

CONTROL BÁSICO CONTROL DE PROCESOS

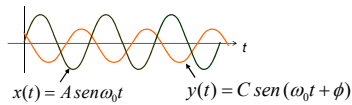
TEMAS: - Respuesta Frecuencial de sistemas
- Estabilidad

Facultad de Ingeniería - UNER
Carrera: Bioingeniería
Planes de estudios: 2008 y 1993

Respuesta en frecuencia

Es la respuesta en estado estacionario de un sistema ante una entrada senoidal. Un sistema lineal invariante en el tiempo, si es afectado por una entrada senoidal de amplitud A y frecuencia ω_0 , su salida seguirá siendo senoidal de la misma frecuencia pero probablemente con otra magnitud C y fase

$$\begin{array}{ccc} x(t) = A \operatorname{sen} \omega_0 t & \xrightarrow{\text{Sistema}} & y(t) = C \operatorname{sen} (\omega_0 t + \phi) \\ \text{Entrada} & & \text{Salida} \end{array}$$



Respuesta en frecuencia

La transformada de Laplace de la salida del sistema es:

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

como es un análisis frecuencial, se cambia la variable compleja s por $j\omega$:

$$Y(j\omega) = G(j\omega)X(j\omega)$$

donde cada componente tiene magnitud y fase:

$$Y(j\omega) = |Y(j\omega)| \angle Y(j\omega)$$

La relación de la salida $Y(j\omega)$ y la entrada $X(j\omega)$ en el régimen senoidal permanente se llama **función de respuesta en frecuencia**:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

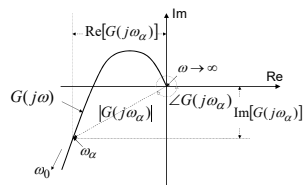
Gráficas Polares o de Nyquist

- En una representación de $G(j\omega)$ en función de su magnitud y fase:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$$

- O en función de sus parte real e imaginaria.

$$G(j\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] + j\text{Im}[G(j\omega)]$$

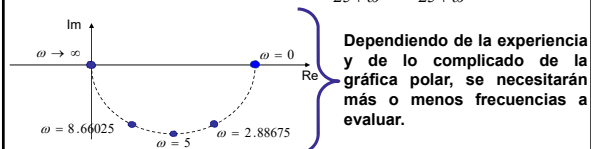


Ejemplo de gráficas polares:

Obtener la gráfica polar de $G(s) = \frac{75}{s+5}$

$$G(j\omega) = \frac{75}{5+j\omega} \cdot \frac{5-j\omega}{5-j\omega} = \frac{375-j75\omega}{25+\omega^2} \quad \text{y se tiene}$$

$$G(j\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] + j\text{Im}[G(j\omega)] = \frac{375}{25+\omega^2} - j\frac{75\omega}{25+\omega^2}$$



Dependiendo de la experiencia y de lo complicado de la gráfica polar, se necesitarán más o menos frecuencias a evaluar.

Diagramas de Bode

- Los diagramas de bode son una representación de la magnitud y fase de una función en estado senoidal permanente al variar la frecuencia de cero a infinito.
- La principal ventaja al usar Bode es que se puede analizar cada elemento de una función de transferencia por separado y el efecto total del sistema, se obtiene simplemente sumando las magnitudes y ángulos de fase de todos ellos.
- Elementos básicos de una función de transferencia:
 1. Elementos de valor constante (Ganancia)
 2. Elementos integrales y derivativos
 3. Elementos de primer orden
 4. Elementos cuadráticos

Diagramas de Bode: Factor: K – Derivativo - Integrador

1. Elementos de valor constante (Ganancia)
 Magnitud [db] = $20 \log|K|$ Fase [Grados] = $\phi = 0^\circ$

2. Elementos derivativos e integrales $(j\omega)^{\pm 1}$

A) Derivadores:
 $20 \log|j\omega| = 20 \log \omega \text{ dB}$
 $\phi = 90^\circ$ para todo rango de ω

B) Integradores:
 $20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ dB}$
 $\phi = -90^\circ$ para todo rango de ω

Diagramas de Bode: Factor: Derivativo - Integrador

Si existen más de un derivador o integrador:

