



Teoria da Decisão - Trabalho Computacional

Ariel François Maia Domingues

Hernane Braga Pereira

Nikolas Dias Magalhães Fantoni

Engenharia de Sistemas - Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)



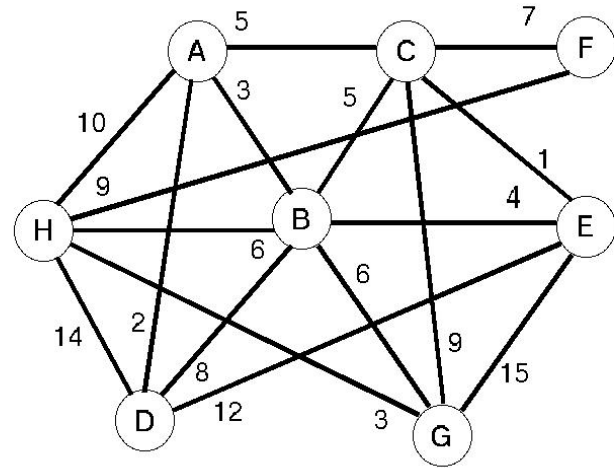
Agenda

1. Problema do Caixeiro Viajante
2. Otimização mono-objetivo
 - 2.1. Simulated Annealing
 - 2.2. Solução Inicial
 - 2.3. Estruturas de vizinhança
 - 2.4. Resultados obtidos
3. Otimização multiobjetivo
 - 3.1. Soma ponderada
 - 3.2. ϵ -restrito
 - 3.3. Resultados obtidos
4. Tomada de decisão
 - 4.1. AHP
 - 4.2. ELECTRE I
 - 4.3. PROMETHEE II
 - 4.4. Solução escolhida
5. Referências

Problema do Caixeiro Viajante

Problema do Caixeiro Viajante (PCV)

- Sair da cidade A, percorrer todas as cidades e retornar para A, com o menor custo possível.
- Modelado como um grafo.
- Problema NP-Completo
- Instância de 250 cidades com tempo e distância
- Assimetria em relação ao tempo



Modelagem para o problema simétrico:

$$\min \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a : } \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, m \quad (3)$$

$$\sum_{i \in K} \sum_{j \in K} x_{ij} \leq |K| - 1 \quad \forall i, j \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (5)$$

Adição de restrição para custos assimétricos:

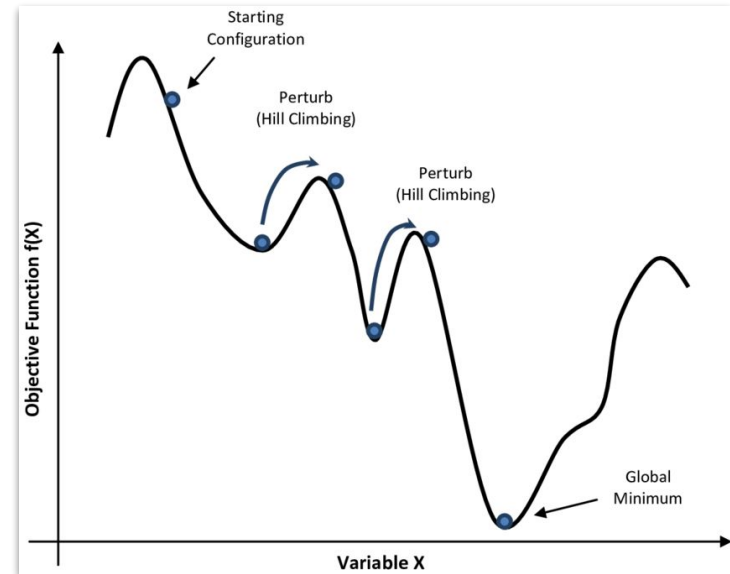
$$d_{ij} \neq d_{ji} \quad \forall i, j \quad (6)$$

