Guía 7

Estadística de Fermi-Dirac

Problema 7.1

Considere un gas cuántico ideal de Fermi a una temperatura T.
- Escriba la probabilidad $p(n)$, en función del número de ocupación <n>.
- Calcule $< (n-< n >^2) >^{1/2}$, grafique la solución.

Problema 7.2

Un gas de Fermi con <N> partículas de spin ½ y masa m, se encuentra confinado en un domino de área A con una temperatura T.
- Calcule la energía de Fermi (ε_F), en función de la densidad.
- El potencial químico en función de T y (ε_F).
- El calor específico para bajas temperaturas.

Problema 7.3

En un gas perfecto de electrones, el número de ocupación se representa con la siguiente expresión

$$< n_i >= \frac{1}{\exp(\varepsilon_i - \mu)\beta + 1}$$

- Obtenga la fórmula con la cual es posible despejar el potencial químico μ.
- Muestre que la expresión anterior se reduce a la expresión obtenida bajo la estadística de Maxwell-Boltzmann, en el límite de $n\lambda^3 \ll 1$, con λ la longitud de onda térmica de Broglie.
- Grafique $< n > (\varepsilon_i)$ para $T = 0$, y $T = \mu/5$.

Problema 7.4

Sea un sistema de N=2.10^{22} electrones en una "caja", de volumen V=1cm^3, considere las paredes como barreras de potencial infinito, calcule
- El calor especifico del gas.
- La susceptibilidad magnética.
- La presión en las paredes del recipiente.
- La energía promedio.

Problema 7.5

Para un gas de fermiones ultrarelativistas, con energía

$$\varepsilon_p = \sqrt{(pc)^2 + m^2c^4} \to pc \; p \to \infty$$

- Verifique que la ecuación de estado del gas es

$$pV = E/3$$

Con E la energía total del gas.
- Pruebe que la entropía del gas es

$$S = -k \sum_i [n_i \ln(n_i) - (1 + n_i)\ln(1 + n_i)]$$

Estrellas Enanas blancas

Las enanas blancas están compuestas por átomos en estado de plasma; como en su núcleo ya no se producen reacciones termonucleares, la estrella no tiene ninguna fuente de energía que equilibre el colapso gravitatorio, por lo que la enana blanca se va comprimiendo sobre sí misma debido a su propio peso. La distancia entre los átomos en el seno de la misma disminuye radicalmente, por lo que los electrones tienen menos espacio para moverse (en otras palabras, la densidad aumenta mucho, hasta órdenes de 106 g/cm^3, varias toneladas por centímetro cúbico). A estas densidades entran en juego el principio de indeterminación de Heisenberg y el principio de exclusión de Pauli para los electrones, los cuales se ven obligados a moverse a muy altas velocidades, generando la llamada presión de degeneración electrónica, que es la que efectivamente se opone al colapso de la estrella. Esta presión de degeneración electrónica es un fenómeno radicalmente diferente de la presión térmica, que es la que generalmente mantiene a las «estrellas normales». Las densidades mencionadas son tan enormes que una masa similar a la del Sol cabría en un volumen como el de la Tierra, y solamente son superadas por las densidades de las estrellas de neutrones y de los agujeros negros. Las enanas blancas emiten solamente energía térmica almacenada, y por ello tienen luminosidades muy débiles.

Las estrellas de masa baja e intermedia (masas menores que 8-10 masas solares), al acabar la fusión del hidrógeno durante su vida en la secuencia principal, se expanden como gigantes rojas, y proceden a fusionar helio en carbono y oxígeno en su núcleo. Si la gigante roja no posee suficiente temperatura como para luego fusionar a su vez el carbono y el oxígeno, su núcleo se comprime por la gravedad y su envoltura es expulsada en una serie de pulsos térmicos durante la fase de gigante en la rama asintótica, produciendo así una nebulosa planetaria que envuelve un remanente estelar: la enana blanca.

El 99% de las enanas blancas está constituido básicamente por carbono y oxígeno, que son los residuos de la fusión del helio. Sin embargo, sobre la superficie hay una capa de hidrógeno y helio prensados y parcialmente degenerados, que forman la atmósfera de la enana blanca. Sólo unas pocas están formadas íntegramente por helio al no haber llegado a quemarlo, o por oxígeno, neón y magnesio, productos del quemado nuclear (fusión) del carbono.

Recién formadas, las enanas blancas poseen temperaturas muy altas, pero al no producir energía, se van enfriando gradualmente. En teoría, las enanas blancas se enfriarán con el tiempo hasta que ya no emitan radiación detectable, para entonces convertirse en enanas negras. Sin embargo, el proceso de enfriamiento es tan lento, que la edad del universo desde el Big Bang es demasiado corta para albergar, en este momento, a una de estas enanas negras. De hecho, las enanas blancas más frías que se conocen poseen temperaturas de varios miles de K. El término enana blanca fue acuñado por Willem Luyten en 1922, y constituyen un excelente ejemplo para emplear la estadística de Fermi-Dirac.