Derivadores:
 $20 \log|(j\omega)^n| = 20n \log \omega \text{ dB}$ $\phi = 90^\circ \times n$ para todo rango de ω

Integradores:
 $20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^n} \right| = -20n \log \omega \text{ dB}$ $\phi = -90^\circ \times n$ para todo rango de ω

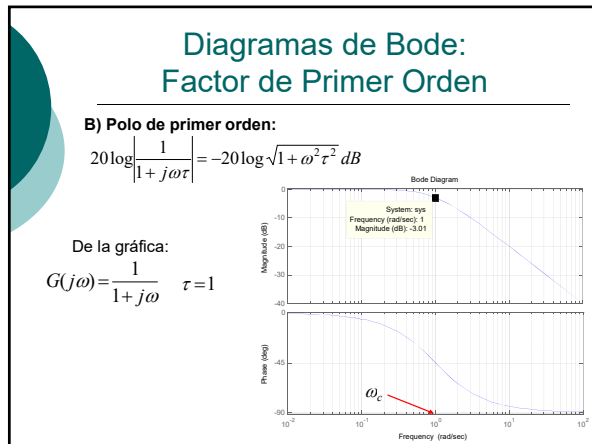
Diagramas de Bode: Factor de Primer Orden

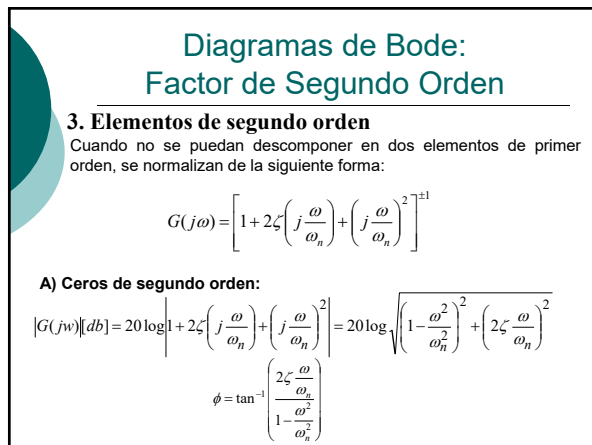
3. Elementos de primer orden

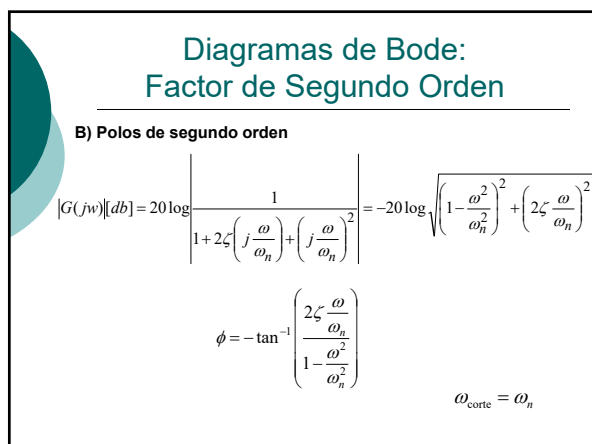
A) Cero de primer orden:
 $20 \log|1 + j\omega\tau| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \text{ dB}$ $\phi = \tan^{-1} \omega\tau$

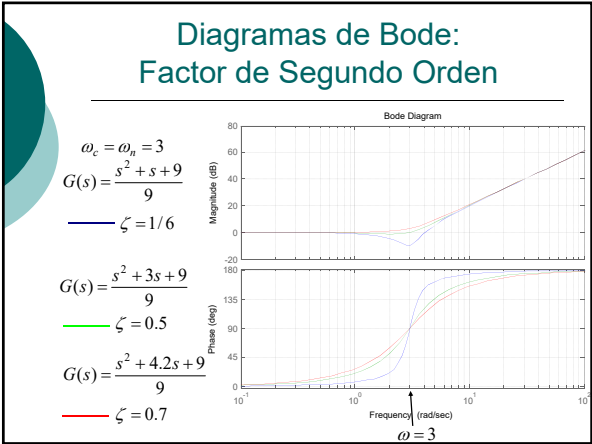
De la gráfica:
 $G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$ $\tau = 1$

