

## Tarefa 4

Hernane Braga Pereira - 2014112627

Guilherme Ximenes C. Dias - 2012022205

### 1. Exercício 1

Para este exercício, é pedido que se encontre a função de transferência de um sistema através de dados coletados de um sistema dinâmico simulado arquivo *dados\_tarefa4.txt*. Deseja-se identificar um modelo ARX (equação de diferenças linear) para este sistema, seguindo as etapas de: pré-processamento, seleção de estrutura, estimação de parâmetros e validação.

#### a) Pré-processamento

A partir do plot dos dados de entrada e saída, presentes na figura 1, percebe-se um comportamento de saída oscilatório, além de duas amplitudes diferentes no sistema, pode-se dizer que este sistema é de pelo menos 2ª ordem:

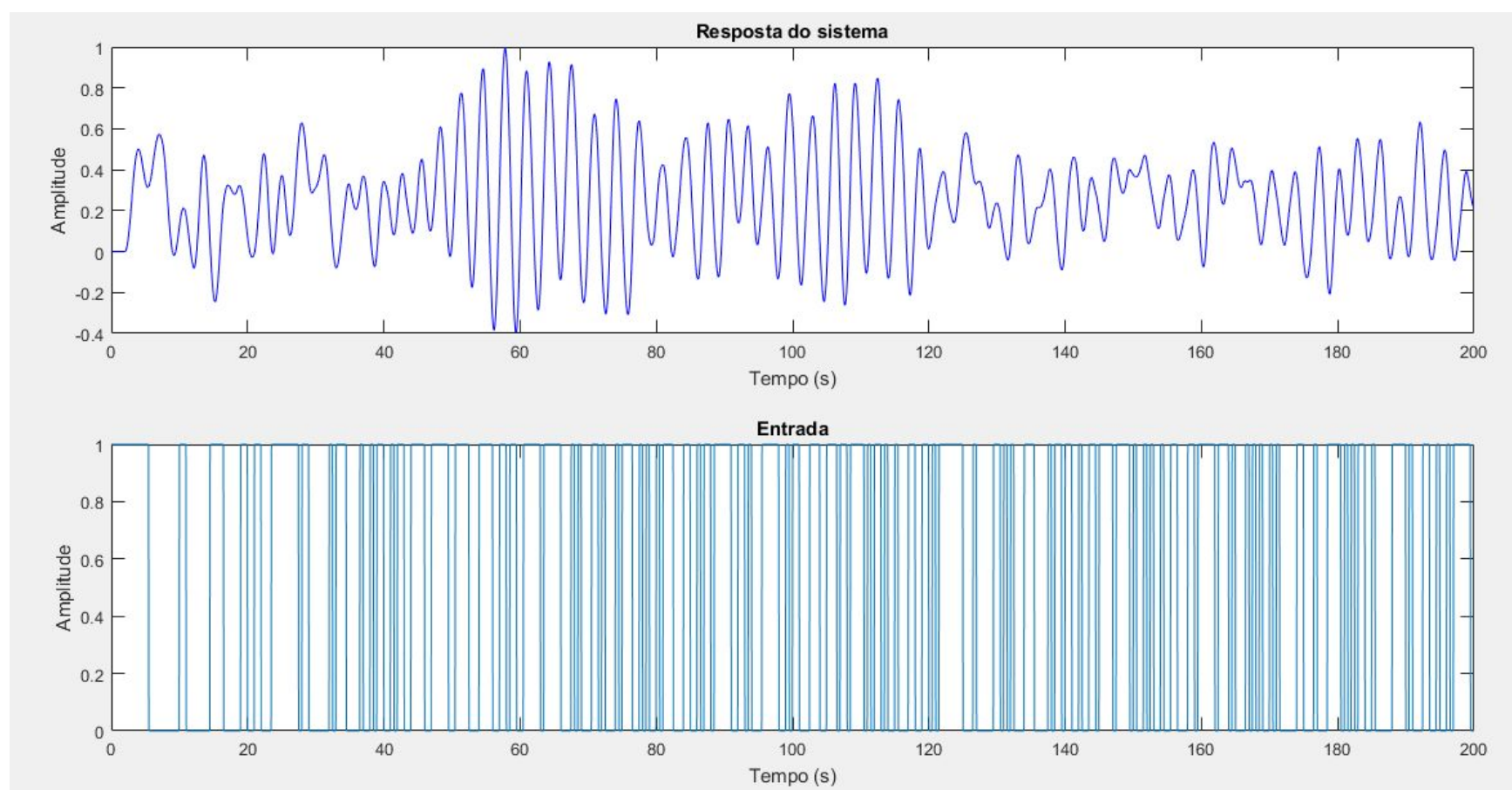
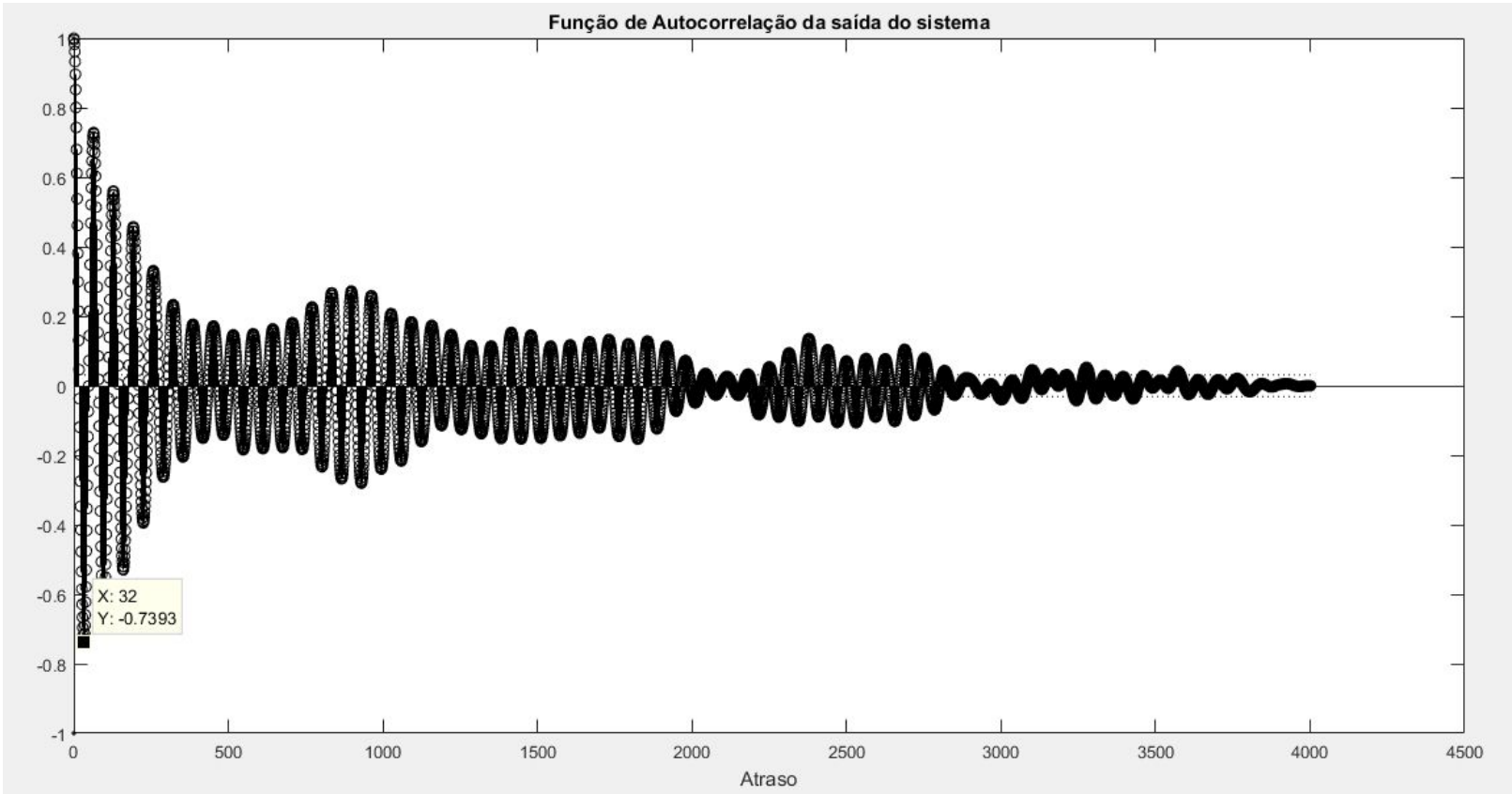


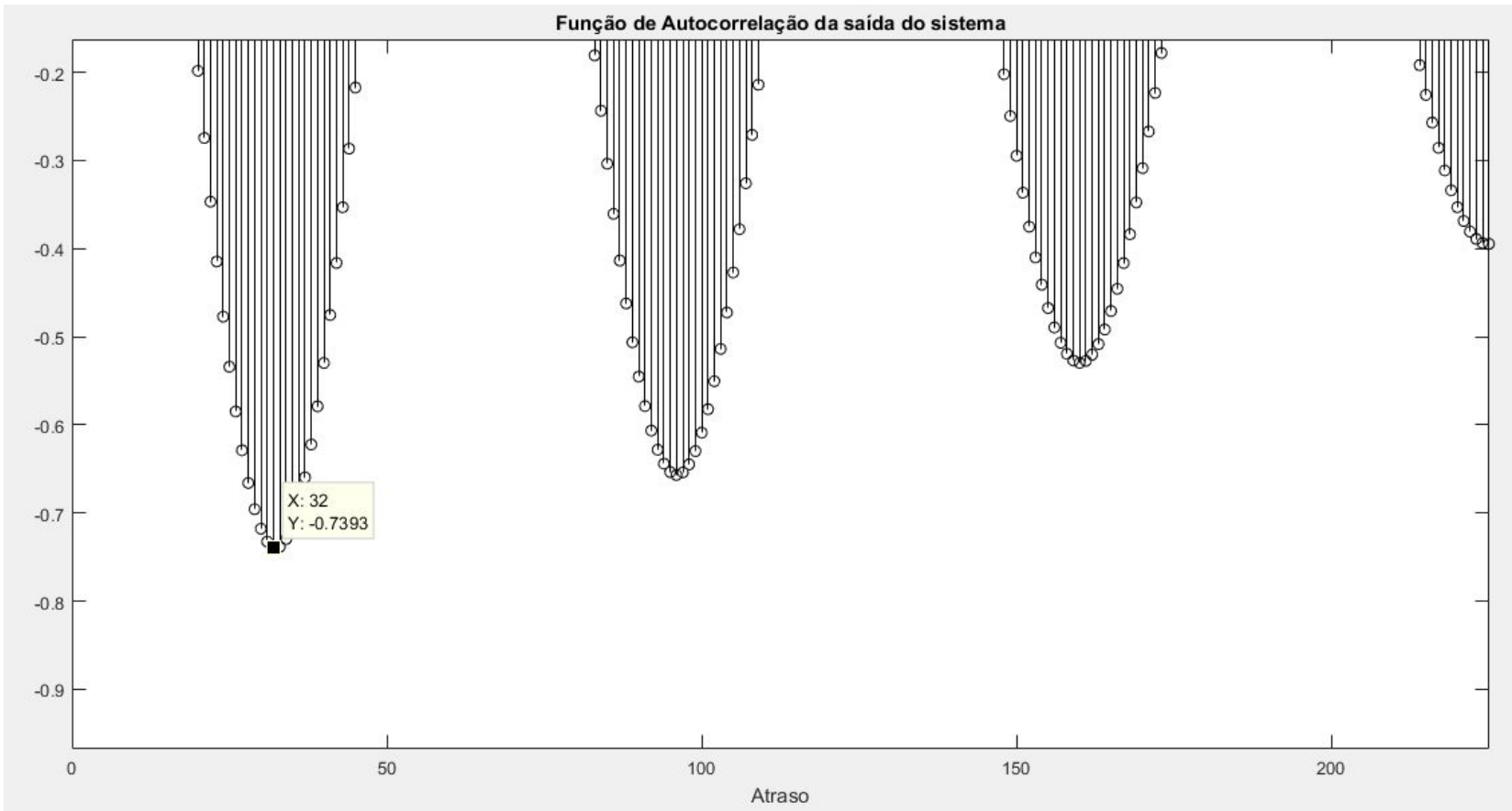
Figura 1 - Plot de dados de entrada e saída

Escolha de um novo tempo de amostragem T para identificação do sistema:

Observa-se na figura 2, que o primeiro mínimo da função de autocorrelação após o zero ocorre em  $x = 32$ . Isto indica um sinal de entrada superamostrado e, de acordo com o teorema da seção 12.2.4 [1], o primeiro mínimo deveria ocorrer entre o tempo 10 e 20 em vez do tempo  $x = 32$ . Então, deve-se decimar o sinal para que ele fique dentro da faixa estipulada e, para isso, utilizou-se fator 2, isto é, escolhemos 1 a cada 2 amostras iniciais. Isto pode ser verificado na figura 3 em que o primeiro mínimo aparece em  $x = 16$ , respeitando, assim, o teorema supracitado.

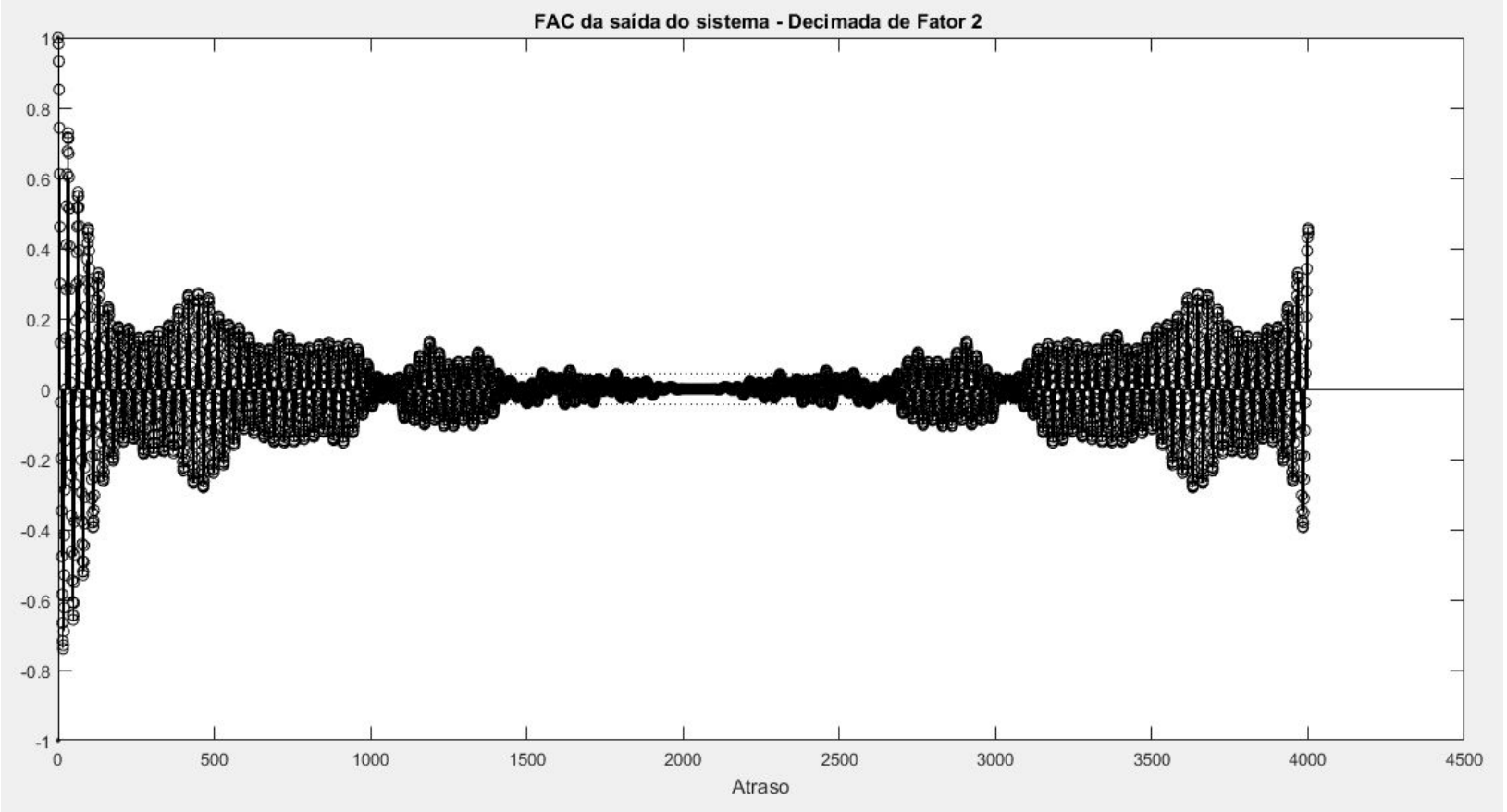


(a)

