UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR

HERNANE BRAGA PEREIRA
ALEXANDRE RIBEIRO

TRABALHO PRÁTICO:
Comparação entre métodos de otimização não lineares restrito e irrestritos

Belo Horizonte
2017

INTRODUÇÃO

Os métodos determinísticos irrestritos são utilizados para solucionar diversos problemas de otimização. Podemos citar exemplos de dois grupos: Método Gradiente, Método de Newton e Método Quasi-Newton da família Broyden, para problemas irrestritos; Método Lagrangiano Aumentado (ALM), para problemas com restrições. Métodos quais, iremos abordar neste trabalho. O objetivo é comparar a eficiência de cada algoritmo, levando em consideração três critérios: a velocidade de convergência, a solução final encontrada e o número de avaliações até o critério de parada. Para realizar a análise da eficiência dos métodos de otimização citados, será considerado dois casos irrestritos e um caso com restrições.

1. PROBLEMA IRRESTRITO

Os problemas irrestritos foram analisados através de duas funções objetivo:

- $F_1(x) = 100(x_2 - x_1{}^2)^2 + (1 - x1)^2$, nos pontos $x(-1,\ 1.5)$ e $x(-1.2,\ 1)$

- $F_2(x) = 3(1 - x_1)^2 e^{(-x1^2 - (x2+1)^2)} - 10(x_1/5 - x_1{}^3 - x_2{}^5)\, e^{(-x1^2 - x2^2)} - (1/3)\, e^{(-(x1+1)^2 - x2^2)}$ nos pontos $x(0,\ 0)$ e $x(0,\ -0.6)$

Para solucionar os dois problemas foi considerado o seguinte critério de otimalidade:

$$(|F\ (x_{k+1}) - F\ (x_k)|) <= \varepsilon$$

$$\varepsilon = 10^{-2}$$

Abaixo segue a avaliação dos resultados seguindo a implementação dos algoritmos de otimização para otimização irrestrita.

Gráfico das Soluções

Para realizar o plot dos gráficos deste trabalho, foi utilizado o código em

MatLab dos professores Lucas de Souza Batista e Jaime Ramírez. Ele foi utilizado para explicitar o gráfico da função objetivo e desenhar o caminho percorrido pelo método de otimização escolhido. Ao final da execução é gerado outro gráfico que compara o valor da função objetivo no decorrer das iterações do método.

1. ANÁLISE E RESULTADOS DOS PROBLEMAS IRRESTRITOS

a. FUNÇÃO OBJETIVO 1

x_0	MÉTODO	ITERAÇÕES	x^*	$F(x)$
[-1.0, 1.5]	Gradiente	03	[-1.1824, 1.4020]	+4.7644
[-1.0, 1.5]	BFGS	18	[0.9552, 0.9067]	+0.0054
[-1.0, 1.5]	Newton	09	[+0.9451 +0.8881]	+0.0055
[-1.2, 1.0]	Gradiente	16	[-0.8993, 0.8197]	+3.6193;
[-1.2, 1.0]	BFGS	20	[0.9920, 0.9813]	+0.0008
[-1.2, 1.0]	Newton	10	[+1.0040 +1.0091]	+0.0001

Tabela 1: Comparação dos resultados obtidos por método usado na função objetivo 1

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Em relação à qualidade da solução, independente do ponto de início, os métodos de Newton e BFGS conseguem os melhores resultados, devido à sua característica de avaliar a Hessiana da função. O método de Newton calcula a Hessiana, enquanto o BFGS realiza uma estimativa, o que eleva o número de iterações necessárias para encontrar o mínimo, mas reduz o custo computacional. O pior resultado encontrado foi utilizando o método do Gradiente, que, como pode ser observado nos gráficos abaixo, começou a entrar no efeito “zig-zag”.

