Métodos dos mínimos quadrados

Hernane Braga Pereira - 2014112627

1. Exercício 1

Para este exercício é pedido para simular um sistema de primeira ordem com atraso puro de tempo, estimar seu atraso via função de correlação cruzada (FCC) e estimar os parâmetros de ganho e constante de tempo via método dos mínimos quadrados.

A função de transferência escolhida para este exercício pode ser vista na equação 1 e sua resposta ao degrau na figura 1.

$$G(s) \ = \ \frac{5}{30s+1}e^{-50s}$$

Equação 1. Sistema G(s) utilizado

O sistema apresenta ganho K = 5, constante de tempo $\tau = 30$ e atraso puro de tempo $t_d = 50$. O tempo de amostragem **Ts** estipulado foi dez vezes menor que o valor da constante de tempo da função de transferência, neste caso **Ts** = 3.

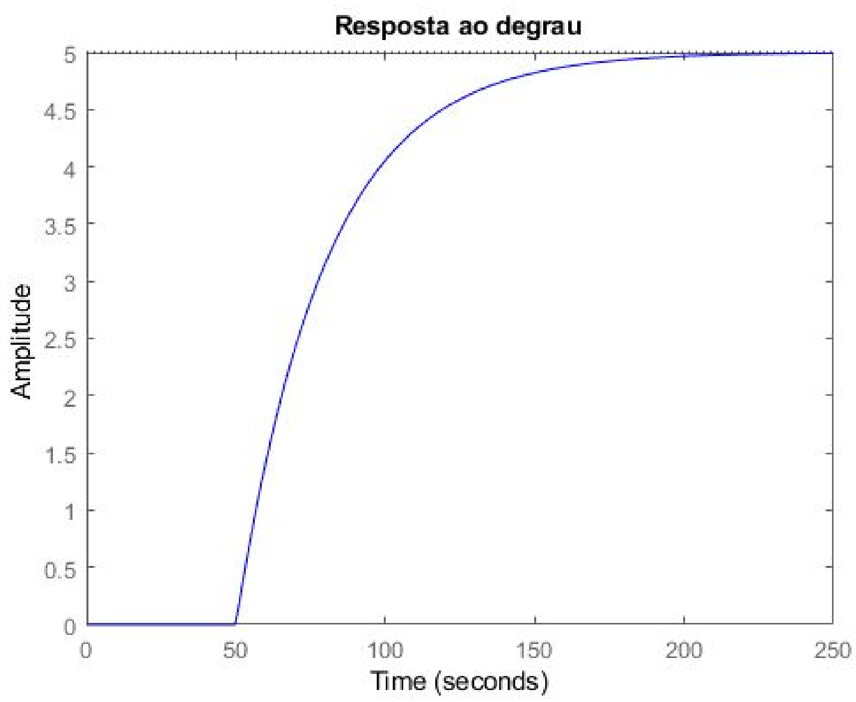

Figura 1. Resposta ao degrau do sistema G(s)

Foi simulado o comportamento da função de transferência para uma entrada PRBS de 300 amostras. Os parâmetros adotados foram **b** = 9 bits e tempo de amostragem **m** = 2. O valor de **b =** 9 bits foi escolhido, pois assim o período T do sinal será de: $2^b - 1 \ = 512$, que é suficiente para o caso estudado. O valor de **m** foi adotado usando a relação apresentada nas equação 2 e 3. O sinal PRBS gerado e sua resposta são representados na figura 2.

$$Tb \ = \frac{\tau}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

Equação 2.

$$m \ = \ \frac{Tb}{Ts} = \frac{6}{3} = 2$$

Equação 3.

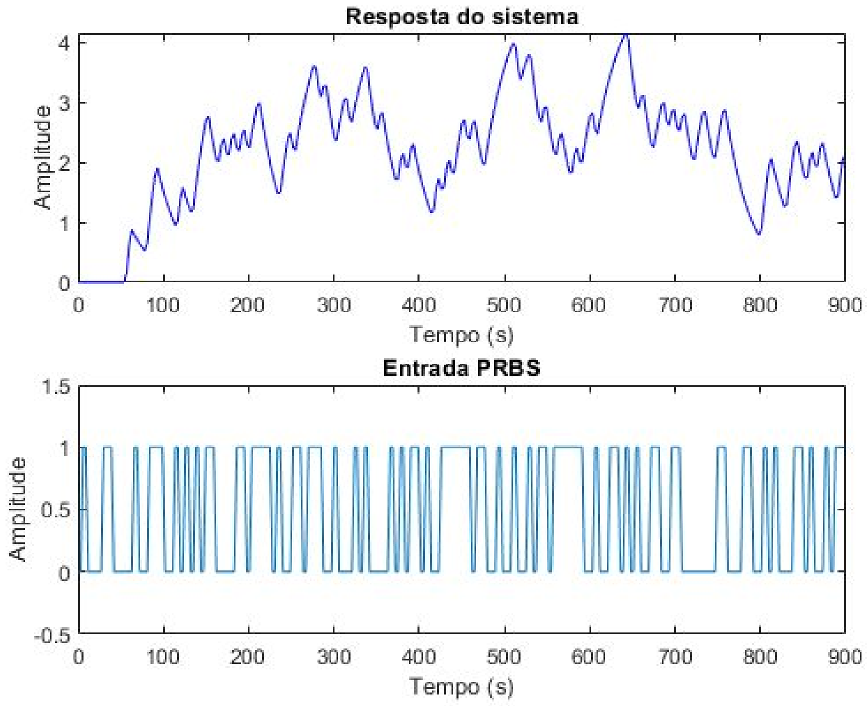

Figura 2. Resposta do sistema à entrada PRBS gerada

A partir da FCC é possível estimar o atraso puro de tempo do sistema, usando a resposta do sistema à PRBS (y(k)) e o sinal PRBS de entrada. Estima-se que a primeira amostra não nula apareça em:

$$k = \frac{Td}{Ts} + 1$$

Equação 4. Relação entre FCC e atraso puro de tempo

A relação se baseia no fato do intervalo de que do início da resposta transitória do sistema, a FCC entre y(k) e u(k) seja nula, visto que u(k) não apresenta periodicidade no intervalo e a função de transferência é nula até td. O atraso td é dividido por Ts para que seja considerado o efeito da amostragem. Cabe destacar que a implementação do PRBS utilizada gera um sinal que se inicia em t0 = 1, portanto, a estimativa do atraso puro de tempo obtida pela FCC apresenta um viés de 1 unidade de tempo.