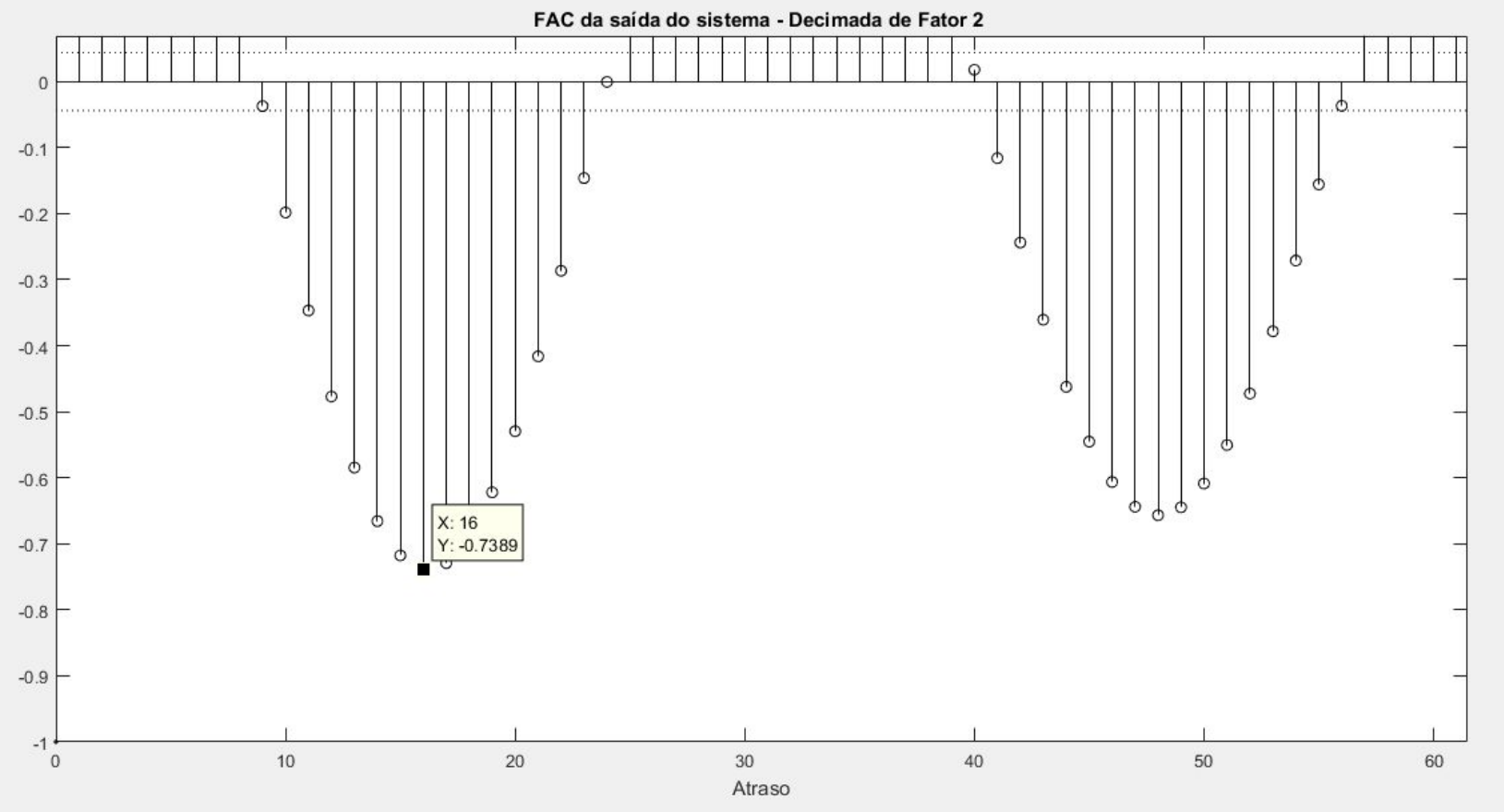


(b)

Figura 2 - (a) Função de autocorrelação de saída do sistema, (b) primeiro mínimo da função de autocorrelação da saída do sistema

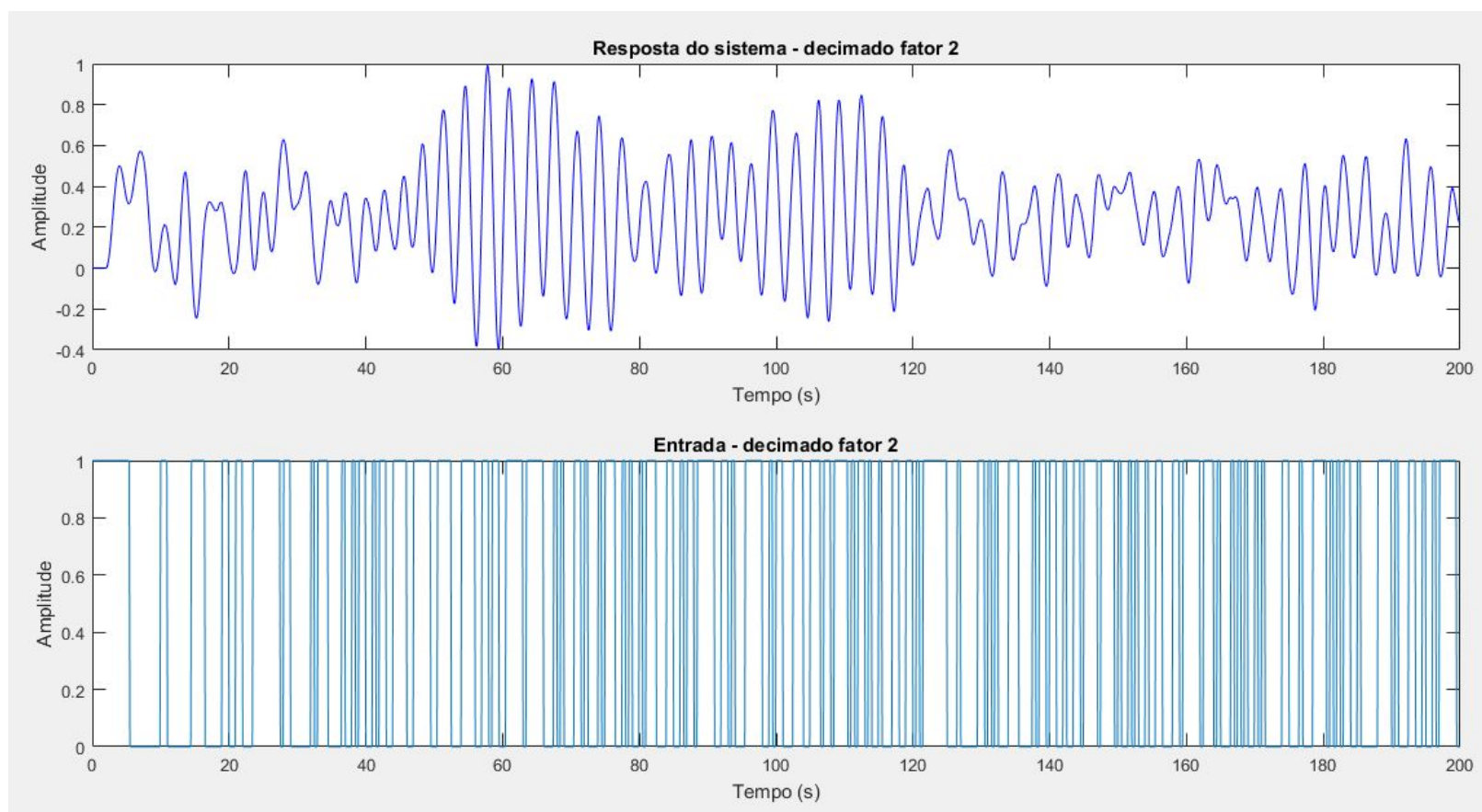


(a)



(b)

Figura 3 - Para o sinal decimado: (a) função de autocorrelação de saída do sistema, (b) primeiro mínimo da função de autocorrelação da saída do sistema

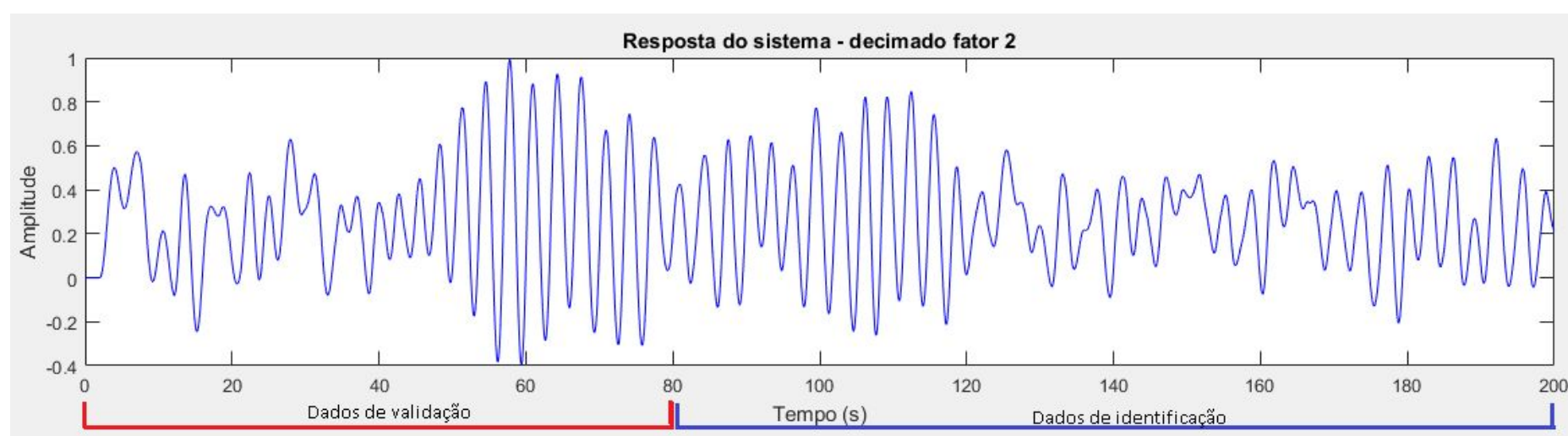


**Figura 4 - Plot de dados de entrada e saída para sistema amostrado com novo  $T_s$**

Ao comparar a figura 1 e a figura 4 observa-se que a resposta do sistema se mantém a mesma, ou seja, conforme já afirmado, o novo tempo de amostragem  $T_s$  garante características fundamentais com menor quantidade de amostras.

#### **Divisão dos dados:**

Para definir os melhores dados para identificação e validação é importante observar as características de resposta do sistema a fim de definir um grupo de amostras que seja capaz de representá-lo dinamicamente, isto é, os dados de identificação devem conter a maior quantidade possível de padrões de comportamento. Portanto, decidiu-se escolher para os dados de validação as amostras entre o tempo  $t = 0s$  até  $t = 80s$  e para os dados de identificação, as amostras a partir do tempo  $t > 80s$ .



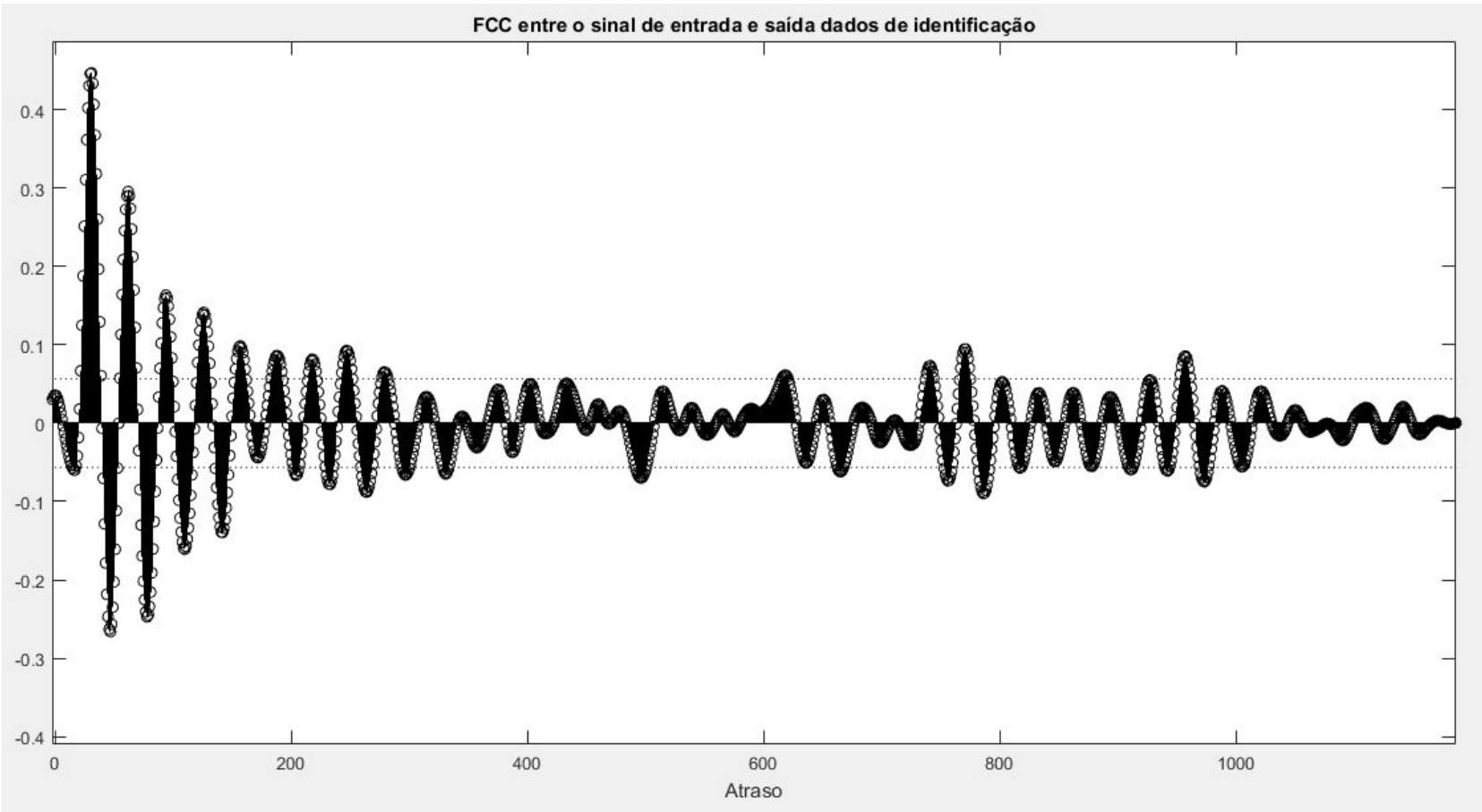
**Figura 5 - Dados de identificação à esquerda e de validação à direita**

Conforme observado na figura 5, os dados de identificação apresentam aspectos dinâmicos suficientes para permitir a construção de um modelo com um potencial de generalização. Para tanto, as amostras até  $t = 80s$  serão capazes de validar o modelo por também possuir o padrão de comportamento do sistema, onde são evidenciadas as partes do sinal com o padrões de amplitudes maiores e menores.

