2

Modelado matemático de sistemas de control

2-1 Introducción

Al estudiar los sistemas de control, el lector debe ser capaz de modelar sistemas dinámicos y analizar las características dinámicas. Un modelo matemático de un sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con precisión o, al menos, bastante bien. Téngase presente que un modelo matemático no es único para un sistema determinado. Un sistema puede representarse de muchas formas diferentes, por lo que puede tener muchos modelos matemáticos, dependiendo de cada perspectiva.

La dinámica de muchos sistemas, ya sean mecánicos, eléctricos, térmicos, económicos, biológicos, etc., se describe en términos de ecuaciones diferenciales. Dichas ecuaciones diferenciales se obtienen a partir de leyes físicas que gobiernan un sistema determinado —como las leyes de Newton para sistemas mecánicos y las leyes de Kirchhoff para sistemas eléctricos. Se debe siempre recordar que obtener un modelo matemático razonable es la parte más importante de todo el análisis.

A lo largo de este libro se supone que el principio de causalidad se aplica a los sistemas que se consideren. Esto significa que la salida actual del sistema (la salida en $t = 0$) depende de las entradas pasadas (entradas en $t < 0$) pero no depende de las entradas futuras (entradas para $t > 0$).

Modelos matemáticos. Los modelos matemáticos pueden adoptar muchas formas distintas. Dependiendo del sistema del que se trate y de las circunstancias específicas, un modelo matemático puede ser más conveniente que otros. Por ejemplo, en problemas de control óptimo, es provechoso usar representaciones en el espacio de estados. En cambio, para los análisis de la respuesta transitoria o de la respuesta en frecuencia de sistemas lineales con una entrada y una salida invariantes en el tiempo, la representación mediante la función de transferencia puede ser más conveniente que cualquier otra. Una vez obtenido un modelo matemático de un sistema, se usan diversos recursos analíticos, así como computadoras para estudiarlo y sintetizarlo.

Simplicidad contra precisión. Al obtener un modelo matemático se debe establecer un compromiso entre la simplicidad del mismo y la precisión de los resultados del análisis. Al obtener un modelo matemático razonablemente simplificado, a menudo resulta necesario ignorar ciertas propiedades físicas inherentes al sistema. En particular, si se pretende obtener un modelo matemático de parámetros concentrados lineal (es decir, uno en el que se empleen ecuaciones diferenciales), siempre es necesario ignorar ciertas no linealidades y parámetros distribuidos que pueden estar presentes en el sistema dinámico. Si los efectos que estas propiedades ignoradas tienen sobre la respuesta son pequeños, se obtendrá un buen acuerdo entre los resultados del análisis de un modelo matemático y los resultados del estudio experimental del sistema físico.

En general, cuando se resuelve un problema nuevo, es conveniente desarrollar primero un modelo simplificado para obtener una idea general de la solución. A continuación se desarrolla un modelo matemático más completo y se usa para un análisis con más pormenores.

Se debe ser consciente de que un modelo de parámetros concentrados lineal, que puede ser válido si opera en baja frecuencia, tal vez no sea válido en frecuencias suficientemente altas, debido a que la propiedad no considerada de los parámetros distribuidos puede convertirse en un factor importante en el comportamiento dinámico del sistema. Por ejemplo, la masa de un resorte puede pasarse por alto en operaciones en baja frecuencia, pero se convierte en una propiedad importante del sistema en altas frecuencias. (Para el caso en el que el modelo matemático tiene en cuenta consideraciones de errores, se puede aplicar la teoría de control robusto. La teoría de control robusto se presenta en el Capítulo 10)

Sistemas lineales. Un sistema se denomina lineal si se aplica el principio de superposición. Este principio establece que la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos funciones de entradas diferentes es la suma de las dos respuestas individuales. Por tanto, para el sistema lineal, la respuesta a varias entradas se calcula tratando una entrada cada vez y sumando los resultados. Este principio permite desarrollar soluciones complicadas para la ecuación diferencial lineal a partir de soluciones simples.

Si en una investigación experimental de un sistema dinámico son proporcionales la causa y el efecto, lo cual implica que se aplica el principio de superposición, el sistema se considera lineal.

Sistemas lineales invariantes y variantes en el tiempo. Una ecuación diferencial es lineal si sus coeficientes son constantes o son funciones sólo de la variable independiente. Los sistemas dinámicos formados por componentes de parámetros concentrados lineales invariantes con el tiempo se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo —de coeficientes constantes. Tales sistemas se denominan sistemas *lineales invariantes en el tiempo* (o *lineales de coeficientes constantes*). Los sistemas que se representan mediante ecuaciones diferenciales cuyos coeficientes son funciones del tiempo, se denominan sistemas *lineales variantes en el tiempo*. Un ejemplo de un sistema de control variante en el tiempo es un sistema de control de naves espaciales. (La masa de una nave espacial cambia debido al consumo de combustible.)

Contenido del capítulo. En la Sección 2-1 se ha presentado una introducción al modelado matemático de sistemas dinámicos. La Sección 2-2 presenta la función de transferencia y la respuesta-impulso. La Sección 2-3 introduce los sistemas de control automático y la Sección 2-4 analiza conceptos del modelado en el espacio de estados. La Sección 2-5 presenta una representación en el espacio de estados de sistemas dinámicos. La Sección 2-6 trata la transformación de modelos matemáticos con MATLAB. Por último, la Sección 2-7 analiza la linealización de modelos matemáticos no lineales.

2-2 Función de transferencia y de respuesta-impulso

En la teoría de control, a menudo se usan las funciones de transferencia para caracterizar las relaciones de entrada-salida de componentes o de sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo. Se comenzará por definir la función de transferencia, para proseguir con el cálculo de la función de transferencia de un sistema de ecuaciones diferenciales. A continuación se analiza la función de respuesta-impulso.

Función de transferencia. La *función de transferencia* de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.

