

# CONTROL II    (Elo y Bio)

Tema:

Técnica del Lugar Geométrico  
de las Raíces de la Ecuación  
Característica de un Sistema  
de Control Lineal Autónomo.

Prof. Ing. Carlos F. Martín

Año: 2012

## Introducción:

Se sabe de la importancia del conocimiento de los polos y ceros de la función de transferencia de un sistema de control lineal, sobre el desempeño dinámico del mismo. Las raíces de la ecuación característica, las cuales son los polos de la función de transferencia de lazo cerrado, determinan la estabilidad relativa y absoluta de un sistema lineal.

Se debe tener en mente, que las propiedades del transitorio de un sistema también dependen de los ceros de la función de transferencia del sistema.

Un estudio importante en los sistemas de control lineales es la investigación de las trayectorias de cada una de las raíces de la ecuación característica, (o simplemente, *lugar geométrico de las raíces*) cuando algún parámetro del sistema varía en todo su rango de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

En este capítulo presentaremos varios ejemplos que ilustran la utilidad del lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica en el estudio de los sistemas de control lineales. Además se mostrara como construir un bosquejo rápido de estos lugares geométricos mediante el seguimiento de algunas simples reglas. Para dibujar el lugar geométrico de las raíces en forma exacta, se puede emplear algún programa del lugar geométrico de las raíces con una computadora digital. Por ejemplo, los programas: *r/plot* de la caja de herramientas del Csad/Matlab, *r/locus*, en Matlab, *root locus* en el programa CC, solo por nombrar algunos. Todos ellos se basan en el conocimiento de la función de transferencia del lazo, para generar los datos y las gráficas de los lugares geométricos de las raíces.

Sin embargo, es importante aprender las propiedades las bases del Lugar Geométrico de las Raíces, sus propiedades, así como la forma de interpretar los datos proporcionados por el mismo para fines de análisis y diseño de los sistemas de control. Como un ingeniero inteligente, se debe saber si los datos provistos por el lugar geométrico de las raíces son en realidad correctos, y ser capaz de obtener información vital del lugar.

El material en este capítulo está preparado con estos objetivos en mente. La técnica del lugar de las raíces no está confinada solo al estudio de los sistemas de control. La ecuación bajo estudio no necesariamente tiene que ser una ecuación característica de un sistema lineal. En general la técnica puede ser aplicada al estudio del comportamiento de las raíces de cualquier ecuación algebraica de elevado orden.

El problema general del Lugar de las Raíces puede ser formulado partiendo de la siguiente ecuación de la variable compleja  $s$ :

$$F(s) = P(s) + K Q(s) = 0 \quad (1)$$

Donde  $P(s)$  es un polinomio de orden "n" de  $s$ :

$$P(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0 \quad (2)$$

Y  $Q(s)$  un polinomio de orden w-ésimo de  $s$ ;  $n$  y  $w$  son enteros positivos.

$$Q(s) = s^w + q_{w-1}s^{w-1} + \dots + q_1s + q_0 \quad (3)$$

$K$  es una constante real la cual puede variar de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Los coeficientes  $p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_0, q_{n-1}, q_{n-2}, \dots, q_0$  se considera que son constantes, pueden ser reales o complejos aunque nuestro principal interés aquí es con coeficientes reales.

El Lugar de las Raíces de múltiples parámetros variables puede ser tratado variando un parámetro por vez. Las trayectorias resultantes son llamadas Lugar Generalizado de las Raíces o Contorno de las Raíces.

Aunque el Lugar de las Raíces de la ecuación (1), cuando  $K$  varía entre  $-\infty$  y  $+\infty$  es referido en la literatura de los sistemas de control como El Lugar de la Raíz, para propósitos de identificación, definiremos las siguientes categorías de los lugares geométricos de las raíces basándonos en el signo del parámetro  $K$ :

1º) Lugar de las Raíces (L.R.): Es la porción del lugar geométrico de las raíces donde  $K$  es positiva:  $0 \leq K < \infty$

2º) Lugar de las Raíces Complementario o Inverso: (LRC o LRI): Es la porción del lugar geométrico de las raíces donde  $K$  es negativo:  $-\infty < K \leq 0$

3º) Lugar Geométrico Completo de las Raíces: Se refiere al lugar geométrico de las raíces para el rango total de la ganancia:  $-\infty < K < +\infty$ .

4º) Contorno de las Raíces (CR.): Lugar de las raíces cuando varía más de un parámetro del sistema.

### Propiedades Básicas del Lugar Geométrico de las Raíces:

\* Como nuestro principal interés son los sistemas de control, se considera la función de transferencia de lazo cerrado de un sistema de un solo lazo

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4)$$

Manteniendo en mente que la función de transferencia de sistemas de una entrada y una salida con múltiples lazos también se puede expresar en forma similar.

\* La ecuación característica del sistema en lazo cerrado se obtiene al igualar a cero el polinomio denominador de  $\frac{C(s)}{R(s)}$ .

Por lo tanto, las raíces de la ecuación características deben satisfacer:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (5)$$

Si fuese de lazos múltiples sería:  $1 + L(s) = 0$

Supongamos que  $G(s)H(s)$  contiene un solo parámetro variable  $K$  como un factor multiplicativo, de forma que la función racional de lazo se pueda expresar como:

$$G(s)H(s) = \frac{K Q(s)}{P(s)} \quad (6)$$

Donde  $P(s)$  y  $Q(s)$  son polinomios como los definidos en las ecuaciones (2) y (3) respectivamente. Por lo tanto la ecuación (5) será:

$$1 + \frac{K Q(s)}{P(s)} = \frac{P(s) + K Q(s)}{P(s)} = 0 \quad (7)$$

Es fácil ver que el polinomio numerador de la ecuación (7) es idéntico a la ecuación (1).

\* Cuando el parámetro variable  $K$  no aparece como un factor multiplicativo de  $G(s)H(s)$ , se podrá siempre llegar a escribir las ecuaciones características con la forma de la ecuación (1).

Un ejemplo de esta situación sería si el parámetro variable es  $Ka$  y:

$$G(s)H(s) = \frac{s^2 + (3 + 2Ka)s + 5}{s(s+1)(s+2)} \quad (8)$$

La ecuación característica del sistema de lazo cerrado es:

$$s(s+1)(s+2) + [s^2 + (3 + 2Ka)s + 5] = 0 \quad (9)$$

$$[s(s+1)(s+2) + s^2 + 3s + 5] + [2Ka s] = 0$$

Dividiendo ambos miembros por los términos que no contienen al parámetro variable  $Ka$ :

$$1 + \frac{2Ka s}{s(s+1)(s+2) + s^2 + 3s + 5} = 1 + \frac{2Ka s}{s^3 + 4s^2 + 5s + 5} = 0 \quad (10)$$

La cual es de la forma general de la ecuación (7) con:

$$K = 2Ka$$

$$Q(s) = s \quad (11)$$

$$P(s) = s^3 + 4s^2 + 5s + 5 \quad (12)$$

La conclusión es que, dada cualquier función de transferencia de lazo  $G(s)H(s)$  con un parámetro variable cualquiera  $K$  involucrado en ella, podemos siempre encontrar la ecuación característica igualando el polinomio  $1 + G(s)H(s)$  como en el paso de la ecuación (8) a la ecuación (9).

Para aislar el parámetro variable  $K$ , primero agrupamos los términos de la ecuación característica que contienen a  $K$ , también agrupamos a los términos sin  $K$ ; por lo tanto quedan determinados los polinomios  $P(s)$  y  $Q(s)$  como en la ecuación (1). Finalmente, dividimos ambos miembros de la ecuación característica por  $P(s)$  que contiene a los términos sin  $K$ . Este último paso es esencial pues de él se obtiene lo que se denomina la Función de Transferencia del Lazo Equivalente y en base a ella construir el lugar de las raíces, pues se verá que todas las propiedades del Lugar de las Raíces de la ecuación (1) son derivadas de las características de la función  $Q(s)/P(s)$ .

\* Ahora estamos listos para investigar las condiciones bajo las cuales la ecuación (5) o (7) son satisfechas.

Supongamos expresar a  $G(s)H(s)$  como:

$$G(s)H(s) = KG_1(s)H_1(s) \quad (13)$$

Donde  $G_1(s)H_1(s)$  es igual a  $Q(s)/P(s)$  y no contiene el parámetro variable  $K$ .

Luego, la ecuación (5) se puede escribir:

$$\boxed{1 + KG_1(s)H_1(s) = 0} \quad (14)$$

$$\boxed{G_1(s)H_1(s) = -\frac{1}{K}}$$

Para satisfacer la última ecuación, las dos condiciones siguientes deben ser mantenidas simultáneamente:

Condición de Magnitud:

$$|G_1(s)H_1(s)| = \left| \frac{1}{K} \right| \quad -\infty < K < \infty \quad (15)$$

Condición Angular:

$$\boxed{G_1(s)H_1(s) = (2k+1)\pi \quad o \quad = m'180^\circ} \quad \underline{(K \geq 0)} \quad (16)$$

$= \text{Multiplo impar de } 180^\circ$

$$\boxed{G_1(s)H_1(s) = 2k\pi \quad o \quad = m'180^\circ} \quad \underline{(K \leq 0)} \quad (17)$$

$= \text{Multiplo par de } 180^\circ$

Donde:

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (cualquier entero)

o

$m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$  (cualquier impar)

$m' = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$  (cualquier par)

En la práctica las condiciones establecidas en las ecuaciones (15), (16) y (17) juegan diferentes roles en la construcción del lugar geométrico de las raíces.

- Las condiciones angulares de las ecuaciones (16) y (17) se emplean para determinar las trayectorias del lugar geométrico de las raíces en el plano  $s$ , (o sea el gráfico propiamente dicho).-
- Una vez que se dibujó el L.G.R., los valores de  $K$  sobre el mismo se determina mediante el empleo de las condiciones de magnitud de la ecuación (15).

La construcción del L.G.R. es básicamente un problema gráfico, aunque alguna de sus propiedades sea de aplicación analítica.

El punto de partida de la construcción gráfica del L.G.R. se basa en el conocimiento de los polos y ceros del lazo  $G(s)H(s)$ . En otras palabras,  $G(s)H(s)$  se debe escribir primero como:

$$G(s).H(s) = K.G_1(s).H_1(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_w)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad (18)$$

Donde los ceros y los polos de  $G(s).H(s)$  son reales o en pares complejos conjugados.

Usando los requerimientos de magnitud y de ángulo:

$$|G_1(s).H_1(s)| = \frac{\prod_{i=1}^w |s+z_i|}{\prod_{j=1}^n |s+p_j|} = \frac{1}{|K|}, \quad -\infty < K < \infty \quad (19)$$

y

$$\angle G_1(s).H_1(s) = \sum_{i=1}^w \angle(s+z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s+p_j) = m \times 180^\circ; \quad (m = \pm 1, \pm 3, \dots) \text{ si } 0 \leq K < \infty \quad (\text{L.R.D.})$$

$$\angle G_1(s).H_1(s) = \sum_{i=1}^w \angle(s+z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s+p_j) = m \times 180^\circ; \quad (m = 0, \pm 2, \pm 4, \dots) \text{ si } -\infty < K \leq 0 \quad (\text{L.R.I.})$$

Las últimas ecuaciones se pueden abreviar como:

$$\sum \phi_z - \sum \phi_p = m \times 180^\circ \begin{cases} LR: m = \pm 1, \pm 3, \dots \\ LRI: m = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \end{cases} \quad (20)$$

La interpretación de la última ecuación es que cualquier punto  $s_1$  sobre el lugar de las raíces o sobre el L.R.I. debe satisfacer la condición siguiente:

*La diferencia entre las sumas de los ángulos de los vectores dibujados desde los ceros del lazo al punto  $s_1$  y desde los polos del lazo al mismo punto, debe ser un múltiplo impar de  $180^\circ$  (LRD) o un múltiplo par de  $180^\circ$ , (o cero) (LRI).*

Una vez que el L.G.R. se ha construido, los valores de K a lo largo del mismo se pueden determinar al escribir la ecuación (19) como:

$$|K| = \frac{\prod_{j=1}^n |s+p_j|}{\prod_{i=1}^w |s+z_i|} \quad (21)$$

El valor de K en cualquier punto  $s_1$  sobre el L.G.R. se obtiene al sustituir el valor de  $s_1$  en la ecuación (21).

*En forma gráfica, el numerador de la ecuación (21), representa el producto de las longitudes (módulos) de los vectores dibujados desde los polos de  $G(s).H(s)$  a  $s_1$ , y el denominador representa el producto de las longitudes de los vectores dibujados desde los ceros de  $G(s).H(s)$  a  $s_1$ .*

Si el punto está sobre el LR, K es positiva, si está sobre LRC, entonces K es negativa.

Para ilustrar el empleo de las ecuaciones de los requerimientos, para la construcción del L.G.R., se considera la función:

$$G(s).H(s) = \frac{(2k_c)(s+z_1)}{s(s+p_2)(s+p_3)}; \quad K = 2k_c$$

La figura 1 aclara la aplicación de los requerimientos:

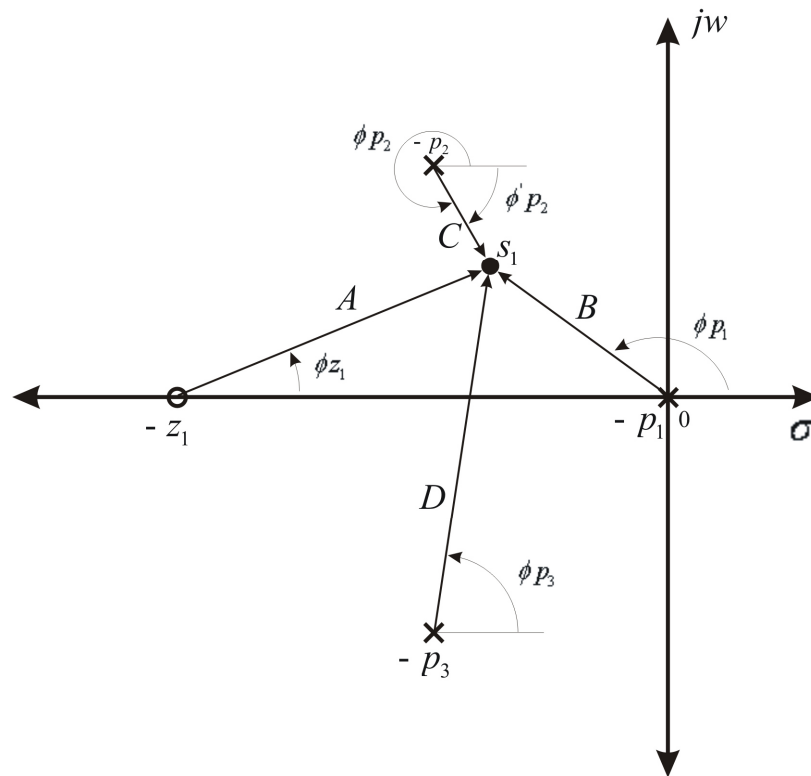


Figura 1

$$\Phi = \phi_{z_1} - (\phi_{p_1} + \phi_{p_2} + \phi_{p_3}) = m \cdot 180^\circ$$

Si  $s_1$  está sobre LRD:  $m = \pm 1; \dots$

Si  $s_1$  está sobre LRI:  $m = 0; \pm 2; \dots$

Si no está en el L.G.R.  $\Phi \neq m \cdot 180^\circ$

Si  $s_1$  está sobre L.G.R., el valor de K en dicho punto valdrá:

$$|K| = \frac{|s_1| |s_1 + p_2| |s_1 + p_3|}{|s_1 + z_1|} = \frac{BCD}{A} = \# \rightarrow k_c = \frac{\#}{2}$$

El signo dependerá de si  $s_1$  está en el LR o en el LRI.

La tabla siguiente muestra los símbolos, gráficos y matemáticos, a emplear en el presente estudio de la técnica del lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica de un sistema de control automático.-

Símbolos a Usar	Gráfico	Matemático
Ceros de $G(s).H(s) \quad (L(s))$	o	Z
Polos de $G(s).H(s) \quad (L(s))$	x	P
Ceros de $F(s) = 1 + G(s).H(s)$ (polos del sistema)	□	$\lambda$
Cuando el Sistema es marginalmente estable	▽	$\lambda_L$
Ceros de M(s) (ceros del sistema)	●	$\tilde{Z}$

Antes de ver las propiedades del L.G.R, consideremos unos ejemplos muy simples en donde solo se aplicará el requerimiento angular y el de magnitud para dibujar y parametrar el lugar.

Luego se verán las propiedades del L.G.R. para que el ingeniero tenga una comprensión profunda de las mismas y sea capaz de bosquejar rápidamente en forma manual lugares geométricos de las raíces de sistemas simples y moderadamente complejos e interpretar los resultados de la computadora de forma correcta, cuando se usa esta técnica para el análisis y diseño de los sistemas de control lineales.

Veremos tres ejemplos, aplicando los requerimientos de ángulo y módulo.

#### Ejemplo 1:

Un sistema de segundo orden tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = G(s)H(s) = \frac{K}{(s+2)^2}$$

Al aplicar el requerimiento angular se tendrá:

$$\sum \Phi_Z - \sum \Phi_P = 0 - 2\alpha = m180^\circ \Rightarrow \alpha = m \times 90^\circ$$

Para el lugar de las raíces directo:  $\pm \times 90^\circ = \pm 90^\circ$

Para el lugar de las raíces inverso:  $0 \times 90^\circ = 0^\circ$  y  $2 \times 90^\circ = 180^\circ$

El lugar sería el indicado en la figura 2.

En la misma se ha parametrado el lugar para varios puntos del mismo usando el requerimiento de magnitud.-



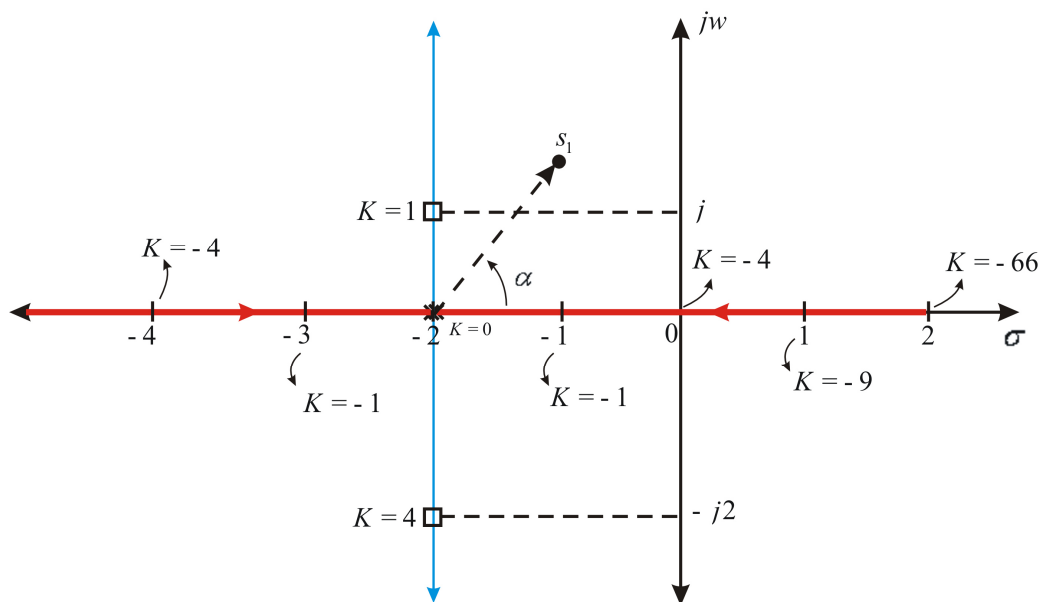


Figura 2

### Ejemplo 2:

Un sistema de segundo orden tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$G(s)H(s) = L(s) = \frac{(2Kc)}{s(s+2)} \quad ; \quad K = 2Kc$$

Al aplicar el requerimiento angular se tendrá:

$$\sum \Phi_z - \sum \Phi_p = 0 - (\alpha + \beta) = m \times 180^\circ \quad \Rightarrow \quad 0 - [(180^\circ - \theta) + \beta] = m \times 180^\circ$$

$$0 - 180^\circ + \theta - \beta = m \times 180^\circ, \text{ por lo tanto deberá ser: } \underline{(\theta - \beta) = (m + 1) \times 180^\circ}$$

Para el lugar de las raíces directo con,  $(m = \pm 1)$

$$(\theta - \beta) = 360^\circ \equiv 0^\circ \Rightarrow \text{Por lo tanto } \theta \text{ y } \beta \text{ son los dos ceros o los dos iguales.}$$

Para el lugar de las raíces inverso con,  $(m = 0 \text{ y } m = -2)$

$$(\theta - \beta) = 180^\circ \Rightarrow \text{Por lo tanto } \beta = 0^\circ \text{ y } \theta = 180^\circ$$

$$(\theta - \beta) = -180^\circ \Rightarrow \text{Por lo tanto } \beta = 180^\circ \text{ y } \theta = 0^\circ$$

El lugar sería el indicado en la figura 3. En la misma se ha parametrado el lugar para varios puntos del mismo usando el requerimiento de magnitud.-

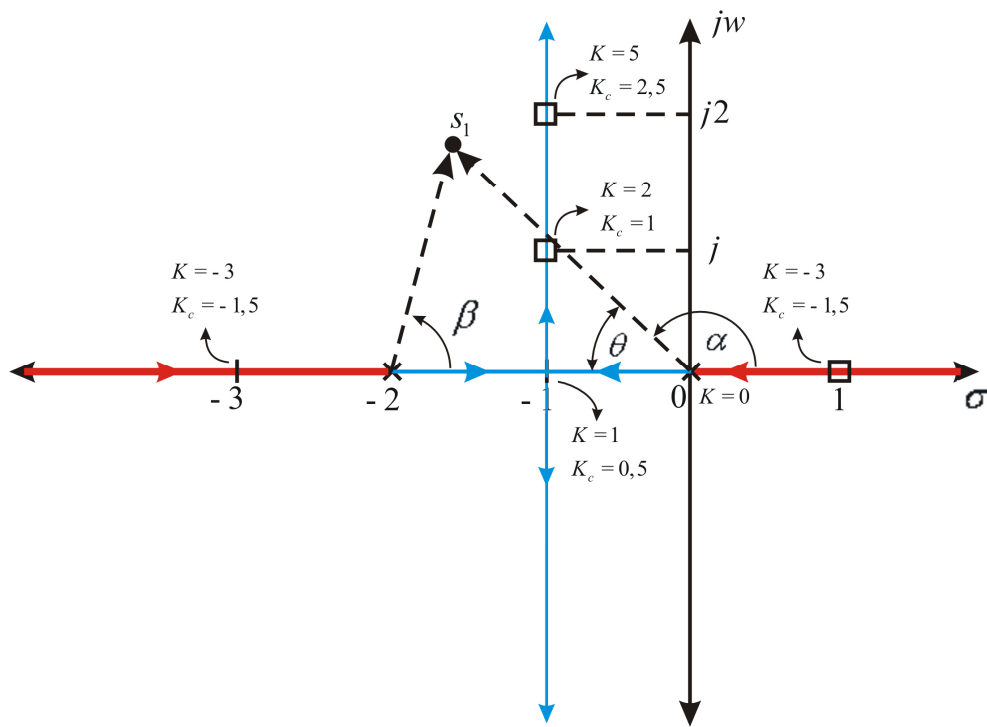


Figura 3

### Ejemplo 3:

Un sistema de segundo orden tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = \frac{(0.5 K_c)}{s^2 + 4s + 5} \quad ; \quad K = (0.50 K_c)$$

Al aplicar el requerimiento angular se tendrá:

$$\sum \Phi_Z - \sum \Phi_P = m \times 180^\circ \Rightarrow -(\alpha + \beta) = m \times 180^\circ \Rightarrow (\alpha + \beta) = m \times 180^\circ. -$$

Para el lugar directo de las raíces con,  $(m = \pm 1)$

$$(\theta + \beta) = 180^\circ \Rightarrow (90^\circ + 90^\circ). -$$

$$\text{o, } (\theta + \beta) = -180^\circ \Rightarrow (-90^\circ + (-90^\circ)). -$$

Para el lugar inverso de las raíces con,  $(m = 0 \text{ y } m = 2)$

$$(\theta + \beta) = 0^\circ \Rightarrow (-90^\circ + 90^\circ) = 0^\circ. -$$

$$(\theta + \beta) = 360^\circ \equiv 0^\circ \Rightarrow \text{Todo el eje real. -}$$

El lugar sería el indicado en la figura 4.

En la misma se ha parametrado el lugar para varios puntos del mismo usando el requerimiento de magnitud.-

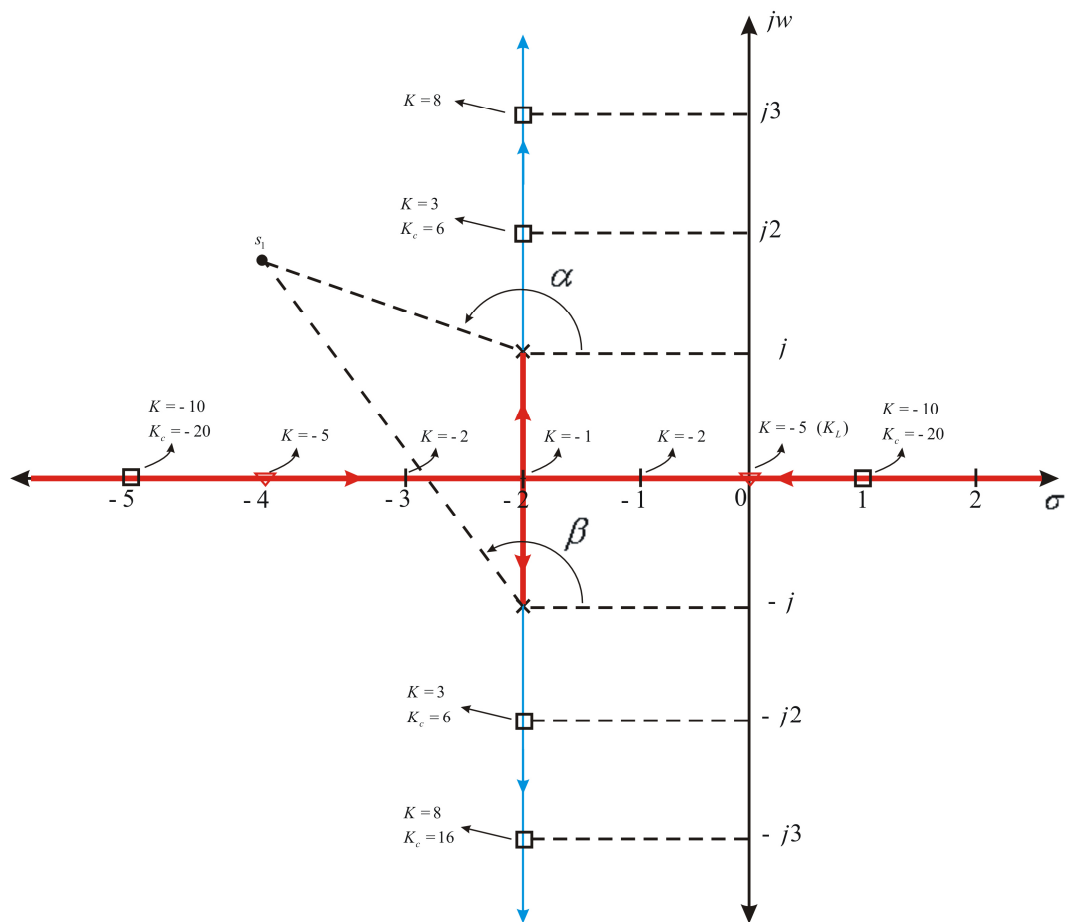


Figura 4

#### Ejemplo 4:

Un sistema de segundo orden tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = \frac{K(s+2)^2}{(s+5)^2}$$

Al aplicar el requerimiento angular se tendrá:

$$\sum \Phi_z - \sum \Phi_p = m \times 180^\circ \Rightarrow 2(180^\circ - \alpha) - 2\beta = m \times 180^\circ$$

$$180 - \alpha - \beta = m \times 90^\circ \Rightarrow (\alpha + \beta) = (2 - m)90^\circ$$

Además se cumple que, figura 5:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

Para el lugar directo de las raíces con, ( $m=1$ )

$$(\alpha + \beta) = 90^\circ \Rightarrow \gamma = 90^\circ$$

Por lo tanto es un arco de circunferencia con centro en -3.5 y radio 1.50.

La otra rama es el otro arco de circunferencia conjugado del anterior.-

Para el lugar inverso de las raíces con, ( $m=0$ )

$$(\alpha + \beta) = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 0^\circ$$

Lo cumple las partes del eje real entre,  $(-\infty \text{ y } -5)$  y  $(-2 \text{ e } +\infty)$ .-

$$\text{Si } m=2 \Rightarrow (\alpha + \beta) = 0^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ \text{.-}$$

Lo cumple la parte del eje real entre,  $(-5 \text{ y } -2)$ . –

Por ende todo el eje real pertenece al lugar inverso de las raíces.

Todo esto está indicado en la figura 5, en la misma se ha parametrizado el lugar para varios puntos del mismo usando el requerimiento de magnitud. –

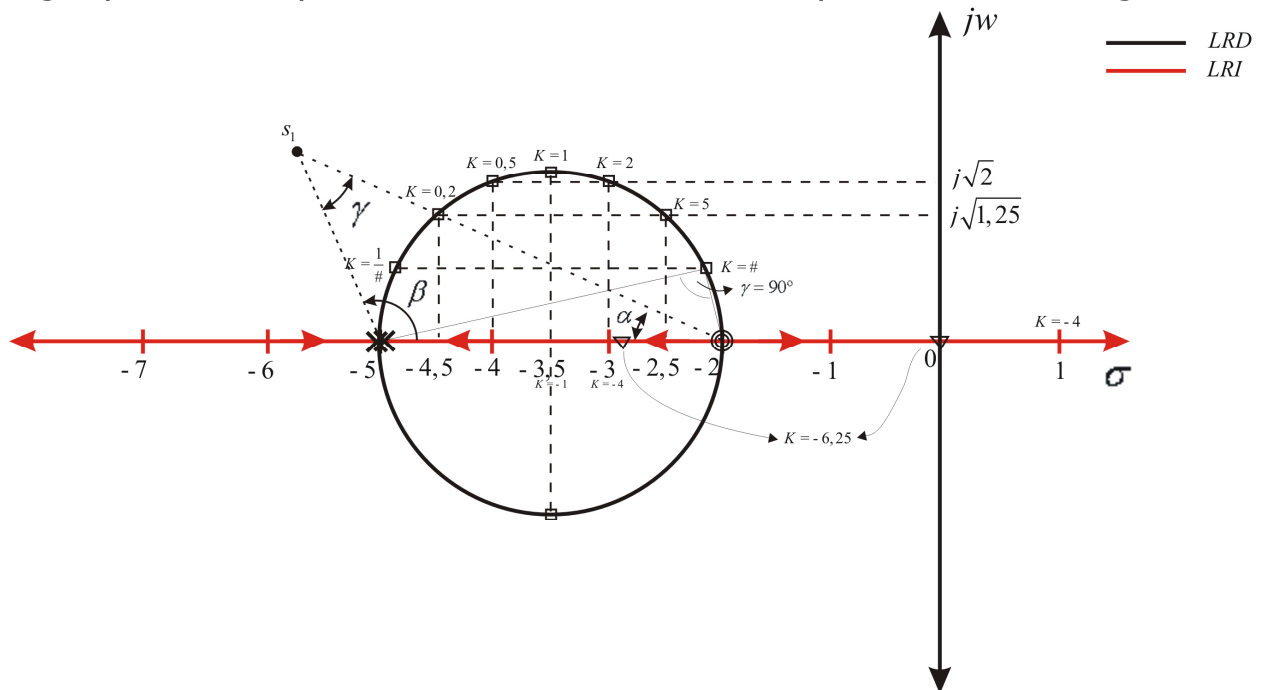


Figura 5

### Ejemplo 5:

Un sistema de segundo orden tiene la siguiente función de transferencia del lazo:

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\sum \Phi_Z - \sum \Phi_P = m \times 180^\circ \Rightarrow -(\alpha + \beta + \gamma) = m \times 180^\circ, \quad \text{O} \quad \Phi = (\alpha + \beta + \gamma) = m \times 180^\circ$$

Para las partes reales:

Para el lugar directo de las raíces con,  $(m=1) \quad \Phi = 180^\circ$ . –

Para el lugar inverso de las raíces con,  $(m=0) \quad \Phi = 0^\circ$ . –

Las mismas están indicadas en la figura 6.

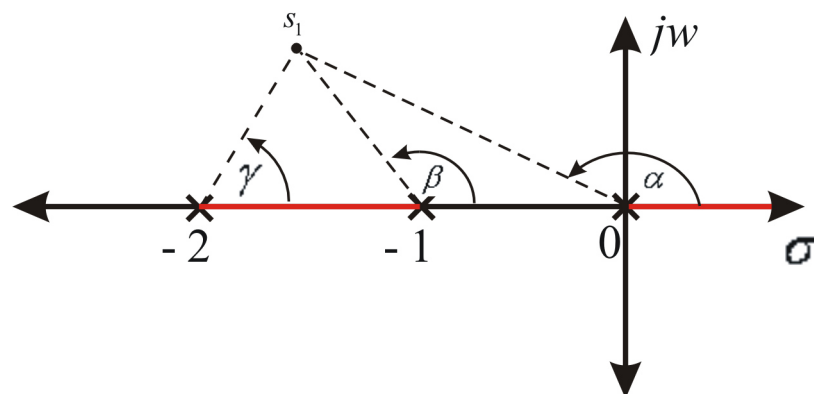


Figura 6

Para las partes complejas ya no es tan evidente como en los ejemplos anteriores, por lo tanto se tendrá que recurrir a las propiedades o reglas de construcción del lugar de las raíces de la ecuación característica.

---

### Pasos para Construir un Bosquejo del Lugar Completo de las Raíces

Hay siete pasos a seguir:

- Primer Paso: Dibujar los polos y ceros de  $L(s)$ , (Reglas 1 y 2).-
- Segundo Paso: Marcar las partes del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real, (Regla 3).-
- Tercer Paso: Determinar el llamado centroide y bosquejar las asíntotas del lugar, (Reglas 4 y 5).-
- Cuarto Paso: Determinar los ángulos de salida/llegada, de los polos o ceros complejos conjugados, (Regla 6).-
- Quinto Paso: Determinar los cruces con el eje imaginario, (Regla 7).-
- Sexto Paso: Determinar los puntos de ruptura del lugar, (Regla 8).-
- Séptimo Paso: Bosquejar el resto del lugar geométrico de las raíces, (Reglas 9, 10, 11 y 12).-

---

### Construcción del Lugar Completo de las Raíces.

Las siguientes reglas de construcción son desarrolladas desde la relación entre los polos y ceros de  $G(s)H(s)$  y desde la relación de  $1 + G(s)H(s)$ . Estas reglas serán utilizadas solo como ayuda para la construcción del L.R. y del L.R.I., pues ellas no dan las gráficas exactas.

#### 1º Paso: Reglas 1 y 2:

##### 1) Puntos de $K=0$

Los puntos para  $K=0$  sobre el L.G.R. están en los polos de  $G(s)H(s)$ , ( $L(s)$ ).

Demostración: desde la ecuación  $|G_1(s)H(s)| = \frac{\prod_{i=1}^w |s - z_i|}{\prod_{j=1}^n |s - p_j|} = \frac{1}{|K|} \quad (0)$

Cuando  $K$  se aproxima a cero, la magnitud de  $|G(s)H(s)| \rightarrow \infty$  y, correspondientemente,  $s$  se aproxima a los polos de  $G'(s)H'(s)$  o de  $G(s)H(s)$ , o sea,  $s \rightarrow p_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ )

Es evidente que esta propiedad se aplica tanto al L.R. como al L.R. Inverso, pues el signo de  $K$  no tiene ingerencia en la ecuación (0).