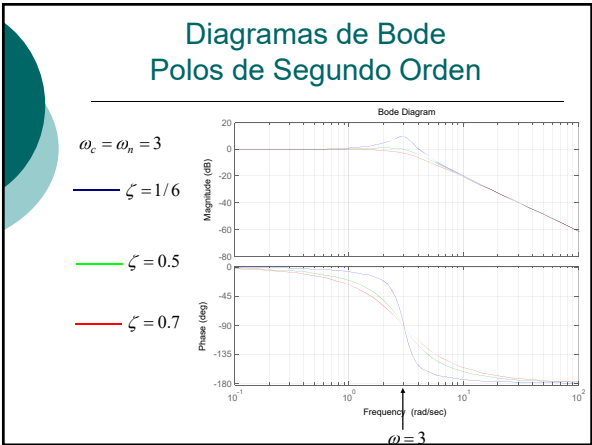
$\omega_c = \text{frecuencia de corte} = \frac{1}{\tau}$

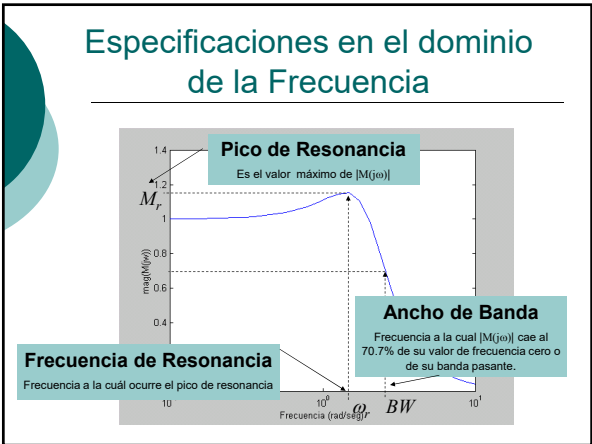




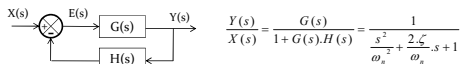








Especificaciones Frecuenciales



Derivando la función de magnitud de un factor de segundo orden e igualando a cero obtenemos ω_r :

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$M_r = \begin{cases} \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} & \zeta \leq 0.707 \\ 1 & \zeta > 0.707 \end{cases}$$

Respuesta Frecuencial en Sistemas de FASE NO MINIMA

- Son sistemas que tiene polos y/o ceros a parte real positiva.
- Sus curvas de Magnitud no varían, pero si cambian las de FASE
- Los factores de Fase NO MINIMA aportan mucha inestabilidad al sistema.
- Se recomienda realizar el diagrama de Nyquist primero y a partir del mismo el Diagrama de Bode.
- Ejemplos:

$$G_1(s) = s - 1 \quad G_2(s) = 1 - s$$

Diagramas de Bode: Ejemplo

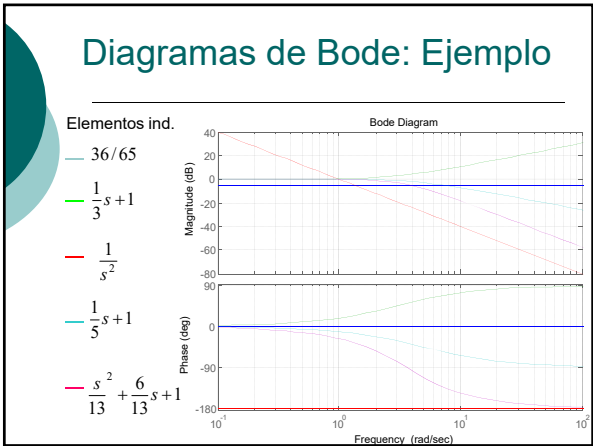
Ejemplo: Obtener el diagrama de Bode del sistema:

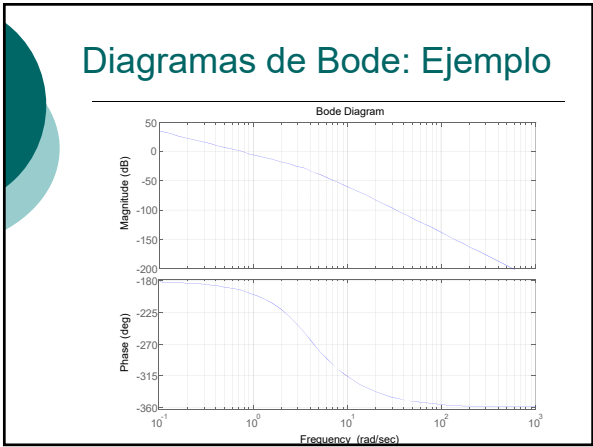
$$G(s)H(s) = \frac{12(s+3)}{s^2(s+5)(s^2+6s+13)}$$