Considérese el sistema lineal e invariante en el tiempo descrito mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y \\ = b_0 \overset{(m)}{x} + b_1 \overset{(m-1)}{x} + \cdots + b_{m-1}\dot{x} + b_m x \qquad (n \geqslant m) \end{aligned}$$

donde y es la salida del sistema y x es la entrada. La función de transferencia de este sistema es el cociente de la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada cuando todas las condiciones iniciales son cero, o

$$\text{Función de transferencia} = G(s) = \left.\frac{\mathscr{L}[\text{salida}]}{\mathscr{L}[\text{entrada}]}\right|_{\text{condiciones iniciales cero}}$$

$$= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

A partir del concepto de función de transferencia, es posible representar la dinámica de un sistema mediante ecuaciones algebraicas en s. Si la potencia más alta de s en el denominador de la función de transferencia es igual a n, el sistema se denomina *sistema de orden n-ésimo*.

Comentarios acerca de la función de transferencia. La aplicación del concepto de función de transferencia está limitada a los sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo; sin embargo, el enfoque de la función de transferencia se usa extensamente en el análisis y diseño de dichos sistemas. A continuación se presentan algunos comentarios importantes relacionados con la función de transferencia. (Obsérvese que en la lista, los sistemas a los que se hace referencia son aquellos que se describen mediante una ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo.)

1. La función de transferencia de un sistema es un modelo matemático porque es un método operacional para expresar la ecuación diferencial que relaciona la variable de salida con la variable de entrada.
2. La función de transferencia es una propiedad de un sistema, independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada o función de excitación.
3. La función de transferencia incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida; sin embargo, no proporciona información acerca de la estructura física del sistema. (Las funciones de transferencia de muchos sistemas físicamente diferentes pueden ser idénticas.)
4. Si se conoce la función de transferencia de un sistema, se estudia la salida o respuesta para varias formas de entrada, con la intención de comprender la naturaleza del sistema.
5. Si se desconoce la función de transferencia de un sistema, puede establecerse experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando la salida del sistema. Una vez establecida una función de transferencia, proporciona una descripción completa de las características dinámicas del sistema, a diferencia de su descripción física.

Integral de convolución. Para un sistema lineal e invariante en el tiempo, la función de transferencia $G(s)$ es

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

donde $X(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada e $Y(s)$ es la transformada de Laplace de la salida, y se supone que todas las condiciones iniciales involucradas son cero. De aquí se obtiene que la salida $Y(s)$ se escribe como el producto de $G(s)$ y $X(s)$, o bien

$$Y(s) = G(s)X(s) \tag{2-1}$$

Obsérvese que la multiplicación en el dominio complejo es equivalente a la convolución en el dominio del tiempo (véase Apéndice A), por lo que la transformada inversa de Laplace de la Ecuación (2-1) se obtiene mediante la siguiente integral de convolución:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t x(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^t g(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

donde tanto $g(t)$ como $x(t)$ son 0 para $t < 0$.

Respuesta-impulso. Considérese la salida (respuesta) de un sistema para una entrada impulso unitario cuando las condiciones iniciales son cero. Como la transformada de Laplace de la función impulso unitario es la unidad, la transformada de Laplace de la salida del sistema es

$$Y(s) = G(s) \tag{2-2}$$

La transformada inversa de Laplace de la salida obtenida mediante la Ecuación (2-2) proporciona la respuesta-impulso del sistema. La transformada inversa de Laplace de $G(s)$, o bien

$$\mathscr{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$$

se denomina respuesta-impulso. Esta respuesta $g(t)$ también se denomina función de ponderación del sistema.

De este modo, la respuesta-impulso $g(t)$ es la respuesta de un sistema lineal a una entrada impulso unitario cuando las condiciones iniciales son cero. La transformada de Laplace de esta función proporciona la función de transferencia. Por tanto, la función de transferencia y la respuesta-impulso de un sistema lineal e invariante en el tiempo contienen la misma información sobre la dinámica del sistema. Por lo tanto es posible obtener información completa sobre las características dinámicas del sistema si se excita el sistema con una entrada impulso y se mide la respuesta. (En la práctica, una entrada pulso con una duración muy corta comparada con las constantes de tiempo significativas del sistema se considera un impulso.)

2-3 Sistemas de control automáticos

Un sistema de control puede tener varios componentes. Para mostrar las funciones de cada componente en la ingeniería de control, por lo general se usa una representación denominada *diagrama de bloques*. En esta sección, en primer lugar, se explica qué es un diagrama de bloques. A continuación se presentan aspectos introductorios a los sistemas de control automático, que incluyen diversas acciones de control. Después se expone un método para obtener los diagramas de bloques de sistemas físicos y, por último, se analizan técnicas para simplificar tales diagramas.

Diagramas de bloques. Un *diagrama de bloques* de un sistema es una representación gráfica de las funciones que lleva a cabo cada componente y el flujo de señales. Tales diagramas muestran las relaciones existentes entre los diversos componentes. A diferencia de una representación matemática puramente abstracta, un diagrama de bloques tiene la ventaja de indicar de forma más realista el flujo de las señales del sistema real.

En un diagrama de bloques todas las variables del sistema se enlazan unas con otras mediante bloques funcionales. El bloque *funcional* o simplemente *bloque* es un símbolo para representar la operación matemática que sobre la señal de entrada hace el bloque para producir la salida. Las funciones de transferencia de los componentes por lo general se introducen en los bloques correspondientes, que se conectan mediante flechas para indicar la dirección del flujo de señales. Obsérvese que la señal sólo puede pasar en la dirección de las flechas. Por tanto, un diagrama de bloques de un sistema de control muestra explícitamente una propiedad unilateral.

La Figura 2-1 muestra un elemento del diagrama de bloques. La punta de flecha que señala el bloque indica la entrada, y la punta de flecha que se aleja del bloque representa la salida. Tales flechas se conocen como *señales*.