**Ejemplo 6:** Consideremos la siguiente ecuación.

$$s(s+2)(s+3) + K(s+1) = 0 \quad (1)$$

Cuando  $K=0$ , las tres raíces de la ecuación están en  $\lambda_1=0$ ,  $\lambda_2=-2$  y  $\lambda_3=-3$ . Estos tres puntos son también los polos de la función  $G(s)H(s)$ , pues si se divide miembro a miembro la ecuación (1) por los términos que no contienen  $K$  y establecemos la relación:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = 0 \quad (2)$$

$$\text{será: } G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \quad (3)$$

Los tres puntos de  $K=0$  sobre el L.R.C. se muestran en la figura 7.

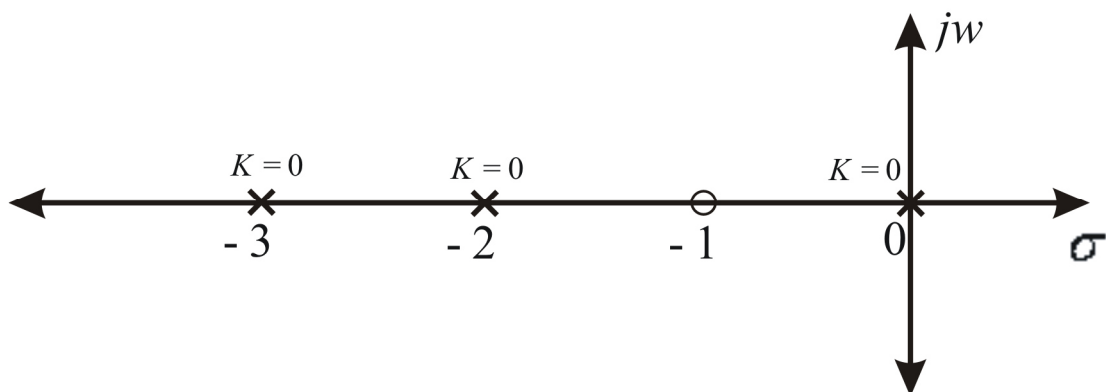


Figura 7

## 2) Puntos para $K = \pm \infty$

Los puntos para  $K = \pm \infty$  sobre el L.R.C. están en los ceros de  $G(s)H(s)$ .

**Demostración:** Refiriéndonos de nuevo a la ecuación (0), cuando  $K \rightarrow \pm \infty$ , la ecuación se aproxima a cero. Esto corresponde a que  $s$  tiende a los ceros de  $G(s)H(s)$ ; o sea,  $s \rightarrow z_i$  ( $i=1,2,\dots,w$ )

**Ejemplo 7:** Consideremos de nuevo la ecuación.

$$s(s+2)(s+3) + K(s+1) = 0 \quad (4)$$

Es evidente que cuando  $K$  es muy grande, la ecuación puede ser aproximada por:

$$K(s+1) = 0 \quad (5)$$

La cual tiene la raíz  $s = -1$ . Notar que también es el cero de  $G(s)H(s)$  en la ecuación (3). Por lo tanto, la figura 8, muestra el punto  $s = -1$  en el cual  $K \rightarrow \pm\infty$ .

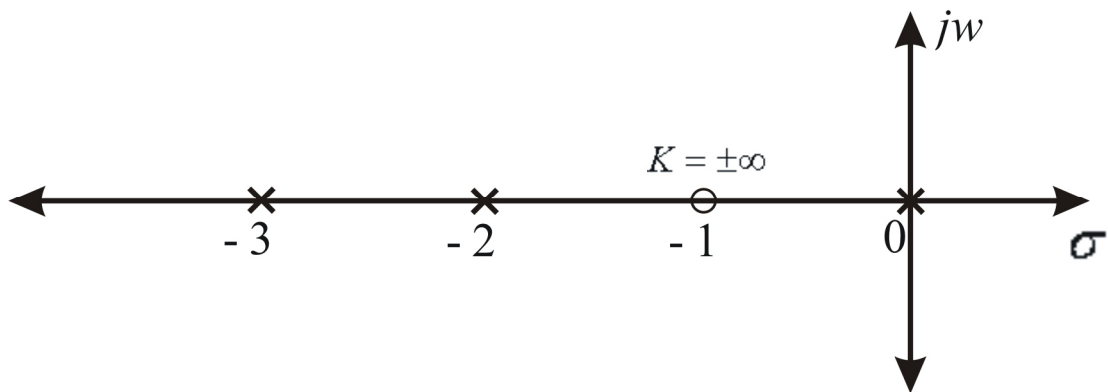


Figura 8

Sin embargo,  $G(s)H(s)$  en éste caso también tiene otros dos ceros localizados en infinito, pues para una función racional, el número total de polos y de ceros debe ser igual si los polos y ceros en el infinito son incluidos. Por lo tanto, para la ecuación (4), los puntos para  $K \rightarrow \pm\infty$  están en  $s = -1, \infty$  e  $\infty$ . "Es útil considerar que  $\infty$  en el plano  $s$  es un punto conceptual. Se puede visualizar que el plano finito  $s$  es solo una pequeña superficie sobre una esfera, la cual tiene un radio infinito. Luego, infinito en el plano  $s$  es un punto sobre el lado opuesto de la esfera al que se dibuja". Figura 9.-

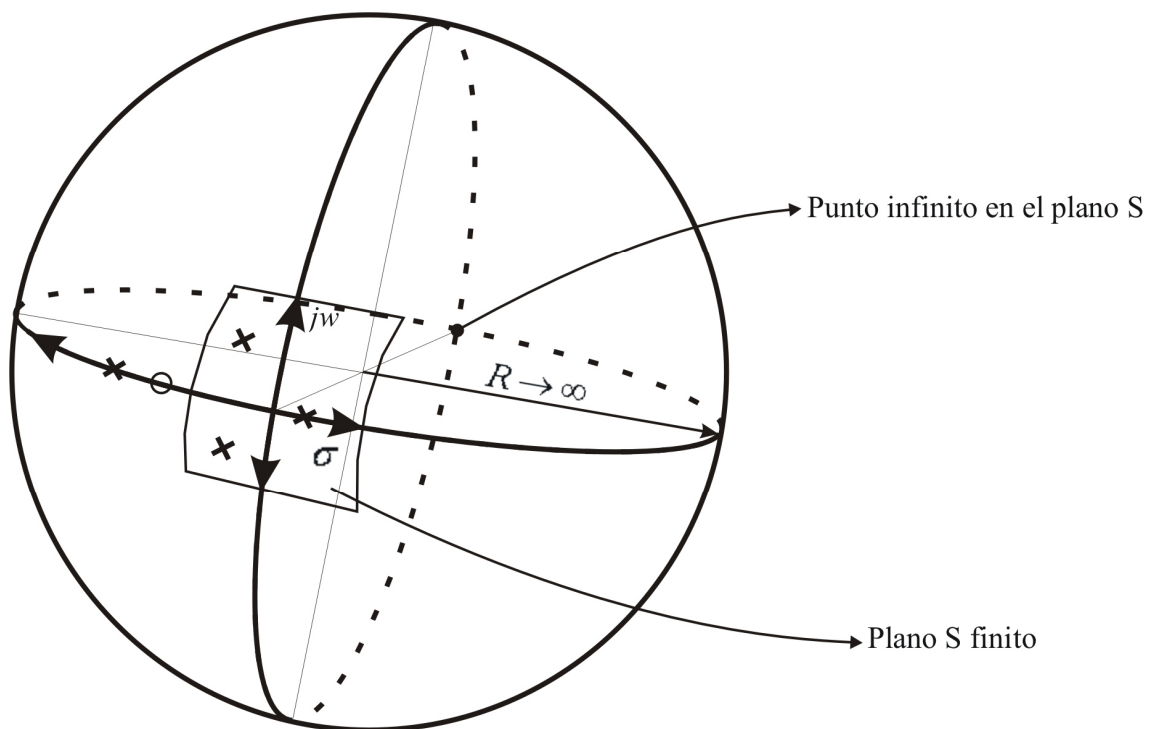


Figura 9

## 2º Paso: Regla 3:

### 3) Lugar de la Raíz sobre el eje Real.

a) Lugar de la Raíz Directo: Una sección dada del eje real pertenecerá al L.R.D. ( $K \geq 0$ ) solamente si el número total de polos y ceros reales de  $G(s)H(s)$  a la derecha es impar.

b) Lugar de la Raíz Inverso: Ídem a) solo que cambiando la palabra impar por par. A la derecha del último polo o cero de  $G(s)H(s)$  siempre pertenecerá al L.R.I.

Alternativamente se puede decir que L.R.I. se encontrará en las secciones del eje real no ocupadas por el L.R.D. En todos los casos los polos y ceros complejos no afectan a la existencia del L.R. sobre el eje real.

### Demostración:

1. En un punto cualquiera (por ejemplo,  $s_1$ ) sobre el eje real la suma de los ángulos de los vectores dibujados desde los polos y ceros complejos conjugados de  $G(s)H(s)$  a dicho punto es cero. Por lo tanto solamente contribuyen a las condiciones angulares los polos y ceros reales de  $G(s)H(s)$

2. Solamente los polos y ceros reales de  $G(s)H(s)$  que están ubicados a la derecha del punto  $s_1$  pueden contribuir a los requerimientos angulares, puesto que los situados a la izquierda de  $s_1$  tienen un ángulo cero.

3. Cada polo real de  $G(s)H(s)$  a la derecha del punto  $s_1$  contribuye con (-180°) y cada cero a la derecha del punto contribuye con 180° a la condición angular. La última observación muestra que para que  $s_1$  sea un punto del L.R. debe haber un número impar de polos y ceros de  $G(s)H(s)$  a la derecha de  $s_1$ , y para que  $s_1$  sea un punto del L.R.C. ese número deberá ser par. Los siguientes ejemplos ilustran las propiedades del L.G.R. sobre el eje real del plano  $s$ .

$$\sum \phi_{z_{RD}} - \sum \phi_{p_{RD}} = \pm z180^\circ \mp p180^\circ = \pm m \times 180^\circ \Rightarrow \boxed{z + p = m}$$

La Figura 10 muestra dos ejemplos de aplicación de esta regla:



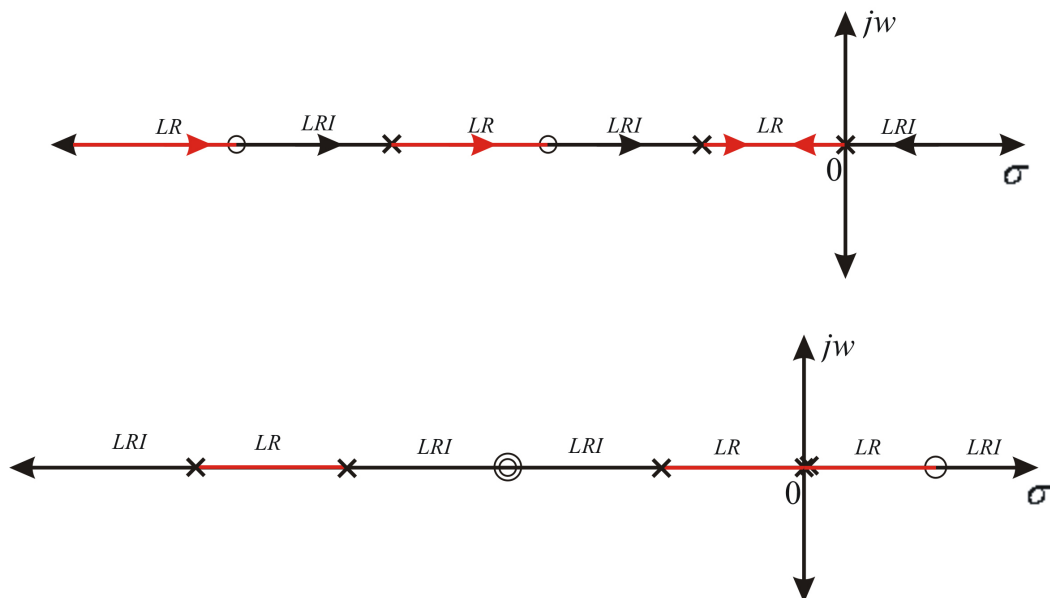


Figura 10

3º Paso: Reglas 4 y 5:

4) Número de Asíntotas: En sistemas con  $n \neq w$  el número de asuntotas será para los dos lugares, en general:

$$N^{\circ} \text{ de Asíntotas} = 2 |n - w|$$

( $|n - w|$  Para el L.R.D. y  $|n - w|$  para el L.R.I.).-  $(n - w) \rightarrow$  orden relativo

Las asíntotas indican a donde tenderán las raíces de la ecuación característica a medida que la ganancia tiende a infinito, si  $n > w$ , hacia los polos impropios para el L.R.D. y desde donde vienen las ramas hacia los polos cuando  $K \rightarrow 0$ , en el L.R.I.

En algunos sistemas no hay asíntotas, cuando el grado relativo es cero, toda rama termina en un cero finito (L.R.D.) o parte de un cero finito (L.R.I.). Las asíntotas son simétricas respecto al eje real, parten de un punto  $\sigma_0$  definidos por las magnitudes relativas de los polos y ceros de la función de transferencia del lazo,  $L(s)$ .-

Este punto es el centroide y se obtiene de la siguiente expresión:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^w z_i}{n - w} = \frac{\sum p_0 - \sum z_0}{n - w}$$

$\sum p_0 \rightarrow$  Suma de los polos finitos de  $L(s)$

$\sum z_0 \rightarrow$  Suma de los ceros finitos de  $L(s)$

$n \rightarrow$  Número de polos finitos de  $L(s)$

$w \rightarrow$  Número de ceros finitos de  $L(s)$

Como se puede apreciar  $p_0$  es siempre un número real. También se puede expresar:

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{partes reales de los polos de } L(s) - \sum \text{partes reales de los ceros de } L(s)}{n - w}$$

5) Inclinación de las Asíntotas: Los ángulos de las asíntotas se obtiene de:

$$\alpha = \frac{m \cdot 180^\circ}{n - w} \begin{cases} L.R.: m = \pm 1; \pm 3; \dots \\ L.R.I.: m = 0; \pm 2; \pm 4; \dots \end{cases}$$

Demostración:

Aplicando el requerimiento de magnitud a la configuración de polos y ceros de la figura 11

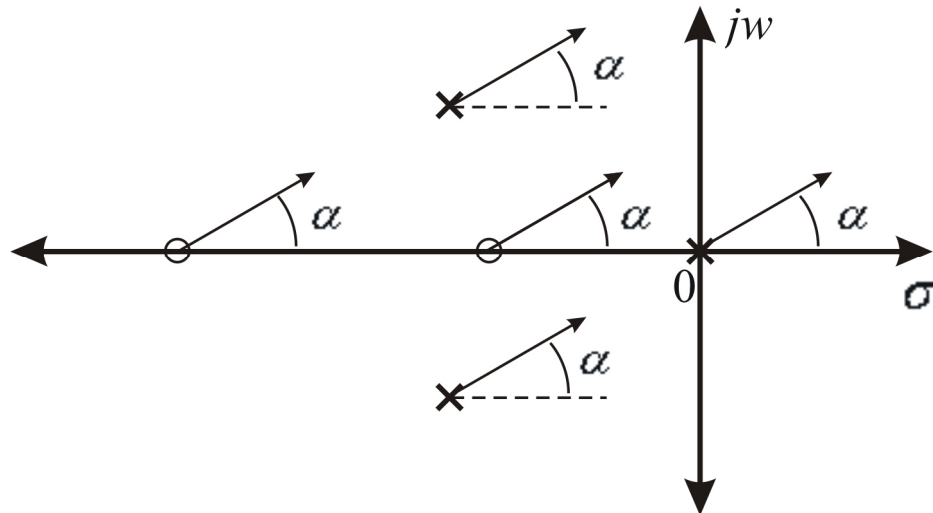


Figura 11

$$\sum \phi_z - \sum \phi_p = w\alpha - n\alpha = m180^\circ$$

$$\alpha(w - n) = m180^\circ$$

$$\text{o} \quad \alpha = \frac{m180^\circ}{w - n} \equiv \frac{m180^\circ}{n - w} \begin{cases} L.R.: m = \pm 1; \pm 3; \dots \\ L.R.I.: m = 0; \pm 2; \pm 4; \dots \end{cases}$$

Cabe puntualizar que el L.G.R. puede cruzar su propia asíntota.

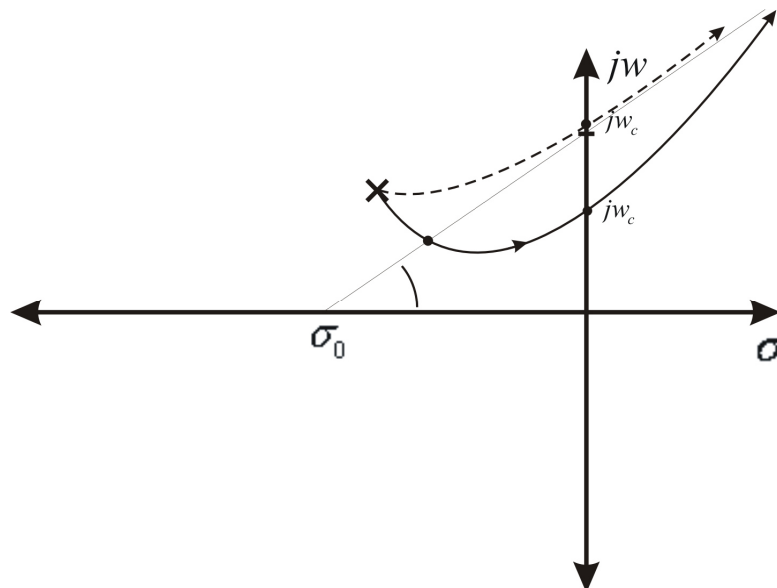


Figura 12

### Ejemplo 8:

$$\text{Si } n-w=1; L(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)}$$

$$N^{\circ} A = 2 - 1 = 1, \sigma_0 \rightarrow \text{No tiene aplicación, } \alpha = m180^{\circ} \begin{cases} L.R. = 180^{\circ} \\ L.R.I. = 0^{\circ} \end{cases}$$

Las asintotas se muestran Figura 13.-

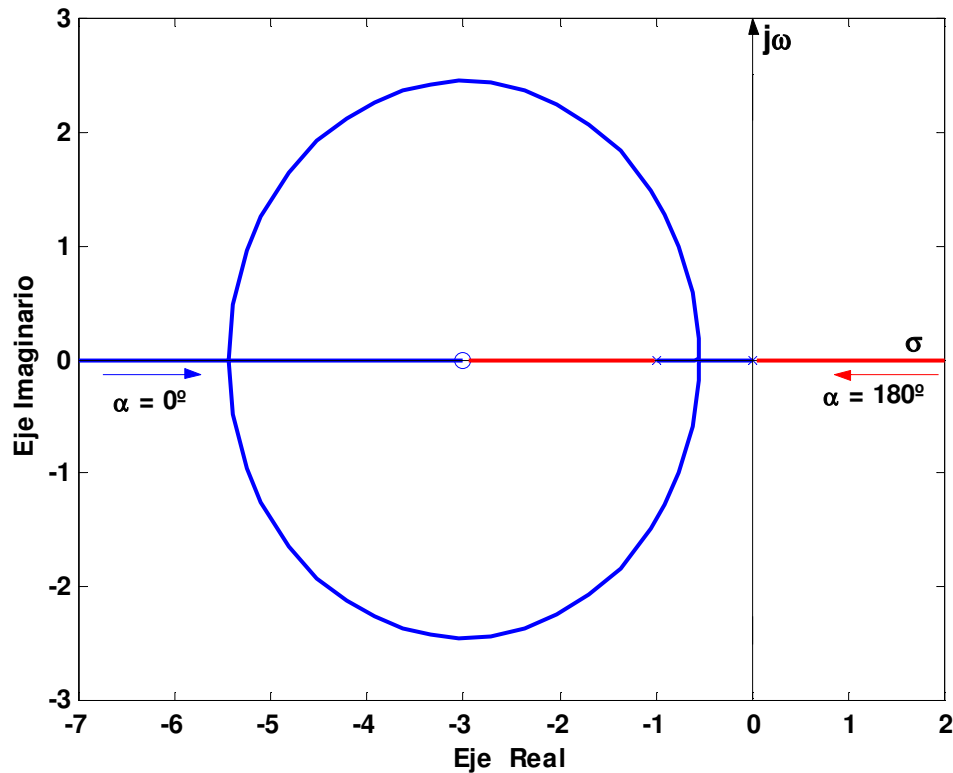


Figura 13

### Ejemplo 9:

$$\text{Si } n-w=2; L(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)^2}$$

$$N^{\circ} \text{ de Asintotas} = 3 - 1 = 2; \quad s_0 = \frac{-2 - (-3)}{2} = 0,5, \quad \alpha = m90^{\circ} \begin{cases} L.R. = \pm 90^{\circ} \\ L.R.I. = 0^{\circ}, 180^{\circ} \end{cases};$$

Las asintotas se muestran Figura 14

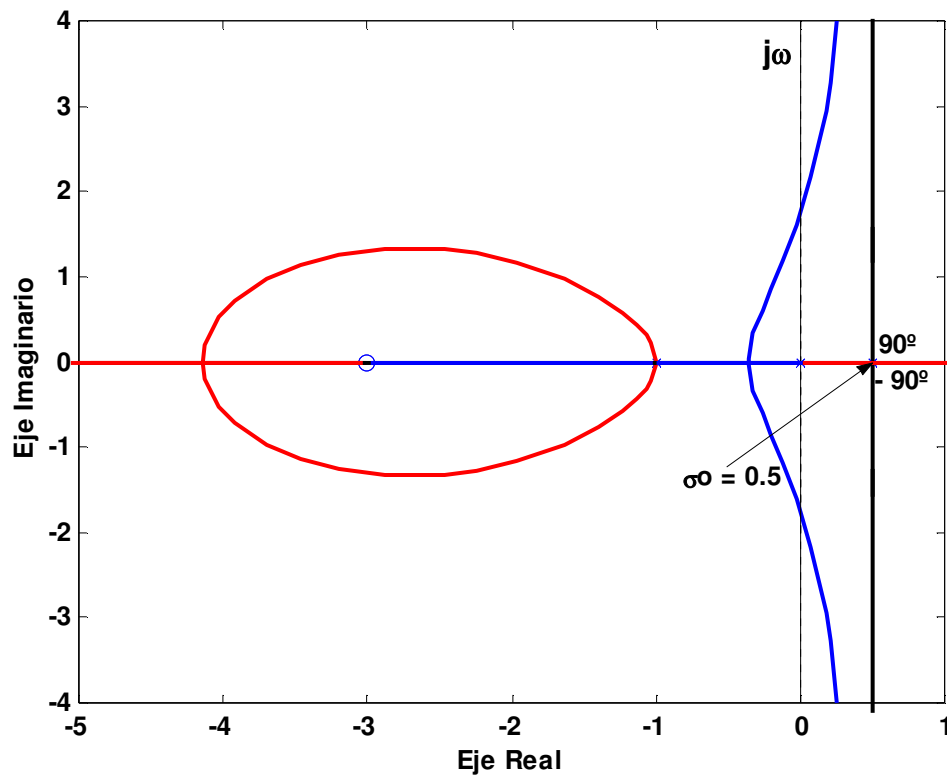


Figura 14

### Ejemplo 10:

Si  $n - \omega = 3$ ;  $L(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$

$$N^{\circ} \text{ de Asintotas} = 4 - 1 = 3; \quad \sigma_0 = \frac{-6 + 4}{3} = -2/3; \quad \alpha = m \times 60^{\circ} \quad \begin{cases} L.R. & \alpha = \pm 60^{\circ} \text{ y } 180^{\circ} \\ L.R.I. & \alpha = 0^{\circ} \text{ y } \pm 120^{\circ} \end{cases}$$

Las asintotas se muestran en la Figura 15.-

### Ejemplo 11:

Si,  $n - \omega = 4$ ;  $L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+5)}$

$$N^{\circ} \text{ de Asintotas} = 4 - 0 = 4; \quad \sigma_0 = \frac{-8 - 0}{4} = -2; \quad \alpha = m \times 45^{\circ} \quad \begin{cases} L.R. & \alpha = \pm 45^{\circ} \text{ y } \alpha = \pm 135^{\circ} \\ L.R.I. & \alpha = 0^{\circ}; \alpha = \pm 90^{\circ} \text{ y } \alpha = 180^{\circ} \end{cases}$$

Las asintotas se muestran en la Figura 16.-

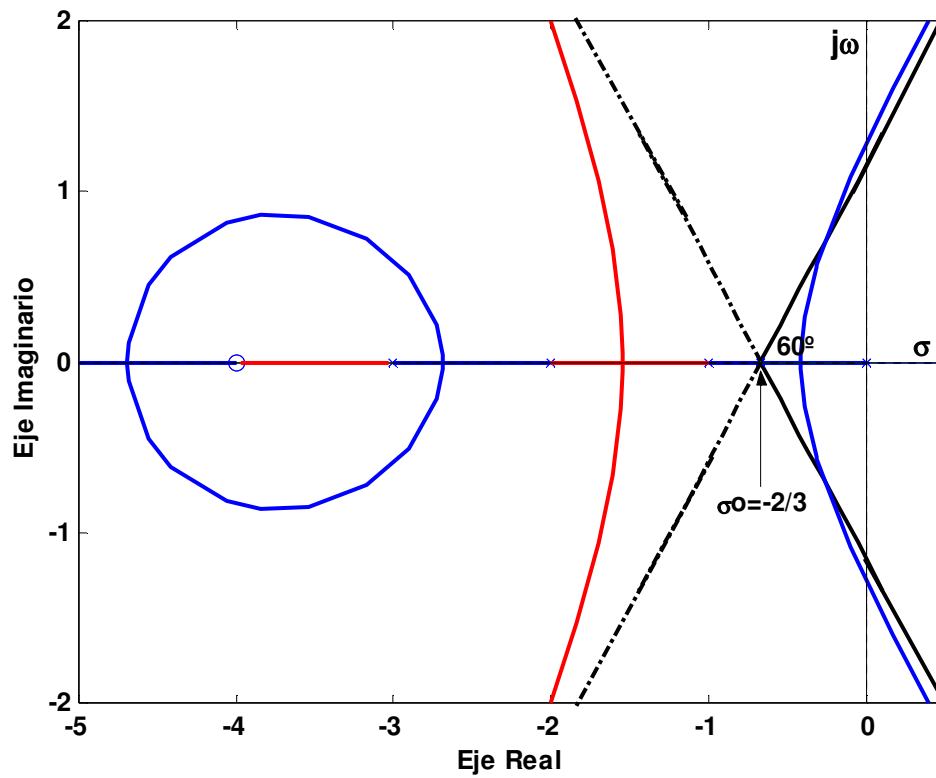


Figura 15

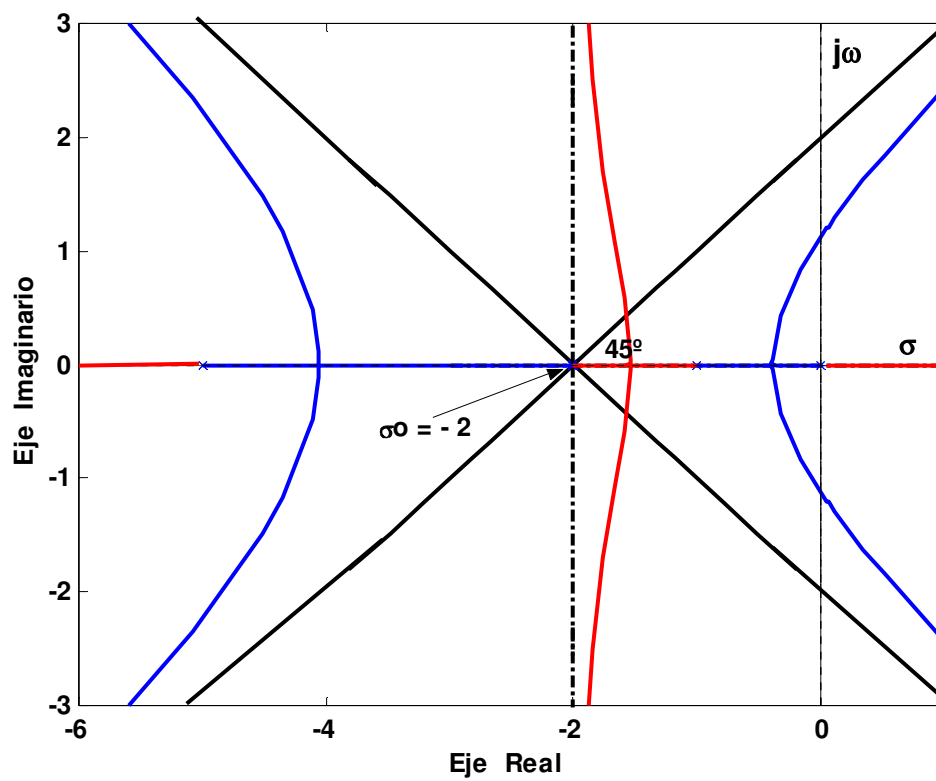


Figura 16

### Ejemplo 12:

Si:  $n - \omega = 5$ ;  $L(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 6s + 10)}$   $\alpha = m \times 36^\circ$   $\begin{cases} \text{L.R. } \pm 36^\circ ; \pm 108^\circ \text{ y } 180^\circ \\ \text{L.R.I. } 0^\circ ; \pm 72^\circ \text{ y } \pm 144^\circ \end{cases}$

Las asintotas se muestran en la Figura 17.-

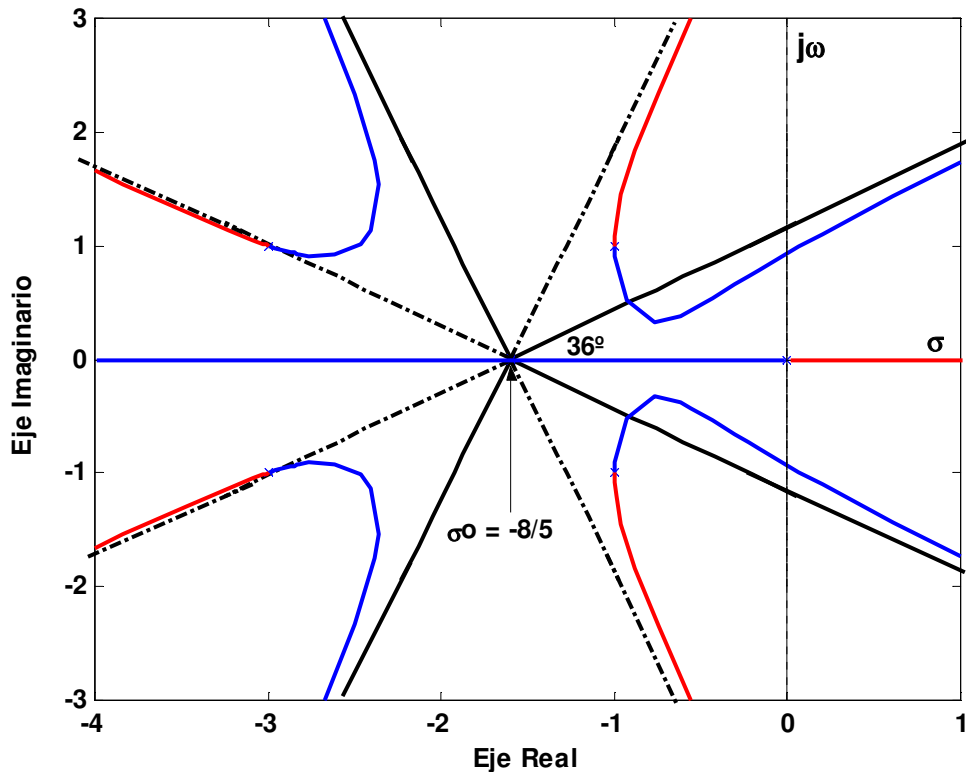


Figura 17

### Ejemplo 13:

Se aplicarán las reglas vistas hasta el momento en el siguiente ejemplo.

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+4)(s^2 + 2s + 2)}$$

1º)  $K = 0$ : Los puntos de  $K = 0$  sobre el L.G.R. están en los polos de  $L(s)$ :  $S = 0$ ;  $S = -4$ ;  $s = -1+j$  y  $S = -1-j$ .

2º)  $K = \pm \infty$ : Los puntos de  $K = \pm \infty$  sobre el L.G.R. están en los ceros de  $L(s)$ :  $s = -1$ ,  $s = \infty$ ,  $s = \infty$  y  $s = \infty$ .

3º) Puesto que la ecuación característica es de cuarto orden habrá cuatro ramas en el lugar. Para el L.R.D. las partes del eje real están entre:  $(-1 \text{ y } 0)$  y entre  $(-\infty \text{ y } -4)$ . Y las del L.R.I. entre:  $(-4 \text{ y } -1)$ .

4º) Para grandes valores de  $s$ , el L.R.D. será asintótico a tres líneas rectas con ángulos medidos desde el eje real.

Para L.R.D.  $m = \pm 1, 3 \Rightarrow \alpha = \frac{\pm 180^\circ}{3} = \pm 60^\circ$  y  $\alpha = 180^\circ$ .

Para el L.R.I.  $m = 0, \pm 2 \Rightarrow \alpha = \frac{\pm 2 \times 180^\circ}{3} = \pm 120^\circ$  y  $\alpha = 0^\circ$ .

5º) El centroide está en:  $\sigma_0 = \frac{\sum P_0 - \sum Z_0}{n - \omega} = -5/3 \Rightarrow \sigma_0 = -5/3.$  -

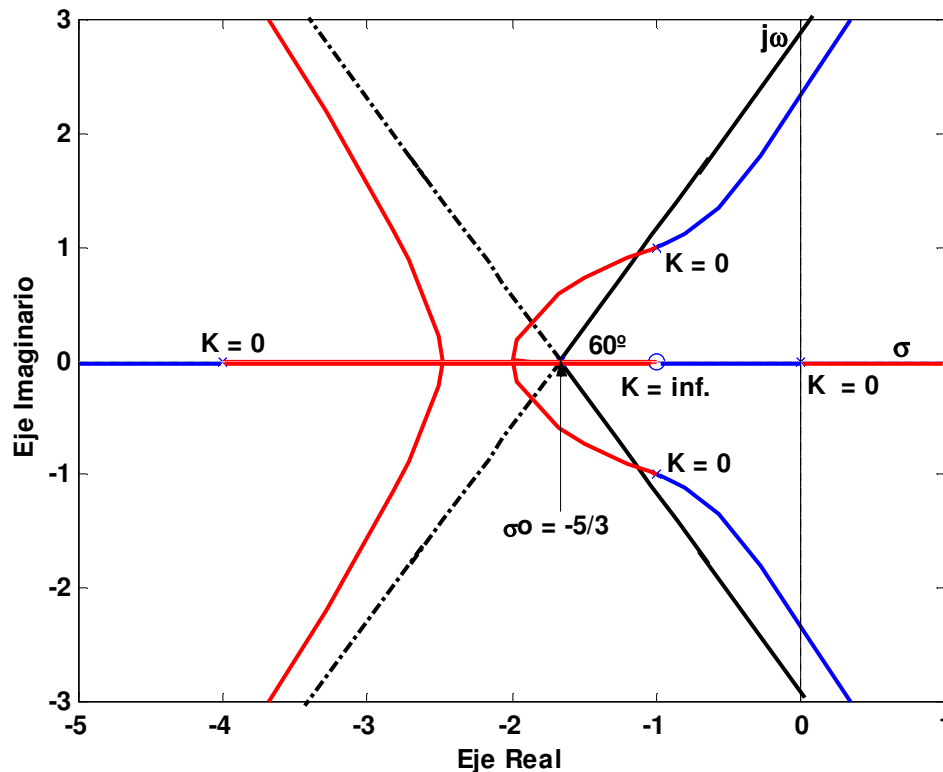


Figura 18

4º Paso: Regla 6:

Ángulos de Salida/Llegada (L.R.D./L.R.I.) de los Polos Complejos de L(s).-  
El L.G.R. cerca de los polos complejos del lazo se puede dibujar con mayor precisión si se conocen los ángulos de salida de los mismos, (para el L.R.D.) o de llegada a ellos, (para el L.R.I.). Los ángulos de salida/llegada, de *polos reales simples*, siempre serán 0º o 180º.-

Consideremos un polo del lazo complejo de orden de multiplicidad "r" y un punto  $s_1$  en una de las "r" ramas que parten del L.R.D. o llegan del L.R.I., de manera que se cumpla el requerimiento angular, figura 19.