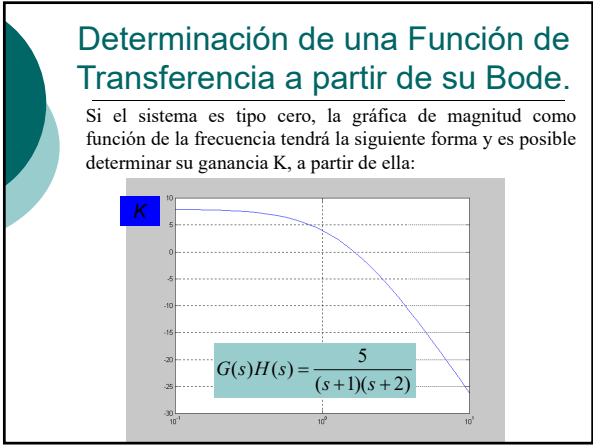
Normalizando:

$$G(s)H(s) = \frac{\frac{36}{65}(\frac{1}{3}s+1)}{s^2(\frac{1}{5}s+1)(\frac{s^2}{13} + \frac{6}{13}s+1)}$$

Se tienen 5 elementos, Una constante, un cero en -3, un doble integrador, un polo en -5 y polos cuadráticos. Se buscan la gráfica de Bode de cada uno y después se suman.

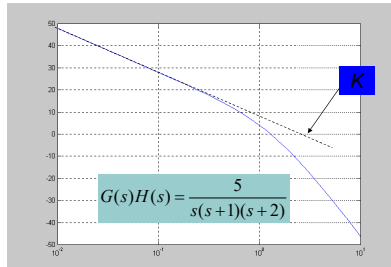






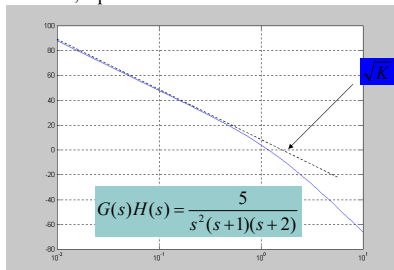
Determinación de una Función de Transferencia a partir de su Bode.

Si el sistema es tipo uno, la gráfica de magnitud como función de la frecuencia tendrá la siguiente forma y es posible determinar K a partir de ella:



Determinación de una Función de Transferencia a partir de su Bode.

Si el sistema es tipo dos, la gráfica de magnitud como función de la frecuencia tendrá la siguiente forma y es posible determinar K, a partir de ella:



Relación entre respuesta frecuencial y temporal

- Frecuencia de resonancia (se mide en el Bode de Bucle cerrado):
 - Relación directa con las oscilaciones, e inversa con el tiempo de establecimiento.
 - Si en el sistema existe ruido a una frecuencia similar a ω_r , el mismo se puede amplificar mucho.
- Pico de resonancia (se mide en el Bode de Bucle cerrado):
 - Se observa una relación directa con el Mp para zita > 0.4. Cuando zita es muy chico el Mr >> 1 y el Mp no es mayor a 1
- Ancho de banda (se mide en el Bode de Bucle cerrado):
 - A mayor ancho de banda menor tiempo de establecimiento.
 - Relación directa con la sensibilidad al ruido del sistema.



ESTABILIDAD

¿Qué es la ESTABILIDAD?

$r(t) \rightarrow$
 $\rightarrow y(t)$

$$y(t) = y_{forzada}(t) + y_{natural}(t)$$

Definición Clásica:

$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{natural} = 0$ EL SISTEMA es ESTABLE

Definición BIBO (por su sigla en Ingles Boundet input – Boundet Output)

El sistema es ESTABLE si toda entrada acotada produce una salida total Acotada

Criterio de Estabilidad de Routh

- Considerando el polinomio del denominador de la forma:

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

Con $a_0 \neq 0$
- Para que todas las raíces tengan parte real negativa es necesario (pero no suficiente) que todos los coeficientes del polinomio tengan el mismo signo.
- Es condición suficiente que los coeficientes de la primer columna de la Matriz de Routh tengan el mismo signo.