Figura 2-1. Elementos de un diagrama de bloques.

Obsérvese que las dimensiones de la señal de salida del bloque son las dimensiones de la señal de entrada multiplicadas por las dimensiones de la función de transferencia en el bloque.

Las ventajas de la representación mediante diagramas de bloques de un sistema estriban en que es fácil formar el diagrama de bloques general de todo el sistema con sólo conectar los bloques de los componentes de acuerdo con el flujo de señales y en que es posible evaluar la contribución de cada componente al desempeño general del sistema.

En general, la operación funcional del sistema se aprecia con más facilidad si se examina el diagrama de bloques que si se revisa el sistema físico mismo. Un diagrama de bloques contiene información relacionada con el comportamiento dinámico, pero no incluye información de la construcción física del sistema. En consecuencia, muchos sistemas diferentes y no relacionados pueden representarse mediante el mismo diagrama de bloques.

Debe señalarse que, en un diagrama de bloques, la principal fuente de energía no se muestra explícitamente y que el diagrama de bloques de un sistema determinado no es único. Es posible dibujar varios diagramas de bloques diferentes para un sistema, dependiendo del punto de vista del análisis.

Punto de suma. Remitiéndose a la Figura 2-2, un círculo con una cruz es el símbolo que indica una operación de suma. El signo más o el signo menos en cada punta de flecha indica si la señal debe sumarse o restarse. Es importante que las cantidades que se sumen o resten tengan las mismas dimensiones y las mismas unidades.

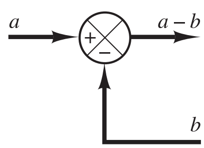

Figura 2-2. Punto de suma.

Punto de ramificación. Un *punto de ramificación* es aquel a partir del cual la señal de un bloque va de modo concurrente a otros bloques o puntos de suma.

Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado. La Figura 2-3 muestra un ejemplo de un diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado. La salida $C(s)$ se realimenta al punto de suma, donde se compara con la entrada de referencia $R(s)$. La naturaleza en lazo cerrado del sistema se indica con claridad en la figura. La salida del bloque, $C(s)$ en este caso, se obtiene multiplicando la función de transferencia $G(s)$ por la entrada al bloque, $E(s)$. Cualquier sistema de control lineal puede representarse mediante un diagrama de bloques formado por puntos de suma, bloques y puntos de ramificación.

Cuando la salida se realimenta al punto de suma para compararse con la entrada, es necesario convertir la forma de la señal de salida en la de la señal de entrada. Por ejemplo, en un sistema de control de temperatura, por lo general la señal de salida es la temperatura controlada. La señal de salida, que tiene la dimensión de la temperatura, debe convertirse a una fuerza, posición o voltaje antes de que pueda compararse con la señal de entrada. Esta conversión se consigue mediante el elemento de realimentación, cuya función de transferencia es $H(s)$, como se aprecia en la Figura 2-4. La función del elemento de realimentación es modificar la salida antes de compararse con la entrada. (En la mayor parte de los casos, el elemento de realimentación es un sensor que mide la salida de la planta. La salida del sensor se compara con la entrada y se genera la señal de error.) En este ejemplo, la señal de realimentación que retorna al punto de suma para compararse con la entrada es $B(s) = H(s)C(s)$.

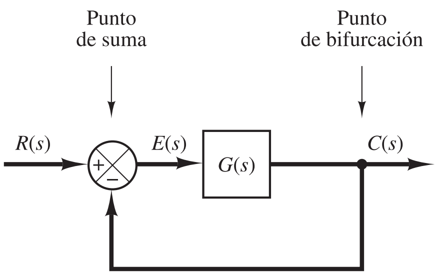

Figura 2-3. Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado.

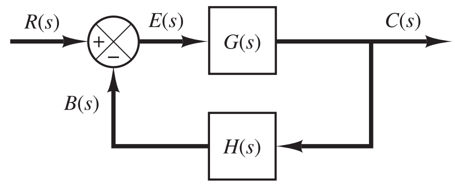

Figura 2-4. Sistema en lazo cerrado.

Función de transferencia en lazo abierto y función de transferencia de la trayectoria directa. Remitiéndose a la Figura 2-4, el cociente de la señal de realimentación $B(s)$ entre la señal de error $E(s)$ se denomina *función de transferencia en lazo abierto*. Es decir,

$$\text{Función de transferencia en lazo abierto} = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

El cociente entre la salida $C(s)$ y la señal de error $E(s)$ se denomina *función de transferencia de la trayectoria directa*, por lo que,

$$\text{Función de transferencia de la trayectoria directa} = \frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

Si la función de transferencia de la trayectoria de realimentación $H(s)$ es la unidad, la función de transferencia en lazo abierto y la función de transferencia de la trayectoria directa son iguales.

Función de transferencia en lazo cerrado. Para el sistema que aparece en la Figura 2-4, la salida $C(s)$ y la entrada $R(s)$ se relacionan del modo siguiente:

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s)E(s) \\ E(s) &= R(s) - B(s) \\ &= R(s) - H(s)C(s) \end{aligned}$$

Si se elimina $E(s)$ de estas ecuaciones, se obtiene

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

o bien,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{2-3}$$

La función de transferencia que relaciona $C(s)$ con $R(s)$ se denomina *función de transferencia en lazo cerrado*. Esta función de transferencia relaciona la dinámica del sistema en lazo cerrado con la dinámica de los elementos de las trayectorias directa y de realimentación.

A partir de la Ecuación (2-3), $C(s)$ se obtiene mediante

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

Por tanto, la salida del sistema en lazo cerrado depende claramente tanto de la función de transferencia en lazo cerrado como de la naturaleza de la entrada.

Obtención de funciones de transferencia en cascada, en paralelo y realimentadas (en lazo cerrado) utilizando MATLAB. En el análisis de sistemas de control, frecuentemente se necesita calcular funciones de transferencia en cascada, funciones de transferencia conectadas en paralelo y funciones de transferencia realimentadas (en lazo cerrado). MATLAB tiene funciones adecuadas parea obtener las funciones de transferencia en cascada, paralelo y realimentada (lazo cerrado).

