recta, la probabilidad resulta

$$P = \frac{m}{n} = 2l/d\pi$$

, o de otra forma

$$\pi \approx \frac{n}{m}\frac{2l}{d}$$

Definición

Sea una variable aleatoria x, con una función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A}} e^{-\frac{(x-B)^2}{2\,A^2}} \qquad \text{para } -\infty < x < \infty$$

Se denomina **distribución normal o gaussiana**, y tiene las siguientes propiedades:

- $\langle x \rangle = B$
- $\sigma^2 = A$

Definición

Sea una variable aleatoria x, con una función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A}} e^{-\frac{(x-B)^2}{2\,A^2}} \qquad \text{para } -\infty < x < \infty$$

Se denomina **distribución normal o gaussiana**, y tiene las siguientes propiedades:

- $\langle x \rangle = B$
- $\sigma^2 = A$

Ejemplo 2.13

Suponga que las corrientes en una tira de alambre conductor siguen una distribución normal con una media de 10 Ma y una varianza de 4 Ma. ¿Cuál es la probabilidad de que una medición exceda los 13 Ma?.

Solución:

Sea que X denote la corriente (Ma). La probabilidad pedida puede representarse como $P(X > 13)$. Desafortunadamente no hay una forma analítica para encontrar el valor pedido, sin embargo, los siguiente resultados nos permitirán aproximar el resultado.

Arvejas, campanas y enanos

La campana de Gauss empezó a adquirir un estatus icónico cuando, empezó a aparecer en datos empíricos en las ciencias sociales, no tan solo en las matemáticas teóricas. En 1835 Adolphe Quetelet, un belga quien entre otras cosas fue pionero en métodos cuantitativos en sociología, recogió y analizó grandes cantidades de datos de crímenes, la proporción de divorcios, suicidios, altura de los humanos, etc. Variables que nadie esperaba que se ajustaran a una ley matemática, porque sus causas subyacentes eran demasiado complejas e implicaban elecciones humanas. Cuando Quetelet determinó las proporciones de gente con una altura dada, obtuvo la misma forma de curva para muchas otras variables sociales. Quetelet estaba tan impresionado con sus resultados que escribió el libro *Sur l´homme et le développement de ses facultés* (sobre el hombre y el desarrollo de las facultades humanas), publicado en 1835.
El factor decisivo llegó cuando Francis Galton cultivó arvejas. En 1875, distribuyó semillas entre siete amigos. Cada uno recibió 70 semillas. Pero uno recibió semillas muy ligeras, otro unas ligeramente más pesadas, etc. En 1877, midió los pesos de las semillas de la cosecha resultante. Cada grupo está normalmente distribuid, pero el peso medio difería en cada caso, siendo comparable al peso de cada semilla en el grupo original. Cuando combinó los datos para todos los grupos, los resultados de nuevo estaban normalmente distribuidos, pero la varianza era mayor, la campana de Gauss era más ancha. De nuevo, esto sugería que combinando varias curvas de campana, se llegaba a otra campana de Gauss.

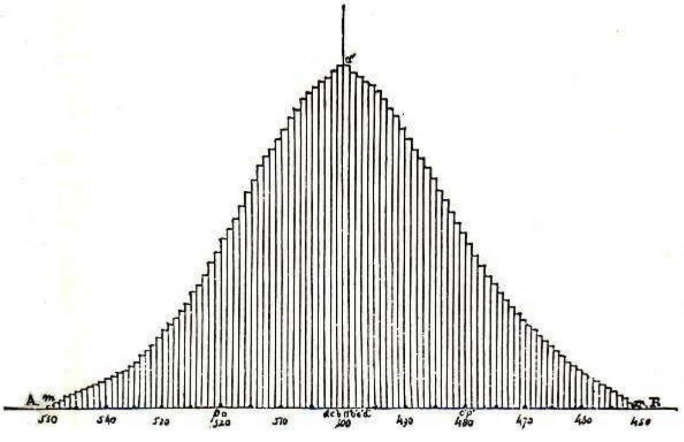


Gráfico realizado por Quetelet de cuánta gente (eje vertical) tiene una altura dada (eje horizontal).