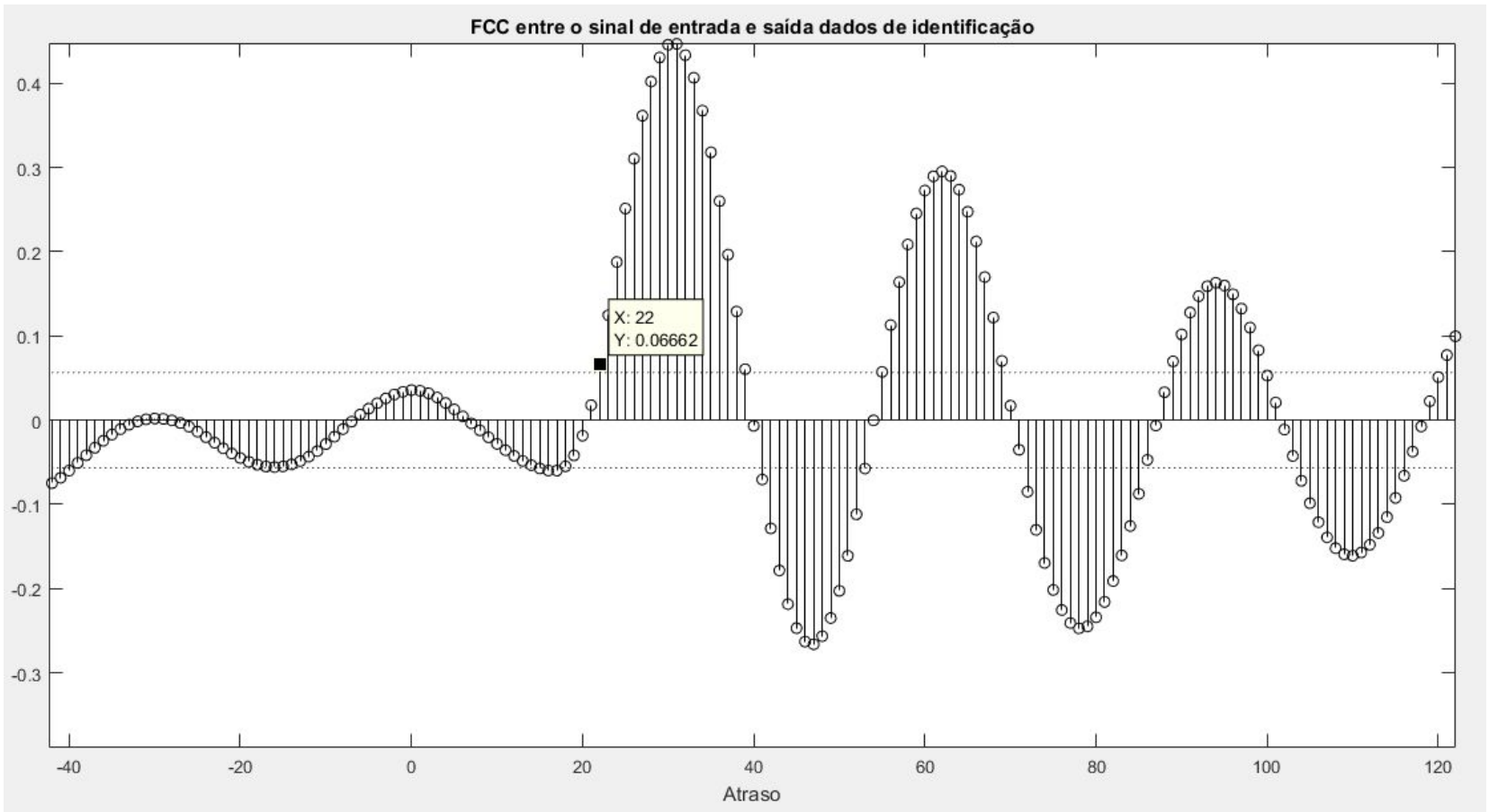


Avaliando se os dados  $u(k)$  e  $y(k)$  dos dados de identificação estão suficientemente correlacionados:

Observa-se na figura 6 (a) que os dados de entrada  $u(k)$  de identificação estão sim suficientemente correlacionados com os valores de saída, por outro lado, como pode ser observado na figura 6 (b), é importante demonstrar que existe um atraso puro de tempo na relação entre a resposta do sistema e o sinal de entrada, portanto este atraso deverá ser inserido no modelo.



(a)



(b)

Figura 6 - (a) Função de correlação entre os dados de identificação de entrada e saída; (b) Identificação de atraso puro de tempo no tempo  $x = 22$ .

## b) Seleção de estrutura:

Para identificar qual a ordem do modelo ARX utilizar, foi empregado o Critério de Informação de Akaike comparado com o Critério de Informação Bayesiano. De acordo com [1] o critério de Akaike (AIC) e o de critério de Bayes podem ser definidos de acordo com as equações [1] e [2]:

$$AIC(n_{\theta}) = N \ln(\sigma_{\text{erro}}^2(n_{\theta})) + 2n_{\theta}$$

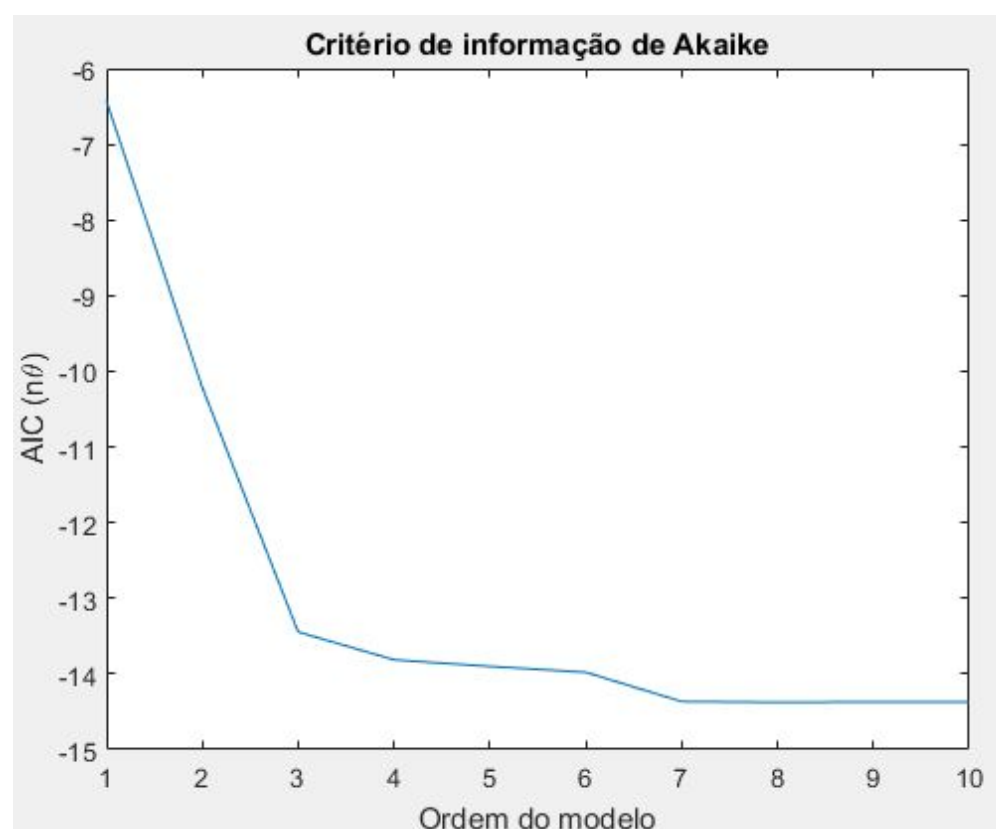
**Equação 1. Critério de informação de Akaike**

$$BIC(n_{\theta}) = N \ln(\sigma_{\text{erro}}^2(n_{\theta})) + n_{\theta} \ln(N)$$

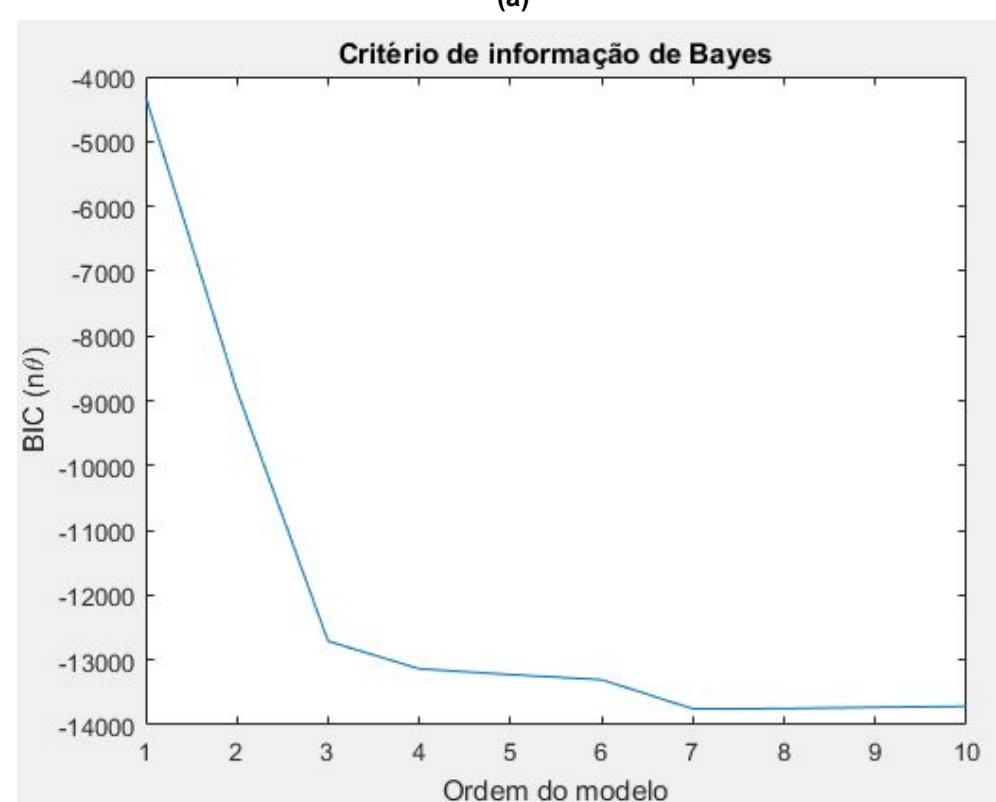
**Equação 2. Critério de informação de Bayes**

Onde N é o número de dados,  $\sigma_{\text{erro}}^2(n_{\theta})$  é a variância do erro de modelagem e  $n_{\theta}$  é o número de parâmetros do modelo.

Como pode ser observado na figura 7, ambos os critérios possuem seu primeiro mínimo no modelo de ordem 3, indicando que o modelo a ser usado deva ser de terceira ordem. Tal escolha é embasada na seção 12.3.1 do livro-texto [1], onde o autor informa que uma das formas de se escolher a ordem de um modelo linear é observando no gráfico do critério de Akaike onde ocorre o primeiro mínimo, ou onde a função evidenciar um “joelho”.



(a)



(b)

**Figura 7 - Determinação de ordem do modelo ARX**  
(a) utilizando o Critério de Informação de Akaike, (b) e utilizando o Critério de Informação Bayesiano

c) Estimação de parâmetros:

Para estimar os parâmetros do modelo utilizou-se o método de Mínimos Quadrados que, como demonstrado nas figuras 8 e 9, encontrou os parâmetros para uma função de transferência de ordem 3.

```
params =  
  
2.8920  
-2.8263  
0.9324  
-0.0022  
0.0006  
0.0026
```

Figura 8 - Parâmetros encontrados à partir do método de mínimos quadrados

```
H =  
  
0.002598 z^2 + 0.0005852 z - 0.00222  
z^(-20) * -----  
z^3 - 2.892 z^2 + 2.826 z - 0.9324
```

Figura 9 - Função de transferência encontrada a partir do estimador de mínimos quadrados

d) Validação:

Após todo o trabalho para obter um modelo, é importante responder às seguintes perguntas: o modelo obtido serve? Ele é suficientemente bom? Para tanto, deseja-se saber se o modelo é suficiente para explicar um outro conjunto de dados observado do mesmo sistema, isto é, as amostras isoladas como “dados de validação” na etapa de “pré-processamento” serão utilizadas para validar a “capacidade de generalização” do modelo obtido.

(i) Simulação um passo à frente

Também conhecida como “predição de um passo à frente”, é uma simulação comumente utilizada a fim de validar modelos, porém, ela possui baixa confiabilidade uma vez que o erro calculado é reiniciado a cada passo e isso faz com que “modelos ruins” apresentem erros de um passo à frente pequenos também.