Supóngase que hay dos componentes $G_1(s)$ y $G_2(s)$ conectadas de diferentes formas como se muestra en la Figura 2-5 (a), (b) y (c), donde

$$G_1(s) = \frac{\text{num1}}{\text{den1}}, \qquad G_2(s) = \frac{\text{num2}}{\text{den2}}$$

Para obtener las funciones de transferencia del sistema en cascada, en paralelo o realimentado (lazo cerrado) se utilizan las siguientes instrucciones:

$$\mathscr{L}[num,den] = series(num1,den1,num2,den2)$$
$$[num,den] = parallel(num1,den1,num2,den2)$$
$$[num,den] = feedback(num1,den1,num2,den2)$$

Como ejemplo, se considera el caso en el que

$$G_1(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10} = \frac{\text{num1}}{\text{den1}}, \qquad G_2(s) = \frac{5}{s+5} = \frac{\text{num2}}{\text{den2}}$$

El Programa 2-1 en MATLAB calcula $C(s)/R(s)$ = num/den para cada situación de $G_1(s)$ y $G_2(s)$. Obsérvese que la instrucción

$$\mathscr{L}printsys(num,den)$$

muestra el num/den [esto es, la función $C(s)/R(s)$] del sistema considerado.

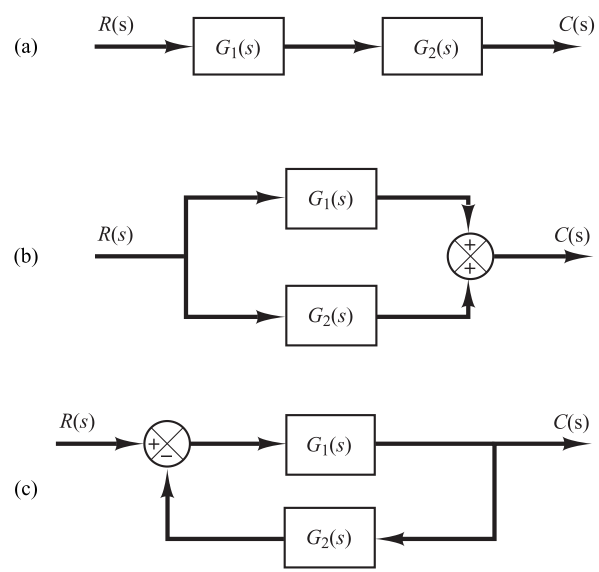

Figura 2-5. (a) Sistema en cascada; (b) sistema paralelo; (c) sistema realimentado (lazo cerrado).

MATLAB Programa 2-1

```
num1 = [10];
den1 = [1  2  10];
num2 = [0  5];
den2 = [1  5];
[num, den] = series(num1,den1,num2,den2);
printsys(num,den)

num/den =

              50
   ----------------------
   s^3 + 7s^2 + 20s + 50

[num, den] = parallel(num1,den1,num2,den2);
printsys(num,den)

num/den =

     5s^2 + 20s + 100
   ----------------------
   s^3 + 7s^2 + 20s + 50

[num, den] = feedback(num1,den1,num2,den2);
printsys(num,den)

num/den =

          10s + 50
   -----------------------
   s^3 + 7s^2 + 20s + 100
```

Controladores automáticos. Un controlador automático compara el valor real de la salida de una planta con la entrada de referencia (el valor deseado), determina la desviación y produce una señal de control que reduce la desviación a cero o a un valor pequeño. La manera en la cual el controlador automático produce la señal de control se denomina *acción de control*. La Figura 2-6 es un diagrama de bloques de un sistema de control industrial que consiste en un controlador automático, un actuador, una planta y un sensor (elemento de medición). El controlador detecta la señal de error, que por lo general, está en un nivel de potencia muy bajo, y la

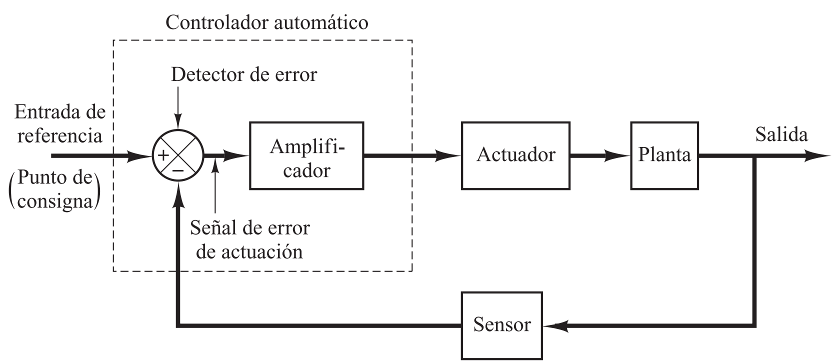

Figura 2-6. Diagrama de bloques de un sistema de control industrial, formado por un controlador automático, un actuador, una planta y un sensor (elemento de medición).

amplifica a un nivel lo suficientemente alto. La salida de un controlador automático se alimenta a un actuador, como un motor o una válvula neumáticos, un motor hidráulico o un motor eléctrico. (El actuador es un dispositivo de potencia que produce la entrada para la planta de acuerdo con la señal de control, a fin de que la señal de salida se aproxime a la señal de entrada de referencia.)

El sensor, o elemento de medición, es un dispositivo que convierte la variable de salida en otra variable manejable, como un desplazamiento, una presión o un voltaje, que pueda usarse para comparar la salida con la señal de entrada de referencia. Este elemento está en la trayectoria de realimentación del sistema en lazo cerrado. El punto de ajuste del controlador debe convertirse en una entrada de referencia con las mismas unidades que la señal de realimentación del sensor o del elemento de medición.