Gráficos comparativos - Função objetivo 1 - Início no ponto (-1, 1.5)

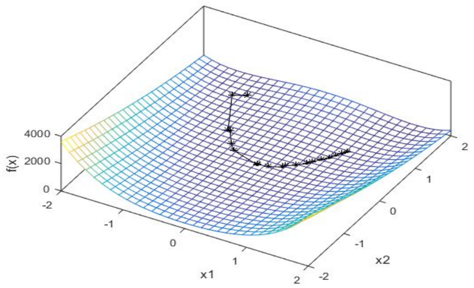


Figura 1: Convergência BFGS em F_1 iniciando no ponto (-1, 1.5)

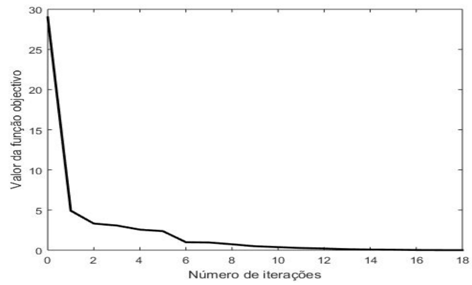


Figura 2: BFGS em F_1 iniciando no ponto (-1, 1.5) - Valor por iteração

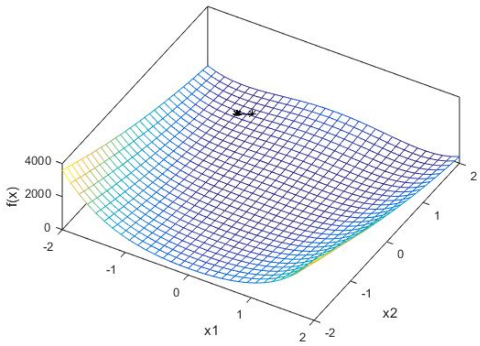


Figura 3: Convergência Gradiente em F_1 iniciando no ponto (-1, 1.5)

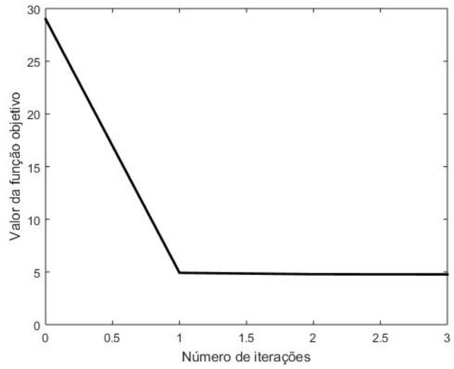


Figura 4: Gradiente em F_1 iniciando no ponto (-1, 1.5) - Valor por iteração

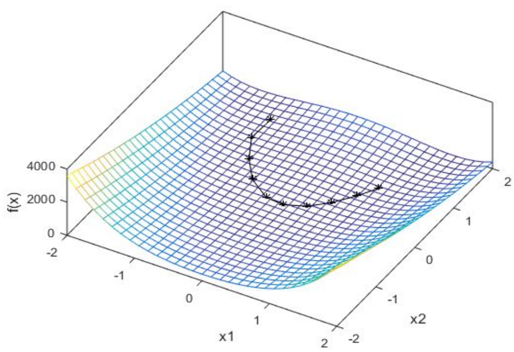


Figura 5: Convergência Newton em F_1 iniciando no ponto (-1, 1.5)

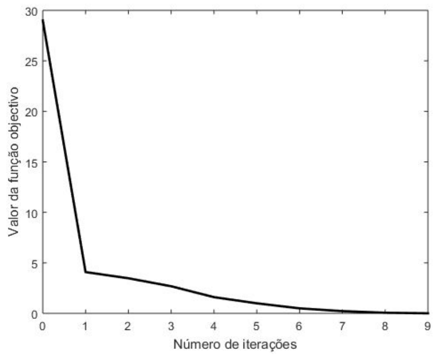


Figura 6: Newton em F_1 iniciando no ponto (-1, 1.5) - Valor por iteração

Gráficos comparativos - Função objetivo 1 - Início no ponto (-1.2, 1)