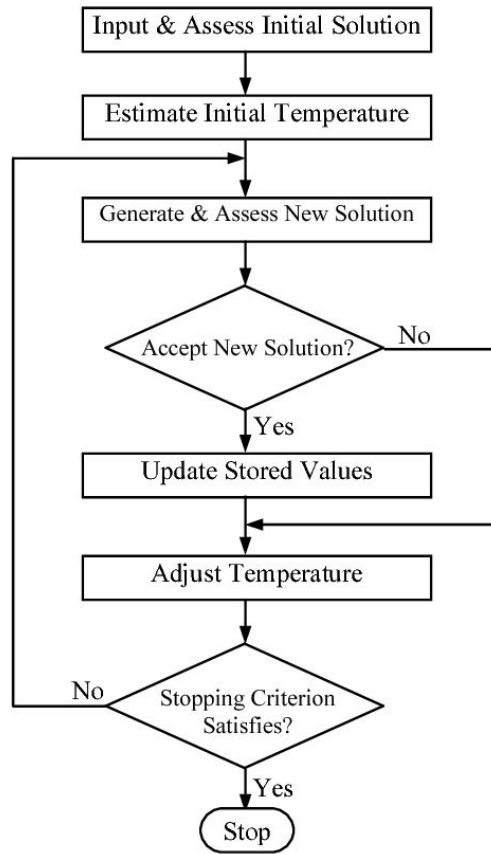


Otimização mono-objetivo

Metaheurística *Simulated Annealing* (SA)

- Proposto por três pesquisadores da IBM em 1982.
- Inspirado no processo de recozimento físico de sólidos.
- Metaheurística de busca local que tenta escapar de mínimos locais, aceitando movimentos de piora.
- Novas soluções geradas à partir da mudança na estrutura de vizinhança.





Funcionamento da metaheurística Simulated Annealing (SA)



Solução Inicial

- A partir da cidade 1, o custo entre cidades de forma crescente e a próxima cidade é escolhida aleatoriamente entre as r cidades mais próximas.
 - r é um parâmetro de entrada da função e quanto maior o valor de r , mais aleatória será a solução gerada.
- Marca-se a cidade escolhida como visitada.
- Repete-se o procedimento de ordenação e escolha aleatória e ao final é calculado o custo para se retornar à cidade de origem.



Solução Inicial - Resultados

TESTE	r=3		r=10	
	DISTÂNCIA	TEMPO	DISTÂNCIA	TEMPO
1	2432,8	44,1	4131,7	71,8
2	2608,7	44,6	4138,9	72,8
3	2366	42,5	4427,1	69,4
4	2583,1	43,7	4338,9	72,5
5	2579,1	43,5	4168,5	69,2
Média	2513,94	43,68	4241,02	71,14
Desvio Padrão	107,79	0,78	134,02	1,72

RESULTADOS DOS TESTES PARA O ALGORITMO DA SOLUÇÃO INICIAL.

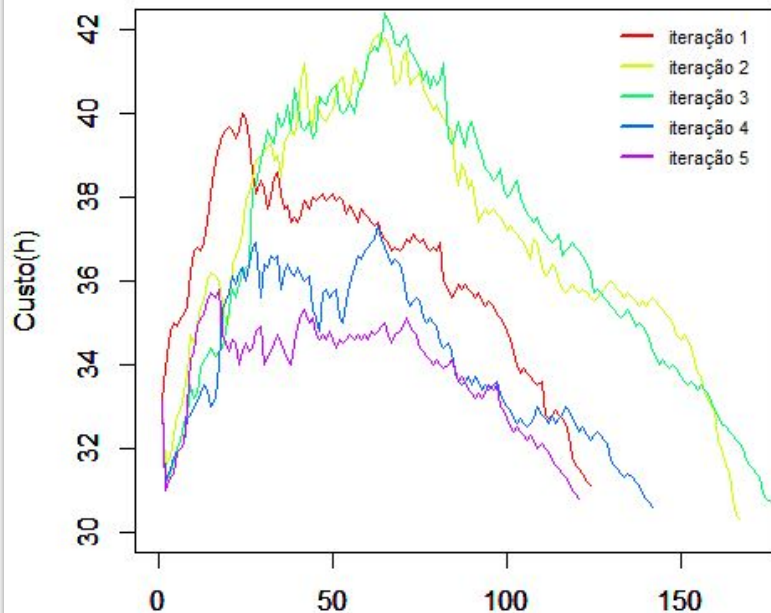


Estruturas de vizinhança

Estruturas de vizinhança com níveis de perturbação diferentes:

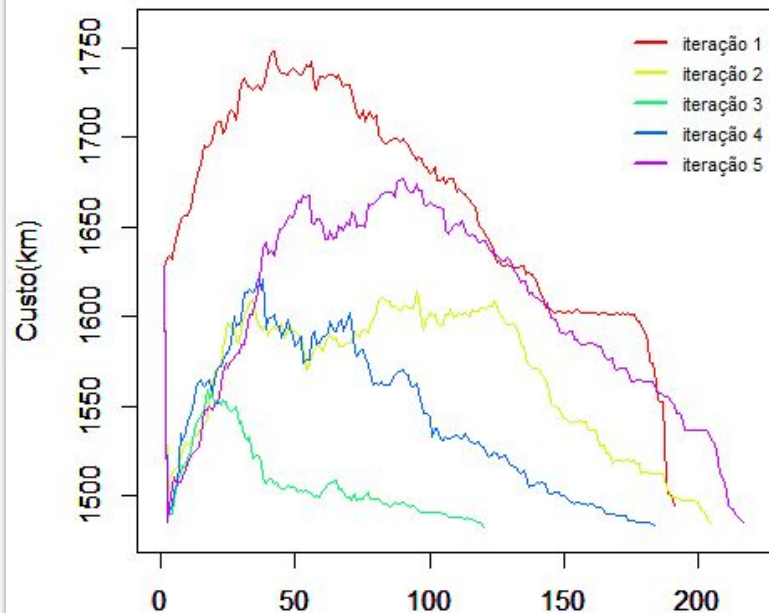
1. Troca de vizinhança simples.
2. Deslocamento simples.
3. Inversão.
4. Troca de vizinhança dupla.
5. Troca intervalada
6. Deslocamento duplo.

Evolução do custo ao longo do algoritmo SA



Função de tempo (h)

Evolução do custo ao longo do algoritmo SA



Função de distância (km)

Resultados obtidos: 5 iterações

Otimização multiobjetivo



Abordagem soma ponderada (Pw)

- Utilizada para minimizar as funções de tempo e distância
- Funções igualmente importantes: pesos iguais para ambas as funções

$$\min w_t f_t(\bar{x}) + w_d f_d(\bar{x})$$



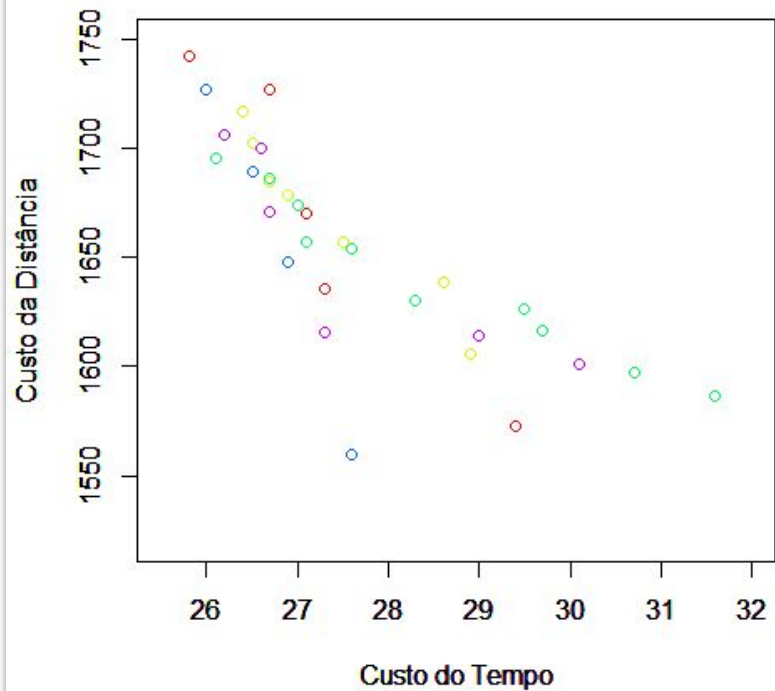
Abordagem ϵ -restrito

- Transforma o problema multiobjetivo em um problema mono-objetivo com restrições adicionais.
- Um dos objetivos é escolhido para ser minimizado.