Un sistema en lazo cerrado sujeto a una perturbación. La Figura 2-11 muestra un sistema en lazo cerrado sujeto a una perturbación. Cuando se presentan dos entradas (la entrada de referencia y la perturbación) en un sistema lineal, cada una de ellas puede tratarse de

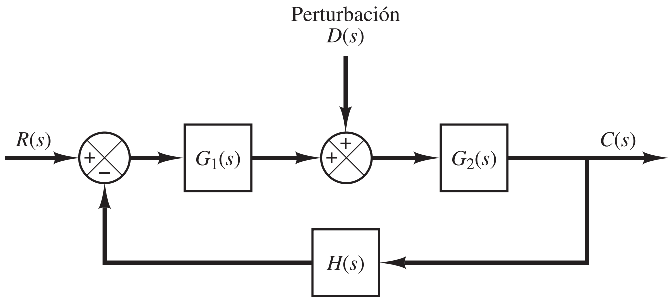

Figura 2-11. Sistema en lazo cerrado sujeto a perturbaciones.

forma independiente; y las salidas correspondientes a cada entrada pueden sumarse para obtener la salida completa. La forma en que se introduce cada entrada en el sistema se muestra en el punto de suma mediante un signo más o un signo menos.

Considérese el sistema que se muestra en la Figura 2-11. Al examinar el efecto de la perturbación $D(s)$, podemos suponer que el sistema está inicialmente relajado, con un error cero; después se puede calcular la respuesta $C_D(s)$ sólo para la perturbación. Esta respuesta se encuentra a partir de

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

Por otra parte, si se considera la respuesta a la entrada de referencia $R(s)$, se puede suponer que la perturbación es cero. Entonces, la respuesta $C_R(s)$ a la entrada de referencia $R(s)$ se obtiene a partir de

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

La respuesta a la aplicación simultánea de la entrada de referencia y la perturbación se obtiene sumando las dos respuestas individuales. En otras palabras, la respuesta $C(s)$ producida por la aplicación simultánea de la entrada de referencia $R(s)$ y la perturbación $D(s)$ se obtiene mediante

$$\begin{aligned} C(s) &= C_R(s) + C_D(s) \\ &= \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} [G_1(s)R(s) + D(s)] \end{aligned}$$

Considérese ahora el caso en el que $|G_1(s)H(s)| \gg 1$ y $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$. En este caso, la función de transferencia en lazo cerrado $C_D(s)/D(s)$ se hace casi cero, y se suprime el efecto de la perturbación. Esta es una ventaja del sistema en lazo cerrado.

Por otra parte, la función de transferencia en lazo cerrado $C_R(s)/R(s)$ se aproxima a $1/H(s)$ conforme aumenta la ganancia de $G_1(s)G_2(s)H(s)$. Esto significa que si $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$, entonces la función de transferencia en lazo cerrado $C_R(s)/R(s)$ se vuelve independiente de $G_1(s)$ y $G_2(s)$ y se hace inversamente proporcional a $H(s)$, por lo que las variaciones de $G_1(s)$ y $G_2(s)$ no afectan a la función de transferencia en lazo cerrado $C_R(s)/R(s)$. Es fácil observar que cualquier sistema en lazo cerrado con una realimentación unitaria, $H(s) = 1$, tiende a igualar la entrada y la salida.

Procedimientos para dibujar un diagrama de bloques. Para dibujar el diagrama de bloques de un sistema, primero se escriben las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de cada componente. A continuación se toma las transformadas de Laplace de estas ecuaciones, suponiendo que las condiciones iniciales son cero, y se representa individualmente en forma de bloques cada ecuación transformada por el método de Laplace. Por último, se integran los elementos en un diagrama de bloques completo.

Como ejemplo, considérese el circuito *RC* de la Figura 2-12(a). Las ecuaciones para el circuito son

$$i = \frac{e_i - e_0}{R} \tag{2-4}$$

$$e_o = \frac{\int i\,dt}{C} \tag{2-5}$$

Las transformadas de Laplace de las Ecuaciones (2-4) y (2-5), con condiciones iniciales iguales a cero, resultan

$$I(s) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R} \tag{2-6}$$

$$E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs} \tag{2-7}$$

La Ecuación (2-6) representa una operación de suma, y el diagrama correspondiente aparece en la Figura 2-12(b). La Ecuación (2-7) representa el bloque de la Figura 2-12(c). Si se integran estos dos elementos se obtiene el diagrama de bloques general para el sistema, tal como aparece en la Figura 2-12(d).

Reducción de un diagrama de bloques. Es importante señalar que los bloques pueden conectarse en serie, sólo si la entrada de un bloque no se ve afectada por el bloque siguiente. Si hay efectos de carga entre los componentes, es necesario combinarlos en un bloque único.

Cualquier número de bloques en cascada que representen componentes sin carga puede sustituirse con un solo bloque, cuya función de transferencia sea simplemente el producto de las funciones de transferencia individuales.

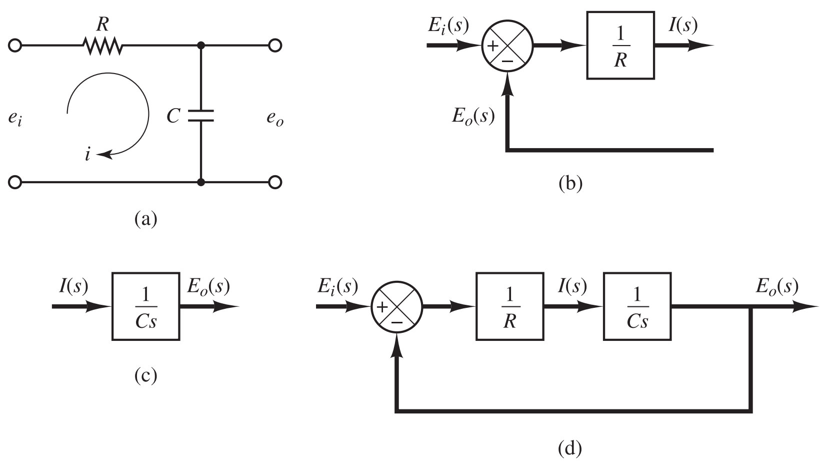

Figura 2-12. (a) Circuito *RC*; (b) diagrama de bloques de la Ecuación (2-6); (c) diagrama de bloques de la Ecuación (2-7); (d) diagrama de bloques del circuito *RC*.