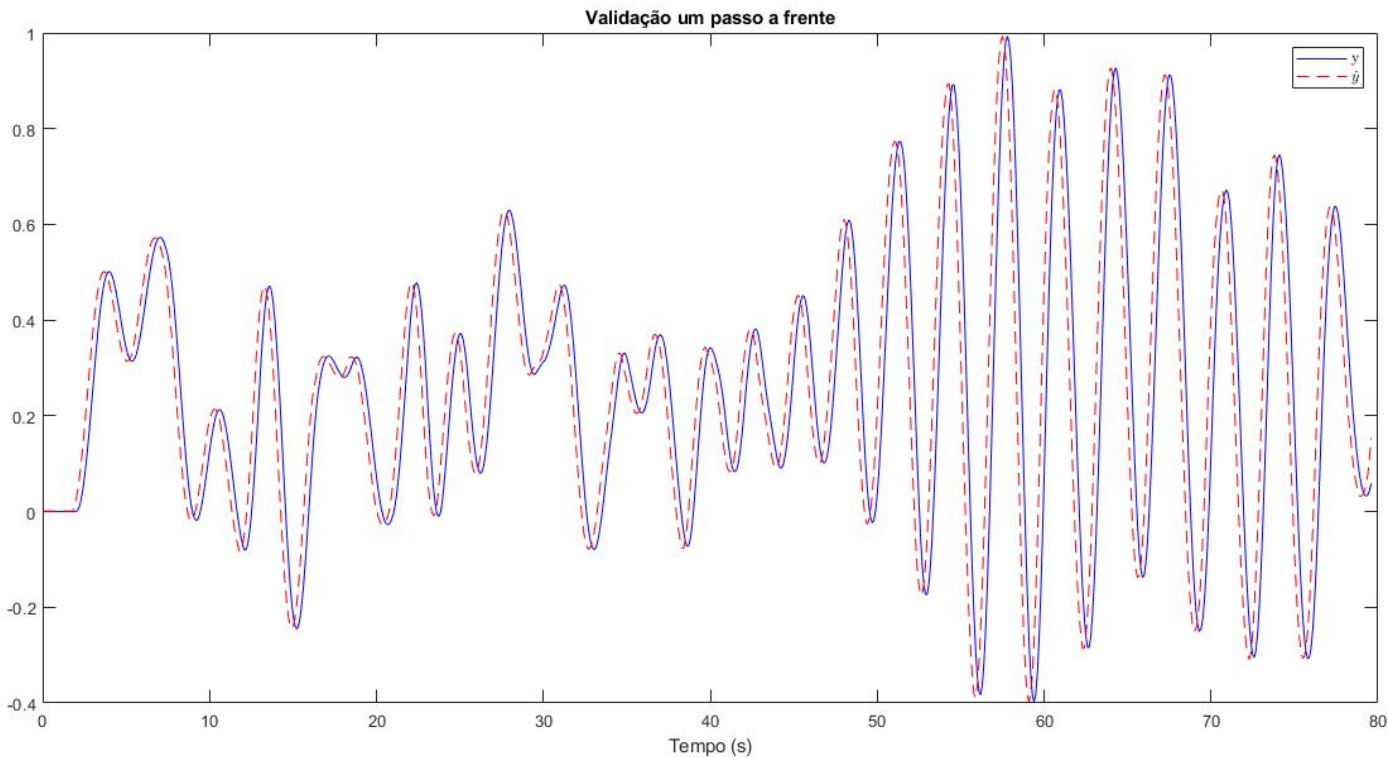
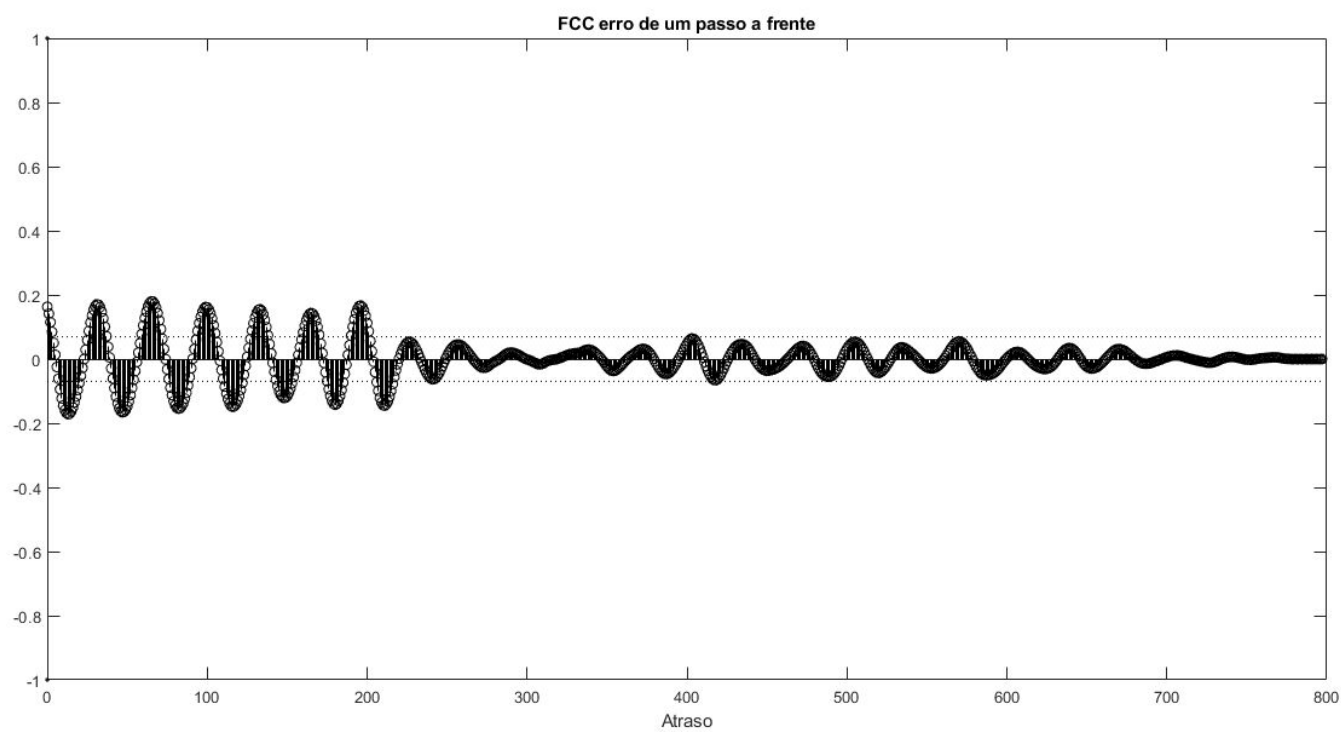


Figura 10 - Simulação de um passo a frente do modelo com os dados de validação

Como é observado na figura 10, o modelo em vermelho segue o mesmo comportamento dinâmico que o sistema original em azul, comprovando o princípio da simulação de um passo a frente de não acumular erro, devido ao uso dos dados de medição. A partir deste teste encontrou-se um índice RMSE de 0.5331 conforme figura 11, que é um valor considerado pequeno, para validações de um passo à frente.

```
RMSE simulacao 1 passo a frente  
0.5331
```

Figura 11 - Índice RMSE para simulação 1 passo à frente



**Figura 12 - Resíduos para simulação de um passo à frente**

A figura 12 apresenta a função de correlação cruzada entre a entrada dos dados de validação e o erro nos resíduos do modelo. Percebe-se que há baixa correlação entre ambos, pois apesar de haverem picos em 0.2.

## (ii) Simulação livre

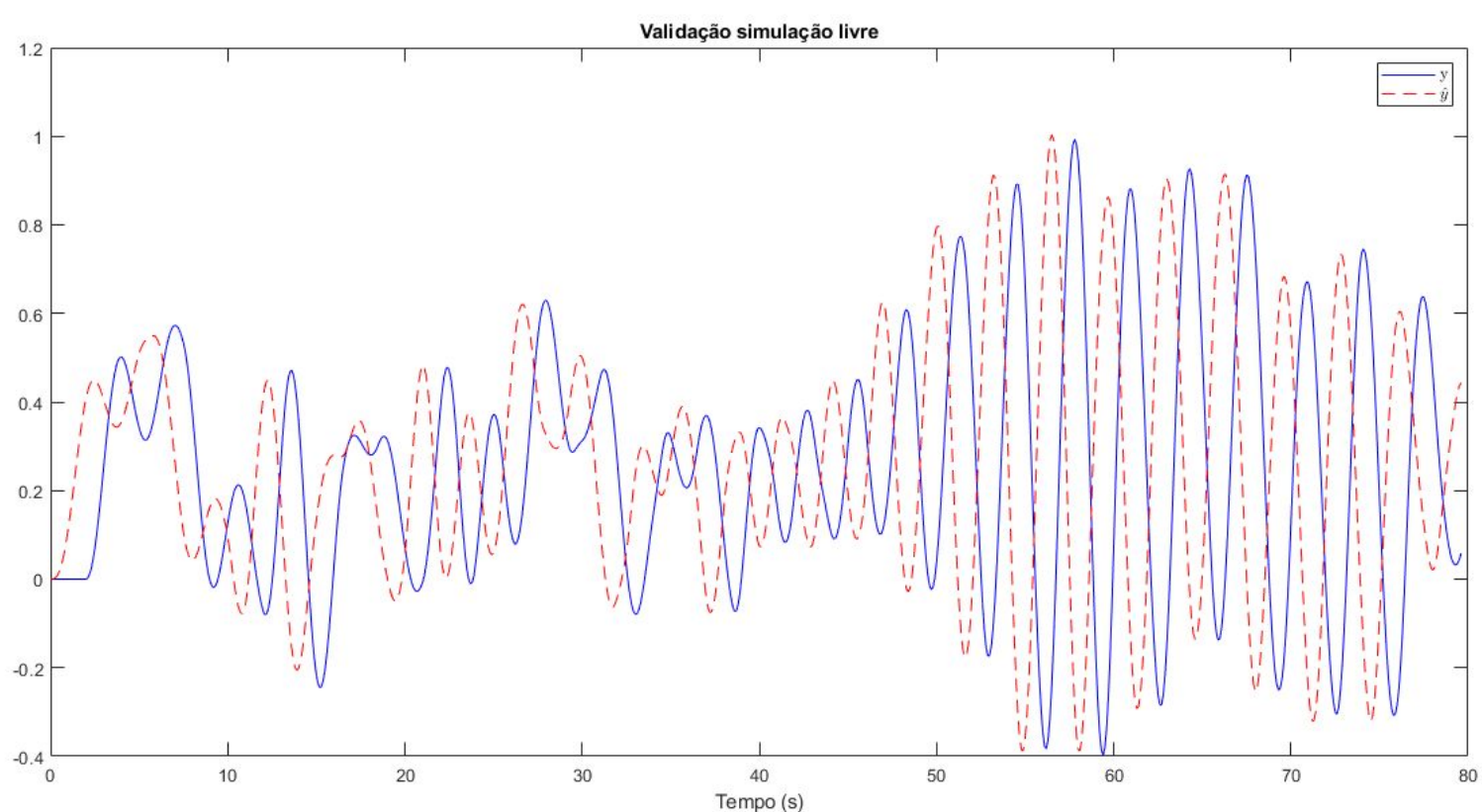
A simulação livre, diferente da simulação de um passo à frente, acumula erro ao longo das iterações uma vez que, após inicializada, são calculados os próximos passos considerando os passos anteriores que foram estimados.

Para efetuar a simulação, é necessário inicializar o modelo com os valores medidos. Na equação 3, inicializa-se o modelo com os valores medidos  $y(1)$  e  $y(2)$  e durante próximas iterações, o modelo passará a usar os valores preditos da variável de saída.

$$\hat{y}(3) = \psi_{yu}^T(k-1)\hat{\theta} = [y(2)y(1)u(2)u(1)]\hat{\theta}$$

**Equação 3. Inicialização da validação livre**

Este método de validação, ao contrário do modelo de passo a frente, é uma maneira razoável de testar se o modelo consegue generalizar o comportamento do sistema.



**Figura 13 - Simulação livre do modelo com os dados de validação**



RMSE simulacao livre  
1.7581

Figura 14 - Índice RMSE para simulação livre

Pode-se inferir a partir da figura 13 que o modelo construído possui capacidade de generalização, uma vez que este se adaptou com fidelidade aos dados de validação. Para esse modelo, o índice RMSE é 1.7581 conforme figura 14, isto é, um erro consideravelmente baixo de acordo com a seção 13.2 de [1], em que há a seguinte afirmação:

“Assim, se o valor do índice RMSE de um determinado modelo for próximo de um, seu desempenho em predição não é significativamente melhor que o preditor trivial e deve-se desconfiar de que tal modelo tenha incorporado informação dinâmica subjacente aos dados.”

Pode-se dizer que o é satisfatório, conforme a figura 13 ele aproxima, visualmente, muito bem os dados de validação.

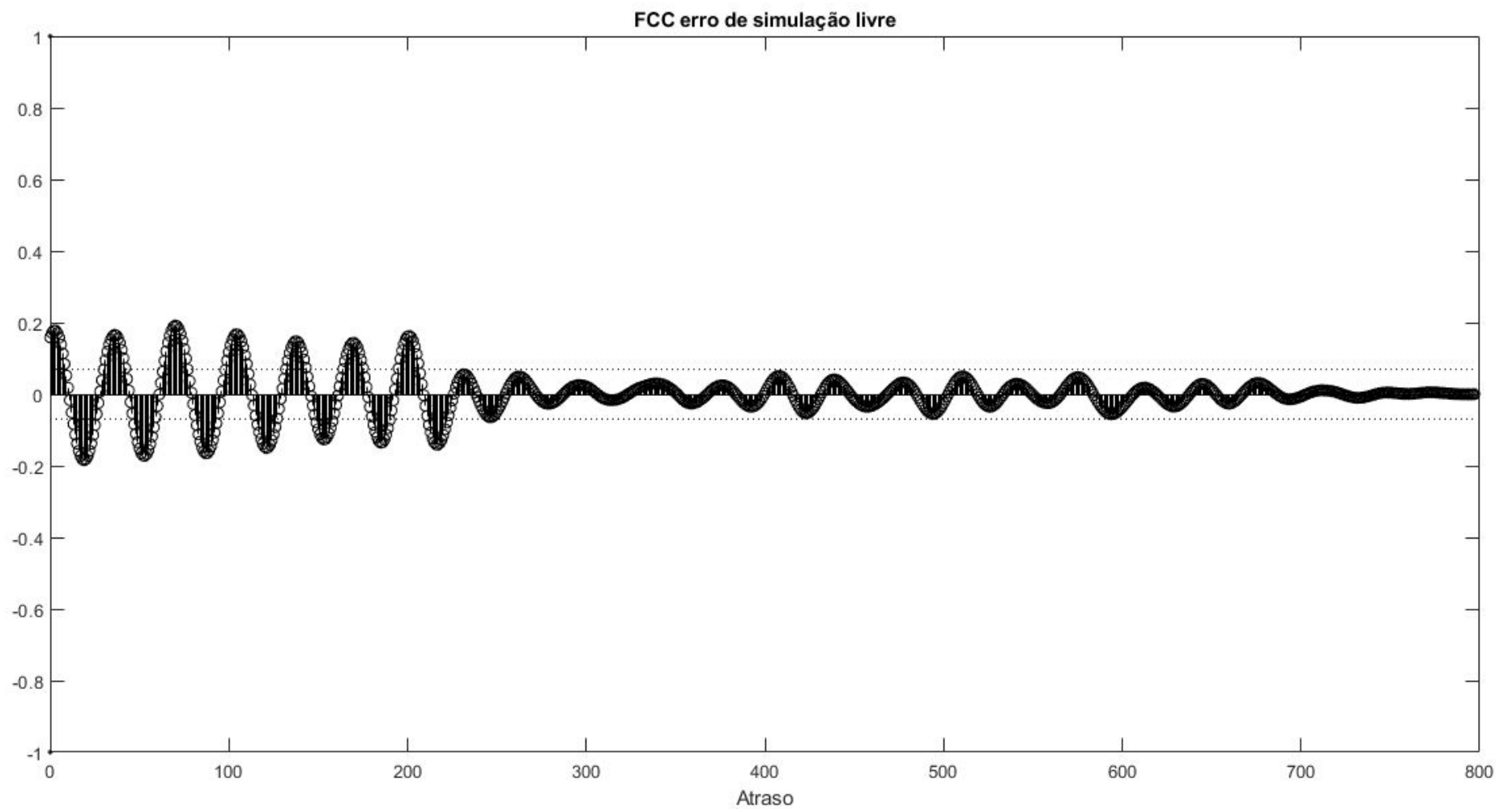


Figura 15 - Resíduos para simulação livre

Assim como na figura 12, a figura 15 demonstra que não há correlação suficiente entre resíduos do modelo.

## 2. Exercício 2

Para este exercício é pedido para considerar um sistema linear e invariante no tempo, que possa ser representado pela função de transferência exemplificada na equação 4:

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

**Equação 4. Função de transferência em tempo discreto**

em que  $a_1, a_2, b_1, b_2$ , são parâmetros definidos de forma a obter um sistema assintoticamente estável.

