Nombre: Mecánica Estadística 2022

3 de mayo de 2022

Primer parcial

1- Considere un sistema de N partículas con de 3 niveles energía posibles, $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = \epsilon \ y \ \varepsilon_3 = 10\epsilon$.

a- Obtenga la relación entre la energía E del sistema y la temperatura T, utilizando un desarrollo microcanónico o canónico, y explique el fundamento de su elección.

b- Muestre que a baja temperatura, solo los niveles inferiores están ocupados.

c- ¿Cuál es el máximo porcentaje de ocupación posible del nivel 3?

2- En 1905 Abert Einstein, publicó un artículo, "Sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz" donde analizaba el espectro de emisión de un cuerpo negro. En particular se centró en la zona de frecuencias altas, donde el comportamiento se aleja del comportamiento "clásico".
En este régimen, la fórmula de Planck puede aproximarse con la fórmula de Wien.
Einstein calculó la entropía:

$$S = -\frac{k_B E}{h\nu}\left[ln\frac{c^3 E}{8\pi h V \nu^3 d\nu} - 1\right]$$

Donde E es la densidad de energía, $E = uVd\nu$, ν la frecuencia y V el volumen.
A continuación calculó $\Delta S = S - S_o = S(V) - S(V_0)$ y lo comparó con la expresión de un gas ideal para descubrir que la radiación estaba formada por $n = E/h\nu$ partículas independientes o cuantos.

a- Obtenga una expresión de la entropía de un gas ideal y justifique el razonamiento de Einstein.

b- Lo siguiente que realiza en el artículo es el cálculo de la energía media de las partículas, ¿Qué valor encontró?

3- Considere las siguientes expresiones:

$$c_v = -\frac{1}{k_B T}\langle(E - \langle E\rangle)^2\rangle$$

$$c_v = T\langle(E - \langle E\rangle)^2\rangle$$

$$c_v = \frac{1}{k_B T^2}\langle(E - \langle E\rangle)^2\rangle$$

a- Una de las expresiones anteriores es correcta, ¿Cuál? ¿por qué?

b- Demuestre la expresión elegida.

c- En particular para un gas ideal, demuestre que:

$$\frac{\sigma_E}{\langle E \rangle} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$

4- Considere un recipiente cilíndrico de altura L y área A, el cual contiene un gas ideal de partículas de masa m. Sobre el sistema actúa una aceleración gravitatoria g, en la dirección axial.

a- Calcule la energía media del gas contenido en el recipiente.

b- Calcule el calor específico del gas y demuestre que verifica:

$$T \to 0 \quad C_v = \frac{5}{2} k_B$$
$$T \to \infty \; C_v = \frac{3}{2} k_B$$

, justifique este resultado.

5- La energía de cada nivel de un rotor rígido tridimensional con momento de inercia I es:

$$E_{J,M} = \hbar^2 J(J+1)/2I$$

Con $J = 0,1,2,\dots$ y $M = -J, -J+1, \dots, J$

Considere un sistema de N rotores.

a- Obtenga una expresión para la función partición.

b- Obtenga una expresión para la energía media del sistema.

c- Bajo simplificaciones adecuadas, las expresiones anteriores se pueden evaluar en los límites de altas y bajas temperaturas, obtenga la expresión del calor específico en estos límites y justifique su procedimiento.