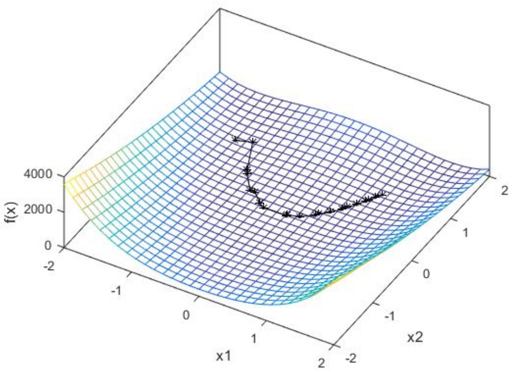


Figura 7: Convergência BFGS em F_1 iniciando no ponto (-1.2, 1)

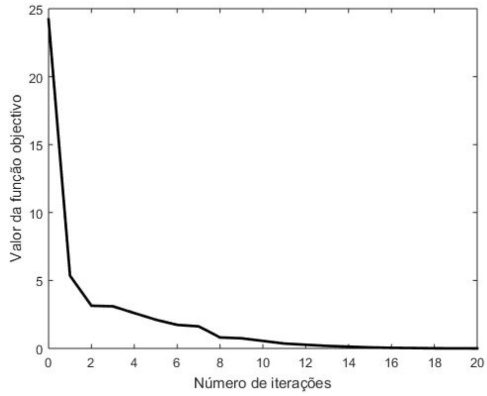


Figura 8: BFGS em F_1 iniciando no ponto (-1.2, 1) - Valor por iteração

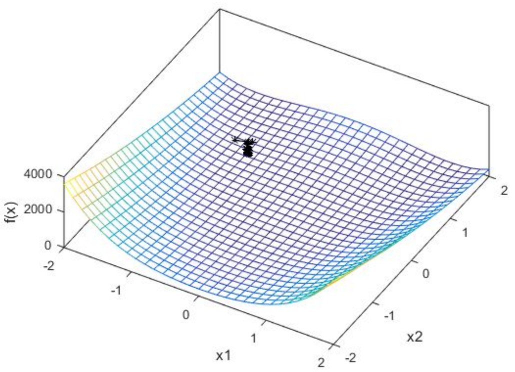


Figura 9: Convergência Gradiente em F_1 iniciando no ponto (-1.2, 1)

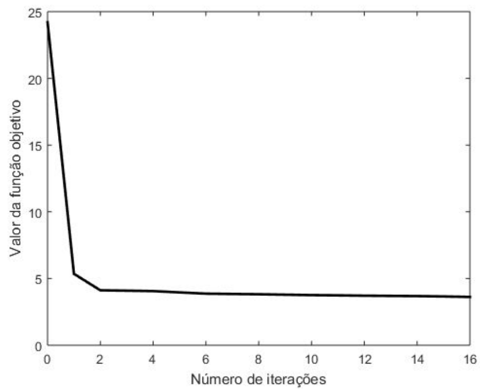


Figura 10: Gradiente em F_1 iniciando no ponto (-1.2, 1) - Valor por iteração

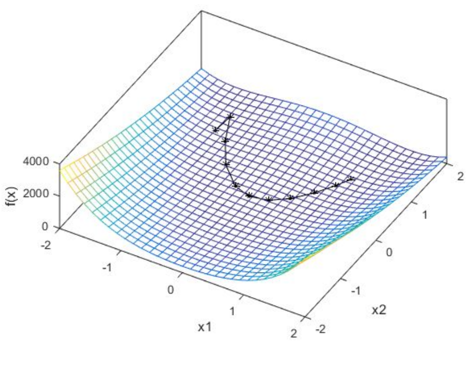


Figura 11: Convergência Newton em F_1 iniciando no ponto (-1.2, 1)