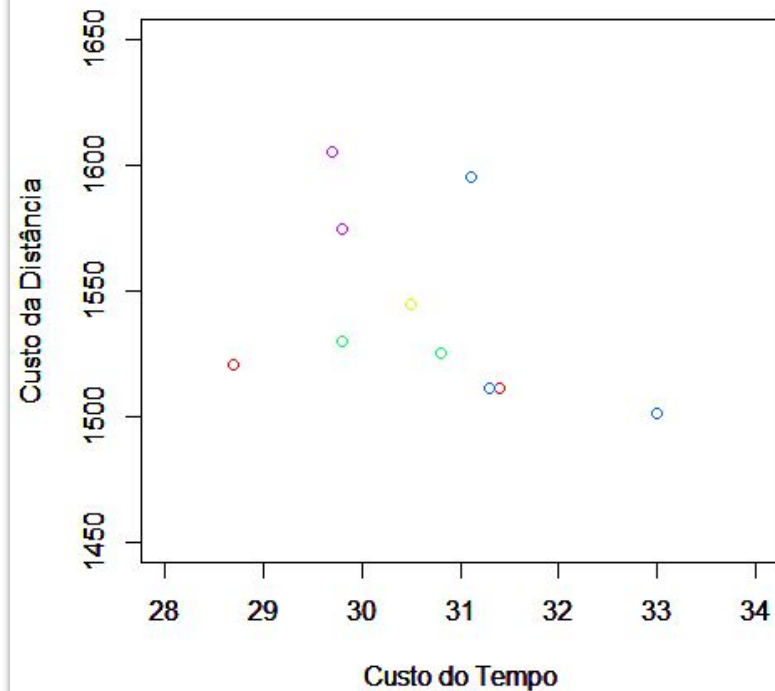
$$\textit{minimizar} \quad f_1(x)$$

Sujeito a:

$$f_i(x) \leq \epsilon_i \quad \forall i = 2, 3, \dots, q$$



Soma Ponderada (Pw)



ϵ -restrito

Resultados obtidos: 5 iterações

Tomada de decisão



Métodos escolhidos para tomada de decisão

- Analytic Hierarchy Process (AHP)
- Elimination Et Choix Traduisant la Réalité (ELECTRE I)
- Preference Ranking Organisation Method for Enrichment Evaluations (PROMETHEE II)



Critérios escolhidos para a tomada de decisão

1. Menor distância total.
2. Menor tempo total.
3. Menor desvio padrão possível para o tempo entre cidades.
4. Menor desvio padrão possível para a distância entre cidades.
 - Evitar viagens com distâncias/tempos muito diferentes, para não atrapalhar na logística do caixeiro viajante.
5. Tempo máximo de deslocamento de uma cidade e outra deve ser de 1.3h.
 - Dessa forma espera-se que o caixeiro consiga visitar 3 cidades por dia, considerando tempo para entregas/reuniões e uma jornada de trabalho de 8h por dia.



Descrição matemática dos critérios escolhidos:

1. Distância total:

$$c_1(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{250} d_{ij}$$

2. Tempo total:

$$c_2(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{250} t_{ij}$$

3. Desvio padrão da distância entre cidades:

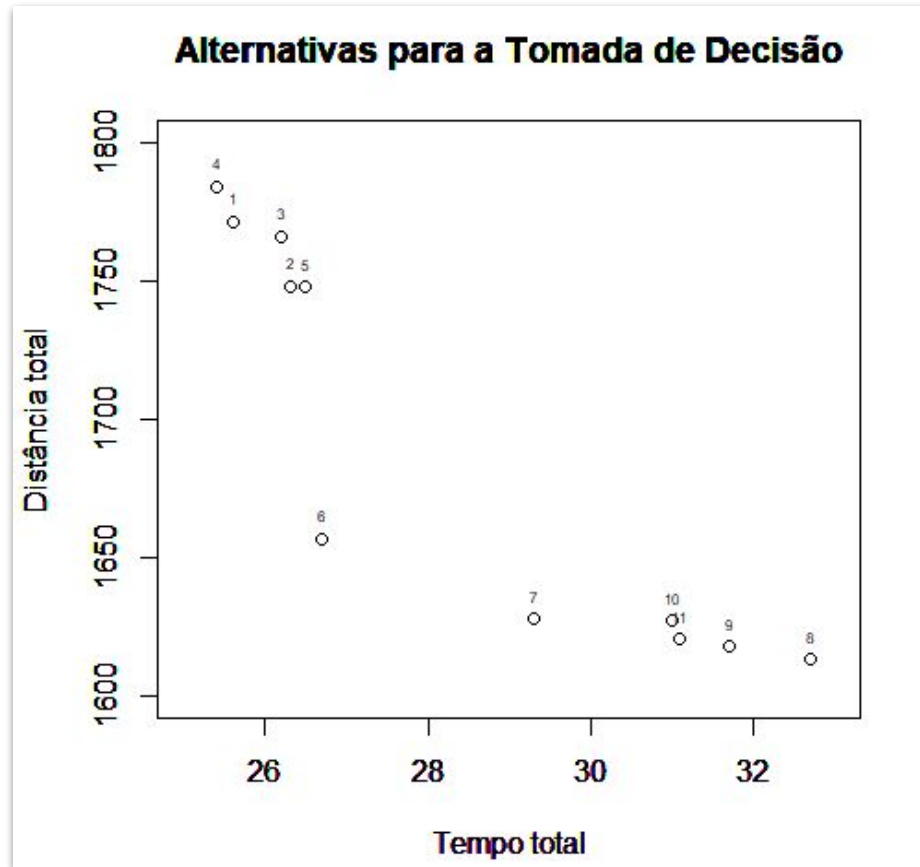
$$c_3(\mathbf{A}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{250} (d_{ij} - \bar{d})^2}{250}}$$

4. Desvio padrão do tempo entre cidades:

$$c_4(\mathbf{A}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{250} (t_{ij} - \bar{t})^2}{250}}$$

5. Tempo de deslocamento entre cidades menor que 1.3h:

$$c_5(\mathbf{A}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \exists t_i > 1.3 \quad \forall i \in [1, 250] \\ 0, & \text{cc.} \end{cases}$$



11 soluções escolhidas usando a abordagem Pw



Analytic Hierarchy Process (AHP)

- Método da escola americana baseado em síntese de critérios.
- Realizada a comparação de 5 matrizes de tamanho 11×11 para cada uma das 11 alternativas.
- Criação de uma matriz final de 5×5 que compara os critérios com o objetivo final de minimizar ao máximo os 5 critérios estabelecidos.



AHP - Matriz de comparação de critérios

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
c_1	1.0	1.0	5.0	5.0	3.0
c_2	1.0	1.0	5.0	5.0	3.0
c_3	0.2	0.2	1.0	1.0	0.7
c_4	0.2	0.2	1.0	1.0	0.7
c_5	0.4	0.4	2.5	2.5	1.0

Índice de Inconsistência (IC) encontrado foi de: 0.087



AHP - Vetor de prioridades dos critérios

	PRIORIDADES
C1	0.35225230
C2	0.35225230
C3	0.07323682
C4	0.07323682
C5	0.14902177

Valores do vetor de prioridades serão usados como pesos nos métodos ELECTRE I e PROMETHEE II