Galton buscó la explicación matemática para esto. Si tomamos dos variables aleatorias normalmente distribuidas, pero con distinta media o varianza, entonces, su suma también será normalmente distribuida, esto es, su media es la suma de las medias, y su varianza es la suma de las dos varianzas. De igual forma se aplica para 3 o más variables normalmente distribuidas.
Este teorema funciona cuando un número pequeño de factores se combinan y cada factor puede multiplicarse por una constante, es decir funciona para una combinación lineal.
Ahora Galton podía ver cómo este resultado se aplicaba a la herencia. Supongamos que la variable aleatoria dada para la altura de un niño es alguna combinación lineal de las variables aleatorias correspondientes para las alturas de sus padres. Y estas siguen una distribución normal. Asumiendo que los factores hereditarios funcionan para la suma, la altura del niño seguirá también una distribución normal. Galton escribió sus ideas en 1889 bajo el título *Natural Inheritance* (Herencia natural). En particular, discutió una idea que llamó regresión. Cuando un progenitor alto y uno bajo tienen un niño, la altura media del niño debería ser intermedia, de hecho, debería ser la media de la altura de los padres. Asimismo, la varianza debería ser el promedio de las varianzas, pero las varianzas de ambos padres son aproximadamente iguales, por lo que no cambia mucho. A medida que pasan las generaciones, la altura media debería «regresar» a un valor fijo, a mitad de camino, mientras que la varianza debería permanecer sin demasiados cambios. De modo que la nítida campana de Gasuss de Quetelet podía sobrevivir de una generación tras otra. Su pico rápidamente se asentaría en un valor fijo, la media total, mientras que su ancho sería igual. Por lo tanto cada generación debería tener la misma diversidad de alturas, a pesar de la regresión a la media. La diversidad se mantendría gracias a individuos raros cuya regresión fracasase y era autosuficiente en una población suficientemente grande.

Extraído de: *17 ecuaciones que cambiaron el mundo*. **Ian Stewart**. Ed. Crítica 2013.

$$P(\langle X\rangle - \sigma < X < \langle X\rangle + \sigma) = 0{,}6827$$
$$P(\langle X\rangle - 2\sigma < X < \langle X\rangle + 2\sigma) = 0{,}9545$$
$$P(\langle X\rangle - 3\sigma < X < \langle X\rangle + 3\sigma) = 0{,}9973$$

Por lo tanto podemos estimar la probabilidad de medir una corriente mayor a 13 Ma
Con un valor de $P(X > 13) = 0{,}006681$.

Teorema del límite central

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$, un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de una distribución con media μ y varianza $\sigma^2 \neq 0$. Entonces si n es suficientemente grande, la variable aleatoria

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Tiene aproximadamente una distribución normal con

- $\mu_{\bar{X}} = \mu$
- ${\sigma^2}_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$