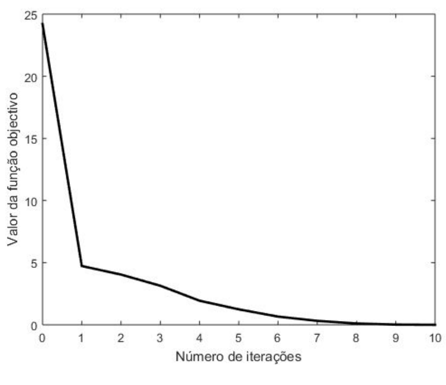


Figura 12: Newton em F_1 iniciando no ponto (-1.2, 1) - Valor por iteração

b. FUNÇÃO OBJETIVO 2

x_0	MÉTODO	ITERAÇÕES	x^*	$F(x)$
[0 0]	Gradiente	2	[+0.2771 +0.3055]	-0.0609
[0 0]	BFGS	3	[+0.2929 +0.3262]	-0.0647
[0 0]	Newton	1	[-0.0014 +0.4059]	+0.4083
[0 -0.6]	Gradiente	3	[+0.2386 -1.6142]	-6.5487
[0 -0.6]	BFGS	6	[+0.2283 -1.6256]	-6.5511
[0 -0.6]	Newton	1	[+0.4367 -0.5427]	+0.2920

Tabela 2: Comparação dos resultados obtidos por método usado na função objetivo 2

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Podemos usar essa função como exemplo para entender como a escolha do primeiro ponto de otimização é importante. A pequena diferença de escolher entre (0,0) e (0, -0.6) trouxe um ganho muito significativo para a resolução do problema de otimização. Apesar do método de Newton convergir com apenas uma iteração, seu resultado é o pior dentre os métodos utilizados. Por se encontrar na bacia de atração do ponto inicial de convergência da função objetivo, o método Gradiente possui um resultado satisfatório. No entanto, o método BFGS possui a solução com melhor precisão, mas também o maior número de iterações. Apesar de cada iteração do método ter um custo computacional $O(n^2)$, ele possui a vantagem de usar somente as derivadas primeiras para encontrar o mínimo da função.

Gráficos comparativos - Função objetivo 2 - Início no ponto (0, 0)

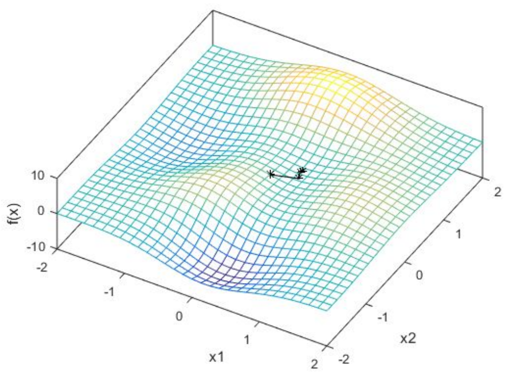


Figura 13: Convergência BFGS em F_1 iniciando no ponto (0, 0)

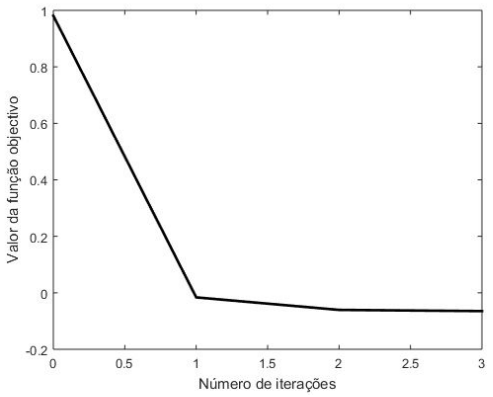


Figura 14: BFGS em F_1 iniciando no ponto (0, 0) - Valor por iteração

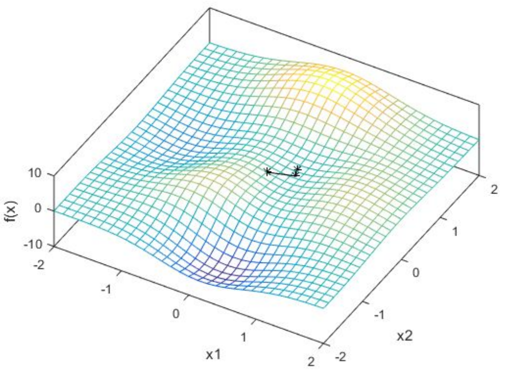


Figura 15: Convergência Gradiente em F_1 iniciando no ponto (0, 0)