Un diagrama de bloques complicado que contenga muchos lazos de realimentación se simplifica mediante un reordenamiento paso a paso. La simplificación de un diagrama de bloques mediante reordenamientos y sustituciones reduce de manera considerable la labor necesaria para el análisis matemático subsecuente. Sin embargo, debe señalarse que, conforme se simplifica el diagrama de bloques, las funciones de transferencia de los bloques nuevos se vuelven más complejas, debido a que se generan polos y ceros nuevos.

EJEMPLO 2-1 Considere el sistema que aparece en la Figura 2-13(a). Simplifíquese este diagrama. Si se mueve el punto suma del lazo de realimentación negativa que contiene H_2 hacia afuera del lazo de realimentación positiva que contiene H_1, se obtiene la Figura 2-13(b). Si se elimina el lazo de realimentación positiva se obtiene la Figura 2-13(c). La eliminación del lazo que contiene H_2/G_1 origina la Figura 2-13(d). Por último, si se elimina el lazo de realimentación se obtiene la Figura 2-13(e).

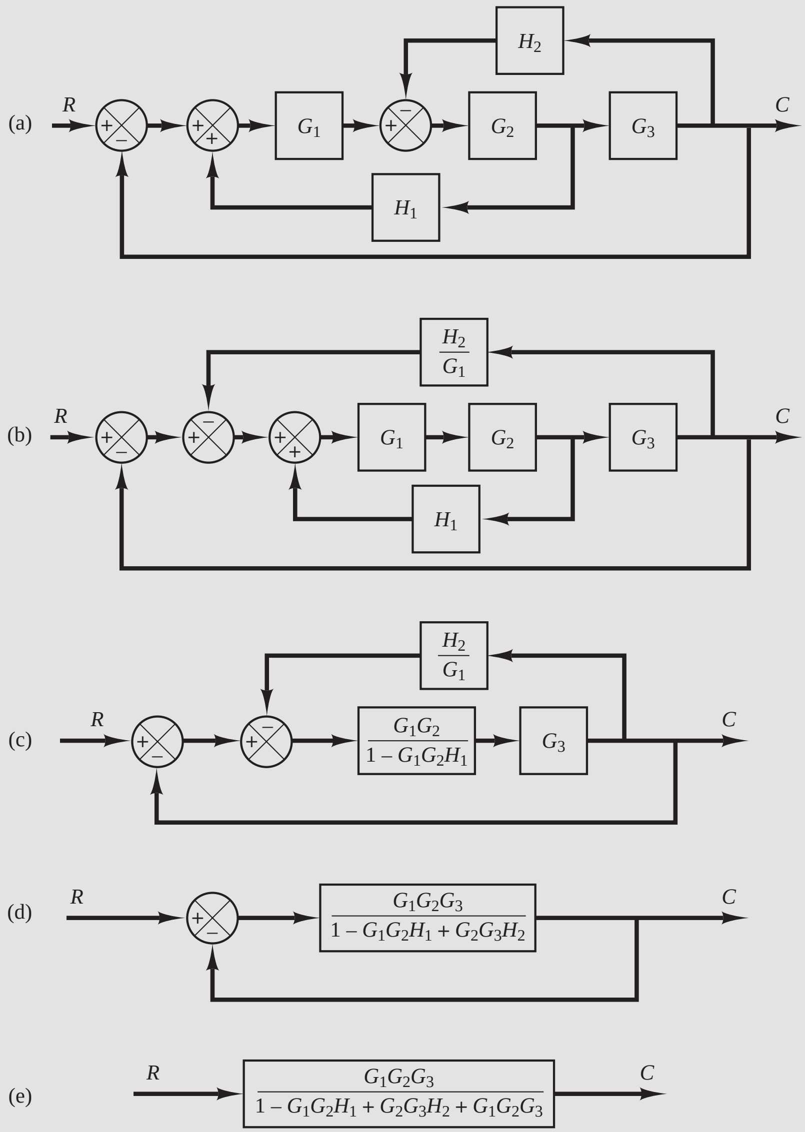

Figura 2-13. (a) Sistema con múltiples lazos; (b)-(e) reducciones sucesivas del diagrama de bloques mostrado en (a).

Observe que el numerador de la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ es el producto de la función de transferencia en el camino directo. El denominador de $C(s)/R(s)$ es igual a

$$\begin{aligned}
&1 + \sum (\text{producto de las funciones de transferencia alrededor de cada lazo}) \\
&\quad = 1 + (-G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3) \\
&\quad = 1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3
\end{aligned}$$

(El lazo de realimentación positiva da lugar a un término negativo en el denominador.)

EJEMPLOS DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-2-1. Simplifique el diagrama de bloques de la Figura 2-17.

Solución. Primero, se mueve el punto de ramificación de la trayectoria que contiene H_1 fuera del lazo que contiene H_2, como se aprecia en la Figura 2-18(a). Después la eliminación de dos lazos da lugar a la Figura 2-18(b). Al combinar dos bloques en uno se obtiene la Figura 2-18(c).

A-2-2. Simplifique el diagrama de bloques de la Figura 2-19. Obtenga la función de transferencia que relaciona $C(s)$ con $R(s)$.