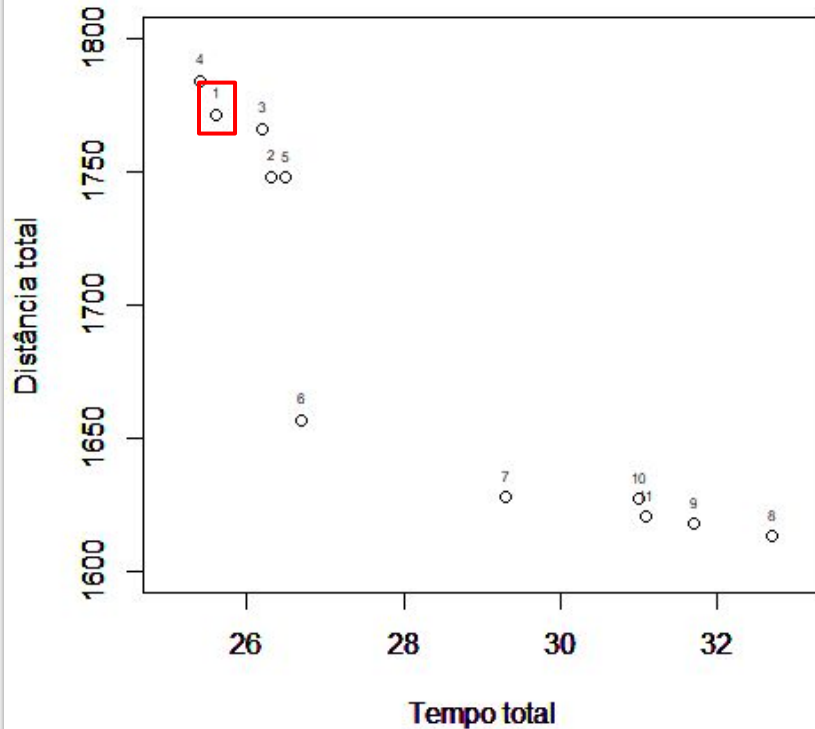
AHP - Escolha da solução

- Ao final a ordem das soluções foi:

$1 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 11 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 5$

- A solução escolhida foi a de número 1.
- As prioridades de cada critério do AHP foram utilizadas como pesos para os métodos ELECTRE I e PROMETHEE II.

Alternativas para a Tomada de Decisão



SOLUÇÃO 1:

1. Tempo total: 25,6 h
2. Distância total: 1.771,60 km
3. σ da distância: 8,565 km
4. σ do tempo: 0,118h
5. Atende ao critério 5 de tempo entre cidades menor que 1.3h.

Solução escolhida pelo método AHP



ELECTRE I

- Método da escola francesa baseado em relações de sobreclassificação.
- Permite determinar uma pré-ordem total das ações.
- Nesta abordagem, os pesos dos critérios foram baseados nos valores do vetor de prioridades do método AHP.

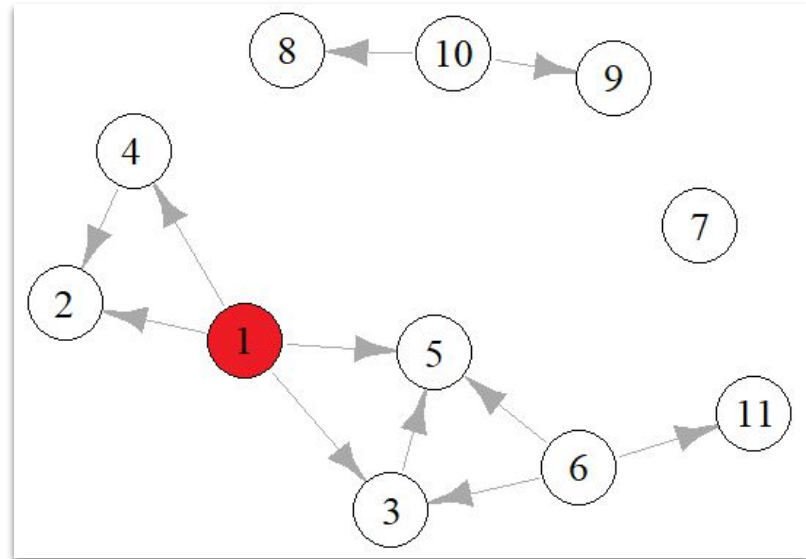
w1	w2	w3	w4	w5
0.35225230	0.35225230	0.07323682	0.07323682	0.14902177

ELECTRE I - Matriz de sobreclassificação

[illegible]

ELECTRE I - Escolha da solução

- Solução 6 apesar de também ser dominante, como 1, não atende ao critério 5 de tempo entre cidades menor que 1.3h.
- Solução 1 escolhida em detrimento de 7 e 10, pois apresentou menor desvio padrão em relação ao tempo e às distâncias em comparação com as outras duas alternativas.





PROMETHEE II

- Método da escola francesa baseado em relações de sobreclassificação.
- Métodos PROMETHEE utilizam uma abordagem por fluxo em um grafo de preferências.
- PROMETHEE II elimina a incomparabilidade entre soluções definindo um esquema de sobreclassificação.
- Nesta abordagem, os pesos dos critérios foram baseados nos valores do vetor de prioridades do método AHP.