Portanto, utilizou-se a seguinte função de transferência de tempo de contínuo de comportamento previamente conhecido:

$$H(s) = \frac{1}{400s^2 + 8s + 1}$$

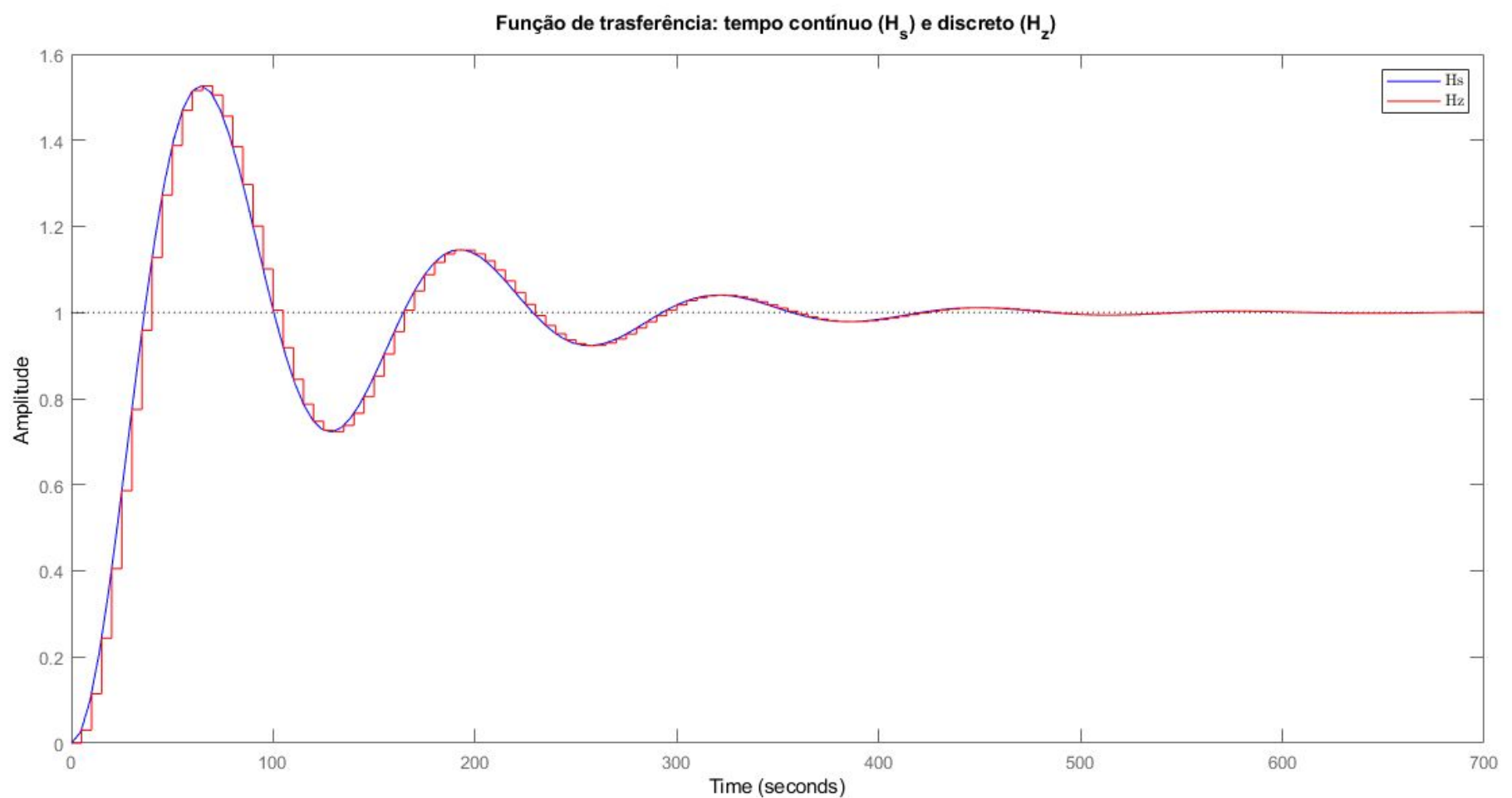
**Equação 5. Função de transferência em tempo contínuo escolhida**

E, dessa forma, fez-se amostragem do sinal a fim de discretizar o sinal contínuo na seguinte função de transferência de tempo discreto:

$$H(z) = \frac{0.0749z + 0.07099}{z^2 - 1.706z + 0.8521}$$

**Equação 6. Função de transferência escolhida em tempo discreto**

A figura 17 mostra que a função  $H(s)$  foi satisfatoriamente discretizada em  $H(z)$  mantendo o seu comportamento dinâmico, enquanto a figura 18 prova que o sistema está corretamente amostrado. Esta afirmação é baseada devido ao primeiro mínimo da função de autocorrelação da saída ocorrer entre  $x=10$  e  $x=20$ , conforme exemplificado no exercício 1 deste documento.



**Figura 17 - Funções de transferência contínua e discreta coincidentes conforme esperado**

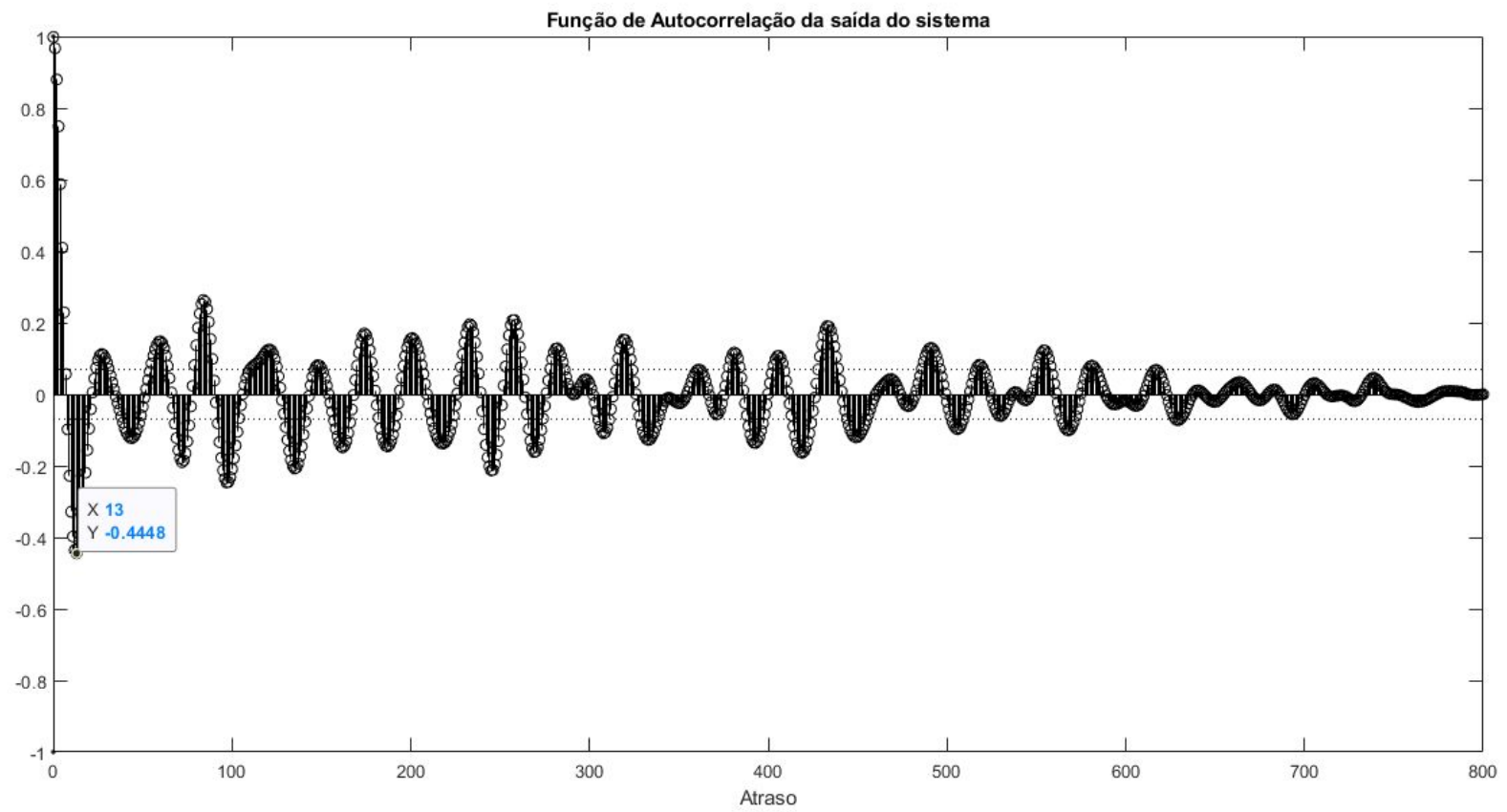


Figura 18 - Função de autocorrelação da saída do sistema discretizado. Primeiro mínimo em  $x = 13$ .

Os parâmetros da função de transferência  $H(s)$  foram escolhidos de acordo com o conhecimento prévio de sistemas dinâmicos lineares. A função apresenta um comportamento oscilatório subamortecido e é assintoticamente estável. Da mesma forma,  $H(z)$  apresenta as mesmas características com polos complexos conjugados e parte real menor que um, conforme o diagrama de polos e zeros da figura 19.

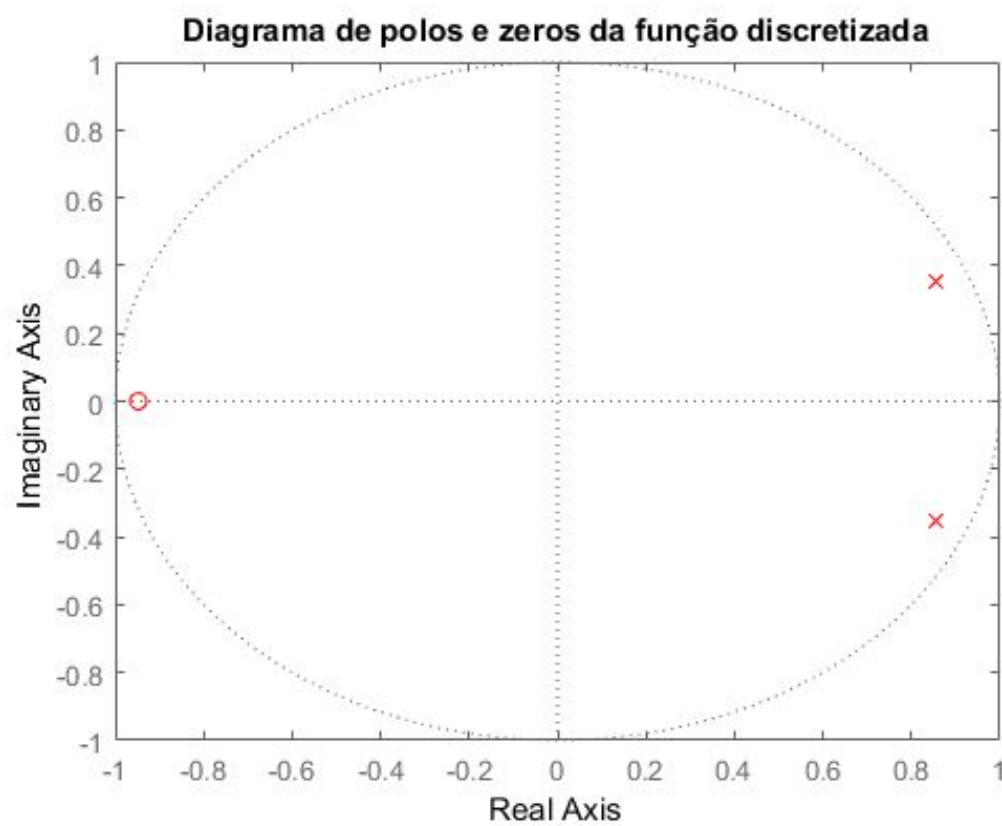


Figura 19 - Diagrama de polos e zeros da função discretizada

Para gerar o sinal PRBS para o sistema, escolheu-se um tempo entre bits ( $T_b$ ) que satisfaz a equação 7:

$$\frac{\tau}{10} \leq T_b \leq \frac{\tau}{3}$$

Equação 7. Escolha do tempo entre bits para a função PRBS

Devido à constante de tempo do sistema ser  $\tau = 20$ , escolheu-se um tempo entre bits de 2 unidades. Foram geradas 800 amostras, que foram representadas usando  $b = 10$  bits. A função de autocorrelação do sinal PRBS gerado pode ser visto na figura 20.

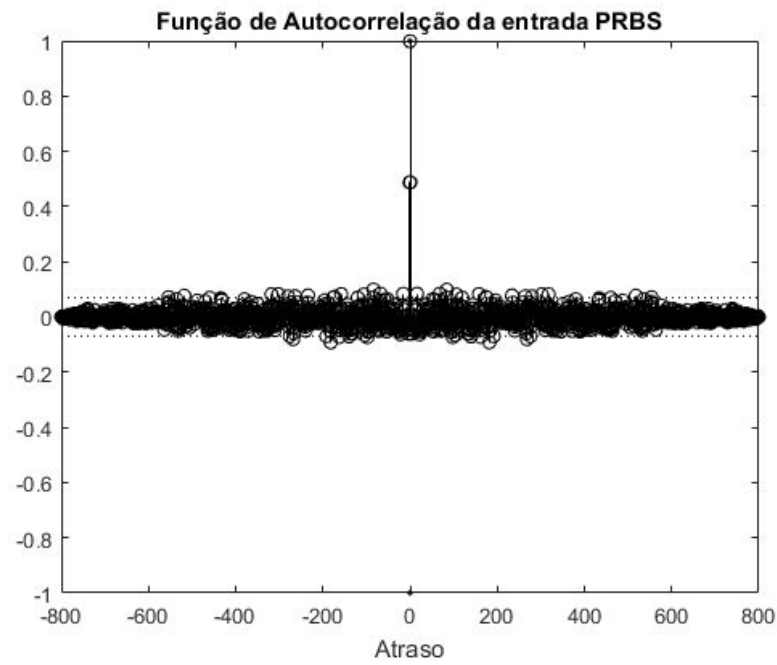


Figura 20 - Função de autocorrelação do sinal PRBS gerado

É possível inferir a partir da figura 20 que o sinal PRBS gerado possui periodicidade apenas em  $k = 0$ , o que demonstra que ele foi bem representado para ser utilizado neste sistema.

Na figura 21 é possível observar o comportamento da saída do sistema sem ruído (em azul) e com um ruído de processo (em vermelho) adicionado, conforme requisitado no enunciado. Este sinal simula um ruído de processo e possui um desvio padrão do ruído branco  $e(k)$  de forma a se obter uma relação sinal-ruído maior que 10dB, neste caso, foi utilizada a relação de 25dB.

A relação sinal-ruído (SNR ou S/R) de um sinal  $y_m = y(k) + e(k)$  é dada por  $SNR = 20 \log_{10} \frac{\sigma_y}{\sigma_e}$ , em que  $\sigma_y$  e  $\sigma_e$  são os desvios padrão de  $y(k)$  e  $e(k)$ , respectivamente.

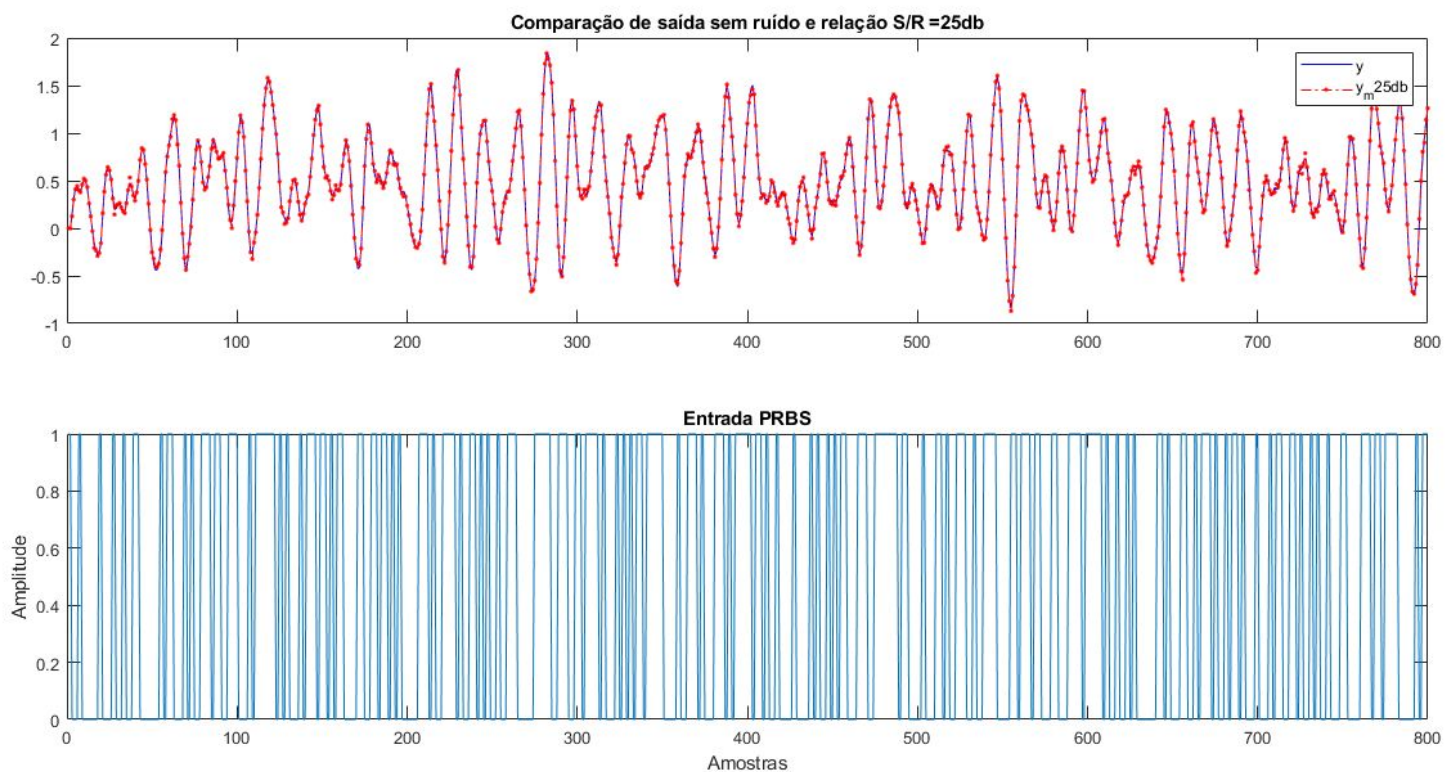


Figura 21 - Comparação de saída sem ruído (em azul) e saída com ruído de processo (em vermelho) à partir do sinal PRBS gerado.