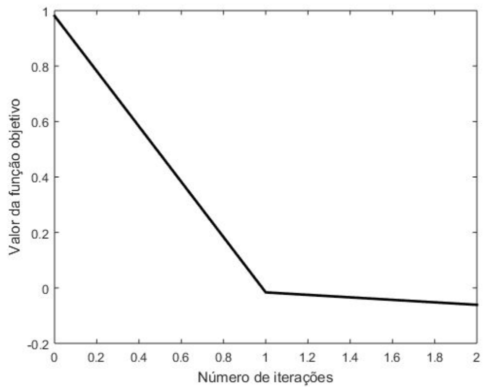


Figura 16: Gradiente em F_1 iniciando no ponto (0, 0) - Valor por iteração

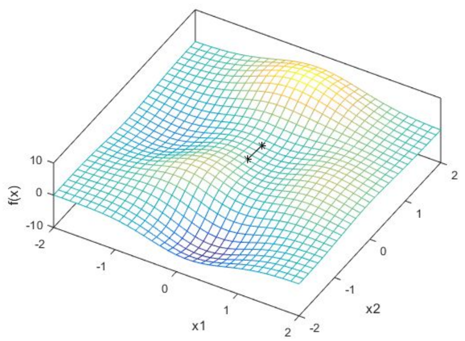


Figura 17: Convergência Newton em F_1 iniciando no ponto (0, 0)

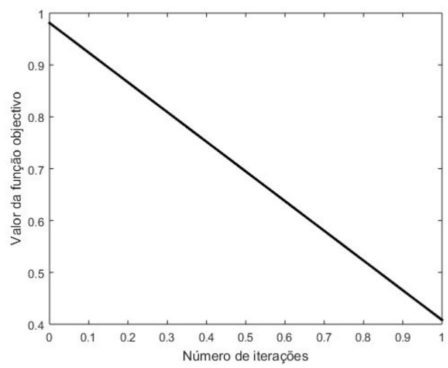
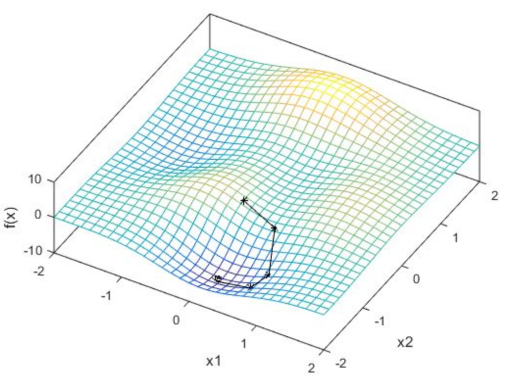


Figura 18: Newton em F_1 iniciando no ponto (0, 0) - Valor por iteração

Gráficos comparativos - Função objetivo 2 - Início no ponto (0, -0.6)



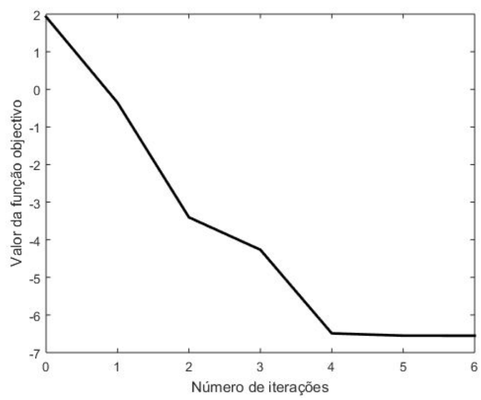
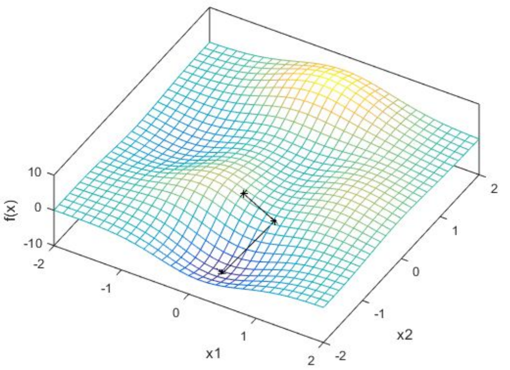