Al hacer tender  $s_1$  al polo, la contribución angular del mismo a la  $\sum \phi_p$  será de  $(r\phi_r)$ , o sea:

$$\sum \phi_z - (\sum^* \phi_p + r\phi_r) = m180^\circ$$

$$\phi_r = \frac{-m180^\circ + \sum \phi_z - \sum^* \phi_p}{r}$$

Por lo tanto:

$$\phi_r \begin{cases} \phi_p(LR) \rightarrow m = \pm 1; \pm 3; \dots \\ \phi_{LL}(LRI) \rightarrow m = 0; \pm 2; \dots \end{cases}$$

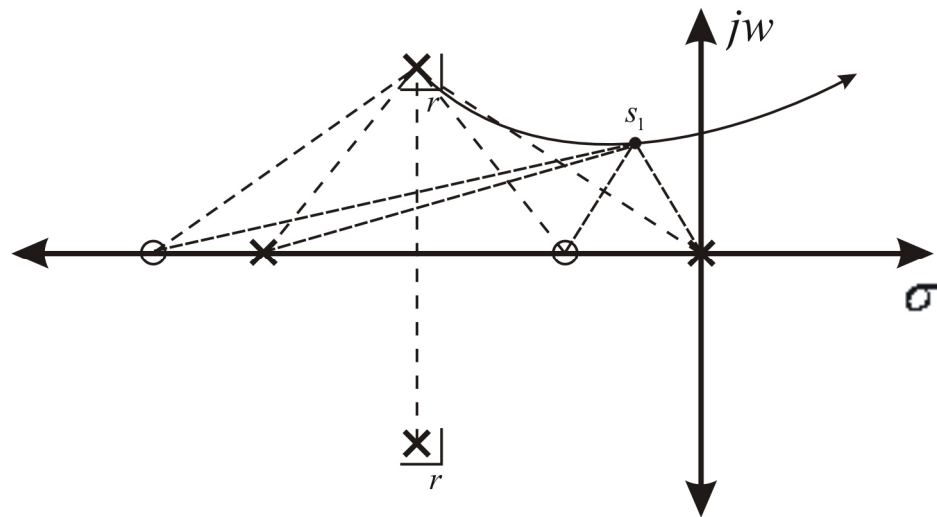


Figura 19.

Expresión que nos da los  $2r$  ángulos de salida/llegada.

Por ende el ángulo entre dos rectas tangentes a dos ramas adyacentes del L.R.D. y del L.R.I. será:

$$\frac{360^\circ}{2r} \rightarrow \left( \frac{180}{r} \right)^\circ$$

Si el polo es *simple* será ( $r=1$  y  $m=1$  para L.R. o  $m=0$  para L.R.I.)

$$\begin{aligned} \phi_P(L.R.) &= 180^\circ + \sum \phi_z - \sum^* \phi_p \\ \phi_{LL}(L.R.I.) &= \sum \phi_z - \sum^* \phi_p \end{aligned}$$

Ángulos de Llegada/Salida, (L.R.D./L.R.I.) de los Ceros Complejos de  $L(s)$ .

Se llega en forma similar:

$$\begin{aligned} \phi_r &= \frac{m180^\circ + \sum \phi_p - \sum^* \phi_z}{r} \\ \phi_r &\begin{cases} \phi_{LL}(LR) \rightarrow m = \pm 1; \pm 3; \dots \\ \phi_P(LRI) \rightarrow m = 0; \pm 2; \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $r=1$  ( $m=1$  para L.R.D. o  $m=0$  para L.R.I.)

$$\begin{aligned} \phi_{LL}(L.R.) &= 180^\circ + \sum \phi_p - \sum^* \phi_z \\ \phi_P(L.R.I.) &= \sum \phi_p - \sum^* \phi_z \end{aligned}$$

Cuando el polo o el cero es uno real, se tendrá:

Si  $z = N^\circ \text{ZRD}$  del polo o el cero y  $p = N^\circ \text{PRD}$  del polo o el cero

$$\therefore \sum \phi_z = \sum \phi_{ZRD} = \pm z 180^\circ \text{ y } \sum^* \phi_p = \pm p 180^\circ$$

$$(\text{Polos o ceros}) \rightarrow \phi_r = \frac{\pm m 180^\circ \pm z 180^\circ \mp p 180^\circ}{r} = (z + p + m) \frac{180^\circ}{r}$$

$$\phi_r = (z + p + m) \frac{180^\circ}{r} \rightarrow \phi_{P,LL} \begin{cases} (L.R.) \rightarrow m = \pm 1; \pm 3; \dots \\ (L.R.I.) \rightarrow m = 0; \pm 2; \dots \end{cases}$$



**Ejemplo 14:** Si la función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)^3} . \text{ Hallar los ángulos de partida y de llegada en el polo triple en } -1.$$

Aplicando lo visto se tendrá para los ángulos de partida:

$$\phi_p = (p + z + m) \frac{180^\circ}{3} = (1 + 0 + m) 60^\circ$$

$$\phi_p = (1 + m) 60^\circ \begin{cases} m = -1 \rightarrow = 0^\circ \\ m = 1 \rightarrow = 120^\circ \\ m = -3 \rightarrow = -120^\circ \end{cases}$$

Y para los ángulos de llegada:

$$\phi_{LL} = (1 + m) 60^\circ \begin{cases} m = 0 \rightarrow = 60^\circ \\ m = 2 \rightarrow = 180^\circ \\ m = -2 \rightarrow = -60^\circ \end{cases}$$

El lugar completo se muestra en la figura 20.

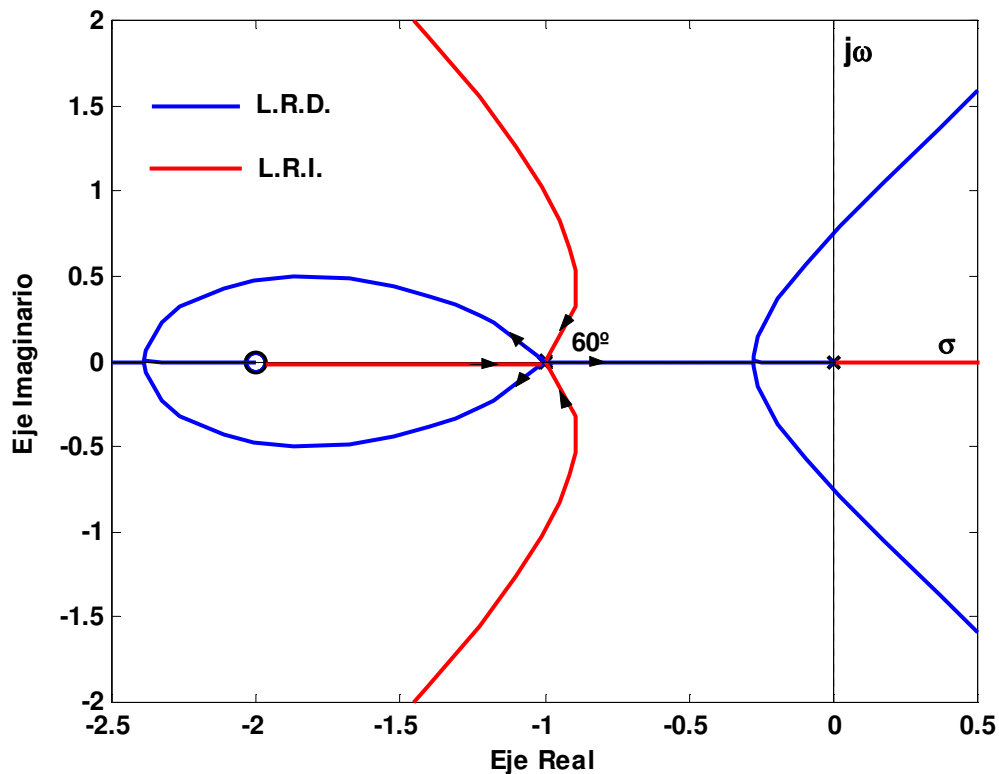


Figura 20

Además:  $\sigma_0 = -1/3$   $\alpha(LR) \begin{cases} \pm 60^\circ \\ 180^\circ \end{cases}$   $\alpha(LRI) \begin{cases} 0^\circ \\ \pm 120^\circ \end{cases}$

**Ejemplo 15:** Si la función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+4)}{s(s^2 + 4s + 8)} . \text{ Hallar los ángulos de partida y de llegada en los polos complejos conjugados. Aplicando las expresiones vistas, se tendrá:}$$

$$\phi_p = 180^\circ + \sum \phi_z - \sum^* \phi_p = 180^\circ + \overbrace{(45^\circ) - (135^\circ + 90^\circ)}^{180^\circ} = 0^\circ$$

$$\phi_{LL} = \sum \phi_z - \sum^* \phi_p = (45^\circ) - (135^\circ + 90^\circ) = -180^\circ$$

Además se tiene que:  $\sigma_0 = \frac{-4 - (-4)}{2} = 0 \quad \therefore MG \rightarrow \infty$

El lugar de las raíces se muestra en la figura 21.

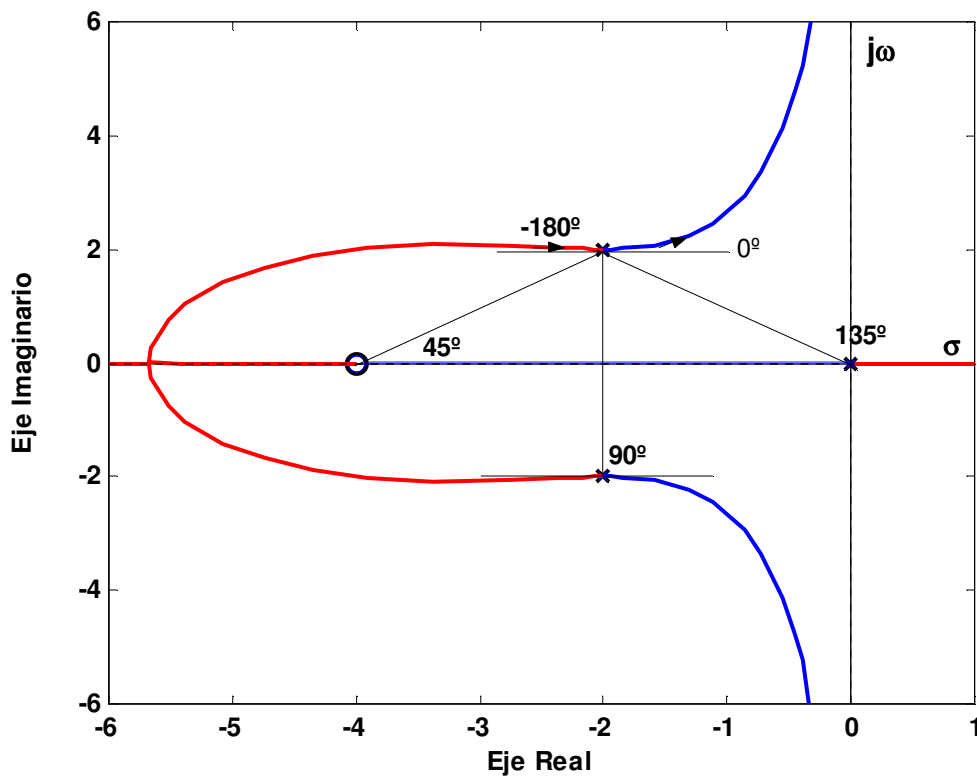


Figura 21

### Ejemplo 16:

Si la función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+3)(s^2 + 2s + 2)}$$

Hallar los ángulos de partida y de llegada en los polos complejos conjugados. Aplicando las expresiones vistas, se tendrá:

$$\phi_p = 180^\circ + (0^\circ) - (26,6^\circ + 90^\circ + 135^\circ)$$

$$\phi_p = -71,6^\circ$$

$$\phi_{LL} = -\sum^* \phi_p = -(26,6^\circ + 90^\circ + 135^\circ)$$

$$\phi_{LL} = -251,6^\circ \text{ o } \phi_{LL} = +108,4^\circ$$

Además,  $\sigma_0 = -5/4 = -1,25$

El lugar de las raíces se muestra en la figura 22.

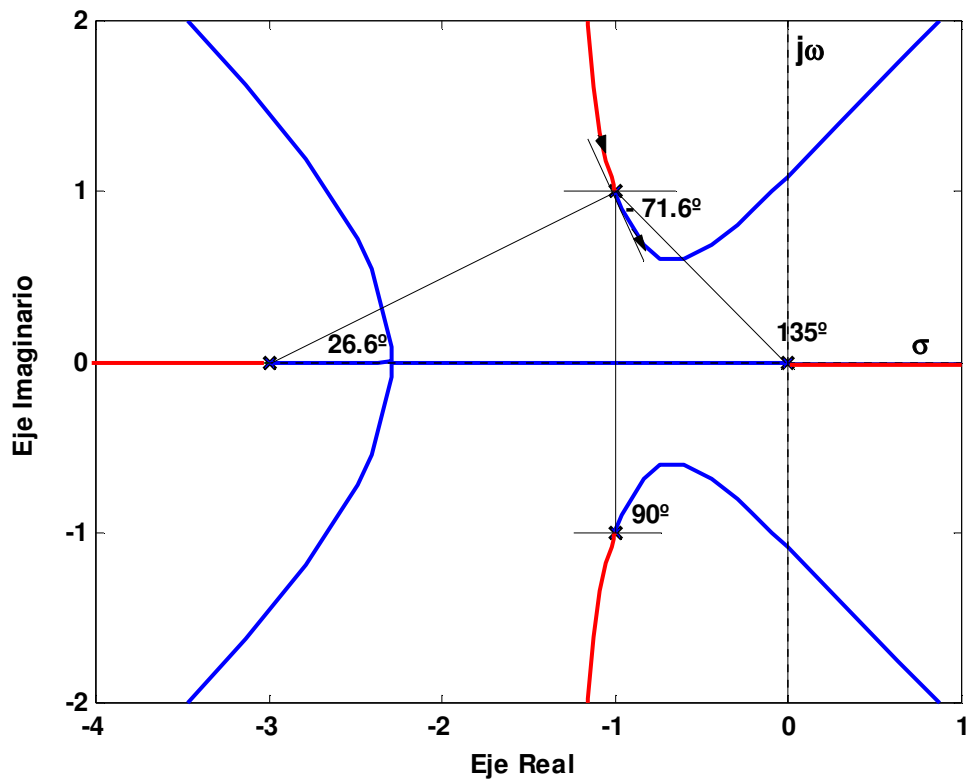


Figura 22.

### Ejemplo 17:

Si la función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s^2 + 4s + 8)}{s(s + 2)}.$$

Hallar los ángulos de partida y de llegada en los ceros complejos conjugados. Aplicando las expresiones vistas, se tendrá:

$$\phi_{LL} = 180^\circ + \sum \phi_P - \sum^* \phi_Z = 180^\circ + (90^\circ + 135^\circ) - (90^\circ)$$

$$\underline{\phi_{LL} = 315^\circ = -45^\circ}$$

$$\phi_P = \sum \phi_P - \sum^* \phi_Z = 135^\circ$$

$$\underline{\phi_P = 135^\circ}$$

El lugar de las raíces se muestra en la figura 23

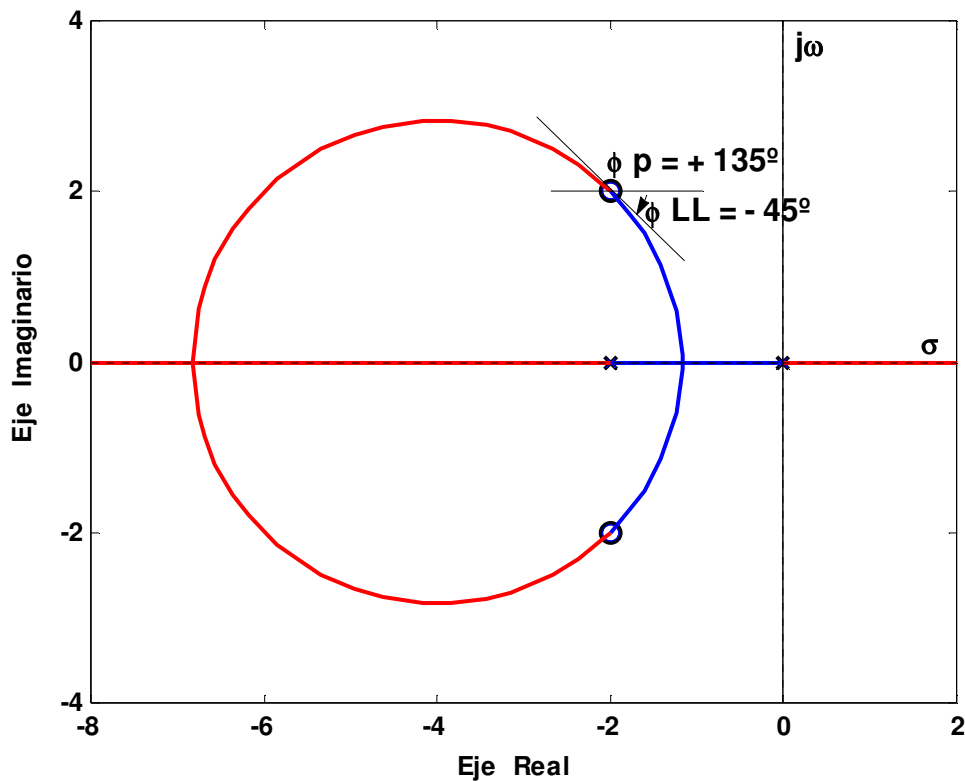


Figura 23.

### Ejemplo 18:

Si la función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s^2 + 4s + 8)}{s(s+2)^2}$$

Hallar los ángulos de partida y de llegada en los ceros complejos conjugados. Aplicando las expresiones vistas, se tendrá:

$$\phi_{LL} = 180^\circ + \sum \phi_p - \sum \phi_z = 180^\circ + (2 \times 90^\circ + 135^\circ) - (90^\circ)$$

$$\phi_{LL} = 405^\circ = 45^\circ$$

$$\phi_p = \sum \phi_p - \sum \phi_z = 225^\circ$$

$$\phi_p = -135^\circ$$

$$\phi_r = (z + p + m)90^\circ = (1 + m)90^\circ \begin{cases} LR \begin{cases} m = +1 \rightarrow \phi_r = 180^\circ \\ m = -1 \rightarrow \phi_r = 0^\circ \end{cases} \\ LRI \begin{cases} m = 0 \rightarrow \phi_r = 90^\circ \\ m = -2 \rightarrow \phi_r = -90^\circ \end{cases} \end{cases}$$

El lugar se muestra en la figura 24.-

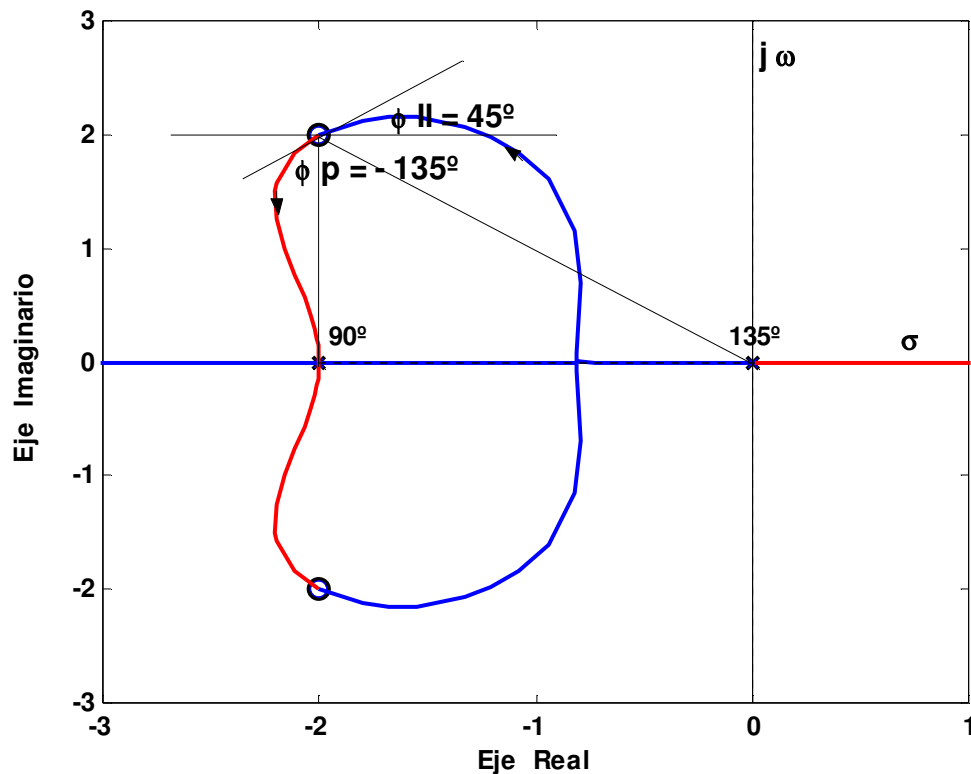


Figura 24.

### Ejemplo 19:

Si la función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{K(s+2)}{(s^2 + 2s + 2)^2} = \frac{K(s+2)}{s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 8s + 4}$$

Hallar los ángulos de partida (LRD) y de llegada (LRI) en los polos complejos conjugados  $(-1+j)$ , la inclinación e intersección de las asíntotas, el cruce con el eje imaginario. Aplicando las expresiones vistas, se tendrá:

$$\sigma_0 = -2/3 \quad \alpha = m60^\circ \begin{cases} L.R. \rightarrow \pm 60^\circ \text{ y } 180^\circ \\ L.R.I. \rightarrow 0^\circ \text{ y } \pm 120^\circ \end{cases}; \text{ figura 25}$$

Aplicando Routh:

$s^4$	1	8	$4+2K$	$\begin{cases} K > 24 \\ K > -2 \\ (K+21,8564)(K-5,8564) < 0 \\ \boxed{-2 < K < 5,8564} \end{cases}$
$s^3$	4	$8+K$	0	
$s^2$	$24-K$	$16+8K$	0	
$s^1$	$-K^2-16K+128$	0	0	
$s^0$	$24-K$	0	0	
$s^0$	$16+8K$	0	0	

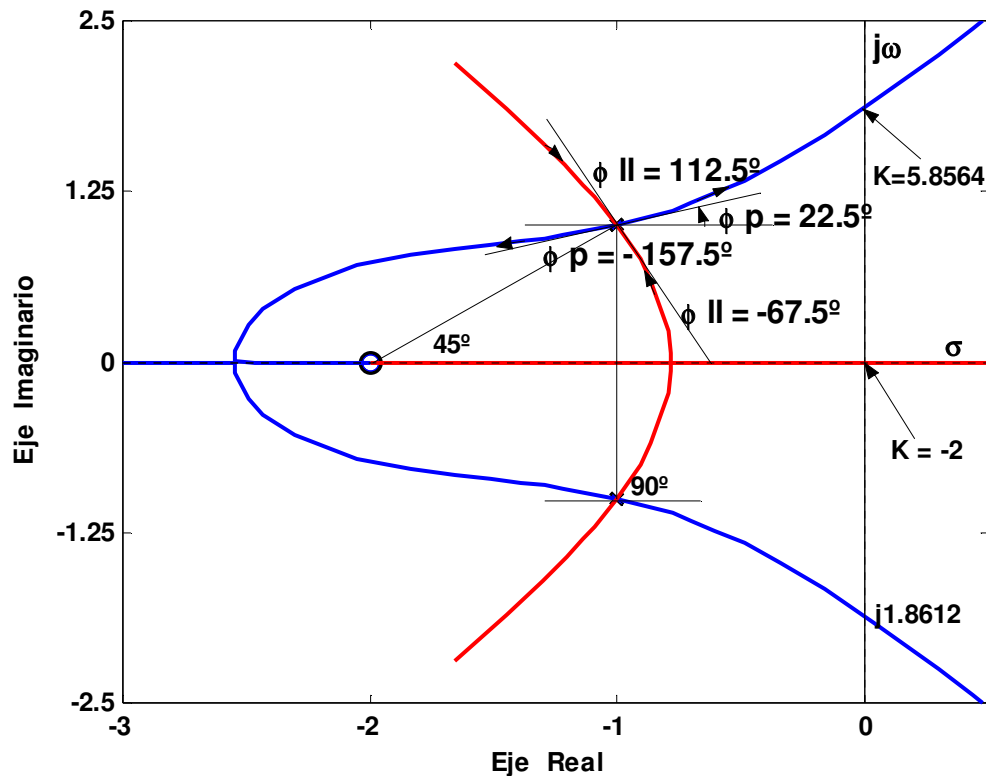


Figura 25.

Los ángulos de partida y de llegada en los polos complejos conjugados serán, aplicando las expresiones vistas:

$$\phi_r = \frac{m180^\circ + \sum \phi_z - \sum \phi_p}{q} = \frac{m180^\circ - 135^\circ}{2} = \underline{m90^\circ - 67,5^\circ}$$

$$L.R.D, r \equiv P; \phi_p = \begin{cases} m=1 \rightarrow \phi_p = \boxed{22,5^\circ} \\ m=-1 \rightarrow \phi_p = -157,5^\circ \end{cases}$$

$$L.R.I, r \equiv LL; \phi_{LL} = \begin{cases} m=0 \rightarrow \phi_{LL} = -67,5^\circ \\ m=2 \rightarrow \phi_{LL} = 112,5^\circ \end{cases}$$

Puntos de Ruptura, (la regla y significado se verán más adelante).-

$$N \frac{d}{ds} L_1(s) = 0 \Rightarrow 3s^4 + 16s^3 + 32s^2 + 32s + 12 = 0$$

Como  $s_{1-2} = -1 \pm j$  son puntos de ruptura para  $K = 0$ , dividiendo el polinomio anterior por  $(s^2 + 2s + 2)$  el resto será exacto y el cociente es:

$3s^2 + 10s + 6 = 0$ , cuyas raíces son: -2.5486 y -0.7848 que serán los puntos de ruptura reales, como se aprecia en la figura 25.-

## 5º Paso: Regla 7

### Intersección del L.G.R. con el eje Imaginario:

Los puntos donde el lugar de las raíces cruza al eje imaginario del plano  $s$ , (si existen), y los valores correspondientes de la ganancia  $K$  se pueden determinar de varias maneras a saber:

#### 1º) Interceptar el eje imaginario con la ecuación característica:

$$\begin{cases} F(s) = 0 \\ s = j\omega \end{cases} \Rightarrow F(j\omega) = PR(j\omega) + jPI(j\omega) = 0 \Rightarrow \begin{cases} PR(j\omega) = 0 \\ PI(j\omega) = 0 \end{cases}$$

Se tendrá un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, ( $\omega$  y  $K_L$ ).

#### 2º) Criterio de Routh-Hurwitz:

Como se sabe el elemento de la penúltima fila del arreglo de Routh, se debe igualar a cero para obtener la o las ganancias límites. Y de la ecuación auxiliar se determinan la o las frecuencias correspondientes,  $\omega_c$ . El último elemento de la primera columna, si esta en función de la ganancia  $K$ , dará la ganancia que provoca que el sistema tenga un polo en el origen, un integrador, para dicha ganancia. Sería una rama que se desplaza por el eje real.

#### 3º) Método de Nyquist:

Si se tiene que;

$$G(s)H(s) = K \frac{R_N + I_N}{R_D + I_D} \quad \text{Dónde: } \begin{cases} R_N \text{ y } R_D: \text{ Términos con potencias pares de } s. \\ I_N \text{ y } I_D: \text{ Términos con potencias impares de } s \end{cases}$$

Por lo tanto para que la parte imaginaria sea cero se deberá cumplir:

$$R_N I_D = R_D I_N$$

Reemplazando  $s$  por  $j\omega$ , se pueden obtener las  $\omega_c$  correspondientes.

Y como:

$$G(s)H(s) \Big|_{s=j\omega_c} = K_L \frac{R_N}{R_D} \Big|_{s=j\omega_c} \equiv K_L \frac{I_N}{I_D} \Big|_{s=j\omega_c} = -1$$

En consecuencia las ganancias límites se obtiene a partir de:

$$K_L = -\frac{R_D}{R_N} \Big|_{s=j\omega_c} \quad \text{o} \quad K_L = -\frac{I_D}{I_N} \Big|_{s=j\omega_c}$$

### Ejemplo 20:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$G(s)H(s) = L(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)^3}$$

Hallar los puntos de cruce con el eje imaginario.

#### 1º) La ecuación característica es:

$$s(s+1)^3 + K(s+2) = 0$$

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + (1+K)s + 2K = 0$$

Reemplazando  $s$  por  $j\omega$ , nos queda:

$$(\omega_c^4 - 3\omega_c^2 + 2K_L) + j\omega_c(1 + K_L - 3\omega_c^2) = 0$$

Por ende:

$$\begin{cases} \omega_c^4 - 3\omega_c^2 + 2K_L = 0 \\ \omega_c(1 + K_L - 3\omega_c^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow 3\omega_c^2 = 1 + K_L \Rightarrow K_L = 3\omega_c^2 - 1$$

$$\omega_c^4 - 3\omega_c^2 + 6\omega_c^2 - 2 = 0 \Rightarrow \omega_c^4 + 3\omega_c^2 - 2 = 0$$

Si se hace:  $\omega_c^2 = x \Rightarrow \omega_c = \sqrt{x}$  quedará:

$$x^2 + 3x - 2 = 0$$

Cuyas raíces son:

-3.56 y 0.5615, por lo tanto  $\omega_c^2 = 0.5615$ ,  $\Rightarrow \omega_c \cong 0.7494 \text{ rad / seg.}$  -

En consecuencia la ganancia límite será:

$$K_L = 3 \times \omega_c^2 - 1 = 3 \times 0.5615 - 1 = 0.6845 \Rightarrow K_L \cong 0.6845$$

2º) Por Routh-Hurwitz

La tabla de Routh es:

$[s^4$	1	3	2K	0]
$[s^3$	3	1+K	0	0]
$[s^2$	$8/3 - 1/3K$	2K	0	0]
$[s$	$(11K - 8 + K^2)/(K - 8)$	0	0	0]
$[1$	2K	0	0	0]

Como se aprecia para que el sistema sea estable  $K > 0$ .-

El numerador del elemento de la fila  $s^1$ , es:

$$K^2 + 11K - 8 = 0 \Rightarrow (K + 11.6845)(K - 0.6845) = 0 \Rightarrow K_L = 0.6845 \text{.-}$$

La ecuación auxiliar es:

$$(8 - K_L)s^2 + 6K_L = 0$$

Reemplazando  $K_L$ :

$$7.3153s^2 + 4.1079 = 0 \Rightarrow s_{1-2} = \pm j0.7494$$

En consecuencia:  $\omega_c = 0.7494 \text{ rad / seg.}$  -

3º) Método de Nyquist:

$$L(s) = K \frac{s+2}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s} = K \frac{[2] + [s]}{[s^4 + 3s^2] + [3s^3 + s]}$$

$$2(3s^3 + s) = (s^4 + 3s^2)s \Rightarrow s^4 - 3s^2 - 2 = 0$$

Reemplazando  $s$  por  $j\omega$ , quedará:

$$\omega_c^4 + 3\omega_c^2 - 2 = 0, \text{ como se ve se llega a lo mismo y la } K_L \text{ será:}$$



$$K_L = -\frac{s(3s^2 + 1)}{s} \Big|_{s=j\omega_c} = 3\omega_c^2 - 1 = 3(0.7494)^2 - 1 = 0.6845.-$$

Si se emplea:

$$K_L = -\frac{I_D}{I_N} \Big|_{s=j\omega_c} = -\frac{3s^3 + s}{s} \Big|_{s=j\omega_c} = -\frac{(3\omega_c^2 + 1)}{1} = 3\omega_c^2 - 1$$

Como se aprecia se llega a lo mismo.-

### Ejemplo 21:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{(s-5)(s+2)^2} = K \frac{(s+1)}{(s^3 - s^2 - 16s - 20)}$$

$$R_N = 1 \quad R_D = -(s^2 + 20) \quad I_N = s \quad e \quad I_D = s^3 - 16s$$

$$(s^3 - 16s) = -s^3 - 20s, \text{ operando:}$$

$$s^2 = -2 \Rightarrow -\omega_c^2 = -2 \Rightarrow \omega_c = \sqrt{2} \text{ rad / seg.}-$$

$$K = -\frac{R_D}{R_N} \Big|_{s=j\omega_c} = \frac{(-\omega_c^2 + 20)}{1} \Rightarrow K = 20 - 2 = 18 \Rightarrow K = 18.-$$

En este caso para  $K = 18$ , el sistema es Inestable pues hay un polo en  $+1$ .  
El lugar se muestra en la figura 26.

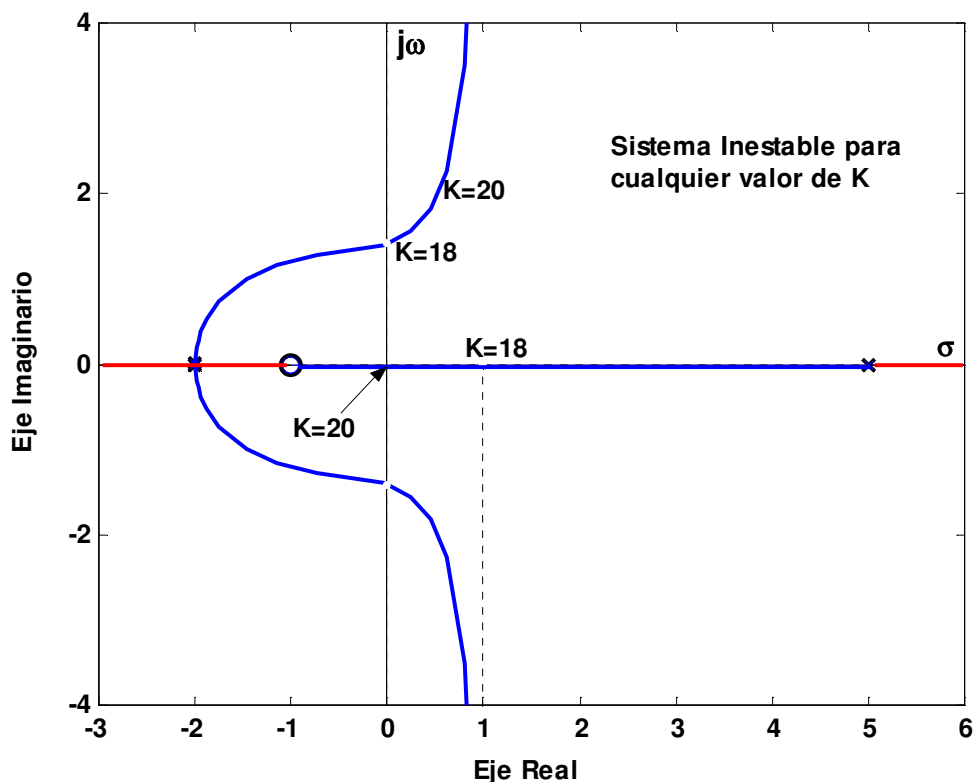


Figura 26

### Ejemplo 22:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{(-0.2 Kc)}{(s+1)(s+2)(s+3)} ; \quad K = -0.2 Kc$$

$$L(s) = -0.2 Kc \frac{1+j0}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \Rightarrow R_N = 1; I_N = 0; R_D = 6 + 6s^2; I_D = 11s + s^3$$

$$R_N I_D = R_D I_N \Rightarrow 1 \times (11s + s^3) = (6 + 6s^2) \times 0 = 0$$

Por ende:

$s(s^2 + 11) = 0 \Rightarrow s^2 + 11 = 0$ ; Reemplazando  $s$  por  $j\omega_c$ , nos queda:

$$-\omega_c^2 + 11 = 0 \Rightarrow \omega_c^2 = 11 \Rightarrow \omega_c = \sqrt{11} \text{ rad / seg.}$$

$$L(s) = -0.2 Kc \frac{1}{6 + 6s^2} \Rightarrow \text{Reemplazando } s \text{ por } j\omega_c:$$

$$L(j\omega_c) = \frac{-0.2 Kc_L}{6 - 6\omega_c^2} = \frac{-0.2 Kc_L}{-60} = \frac{Kc_L}{300} = -1$$

En consecuencia  $Kc_L = -300$ , esto se muestra en la figura 27.

