

# Modelagem e Otimização de Alcoolemia Utilizando Programação Linear Inteira Mista

Artur Soares Bezerra de Mello (2013030392), Hernane Braga Pereira (2014112627)

**Abstract**—Este documento tem como objetivo detalhar e documentar o trabalho computacional desenvolvido na disciplina Pesquisa Operacional, no qual foram abordados os conceitos de otimização e programação linear, aplicados a um modelo criado para analisar uma situação real.

No trabalho, são utilizadas técnicas e ferramentas de otimização, como o Gurobi®, e foi desenvolvido um modelo utilizando a linguagem *Python*. Os resultados encontrados demonstram a capacidade máxima de consumo de álcool consciente por uma pessoa com os tipos físicos e um saldo monetário parametrizados.

Os resultados demonstram uma boa acurácia, denotando uma quantidade coerente com os níveis definidos pelos estudos relacionados à alcoolemia.

**Index Terms**—Otimização, Programação Linear, Alcoolemia, Taxa de álcool no sangue, Bebidas alcoólicas

## I. INTRODUÇÃO

MOTIVADOS em resolver um problema prático e cotidiano no âmbito do convívio social, surgiu o questionamento sobre a possibilidade de otimizar o gasto ao ir em um bar. Diante desta pergunta surgiram outras questões, como o que seria otimizado, se a quantidade de comida comprada pelas pessoas na mesa, ou a quantidade de bebidas alcoólicas consumidas; Custo monetário, nível de embriaguez seriam outras possibilidades. Como estas variáveis são medidas e como elas reagem diante de itens distintos são conhecimentos necessários para se pensar em um problema relacionado com o contexto introduzido. Após responder estes questionamentos, escolhemos como problema motivador a otimização da alcoolemia, também chamada de Taxa de Álcool no Sangue (TAS), para um consumo consciente.

Este trabalho tem como objetivo demonstrar a modelagem, análise e conclusões sobre o problema proposto, e, a partir do sexo biológico e peso de uma pessoa, e de uma lista de bebidas alcoólicas disponíveis com custos monetários e teores alcoólicos distintos, criar um modelo de Programação Linear Inteira Mista (PLIM) que respeita as restrições de saldo disponível na carteira e o nível de alcoolemia que não apresente riscos à saúde, e que represente uma leve embriaguez (comum ao consumo de bebidas alcoólicas), mas ainda assim seja aceitável para o organismo.

## II. REVISÃO DA LITERATURA

Para entender mais do problema e assim gerar um modelo matemático para solucioná-lo, fizemos as seguintes perguntas:

*A. Como é medido o nível de embriaguez de uma pessoa?*

O nível de embriaguez pode ser calculado através de sua taxa de álcool no sangue (TAS), ou taxa de alcoolemia, que é expressa em gramas de álcool por litro de sangue (g/l). Essa taxa é medida diretamente na corrente sanguínea, porém existem formas de estimar este valor, como por exemplo, utilizando um bafômetro que calcula quantas partes de álcool estão presentes no ar expelido pelos alvéolos pulmonares.

*B. É possível relacionar a quantidade de bebida ingerida com o nível de embriaguez?*

Dado o sexo de uma pessoa, seu peso (kg), quantidade de álcool ingerida (ml) e o teor alcoólico da

bebida (expresso em % ABV Alcohol By Volume) é possível calcular a quantidade de gramas de álcool por quilo de sangue (g/kg) [1] à partir da fórmula de Widmark. Com este valor, é possível converter o resultado obtido para a TAS.

*C. Misturar diferentes bebidas alcoólicas causa efeitos diversos?*

Não. De acordo com a [2] BBC o fator primordial para a embriaguez é a taxa de álcool no sangue, inclusive misturar bebidas não piora o efeito da ressaca no dia seguinte. Este é um efeito causado pelo fígado não conseguir processar todo álcool presente na corrente sanguínea.