Criterio de Estabilidad de Routh

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

Donde:

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	\dots
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	\dots
b_1	b_2	b_3	b_4	\dots
c_1	c_2	c_3	c_4	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
k_1	k_2			
l_1				
m_1				

Matriz de Routh

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$\dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$

Criterio de Estabilidad de Routh: Ejemplo 1

$$Q(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10$$

s^4	2	3	10	0
s^3	1	5	0	0
s^2	b_1	b_2	0	
s^1	c_1	0		
s^0	d_1			

$$b_1 = \frac{3 \cdot 10}{1} = 30 \quad b_2 = \frac{10 \cdot 0}{1} = 0$$

$$c_1 = \frac{-35 - 10}{-7} = 6.43$$

$$d_1 = \frac{10(6.43) - 0}{6.43} = 10$$

La ecuación característica tendrá 2 raíces a parte real positiva ya que existen 2 cambios de signos en la primera columna de la matriz de Routh (2, 1, -7, 6.43, 10)

Criterio de Estabilidad de Routh: Ejemplo 2

- Cuando un elemento de la primera columna de la matriz es cero es un caso especial.
- Se soluciona sustituyendo el cero por ε y luego se hace tender $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$Q(s) = s^3 - 3s + 2$$

s^3	1	-3	0	0
s^2	0(ε)	2	0	
s^1	b_1	0		
s^0	c_1			

$$b_1 = \frac{-3\varepsilon - 2}{\varepsilon} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad b_1 \text{ es negativo}$$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot 2}{b_1} = 2$$

Hay 2 raíces a parte real positiva

Criterio de Estabilidad de Routh: Caso Especial

- Si todo un renglón de la matriz es cero, se corresponde a raíces simétricas al origen.
- Solución:
 - Se forma un polinomio auxiliar con los coeficientes del renglón inmediato superior.
 - Se reemplaza los coeficientes ceros con los obtenidos de derivar el polinomio auxiliar.
- Un ejemplo sobre este caso:

$$Q(s) = s^4 + s^3 - s - 1$$

Criterio de Estabilidad de Routh: Ejemplo 3

$$Q(s) = s^4 + s^3 - s - 1$$

s^4	1	0	-1	0
s^3	1	-1	0	0
s^2	1	-1	0	
s^1	0	0		
s^0	d_1			

Polinomio Auxiliar

$$s^2 - 1$$

Luego:

$$d(s^2 - 1) = 2s$$

$$d_1 = -1$$

El sistema tiene una raíz a parte real positiva (1, 1, 1, 2, -1).
La misma puede encontrarse desde el polinomio auxiliar
 $s^2 - 1 = 0$, $s = \pm 1$

Criterio de Routh: Rango de Estabilidad

- El Criterio de Routh puede utilizarse para establecer el rango de un parámetro (por ejemplo K) para que el sistema en bucle cerrado sea estable.
- Por ejemplo:

$$Q(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K$$

Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz: Ejemplo 4

$$Q(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K$$

s^4	1	11	K	0
s^3	6	6	0	0
s^2	10	K	0	
s^1	c_1	0		
s^0	d_1			

$$c_1 = \frac{60 - 6K}{10} \quad d_1 = K$$

Para Estabilidad:

$$K > 0$$

$$60 - 6K > 0 \Rightarrow K < 10$$

$\therefore 0 < K < 10$

ESTABILIDAD RELATIVA

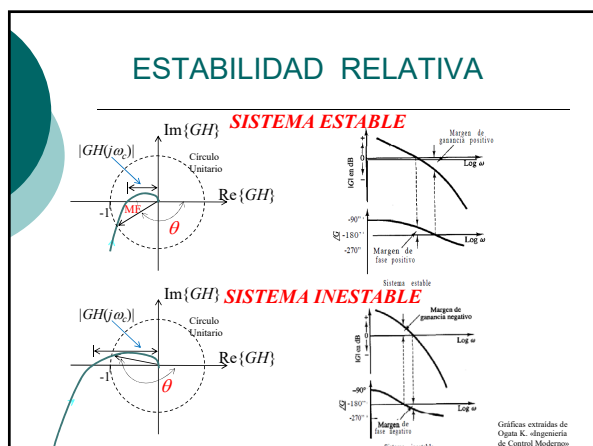
- **Margen de Ganancia (MG):** es la ganancia adicional que puede incrementarse en un sistema para llevarlo al borde de la inestabilidad.