Figura 19: Convergência BFGS em F_1 iniciando no ponto (0, -0.6)

Figura 20: BFGS em F_1 iniciando no ponto (0, -0.6) - Valor por iteração



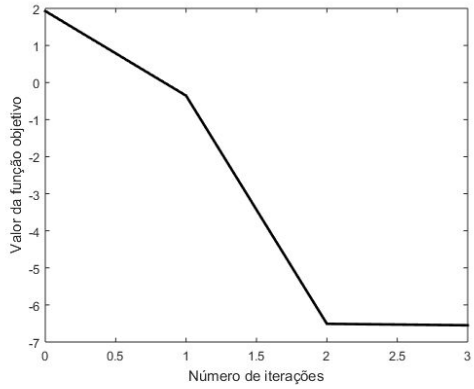
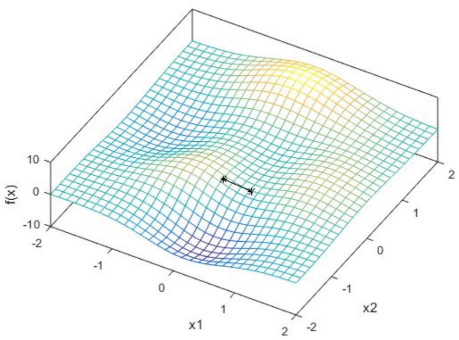


Figura 21: Convergência Gradiente em F_1 iniciando no ponto (0, -0.6)

Figura 22: Gradiente em F_1 iniciando no ponto (0, -0.6) - Valor por iteração



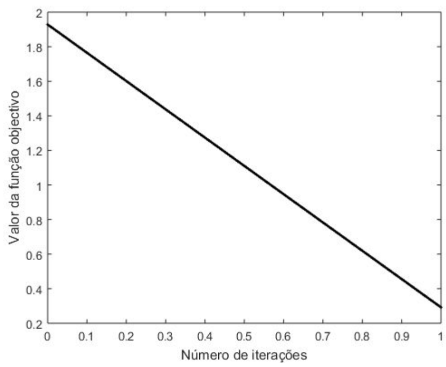


Figura 23: Convergência Newton em F_1 iniciando no ponto (0, -0.6)

Figura 24: Newton em F_1 iniciando no ponto (0, -0.6) - Valor por iteração

a. Problema restrito - Questão 2

Minimizar a função restrita abaixo usando o método de Lagrangeano Aumentado com o método do Gradiente e o método Quasi-Newton (BFGS)

$$\min f(\boldsymbol{x}) = x_1^4 - 2x_1^2x_2 + x_1^2 + x_1x_2^2 - 2x_1 + 4$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} h(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ g(\boldsymbol{x}) = 0.25x_1^2 + 0.75x_2^2 - 1 \le 0 \\ -2 \le x_1 \le 5; -2 \le x_2 \le 5 \end{cases}$$

x_0	**MÉTODO**	**ITERAÇÕES**	x^*	$F(x)$
[3 3]	BFGS	18	[+1.0000 -1.0000]	+3.0000
[3 3]	Gradiente	6	[+1.2159 -0.7710]	+3.6192

Tabela 3: Comparação dos resultados obtidos em cada um dos métodos

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Ambas soluções tiveram um resultado final próximos, com a diferença de que o BFGS encontrou o mínimo global à partir da 10º iteração, porém terminou de ser executado na 18º. Em termos de precisão, o método BFGS se mostrou ser mais eficiente, porém o método do Gradiente chegou à um resultado bem próximo com menos iterações. Em relação ao comportamento de convergência, os dois se assemelham bastante, como pode ser visto nos gráficos.