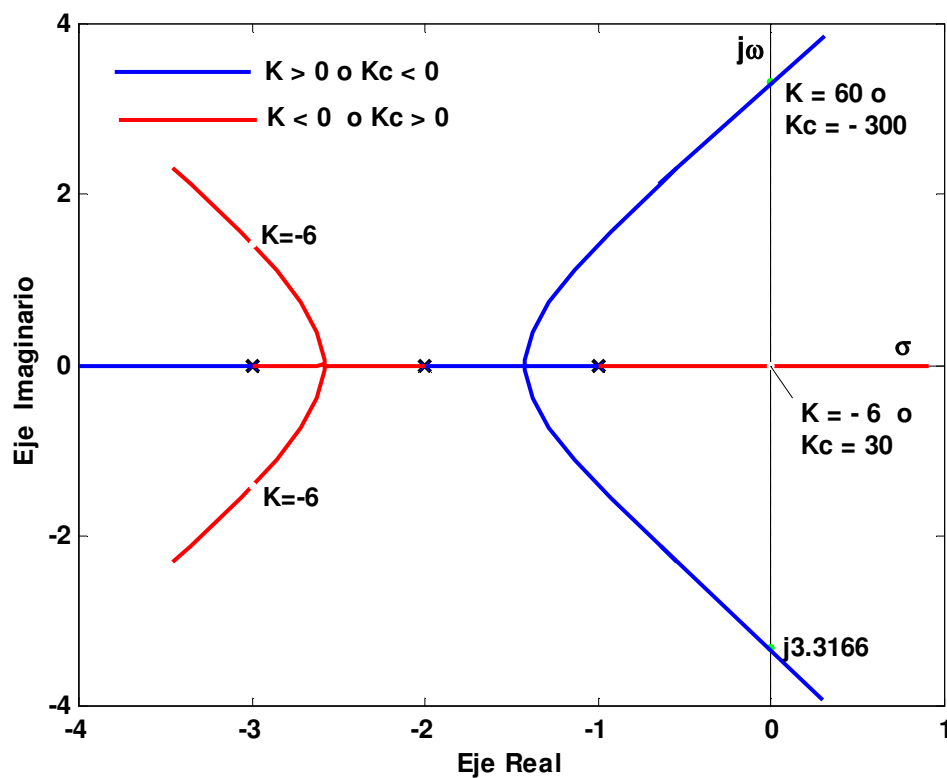


Figura 27

### 6º Paso: Regla 8.

#### Puntos de Ruptura sobre el L.G.R.

“Los puntos de ruptura sobre el L.G.R. de una ecuación característica corresponden a raíces de orden de multiplicidad mayor a uno de las mismas”

Por ende, serán los puntos donde se “tocan” 2 o más ramas del lugar. En la figura 28a se ve un caso en que dos ramas del L.R. se juntan en un punto de ruptura sobre el eje real y después parten desde el eje en direcciones opuestas. En éste caso, el punto de ruptura representa una raíz doble de la ecuación característica, cuando se asigna el valor  $K$  correspondiente al punto.

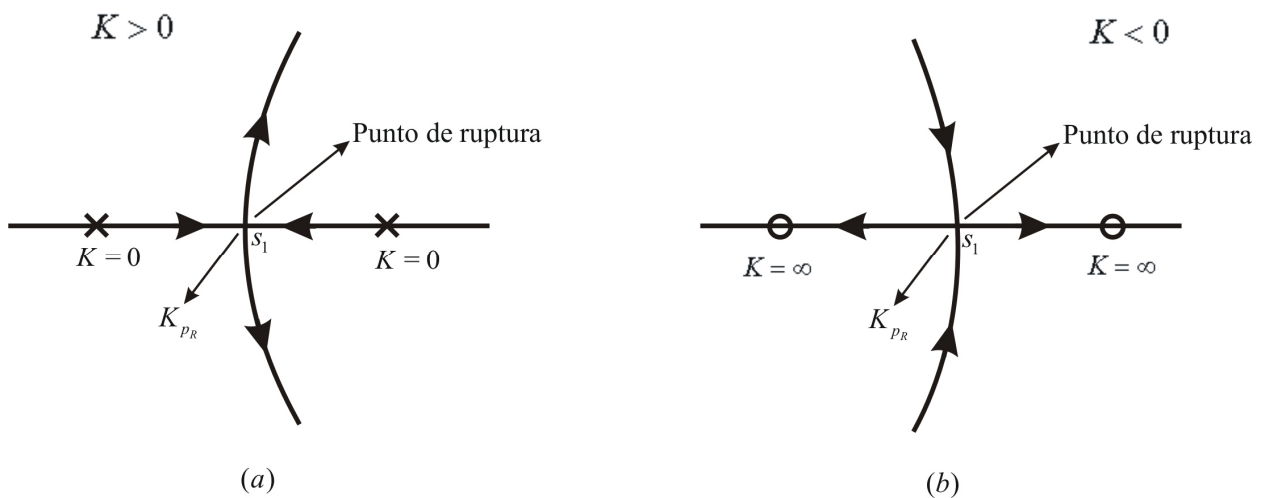


Figura 28

La figura 28b, muestra otra situación, como cuando dos ramas complejas conjugadas se aproximan al eje real, se encuentran en un punto de ruptura y después parten en direcciones opuestas sobre el mismo.

En general, un punto de ruptura puede involucrar más de dos ramas, e incluso ser pares de complejos conjugados.

Además, un L.G.R. puede tener varios puntos de ruptura.

*Los puntos de ruptura sobre el L.G.R. deben satisfacer:*

$$\boxed{\frac{\partial L_1(s)}{\partial s} = 0} \quad (1) \quad \text{ó} \quad \boxed{\frac{\partial K(s)}{\partial s} = 0} \quad (2)$$

Se puede demostrar que (1) es igual a (2):

$$\text{Como } 1 + K.L_1(s) = 0 \rightarrow \boxed{K = \frac{-1}{L_1(s)}}$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = \frac{\left[0 - \frac{\partial L_1(s)}{\partial s}\right]}{[L_1(s)]^2} = \frac{\frac{\partial L_1(s)}{\partial s}}{[L_1(s)]^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial L_1(s)}{\partial s} = 0}$$

$$\therefore \boxed{\text{numerador} \left[ \frac{\partial K(s)}{\partial s} \right] = \text{numerador} \left[ \frac{\partial L_1(s)}{\partial s} \right] = 0} \quad (3)$$

Es importante apuntar que esta condición es necesaria pero no suficiente. En otras palabras, todos los puntos de ruptura del L.R. deben satisfacerla pero no todas las soluciones complejas son puntos de ruptura.

Para que sea un punto de ruptura, las soluciones de la ecuación (3) deberán satisfacer la ecuación característica para un  $K$  real o lo que es lo mismo, cumplir con el requerimiento angular.

Ecuación característica:  $1 + L(s) = 0 \rightarrow L(s) = -1$

$$\text{Si } L(s) = K \frac{N(s)}{D(s)} \rightarrow K \frac{N(s)}{D(s)} = -1 \Rightarrow \boxed{K = -\frac{D(s)}{N(s)}}$$

$$\text{Num} \left[ \frac{\partial K(s)}{\partial s} \right] = \frac{-[N'(s)D(s) - D'(s)N(s)]}{[N(s)]^2} = 0 \Rightarrow \boxed{N(s)D'(s) - N'(s)D(s) = 0}$$

Si  $L(s)$  no tiene ceros finitos:  $N(s) = 1 \rightarrow N'(s) = 0$  por ende quedará:

$$\boxed{D'(s) = 0}$$

Los puntos de ruptura se pueden calcular fácilmente para una configuración de polos y ceros de  $L(s)$  que de cómo resultado un polinomio de segundo orden para:  $\text{Num} \left[ \frac{\partial K(s)}{\partial s} \right]$

Ejemplo 23:

$$\text{Si, } L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

Derivando el denominador, pues no hay ceros finitos:

$$\therefore D'(s) = 3s^2 + 6s + 2 = 0 \begin{cases} s_1 = -0,4226 \text{ (L.R.)} \rightarrow K > 0 \\ s_2 = -1,5774 \text{ (L.R.I.)} \rightarrow K < 0 \end{cases}$$

Los valores de  $K$  sobre los mismos se podrán calcular con el requerimiento de magnitud o sustituyendo  $s_1$  o  $s_2$  en  $K = f(s)$ .

Como la ecuación característica es:  $\rightarrow (s^3 + 3s^2 + 2s) + K = 0$

Despejando  $K$  y remplazando  $s$  por sus valores:

$$K = -(s^3 + 3s^2 + 2s)$$

El resultado es:  $K(LR) \cong 0,385$  y  $K(LRI) \cong -0,385$

La figura 29 muestra gráficamente el tema:

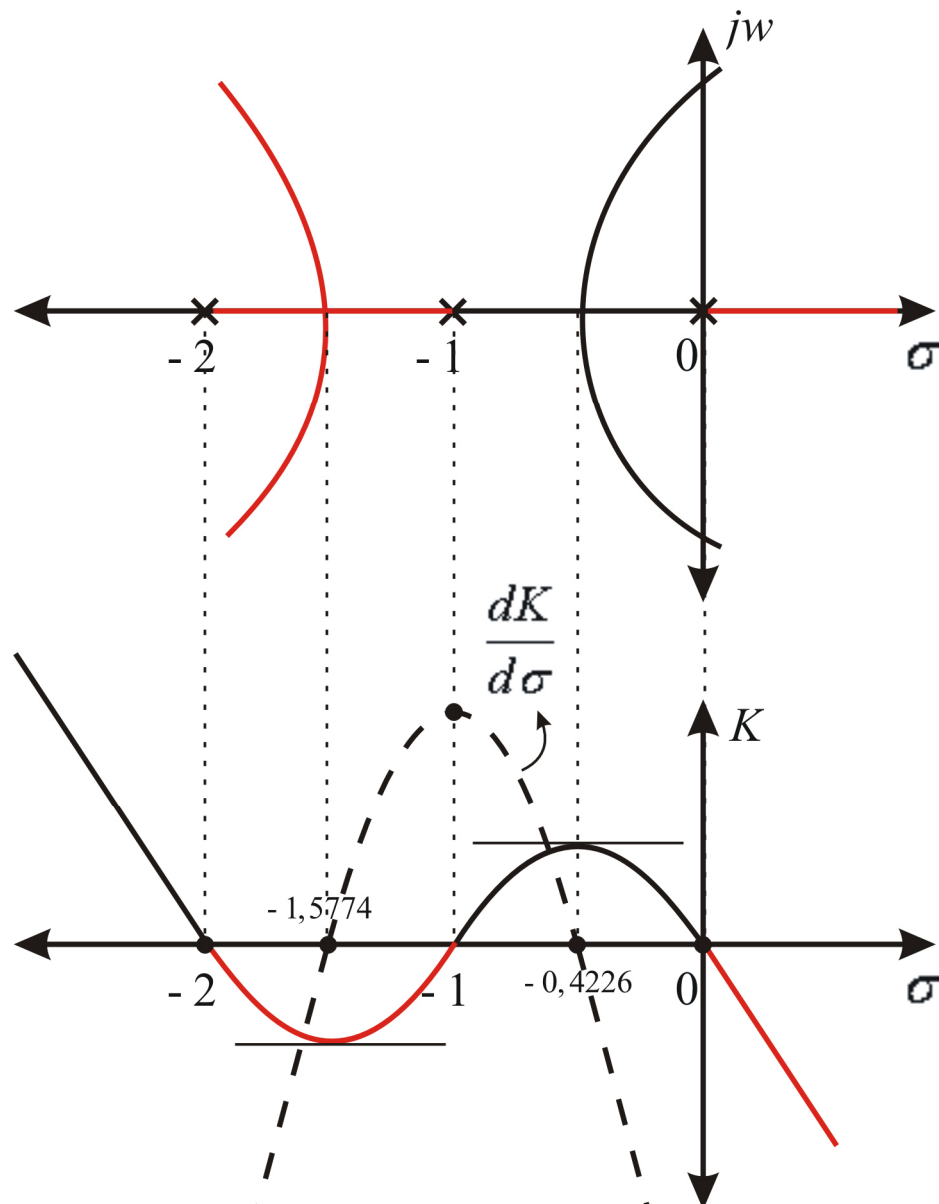


Figura 29

En general, las siguientes conclusiones se pueden hacer al obtener las

soluciones de la ecuación:  $\text{Numerador}\left[\frac{\partial L_1(s)}{\partial s}\right] = 0 \quad (*)$

1º) Todas las soluciones REALES son puntos de ruptura (esto es evidente por la regla 3).-

2º) Las soluciones complejas conjugadas serán puntos de ruptura solo si satisfacen la ecuación característica, para un  $K$  real.

3º) El orden de multiplicidad de las soluciones de (\*), que sean puntos de ruptura, determina lo que se denomina el *Orden del Punto de Ruptura*, [y].

Este orden determina el *número de ramas* que se juntan en el punto de ruptura, o sea el orden de multiplicidad de la raíz de la ecuación característica o del polo del sistema, que llamaremos  $[q]$ .-

Se cumple que:

$$q = y + 1, \text{ o } y = q - 1.-$$

El orden del punto de ruptura,  $y$ , también coincide con el mayor orden de derivación nulo de  $K(s)$  o  $L_1(s)$  en el punto. O sea:

*Si las primeras "y" derivadas,  $\frac{d^j K}{ds^j}$  para  $j(1,2,3,\dots,y)$  son nulas en el punto, el orden del mismo es "y".*

Por ejemplo si  $\frac{dK}{ds} \neq 0$ , no es un punto de ruptura, o  $y = 0$ , ( $q = 1$ ), o sea por el punto pasa una sola rama del lugar.

Si  $\frac{dK}{ds} = 0$  y  $\frac{d^2 K}{ds^2} \neq 0$ , hay un máximo o un mínimo en la función  $K = f(s)$ , por lo tanto:  $y = 1$  y por ende;  $q = 2$ , llegan y salen dos ramas del lugar.

Si  $\frac{dK}{ds} = 0$ ;  $\frac{d^2 K}{ds^2} = 0$  y  $\frac{d^3 K}{ds^3} \neq 0$ , hay un punto de inflexión en la función  $K=f(s)$ . por lo tanto:  $y = 2$  y por ende;  $q = 3$ , llegan y salen tres ramas del lugar.

4º) Cuando ya se tienen individualizados todos los puntos de ruptura y sus ordenes, solo falta determinar los ángulos que forman en el punto las rectas tangentes a las ramas del lugar.

El ángulo entre dos rectas tangentes en el punto a dos ramas mas próximas que llegan o salen está dado por:

$$\beta = \frac{360^\circ}{q}$$

El ángulo entre dos rectas tangentes en el punto a dos ramas adyacentes una que llega y la otra que sale está dado por:

$$\gamma = \frac{\beta}{2} = \frac{180^\circ}{q}$$

Nos referiremos primero a los puntos de ruptura sobre el eje real, (que son los más comunes).

A) En los polos y/o ceros múltiples del lazo: ( $K=0$  y/o  $K=\infty$ ).

En un polo de orden de multiplicidad  $r$ ,  $y=r-1$ , pues  $q=y+1=r$ , ( $K=0$ ).

En un cero de orden de multiplicidad  $r$ ,  $y=r-1$ , pues  $q=y+1=r$ , ( $K=\infty$ ).

Ejemplo 24:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)^3};$$

Los puntos de ruptura serán:

$$N \frac{d}{ds}(L_1(s)) = 0 \Rightarrow d(s) = 3s^4 + 14s^3 + 21s^2 + 12s + 2 = 0$$

Por lo dicho dos raíces del polinomio  $d(s)$  deberán ser:  $s_{1-2} = -1$ , para  $K=0$ , las otras dos serán las raíces del polinomio cociente:

$$\frac{d(s)}{(s+1)^2} = 3s^2 + 8s + 2 = 0 \Rightarrow s_3 = -0.2792 \text{ y } s_4 = -2.387,$$

que serán los otros puntos de ruptura del lugar de las raíces directo, para  $K=0.06076$  y  $K=16.46$  respectivamente.

El lugar es el mostrado en la figura 20.

### B) Entre dos Polos o dos Ceros en el Eje Real

En el último caso un cero puede ser impropio.

B<sub>1</sub>) Si hay un solo punto de ruptura:

El orden deberá ser impar, generalmente de orden uno. ( $\gamma=1$ ;  $q=2$ ).-

En el ejemplo 24, entre  $(-1 \text{ y } 0)$  y entre  $(-\infty \text{ y } -3)$ , en los dos casos:

$$\beta = 180^\circ \text{ y } \gamma = 90^\circ .-$$

### Ejemplo 25:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)(s^2+6s+10)} = K \frac{1}{s^4 + 12s^3 + 54s^2 + 108s + 80}$$

Los puntos de ruptura serán:

$$L(s) = KL_1(s) = K \frac{1}{D(s)} = -1 \Rightarrow K = -D(s)$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{d(-D(s))}{ds} = 0 \Rightarrow s^3 + 9s^2 + 27s + 27 = (s+3)^3,$$

por lo tanto:  $s_{1-2-3} = -3$ .

En consecuencia  $\gamma=3$ , (impar),  $q=4$  para  $K=1$ .-  $\beta = 90^\circ$  y  $\gamma = 45^\circ$ .-

El lugar es el mostrado en la figura 30.

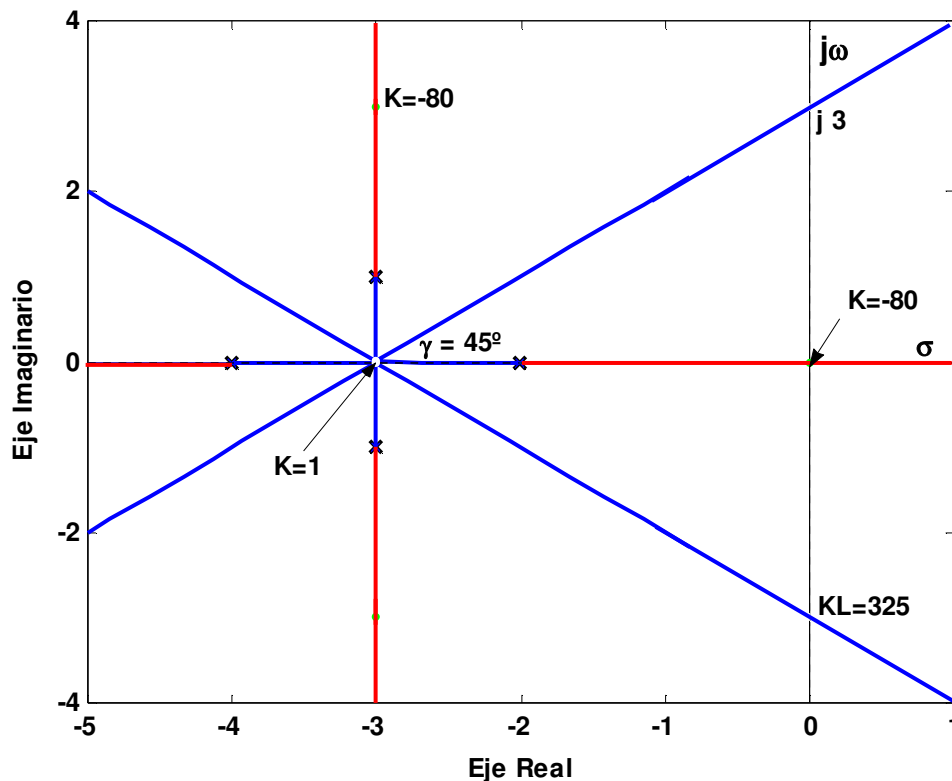


Figura 30

B<sub>2</sub>) Cuando hay más de un Punto de Ruptura entre los dos Polos o ceros:  
 En estos casos la suma de los órdenes de cada uno deberá ser un número impar:  $\sum y = N^{\circ} \text{ impar}$

#### Ejemplo 26:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{2Kc(s+3)}{(s-0.5)(s+p)(s^2+4s+5)}$$

Para tres posiciones del polo del lazo  $p=-2.5$ ;  $p=-2.689913$  y  $p=-2.80$

Si  $p=2.50$ :

Hay un solo punto de Ruptura entre los dos polos en  $s_1=-0.5593$ ,  $y=1$ ,  $q=2$

Hay un solo punto de Ruptura entre los dos ceros en  $s_2=-3.443$ ,  $y=1$ ,  $q=2$

En los dos casos  $\beta = 180^\circ$  y  $\gamma = 90^\circ$ .-

Si  $p=2.689913$ .. :

Hay dos puntos de Ruptura entre los dos polos en:

$s_1=-0.516$ ,  $y=1$ ,  $q=2$ ,  $\beta = 180^\circ$  y  $\gamma = 90^\circ$ .-

$s_2=-2.118$ ,  $y=2$ ,  $q=3$ ,  $\beta = 120^\circ$  y  $\gamma = 60^\circ$ .-  $\sum y = 3$  (impar).-

Hay un solo punto de Ruptura entre los dos ceros en  $s_3=-3.374$ ,  $y=1$ ,  $q=2$

Si  $p=2.80$ :

Hay tres puntos de Ruptura entre los dos polos en:

$s_1=-0.535$ ,  $s_2=-1.888$  y  $s_3=-2.462$ , para todos,  $y=1$ ,  $q=2$ ,  $\beta = 180^\circ$  y  $\gamma = 90^\circ$



Como se ve  $\sum y = 3$  (impar).-

Además un solo punto de Ruptura entre los dos ceros en:  $s_4 = -3.316$ ,  $y=1$ ,  $q=2$ ,  $\beta = 180^\circ$  y  $\gamma = 90^\circ$ .-

En la figura 31 se muestran los tres lugares directos solamente:

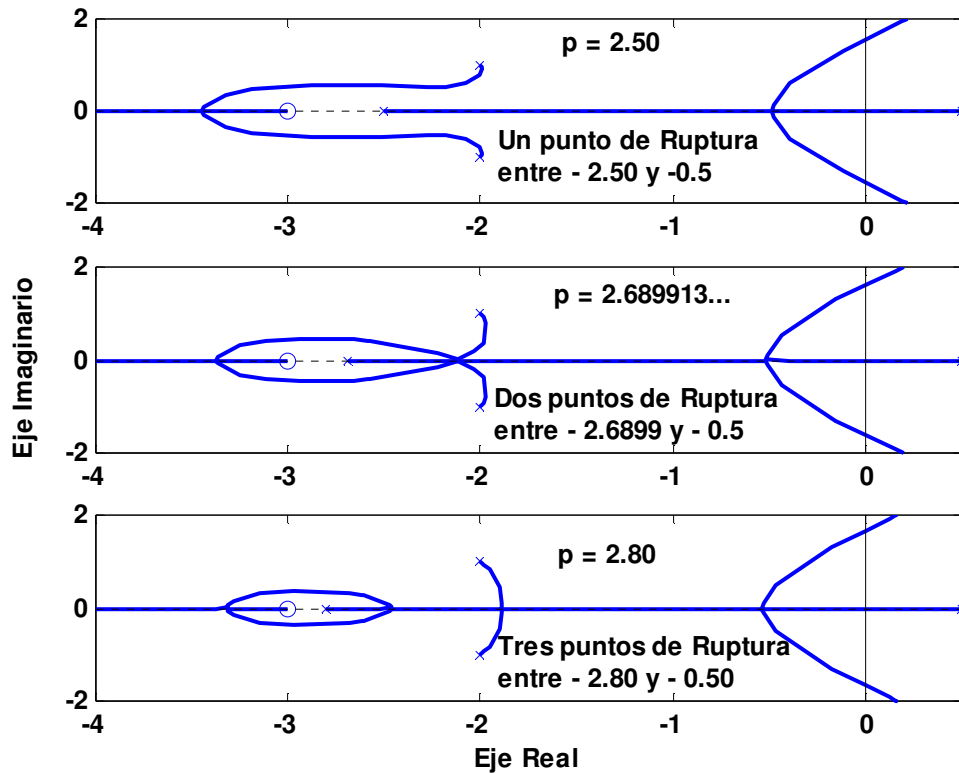


Figura 31

### C) Entre un Polo y un Cero en el Eje Real.

C<sub>1</sub>) Que no hayan puntos de ruptura: ( $y=0$ ,  $q=1$ )

Es el caso más común.

C<sub>2</sub>) Que hayan puntos de ruptura:

En estos casos se debe cumplir que la suma de los órdenes de todos los puntos de ruptura siempre sea un número par.-

$$\sum y = N^\circ \text{ Par}$$

### Ejemplo 27:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+p)} = K \frac{(s+1)}{(s^3 + ps^2)}$$

Los puntos de ruptura serán:

$$N \frac{dL_1(s)}{ds} = 0 \Rightarrow s[2s^2 + (p+3)s + (2p)] = 0$$

Si  $p=8 \Rightarrow s[2s^2 + 11s + 16] = 0$ , los puntos de ruptura serán:

$s_1=0$ ,  $y=1$ ,  $q=2$ , para  $K=0$ .-

$s_{2-3} = -2.75 \pm j\sqrt{7}/2$ , no satisfacen la ecuación característica para un  $K$  real, por lo tanto no son puntos de ruptura, solo para un  $K$  complejo e igual a:  $K = 22.6250 + j 0.3307$ .-

En la figura 32 se muestran los lugares directos solamente:

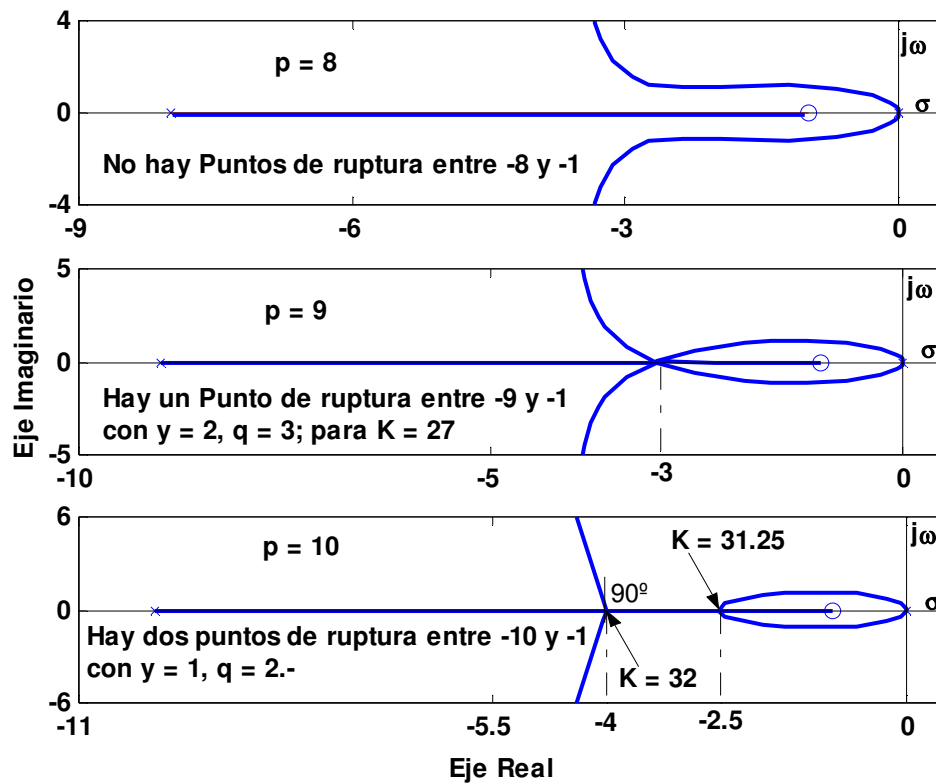


Figura 32

Si  $p = 9$ :

El polinomio numerador de:  $N \frac{dL_1(s)}{ds}$  será:  $s[2s^2 + 12s + 18] = s(s+3)^2 = 0$

los puntos de ruptura serán:

$s_1=0$ , para  $K=0$ ,  $y=1$ ,  $q=2$ .-

$s_2=-3$ ,  $y=2$ ,  $q=3$ , para  $K=27$ . Orden par.

Si  $P = 10$ :

El polinomio numerador de:  $N \frac{dL_1(s)}{ds}$  será:  $s[2s_2 + 13s + 20] = s(s+2.5)(s+4) = 0$

los puntos de ruptura serán:

$s_1=0$ , para  $K=0$ ,  $y=1$ ,  $q=2$ .-

$s_2=-2.5$ ,  $y=1$ ,  $q=2$ , para  $K=31.25$

$s_3=-4$ ,  $y=1$ ,  $q=2$ , para  $K=32$ . La suma de los órdenes es par.-

En la figura 32 se muestran los lugares directos.-

#### D) Puntos de Ruptura Complejos Conjugados

D<sub>1</sub>) Estarán en los polos o ceros complejos conjugados de la función de transferencia del lazo, de orden de multiplicidad mayor que uno. Si ese orden es en general, "r", se tendrá en esos casos que:  
 $y=r-1$ , pues  $q=r$ .- Para  $K=0$  o  $K=\infty$  según sean polos o ceros de  $L(s)$ .  
En el ejemplo 29, figura 25 es una aplicación de esto.-

#### D<sub>2</sub>) Puntos de Ruptura en el Plano s en General:

Por lo general no hay, pero si los hubiera además de cumplir que:

$N \frac{dL_1(s)}{ds} = 0$ , deberán satisfacer la ecuación característica para un  $K$  real, positivo, o negativo, (L.R.D. o L.R.I.).

#### Ejemplo 28:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s(s^3 + 2s^2 + 3s + 1)}$$

Los puntos de ruptura serán:

$$N \frac{dL_1(s)}{ds} = 0 \Rightarrow 3s^4 + 8s^3 + 9s^2 + 6s + 1 = 0, \text{ las raíces son:}$$

$$s_1 = -0.2324; s_2 = -1.4343 \quad y \quad s_{3-4} = -0.50 \pm j\sqrt{3}/2. -$$

Los cuatro pertenecen al lugar directo, pues para el par complejo:

$$K = \frac{-(s^4 + 2s^3 + 3s^2 + s)}{(s+1)} = \frac{0.5 + j\sqrt{3}/2}{0.5 + j\sqrt{3}/2} \Rightarrow K = 1. -$$

Por lo tanto el par complejo también son puntos de ruptura para  $K=1$ .

Ose que para  $K=1$ , el sistema tiene un par complejo doble en:

$$s_{3-4} = -0.50 \pm j\sqrt{3}/2. -$$

El centroide está en:  $\sigma_0 = -1/3 \quad \alpha = \pm 60^\circ y 180^\circ (LR) \quad \alpha = 0^\circ y \pm 120^\circ (LRI)$

Los ángulos de partida y de llegada:  $\varphi_p \cong -55.5^\circ \quad y \quad \varphi_{LL} \cong +124.5^\circ$

En la intersección con el eje imaginario:

$$\omega_c \cong 1.722 \text{ rad / seg.} \quad y \quad K_L = \sqrt{5}$$

En la figura 33 se muestra el lugar directo solamente.

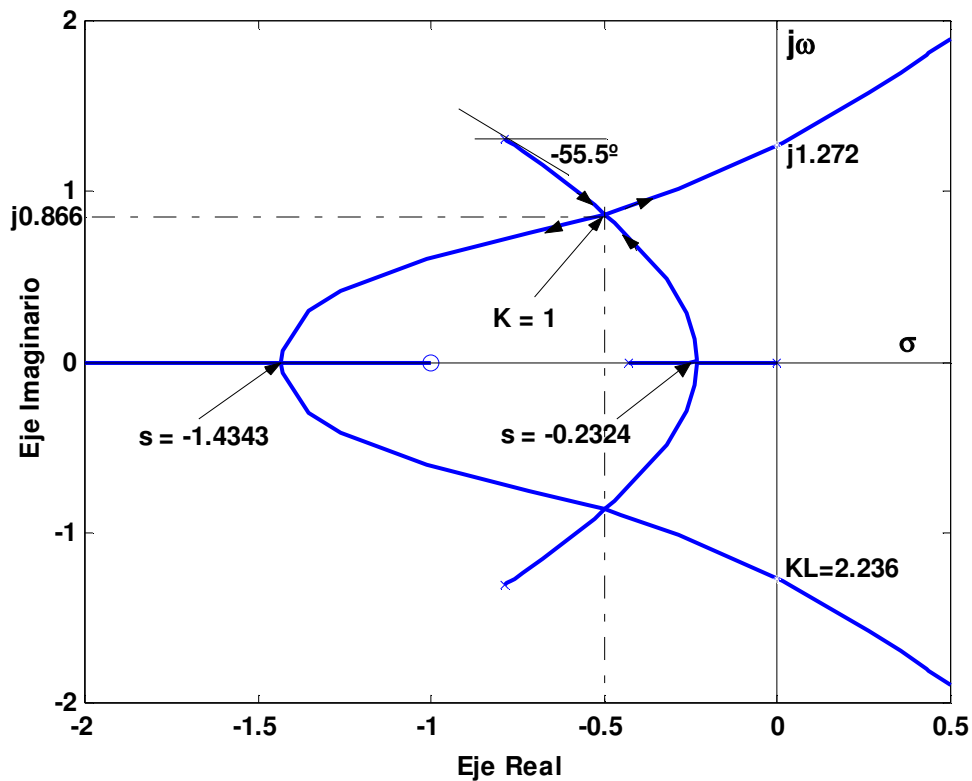


Figura 33

### Ejemplo 29:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{K}{s(s^2 + 3s + a)}$$

Los puntos de ruptura serán:

$$N \frac{dL_1(s)}{ds} = 0 \Rightarrow 3s^2 + 6s + a = 0$$

Para a=4:  $\Rightarrow 3s^2 + 6s + 4 = 0 \Rightarrow s_{1-2} = -1 \pm j0.5774$

No satisfacen la ecuación característica para un K real, no son puntos de ruptura.

Para a=3:  $\Rightarrow 3(s^2 + 2s + 1) = (s+1)^2 = 0 \Rightarrow s_{1-2} = -1$

Hay un punto de ruptura en  $s=-1$ , con  $y=2$ , (par),  $q=3$ , para  $K=1$ .

Para a=2.50:  $\Rightarrow 3s^2 + 6s + 2.50 = 0 \Rightarrow s_1 = -0.5918$  y  $s_2 = -1.4082$

Hay dos puntos de Ruptura con  $y=1$ ,  $q=2$ , en  $s_1$  y  $s_2$ , para  $K=0.6361$  y  $K=0.3639$  respectivamente.

Los lugares se muestran en la figura 34.