*D. Variáveis individuais como idade, sexo, peso alteram o resultado final da alcoolemia?*

Sim. Como explicado no artigo de Honorato, a fórmula de Widmark [3] leva em consideração o sexo e peso da pessoa (kg). A variável idade é relevante caso calculássemos o tempo em que o álcool seria eliminado do organismo do indivíduo.

*E. Há alguma restrição de horas para o álcool surtir efeito? E para sua dispersão?*

Os estudos de Widmark apontam que o álcool é difuso pela corrente sanguínea em até 1h após sua ingestão. No entanto, os cálculos para sua dispersão são passíveis de consensos entre diferentes pesquisadores, como é apresentado no artigo de Honorato.

*F. Como a ingestão de bebidas não alcoólicas e de alimentos afetam a TAS?*

Com a ingestão de alimentos e bebidas não alcoólicas, como refrigerantes e sucos, ocorre um aumento na taxa de glicose no sangue. No caso da água, também há um aumento da hidratação no organismo. Não conseguimos fazer uma relação direta entre a ingestão destes itens e a alteração da TAS, porém acreditamos que exista uma relação não linear, que varia em relação ao tempo de ingestão em horas. Portanto, optamos por não incluir tais variáveis no escopo deste trabalho.

*G. Quais são os limites mínimos e máximos que definem o estado de embriaguez?*

A tabela abaixo [4] que foi adaptada de estudos [5] [6], e demonstra os limites e a gradatividade da evolução de alcoolemia [7] de um indivíduo, bem como os efeitos gerados no organismo de acordo com os estágios [8].

TABLE I: Alcoolemia e efeitos no organismo

Alcoolemia (g/L)	Efeitos
0,1 – 0,5	Aumento do ritmo cardíaco e respiratório; diminuição da atenção; Comportamento incoerente ao executar tarefas; diminuição da capacidade de julgamento e perda de inibição; leve sensação de euforia, relaxamento e prazer.
0,6 – 1,0	Diminuição da atenção, julgamento e controle; reflexos mais lentos; dificuldade de coordenação e redução da força muscular; redução da capacidade de tomar decisões ou de discernimento; sensação crescente de ansiedade e depressão.
1,0 – 1,5	Reflexos consideravelmente mais lentos; problemas de equilíbrio e movimento alterados; alteração de algumas funções visuais; dificuldade na fala; vômito, sobretudo se esta alcoolemia for atingida rapidamente.
1,6 – 2,9	Alterações graves da coordenação motora, com tendência a cambalear e a cair frequentemente; estado emocional exagerado (medo, aborrecimentos, aflição); distúrbio da sensação e da percepção às cores, formas, movimentos e dimensões; debilidade no equilíbrio; incoordenação muscular.
3,0 – 3,9	Letargia profunda; perda de consciência; estado de sedação comparável ao de uma anestesia cirúrgica.
$\geq 4,0$	Inconsciência; incontinência urinária e fecal; parada respiratória; morte, em geral provocada por insuficiência respiratória.

### III. ANÁLISE DO PROBLEMA COMPUTACIONAL

O problema de otimizar o nível alcoólico dentro de um consumo consciente pode ser compreendido como uma aplicação do problema da mochila (*knapsack problem*). Este problema é apresentado, "dado

uma quantidade  $n$  de itens (que podem se repetir), cada item com seu peso  $w_i$  e lucro  $p_i$ , e uma mochila com capacidade  $C$  selecione os itens que, respeitadas as restrições de capacidade da mochila, maximizem o lucro da seleção”.

Apesar disso, o problema da mochila ilimitado apresenta uma solução utilizando programação dinâmica que pode acelerar o tempo de execução para se chegar no ótimo. A partir da análise da solução dos  $i$  pesos anteriores, é possível definir se a escolha do peso  $w_i$  é mais vantajosa ou não por comparação. Portanto, calculando-se os casos intermediários de seleção de pesos dentro de um conjunto de valores de pesos de 0 a  $W$ , e sabendo-se que, no caso base, a seleção de 0 itens traz um retorno 0 para a solução, inferimos que será necessário avaliar no máximo  $n$  itens com valores de peso de no máximo  $W$ . É possível concluir, portanto, que a solução utilizando programação dinâmica nos dá uma complexidade de tempo de execução de  $O(nW)$ .