## 2.1 Estimação de parâmetros

Formulação do problema de estimação de parâmetros sob a perspectiva do algoritmo de mínimos quadrados, para o caso de um sistema de 2ª ordem:

$$\Psi(k-1) = [y(k-1) \ y(k-2) \ u(k-1) \ u(k-2)]$$

$$\Theta^2 = [a_1 \ a_2 \ b_1 \ b_2]^T$$

$$\hat{y} = \Psi * \hat{\Theta}^T$$

$$\Theta^T = \hat{y}_k * \Psi^{-1}$$

onde  $\Psi$  é a matriz de regressores a partir do instante  $(k-1)$ ,  $\hat{\Theta}$  é a matriz de parâmetros estimados e  $y$  é o vetor do conjunto de observações. Após a aplicação do método dos mínimos quadrados, encontrou-se os parâmetros para o modelo do sistema.



### 2.1.1 Parâmetros do sistema para dados sem ruído

$$\theta_1 = +1.7062$$

$$\theta_2 = -0.8521$$

$$\theta_3 = +0.0749$$

$$\theta_4 = +0.0710$$

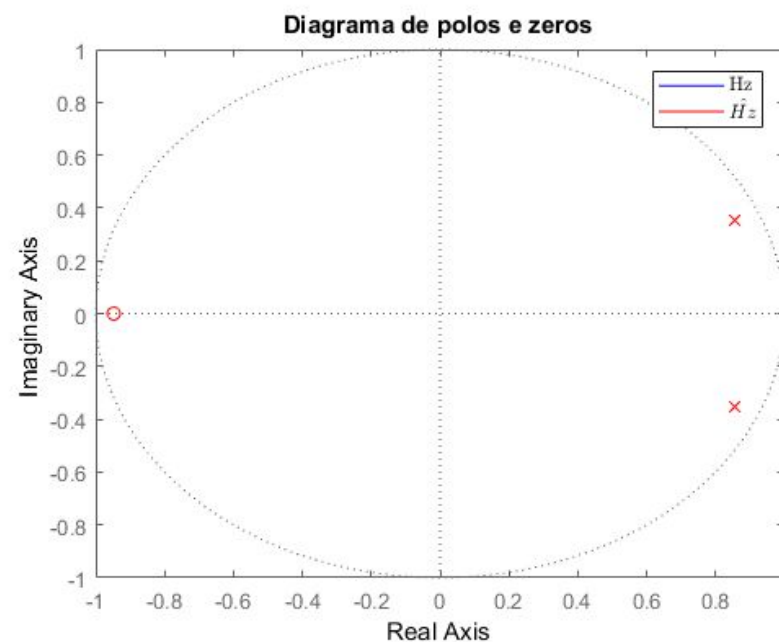


Figura 22 - Diagrama de polos e zeros do modelo estimado sem ruído

Conforme as figuras 19 e 22, os zeros e polos estão no mesmo local no diagrama, portanto, pode-se afirmar que os valores dos parâmetros para os dados sem ruído são iguais aos valores verdadeiros, isto é, o modelo ARX estimado a partir dos dados sem ruído aproximou com precisão a função de transferência  $H(z)$ .

### Simulação um passo à frente sem ruído

Foi realizada a validação de um passo à frente para o modelo sem ruído, que pode ser visto na figura 23, e encontrou-se um RMSE = 1.0905. Observando o gráfico da simulação percebe-se o porquê do valor de RMSE não ser abaixo de 1, como é comumente esperado.

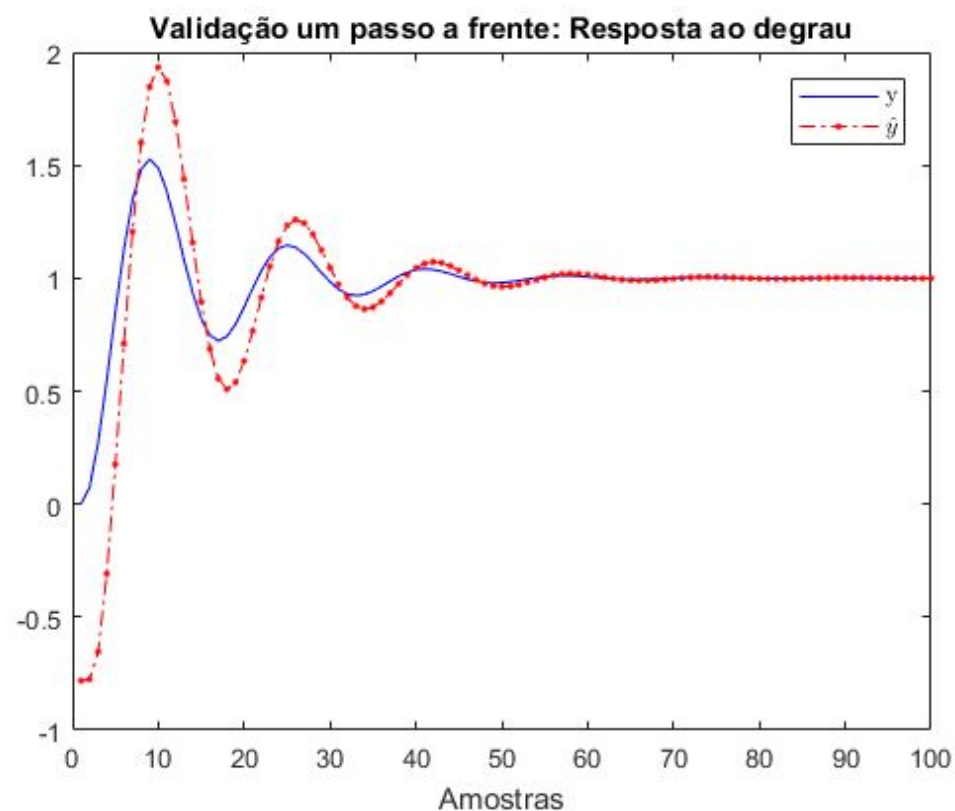
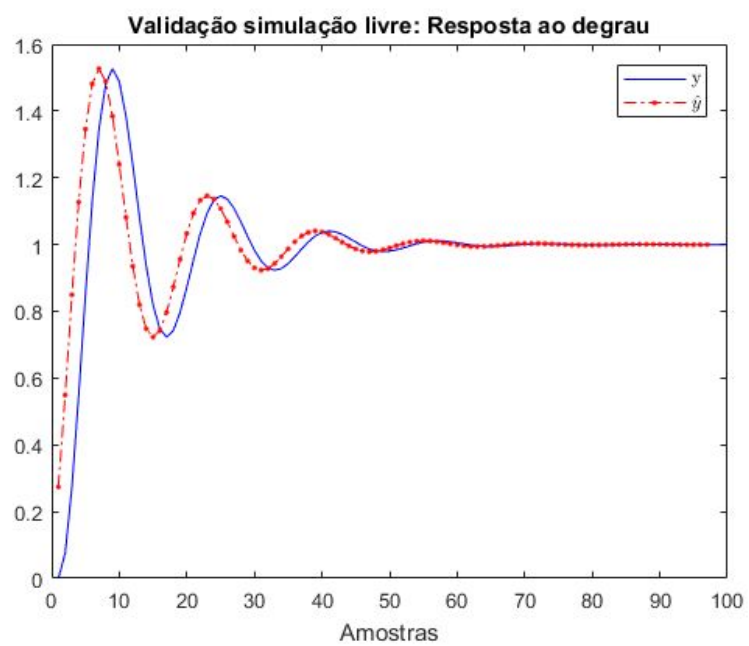


Figura 23 - Simulação um passo à frente: Resposta ao degrau

A partir da figura 23 percebe-se que o modelo estimado acompanha a oscilação da função de transferência original, porém, com um erro de amplitude que decai ao longo do tempo. Isso acontece porque a simulação um passo à frente se ajusta aos dados de forma que o erro cometido depende apenas dos dados daquele momento, isto é, não há acúmulo de erro ao longo do tempo e, conseqüentemente, menor erro mesmo para modelos ruins. Vale registrar que a simulação um passo à frente deve ser interpretada com cuidado pois, de acordo com a seção 13.2 de [1], é esperado que ela retorne um RMSE baixo mesmo para modelos ruins, devido a sua característica de sempre utilizar os dados de medição.

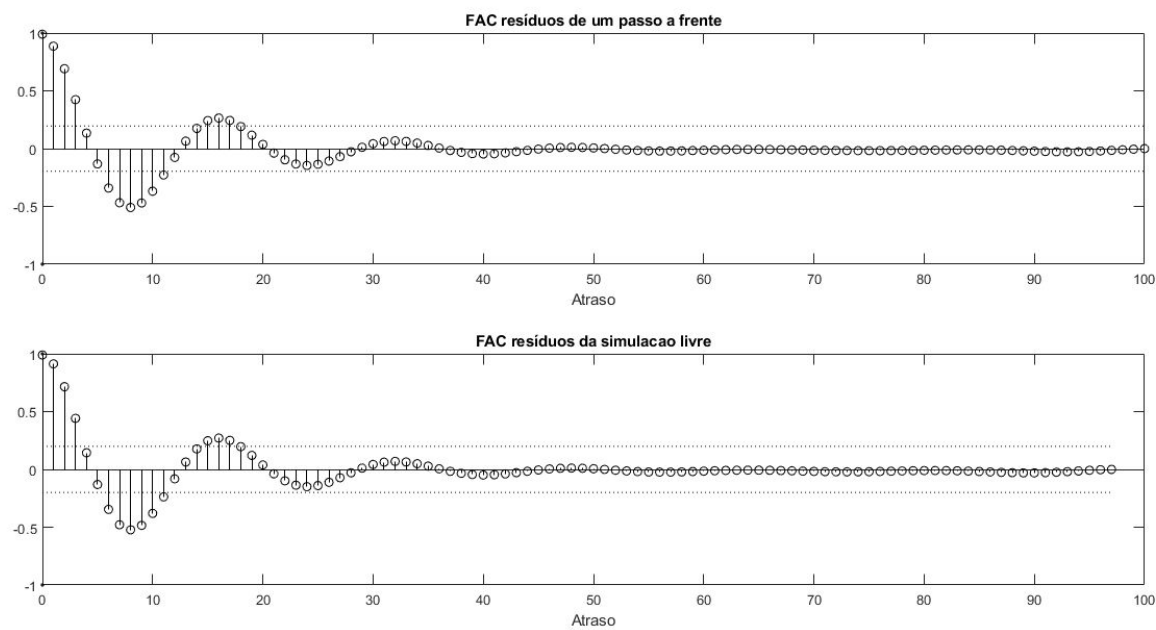
**Simulação livre sem ruído**

A validação utilizando simulação livre apresentou um valor de RMSE = 0.6799. Considerando este tipo de simulação, o erro encontrado é mais confiável que o da simulação de um passo à frente. Isto, porque a simulação livre acumula o erro do modelo em cada iteração, evidenciando se o modelo consegue generalizar bem o comportamento do sistema. A simulação livre do sistema pode ser vista em vermelho na figura 24, comparada com a resposta real do sistema em azul. Percebe-se que foi possível generalizar o comportamento do modelo.



**Figura 24 - Simulação livre: Resposta ao degrau**

Na figura 25, são comparados o resíduos de cada uma das simulações realizadas. Percebe-se que ambas possuem um comportamento similar e que não há grande correlação entre o erro do modelo.



**Figura 25 - Funções de autocorrelação para ambas simulações**

2.1.2 Parâmetros do sistema para dados com ruído SNR = 25dB

$\theta_1 = +1.6484$

$\theta_2 = -0.7977$

$\theta_3 = +0.0730$

$\theta_4 = +0.0780$

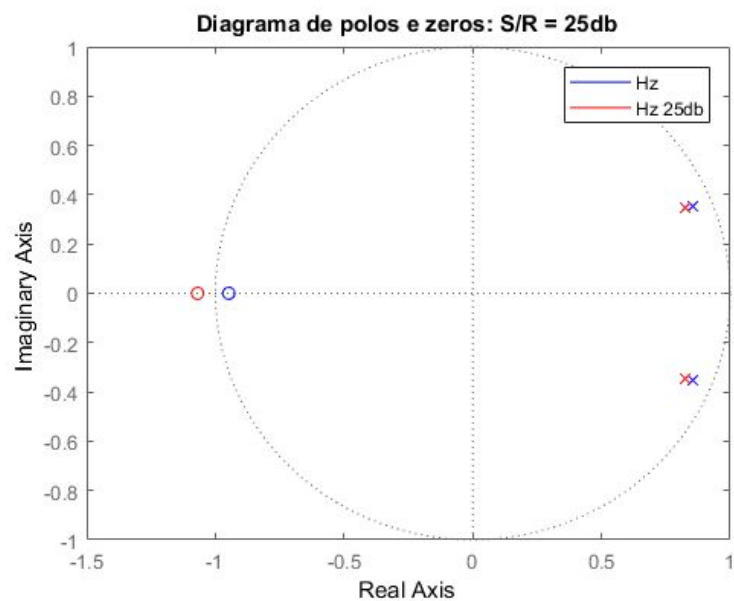


Figura 26 - Diagrama de polos e zeros do modelo estimado

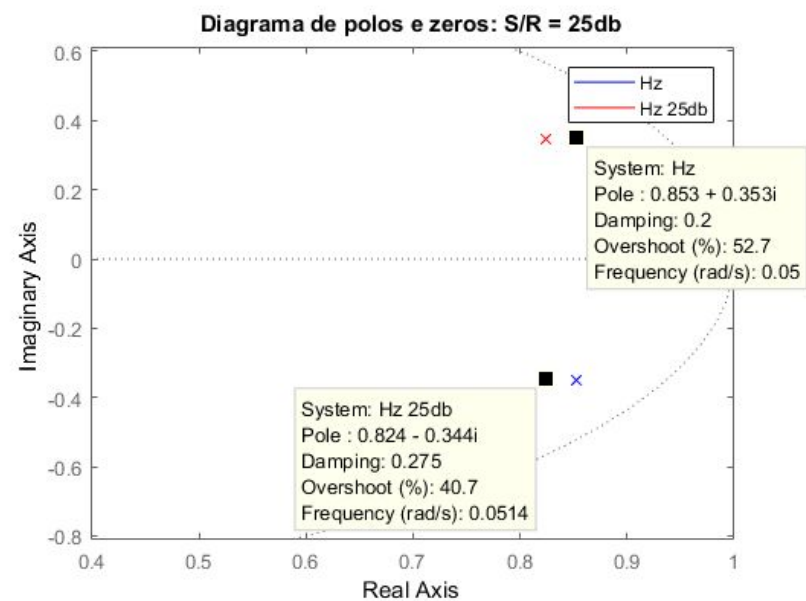


Figura 27- Polos do modelo estimado

Conforme as figuras 19, 26 e 27 os zeros e polos não estão nos mesmos locais, isto é, o ruído adicionado para SNR = 25dB reduziu o valor da parte real dos polos do sistema.