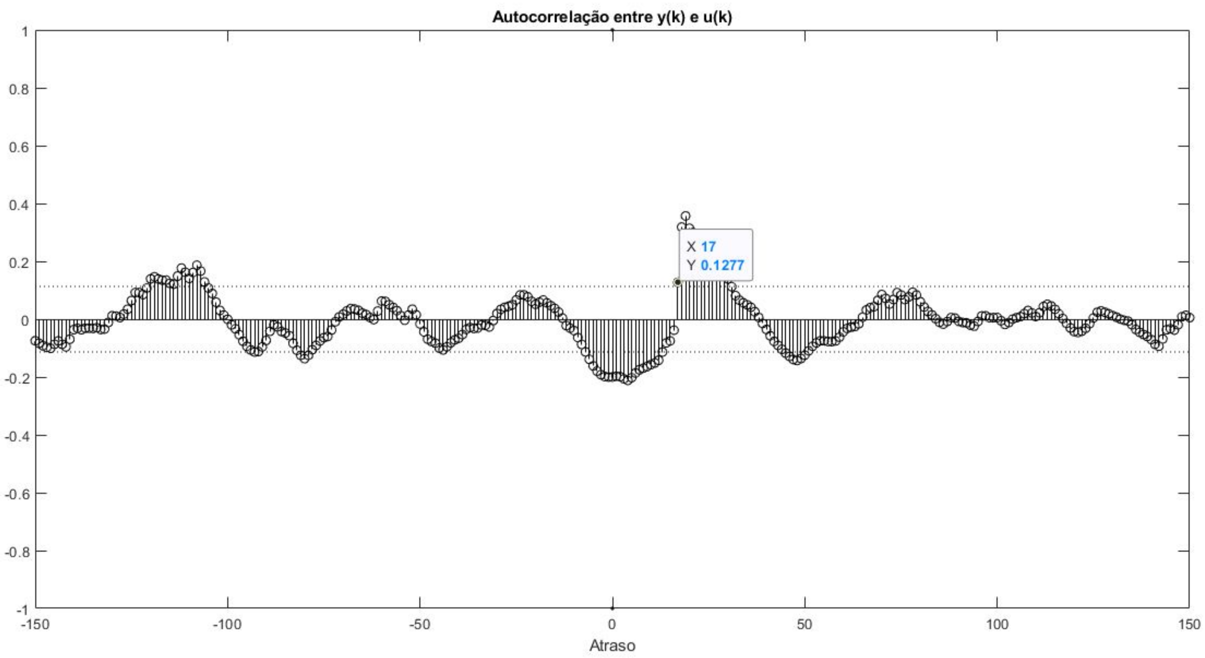

Figura 3. Função de autocorrelação cruzada (FCC) entre os sinais y(k) e u(k)

Para k = 17 e usando a aplicando a equação 4, encontra-se um atraso puro de tempo estimado $\widehat{t_d} = 50$. Os parâmetros de ganho de K e constante de tempo τ foram estipulados utilizando o métodos dos mínimos quadrados e a estimação recursiva de ganho e constante de tempo descrita no exemplo 8.5.1 do livro [1]:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1-d)$$
$$a_1 = 1 - \frac{T_s}{\tau} \quad b_1 = \frac{T_s K}{\tau}$$

Equação 5. Estimação recursiva

Onde d é o representa o atraso puro de tempo do sistema. Neste caso o valor de d será o mesmo que valor de k encontrado. O método dos mínimos quadrados é então resolvido:

$$\psi = [y_0(k-1)\ u(k-1-d)]^T$$

$$\widehat{\Theta}_{MQ} = [\psi^T \psi]^{-1} \psi\, y = [a_1 b_1]^T$$

Equação 6. Método dos mínimos quadrados

Para o sinal PRBS da figura 2, obteve-se o resultado de $\widehat{\Theta}_{MQ} = [0.9190 \;\; 0.3981]$, onde os valores estimados para o modelo foram $\widehat{\tau} = 37$ e $\widehat{K} = 4.91$, que são valores razoavelmente próximos de $\tau = 30$ e $K = 5$. O modelo final encontrado foi:

$$G_1(s) \;=\; \frac{4.91}{37s+1} e^{-50s}$$

Equação 7. Modelo estimado

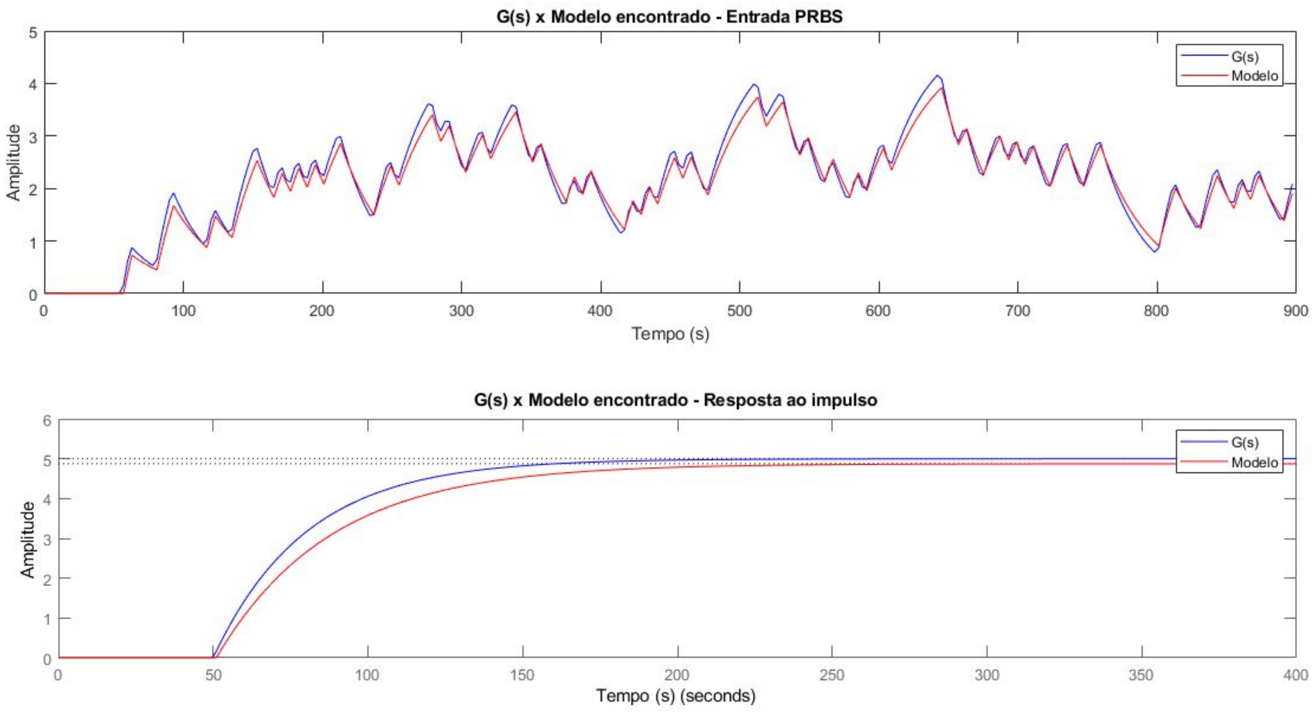

Figura 4. Comparação entre o sistema real e o modelo estimado

1.1 Sistema com baixo ruído

O mesmo experimento foi repetido, adicionando-se um baixo ruído na entrada PRBS do sistema. O ruído foi gerado aleatoriamente, multiplicando-se a entrada do sistema por 0.25. O gráfico de entrada e saída do sistema pode ser visto na figura 5.

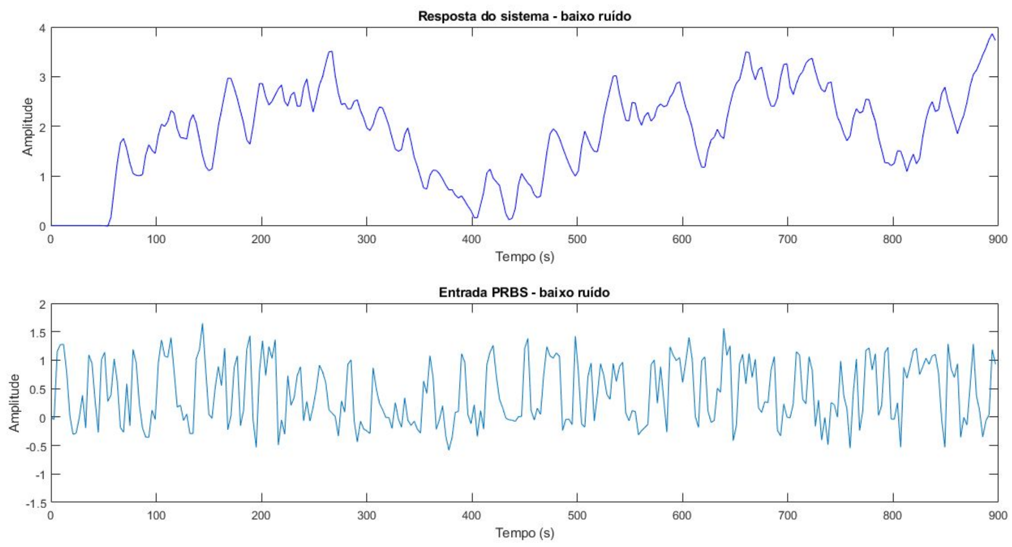

Figura 5. Resposta do sistema à entrada PRBS com ruído baixo de 0.25

Foram utilizados o mesmos parâmetros para o sinal PRBS que o item anterior, assim como o tempo de amostragem Ts. Para estimar o tempo de atraso do sistema foi utilizada mesma análise da FCC dos sinais y(k) e u(k), como mostrado na figura 6.