Consideremos el siguiente modelo para una estrella enana blanca:
Una esfera de gas helio, de masa $M \approx 10^{30} kg$, y una densidad de $\rho = 10^{10} kgm^{-3}$ y una temperatura central de $T = 10^7 K$, a dicha temperatura los átomos de Helio se encuentran completamente ionizados.
Comencemos por calcular la temperatura de Fermi.
Cada átomo de helio completamente ionizado, se constituye de 2 electrones y 4 nucleones. El núcleo puede ser tratado de manera no relativista, si la energía cinética es mucho menor a la energía térmica $kT \approx 1keV$, que es muy pequeña comparada con la energía en reposo $m_{He}c^2 \approx 4GeV$, de igual manera para los electrones $m_e c^2 \approx 511keV$.
La densidad de electrones en una estrella blanca es:

$$n = \frac{N}{V} \approx \frac{M/2m_n}{M/\rho} \approx \frac{\rho}{2m_n} \approx 3x10^{36} \frac{electrones}{m^3} \approx 3x10^{-9} \frac{electrons}{fm^3}$$

Con dicha densidad, podemos calcular el momento de Fermi de los electrones,

$$p_F = \left(\frac{3n}{4\pi g}\right)^{1/3} h \approx 5x10^{-22} \frac{kgm}{s} \approx 0{,}9 \frac{MeV}{c}$$

Por lo tanto, la energía de Fermi resulta $\epsilon_F \approx 0{,}5MeV$. Comparemos la energía de Fermi obtenida con La energía térmica $kT \approx 1KeV$, resulta que $\mathrm{k}T \ll \epsilon_F$, por lo tanto, el gas de electrones es considerado frio, en comparación con la temperatura de Fermi.
Podemos estimar el radio de una estrella enana blanca, considerando que la presión generada por los electrones se encuentra en equilibrio con la presión generada por la fuerza gravitatoria. Para ello Consideremos al gas de electrones confinado en un esfera de radio R, por lo tanto

$$dE_p = -pdV = -p(R)4\pi R^2 dR$$

De igual manera para la fuerza gravitatoria

$$dE_g = \frac{dE_g(R)}{dR} dR = \alpha \frac{GM^2}{R^2} dR$$

Donde $E_g(R) = -\alpha \frac{GM^2}{R}$ con $\alpha \approx 1$.
Cuando el sistema se encuentra en el equilibrio termodinámico $dF = 0$, podemos expresar

$$dF = dE_p + dE_g = 0 = \alpha \frac{GM^2}{R^2} - p(R)4\pi R^2 dR$$

Donde $F = E - TS$, es la energía libre y en este caso se ha realizado la aproximación $T = 0$.
Finalmente obtenemos

$$p(R) = \alpha \frac{GM^2}{4\pi R^4}$$

Si reemplazamos la expresión de la presión para un gas de Fermi, y la expresión del momento de Fermi Obtenemos

$$R \approx \frac{3(9\pi)^{2/3}}{40\alpha} \left(\frac{\hbar c}{Gm_n}\right) \left(\frac{\hbar c}{m_e c^2}\right) \left(\frac{m_n}{M}\right)^{1/3}$$

Para mayor claridad, podemos reescribir la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$R \approx \frac{9\pi^{1/3}}{2}\frac{\hbar c}{m_e c^2}\left(\frac{M}{m_n}\right)^{1/3}\left(1-\left(\frac{M}{M_0}\right)^{3/2}\right)^{1/2}$$

Con $M_0 = \frac{9}{64}\left(\frac{3\pi}{\alpha^3}\right)^{1/2}\left(\frac{\hbar c}{Gm^2}\right)^{3/2} m_n$.

El parámetro M_0, se denomina *límite de Chandrasekhar*.

Referencias:

Max Camenzind . Compact Objects in Astrophysics: White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes. Springer-Verlag Berlin and Hei (2005).

Problema 7.6

Calcule la primera corrección cuántica a la ecuación de estado clásica de un gas ideal, de acuerdo a la expansión del virial:

$$\frac{PV}{NkT} = 1 + B_2 v^{-1} + \cdots$$

Con v el volumen específico,

- Para un gas de bosones.
- Para un gas de fermiones.
- Discuta la diferencia de signo de los coeficientes B_2^{BE} y B_2^{FD}.

Problema 7.7

Sea $P^{BE}(T, V, \mu)$ y $P^{BE}(T, V, \mu)$ las presiones de un gas ideal no relativista de bosones y fermiones respectivamente. Determine los coeficientes a_k de la siguiente expresión.

$$P^{BE}(T, V, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P^{FD}(T, V, \mu)$$

Problema 7.8

Considere un sistema formado por una caja dividida por una pared. Cada lado de la caja contiene un gas de Fermi de partículas con spin ½ y 3/2 respectivamente. Si se retira la pared divisoria, encuentre la densidad cuando el sistema ha alcanzado el equilibrio, considere una temperatura de T=0K.

Problema 7.9

Un gas de Fermi altamente degenerado y spin =1/2, con un número promedio de electrones no interactuantes <n>, es confinado en una superficie circular de radio R. La energía de cada partícula es

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + \alpha r$$

Con $\alpha > 0$.

Calcule la energía de Fermi (ε_F), y la energía promedio <E>, en los casos

- $\alpha R \ll \varepsilon_F$
- $\alpha R \gg \varepsilon_F$

Problema 7.10

• Calcule la magnitud del vector de onda de Fermi para un sistema de $4{,}2.10^{21}$ electrones confinados en $1cm^3$.
• Calcule la energía de Fermi.
• Si se reemplazan los electrones por neutrones, calcule nuevamente los incisos anteriores.

Problema 7.11

Los electrones en un sólido metálico pueden ser considerados como un gas tridimensional de electrones libres.
• Considere el gas de electrones confinados en una caja de lado L, calcule los valores de longitud de onda k, dibuje la esfera de Fermi en el espacio- k.
• Obtenga el valor máximo que puede tener k para un sistema de N electrones y calcule la energía de Fermi para T=0K.
• C alcule el calor específico del sólido y muestre que es proporcional a la temperatura T.

Problema 7.12

Considere el modelo del núcleo atómico como un gas de Fermi. Excepto por el principio de exclusión de Pauli, los nucleones (neutrones y protones) se mueven con libertad en la esfera de volumen V (núcleo).Considere un número de protones A y un número de neutrones Z, considere A=Z=N. Calcule la energía promedio por nucleón $\langle E\rangle/N$ con este modelo.