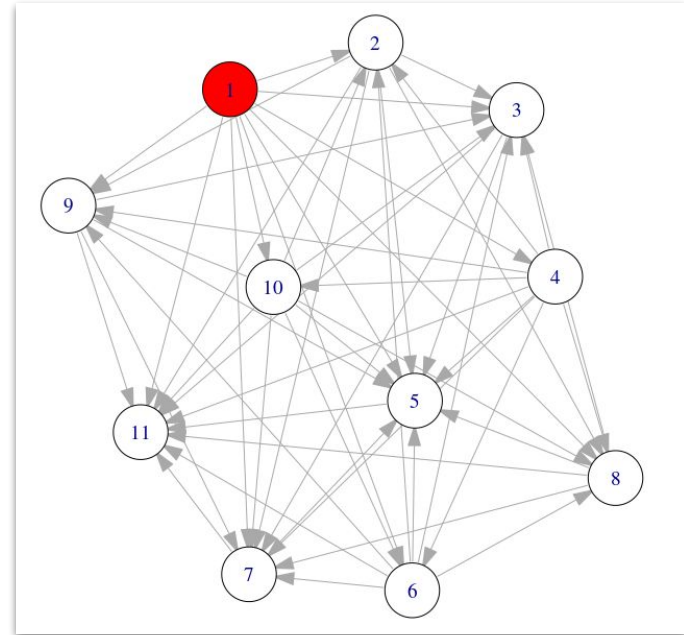
w1	w2	w3	w4	w5
0.35225230	0.35225230	0.07323682	0.07323682	0.14902177

PROMETHEE II - Matriz de sobreclassificação

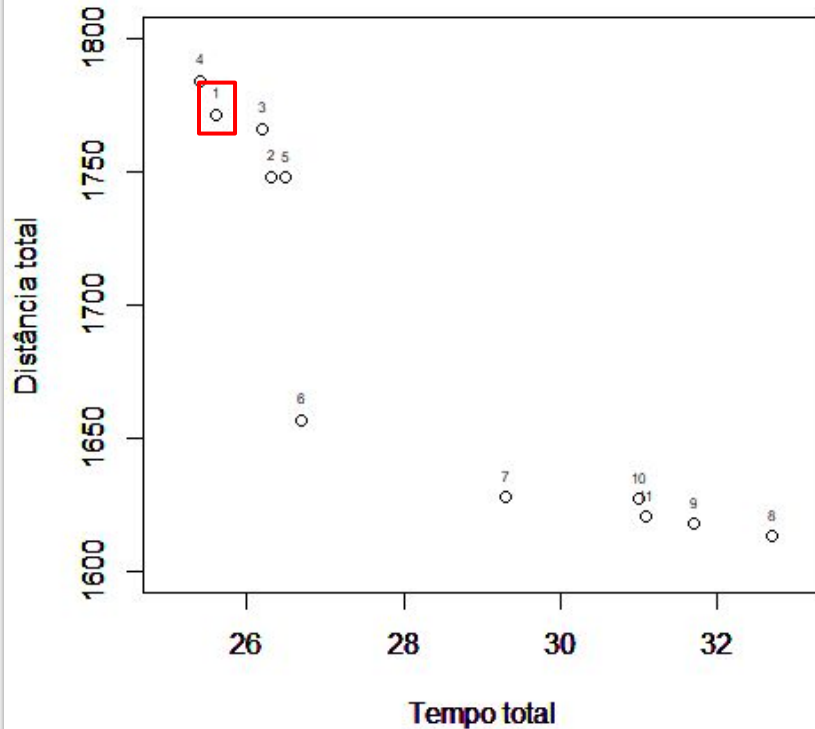
[illegible]

PROMETHEE II - Escolha da solução

- A partir do grafo gerado pela matriz de sobreclassificação, a solução escolhida pela PROMETHEE II foi a alternativa 1.



Alternativas para a Tomada de Decisão



SOLUÇÃO ESCOLHIDA (1):

1. Tempo total: 25,6 h
2. Distância total: 1.771,60 km
3. σ da distância: 8,565 km
4. σ do tempo: 0,118h
5. Atende ao critério 5 de tempo entre cidades menor que 1.3h.