Ejemplo 2.14

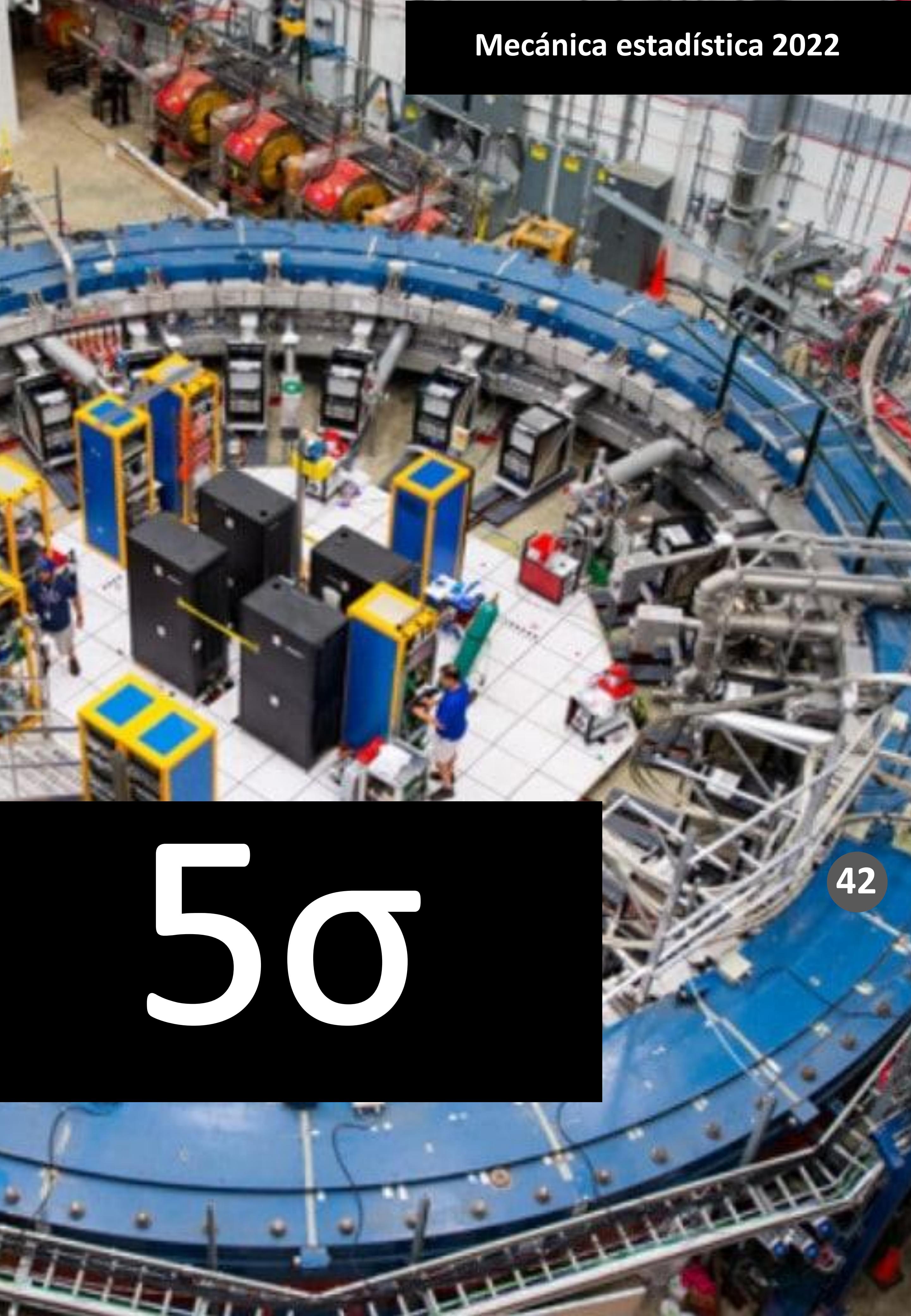
Suponga que una variable aleatoria Xtiene una distribución uniforme continua

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 4 \leq x \leq 6 \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

Encuentre la distribución de la media muetral de una muestra aleatoria de tamaño $n = 40$

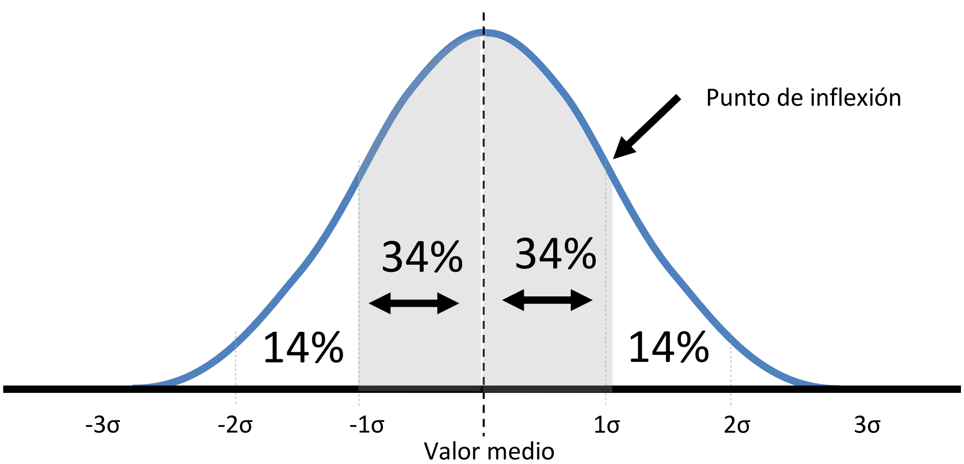
Solución:

La media y la varianza de X son $\langle X\rangle = 5$ y $\sigma^2 = \frac{(6-4)^2}{12} = 1/3$. El teorema del límite central indica que la distribución de X es aproximadamente normal con media $\mu_{\bar{X}} = 5$ y varianza ${\sigma^2}_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{3(40)} = 1/120$.