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega_c)H(j\omega_c)|_{\omega=1}} = \frac{K_{crítico}}{K_{actual}}$$

W1=frecuencia de cruce de fase

En decibels $MG [db] = 20 \cdot \log(MG) = -20 \cdot \log |G(j\omega_c)H(j\omega_c)|$
- **Margen de Fase (MF):** es la cantidad de retardo de fase adicional, en la frecuencia de cruce de ganancia, que lleva al sistema al borde de la inestabilidad.

$$MF = 180^\circ + \theta$$



ESTABILIDAD RELATIVA

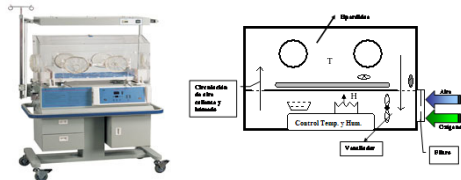
Para ESTABILIDAD se requiere que el MG en [db] y el MF sean positivos.

Para una buena estabilidad relativa el MF y MG se recomienda que se encuentren entre:

$MF > 30^\circ$
y
 $MG > 6 \text{ [db]}$

Estudio de Estabilidad

Ejemplo:
a) Dado el siguiente sistema térmico visto como modelo de una incubadora, determine el rango Kr para que sea estable:



Text: temperatura del ambiente de la habitación donde está la incubadora [°C].
T: temperatura de la incubadora [°C].
H: calor entregado por la resistencia eléctrica por unidad de tiempo [Kcal/seg].
C: capacitancia térmica equivalente de la incubadora [Kcal/°C].
R: resistencia térmica equivalente de pérdida en la incubadora [°C seg/Kcal].

Estudio de Estabilidad

Ejemplo (continuación)

$C \frac{dT}{dt} = (H - H_{perdidas})$
 $C \frac{dT}{dt} = H - \frac{(T - T_{ext})}{R}$
 $H_{perdidas} = \frac{(T - T_{ext})}{R}$
 $T(s) = \frac{R}{RCs + 1} H(s) + \frac{T_{ext}}{RCs + 1}$

Consideraciones: Como el sistema desde que se entrega inicialmente (t=0) H tarda unos 5 minutos en comenzar a detectar variación la temperatura de la incubadora, supondremos un tiempo muerto en la función real. A los fines de analizar la función de transferencia del sistema consideraremos Text=0. Entonces:

$T(s) = \frac{R \cdot e^{-5s}}{RCs + 1} H(s)$

Criterio de estabilidad de Nyquist

Ejemplo (continuación)

s^3	320	$6,4 + 16,2 Kr$
s^2	$144 - 48 Kr$	$1,2 Kr$
s^1	b_1	
s^0	$1,2 Kr$	

$$b_1 = \frac{-777,6 K_r + 1641,6 K_r + 921,6}{144 - 48 K_r}$$

Estudio de Estabilidad

Por lo tanto por el criterio de Routh tenemos que:

Del renglón s^0 se obtiene que $Kr > 0$

Del renglón s^2 se obtiene que $Kr < 3$

Del renglón s^1 se obtiene que $-0,46 < Kr < 2,57$

La solución esta dada por los números reales que cumplen con TODOS los requisitos en simultáneo, es decir:

$0 < Kr < 2,57$

Estudio de Estabilidad

Ejemplo (continuación)

b) Determine el valor de Kr para tener un Margen de Ganancia de 2 o 6 [dB].

c) Con el Kr del punto anterior mida los márgenes de fase y ganancia del diagrama de Bode y Nyquist. ¿Es buena la estabilidad relativa?

d) Realice la respuesta temporal a bucle cerrado de todo el sistema ante una entrada escalón unitario.

FIN !!!!

Dudas
Preguntas ????