Solução escolhida pelos 3 métodos

1 → 36 → 124 → 29 → 146 → 192 → 32 → 107 →
212 → 246 → 215 → 17 → 122 → 38 → 240 → 159 →
83 → 188 → 176 → 31 → 14 → 197 → 133 → 100 →
226 → 28 → 214 → 22 → 114 → 71 → 244 → 184 →
178 → 54 → 211 → 26 → 136 → 173 → 168 → 144 →
154 → 48 → 180 → 241 → 68 → 21 → 13 → 139 →
224 → 9 → 243 → 210 → 242 → 78 → 63 → 185 →
198 → 89 → 23 → 108 → 195 → 60 → 20 → 93 → 35 →
189 → 199 → 140 → 106 → 92 → 220 → 145 → 190 →
76 → 151 → 46 → 24 → 70 → 232 → 111 → 227 →
162 → 33 → 53 → 65 → 57 → 172 → 118 → 148 →
230 → 80 → 75 → 164 → 45 → 217 → 61 → 149 →
213 → 153 → 8 → 247 → 98 → 117 → 120 → 102 →
219 → 112 → 52 → 150 → 7 → 119 → 239 → 129 →
221 → 84 → 234 → 72 → 127 → 155 → 191 → 67 →
160 → 19 → 96 → 81 → 163 → 201 → 203 → 43 →
109 → 4 → 193 → 223 → 236 → 135 → 134 → 79 →
245 → 130 → 88 → 157 → 44 → 86 → 99 → 202 →
196 → 51 → 5 → 194 → 174 → 62 → 169 → 249 → 77 →
141 → 187 → 18 → 42 → 58 → 152 → 39 → 10 → 15 →
116 → 233 → 138 → 142 → 30 → 228 → 27 → 175 →
179 → 95 → 90 → 166 → 181 → 137 → 110 → 103 →
156 → 25 → 132 → 101 → 104 → 229 → 237 → 34 →
105 → 73 → 16 → 59 → 250 → 87 → 2 → 115 → 248 →
11 → 94 → 126 → 170 → 37 → 128 → 55 → 64 → 216 →
3 → 205 → 6 → 200 → 171 → 12 → 85 → 69 → 74 →
40 → 97 → 50 → 209 → 49 → 66 → 225 → 121 → 231 →
131 → 235 → 167 → 161 → 47 → 206 → 82 → 204 →
147 → 182 → 91 → 143 → 113 → 56 → 218 → 125 →
207 → 165 → 208 → 177 → 41 → 158 → 238 → 123 →
186 → 222 → 183 → 1

Solução 1: caminho percorrido

Referências

- F. D. M. Calado and A. P. Ladeira, “Problema do caixeiro viajante: Um estudo comparativo de técnicas de inteligência artificial,” e-xacta, vol. 4, no. 1, 2011.
- C. E. Miller, A. W. Tucker, and R. A. Zemlin, “Integer programming formulation of traveling salesman problems,” Journal of the ACM, vol. 7, no. 4, pp. 326–329, 1960
- S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi, “Optimization by simulated annealing,” Science, vol. 220, no. 4598, pp. 671–680, 1983.
- K. Amine, “Multiobjective simulated annealing: Principles and algorithm variants,” Advances in Operations Research, vol. 2019, pp. 1–13, 2019.

Referências

- W. Ben-Ameur, “Computing the initial temperature of simulated annealing,” Computational Optimization and Applications, vol. 29, no. 3, pp.369–385, 2004.
- D. Bertsimas and O. Nohadani, “Robust optimization with simulated annealing,” Journal of Global Optimization, vol. 48, no. 2, pp. 323–334, 2009
- G. Pantuza Júnior, “Uma abordagem multiobjetivo para o problema de sequenciamento e alocação de trabalhadores,” Gestão Produção, vol. 23, no. 1, pp. 132–145, 2016
- K. Helsgaun, “General k-opt sub moves for the lin-kernighan tsp heuristic,” Mathematical Programming Computation, vol. 1, no. 2-3, pp. 119–163, 2009.

Referências

- Y. Po-Lung, Multiple-Criteria Decision Making. New York, NY:Springer US, 1985.
- T. L. Saaty, “Decision making with the analytic hierarchy process,” International Journal of Services Sciences, vol. 1, no. 1, p. 83, 2008.
- J. R. Figueira, S. Greco, B. Roy, and R. Slowinski, “An overview of electre methods and their recent extensions,” Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, vol. 20, no. 1-2, pp. 61–85, 2012.
- Y. Collette, Multiobjective optimization. Springer US, 2011.
- J. Figueira, M. Ehrogott, and S. Greco, Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys. Springer US.



Obrigado!