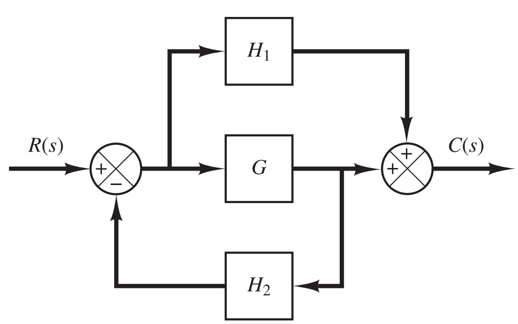

Figura 2-17. Diagrama de bloques de un sistema.

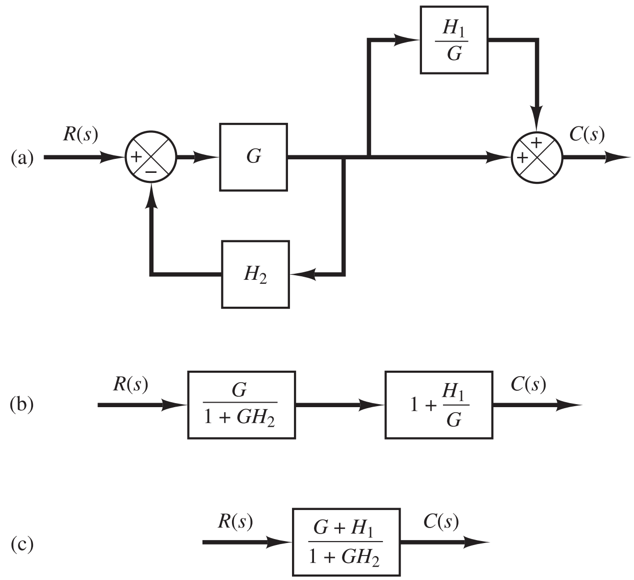

Figura 2-18. Diagrama de bloques simplificado para el sistema mostrado en la Figura 2-17.

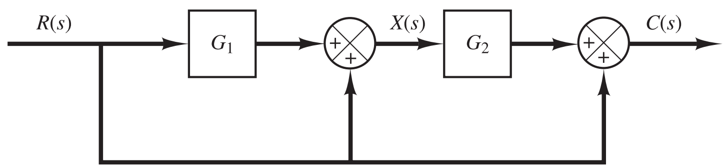

Figura 2-19. Diagrama de bloques de un sistema.

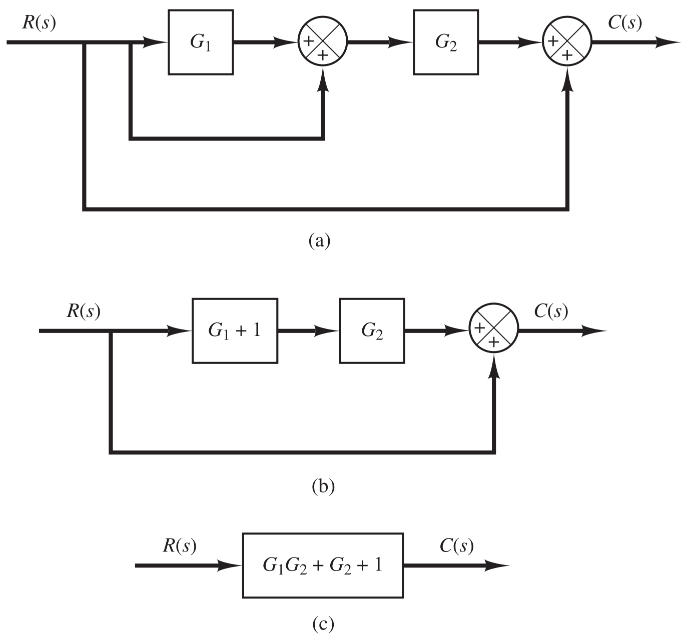

Figura 2-20. Reducción del diagrama de bloques mostrado en la Figura 2-19.

Solución. El diagrama de bloques de la Figura 2-19 se modifica para obtener el que se muestra en la Figura 2-20(a). Eliminando la trayectoria directa menor, se obtiene la Figura 2-20(b), que se simplifica a la que se muestra en la Figura 2-20(c). Así, la función de transferencia $C(s)/R(s)$ se consigue mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1G_2 + G_2 + 1$$

También se obtiene el mismo resultado procediendo del modo siguiente. Como la señal $X(s)$ es la suma de dos señales $G_1R(s)$ y $R(s)$, se tiene que

$$X(s) = G_1R(s) + R(s)$$

La señal de salida $C(s)$ es la suma de $G_2X(s)$ y $R(s)$. Por tanto,

$$C(s) = G_2X(s) + R(s) = G_2[G_1R(s) + R(s)] + R(s)$$

Así se obtiene el mismo resultado que antes:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1G_2 + G_2 + 1$$

A-2-3. Simplifique el diagrama de bloques que se muestra en la Figura 2-21. Después, obtenga la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$.

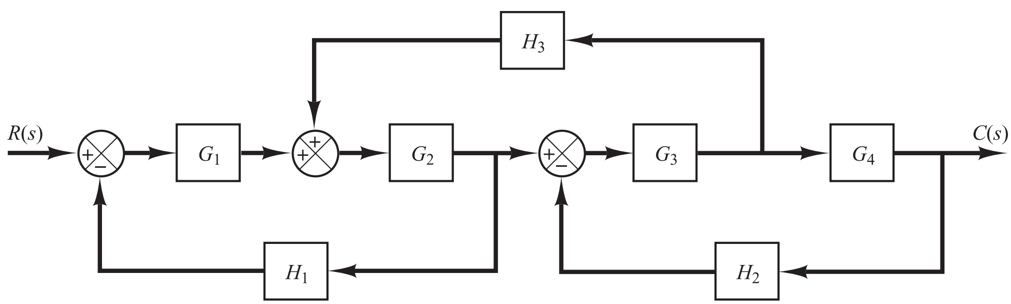

Figura 2-21. Diagrama de bloques de un sistema.