É importante denotar que  $W$  é representado por um conjunto de bits que dão os valores de peso dos itens. Assim, o tamanho da entrada  $W$  do problema é proporcional ao número de bits que representa  $W$ , ou  $\log_2(W)$ . Isso significa que o problema continua sendo NP-Completo, e não apresentando solução determinística em tempo polinomial.

A forma utilizada neste trabalho será a partir do método de Programação Linear Inteira Mista, utilizando a ferramenta *solver Gurobi®* com a interface para Python 3.7. O solver realiza a otimização linear fazendo uso da abordagem de branch-and-bound, onde, para se encontrar as soluções factíveis, o algoritmo enumera todas as soluções, e elimina grande parte daquelas que não se adequam às restrições, utilizando para isso os limites inferior e superior das variáveis de otimização [10].

#### IV. DESCRIÇÃO E MODELAGEM DO PROBLEMA

A partir das respostas acima, decidimos restringir nosso problema em otimizar a Taxa de Álcool no Sangue. Dado uma base de dados contendo o nome das bebidas alcoólicas, seus respectivos preços e teores alcoólicos, deve-se otimizar a TAS respeitando as restrições de: não exceder o saldo disponível na

carteira, e de entrar em um estado de embriaguez, que não ultrapasse os limites que implicam em condições físicas e psíquicas deterioradas.

##### A. Cálculo de TAS

Para calcular a TAS, é utilizado o critério transcrito abaixo:

*“Os estudos de Widmark permitem determinar a quantidade de álcool no sangue (C) por meio de cálculos matemáticos fundados em três informações essenciais: a quantidade de álcool ingerida (A), o peso corporal (p) e o quociente de redução (r), que representa a relação de distribuição do álcool entre o sangue e o restante do corpo, de modo que  $A = P \cdot R \cdot C$ . (p.89)”*

A partir de pesquisas sobre a distribuição heterogênea do álcool pelo organismo humano, foi possível determinar a razão existente entre a quantidade de álcool no sangue e o volume total de álcool no organismo. Essa relação constante foi denominada quociente de redução  $r$ . O valor médio do quociente  $r$  é de  $0,68 \pm 0,085$  para pessoas do sexo masculino e de  $0,55 \pm 0,055$  para pessoas do sexo feminino.

Para exemplificar o uso da fórmula, usaremos como exemplo um homem de 80 kg que ingeriu uma dose de vodka de 100 ml.

Pela fórmula de Widmark:

$$A_{[g \text{ de álcool}]} = R \cdot P_{[Kg]} \cdot C_{[g \text{ de álcool/kg de sangue}]} \quad (1)$$

Desejamos encontrar o termo C, então primeiro calculamos A:

$$A_{[g \text{ de álcool}]} = \frac{ABV}{100} \cdot Volume_{[ml]} \cdot 0.79, \quad (2)$$

onde 0.79 corresponde à conversão de 1ml de álcool para gramas

$$A_{[g \text{ de álcool}]} = \frac{46}{100} \cdot 100_{[ml]} \cdot 0.79 = 36.34_{[g \text{ de álcool}]} \quad (3)$$

O termo R varia se o sexo é masculino ou feminino, então usaremos:  $R = 0.68$  para o sexo masculino, e  $R = 0.55$  para o sexo feminino.