5σ

En los experimentos de física de partículas hay dos fuentes de desviaciones respecto a las predicciones del modelo estándar, por un lado, los errores debidos a fluctuaciones estadísticas y los errores sistemáticos debidos a que calcular las predicciones por ordenador no se puede hacer de forma exacta, y por otro lado, la presencia de una nueva partícula o de una ley física que hace que la Naturaleza difiera de las predicciones teóricas. Para distinguir ambas posibilidades se utiliza el número de sigmas comparado con la probabilidad de que una fluctuación estadística explique dicho resultado.
En el caso más sencillo podemos considerar una distribución gaussiana de probabilidad. Tomando una con media cero y desviación estándar igual a la unidad, diremos que un dato está desviado más de una sigma de la media si están fuera de la zona sombreada de la figura (su módulo es mayor que la unidad). La probabilidad de una fluctuación estadística sea responsable de señal a una sigma es igual a alrededor del 32%. De manera similar la probabilidad de fluctuaciones a dos, tres, cuatro y cinco sigmas más allá de la media es del 5%, 0,3%, 0,005% y 0,00005%, respectivamente.



Intervalo	Probabilidad
1σ	68,5%
2σ	95,5%
3σ	99,75%
4σ	99,995%
5σ	99,99995%

¿Por qué son tan pequeños los átomos?

Extraído del libro ¿Qué es la vida? Erwin Schrödinger. 1944

Erwin Schrödinger

De entrada diremos que efectivamente son muy pequeños. Cualquier trozo de materia que manejamos en la vida cotidiana tiene un número enorme de ellos. Se han imaginado muchos ejemplos, para familiarizar al público con esta idea, pero ninguno es más impresionante que el empleado por Lord Kelvin: supongamos que pudiéramos marcar las moléculas de un vaso de agua, vertemos entonces el contenido del vaso en el océano y agitamos de forma que las moléculas marcadas se distribuyan uniformemente por los siete mares, si después llenamos un vaso de agua en cualquier parte del océano, encontraremos en él alrededor de un centenar de moléculas marcadas.

El tamaño real de los átomos está entre 1/5000 y 1/2000 de la longitud de onda de la luz amarilla. La comparación es significativa, ya que la longitud de onda indica, aproximadamente, las dimensiones del grano más pequeño observable con el microscopio. De esta manera, se comprueba que un grano de este tipo aun contiene miles de millones de átomos.

Pues bien, ¿por qué son tan pequeños los átomos?

Es evidente que la pregunta es una evasiva porque no se trata, de hecho, del tamaño de los átomos, sino que se refiere al tamaño de los organismos, particularmente a nuestro ser corporal. Por supuesto que el átomo es pequeño, si nos referimos a nuestra unidad cívica de medida, sea la yarda o el metro. Una vez visto que nuestro problema se refiere realmente a la relación de dos longitudes, la pregunta es ¿por qué nuestros cuerpos tiene que ser tan grandes comparados con los átomos?.

De no ser así, si fuéramos organismos tan sensibles, que un solo átomo, o incluso unos pocos, pudieran producir una impresión perceptible en nuestros sentidos, […]Después de todo nuestros sentidos son un cierto tipo de instrumentos. Podemos pensar lo inútiles que resultarían si fuesen excesivamente sensibles.

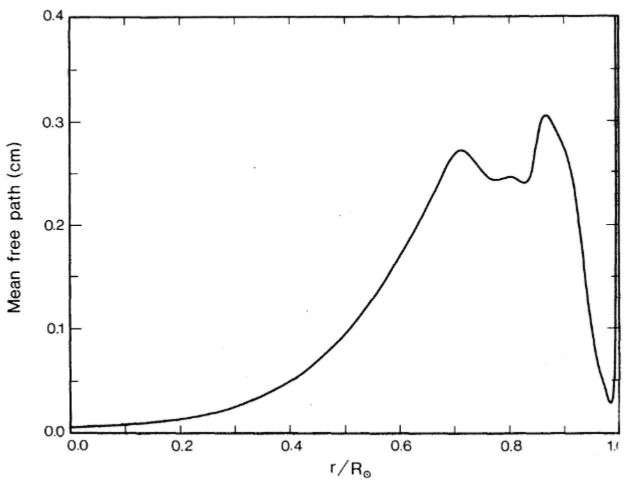
La regla de la $\sqrt{n}$

Dejemos, por ahora, los ejemplos. Para terminar añadiré que, entre todas las leyes físicas y químicas que tiene importancia para los organismos o para sus interacciones con el ambiente, no existe una sola que no hubiera podido tomar como ejemplo.