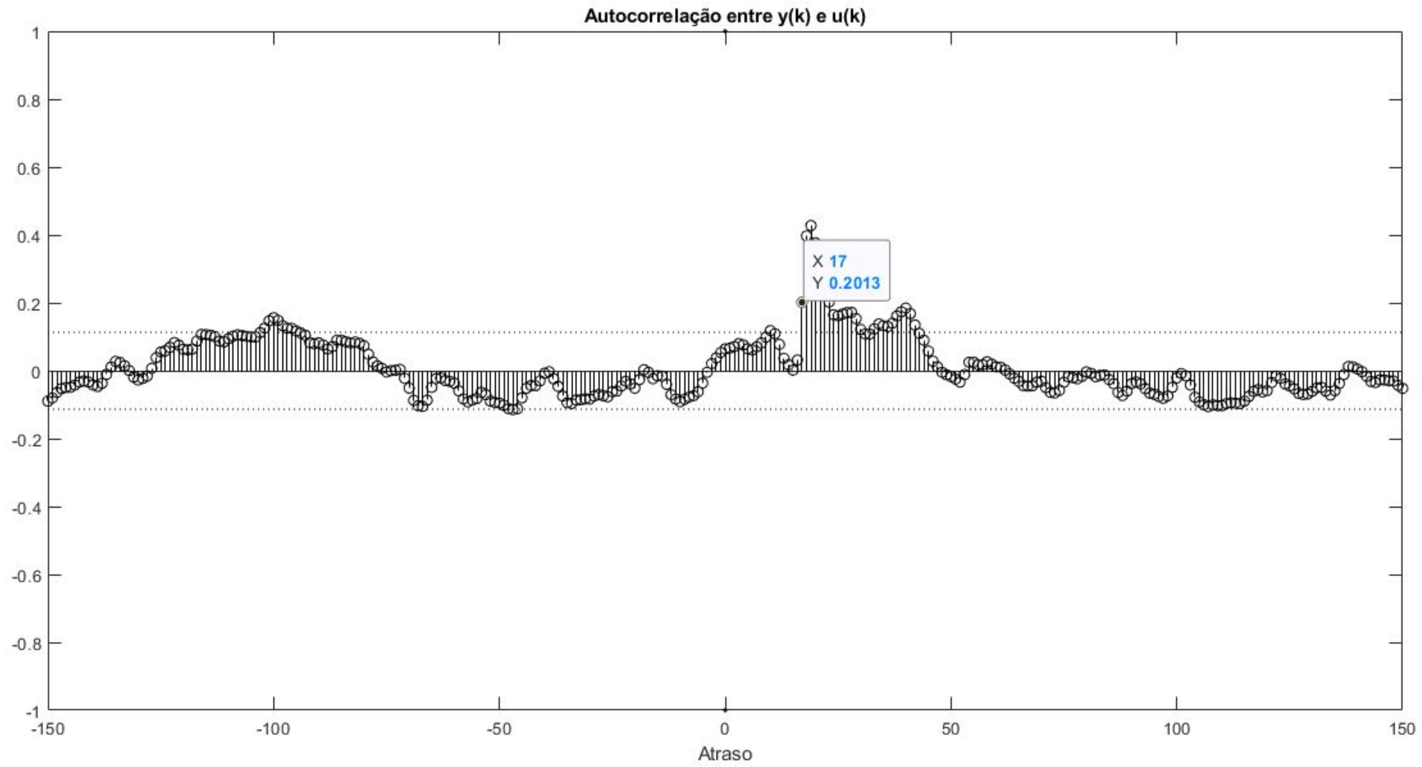

Figura 6. Função de autocorrelação cruzada (FCC) entre os sinais y(k) e u(k) com presença de baixo ruído

Como é observado na figura, não houve alteração no valor de k encontrado, portanto o atraso de tempo estimado se mantém o mesmo $\widehat{t_d} = 50$.

Ao utilizar o método dos mínimos quadrados, utilizando o sinal PRBS da figura 5, obteve-se o resultado de $\widehat{\Theta}_{MQ} = [0.9205 \;\; 0.3841]$, onde os valores estimados para o modelo foram $\widehat{\tau} = 37.7$ e $\widehat{K} = 4.83$, que ainda são valores razoavelmente próximos reais de $\tau = 30$ e $K = 5$. A comparação entre o sistema real e o modelo obtido, ambos com entrada apresentando ruído, pode ser visto na figura 7.

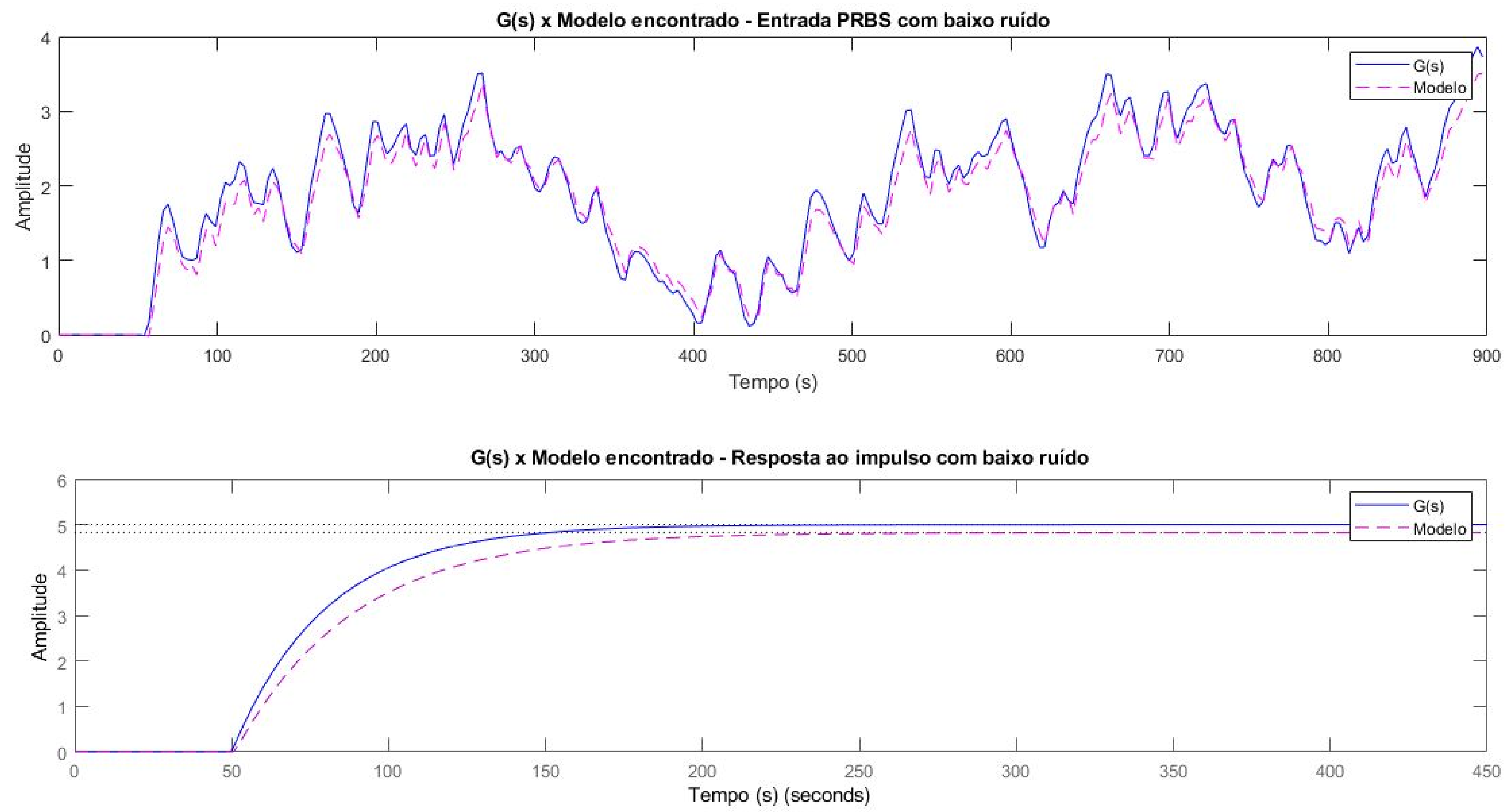

Figura 7. Comparação entre o sistema real e o modelo estimado

1.1 Sistema com alto ruído

O mesmo experimento foi repetido, adicionando-se um alto ruído na entrada PRBS do sistema. O ruído foi gerado aleatoriamente, multiplicando-se a entrada do sistema por 1.5. O gráfico de entrada e saída do sistema pode ser visto na figura 8.