Temos então que:

$$C_{\left[\frac{g \text{ de álcool}}{kg \text{ de sangue}}\right]} = \frac{A_{[g \text{ de álcool}]}}{R \cdot P_{[Kg]}} \quad (4)$$

$$C_{\left[\frac{g \text{ de álcool}}{kg \text{ de sangue}}\right]} = \frac{36.34_{\left[\frac{g \text{ de álcool}}{kg \text{ de sangue}}\right]}}{0.68 \cdot 80_{[Kg]}} \quad (5)$$

$$C_{\left[\frac{g \text{ de álcool}}{kg \text{ de sangue}}\right]} = 0.66_{\left[\frac{g \text{ de álcool}}{kg \text{ de sangue}}\right]} \quad (6)$$

Para converter a quantidade de álcool no sangue encontrada em taxa de álcool no sangue (TAS), que é a referência de quantização de álcool no organismo e é aferida em gramas por litro de sangue, dividimos o resultado por 1.056, por ser necessária a conversão do resultado com base na densidade do sangue, que é 1,056kg/l. Temos então que:

$$TAS_{\left[\frac{g \text{ de álcool}}{l \text{ de sangue}}\right]} = \frac{C_{[g \text{ de álcool}/l \text{ de sangue}]}}{1.056} \quad (7)$$

$$TAS_{\left[\frac{g \text{ de álcool}}{l \text{ de sangue}}\right]} = 0.625_{\left[\frac{g \text{ de álcool}}{l \text{ de sangue}}\right]} \quad (8)$$

Ao final deste exemplo, o homem está com uma TAS de 0.625 (g/l) e está no estágio 2 de embriaguez (TAS entre 0.6 e 1.0), de acordo com a Tabela 1.

### B. Restrições do problema

Nosso modelo de otimização recebe como parâmetros de entrada iniciais: peso (kg), sexo biológico da pessoa e o quanto ela possui de saldo disponível (R\$) para comprar itens. O saldo disponível (variável Saldo) será um limitante, de forma que a soma dos itens adquiridos não pode ultrapassar Saldo. Os inputs de peso (kg) e sexo serão pré-processados para calcular a Taxa de Álcool no Sangue (TAS) de cada bebida da lista, portanto estas variáveis não entram diretamente no modelo. O valor final da TAS deverá estar entre 0.3 (g/l), que corresponde ao meio do primeiro estágio de embriaguez, e 1.2 (g/l) valor no início do estágio de forte alcoolização, mas ainda sem estar num nível considerado ruim. Dessa forma a variável  $TAS_{min} = 0.3_{[g/l]}$  e  $TAS_{max} = 1.2_{[g/l]}$ . Ambos os valores foram definidos de acordo com a Tabela 1.

### C. Modelo sintetizado

A partir das descrições acima, e de todo o arcabouço acumulado, a modelagem matemática do modelo proposto fica como abaixo:

$$\max \sum_{i=1}^n x_i \cdot TAS_i, \quad (9)$$

sujeito a:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \cdot TAS_i \geq TAS_{min} \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot TAS_i \leq TAS_{max} \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot Preco_i \leq Saldo \\ x_i \in \mathbb{Z}^* \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ Saldo, Preco_i, TAS_i \in \mathbb{R}^+ \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ 0 \leq TAS_{min} \leq TAS_{max}, TAS_{min}, TAS_{max} \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

### D. Base de Dados

A base de dados do problema é composta por itens que são bebidas alcoólicas, com volume (ml), preço (R\$), e %ABV. O conjunto escolhido foi baseado em preços praticados em bares e restaurantes de Belo Horizonte. A tabela pode ser expandida, e mais itens serão considerados no problema, mas, para bem de demonstração e melhor visualização dos resultados analisados posteriormente, serão feitos os experimentos a partir da base detalhada na tabela abaixo:

TABLE II: Lista de bebidas considerada na análise do modelo

Bebida	Volume [ml]	Preço [R\$]	%ABV
Brahma garrafa	600	8,50	4,8
Heineken	350	5,00	5
Budweiser Long Neck	343	6,00	6
Skol Latão	473	5,00	4,7
Cerveja Especial	600	21,90	8,4
Vinho Seco	90	18,00	11,5
Espumante	90	18,00	12,5
Cachaça	45	12,00	40
Tequila	45	15,00	35
Vodka	100	20,00	40
Whiski	100	30,00	43

## V. RESULTADOS E ANÁLISE

A partir do script em Python construído, foram escolhidas algumas instâncias do problema, com parametrizações específicas para pessoas do sexo biológico feminino e masculino. Os resultados adquiridos foram colhidos em gráficos e estão mostrados abaixo, juntamente com a saída do script criado.