Añadiré, no obstante, una puntualización cuantitativa muy importante acerca del grado de inexactitud que debemos esperar en cualquier ley física, la llamada ley de la $\sqrt{n}$. La ilustraré primero con un ejemplo sencillo, para luego generalizarla. Si afirmo que un gas determinado, bajo condiciones de presión y temperatura dadas, tiene cierta densidad y si expreso esto diciendo que, en un volumen dado, hay bajo esas condiciones exactamente n moléculas del gas, podemos estar seguros de que si pidiéramos comprobar esta afirmación en un momento dado, encontraríamos que es inexacta siendo su desviación del orden de $\sqrt{n}$. Por lo tanto si n=100 hallaremos una desviación del orden de 10, o sea un error relativo del 10%. Pero si n=1000000 la desviación se encuentra cercana 1000, es decir un error del 0,1%. Simplificando, podemos decir que esta ley estadística es bastante general. Las leyes físicas son inexactas dentro de un probable error relativo del orden $1/\sqrt{n}$, donde n es el número de moléculas que cooperan en la formación de la ley, para dar lugar a esa validez en las regiones de espacio o tiempo, o ambos, que nos interesan en vista de determinadas consideraciones o parar algunos experimentos particulares.
Podemos ver con esto, una vez más, que un organismo debe tener una estructura comparativamente grande para poder beneficiarse de leyes relativamente exactas, tanto para su funcionamiento interior como para las relaciones con el mundo externo. De otra manera, el número de partículas que interviene sería excesivamente pequeño, y la «ley» demasiado inexacta. La condición particularmente exigente es la raíz cuadrada, pues si bien un millón es un número razonablemente grande, una exactitud de 1 sobre 1000 no es nada extraordinario, y menos si algo pretende alcanzar la dignidad de «ley de la Naturaleza».

Walking on the Sun

El Sol es una estrella de tipo-G de la secuencia principal con un diámetro aproximado de $1{,}4 \times 10^9$ m. Se compone de varias capas que constituyen su interior. El núcleo, zona radiante, zona convectiva, fotósfera y corona. Cada una de las capas se caracteriza por su composición química y su densidad. Por ejemplo el núcleo presenta una densidad promedio de 150 grs/cm^3, mientras que en la fotosfera, la densidad disminuye a 2^{-7} grs/cm^3.
Por lo tanto un fotón que viaja desde el interior o centro del Sol tendrá diferentes comportamientos en cada una de las zonas. Si modelamos el transitar del fotón como un caminante al azar , el camino libre medio cambia conforme nos alejamos del centro del sol como se ilustra en la figura.



Para calcular el tiempo de difusión del fotón debemos realizar los siguientes cálculos.
El desplazamiento cuadrático medio en un camino aleatorio de N pasos desiguales l_j $(j = 1,2,..,N)$ es:

$$3\langle r^2\rangle = N\langle l^2\rangle$$

donde

$$\langle l^2\rangle = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} {l_j}^2$$

En el modelo estelar, en cada capa utilizamos un mismo valor de camino medio. El número total de pasos a lo largo del Sol es:

$$N = \sum_{j=1}^{S} n_j$$

donde l_j y n_j y S son el camino libre medio en la capa j, el número de pasos en dicha capa, y el número de capas respectivamente.
El valor medio del cuadrado del camino medio:

$$\langle l^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{S} n_j l_j{}^2$$

Sea f_i la fracción del radio total $r_i = f_i R$ donde R es el radio de la estrella, combinando las ecuaciones, obtenemos:

$$3 f_i{}^2 R^2 = \sum_{j=1}^{i} n_j l_j{}^2$$

$$3 f_{i+1}{}^2 R^2 = \left[\sum_{j=1}^{i} \left(n_j l_j{}^2 \right) + n_{i+1} l_{i+1}{}^2 \right]$$

Despejando el número de pasos en la capa $i + 1$

$$n_{i+1} = 3 \frac{\left(f_{i+1}{}^2 - f_i{}^2 \right) R^2}{l_{i+1}{}^2}$$

El tiempo de difusión del fotón resulta:

$$t_d = \sum_{i=1}^{S} n_{i+1} \left(\frac{l_{i+1}}{c} \right) = 3R^2 \sum_{i=1}^{S} \frac{\left(f_{i+1}{}^2 - f_i{}^2 \right)}{l_{i+1} c} = \frac{1}{lc} \sim 1{,}7x10^5 \text{años}$$

Referencia: Mitalas R. y Sills K. R. On the photon diffusion time scale for the sun. The Astrophysical Journal 401-759. 1992.