Simulação um passo à frente com ruído SNR = 25dB

A validação um passo à frente apresentou RMSE = 0.9519.

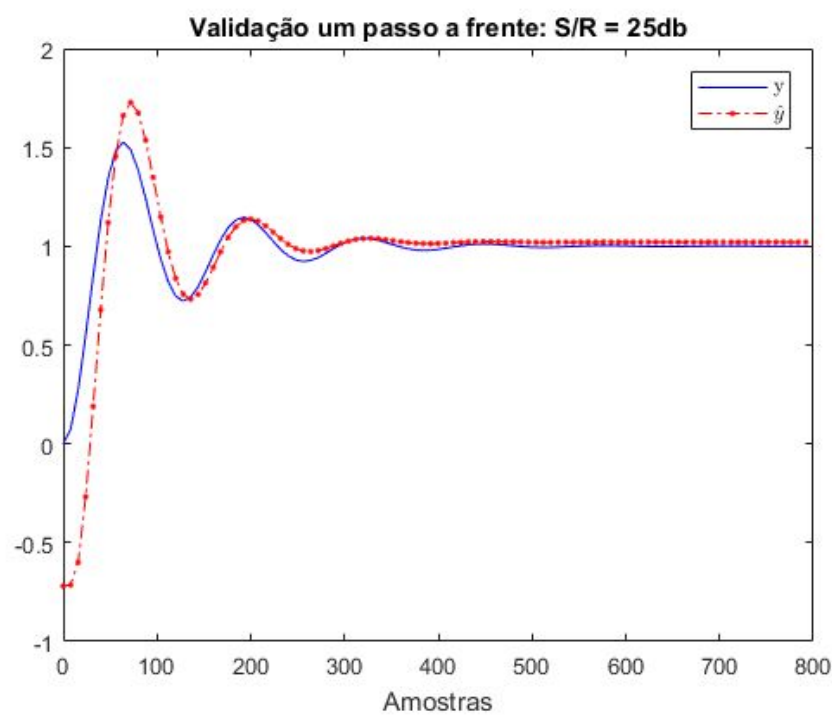


Figura 28 - Diagrama de polos e zeros do modelo estimado

A função em vermelho da figura 28 representa a aproximação do modelo com ruído e SNR = 25dB. Percebe-se na figura que a curva em vermelho segue o comportamento dinâmico da curva original em azul, porém, com redução do erro ao longo do tempo. Esta característica acontece devido ao cálculo do erro que é ajustado em cada iteração na simulação um passo à frente.

### Simulação livre com ruído SNR = 25dB

A validação utilizando simulação livre com ruído apresentou um valor de RMSE = 0.6413.

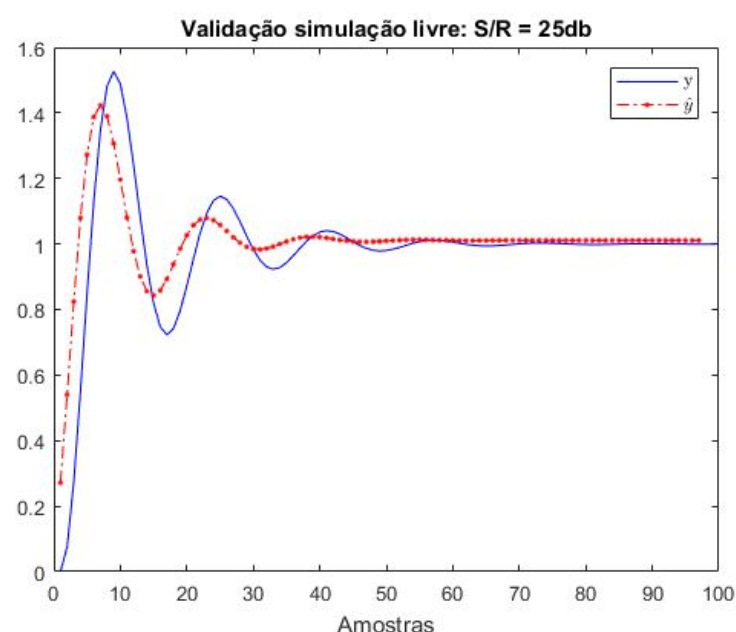


Figura 29 - Diagrama de polos e zeros do modelo estimado

A figura 29, apresenta em vermelho a curva referente à aproximação por simulação livre e em azul a curva original. A partir da figura percebe-se que, apesar de uma SNR = 25dB, valor relativamente elevado, a simulação livre aproximou bem e de maneira satisfatória a curva original em azul.

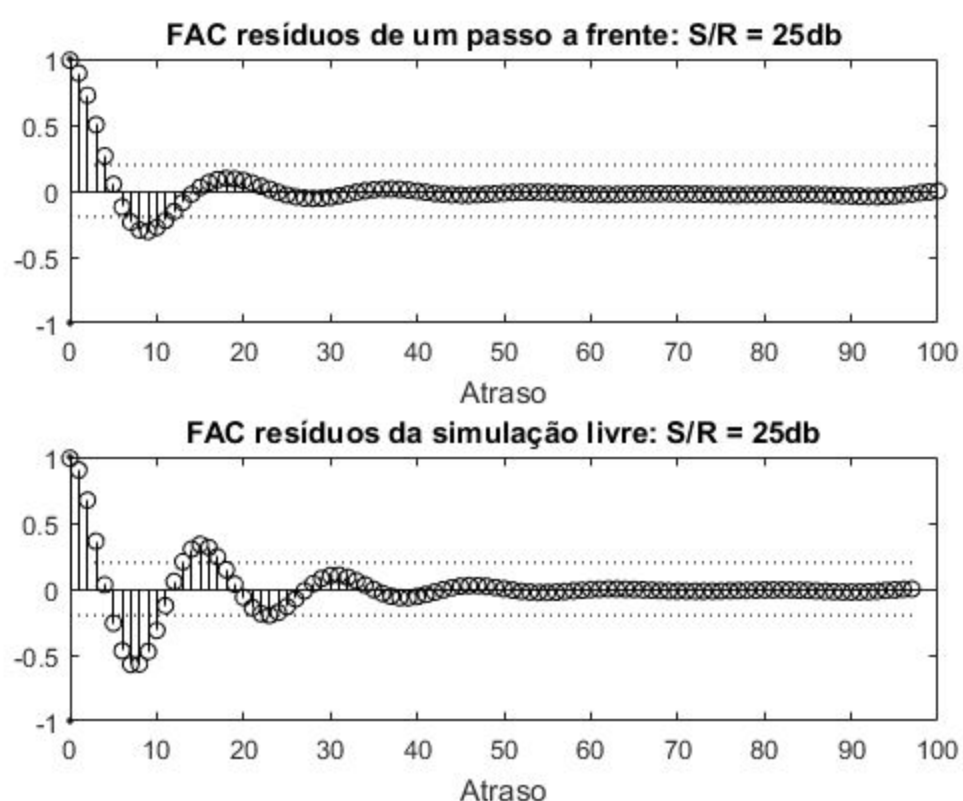


Figura 30 - Diagrama de polos e zeros do modelo estimado

Na figura 30, são comparados os resíduos de cada uma das simulações realizadas com ruído de SNR = 25dB. Percebe-se que o erro durante a simulação livre é maior que o erro da simulação um passo à frente, isto, porque a simulação livre acumula o cálculo do erro a partir dos valores calculados, enquanto a simulação um passo à frente reinicia o cálculo do erro a cada nova iteração. Dessa forma, pode-se afirmar que ambos gráficos da figura 30 estão de acordo com o previsto.



Avaliação do aumento da relação sinal ruído

Para diferentes níveis de ruído, as simulações do modelo respondem de maneira diferente, para tanto, foi feita uma avaliação das diversas resposta do sistema para diferente relações sinal-ruído.

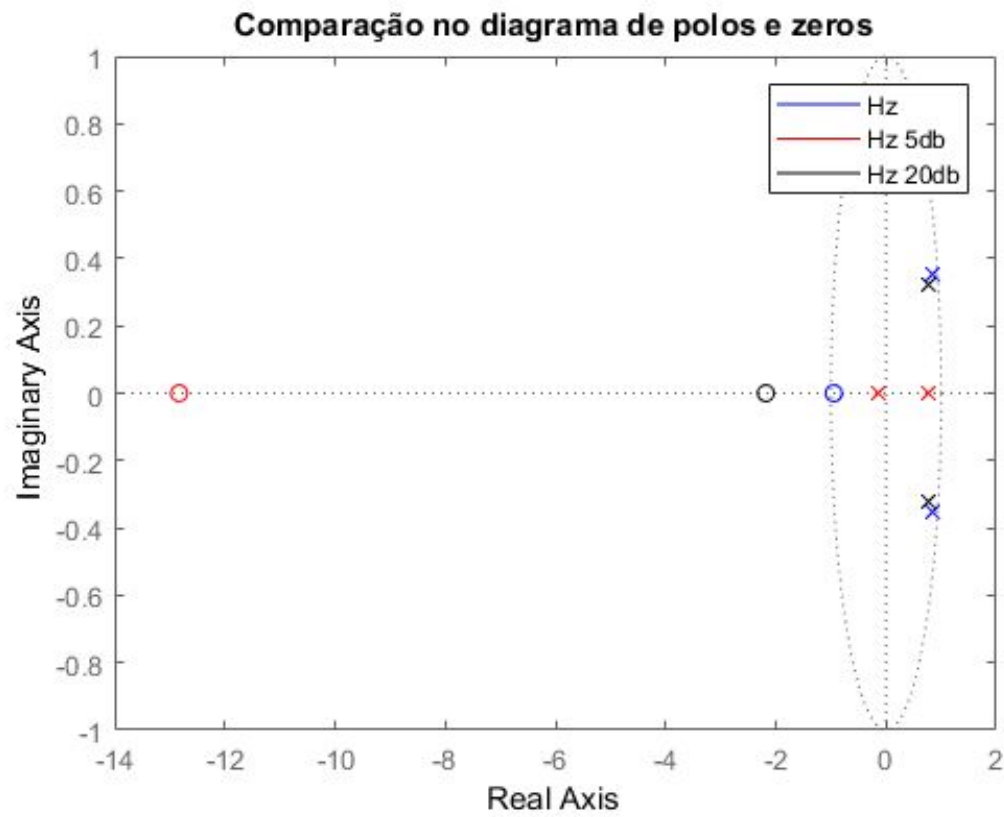


Figura 31 - Diagrama de polos e zeros para diferentes níveis de ruído

A figura 31 demonstra que, de acordo com a relação sinal-ruído, os polos da função de transferência que representam o sistema estão posicionados de maneiras distintas. Percebe-se pela figura que quanto maior o SNR, isto é, quanto menor o ruído, mais próximo é o comportamento do sistema original. Este fato é observado na figura acima, onde apenas o modelo com a relação sinal/ruído = 20dB (em preto) consegue identificar o par de polos complexos conjugados do sistema original (em azul), enquanto o modelo com relação sinal/ruído = 5dB em vermelho tem sua representação distante de ambos.

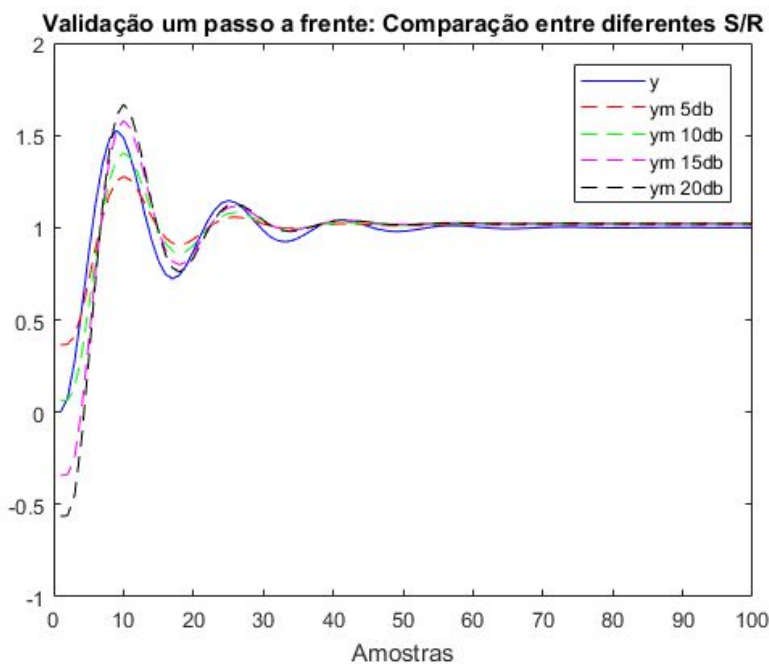


Figura 32 - Validação um passo à frente para diferentes níveis de ruído

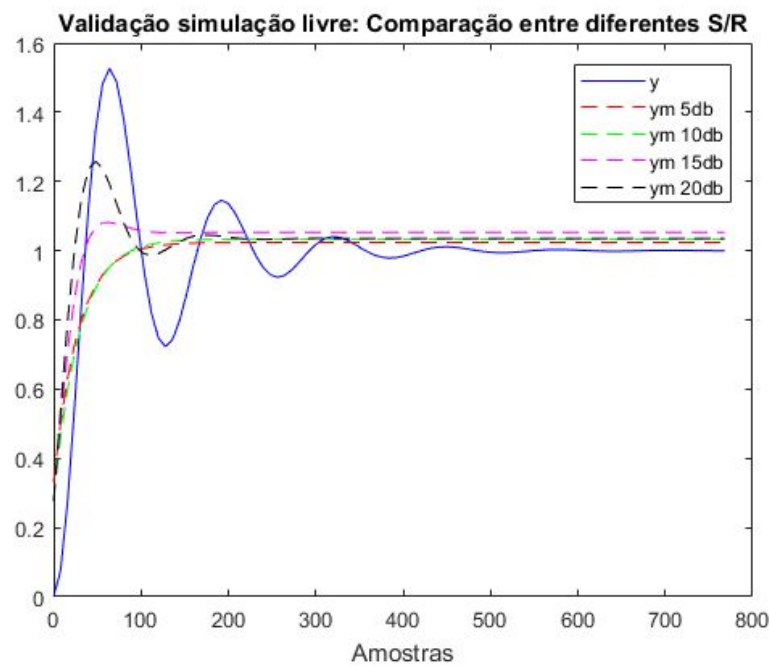


Figura 33 - Validação livre para diferentes níveis de ruído

Ao comparar a figura 32 com a figura 33, percebe-se que a simulação um passo à frente, devido à sua característica de ajuste do erro a cada iteração, aproxima com menor erro a curva do sistema original em azul. Porém, conforme a seção 13.2, figura 13.2b, de [1], deve-se interpretar com cuidado esse tipo de simulação uma vez que mesmo modelos ruins apresentam baixo erro. Portanto, na figura 33 é perceptível que ruídos elevados, SNR = 5dB, 10dB e 15dB, afetam fortemente o comportamento dinâmico do modelo uma vez que as respectivas aproximações apresentam um amortecimento alto das respostas.

	SNR = 5dB	SNR = 10dB	SNR = 15dB	SNR = 20dB
RMSE - 1 passo à frente	0.4618	0.3867	0.6161	0.8055
RMSE - Livre	0.7566	0.7528	0.7095	0.6639

Tabela 1 - RMSE para diferentes valores de SNR

Na tabela 1, verifica-se que os valores de RMSE para simulação livre diminuem enquanto SNR aumenta, isso não acontece para a simulação um passo à frente. Essa verificação corrobora a seção 13.2 de [1] que indica que a simulação livre possui maior confiança em relação à passo à frente. Tal constatação pode ser feita também através da análise das figuras 32 e 33.