### A. Resultados experimentais

O primeiro resultado é para um homem de 75Kg e R\$350,00 de saldo. É possível perceber que o gasto total é bem abaixo do saldo, o que representa também uma minimização do gasto no estabelecimento considerado.

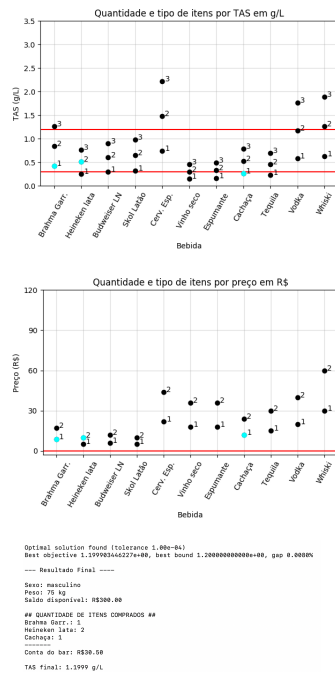


Fig. 1: Resultados para um homem de 75Kg com R\$350,00.

Para o segundo resultado, um homem de 85Kg com R\$50,00 foi examinado. Os dados são denotados a seguir.

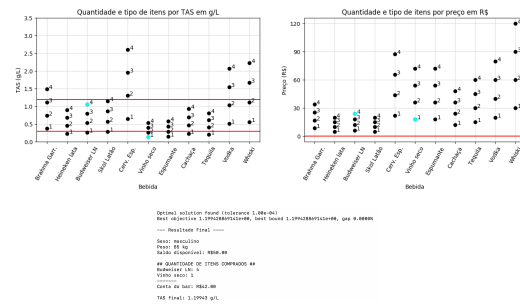


Fig. 2: Resultados para um homem de 85Kg com R\$50,00 na carteira.

Agora, para demonstrar diferenças no sexo biológico, bem como a mudança de outros parâmetros, escolhemos uma mulher de 75Kg, com R\$50,00 de saldo.

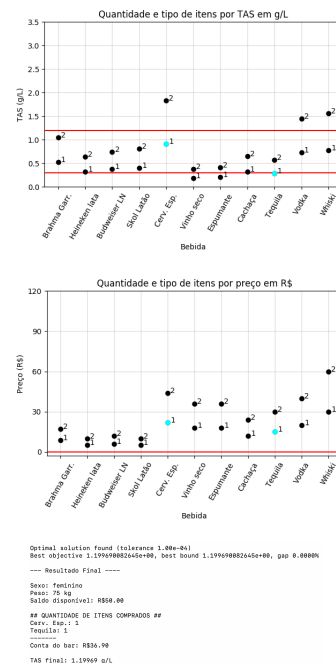


Fig. 3: Resultados para uma mulher de 75Kg com R\$50,00 na carteira, numa perspectiva de gastos e de TAS.

Agora, para uma mulher de 60Kg com R\$300,00 na carteira, os resultados são mostrados abaixo.

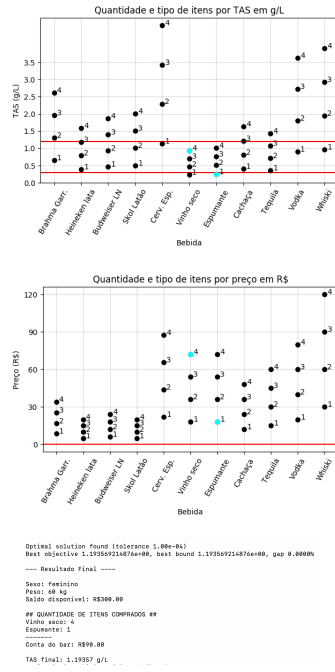


Fig. 4: Resultados para um homem de 60Kg com R\$300,00 na carteira, numa perspectiva de gastos e de TAS.

É possível perceber uma mudança na seleção de itens consumidos e no gasto final, para alcançar o máximo do nível de álcool no sangue dentro dos limites estipulados.