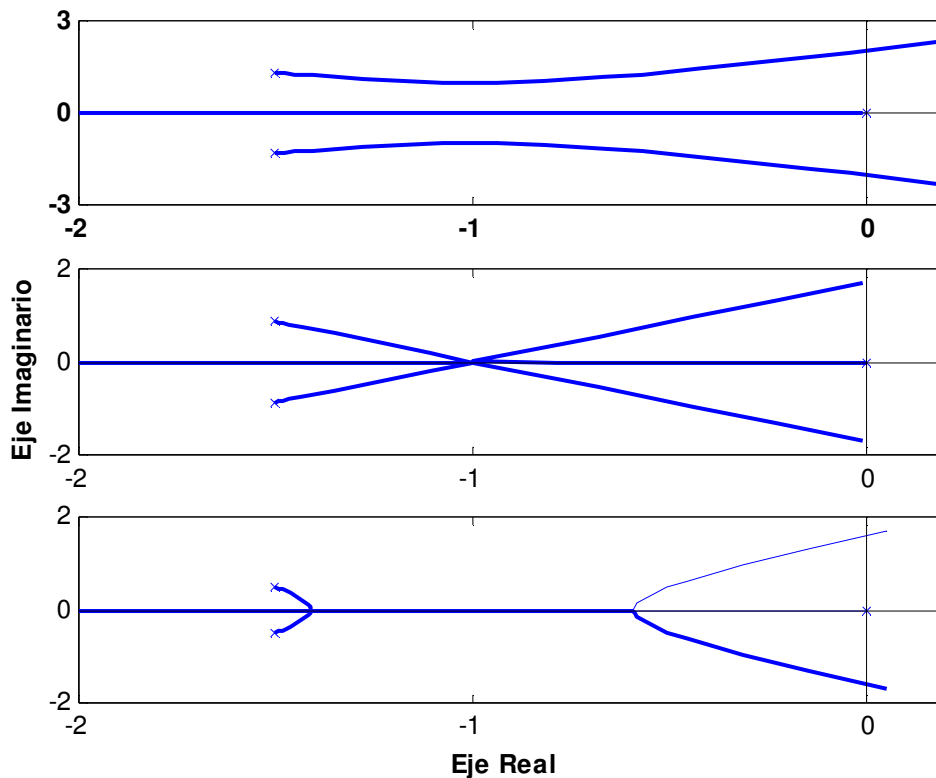


Figura 34

### Paso 7: Reglas 9 y 10, (Bosquejar el resto del Lugar de las Raíces)

Para finalizar el L.G.R. comenzamos de los polos del lazo conectando las porciones en el eje real, los puntos de ruptura, los cruces del eje imaginario, terminando en los ceros del lazo finito o bien hacia los impropios siguiendo las asuntotas.

Dos reglas también ayudan a esto:

### Regla 9: Número de ramas sobre el Lugar Geométricos de las Raíces.

Una Rama del L.G.R. es el lugar de una raíz cuando  $K$  toma valores entre  $-\infty$  y  $\infty$ . Como el número de ramas del L.G.R. debe ser igual al número de raíces de la ecuación características resulta el siguiente enunciado:

*El número de ramas del L.G.R. es igual al más grande de los números  $n$  y  $w$  de la  $L_{equiv}(s)$  " En general si se trata de una  $L(s)$  real,  $n > w$ , por ende el orden será  $n$ .*

Ejemplo 30: La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

El número de ramas es 3, pues  $n=3$  y  $w=1$ .

### Regla 10: Simetría del L.G.R.

"El L.G.R. es simétrico con respecto a los ejes de simetría de la configuración de polos y polos de  $G(s)H(s)$ "

El eje real cumple que es simétrico respecto a la configuración de polos y polos de  $L(s)$ . Por lo tanto el Lugar Geométrico de las Raíces será simétrico respecto al eje real.

Esto además es evidente pues para coeficientes reales en la ecuación característica las raíces deben ser reales o estar en pares complejos conjugados.

La primera afirmación es también simple de ver puesto que si los polos y polos de  $L(s)$  a un eje además del real, se puede considerar a este eje de simetría como si fuera el real de un nuevo plano complejo obtenido a través de una transformación lineal.

### Ejemplo 31:

La función de transferencia del lazo de un sistema es:

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

El lugar de las raíces es el mostrado en la figura 35.

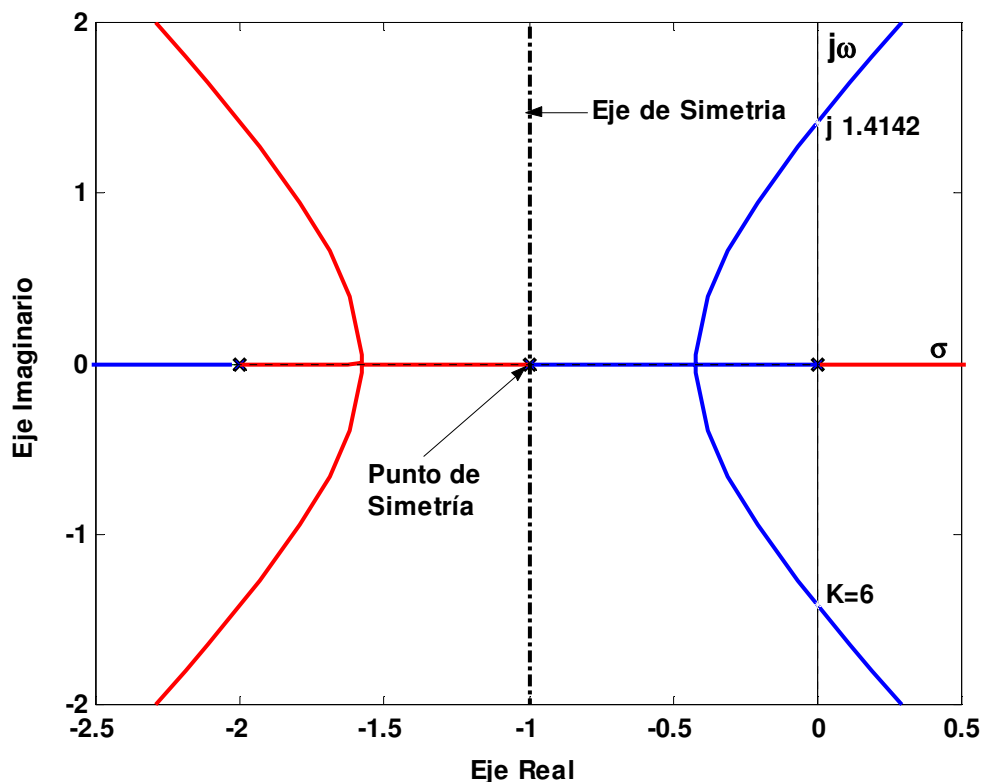


Figura 35

### Ejemplo 32:

Cuando la configuración de polos y ceros es simétrica respecto a un punto del plano  $s$ , el L.G.R. Completo también será simétrico a dicho punto.

$$\text{Si } L(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

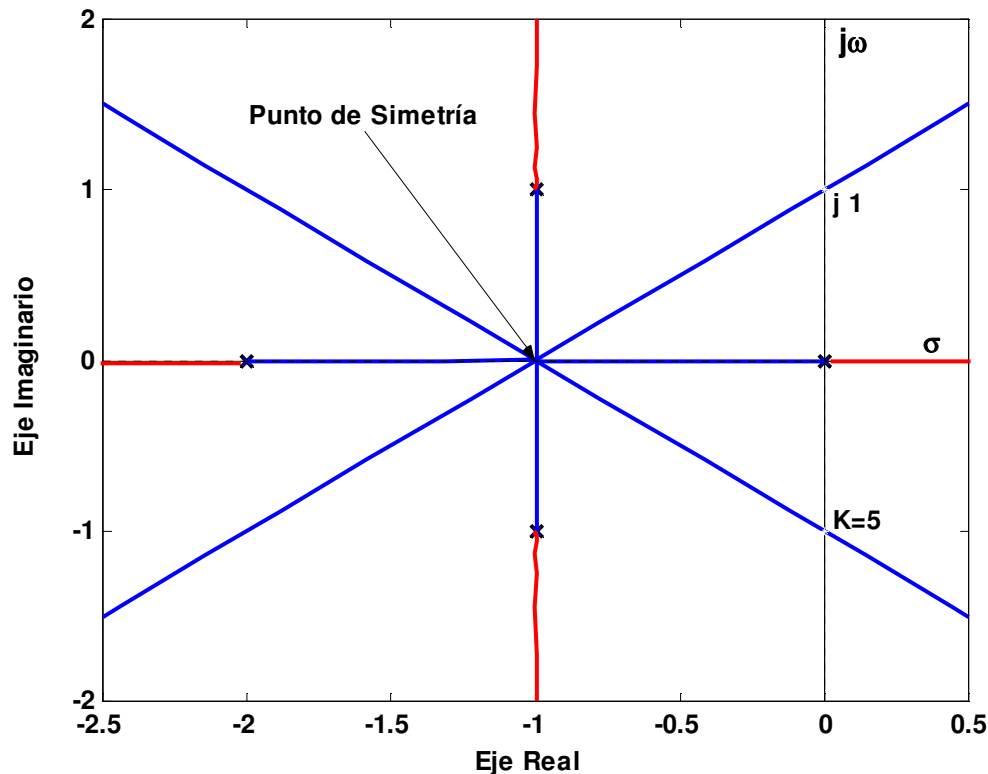


Figura 36

Como se ve cumple que el punto de ruptura tiene  $y=3$  (Impar), pues  $q=4$ .

### Regla 11: Cálculo de K sobre el L.G.R.

Una vez que el L.R. ha sido construido, el valor de K en cualquier punto  $s_1$  sobre el lugar puede ser determinado usando el requerimiento de

magnitud, o sea:  $1 + K \cdot G'(s)H'(s) = 0 \rightarrow |K| = \frac{1}{|G'(s)H'(s)|} \quad -\infty < K < \infty$

$$\text{ó } |K| = \frac{\prod_{j=1}^n |(s_1 - p_j)|}{\prod_{i=1}^w |(s_1 - p_i)|} \quad -\infty < K < \infty$$

Estas ecuaciones pueden evaluarse en forma "gráfica" o analítica.

Usualmente si el gráfico está ya dibujado con precisión el método gráfico es más conveniente.

Por ejemplo, el L.R. de la ecuación:

$s^2 + 2s + 2 + K(s + 2) = 0 \rightarrow L(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 + 2s + 2}$  se muestra en la figura 37. El valor de K en el punto  $s_1$  está dado por:  $K = \frac{A \times B}{C}$  y en  $s_2$  por:  $K = -\left(\frac{A' \times B'}{C'}\right)$

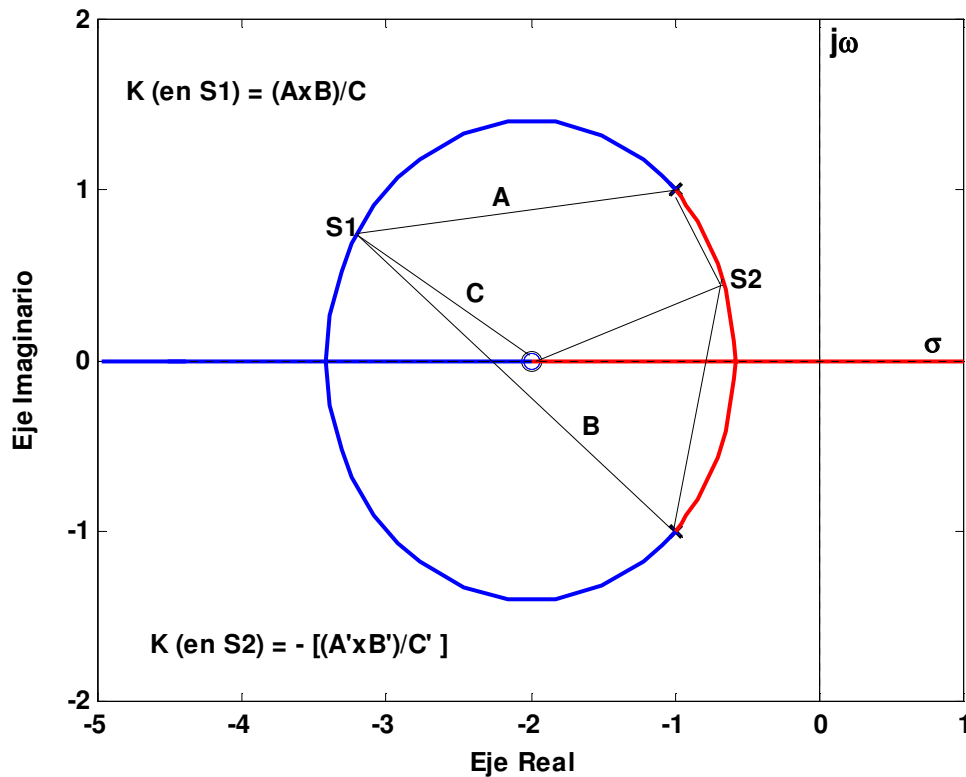


Figura 37

En el caso presentado,  $s_1$  está sobre el L.R. por ende K es positivo. Si  $s_1$  es un punto sobre el L.R.C. K debe tener signo negativo.

Para localizar raíces en el lugar o para hallar el valor de K sobre las ramas del lugar, se pueden aplicar dos propiedades del álgebra a saber:

#### Regla 11-a:

Se basa en la simetría de las raíces de un polinomio de grado n es igual al coeficiente de grado (n-1) cambiando de signo. O sea:

$$1s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0 = 0$$

$$\sum (raices) = \sum_{j=1}^n (\lambda_j) = -a_{n-1} \quad \text{Expresión general}$$

Para aquellos sistemas donde:  $(n \geq w + 2)$   $a_{n-1}$  es una constante

independiente de K y es igual a  $\left[-\sum_{j=1}^n (p_j)\right]$



$$\therefore \boxed{\sum_{j=1}^n (\lambda_j) = \sum_{j=1}^n (P_j) = Cte.} \quad \text{si } (n \geq w+2)$$

Esto revela que para  $(n \geq w+2)$  al variar  $K$ , la suma de las raíces de la ecuación característica permanece constante. En otras palabras cuando el L.G.R. tiene varias ramas que van hacia infinito, las direcciones de las mismas serán tales que la suma de las raíces sea una constante. Una rama que vaga hacia la derecha requiere que exista otra u otras que vayan hacia la izquierda para que se mantenga el cambio y hacer la  $\sum (\lambda_j) = Cte.$

Dos ejemplos de aplicación serian:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)} \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = -2 \rightarrow 2\sigma = -2 \rightarrow \underline{\underline{\sigma = -1}}$$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+4)} \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -6 \rightarrow \underline{\underline{2\sigma + \lambda_3 = -6}}$$

**Regla 11-b:** El producto de las raíces de la ecuación característica es:

$$\boxed{\prod_{j=1}^n (\lambda_j) = (-1)^n a_0} \quad \text{General}$$

Para los sistemas con uno o más polos en el origen en  $G(s)H(s)$ ,

$a_0 = K \prod_{i=1}^w (-z_i)$  si hay ceros en  $G(s)H(s)$  o  $a_n = K$  si no hay ceros en  $G(s)H(s)$ .

$$\boxed{\prod_{j=1}^n (\lambda_j) = (-1)^n K \prod_{i=1}^w (-z_i)} \quad \text{o} \quad \boxed{\prod_{j=1}^n (\lambda_j) = (-1)^n K}$$

**Ejemplo 33:**

Un sistema tiene el diagrama de bloques indicado en la figura 38,

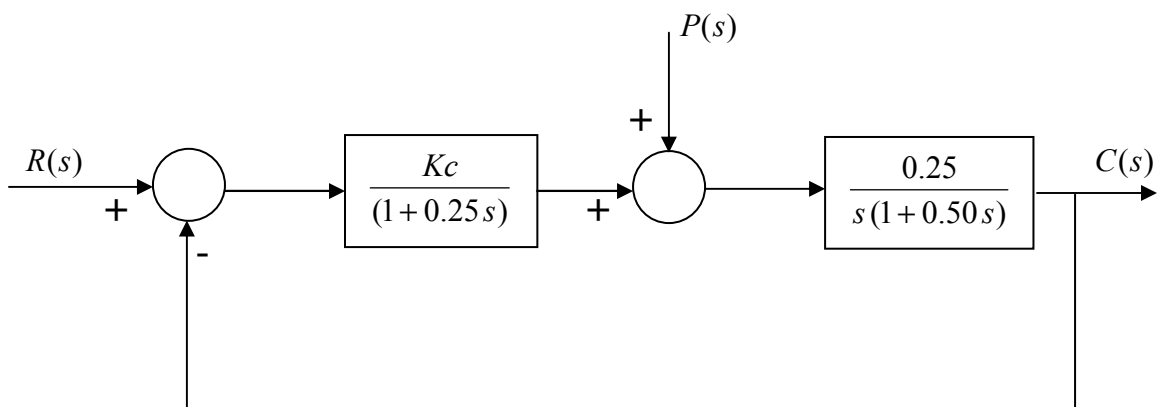


Figura 38

Luego de bosquejar el lugar de las raíces del sistema, si se sabe que el polo real está en  $\lambda_3 = -5$ , determinar los polos complejos conjugados y el

valor de la ganancia de los sistemas seguidor y regulador.  
La función de transferencia del lazo en la forma factorizada será:

$$L(s) = G(s) = \frac{2Kc}{s(s+2)(s+4)}; \text{ donde: } K = 2Kc \quad \text{o} \quad Kc = \frac{K}{2}$$

Aplicando las reglas el lugar es el mostrado en la figura 39.

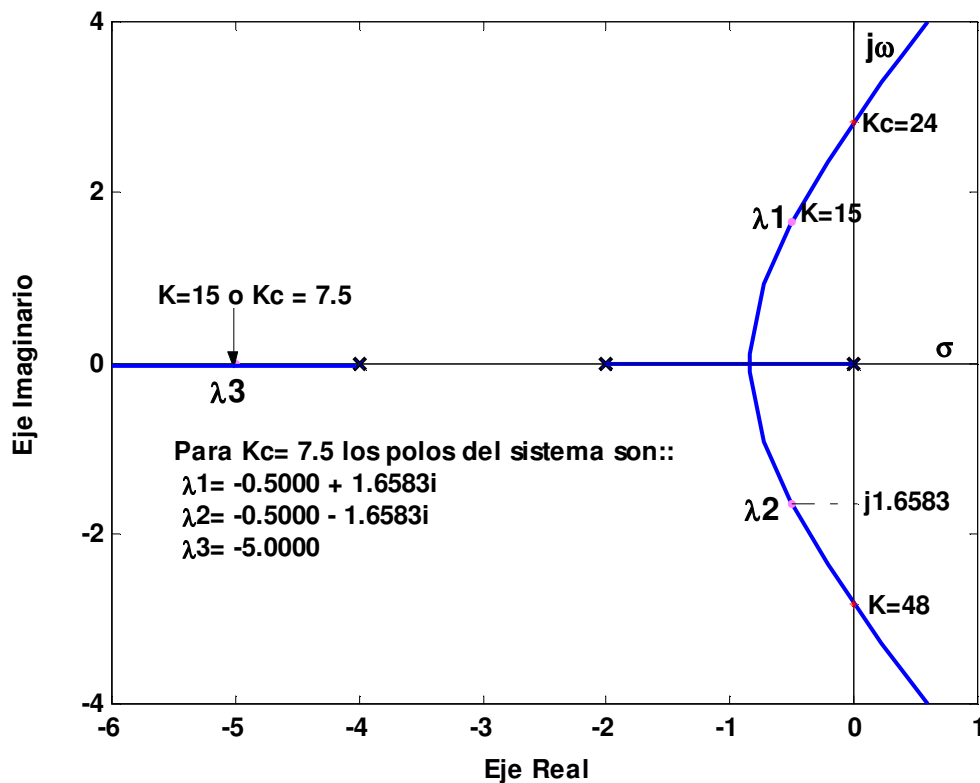


Figura 39

R11a)

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a_{n-1} = -6$$

$$2\sigma + \lambda_3 = -6 \Rightarrow \sigma = \frac{-6 - \lambda_3}{2} = \frac{-6 + 5}{2} \Rightarrow \sigma = -0.50$$

$$K|_{\lambda_3} = 1 \times 3 \times 5 = 15 \Rightarrow Kc = 7.50$$

R11b)

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -a_0 \Rightarrow (\omega_d^2 + \sigma^2) \lambda_3 = -K \Rightarrow \omega_d = \sqrt{\frac{-K}{\lambda_3} - \sigma^2} = \sqrt{\frac{-15}{-5} - (-0.5)^2} = \sqrt{11}/2$$

Como Seguidor:

$$K_S = 2Kc = 15$$

$$\lambda_{1-2} = -0.50 \pm j1.6583$$

$$\lambda_3 = -5$$

No hay ceros.

Como Regulador

$$K_R = 0.50$$

$$\lambda_{1-2} = -0.50 \pm j1.6583$$

$$\lambda_3 = -5$$

$$Z_1 = -4$$

## Regla 12: Ubicación de los Ceros del Sistema.

Es la única propiedad o regla que requiere individualizar a  $G(s)$  y  $H(s)$  por separado ya que:

*Los ceros del sistema ( $\mathcal{Z}$ ) son, en general, los ceros de la función de transferencia del camino directo  $G(s)$  y los polos de la función del camino de realimentación  $H(s)$ .*

Un diagrama de bloques de un sistema en general es el indicado en la figura 40.

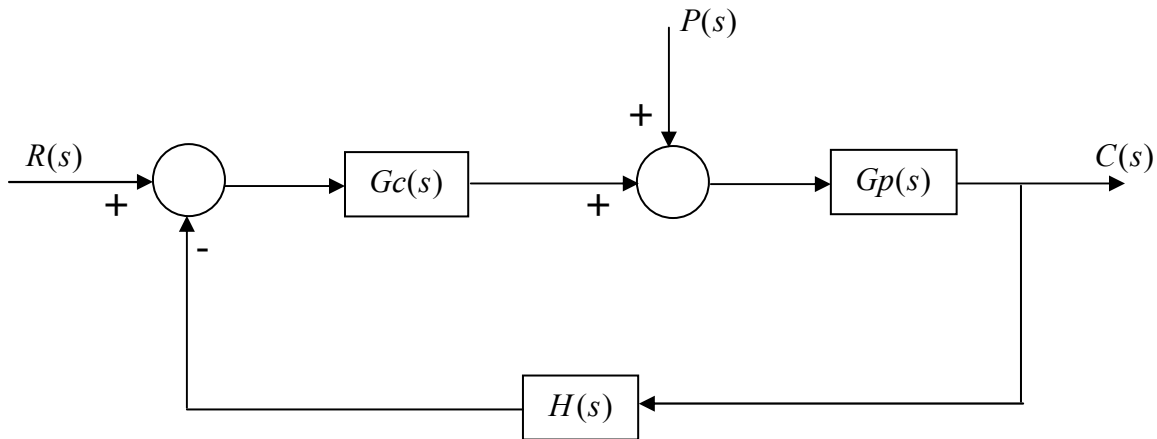


Figura 40

Trabajando como Seguidor:

Los ceros del sistema son los ceros de la función  $G(s) = G_c(s) \cdot G_p(s)$  y los polos de  $H(s)$ .

La ganancia es la ganancia de  $G(s) = G_c(s) \cdot G_p(s)$  o sea  $K_s = K_c \cdot K_p$ .

Trabajando como Regulador:

Los ceros del sistema son los ceros de  $G_p(s)$  y los polos de  $G_c(s) \cdot H(s)$ .

La ganancia es la ganancia de  $G_p(s)$  o sea  $K_R = K_p$ .

## Uso de la Computadora para Graficar los Lugares de las Raíces:

Para graficar el lugar de las raíces de un sistema de control se puede utilizar algunos comandos del Matlab, una vez ingresada la función de transferencia del lazo, por ejemplo los siguientes:

1) `>> rlocus (n, d)`

Este comando grafica el L.R.D. con cada rama de distinto color.

2) `>> rlocus (-n, d)`

Este comando grafica el L.R.I. con cada rama de distinto color.

3) `>> rlocfind (n, d)`

Con este comando si se selecciona con el mouse un punto del lugar sobre una rama del mismo y haciendo clic nos da el valor de la raíz de la ecuación característica  $\lambda$  y la ganancia del lazo correspondiente  $K$ .-

4) `>> [K,P]=rlocfind(n,d)`

Se señala un punto sobre una rama con el mouse y con un clic nos da la ganancia del lazo correspondiente y la ubicación todos los polos del sistema para dicha ganancia del lazo.-

5) `>> [K,P]=rlocfind(n,d,P)`

Con este comando se define un vector P con distintas ubicaciones de una de las raíces y devuelve las ganancias para cada uno de las localizaciones K. Además computa la ubicación de las otras raíces, para cada raíz elegida.

6) `>> sgrid`

Este comando grafica un mapa de líneas de factor de amortiguamiento constante ( $\delta$ ) y frecuencia natural constante ( $\omega_n$ ).-

7) `>> sgrid( $\delta, \omega_n$ )`

Este comando grafica solo las dos líneas de  $\delta$  y  $\omega_n$  constantes.-

El programa del Csad rlplot, se puede usar para graficar y obtener toda la información del mismo.

### RLPLOT:

#### **Objetivo:**

Graficar el lugar de las raíces de la ecuación característica de un sistema.

#### **Sinopsis:**

rlplot: Computa y grafica el lugar de las raíces de la ecuación característica de sistemas de tiempo continuo, dada la ecuación característica de la forma  $1 + K n(s) / d(s) = 0$ . -

rlplot: Propone al usuario el ingreso de los polinomios numerador y denominador, n y d, respectivamente, de la ecuación característica deseada.-

rlplot: Usa a n y d como polinomios numerador y denominador respectivamente.-

rlplot : Considera solamente sistemas en los cuales el orden del polinomio  $n(s)$  es menor o igual al del polinomio  $d(s)$ .-

El usuario interactúa con rlplot entrando la primera letra de la opción deseada cuando la lista siguiente de opciones es presentada:

```
-- RLPLOT    OPTIONS --
K values      Constant Zeta
Single K      Wn   circle
Find K        Rule  info
jw axis       New  TF
Zoom          Display TF
Erase         Label
Grid          To  rltool
Quit
RLPLOT >
```

La primera letra es tipeada en la parte inferior, y luego se presiona la tecla enter. La acción realizada por cada opción del menú principal es la siguiente:

K: Propone al usuario el rango deseado de los valores de K, para construir el lugar de las raíces de la ecuación característica del sistema en estudio. Cualquier vector de MATLAB es válido como entrada. Por defecto es: `logspace (-2,4,1000)`, computa el lugar de las raíces para 1000 puntos logarítmicamente espaciados, comenzando en  $K=10^{-2}$  y finalizando en  $K=10^4=10000$ . Entrando `linspace ( 0,100,200 )` computa el lugar de las raíces para 200 puntos linealmente espaciados entre 0 y 100. Entrando `10:5:100`, computa el lugar de las raíces comenzando en 10 y finalizando en 100, con un incremento lineal de 5, o sea: `[10 15 20 25 30 .....90 95 100]`. Entrando `[-20 -10 -2 -6 10 25 50]`, computa el lugar de las raíces en los valores específicos señalados. Si se desea agregar mas puntos, la opción K values, puede ser seleccionada otra vez y adicionar el nuevo rango de K.-

S: Encuentra y muestra las raíces de la ecuación característica para un simple valor de K, elegido por el usuario. Además los muestra en la pantalla y los puede marcar o no en el gráfico, a elección.

F: Propone al usuario identificar un punto en el gráfico del lugar de las raíces del sistema (con ayuda del mouse), para el cual se desea averiguar el valor de K. Todas las raíces son mostradas en la pantalla, indicando además los coeficientes de amortiguamiento relativo y la frecuencia natural sin amortiguación de las complejas conjugadas. Opcionalmente se pueden marcar en el gráfico del lugar ya construido.

j: Encuentra el valor de K donde el lugar de las raíces cruza el eje  $j\omega$ . El programa tiene, por defecto, un valor de  $K = 0,001$ , para la zona de estabilidad y  $K = 1000$  para la zona de inestabilidad. Esto, según sea el sistema, se puede cambiar con la ayuda de la opción F del menú principal. Además, luego muestra en la pantalla todas las raíces para el K límite. Opcionalmente se pueden marcar en el gráfico del lugar.

Z: Cambia el límite de los ejes basada en la elección del usuario: in (ampliar), out (contraer), auto (restaura la elección automática del límite de los ejes), o none (no cambia nada). Esta función no cambia los gráficos futuros, a menos que el gráfico actual haya sido mantenido (hold) después de usar el zoom.

E: Borra e inicializa el gráfico.

G: Se dibuja la grilla sobre el gráfico actual y si esta dibujada la retira.

Q: Sale de la función.

C: Propone al usuario elegir el valor del coeficiente de amortiguación relativo y dibuja la línea de  $\delta = cte$  sobre el gráfico actual.-

W: Propone al usuario elegir el valor de la frecuencia natural no amortiguada y dibuja la circunferencia de  $\omega_n = cte$  sobre el lugar de las raíces ya construido.-

R: Muestra toda la información referida a las reglas o propiedades para la construcción rápida de un bosquejo del lugar de las raíces.-

N: Propone al usuario ingresar una nueva función de transferencia del modelo en estudio. Por defecto mantiene la función de transferencia actual, entrada con anterioridad.-

D: Muestra la función de transferencia actual, ingresada con anterioridad.-

L: Propone al usuario colocar un título en la parte superior de la figura.

T: Se llama al programa rlttool de MATLAB, tomando a la función de transferencia ya entrada como la de la planta, la función de transferencia del controlador igual a uno, y la función de transferencia del camino de realimentación unitaria.-

Hay cinco opciones que no se muestran y que también pueden usarse, a saber:

@ Propone al usuario seleccionar y ubicar un texto determinado sobre el gráfico actual. Con la ayuda del mouse se ubica el margen izquierdo del texto a colocar.-

# Da las coordenadas de un punto del gráfico elegido por el usuario con el mouse y el botón del mismo.-

- Dibuja una línea horizontal, vertical o inclinada sobre el gráfico actual. Si es una línea inclinada, la que se elige, el usuario deberá elegir los dos puntos extremos con ayuda del mouse. Si la elegida es la línea horizontal

o vertical, primero se seleccionan (con el mouse) dos puntos que fijan la ubicación de una línea recta, (sin marcarla) y luego un tercer punto adicional, y entre este punto y el segundo se marca la recta.

^ Permite al usuario seleccionar:

Tipo de línea y color para el lugar de las raíces directo.-

Tipo de línea y color para el lugar de las raíces inverso.-

Color para las líneas de  $\delta = cte$  y  $\omega_n = cte$ .-

Tipo de línea y color para los ejes real e imaginario.-

! Todo el texto siguiente al símbolo de exclamación, es evaluado y ejecutado por MATLAB o por otra función del Csad inclusive. Este comando permite acceder a las variables internas de la función (por ejemplo: n,d), y a cualquier otro comando del MATLAB, como por ejemplo, ! who, !Bode(n,d) o ! rlocus(n,d), etc.-

#### Ejemplo 34:

Algunas aplicaciones de rlocplot se verán con la función de transferencia del lazo siguiente:

$$L(s) = K \frac{n(s)}{d(s)} = K \frac{(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}, \text{ donde: } L(s) = G(s)H(s).-$$

Después de entrar los polinomios numerador y denominador de  $L(s)$ , el programa mostrara en el plano s la configuración de polos y ceros de la misma. Presionando enter se mostrara el menú principal de rlocplot.-

Si se selecciona Rule info, la función retorna todas las propiedades del lugar de las raíces:

K=inf point: -3 + 0i

K=0 point: 0 + 0i

K=0 point: -6 + 0i

K=0 point: -5 + 0i

K=0 point: -1 + 1i

K=0 point: -1 - 1i

K>0 asymptote angles: 45 135 225 315

K<0 asymptote angles: 0 90 180 270

Asymptote intersection: -2.5

Press any key to continue...

K>0 real axis locus: (0 to -3), (-5 to -6)

K>0 Departure angle = -43.78 degrees at Pole: -1 + 1i

For |K| = 11.72 a Breakaway point appears at: -5.526 + 0i

Press any key to continue...

Eligiendo la opción K values, después de tipear K, la función responde con:

Default input is logspace (-2,4,1000)

Enter K values >

Se puede aceptar ese rango de K, o ingresar otro, por ejemplo:

> logspace (-2,2,1000), al pulsar enter se mostrara el lugar requerido. La propiedad zoom, es particular mente útil para mostrar detalles de ciertos puntos de lugar. Por ejemplo si se desea encontrar el valor de K del lugar, en la intercepción de la línea de  $\delta = 0,50$ , no se tendría una resolución adecuada en el grafico original al usar el mouse. Por tal motivo se empleara la opción zoom, para ver en detalle la parte superior del semiplano izquierdo como se muestra en la figura 41. Luego con la opción Find K, y la ayuda del mouse este valor es encontrado y ubicado en el grafico. Con jw axis, se calcula el  $K_{\text{Límite}}$  -

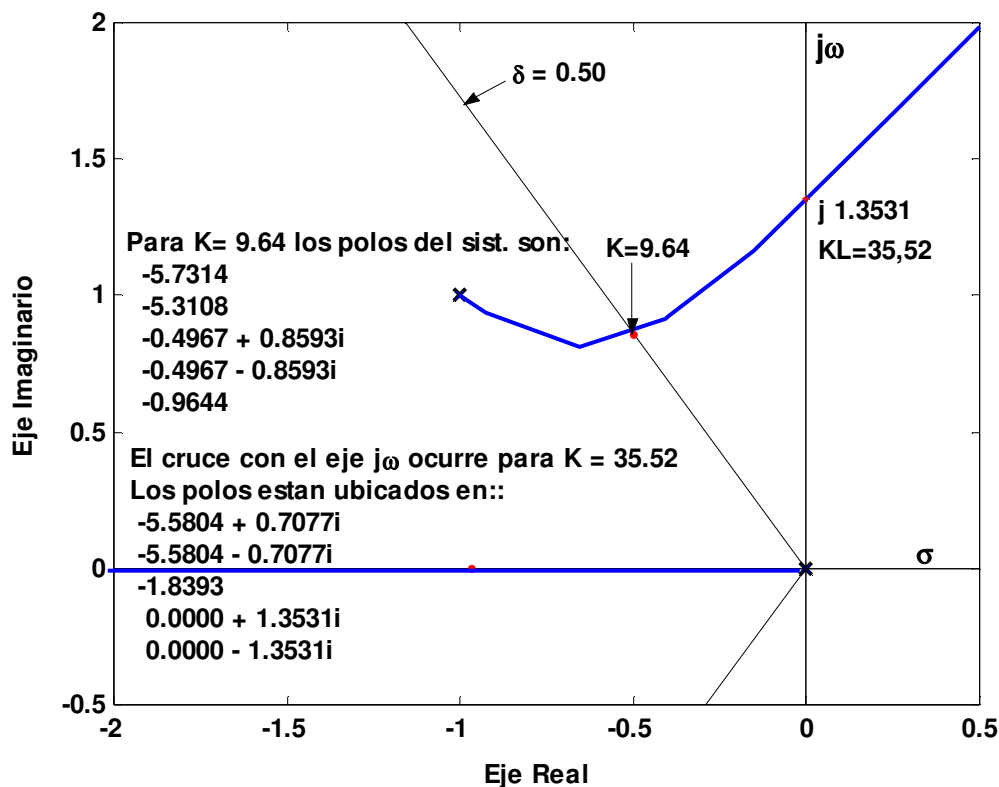


Figura 41

### Efecto de la Variación de un Parámetro sobre los Puntos de Ruptura:

Se estudiará este tema con un ejemplo muy simple, a saber:

Se tiene un sistema con el diagrama de bloques indicado en la figura 42.