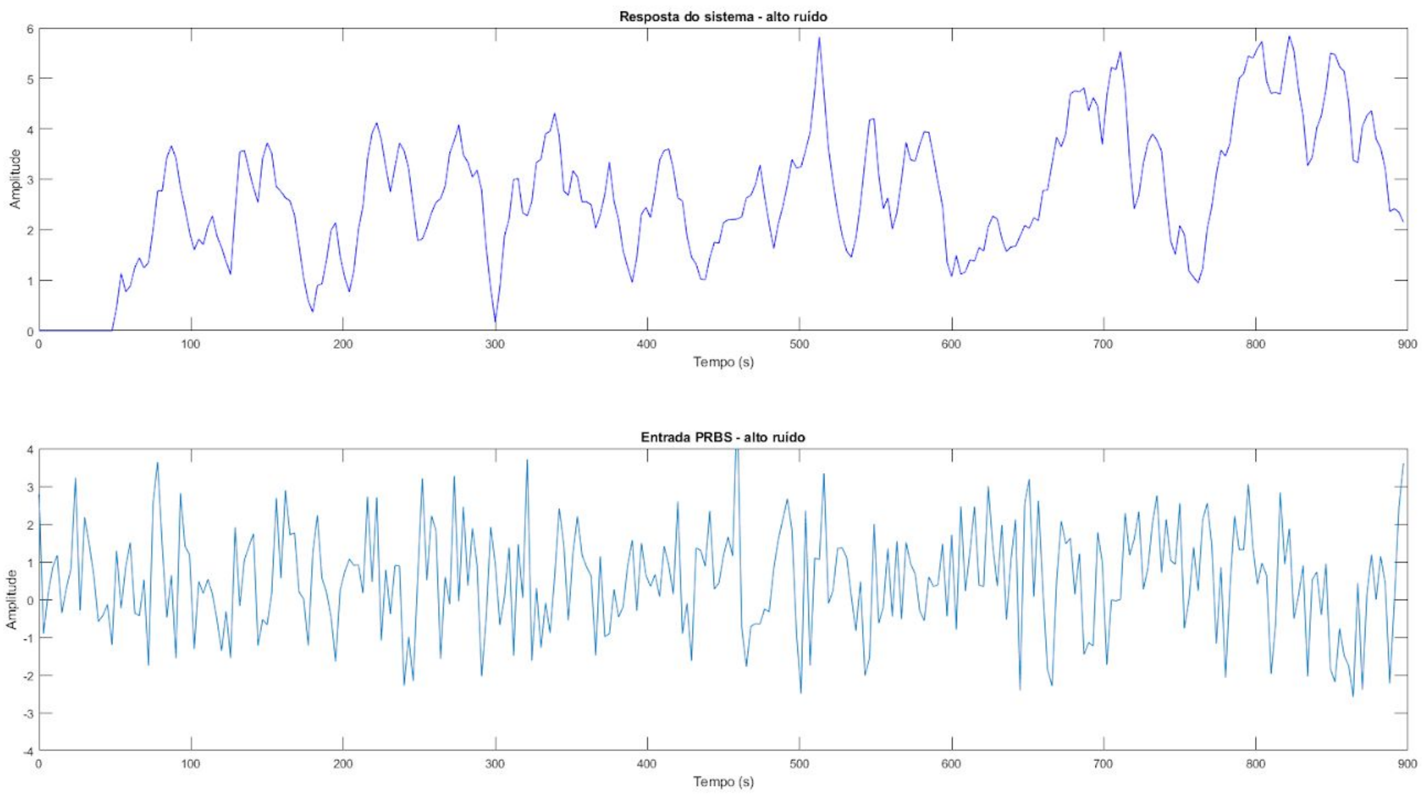

Figura 8. Resposta do sistema à entrada PRBS com ruído alto de 1.5

Foram utilizados o mesmos parâmetros para o sinal PRBS que o item anterior, assim como o tempo de amostragem Ts. Para estimar o tempo de atraso do sistema foi utilizada mesma análise da FCC dos sinais y(k) e u(k), como mostrado na figura 9.

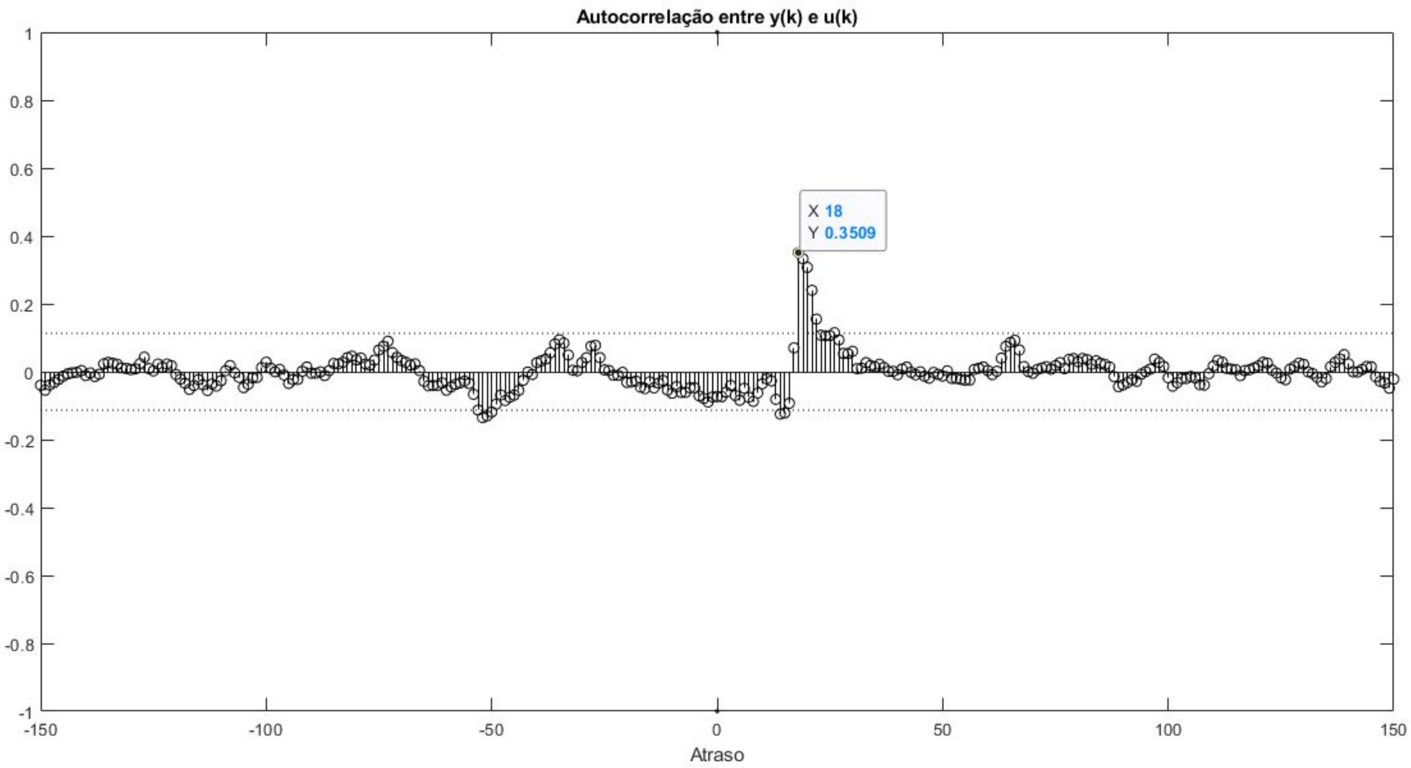

Figura 9. Função de autocorrelação cruzada (FCC) entre os sinais y(k) e u(k) com presença de alto ruído

Como é observado na figura, houve uma pequena alteração no valor de k encontrado, passando de 17 para 18. Portanto o atraso de tempo estimado será de $\widehat{t_d} = 54$.