Problema 2.34

La probabilidad $W(n)$ de que un evento caracterizado por una probabilidad p, ocurra n veces en N experimentos viene dada por una distribución binomial ,

$$W(n) = \frac{N!}{(N-n)!\,n!} p^n (1-p)^{N-n}$$

•Considere el caso en que $N \to \infty$, y encuentre la distribución de Gauss.
• Considere una situación donde la probabilidad p es pequeña ($\ll 1$) y que solo nos interese el caso en que $n \ll N$, con N muy grande. Utilizando la expresión $\ln(1-p) \cong -p$, demuestre que:

$$(1-p)^{N-n} \cong Exp[-pN]$$
$$\frac{N!}{(N-n)!} \cong N^n$$

Utilizando los resultados anteriores, finalmente demuestre que:

$$W(n) = \frac{\lambda^n}{n!} Exp[-\lambda]$$

Donde $\lambda = Np$ es el número de eventos. La distribución anterior se conoce con el nombre de distribución de Poisson.

Problema 2.35

Un metal es evaporado en el vacío desde un filamento caliente. Los átomos de metal resultantes inciden sobre una placa de cuarzo situada a cierta distancia formando una película metálica. Esta placa de cuarzo se mantiene a baja temperatura de forma que cualquier átomo metálico incidente sobre ella quede fijado sin posibilidad de migración. Puede admitirse que los átomos metálicos tienen la misma probabilidad de chocar con cualquier elemento de área de la placa.
Si se considera un elemento de área de la capa base de tamaño b^2 (siendo b el diámetro del átomo) demostrar que el numero de átomos apilados en esta área tienen que estar distribuidos aproximadamente de acuerdo con la distribución de Poisson.
Supongamos que se evapora suficiente metal para formar una película de espesor medio correspondiente a 6 capas atómicas. Que fracción del área base está sin cubrir por metal? Que fracción está cubierta por capas de 3 y de 6 átomos de espesor?

Gerolamo Cardano,
el más bizarro de los matemáticos

Para conocer un poco sobre los orígenes de la probabilidad como una rama de las matemáticas, debemos remontarnos al siglo XVI y presentar al que probablemente sea el personaje más *bizarro* en la historia de esta ciencia: **Gerolamo Cardano** (1501-1576).

Cardano nació en Pavia, Italia, y falleció en Roma en 1576. Llevo una vida llena de drama y tragedia. Cardano era hijo ilegitimo de un abogado adicto al juego y perdió a su padre muy joven al morir durante una partida de baraja al descubrirse que hacia trampa. Parece que Gerolamo heredó el gusto por el juego, pues financió sus estudios de medicina en la universidad de Pavia jugando a los dados y otros juegos de azar.

Cardano es uno de los pocos matemáticos que escribió una autobiografía que, si bien dudosa en todo su contenido, da una idea de su tormentosa vida.