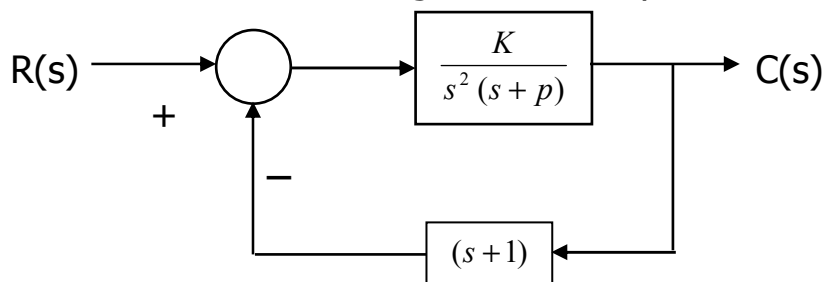


Figura 42



La función de transferencia del sistema será:

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^3 + ps^2 + Ks + K}$$

La función de transferencia del lazo es:

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+p)}$$

Se vera el efecto que tiene sobre los puntos de ruptura, la variación de la posición del polo del lazo  $-p$ .

Los mismos se encuentran aplicando:

$$N \frac{d}{ds} L_1(s) = 0$$

Operando y ordenando se tendrá:

$$(2s^3 + 3s^2) + (ps^2 + 2ps) = 0$$

$$s[2s(s+1.5) + p(s+2)] = 0$$

Como se sabe hay un punto de ruptura en el origen para  $K = 0$ . Los otros dos serán función de  $p$ . Se puede construir el lugar de los mismos cuando varía  $p$ , encontrando la función de transferencia equivalente siguiente:

$$G_{equiv}(s) = \frac{(0.5p)(s+2)}{s(s+1.5)}$$

Por ende los posibles puntos de ruptura, del L.R. del sistema variaran según sea el valor de  $p$  de la forma indicada en la figura 43.

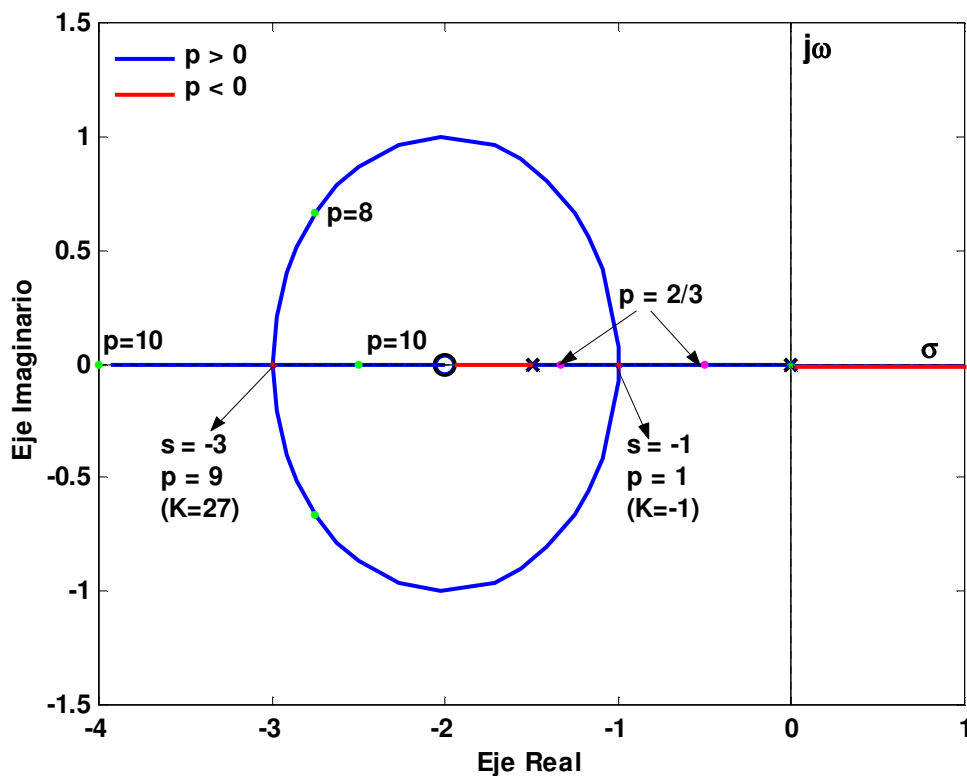


Figura 43

Los puntos de ruptura del lugar de la figura 43, se determinan como se sabe:

$$N \frac{d}{ds} G_1 \text{equiv.}(s) = 0$$

$$(2s + 1.5)(s + 2) - s^2 - 1.5s = 0 \Rightarrow s^2 + 4s + 3 = (s + 1)(s + 3) = 0$$

O sea serán:  $s_1 = -1$  y  $s_2 = -3$ .

Para hallar los valores de  $p$ , se puede hacer aplicando el requerimiento de magnitud o usando la función  $p = f(s)$  en la cual se reemplaza  $s$  por:

$-1$  y  $-3$ . Se tiene que:

$$1 + G_{\text{equiv.}}(s) = 0 \Rightarrow G_{\text{equiv.}}(s) = -1 \Rightarrow \frac{0.5 p (s + 2)}{s (s + 1.5)} = -1, \text{ despejando } p:$$

$$p = \frac{-(s^2 + 1.5s)}{0.5(s + 2)}; \text{ Para } s = -1 \text{ y } s = -3 \text{ resulta: } p = 1 \text{ y } p = 9 \text{ respectivamente.}$$

### Comentarios y Conclusiones:

De la figura 43 se puede concluir que:

- Como se ve para  $p < 0$ , siempre hay dos puntos de ruptura con  $y = 1$ , ( $q = 2$ ) variables según sea el valor de  $p$ , uno en el semiplano derecho y otro en el izquierdo entre  $-2$  y  $-1.5$ , además el del origen fijo con  $y = 1$ , ( $q = 2$ ).- Como se puede demostrar estos puntos pertenecen al lugar directo de las raíces,  $K > 0$ , o al inverso o asea cuando  $K < 0$ . Por ejemplo si  $p = -0.80$ , los puntos de ruptura del lugar serán:  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -1.60$  y  $s_3 = +0.50$ . Los mismos corresponderán a los valores de  $K$  siguientes:  $K = 0$ ,  $K = -10.24$  y  $K = 0.05$  respectivamente.-
- Para  $p = 0$  se tendrá:
  - Un punto de ruptura en  $s = -1.5$  con  $y = 1$ , ( $q = 2$ ), para  $K = -6.75$ .-
  - Un punto de ruptura en el origen con  $y = 2$ , ( $q = 3$ ), para  $K = 0$ .-
- Para el intervalo de  $p$  entre  $0 < p < 1$ , se tendrá:
  - Dos puntos de ruptura cada uno con  $y = 1$ , ( $q = 2$ ), para  $K < 0$ .-
  - Un punto de ruptura en el origen con  $y = 1$ , ( $q = 2$ ), para  $K = 0$ .-
  - Por ejemplo para  $p = 2/3$ , los mismos serán:  $s_1 = 0$ , para  $K = 0$ ;  $s_2 = -0.5$ , para  $K = -0.08333$  y  $s_3 = -4/3$ , para  $K = -3.556$ .-
- Para  $p = 1$ , se tendrá:
  - Es un caso especial pues la ecuación característica es:  $(s + 1)(s^2 + K) = 0$
  - O sea hay un polo fijo en  $-1$  y un par imaginario si  $K > 0$ .
  - Un polo fijo en  $-1$  y un par real simétrico respecto al origen para  $K < 0$ .
  - Si  $K = -1$ , la ecuación característica será:  $(s + 1)(s^2 - 1) = (s + 1)^2 (s - 1) = 0$
  - Por lo tanto habrá un polo doble en  $-1$  para  $p = 1$ , con  $K = -1$ . En el lugar de las raíces con la  $L(s)$  reducida no habrán puntos de ruptura, solo se puede apreciar el punto de ruptura en el origen para  $K = 0$ .-
- Para el intervalo de  $p$  entre  $1 < p < 9$ , se tendrá:
  - Como el sistema es de tercer orden los lugares de las raíces no podrán tener puntos de ruptura complejos conjugados, solo estará el del origen con  $y = 1$ , ( $q = 2$ ) para  $K = 0$ .-

- Para  $p=9$ , se tendrá:
  - Un punto de ruptura en el origen con  $y=1$ , ( $q=2$ ) para  $K=0$ .-
  - Un punto de ruptura en  $s=-3$  con  $y=2$ , ( $q=3$ ) para  $K=27$ .-
- Para el intervalo de  $p$  entre  $9 < p < \infty$ , se tendrá:
  - Un punto de ruptura en el origen con  $y=1$ , ( $q=2$ ) para  $K=0$ .-
  - Dos puntos de ruptura reales, uno entre  $-3$  y  $-2$  y el otro entre  $-\infty$  y  $-3$ , con  $y=1$ , ( $q=2$ ) los dos para  $K > 0$ .-
  - Por ejemplo, si  $p=10$ , los mismos serán:
    - $s_1=0$ , para  $K=0$ ;  $s_2=-2.5$ , para  $K=31.25$  y  $s_3=-4$ , para  $K=32$ .-

### Ejemplo 35:

Construir el L.G.R. para  $p=10$ , y verificar lo dicho anteriormente. La función de transferencia del lazo será:

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+10)}; \text{ aplicando las reglas de construcción el lugar se muestra en la figura 44.}$$

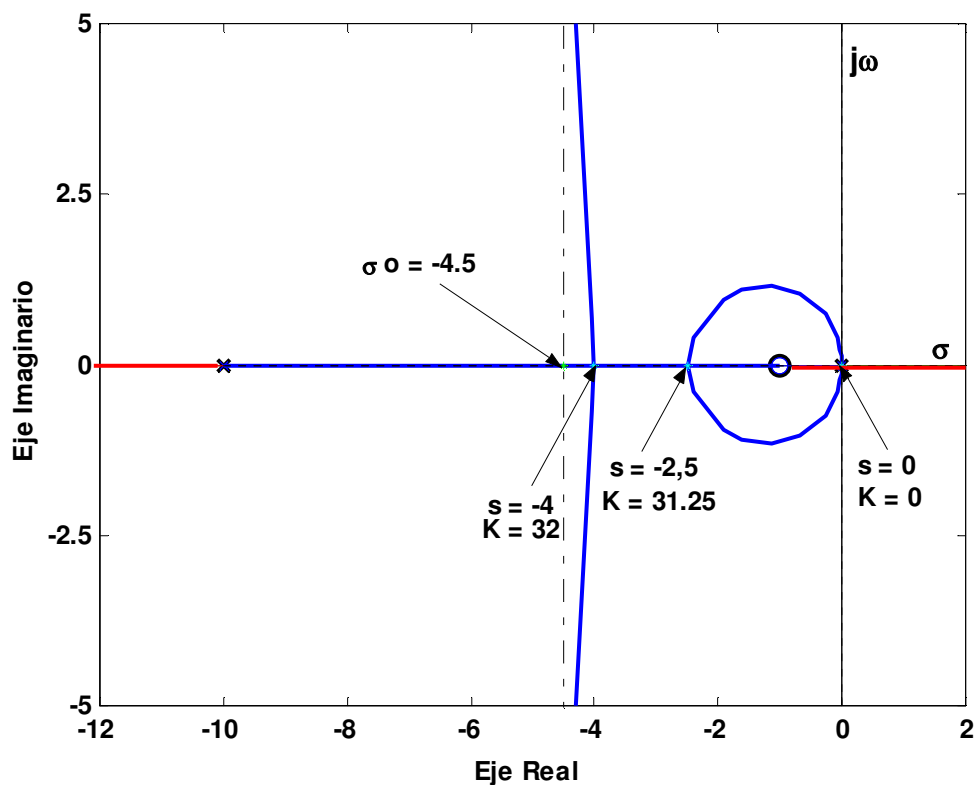


Figura 44

Para las propiedades se puede usar la opción, Rule info del menú principal de rplot del Csad/Matlab, los resultados son los siguientes:

RLPLOT > r

K=inf point: -1 + 0i

K=0 point: 0 + 0i

$K=0$  point:  $0 + 0i$   
 $K=0$  point:  $-10 + 0i$   
 $K>0$  asymptote angles:  $90\ 270$   
 $K<0$  asymptote angles:  $0\ 180$   
 Asymptote intersection:  $-4.5$   
 Press any key to continue...  
 $K>0$  real axis locus:  $(0\ \text{to}\ 0), (-1\ \text{to}\ -10)$   
 Only trivial angles of departure/arrival exist.  
 For  $|K| = 0$  a Breakaway point appears at:  $0 + 0i$   
 For  $|K| = 32$  a Breakaway point appears at:  $-4 + 0i$   
 For  $|K| = 31.25$  a Breakaway point appears at:  $-2.5 + 0i$   
 Press any key to continue...

### Lugar de las Raíces Cuando el Parámetro Variable es Distinto de K

Hasta ahora se han estudiado los sistemas donde la ecuación característica es de la forma:

$$1 + L(s) = 1 + K L_1(s) = 0$$

El problema que se verá a continuación es como estudiar el caso en que la ganancia del lazo  $K$  está definida y en  $L_1(s)$  hay un parámetro que puede variar de cero a infinito, o en algún rango preestablecido.

Es decir se estudiara el caso en que la ecuación característica se puede escribir de la manera siguiente:

$$1 + K L_1(s, \alpha) = 0$$

Donde  $\alpha$  es el parámetro variable. Ordenando la ecuación característica de manera de obtener:

$$1 + \alpha L_{1equiv}(s, K) = 0$$

Donde  $L_{1equiv}(s, K)$  es una función de transferencia equivalente con un  $K$  dado, (fijo). Naturalmente en  $L_{equiv}(s, K) = \alpha L_{1equiv}(s, K)$  se podrán usar todas las reglas ya vistas para la construcción del lugar.

### Ejemplo 36:

La función de transferencia del lazo de un sistema es la siguiente:

$$L(s) = \frac{K(s+1)}{s(s^3 + 2s^2 + \alpha s + 1)},$$

Graficar el L.R. con  $\alpha$  como parámetro variable para  $K = 1$

Ordenando la ecuación característica como se comentó:

$$[s^4 + 2s^3 + 2s + 1] + [\alpha s^2] = 0$$

$$1 + \frac{\alpha s^2}{(s^4 + 2s^3 + 2s + 1)} = 0 \Rightarrow 1 + \alpha L_{1equiv}(s, 1) = 0 \Rightarrow 1 + L_{equiv}(s) = 0$$

$$L_{equiv}(s) = \frac{\alpha s^2}{(s^4 + 2s^3 + 2s + 1)} \cong \frac{\alpha s^2}{(s^2 - 0.73s + 1)(s + 0.435)(s + 2.296)}$$

Función a la se pueden aplicar todas las reglas ya vistas.

Usando rplot se obtiene:

RLPLOT > r

K=inf point: 0 + 0i

K=inf point: 0 + 0i

K=0 point: -2.297 + 0i

K=0 point: 0.366 + 0.9306i

K=0 point: 0.366 - 0.9306i

K=0 point: -0.4354 + 0i

K>0 asymptote angles: 90 270

K<0 asymptote angles: 0 180

Asymptote intersection: -1

Press any key to continue...

K>0 real axis locus: (0 to 0), (-0.435 to -2.3)

K>0 Departure angle = 158.5 degrees at Pole: 0.366 + 0.9306i

For |K| = 6 a Breakaway point appears at: 1 + 0i

For |K| = 3 a Breakaway point appears at: -0.5 + 0.866i

For |K| = 3 a Breakaway point appears at: -0.5 - 0.866i

For |K| = 2 a Breakaway point appears at: -1 + 0i

Press any key to continue...

El lugar es el mostrado en la figura 45.

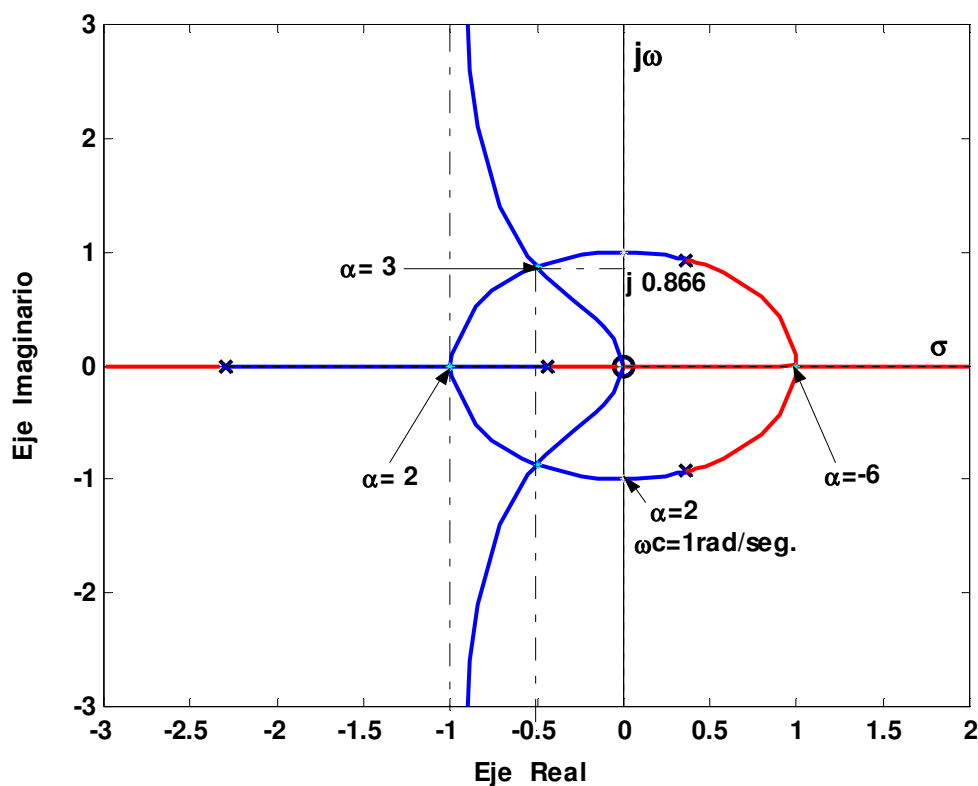


Figura 45

Como se puede apreciar en este caso hay un punto de ruptura complejo conjugado en  $s = -0.5 + j0.866$  y  $s = -0.5 - j0.866$ , para  $\alpha = 3$  .-

### Ejemplo 37:

Un sistema tiene el diagrama de bloques de la figura 46.

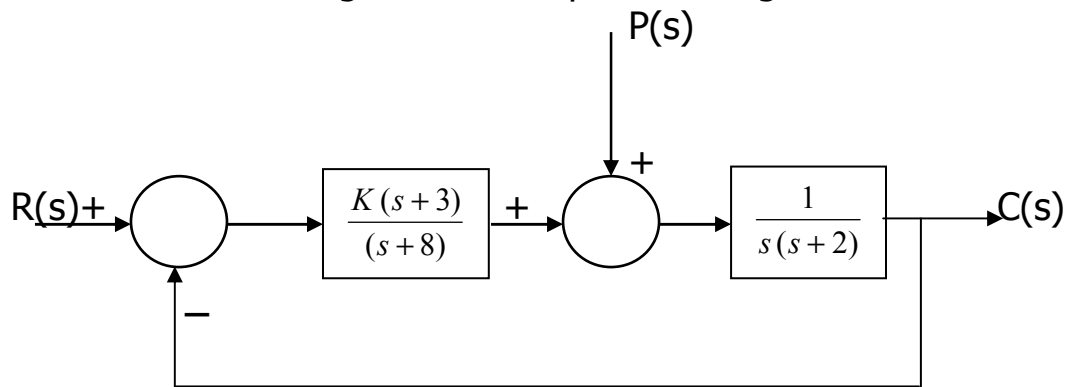


Figura 46

Construir el lugar de las raíces, con K como parámetro variable. Si se sabe que un polo está en  $\lambda_3 = -6$ , determinar los otros dos y el valor de la ganancia K correspondiente. Además, la ganancia y los ceros del sistema trabajando como seguidor y regulador.

Aplicando las reglas ya vistas el lugar resulta el mostrado en la figura 47.

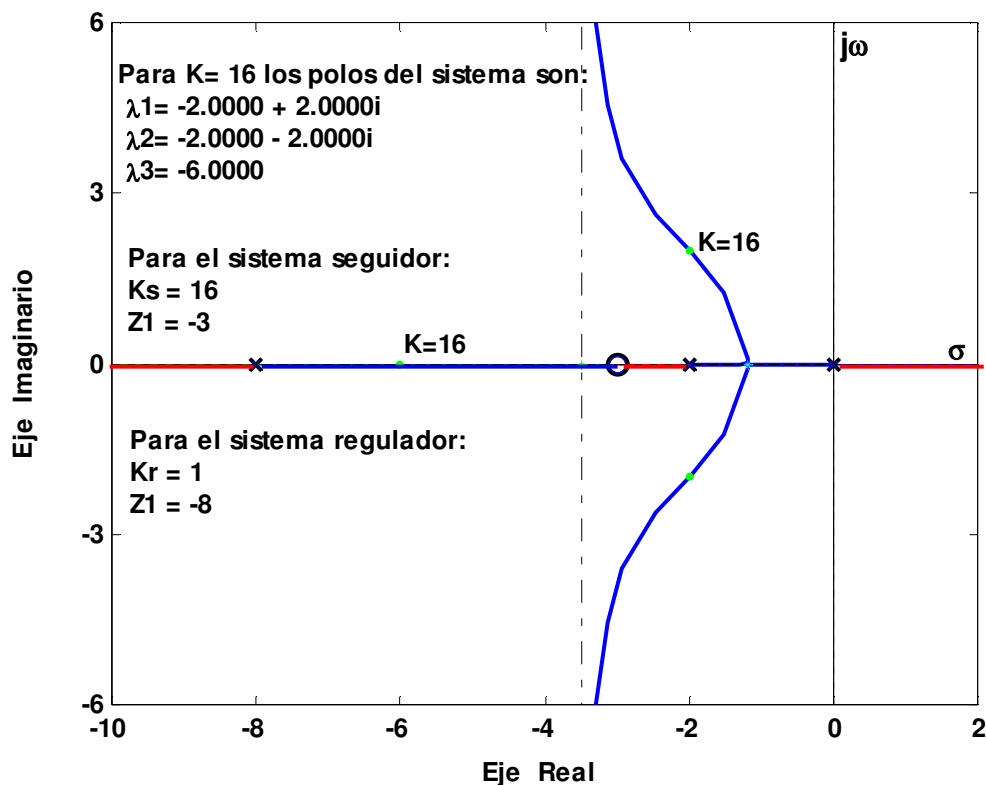


Figura 47

Determinación de K, se puede aplicar el requerimiento de magnitud:

$$K \Big|_{\lambda_3} = \frac{2 \times 4 \times 6}{3} = 16 \quad \Rightarrow \quad K = 16$$

Determinación del par complejo:

Se sabe que:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a_{n-1} \Rightarrow 2\sigma + \lambda_3 = -10 \Rightarrow \sigma = -2$$

$$\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = -a_0 \Rightarrow (\omega_d^2 + \sigma^2) \lambda_3 = -3K \Rightarrow (\omega_d^2 + \sigma^2) = 8$$

$$\text{Por lo tanto: } \omega_d = \sqrt{8 - (-2)^2} = 2 \quad \omega_d = 2$$

En consecuencia el par complejo será:  $\lambda_{1-2} = -2 \pm j2$

La ganancia del sistema seguidor es la ganancia de  $L(s)$ , por ende  $K_s = 16$ .  
Y el cero es el cero de  $G_c(s)$ , o sea  $Z = -3$ .

La ganancia del sistema regulador es la ganancia de  $G_p(s)$ , por ende  $K_r = 1$   
Y el cero es el polo de  $G_c(s)$ ,  $Z = -8$ .

### Ejemplo 38:

En el ejemplo anterior para  $K = 16$ , se supondrá que el polo en  $-8$  del controlador puede variar en torno a su valor nominal. El análisis es interesante pues permitirá conocer la sensibilidad del sistema respecto a este parámetro. Por lo tanto se tendrá:

$$L(s) = \frac{16(s+3)}{s(s+2)(s+\beta)} \quad \text{Dónde: } \beta = \beta_0 + \Delta\beta \quad \text{con } \beta_0 = -8$$

Estudiaremos los efectos sobre el funcionamiento del sistema debido a las variaciones de  $\Delta\beta$  en más y en menos, (+ o -).

La ecuación característica es:

$$s(s+2)(s+8+\Delta\beta) + 16(s+3) = 0$$

$$[s(s+2)(s+8) + 16(s+3)] + [\Delta\beta s(s+2)] = 0$$

En consecuencia la función del lazo equivalente será:

$$Lequiv.(s) = \frac{\Delta\beta s(s+2)}{s^3 + 10s^2 + 32s + 48} = \frac{\Delta\beta s(s+2)}{(s+6)(s^2 + 4s + 8)}$$

Los polos de la  $Lequiv.(s)$  son los mismos que los del sistema cuando  $\Delta\beta = 0$  y  $K=16$ , como se podía deducir.

Aplicando las reglas necesarias se llega al lugar de la figura 48.

Usando rplot se obtiene:

RLPLOT > r

K=inf point: 0 + 0i

K=inf point: -2 + 0i

K=0 point: -6 + 0i

K=0 point: -2 + 2i

K=0 point: -2 - 2i

K>0 asymptote angles: 180

K<0 asymptote angles: 0

Asymptote intersection: 0

Press any key to continue...

K>0 real axis locus: (0 to -2), (-6 to -Inf)

K>0 Departure angle = -71.57 degrees at Pole: -2 + 2i

For  $|K| = 16.6$  a Breakaway point appears at:  $4.491 + 0i$   
 For  $|K| = 23.12$  a Breakaway point appears at:  $-1.252 + 0i$   
 Press any key to continue...

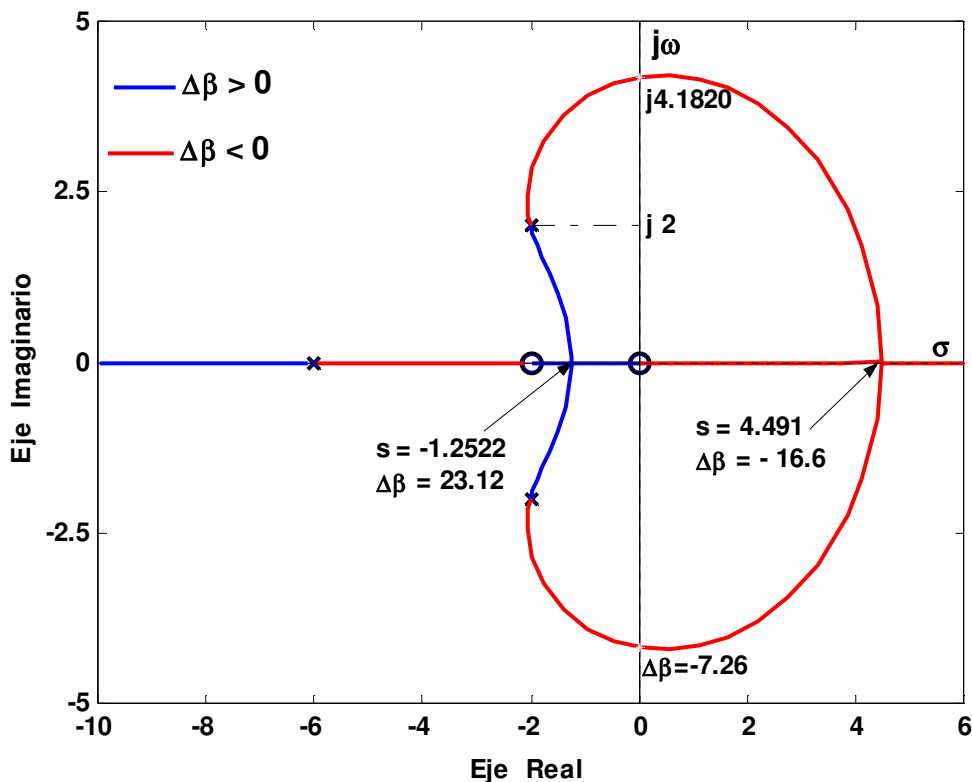


Figura 48

### Lugar Generalizado de las Raíces o Contorno de las Raíces.

Esta denominación se aplica cuando hay más de un parámetro variable. La técnica del lugar de las raíces ya discutida está restringida a un solo parámetro variable. Sin embargo en muchos problemas de control de sistemas, los efectos de la variación de varios parámetros del mismo deben ser estudiados. Por ejemplo, cuando se diseña un controlador, el cual está representado por una función de transferencia  $G_c(s)$  con polos y ceros, por ende será necesario investigar los efectos sobre el funcionamiento del sistema debido a la variación de estos polos y ceros.-

Ya se estudio la construcción de varios lugares de las raíces de ecuaciones con mas de un parámetro variable, (dos), pero asignamos valores diferentes a uno de ellos, variando el otro en todo su rango.

Ahora el problema múltipara metros será investigado por medio de un método mas sistemático, cuando mas de un parámetro varia continuamente desde  $-\infty$  a  $+\infty$ . El lugar obtenido se denominará Contorno de las Raíces.

Se podrán aplicar, al contorno de las raíces, las mismas propiedades o reglas del lugar de las raíces común.-



El principio del contorno de las raíces puede ser ilustrado considerando la ecuación característica:

$$F(s) = 1 + L(s) = 0$$

La cual supondremos que tiene dos parámetros variables,  $K_1$  y  $K_2$ , la misma se podrá escribir de la siguiente manera:

$$F(s) = D(s) + K_2 N_2(s) + K_1 N_1(s) = 0$$

Donde  $K_1$  y  $K_2$  son los parámetros variables, y  $D(s)$ ,  $N_2(s)$  y  $N_1(s)$  polinomios en  $s$ .

Si  $K_1$  es variable y  $K_2$  fijo, el lugar de las raíces se puede obtener de:

$$G_1(s) = \frac{K_1 N_1(s)}{D(s) + K_2 N_2(s)} \quad (1)$$

Si  $K_2$  es variable y  $K_1$  fijo, el lugar de las raíces se puede obtener de:

$$G_2(s) = \frac{K_2 N_2(s)}{D(s) + K_1 N_1(s)} \quad (2)$$

¿Qué relación hay entre  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$ ?

Los polos del lazo de cada una de ellas, puntos de iniciación de los contornos correspondientes, son los polos del "sistema reducido" representado por la otra cuando el parámetro del denominador es cero.

Por ejemplo, los polos del lazo de  $G_2(s)$ , son los ceros de:  $D(s) + K_1 N_1(s) = 0$

Que a su vez son los polos del "sistema reducido", que se obtienen graficando el lugar para  $G_1(s)$  cuando  $K_2 = 0$ .

En otras palabras, los puntos de iniciación de los contornos de  $G_2(s)$ , que serían para  $K_2 = 0$ , variando  $K_1$  en forma continua se obtienen a partir de:

$$G_3(s) = \frac{K_1 N_1(s)}{D(s)} \quad (3)$$

Y los puntos de iniciación de los contornos de  $G_1(s)$ , que serían para  $K_1 = 0$ , variando  $K_2$  en forma continua se obtienen a partir de:

$$G_4(s) = \frac{K_2 N_2(s)}{D(s)} \quad (4)$$

En consecuencia los contornos de las raíces graficados con ( $G_2(s)$  o  $G_1(s)$ ) deberán todos empezar, para ( $K_2 = 0$  o  $K_1 = 0$ ), en los puntos ubicados sobre el lugar obtenido con ( $G_3(s)$  o  $G_4(s)$ ), para diferentes valores de ( $K_1$  o  $K_2$ ).-

El procedimiento puede ser extendido a más de dos parámetros variables en el sistema de control.

### Ejemplo 39:

La función de transferencia del lazo del ejemplo 35 pero con  $K = K_1$  y  $p = K_2$ , los parámetros variables solo en todo el rango positivo, será:

$$L(s) = \frac{K_1 (s+1)}{s^2 (s+K_2)}$$

El polinomio característico  $F(s)$  es:

$$F(s) = s^2(s + K_2) + K_1(s + 1) = 0$$

Por ende:  $F(s) = s^3 + K_2s^2 + K_1(s + 1) = 0$

Dónde:  $D(s) = s^3$  ;  $N_2(s) = s^2$  y  $N_1(s) = (s + 1)$

Las funciones  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$ ,  $G_3(s)$  y  $G_4(s)$  serán en este ejemplo:

$$G_1(s) = \frac{K_1(s+1)}{s^2(s+K_2)} \Rightarrow G_4(s) = \frac{K_2s^2}{s^3} \rightarrow \frac{K_2}{s}$$

La  $G_4(s)$  indica que los puntos de iniciación de los diferentes contornos graficados a partir de  $G_1(s)$ , para  $K_1=0$ , serán 2 fijos en el origen y uno variando por el eje real según sea el valor de  $K_2$ .

$$G_2(s) = \frac{K_2s^2}{s^3 + K_1(s+1)} \Rightarrow G_3(s) = \frac{K_1(s+1)}{s^3}$$

En cambio la  $G_3(s)$  indica que los puntos de iniciación de los diferentes contornos graficados a partir de  $G_2(s)$ , para  $K_2=0$ , son los tres variables según sea el valor de  $K_1$ , como se indica en la figura 49.

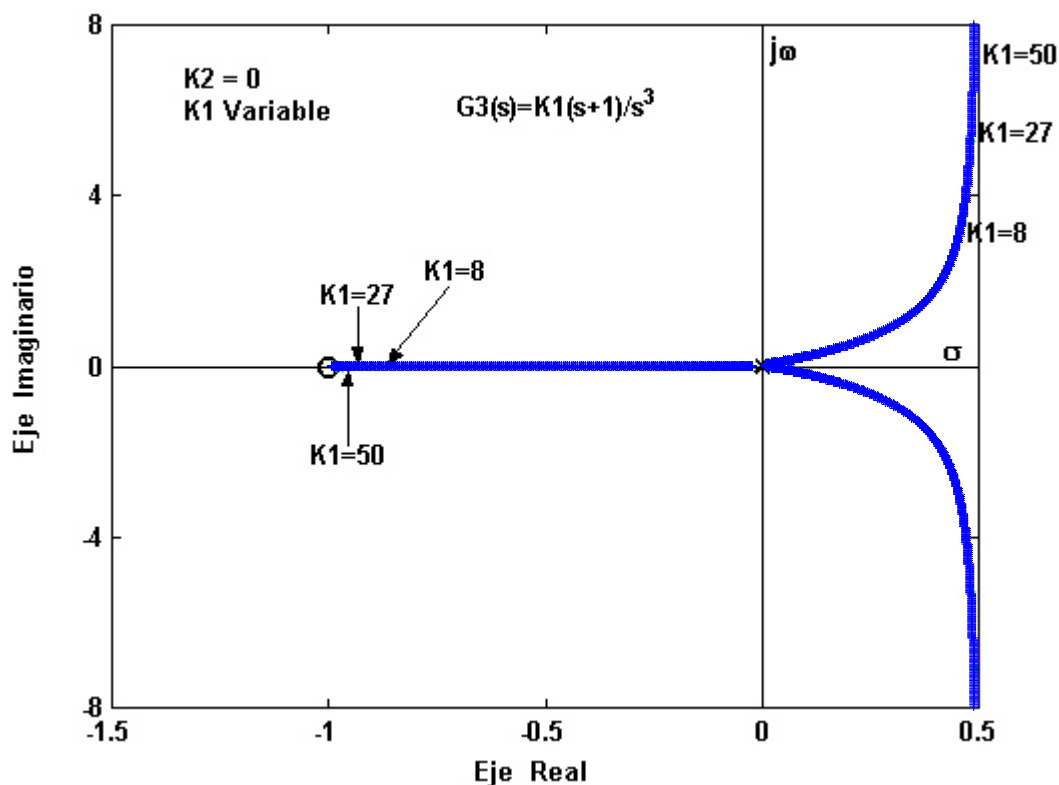


Figura 49

Por lo tanto los contorno de las raíces cuando  $K_2$  varia, con  $K_1 =$  constante pueden ser dibujados desde.

$$G_2(s) = \frac{K_2s^2}{s^3 + K_1s + K_1}$$

Los polos de la misma son los ceros de  $1 + G_2(s)$  que ya fueron graficados en el lugar de la figura 49, por ende todos los contornos de las raíces cuando  $K_2$  varia con  $K_1$  constante partirán del lugar anterior. Todos los

contornos cualquiera sea  $K_1$ , con  $K_2$  variable cortan al eje imaginario para  $K_2 = 1$  y  $\omega_c = \sqrt{K_1}$  rad / seg., pues la ecuación característica es:

$$s^3 + K_2 s^2 + K_1 s + K_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad K_{2\text{Limite}} \times K_1 = K_1 \quad \Rightarrow \quad K_{2\text{Limite}} = 1$$

La ecuación auxiliar es:  $K_{2\text{Limite}} s^2 + K_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + K_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1-2} = \pm j\sqrt{K_1}$

Por ende:  $\omega_c = \sqrt{K_1}$  rad / seg.