Ao utilizar o método dos mínimos quadrados, utilizando o sinal PRBS da figura 8, obteve-se o resultado de $\widehat{\Theta}_{MQ} = [0.9316 \;\; 0.3516]$, onde os valores estimados para o modelo foram $\widehat{\tau} = 43.8$ e $\widehat{K} = 5.14$, que apesar de não serem valores tão próximos, quando comparados na constante de tempo de $\tau = 30$, percebe-se que o método dos mínimos quadrados apresentou robustez, frente à grande variação do ruído de entrada. A comparação entre o sistema real e o modelo obtido, ambos com entrada apresentando ruído, pode ser visto na figura 10.

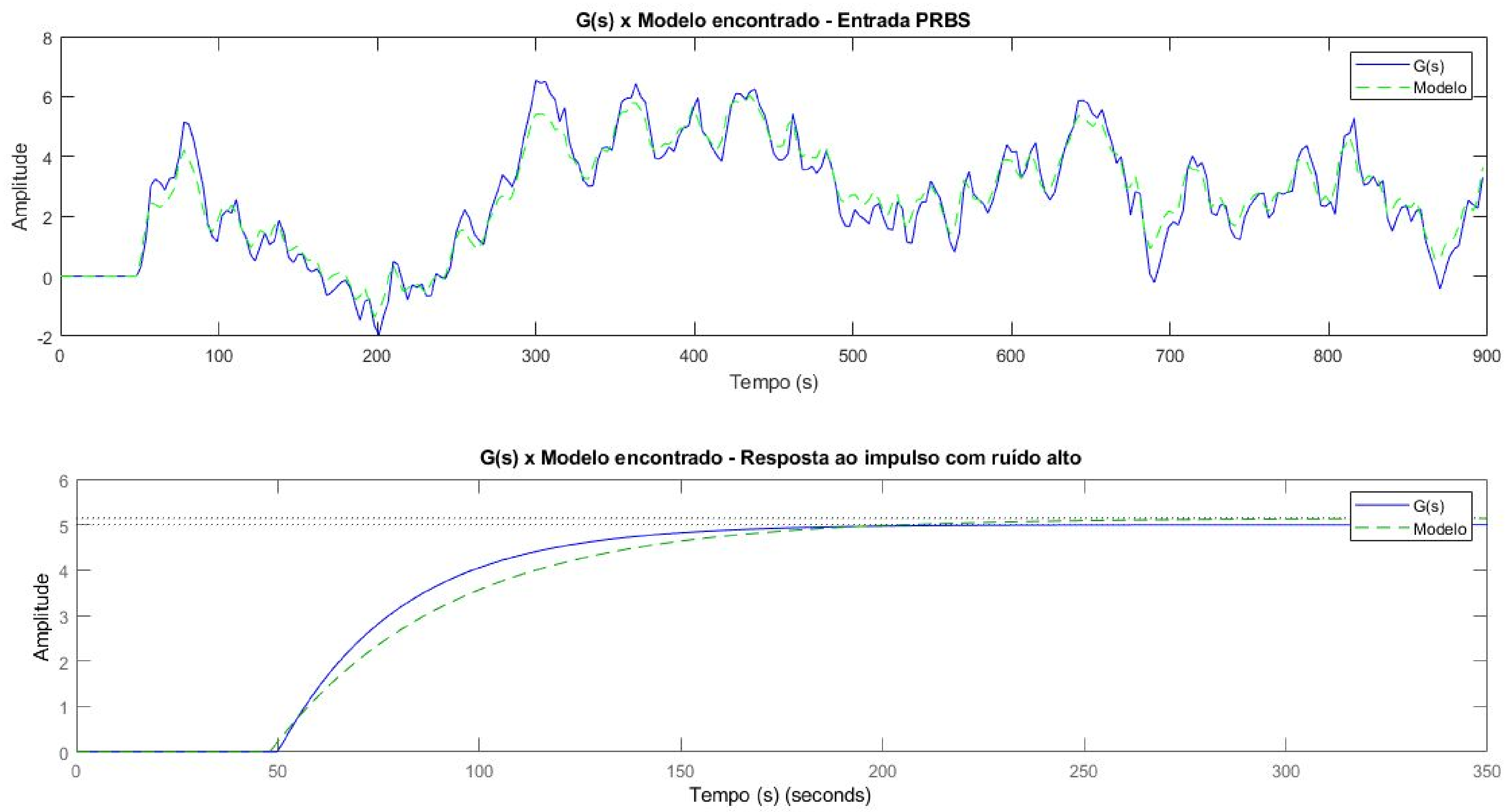

Figura 10. Comparação entre o sistema real e o modelo estimado

2. Exercício 5.8 (3º Edição)

Neste exercício deseja-se estimar os parâmetros da função de transferência dos arquivos **bfg33** e **bfg44** do livro texto [1] e comparar os resultados obtidos com os modelos dados.

Primeiramente os dados foram tratados subtraindo os valores no instante de tempo iniciais e normalizados:

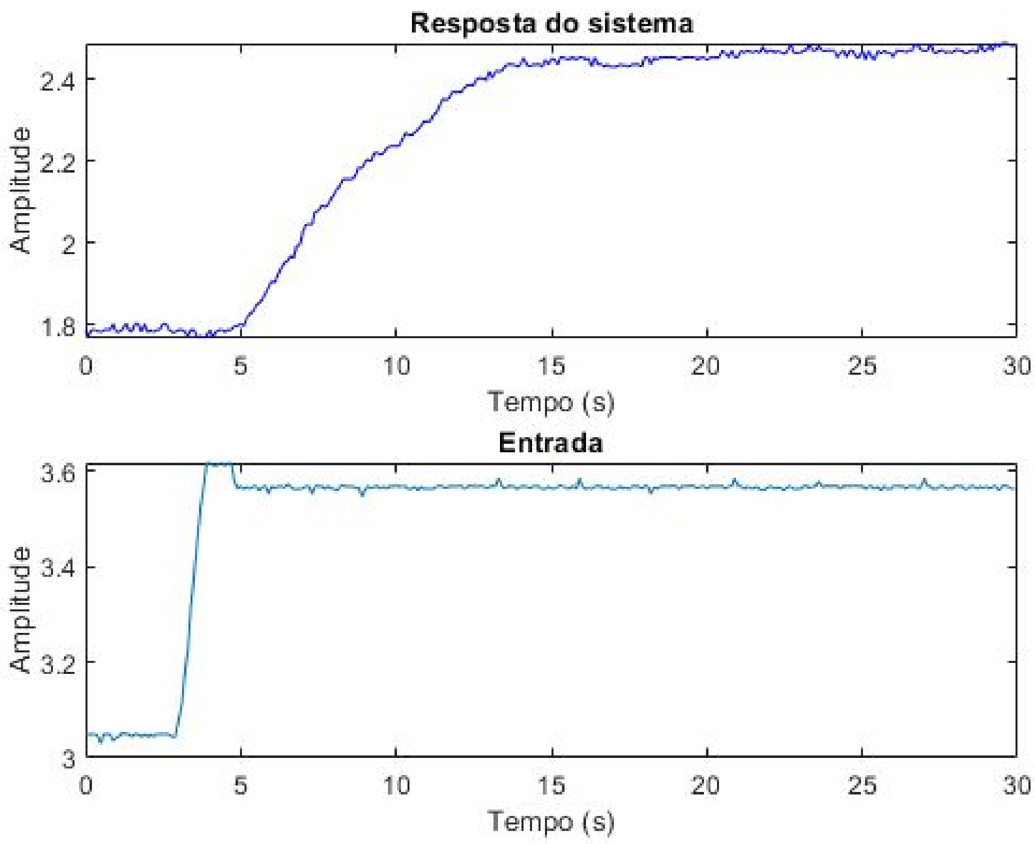

Figura 11. Entrada e saída do arquivo bfg33

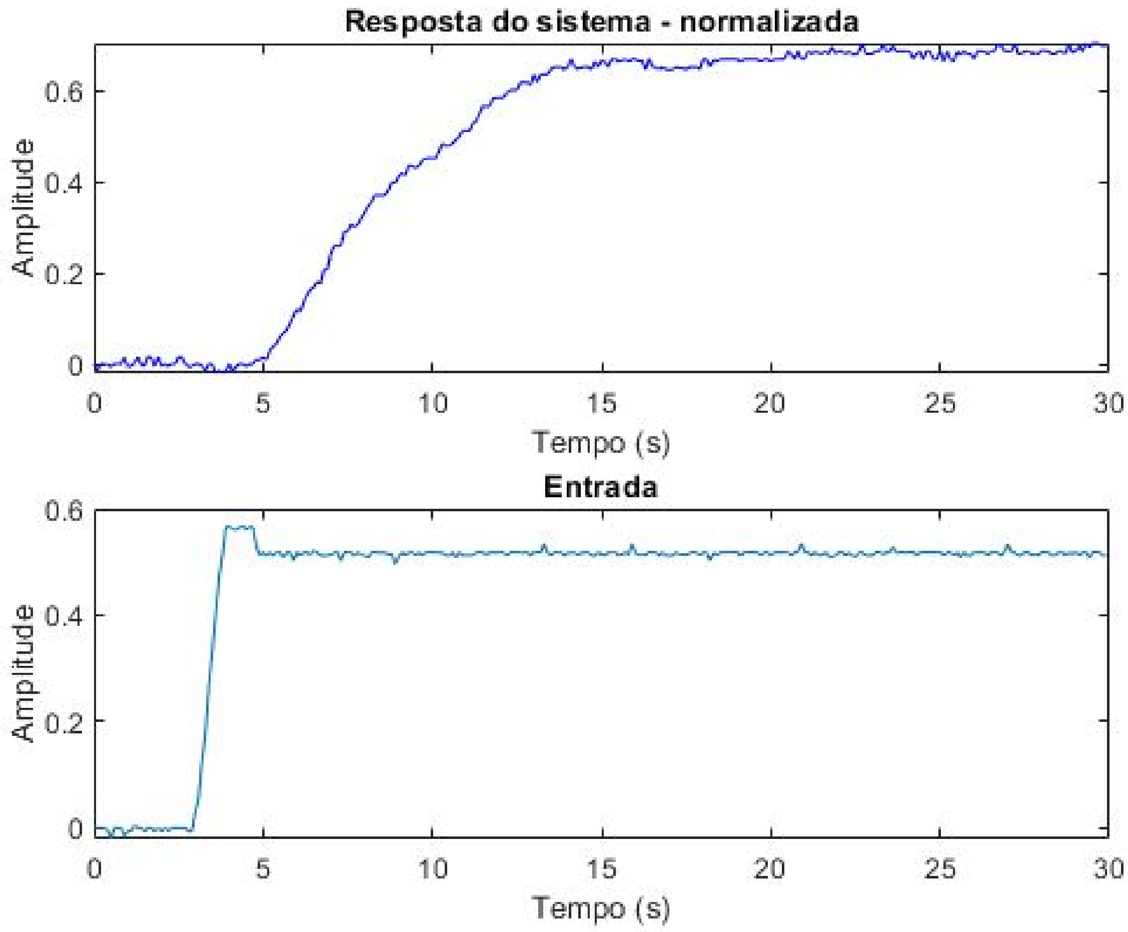

Figura 11. Entrada e saída do arquivo bfg33 normalizada

Feito isso, aplicou-se o método dos mínimos quadrados, usando os mesmos regressores que são apresentados na equação 6 e usando uma distância d = 4. Os valores encontrados foram $\widehat{\Theta}_{MQ} = [0.9895 \;\; 0.0075]$, onde os valores estimados para o modelo foram $\widehat{\tau} = 9.51$ e $\widehat{K} = 0.7$, porém analisando o comportamento da função, ajustou-se o valor do ganho K para $\widehat{K} = 1.4$. A função de transferência obtida, assim como resultados de comparação são apresentados nas figuras 12 e 13 abaixo.

$$G(s) = \frac{1{,}4}{9.512s + 1} e^{-1s}$$

$$H_1(s) = \frac{1.338}{3.586s^2 + 4.459s + 1} e^{-1.9s}$$

Equação 8. Modelo estimado G(s) função de transferência apresentada no exercício H1(s)