## 2.2 Avaliação de um modelo de 1ª ordem

Para a aproximação do modelo utilizando um sistema de 1ª ordem, a estimação de parâmetros sob a perspectiva do algoritmo de mínimos quadrados se torna:

$$\begin{aligned}\Psi(k-1) &= [y_1(k-1) \ u_1(k-1)] \\ \Theta^2 &= [a_1 \ b_1]^T \\ \hat{y} &= \Psi * \hat{\Theta}^T \\ \Theta^T &= \hat{y}_k * \Psi^{-1}\end{aligned}$$

Onde  $\Psi$  é a matriz de regressores a partir do instante  $(k-1)$ ,  $\hat{\Theta}$  é a matriz de parâmetros estimados e  $y$  é o vetor do conjunto de observações. Após a aplicação do método dos mínimos quadrados, encontrou-se os parâmetros para o modelo de 1ª ordem do sistema que podem ser conferidos na tabela 2.

Após encontrar os parâmetros, plotou-se o diagrama de polos e zeros da figura 34 comparando o sistema real (em azul), com os modelos encontrados de 1ª ordem sem ruído (em preto) e com uma relação sinal/ruído de 25dB (em vermelho).

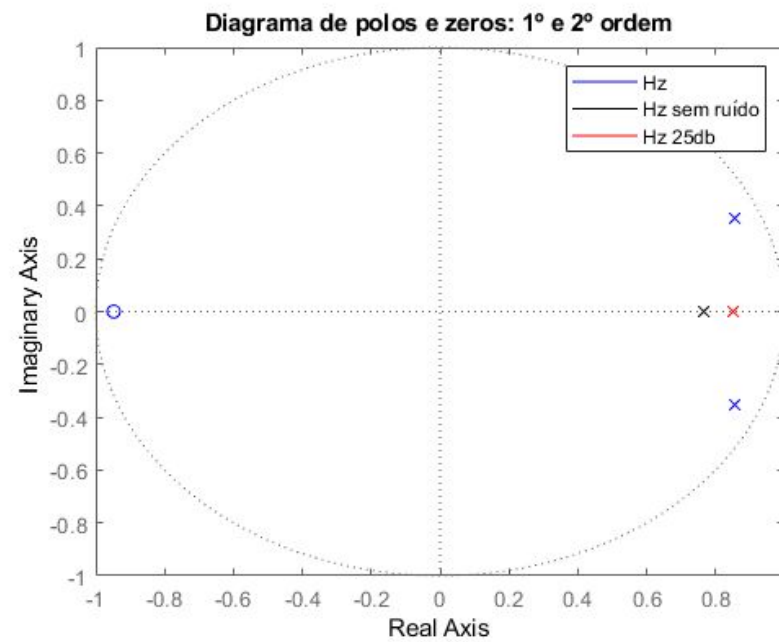


Figura 34 - Diagrama de polos e zeros do modelo estimado de 1ª ordem

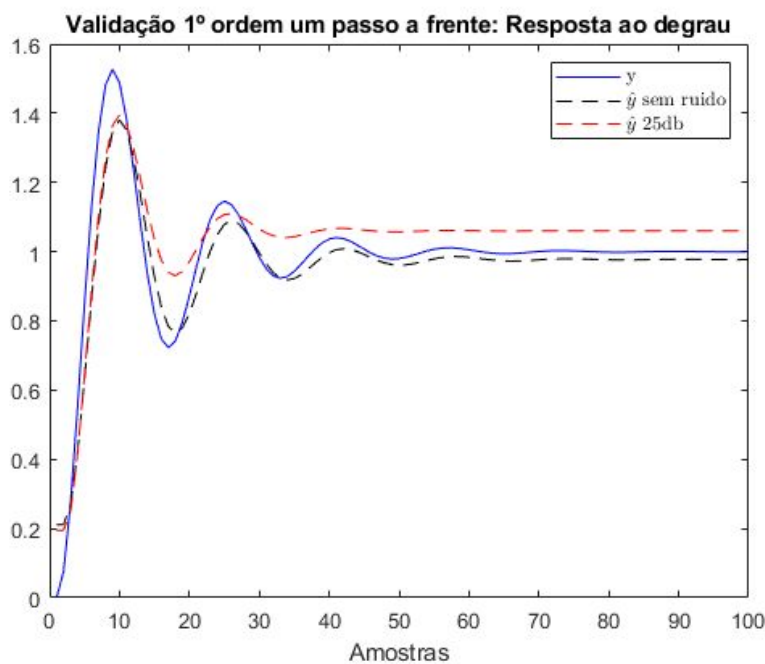


Figura 35 - Simulação um passo à frente: Resposta ao degrau

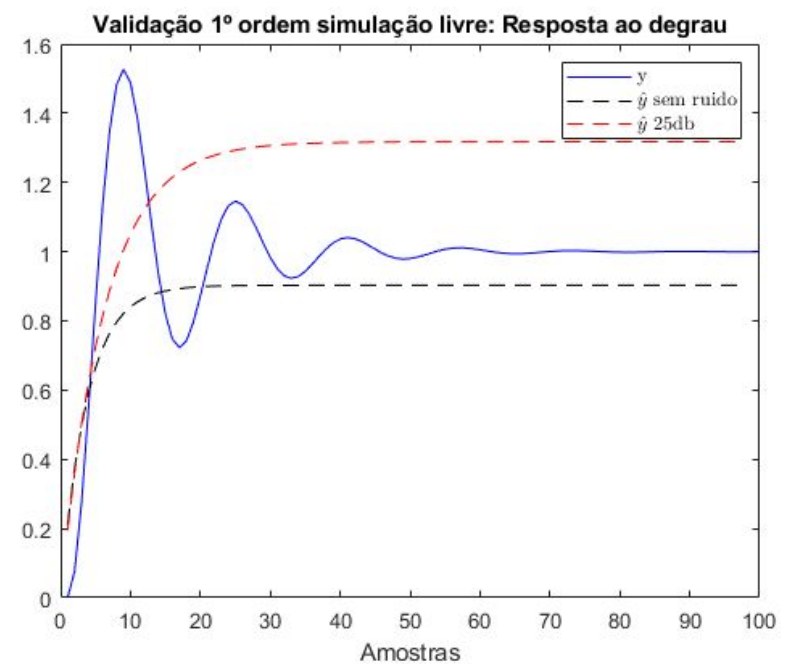


Figura 36 - Simulação livre: Resposta ao degrau

A partir do diagrama da figura 34 percebe-se que o modelo estimado não será suficiente para descrever o comportamento do sistema, pois com apenas 1 polo não é possível gerar o comportamento oscilatório do sistema original. Nas figuras 35 e 36 são demonstradas as validações passo a frente e de simulação livre, respectivamente.

Na figura 36, simulação livre, nota-se que o modelo estimado comporta-se como esperado para um sistema de 1º ordem e que ele não se adequa à dinâmica oscilatória do sistema. Em contrapartida, o modelo de simulação de um passo à frente “força” que a saída do sistema seja oscilatória devido a sua característica de se ajustar aos dados de medição. Nota-se também que mesmo utilizando os dados de medição, ainda há um *gap* de amplitude entre o sistema real e os modelos estimados com e sem ruído. Os valores RMSE das simulação podem ser conferidos na tabela 2 abaixo.

	Parâmetro 1	Parâmetro 2	RMSE passo à frente	RMSE simulação livre
Sem ruído	$\theta_1 = +0.7659$	$\theta_2 = +0.2114$	0.3474	0.9367
Relação S/R = 25dB	$\theta_1 = +0.7659$	$\theta_2 = +0.2114$	0.4650	1.5678

Tabela 2 - Parâmetros e RMSE para sistema de 1º ordem

### 2.3 Avaliação de um modelo de 3ª ordem

Para a aproximação do modelo utilizando um sistema de 3ª ordem, a estimação de parâmetros sob a perspectiva do algoritmo de mínimos quadrados se torna:

$$\begin{aligned} \Psi(k-1) &= [y(k-1) \ y(k-2) \ y(k-3) \ u(k-1) \ u(k-2) \ u(k-3)] \\ \Theta^2 &= [a_1 \ a_2 \ a_3 \ b_1 \ b_2 \ b_3]^T \\ \hat{y} &= \Psi * \hat{\Theta}^T \\ \Theta^T &= \hat{y}_k * \Psi^{-1} \end{aligned}$$

Onde  $\Psi$  é a matriz de regressores a partir do instante  $(k-1)$ ,  $\hat{\Theta}$  é a matriz de parâmetros estimados e  $y$  é o vetor do conjunto de observações. Após a aplicação do método dos mínimos quadrados, encontrou-se os parâmetros para o modelo de 3ª ordem do sistema, que podem ser conferidos na tabela 3.

Após encontrar os parâmetros, plotou-se o diagrama de polos e zeros da figura 37 comparando o sistema real (em azul), com os modelos encontrados de 3ª ordem sem ruído (em preto) e com uma relação sinal/ruído de 25dB (em vermelho).

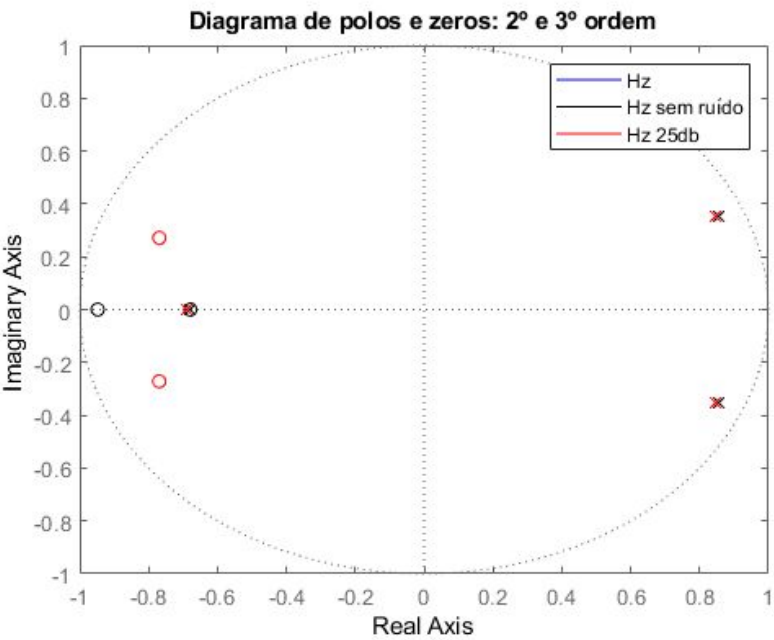


Figura 37- Diagrama de polos e zeros do modelo estimado de 3ª ordem

Nota-se no diagrama da figura 37 que o modelo estimado de 3ª ordem conseguiu identificar com precisão os polos e zeros do sistema original, tanto para o caso sem ruído quanto para o caso com a relação sinal/ruído = 25dB. Nas figuras 38 e 39 são demonstradas as validações passo a frente e de simulação livre, respectivamente.

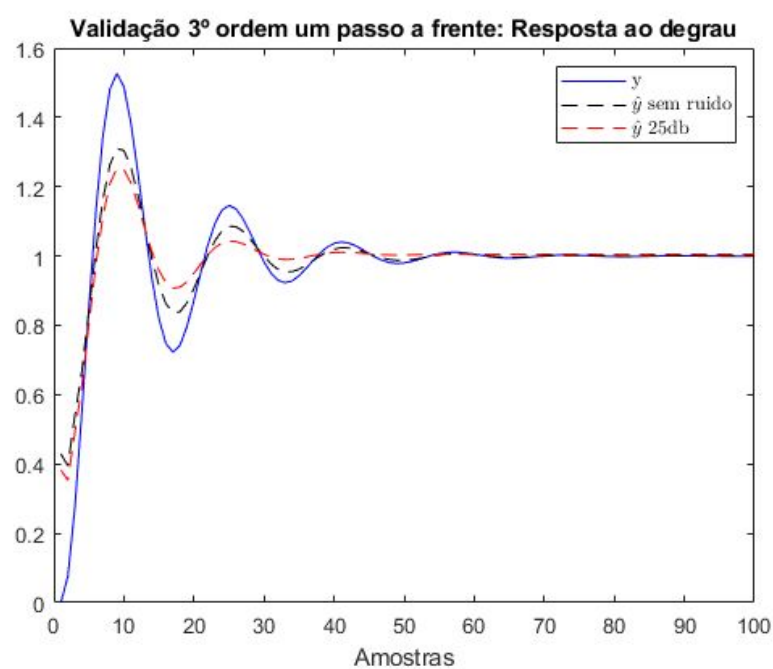


Figura 38 - Simulação um passo à frente: Resposta ao degrau

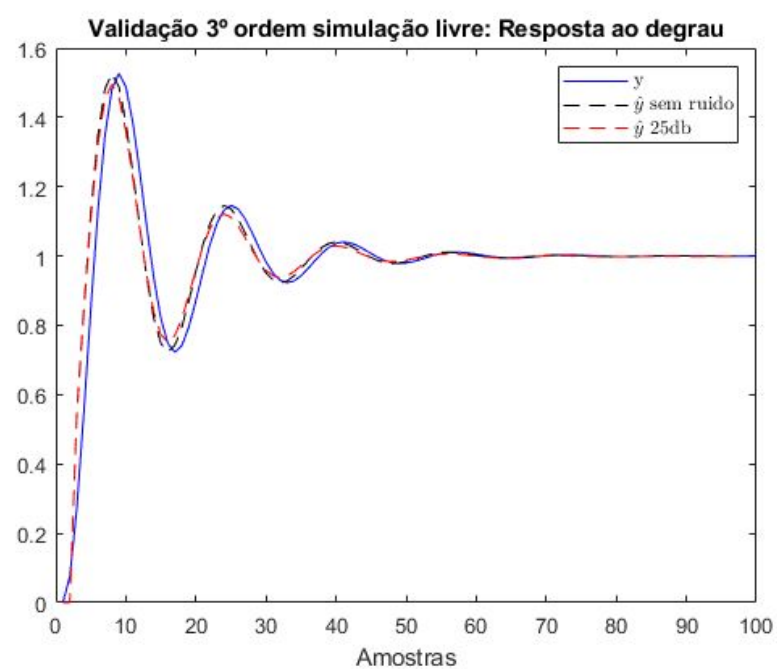


Figura 39 - Simulação livre: Resposta ao degrau

Percebe-se que ambos os modelos, tanto o de simulação passo a frente, na figura 38, quanto de simulação livre na figura 39, conseguem representar bem o sistema. Nota-se que a aproximação de 3ª ordem, quando comparado com os modelos de 1ª e 2ª ordem, representa melhor o sistema e sua dinâmica. Outro ponto a se mencionar, é que a relação sinal/ruído é tão alta, que no caso da simulação livre, a saída ruidosa (em vermelho) se comporta quase como a resposta sem ruído (em preto). Os valores RMSE das simulações podem ser conferidos na tabela 3 abaixo.

	Parâmetros						RMSE passo à frente	RMSE simulação livre
Sem ruído	$\theta_1 = +1.0275$	$\theta_2 = +0.3060$	$\theta_3 = -0.5784$	$\theta_4 = +0.0749$	$\theta_5 = +0.1218$	$\theta_6 = +0.0482$	0.3949	0.3326
Relação S/R 25dB	$\theta_1 = +1.0198$	$\theta_2 = +0.3004$	$\theta_3 = -0.5651$	$\theta_4 = +0.0716$	$\theta_5 = +0.1295$	$\theta_6 = +0.0437$	0.4722	0.3246

Tabela 3 - Parâmetros e RMSE para sistema de 3º ordem

### 3. Referências

[1] L. A. Aguirre, "Introdução à Identificação de Sistemas". Editora UFMG, 2015.