Ahora se puede investigar el efecto que tendrá sobre los puntos de ruptura de los contornos graficados en base a  $G_2(s)$ , la variación del parámetro  $K_1$ . ¿Cuánto deberá valer  $K_1$  para que en el contorno correspondiente haya un punto de ruptura de orden dos,  $y=2$ , ( $q=3$ )? Como se sabe:

$$N \frac{d}{ds} G_2(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad (3s^2 + K_1)s^2 - 2s(s^3 + K_1s + K_1) = 0, \text{ operando se llega a:}$$

$$s(s^3 - K_1s - 2K_1) = 0$$

Como era de esperar hay un punto de ruptura fijo de orden uno  $y=1$ , ( $q=2$ ), para  $K_2$  igual a infinito. La ubicación de los otros tres está en función de  $K_1$ . Como se mueven en el plano  $s$  estos puntos se pueden determinar, para  $K_1 > 0$ , de la manera siguiente. El polinomio cuyos ceros son los puntos de ruptura, se puede colocar:

$$s^3 - K_1(s + 2) = 0$$

Por lo tanto el gráfico de los posibles puntos de ruptura de los contornos correspondientes a  $G_2(s)$  en función del valor de  $K_1 > 0$ , se pueden obtener teniendo como base a la función de transferencia siguiente:

$$G'(s) = \frac{(-K_1)(s + 2)}{s^3}$$

El lugar comentado sería el indicado en la figura 50.

Como  $K_1 > 0$ , y  $K = (-K_1)$  se deberá construir el lugar inverso de las raíces. Observando a  $G_2(s)$ , la rama en el semiplano derecho corresponderá a un punto de ruptura en el contorno correspondiente, para  $K_2 < 0$ , por ende no interesa. Por lo tanto los otros dos se mueven en la forma indicada en la figura 50. La parte de las ramas complejas no pueden ser puntos de ruptura pues el sistema debería ser de cuarto orden como mínimo. En consecuencia habrá un valor de  $K_1 = K_1^*$  para el cual el punto de ruptura será de orden 2,  $y=2$ , ( $q=3$ ), y de ese valor en adelante los contornos estudiados tendrán dos puntos de ruptura de orden uno,  $y=1$ , ( $q=2$ ). El valor de  $K_1^*$  se puede determinar así:

$$N \frac{d}{ds} G'(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3s^2(s + 2) - s^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2s^2(s + 3) = 0$$

$s_{1-2} = 0$  es evidente, el otro es:  $s_3 = \sigma^* = -3$

El valor de  $K_1^*$  se puede obtener con el requerimiento de magnitud o reemplazando  $s$  por  $-3$  en la función,  $K_1 = f(s)$ .

$$\text{Como } K_1 = \frac{s^3}{(s + 2)} = \frac{(-3)^3}{-3 + 2} = 27 \quad \Rightarrow \quad K_1^* = 27.-$$

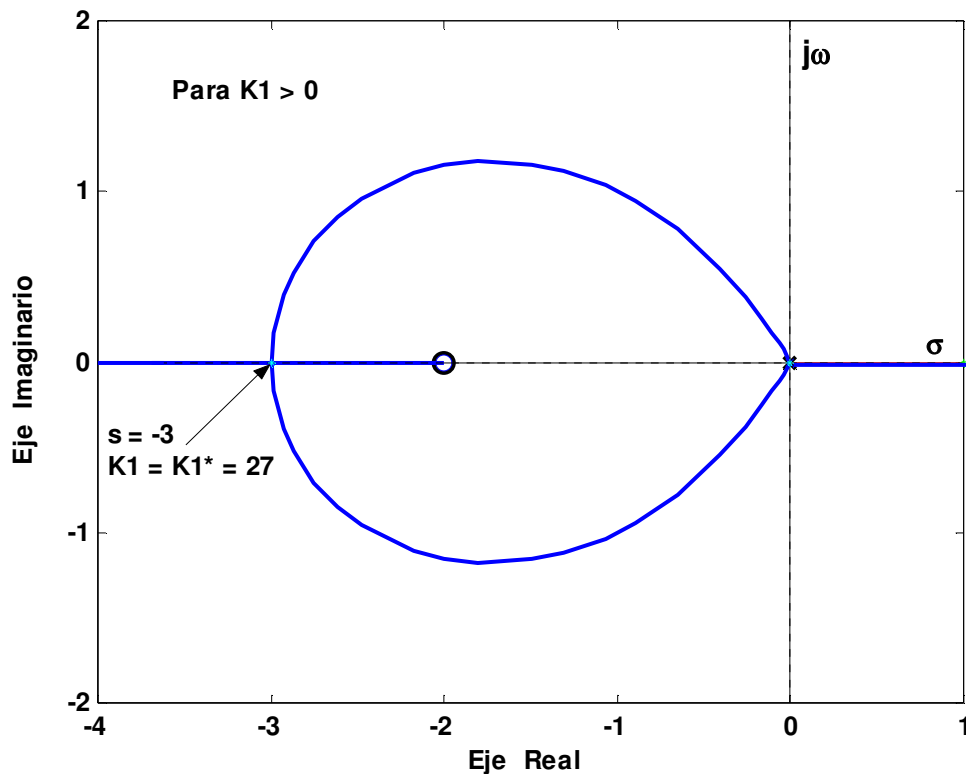


Figura 50

En consecuencia, (resumen):

- Para  $K_1 < 27$ , no hay puntos de ruptura en el contorno bajo estudio.
- Para  $K_1 = K_1^* = 27$  hay un punto de ruptura en  $s = -3$  de orden 2, ( $q=3$ ).
- Para  $K_1 > 27$  hay dos puntos de ruptura de orden uno, ( $q=2$ ), uno se mueve, (según  $K_1$ ), entre  $-3$  y  $-2$  y el otro entre  $-3$  e  $-\infty$ .

Si  $K_1 = 27$ , el punto de ruptura en  $-3$  tendrá el valor de  $K_2$  siguiente:

$$K_2 = \frac{-(s^3 + 27s + 27)}{s^2} = \frac{-(-27 - 81 + 27)}{9} = 9 \Rightarrow K_2^* = 9.-$$

Todo esto se puede apreciar en los contornos para  $K_1 = 10, 27$  y  $50$  en la figura 51.

Si en los contornos de la figura 51 se unen los puntos de igual  $K_2$ , por ejemplo para  $K_2 = 8, 9$  y  $10$ , se tendría 3 contornos de las raíces para esos valores de  $K_2$  con  $K_1$  variando en forma continua. Dichos contornos serían los obtenidos empleando la función de transferencia  $G_1(s)$ .

Esto ya se hizo en el ejemplo de la figura 42, para el cual ahora  $K = K_1$  y  $p = K_2$ . Como se mueven en el plano  $s$  los posibles puntos de ruptura de los contornos se mostraron en la figura 43. Para la misma se demostró que:

$$\sigma^* = -3; K_2^* = 9 \text{ y } K_1^* = 27.-$$

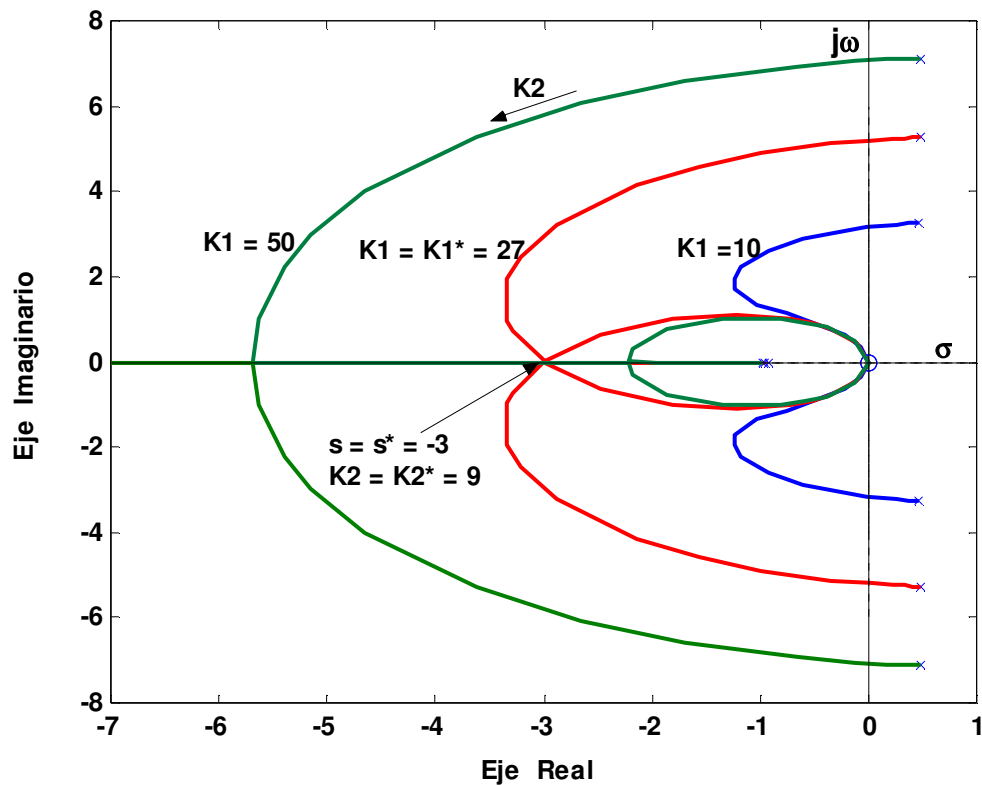


Figura 51

En la figura 52 se han graficado tres contornos basados en la función de transferencia  $G_1(s)$  para tres valores diferentes del parámetro  $K_2$ :  $K_2=8$ ,  $K_2=9$  y  $K_2=10$ , variando  $K_1$  en forma continua.-

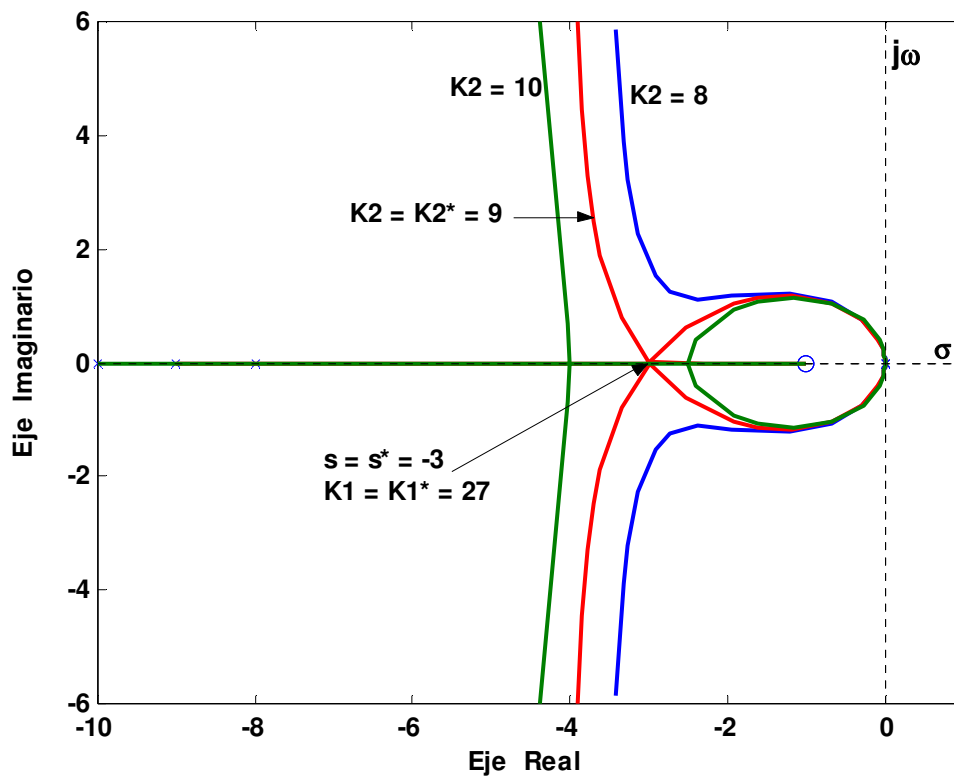


Figura 52

#### Ejemplo 40:

Un sistema de control automático tiene el diagrama de bloques indicado en la figura 53.

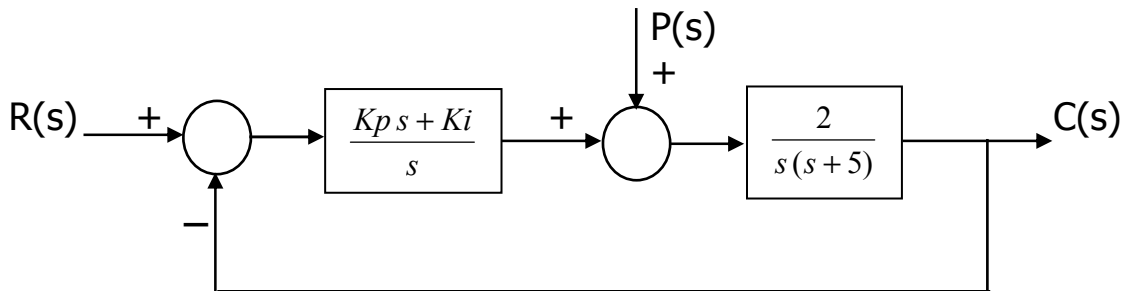


Figura 53

Construir algunos contornos de las raíces al variar los parámetros del controlador  $K_p$  y  $K_i$ .

La función de transferencia del lazo del sistema es:

$$L(s) = \frac{2(K_p s + K_i)}{s^2 (s + 5)}$$

Si  $K_i$  es variable con  $K_p$  fijo:

$$G_1(s) = \frac{2K_i}{s^2 (s + 5) + 2K_p s} \Rightarrow \boxed{G_1(s) = \frac{2K_i}{s(s^2 + 5s + 2K_p)}}$$

Si  $K_p$  es variable con  $K_i$  fijo:

$$G_2(s) = \frac{2K_p s}{s^2 (s + 5) + 2K_i} \Rightarrow \boxed{G_2(s) = \frac{2K_p s}{(s^3 + 5s^2 + 2K_i)}}$$

Los polos de  $G_2(s)$  serán las raíces de  $1+L(s)=0$  cuando  $K_p = 0$ , o sea se pueden graficar de la función de transferencia:

$$\boxed{G_3(s) = \frac{2K_i}{s^2 (s + 5)}}$$

Los polos de  $G_1(s)$  serán las raíces de  $1+L(s)=0$  cuando  $K_i = 0$ , o sea se pueden graficar de la función de transferencia:

$$G_4(s) = \frac{2K_i s}{s^2 (s + 5)}$$

un polo fijo en el origen y los otros dos varían según:

$$\boxed{G_4(s) = \frac{2K_p}{s(s + 5)}}$$

Trazaremos los contornos determinados por  $G_2(s)$ . Los puntos de partida de los mismos están indicados en el lugar de la figura 54, los mismos son determinados por la función de transferencia  $G_3(s)$ .

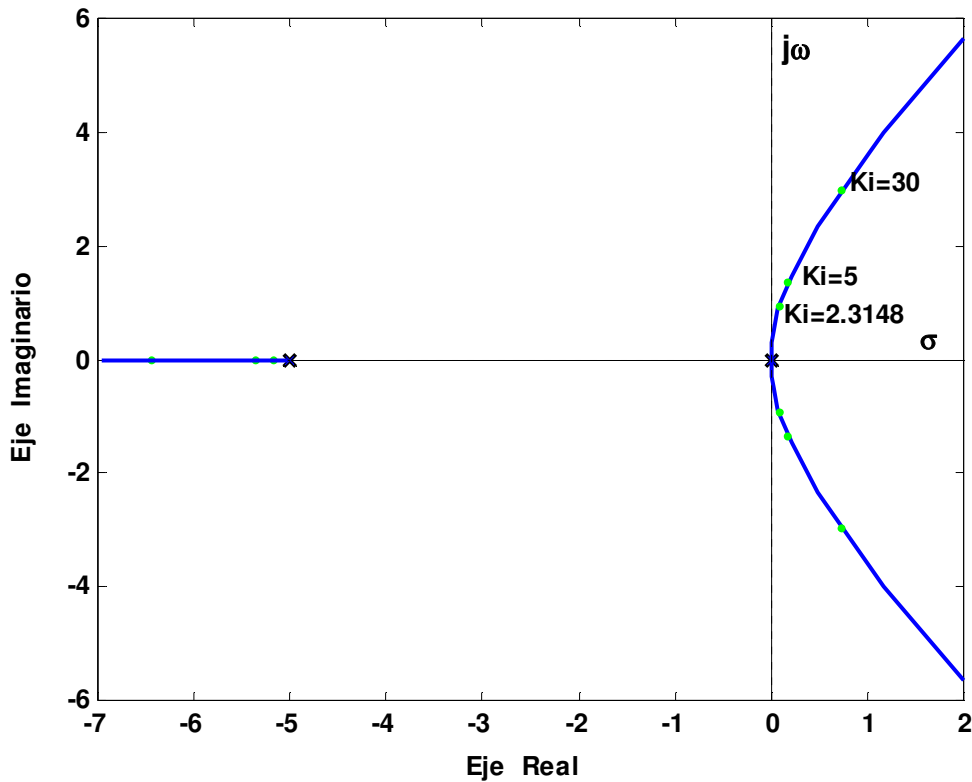


Figura 54

Para los contornos, dados por  $G_2(s)$ , se tendrá:

$$\sigma_0 = \frac{-5}{2} = -2.5$$

La intersección de los mismos con el eje imaginario será:

$$\text{La ecuación característica es: } s^3 + 5s^2 + 2Kps + 2Ki = 0$$

$$\text{Por lo tanto: } 5 \times 2Kp_{\text{Limite}} = 2Ki \Rightarrow Kp_{\text{Limite}} = 0.20 Ki$$

La ecuación auxiliar es:

$$5s^2 + 2Ki = 0 \Rightarrow s_{1-2} = \pm j\sqrt{0.4Ki} \Rightarrow \omega_c = \sqrt{0.4Ki} \text{ rad / seg.}$$

Los puntos de ruptura determinados por  $G_2(s)$  en función de  $Ki$  serán:

$$N \frac{d}{ds} G_2(s) = 0 \Rightarrow (3s^2 + 10)s - (s^3 + 5s^2 + 2Ki) = 0$$

Ordenando el polinomio, la función que nos permitirá graficar el movimiento de los posibles puntos de ruptura será la siguiente:

$$G'(s) = \frac{(-Ki)}{s^2(s + 2.5)}; \text{ Para } Ki > 0 \text{ por en será el lugar inverso.}$$

El lugar se indica en la figura 55.

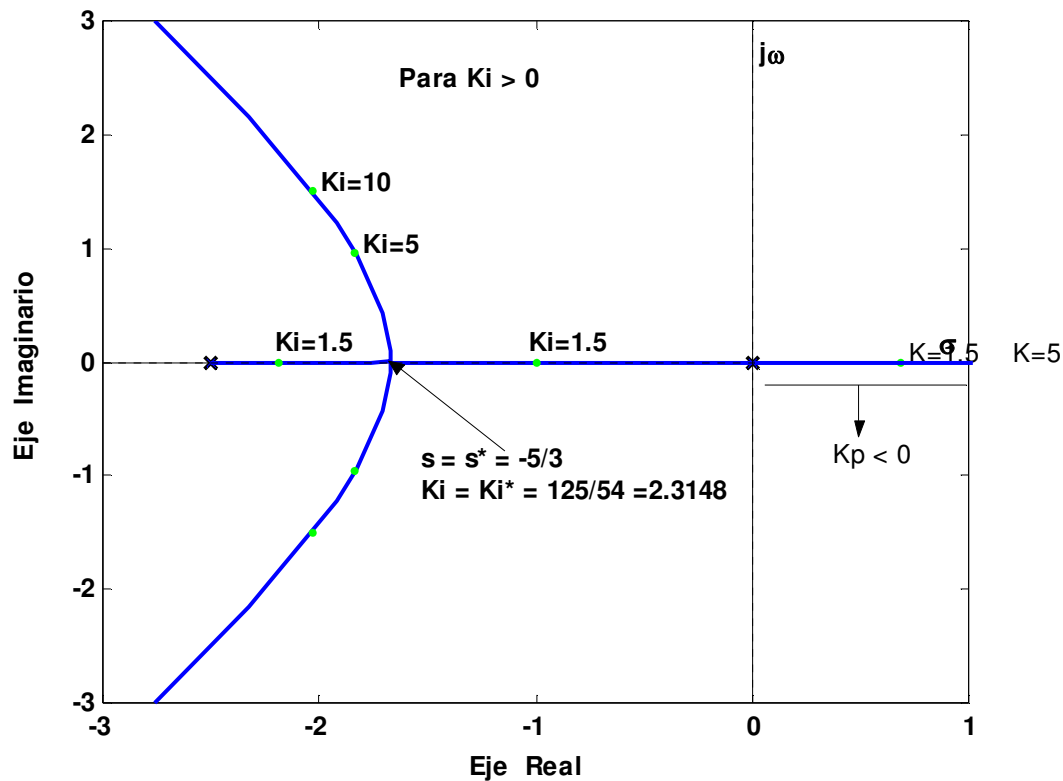


Figura 55

Como se puede ver el punto de ruptura que esta en el semiplano derecho evidentemente corresponderá cuando  $K_p < 0$ , (ver  $G_2(s)$ ). Además no pueden haber puntos de ruptura complejos, para  $K_i > K_i^*$ , pues el sistema es de tercer orden solamente. Por consiguiente hay un punto de ruptura en  $\sigma^*$ , para  $K_i = K_i^*$ , de orden 2,  $y=2$ , ( $q=3$ ), o hay dos puntos de ruptura de orden uno,  $y=1$ , ( $q=2$ ), para  $K_i < K_i^*$ .

Determinemos los valores de  $\sigma^*$  y  $K_i^*$ .

$$1 + G'(s) = 1 + \frac{-K_i}{s^2(s+2.5)} = 0 \Rightarrow K_i = s^3 + 2.5s^2$$

$$\frac{dK_i}{ds} = 0 \Rightarrow 3s^2 + 5s = 0 \Rightarrow 3s(s + 5/3) = 0 \Rightarrow \sigma^* = -5/3$$

$$\text{Por ende: } K_i^* = (-5/3)^3 + 2.5(-5/3)^2 = 125/24 \approx 2.3148.$$

El valor de  $K_p$  resultante en el contorno, dado por  $G_2(s)$ , será:

$$K_p^* = \frac{-(s^3 + 5s^2 + 2K_i^*)}{2s} = \frac{-(-125/27 + 125/9 + 125/27)}{-10/3} = 25/6 \Rightarrow K_p^* = 25/6 \approx 4.166.$$

Los contornos para tres valores de  $K_i$ , ( $K_i=2$ ; 2.3148 y 3), variando  $K_p$  se indican en la figura 56.

Si en los contornos de la figura 56 se unen los puntos de igual  $K_p$ , por ejemplo para  $K_p=4$ , 25/6 y 5, se tendría 3 contornos de las raíces para esos valores de  $K_p$  con  $K_i$  variando en forma continua. Dichos contornos serian los obtenidos empleando la función de transferencia  $G_1(s)$ .



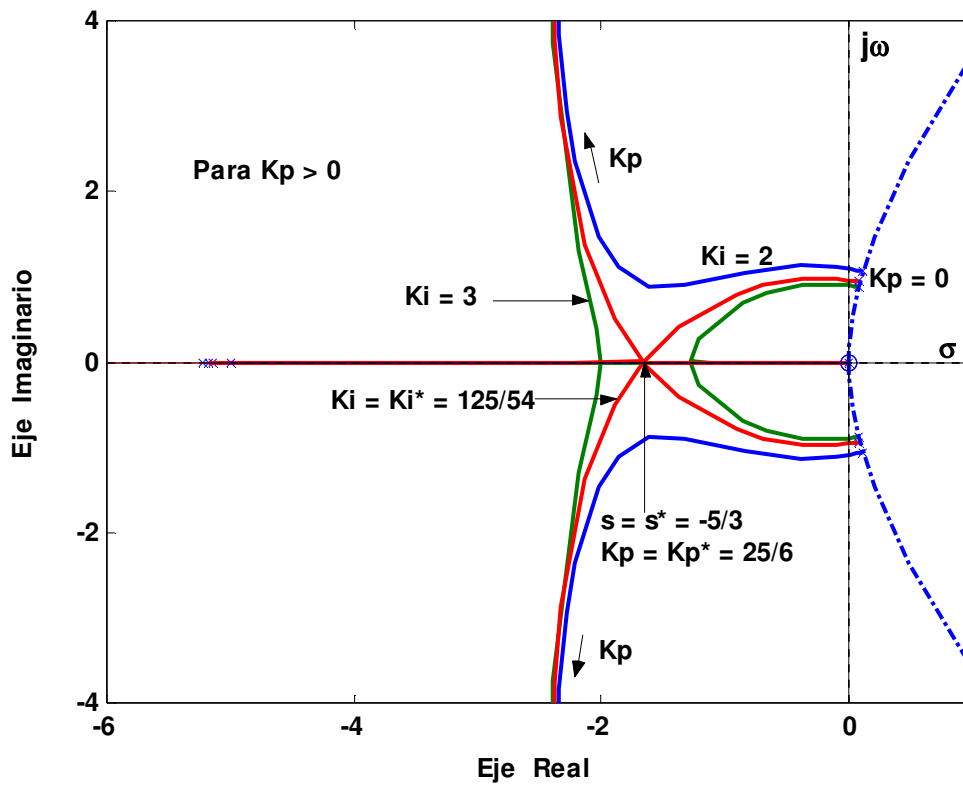


Figura 56

Los puntos de iniciación de estos contornos, a parte del que está en el origen, están determinados por la función  $G_4(s)$  e indicados en la figura 57.

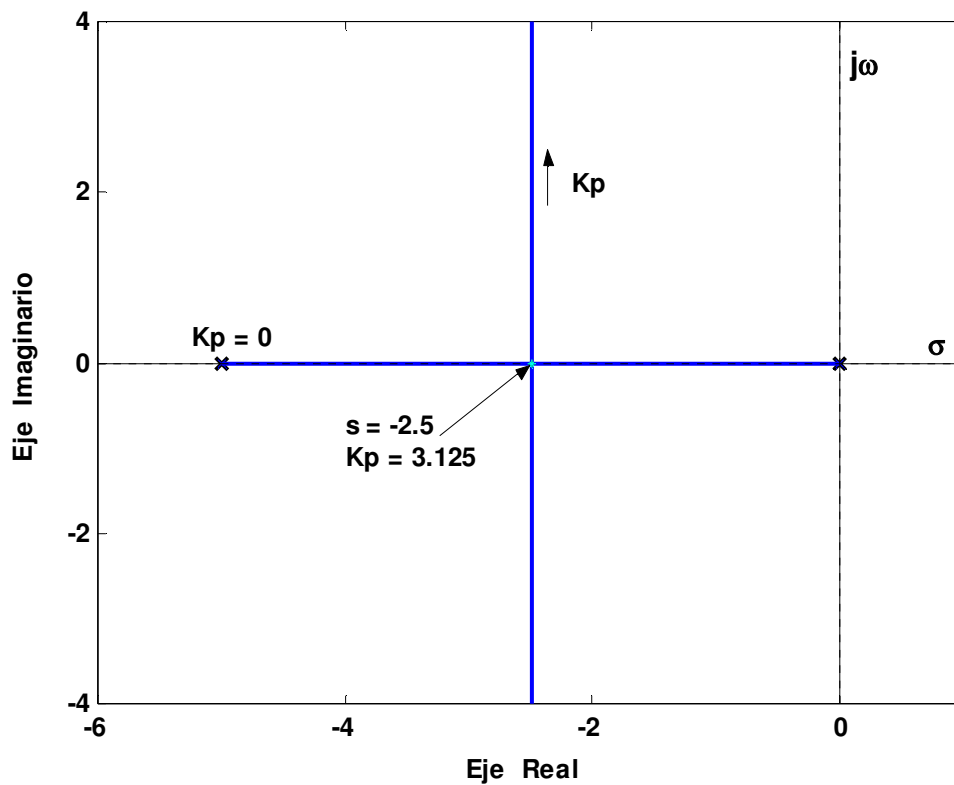


Figura 57

Para los contornos determinados por  $G_1(s)$  se tendrá:

$$\sigma_0 = -\frac{5}{3}$$

La intersección de los mismos con el eje imaginario será:

La ecuación característica es:  $s^3 + 5s^2 + 2Kps + 2Ki = 0$

Por lo tanto:  $5 \times 2Kp = 2Ki_{\text{Limite}} \Rightarrow Ki_{\text{Limite}} = 5Kp$

La ecuación auxiliar es:

$$5s^2 + 2Ki_{\text{Limite}} = 0 \Rightarrow s_{1-2} = \pm j\sqrt{0.4Ki_{\text{Limite}}} \Rightarrow \omega_c = \sqrt{0.4Ki_{\text{Limite}}} \text{ rad / seg.}$$

Los puntos de ruptura determinados por  $G_1(s)$  en función de  $Kp$  serán:

$$N \frac{d}{ds} G_1(s) = 0 \Rightarrow (3s^2 + 10s + 2Kp) = 0$$

Ordenando el polinomio, la función que nos permitirá graficar el movimiento de los posibles puntos de ruptura será la siguiente:

$$G'(s) = \frac{(2/3)Kp}{s(s+10/3)}; \text{ Para } Kp > 0 \text{ por en será el lugar directo.}$$

El lugar se indica en la figura 58.

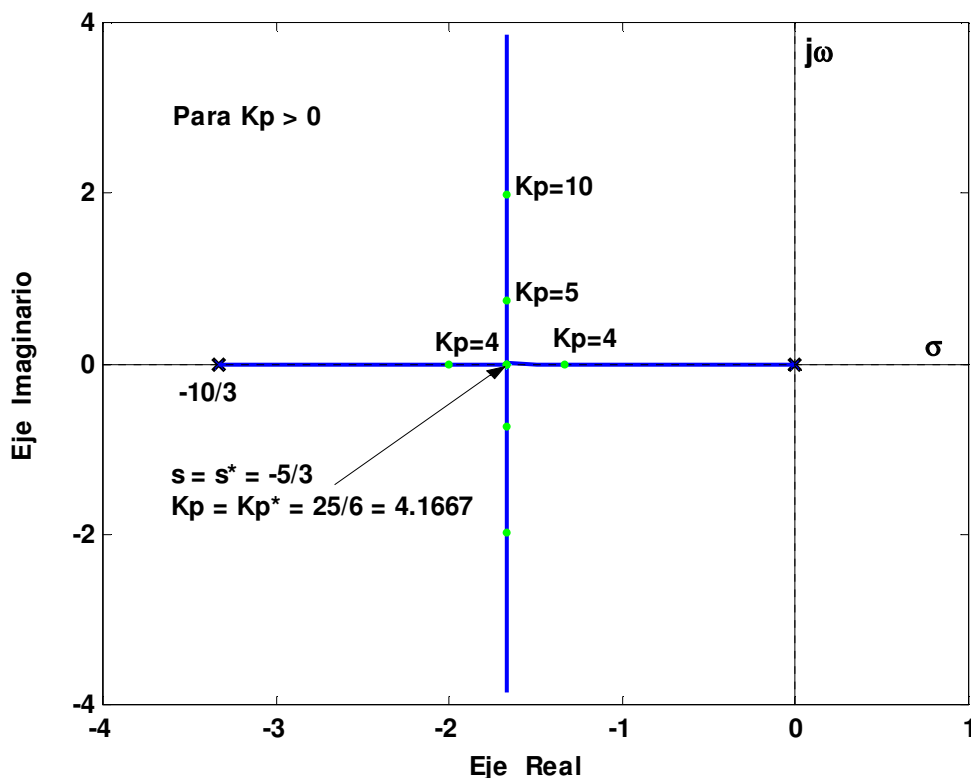


Figura 58

No pueden haber puntos de ruptura complejos, para  $Kp > Kp^*$ , pues el sistema es de tercer orden solamente. Por consiguiente: o hay un punto de ruptura en  $\sigma^*$ , para  $Kp = Kp^*$ , de orden 2,  $y=2$ , ( $q=3$ ), o hay dos puntos de ruptura de orden uno,  $y=1$ , ( $q=2$ ), para  $Kp < Kp^*$ .

Determinemos los valores de  $\sigma^*$  y  $Kp^*$ .

$$1 + G'(s) = 1 + \frac{(2/3)K_p}{s(s+10/3)} = 0 \Rightarrow K_p = -1.5(s^2 + (10/3)s) = -1.5s^2 - 5s$$

$$\frac{dK_p}{ds} = 0 \Rightarrow -(3s+5) = 0 \Rightarrow 3(s+5/3) = 0 \Rightarrow \sigma^* = -5/3$$

$$\text{Por ende: } K_p^* = -1.5 \times (25/9) - 5 \times (-5/3) = 37.5/9 \Rightarrow K_p^* = 25/6. -$$

El valor de  $K_i$  resultante en el contorno determinado por  $G_1(s)$ , será:

$$K_i^* = \frac{-(s^3 + 5s^2 + 2K_p^*s)}{2} = \frac{-(-125/27 + 125/9 - 250/18)}{2} = 125/54$$

$$\Rightarrow K_p^* = 125/54 \cong 2.3148$$

Los contornos para tres valores de  $K_i$ , variando  $K_p$  se indican en la figura 59.

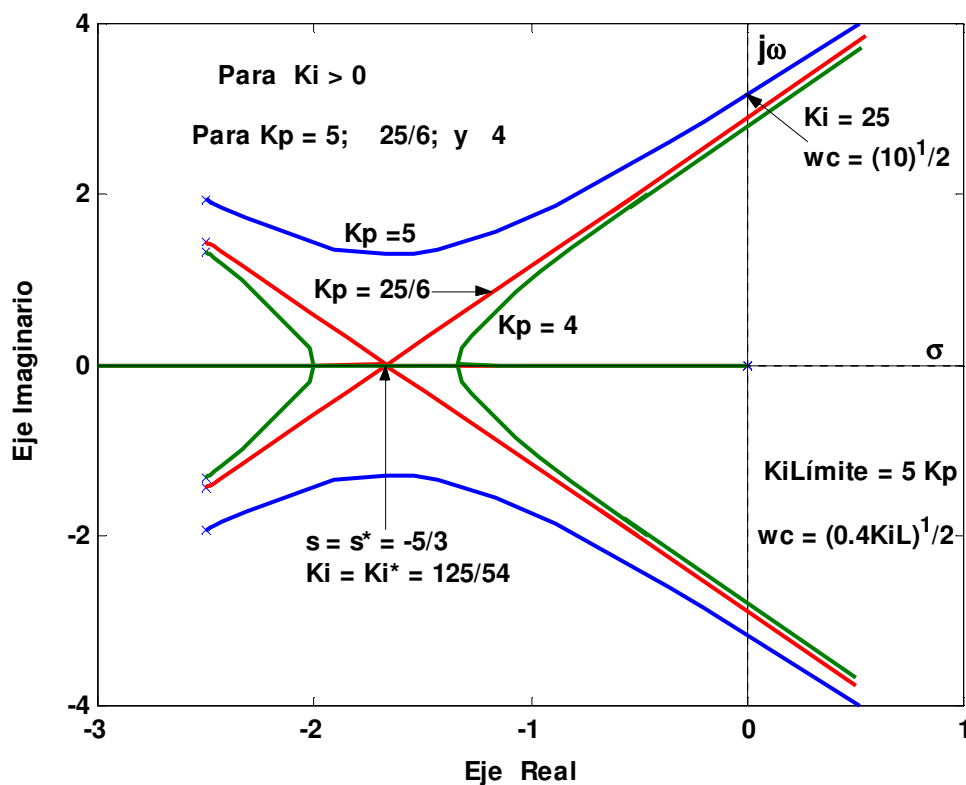


Figura 59

#### Ejemplo 41:

El sistema de control con realimentación unitaria de una planta típica de segundo orden tiene un controlador serie que puede ser de adelanto o de atraso de fase según sea el valor del parámetro  $a$ , se muestra en la figura 60. Si se pide que  $K_v = 10 \text{ seg}^{-1}$ . Trazar los diferentes contornos de las raíces con los parámetros variables  $a$  y  $T$ .