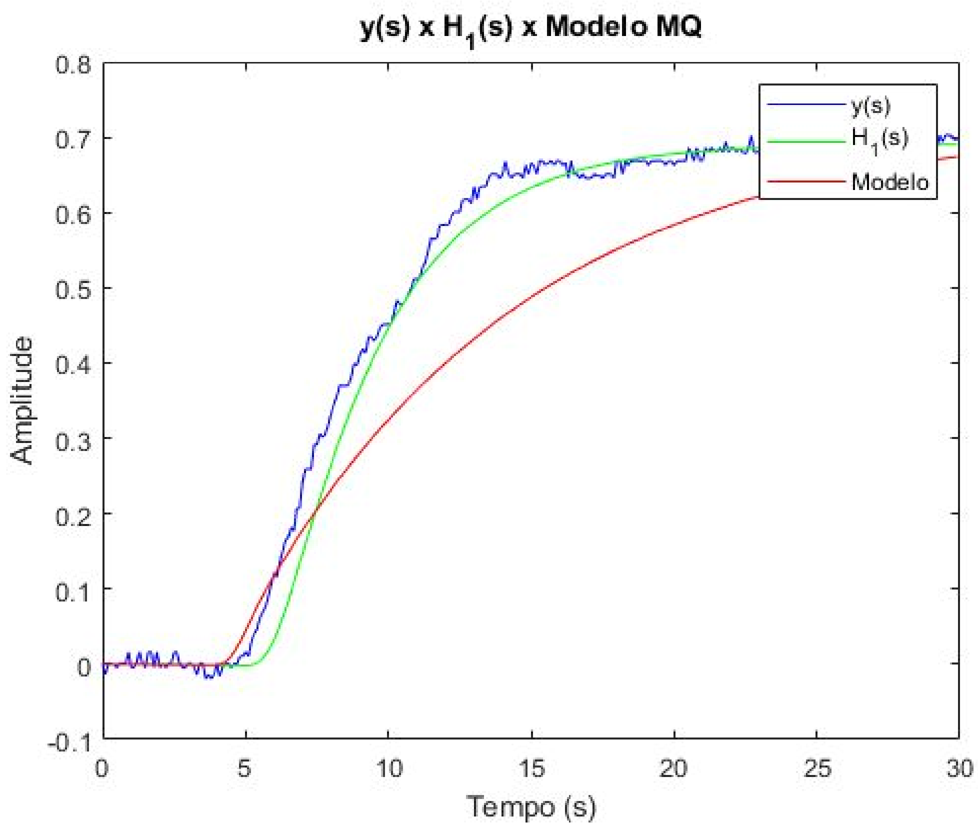

Figura 12. Comparação entre saída do arquivo y(s), H1(s) e modelo obtido

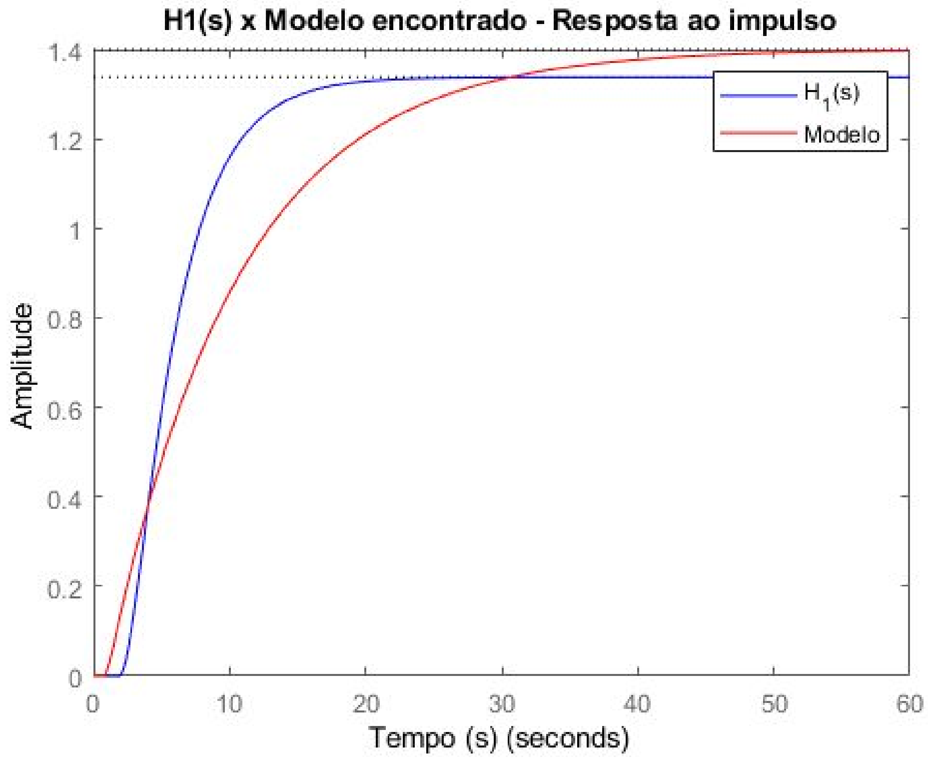

Figura 13. Resposta ao impulso das funções de transferência

O gráfico de entrada e saída do arquivo **bfg44** é apresentado na figura 14 e sua versão normalizada na figura 15.