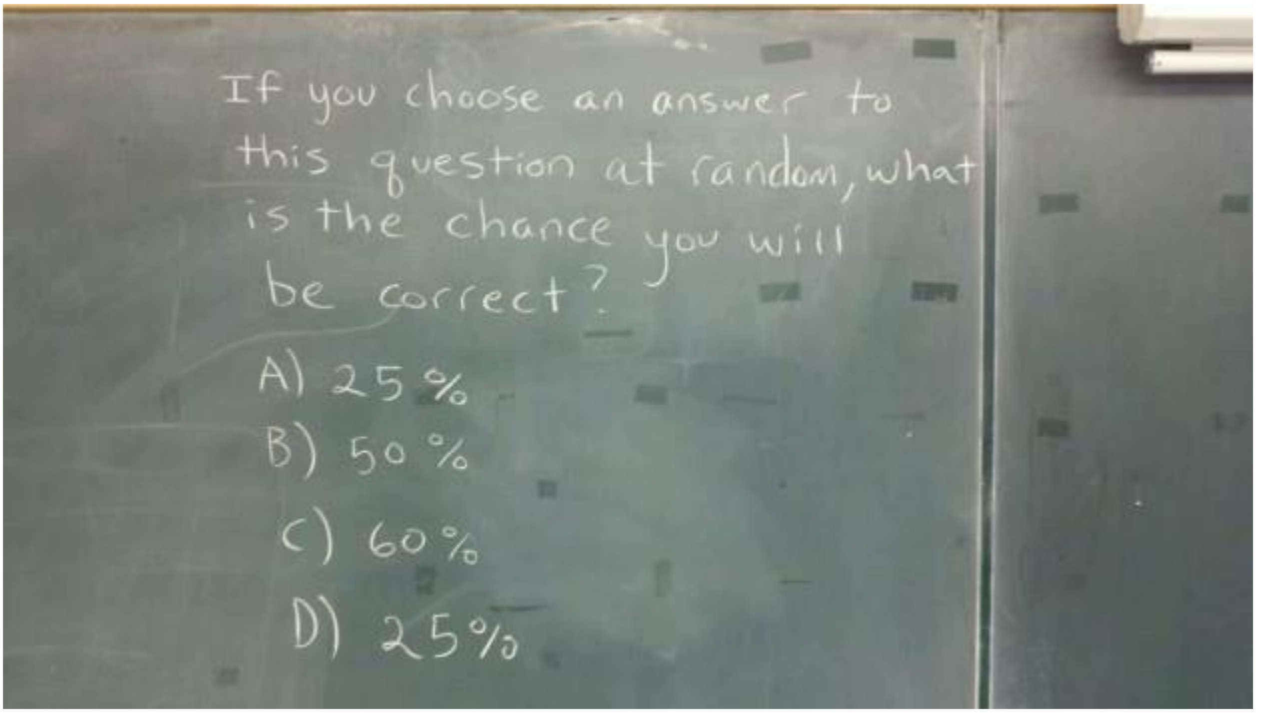
El libro llamado *El libro de mi vida* fue publicado en 1575. En él dice que no fue concebido de manera legítima y que trataron en vano de que su madre abortara usando varias medicinas. Nació medio muerto y para reanimarlo le dieron un baño de vino caliente. A mismo cuenta como tenía violentas palpitaciones, que le salían líquidos de su estómago y pecho y tenía una necesidad tremenda de orinar, casi cuatro litros por día. Tenía temor a las alturas y padeció años de impotencia sexual, que desapareció afortunadamente antes de que se casara. A veces padecía hasta ocho noches seguidas de insomnio. A veces se infligía daño por "el gran placer que se siente después de un fuerte dolor". Por ello se mordía los labios, retorcía los dedos o bien se pinchaba la piel hasta que le empezaban a salir lágrimas.

De salud física y mental precarias, Cardano mostraba, sin embargo, una enorme capacidad para la vida académica. Se formó como médico, pero su personalidad conflictiva pronto hizo que no se le permitiera ejercer su profesión. Como jugador empedernido, una de las principales aportaciones de Cardano a las matemáticas proviene de un vicio al que dedicaba largas horas todos los días y del que nació un admirable escrutinio científico sobre el azar. Su obra *El libro de los juegos de azar* fue publicada póstumamente en 1663, y constituye el primer tratado serio sobre probabilidad.

A esta altura de la guía ya habrán podido determinar que el alumno que falseó los datos es el alumno 2. Si bien los datos del primer alumno presentan secuencias largas con la misma cara de la moneda, esto es de esperar en una secuencia aleatoria. Mientras que el segundo alumno no tiene grandes secuencias repetidas. Si calculamos la probabilidad de ambas secuencias la respuesta es clara, aunque anti-intuitiva. Esto es debido a que los humanos somos muy malos generando eventos aleatorios.

Si no están de acuerdo, pueden consultar al **oráculo de Aaronson**.

Otro ejemplo muy interesante y que nos da idea de lo malo que somos para generar eventos aleatorios es la historia del desarrollo del modo aleatorio del iTunes. Apple tuvo que desarrollar un sistema aleatorio más «inteligente» para iTunes que hiciera que el modo aleatorio fuera MENOS aleatorio pero pareciera más aleatorio a quienes estaban escuchando la música.


If you choose an answer to
this question at random, what
is the chance you will
be correct?
A) 25%
B) 50%
C) 60%
D) 25%