Solución. Primero se mueve el punto de la rama entre G_3 y G_4 al lado derecho del lazo que contiene G_3, G_4 y H_2. Después se mueve el punto de suma entre G_1 y G_2 a la izquierda del primer punto de suma. Véase la Figura 2-22(a). Si se simplifica cada lazo, el diagrama de bloques se puede modificar como se muestra en la Figura 2-22(b). En la Figura 2-22(c) se muestran los resultados de la simplificación; a partir de ella, se obtiene como función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ la siguiente:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3G_4}{1 + G_1G_2H_1 + G_3G_4H_2 - G_2G_3H_3 + G_1G_2G_3G_4H_1H_2}$$

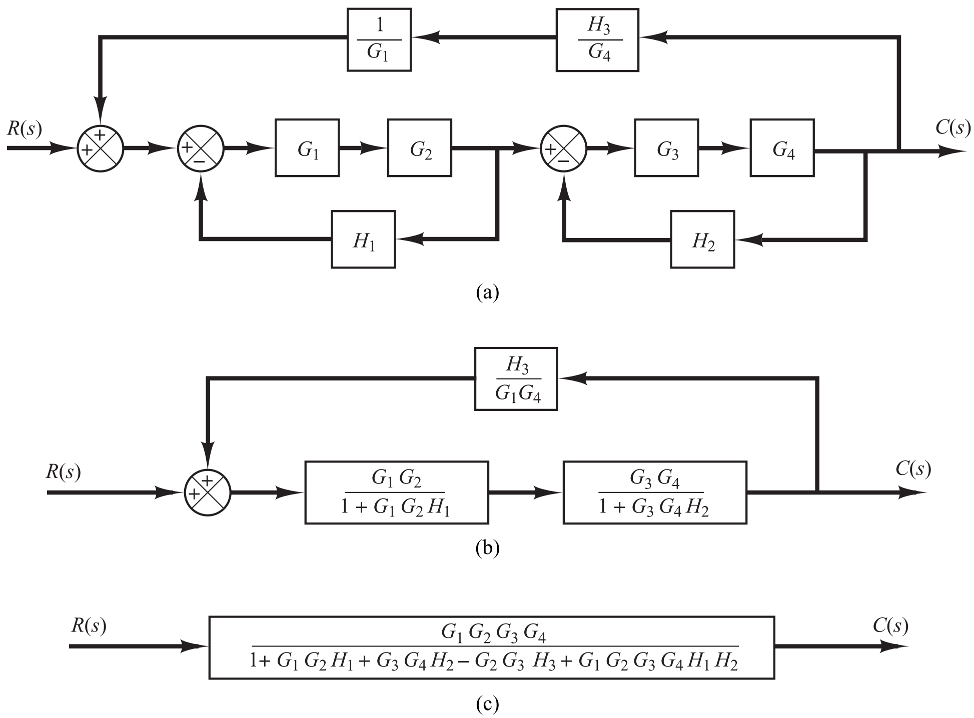

Figura 2-22. Reducciones sucesivas del diagrama de bloques mostrado en la Figura 2-21.

A-2-4. Obtenga las funciones de transferencia $C(s)/R(s)$ y $C(s)/D(s)$ del sistema que se muestra en la Figura 2-23.

Solución. A partir de la Figura 2-23 se obtiene

$$U(s) = G_f R(s) + G_c E(s) \tag{2-47}$$

$$C(s) = G_p[D(s) + G_1 U(s)] \tag{2-48}$$

$$E(s) = R(s) - HC(s) \tag{2-49}$$

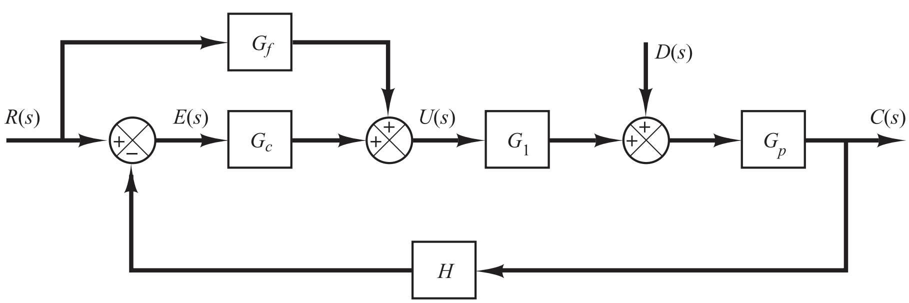

Figura 2-23. Sistema de control con entrada de referencia y entrada de perturbaciones.

Sustituyendo la Ecuación (2-47) en la Ecuación (2-48) se obtiene

$$C(s) = G_p D(s) = G_1 G_p[G_f R(s) + G_c E(s)] \tag{2-50}$$

Sustituyendo la Ecuación (2-49) en la Ecuación (2-50) se obtiene

$$C(s) = G_pD(s) + G_1G_p\{G_fR(s) + G_c[R(s) - HC(s)]\}$$

Si se resuelve esta última ecuación para $C(s)$ se obtiene

$$C(s) + G_1G_pG_cHC(s) = G_pD(s) + G_1G_p(G_f + G_c)R(s)$$

De ahí,

$$C(s) = \frac{G_pD(s) + G_1G_p(G_f + G_c)R(s)}{1 + G_1G_pG_cH} \tag{2-51}$$

Observe que la Ecuación (2-51) da la respuesta $C(s)$ cuando están presentes tanto la entrada de referencia $R(s)$ como la entrada de perturbación $D(s)$.

Para encontrar la función de transferencia $C(s)/R(s)$, se considera $D(s) = 0$ en la Ecuación (2.51). Entonces se obtiene

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_p(G_f + G_c)}{1 + G_1G_pG_cH}$$

Asimismo, para encontrar la función de transferencia $C(s)/D(s)$, se considera $R(s) = 0$ en la Ecuación (2-51). Entonces $C(s)/D(s)$ está dada por

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_1G_pG_cH}$$