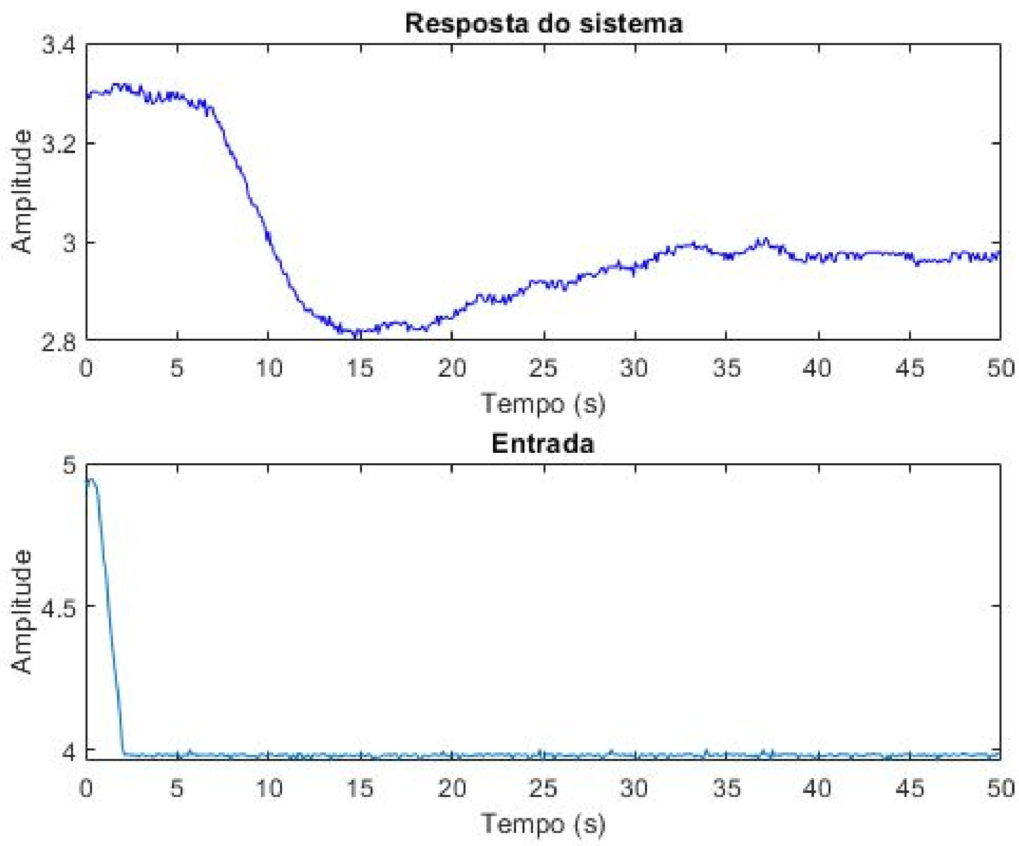

Figura 14. Entrada e saída do arquivo bfg44

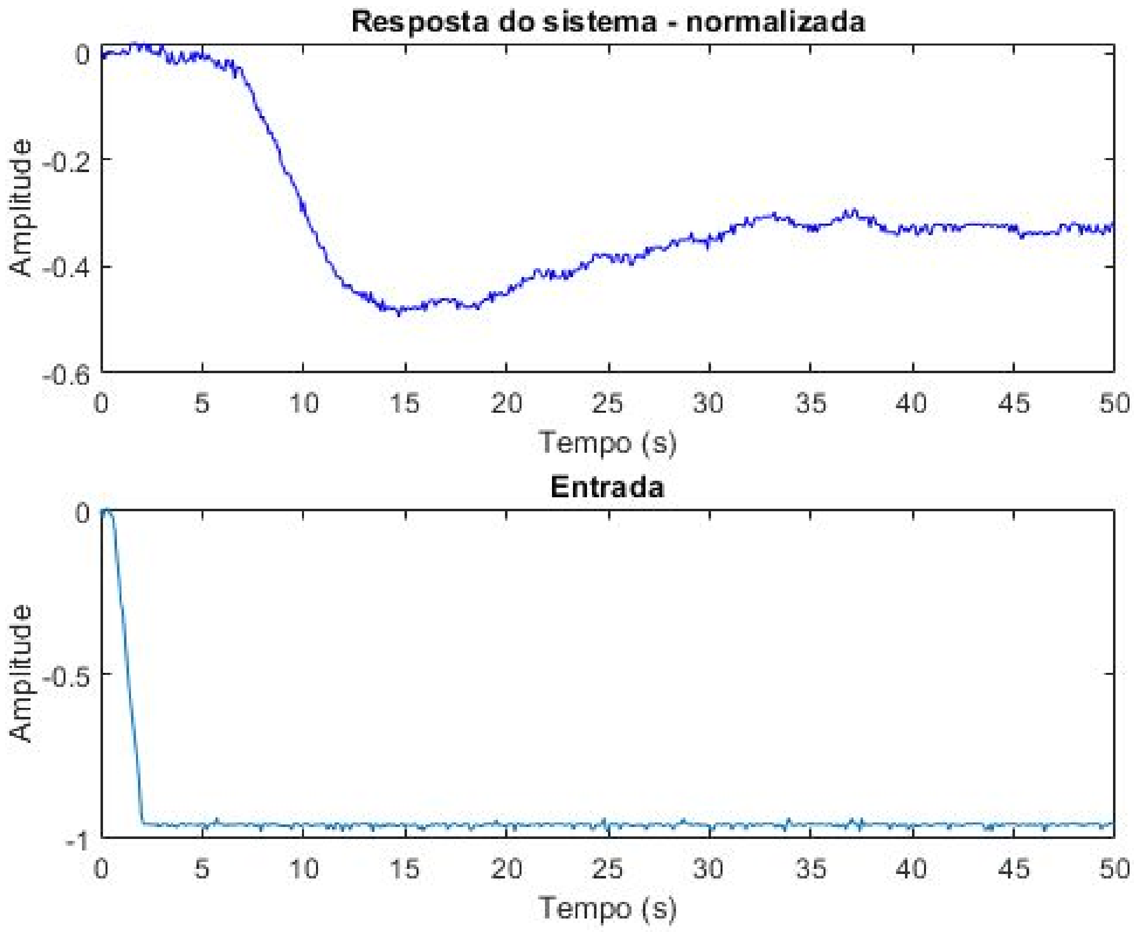

Figura 15. Entrada e saída do arquivo bfg44 normalizada

O mesmo procedimento realizado para o arquivo **bfg33** foi repetido, usando uma distância d = 4. Os valores encontrados foram $\widehat{\Theta}_{MQ} = [0.9904 \;\; 0.0070]$, onde os valores estimados para o modelo foram $\widehat{\tau} = 10.37$ e $\widehat{K} = 0.728$. A função de transferência obtida, assim como resultados de comparação são apresentados nas figuras 16 e 17 abaixo

$$G(s) = \frac{0.728}{10.37s+1}e^{-3s}$$

$$H_2(s) = \frac{0.0182}{s^2+0.1824s+0.052}e^{-4.7s}$$

Equação 9. Modelo estimado G(s) função de transferência apresentada no exercício H2(s)

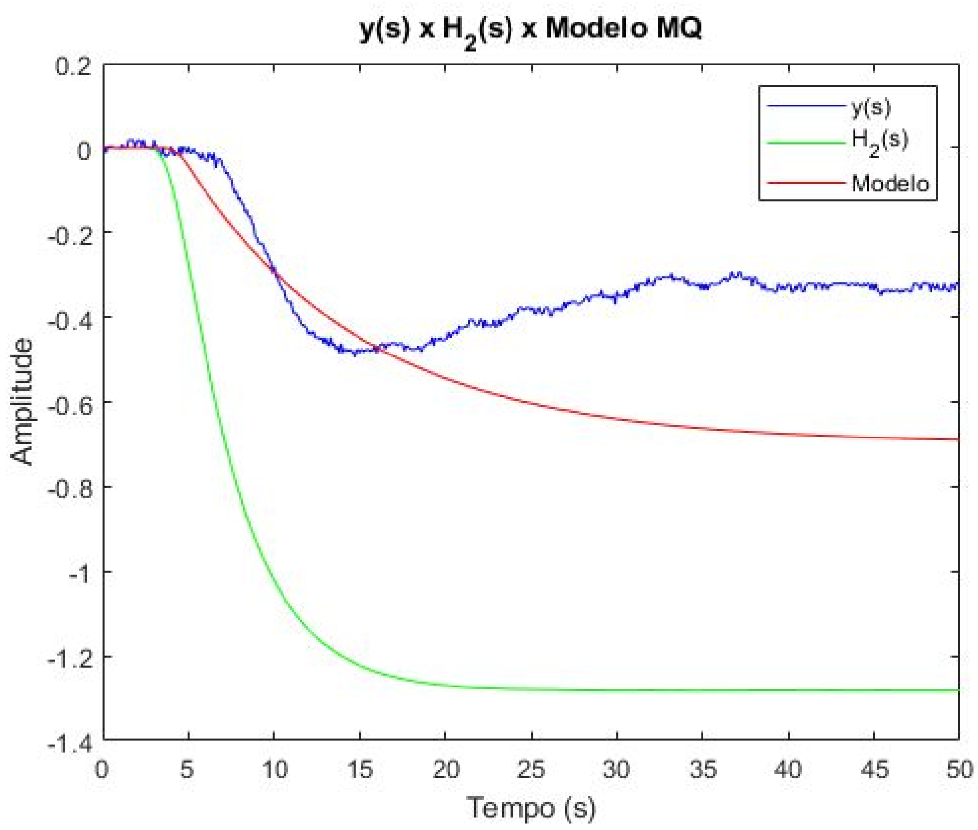

Figura 16. Comparação entre saída do arquivo y(s), H2(s) e modelo obtido

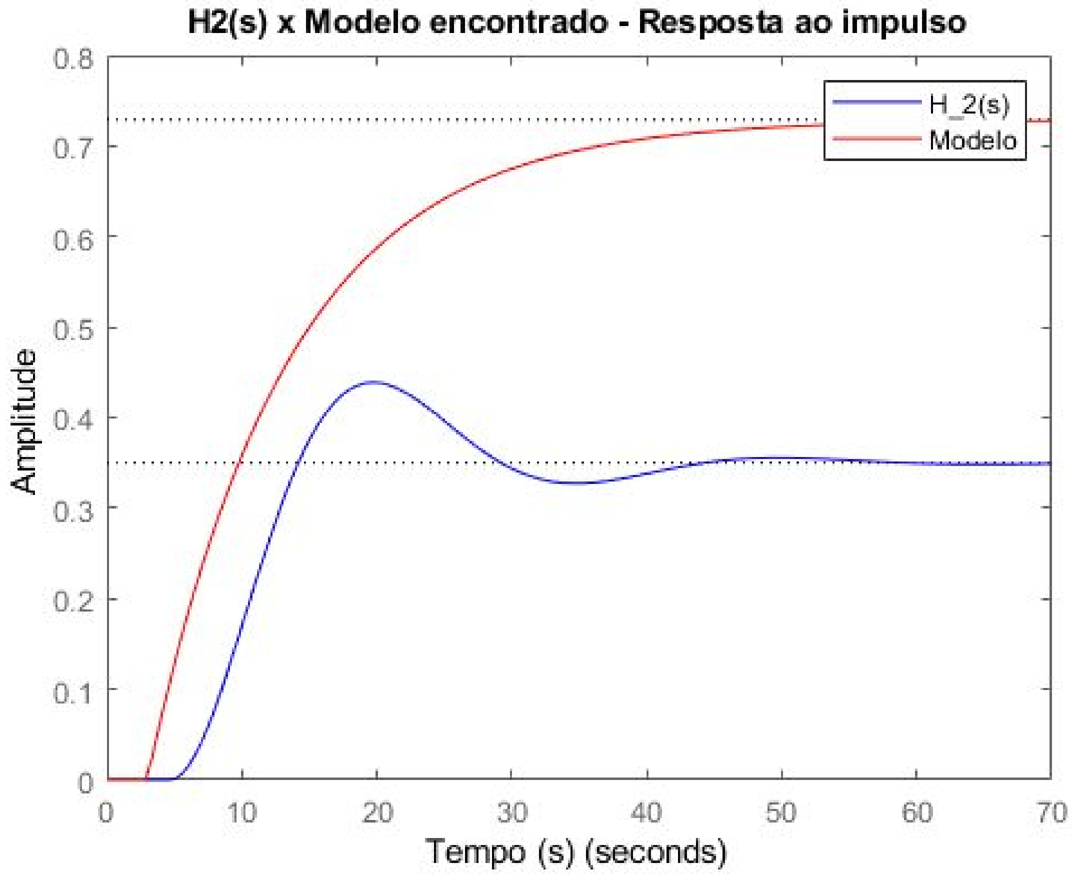

Figura 17. Resposta ao impulso das funções de transferência

Ao realizar este experimento conclui-se que o método dos mínimos quadrados pode ser usado na estimação da função de transferência do processo, porém é preciso que o modelo tenha uma matriz regressora com maior número de colunas para que seu comportamento seja descrito de com maior precisão.

3. Referências

[1] L. A. Aguirre, "Introdução à Identificação de Sistemas". Editora UFMG, 2015.
[2] Rotinas Matlab utilizadas neste relatório referentes à [1]. Disponíveis em:
https://www.researchgate.net/publication/303679484_Introducao_a_Identificacao_de_Sistemas