Gráficos comparativos - Problema de otimização restrita

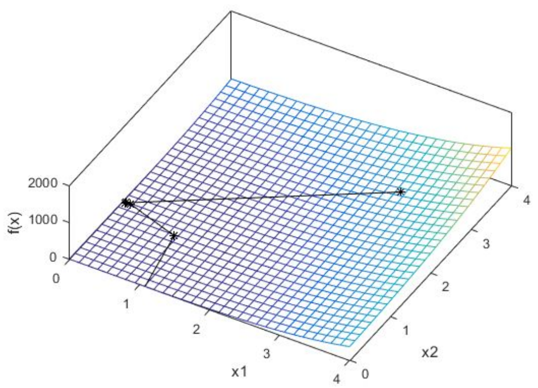


Figura 25: Convergência BFGS em F iniciando no ponto (3, 3)

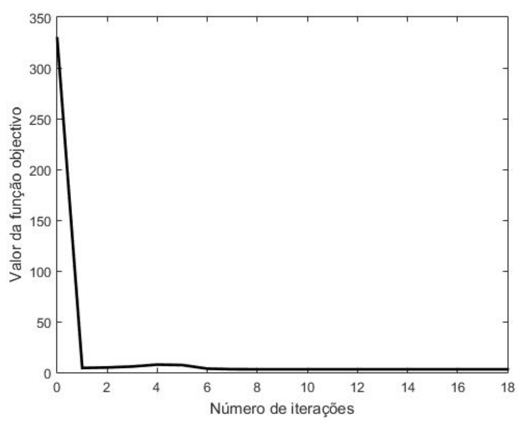


Figura 26: BFGS em F iniciando no ponto (3, 3) - Valor por iteração

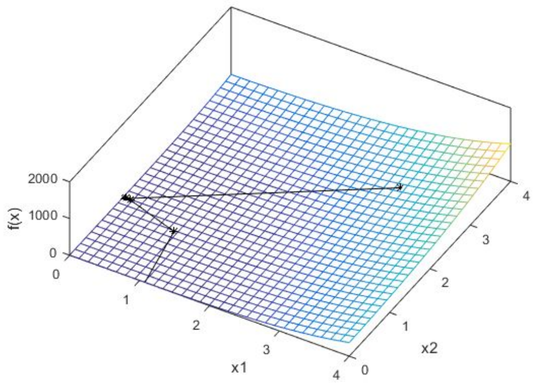


Figura 27: Convergência Gradiente em F iniciando no ponto (3, 3)

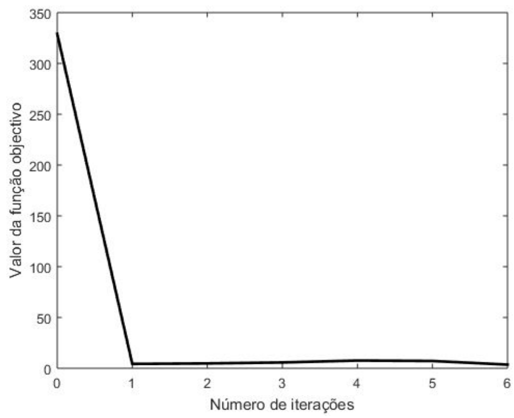


Figura 28: Gradiente em F iniciando no ponto (3, 3) - Valor por iteração

2. CONCLUSÃO

O trabalho computacional foi desenvolvido conforme a especificação e funcionou como esperado. Para tal, implementou-se métodos determinísticos irrestritos e restritos para otimização não linear a fim de minimizar duas funções para problemas irrestritos e uma função para problemas restritos. Para as funções irrestritas, foi observado a diferença de comportamento entre cada algoritmo implementado. Onde o método BFGS mostrou uma melhor precisão nos resultados obtidos para problemas irrestritos. E os métodos para problemas problemas restritos obtiveram resultados semelhantes, no qual o método ALM utilizando o BFGS utilizou um número maior de iterações para encontrar o ponto ótimo.

Portanto, o desenvolvimento do trabalho computacional permitiu implementar e conhecer o funcionamento das estratégias de otimização, baseados ou não em derivadas.

Referências

[1] J. A. Ramírez, F. Campelo, F. G. Guimarães, L. S. Batista e R. H. C. Takahashi, “Notas de Aula e Transparências de Otimização”.