Os resultados acima foram conseguidos baseando-se em parâmetros realistas. Foram realizadas tentativas com valores mais surreais, como quantidades ilimitadas de dinheiro ou um peso muito abaixo ou muito acima do esperado para uma pessoa adulta. As infactibilidades foram cheçadas dessa forma.

Seria possível simular um problema utilizando limites máximos de estoque de cada bebida. Isso deixaria a procura da solução mais complexa, mas o funcionamento do algoritmo se manteria semelhante, apesar da adição de  $n$  restrições de desigualdade. Para manter a simplicidade num nível aceitável para a construção deste trabalho, os resultados acima demonstram muito bem o que se esperava da solução construída.

### B. Análise de tempo de execução

O gráfico da Fig. 9 demonstra o tempo de execução quando existem diferentes números de bebidas disponíveis na lista.



Fig. 5: Tempo de execução para diferentes instâncias do problema.

Esse comportamento pode ser entendido como tendo crescimento exponencial, como é esperado para a análise de complexidade do problema da mochila.

## VI. CONCLUSÃO

Aprendemos com este trabalho como modelar um problema cotidiano utilizando um modelo de programação linear inteira mista e a resolvê-lo computacionalmente, através de um *solver* como o Gurobi. Apesar da implementação final poder abranger maiores níveis de complexidade, quanto mais se extrapola o estudo no tema, a maior dificuldade deste trabalho esteve no entendimento do problema e construção do modelo: quais perguntas fazer, onde encontrar respostas, como definir o escopo do problema, como modelá-lo computacionalmente e encontrar respostas factíveis com o contexto real.

Apesar de o trabalho poder ser expandido para maiores complexidades de análise, decidimos manter no nível realizado para demonstrar a funcionalidade dentro do escopo deste. Pudemos perceber que as soluções encontradas são otimizadas, e o *solver Gurobi* realizou o trabalho inclusive encontrando o menor custo possível dentro do esperado. As soluções ótimas realmente buscam a maximização da taxa de álcool no sangue.

É sempre importante denotar que o consumo consciente de bebidas alcoólicas é imprescindível para o bem estar do indivíduo, e é de suma importância para garantir um convívio social que não gere problemas para outras pessoas. O objetivo do trabalho não é aumentar o consumo de insumos alcoólicos, e sim analisar, a partir de um contexto cotidiano, uma forma de uma pessoa se manter em um nível controlado de alcoolemia, dentro de parâmetros aceitáveis, gastando o necessário para tanto.

#### REFERENCES

- [1] C. Honorato, “Etiloxidação: se bebi, quando poderei dirigir com segurança?”, SEJ, vol. 18, nº 1, p. 88-102, jun. 2013.
- [2] BBC - <https://www.bbc.com/portuguese/vert-fut-42254341> acessado em 23/11/2018 às 22h42
- [3] Widmark EMP. Principle and applications of medicolegal alcohol determination. California (USA): Biomedical Publications; 1981.
- [4] L. Rachkorsky, T. Zerbini, e R. Cintra, Avaliação pericial da embriaguez: legislação e aspectos práticos, SEJ, vol. 17, nº 2, p. 44-49, dez. 2012.
- [5] Dubowski KM. Manual for analysis of ethanol in biological liquids. Washington, D.C.: U.S. Department of Transportation; 1977.
- [6] Amdur MO, Doull J, Klaassen CD. Casarett and Doull's toxicology: the basic science of poisons. New York: Pergamon Press; 1991.
- [7] Homburger F, Hayes JA, Pelikan EW. A guide to general toxicology. Basel: Karger; 1983.
- [8] World Health Organization. Drinking and driving: an international good practice manual. Genebra; 2007.
- [9] Algoritmos, Cormen, T. and Leiserson, C. and Rivest, R. ISBN 9788535248616, 2017, 3a ed. Elsevier Editora Ltda.
- [10] S. Martello, P. Toth, Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations, John Wiley and Sons, 1990