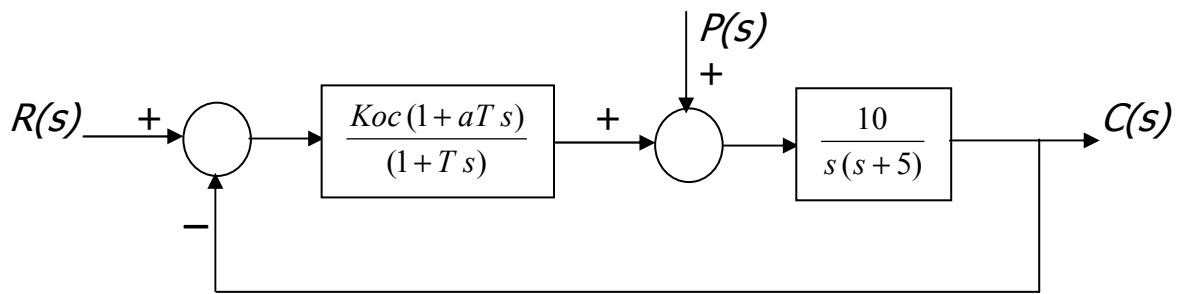


Figura 60

Como se sabe todos los parámetros, ( $K_{oc}$ ,  $a$  y  $T$ ), son positivos.

$K_{oc}$  deberá ser:  $K_v = 10K_{oc}/5 = 10$ , por ende,  $K_{oc} = 5 \text{ seg}^{-1}$ .

En consecuencia la función de transferencia del lazo será:

$$L(s) = \frac{50(1+aTs)}{s(s+5)(1+Ts)}$$

Con el control proporcional solo,  $G_c(s) = K_{oc} = 5$ , el sistema tendrá el régimen permanente solicitado pero con un muy mal transitorio al escalón, pues la ecuación característica sería:  $s^2 + 5s + 50 = 0$  lo cual daría un coeficiente de amortiguamiento relativo de  $\delta = 0.354$ ,  $M_p(\%) = 30.45\%$ , *ect.* –

Por ende se intentara estudiar el efecto sobre los polos del sistema al variar los parámetros  $a$  y  $T$  del controlador a emplear.

Con  $a = \text{Cte.}$  y  $T$  variando en forma continua:

La  $G_1(s)$  sería la siguiente:

$$G_1(s) = \frac{Ts(s^2 + 5s + 50a)}{s^2 + 5s + 50}$$

Como es una función impropia para trabajar con la computadora se usara la inversa o sea:

$$\{G_1(s)\}^{-1} = \frac{(1/T)(s^2 + 5s + 50)}{s(s^2 + 50s + 50a)}$$

Con  $T = \text{Cte.}$  y " $a$ " variando en forma continua:

La  $G_2(s)$  sería la siguiente:

$$G_2(s) = \frac{(50T)as}{s(s+5)(1+Ts)+50} \Rightarrow G_2(s) = \frac{50as}{\{s^3 + ((1+5T)/T)s^2 + (5/T)s + (50/T)\}}$$

Los polos de  $G_2(s)$ , se obtienen de  $G_1(s)$  para  $a = 0$ , por lo tanto:

$$G_3(s) = \frac{Ts^2(s+5)}{(s^2 + 5s + 50)} \Rightarrow \{G_3(s)\}^{-1} = \frac{(1/T)(s^2 + 5s + 50)}{s^2(s+5)}$$

Los polos de  $G_1(s)$ , se obtienen de  $G_2(s)$  para  $T = 0$ , por lo tanto serán dos polos fijo en las raíces de:  $(s^2 + 5s + 50 = 0)$ , o sea los mismos puntos de los polos del sistema solo con el control proporcional solamente, o sea en

$$s_{1-2} = -2.5 \pm j\sqrt{43.75}$$

Trazaremos los contornos determinados por  $G_2(s)$ . Los puntos de partida de los mismos, solo para  $T > 0$ , están indicados en el lugar de la figura 61, los mismos son determinados por la función de transferencia  $G_3(s)$  o por la  $[G_3(s)]^{-1}$  si se usa la computadora como se hizo:

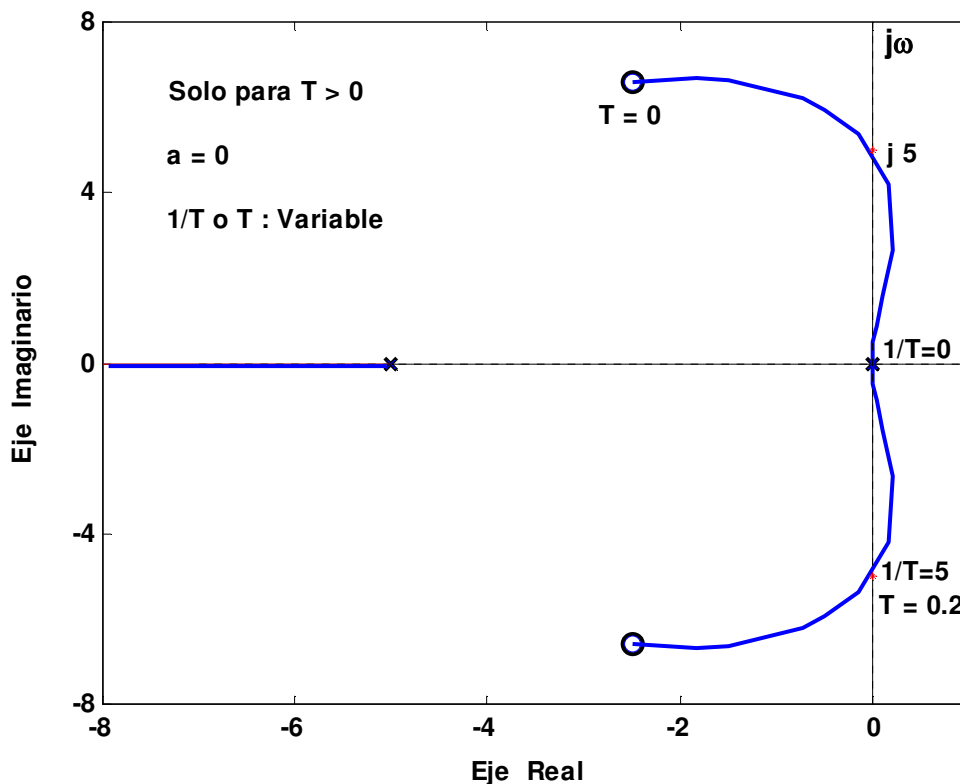


Figura 61

Para  $T > 0$ , en el grafico de la figura 61 no hay puntos de ruptura salvo el que esta en el origen para  $1/T = 0$ , o  $T = \infty$ . Como  $G_2(s)$  tiene un cero en el origen, el baricentro para los diferentes contornos será una función de  $T$ :

$$\sigma_0 = \frac{\sum P_0 - \sum Z_0}{2} = \frac{\sum P_0}{2} = \frac{-(1+5T)/T}{2} \Rightarrow \sigma_0 = -(2.5 + 1/2T)$$

A medida que aumenta  $T$ , el baricentro se desplaza hacia la derecha, desde  $\sigma_0 = -\infty$ , para  $T = 0$ , a  $\sigma_0 = -2.5$  para  $T \rightarrow \infty$ .

Los puntos de ruptura de los contornos construidos a partir de  $G_2(s)$ , serán función de  $T$ . Se pueden graficar su movimiento con:

$$N \frac{d}{ds} G_2(s) = 0 \Rightarrow 2Ts^3 + (1+5T)s^2 - 50 = 0 \Rightarrow (s^2 - 50) + 2Ts^2(s + 2.5) = 0$$

Por ende:  $G'(s) = \frac{2Ts^2(s+2.5)}{(s+\sqrt{50})(s-\sqrt{50})}$

$$\{G'(s)\}^{-1} = \frac{(1/2T)(s+\sqrt{50})(s-\sqrt{50})}{s^2(s+2.5)}$$

El movimiento de los posibles puntos de ruptura, solo para  $T > 0$ , se indican en la figura 62.

El que se mueve en el semiplano derecho es para  $a < 0$ , no interesa.

Como se puede ver los puntos de ruptura para  $T > 0$ , están entre,  $-\infty$  y  $-\sqrt{50}$  uno y entre  $-2.5$  y  $0$  el otro.

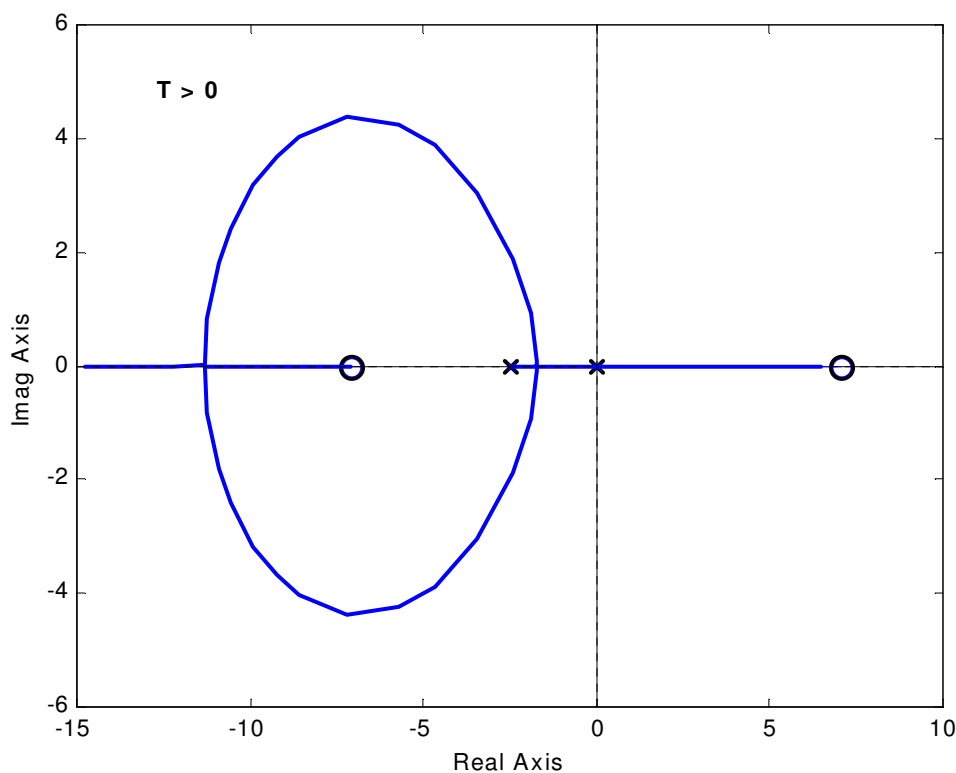


Figura 62

Los puntos de ruptura del lugar de la figura 62, se determinan así:

$$N \frac{d}{ds} \{G'(s)\}^{-1} = 0 \Rightarrow s(s^3 - 150s - 250) = 0$$

$s_1 = 0$ , para  $T = \infty$

$s_2 = +13.01$  para  $T < 0$  y también se puede ver para  $a < 0$ , no interesa.-

$s_3 = -1.699$  para  $T > 0$  y  $a < 1$  se puede determinar, (atraso de fase).-

$s_4 = -11.31$  para  $T < 0$  y  $a > 1$  se puede determinar, (adelanto de fase).-

Los dos últimos son los que nos interesan el valor de  $T$  de los mismos será:

$$T = \frac{-(s^2 - 50)}{2s^3 + 5s^2}, \text{ reemplazando } s \text{ por } s_3 \text{ y } s_4, \text{ resulta:}$$

para  $s_3$  el valor de  $T$  es:  $T = 10.188$

para  $s_4$  el valor de  $T$  es:  $T = 0.03456$

Por lo tanto un resumen seria el siguiente:

Para el rango:  $0 < T < 0.03456$ , hay dos puntos de ruptura con  $y=1$ .

Para:  $T = 0.03456$ , hay un punto de ruptura con  $y=2$ , ( $q=3$ ).

Para el rango:  $0.03456 < T < 10.188$ , no hay puntos de ruptura.

Para el rango:  $10.188 < T < \infty$ , hay dos puntos de ruptura con  $y=1$ .

El valor de "a" en los contornos para  $T = 0.03456$  y  $T = 10.188$  será:

Reemplazando  $s$  por  $s_3$  y  $s_4$  en: 
$$a = \frac{-\{s^3 + ((1+5T)/T)s^2 + (5/T)s + (50/T)\}}{50s}$$

Los valores son:  $a = 0.1635$ , (atraso) y  $a = 4.78$ , (adelanto), respectivamente.

Todos los contornos para  $a = 1$ , deberán pasar por los polos del sistema con el controlador proporcional solamente, o sea por:  $s = -2.5 \pm j 6.614$ .

Las figuras 63 y 64 muestran los contornos para 4 valores de  $T$  con  $a > 1$  y  $a < 1$  respectivamente.

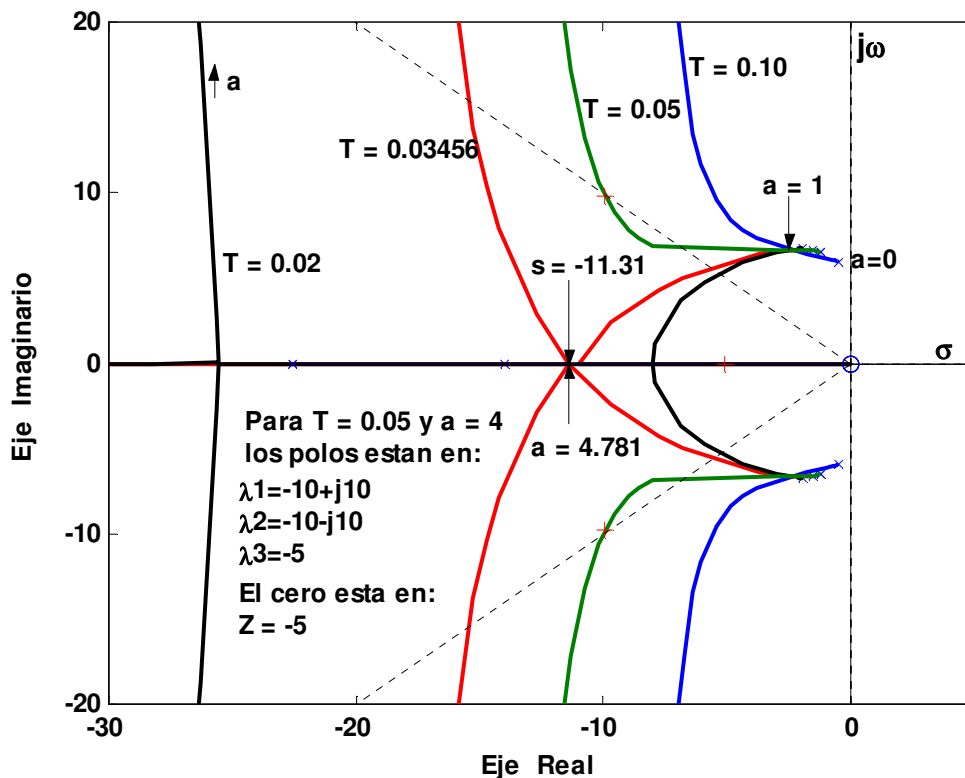


Figura 63

Para  $T$  bajas, (décimas o centésimas), vemos que el diseño puede ser efectivo solo para  $a > 1$ , adelanto de fase, pues los polos se desplazan hacia la izquierda, en el plano  $s$ , haciendo la respuesta al escalón mas veloz y con un  $M_p(\%)$  adecuado.-

Para  $T$  altas, (unidades, decenas o centenas), puede ser útil si  $a < 1$ , atraso de fase.

Las figuras 63 y 64 se han construido con rlocus(n,d) de Matlab.

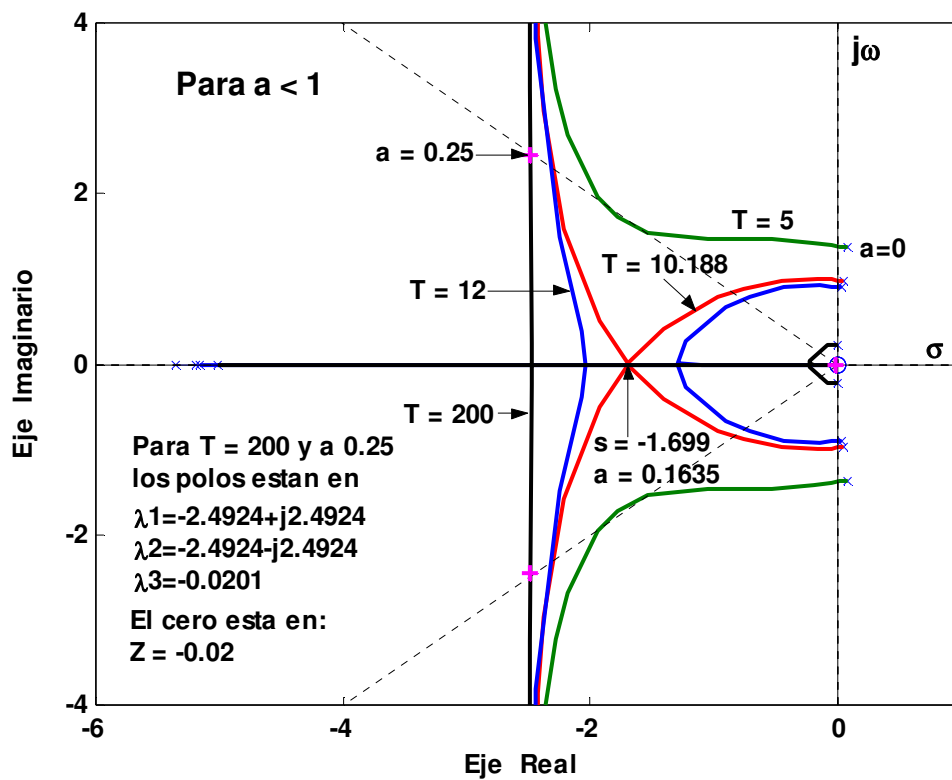


Figura 64

En la figura 65 se muestran las respuestas al escalón unitario del sistema

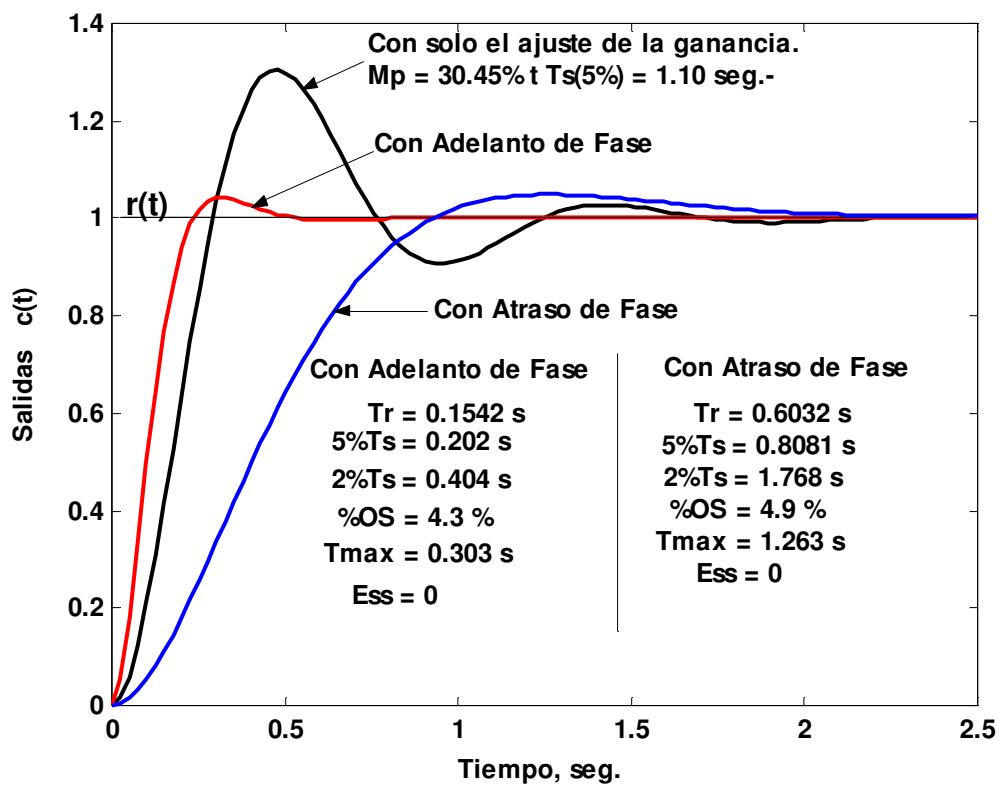


Figura 65



ajustado solo en ganancia, con un controlador de adelanto y otro de atraso, en las dos últimas respuestas el coeficiente de amortiguamiento relativo de los polos complejos conjugados se mantiene en  $\delta = 0.707$ . – Con el adelanto como el cero está en  $-5$ , el sistema resulta uno típico de segundo orden.

Con el atraso como el cero está en  $-1/aT = -0.02$ , prácticamente en el mismo lugar en donde está el tercer polo, por ende el sistema también resulta ser uno típico de segundo orden.

La diferencia esta en los tiempos de establecimiento, con el adelanto son menores o sea mas rápido.-

Ahora si en los contornos encontrados unimos los puntos de igual “a”, se tendrían los contornos para  $a = \text{Cte}$  con  $T$  variando en todo su rango positivo. Estos contornos se pueden graficar con la función de transferencia  $G_1(s)$  o  $[G_1(s)]^{-1}$ , ya determinada con anterioridad o sea con:

$$\{G_1(s)\}^{-1} = \frac{(1/T)(s^2 + 5s + 50)}{s(s^2 + 5s + 50a)} \quad K = 1/T \quad T = 1/K. -$$

Siguiendo el mismo procedimiento ya delineado para los contornos de  $G_2(s)$  se pueden obtener los mismos para  $[G_1(s)]^{-1}$  con:  $a > 1$ , adelanto de fase, y  $a < 1$ , atraso de fase, con  $1/T$  variable, mostrados en las figuras 66 y 67 respectivamente.

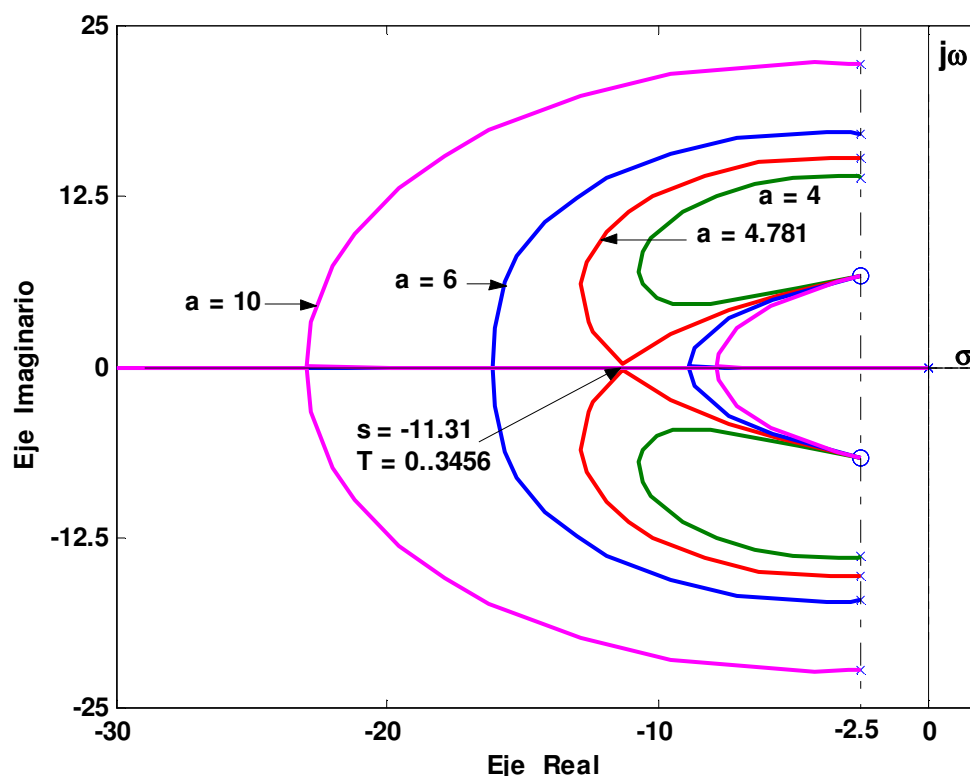


Figura 66

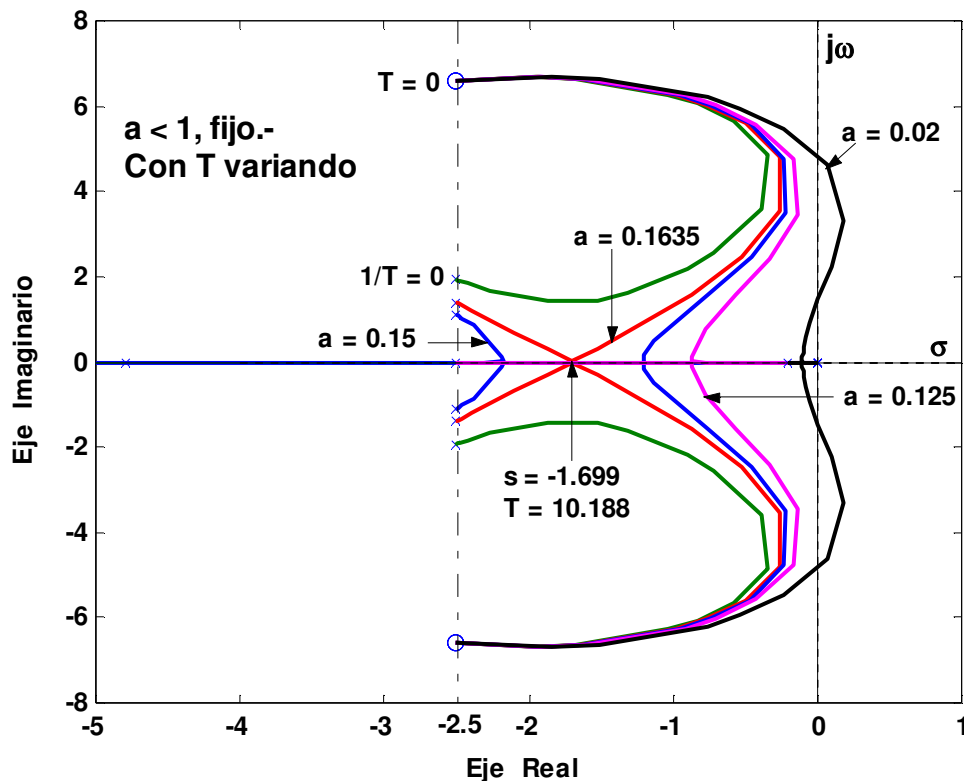


Figura 67

Los pasos del procedimiento se dejan como ejercicio para el lector.

### Técnica Generalizada del Lugar de las Raíces, (Contorno de las Raíces), en Sistemas de Control Realimentados con Lazos Múltiples.

Las principales dificultades que se encuentran para aplicar la técnica convencional del lugar de las raíces a los sistemas con lazos múltiples son las siguientes:

- La función de transferencia del lazo tiene generalmente la forma siguiente:

$$G(s) = \frac{K P(s)}{Q(s) + KU(s)}$$

donde  $P(s)$ ,  $Q(s)$  y  $U(s)$  son polinomios en  $s$ . La ganancia  $K$  aparece tanto en el numerador como en el denominador de  $G(s)$ . En consecuencia la técnica convencional no puede aplicarse directamente.

- Puede haber diversos parámetros variables distintos de  $K$ , cuyos valores adecuados se deberán determinar en un problema de diseño, por ende la técnica clásica tampoco tendrá aplicación directa.

En el primer caso, la ecuación característica será:

$$Q(s) + KU(s) + KP(s) = 0$$

$$1 + \frac{K [U(s) + P(s)]}{Q(s)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + Gequiv.(s) = 0$$

Como en la última ecuación el parámetro K solo aparece como factor multiplicativo en el numerador, puede construirse el trazo del lugar de las raíces directamente de la configuración de polos y ceros de:

$$Gequiv.(s) = \frac{K [P(s) + U(s)]}{Q(s)}$$

En el segundo caso deben construirse los contornos de las raíces para distintos parámetros diferentes de K. El procedimiento general para construcción de los contornos de las raíces es semejante al que se emplea cuando un cero y un polo de función de transferencia de lazo son los parámetros variables, que ya fue descrito.

Específicamente, se tratan primero los lugares de las raíces sin ningún controlador de compensación y entonces el sistema es de un solo lazo con realimentación unitaria generalmente. Los pasos siguientes consisten en construir los contornos de las raíces añadiendo los controladores de compensación de uno en uno.

En general, es muy común introducir controladores de compensación y elementos en las trayectorias de realimentación de un sistema de control. Una aplicación típica de este tipo de compensación es la de un sistema con realimentación tacométrica, en la que se emplea el tacómetro para realimentar una señal proporcional a la primera derivada de la variable de salida.-

#### Ejemplo 42:

Sea el sistema indicado en la figura 68.

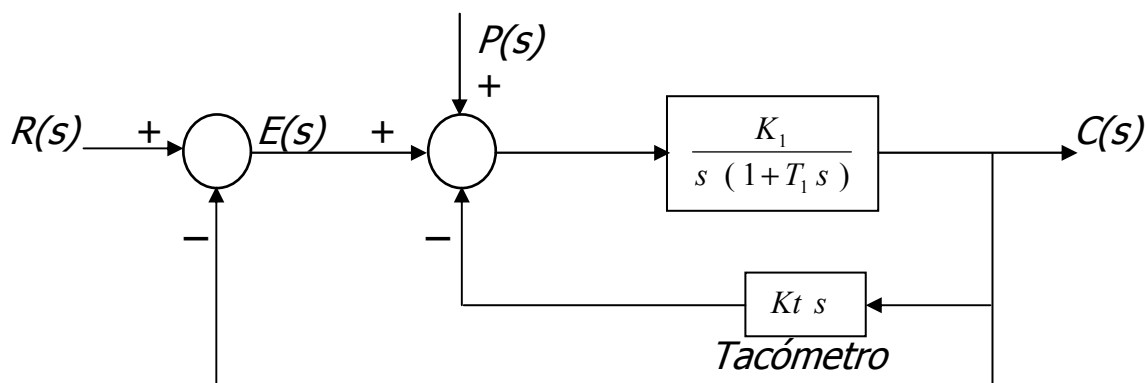


Figura 68

La función de transferencia de la trayectoria directa, (en este caso igual a la del lazo), del sistema, se expresa como:

$$G(s) = \frac{\frac{K_1}{s(1+T_1 s)}}{1 + \frac{K_1 K t s}{s(1+T_1 s)}} = \frac{K_1}{s(1+T_1 s) + K_1 K t s}$$

Para demostrar el primer caso: se supone que la constante del tacómetro se mantiene constante y solo se varía la ganancia  $K_1$ . La Gequiv.(s) será:

$$s(1+T_1 s) + K_1 K t s + K_1 = 0$$

$$1 + \frac{K_1(1+K t s)}{s(1+T_1 s)} = 0 \Rightarrow$$

$$Gequiv.(s) = \frac{(K_1 K t / T_1)(s + 1/K t)}{s(s + 1/T_1)} = \frac{K(s + 1/K t)}{s(s + 1/T_1)} \quad \text{con} \quad \begin{cases} K = K_1 K t / T_1 \\ T_1 \text{ y } K t \text{ fijos.} \end{cases}$$

Los L.G.R. se muestran en la figura 69, para  $K t > T_1$  y  $K t < T_1$ .

Cuando  $K t > T_1$ , la ecuación característica tiene dos raíces reales negativas para todos los valores positivos de  $K_1$ . Cuando  $K t < T_1$ , las raíces son complejas para el rango de  $K_1$ :  $K_1' < K_1 < K_1'$ .

Estos lugares comprueban el hecho bien conocido que la realimentación tacométrica mejora la estabilidad de un sistema de control realimentado.

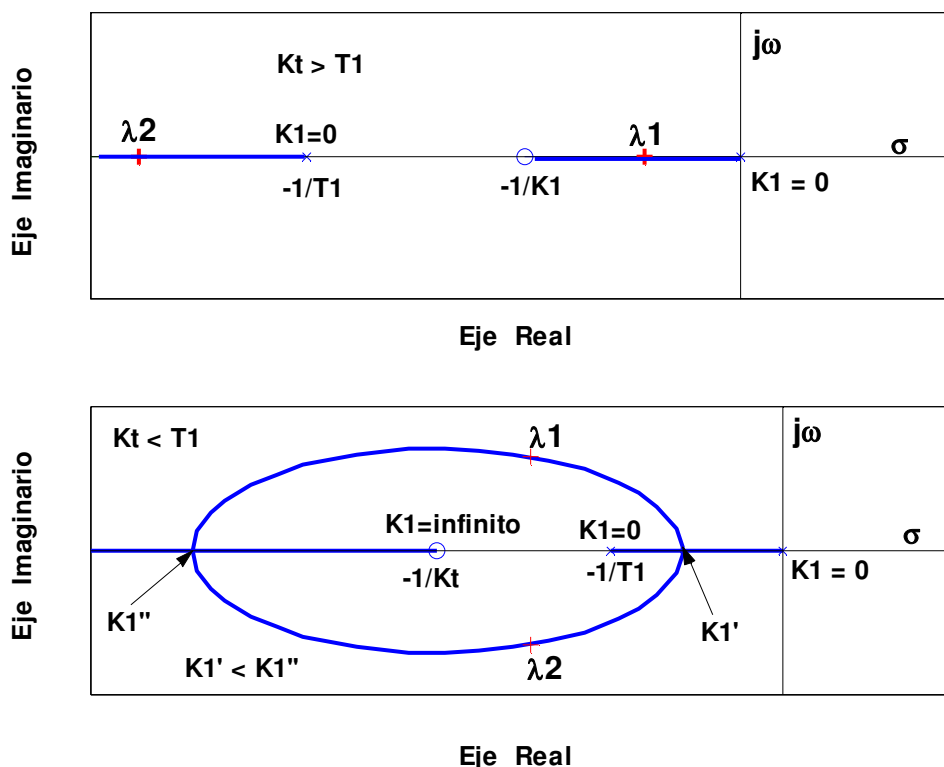


Figura 69

Cuando el valor de  $K_t$  es elevado, ( $K_t > T_1$ ), el sistema tiene una gran amortiguación, ( $\delta > 1$ ). La figura 70 muestra el efecto de la realimentación tacométrica en la respuesta transitoria del sistema.

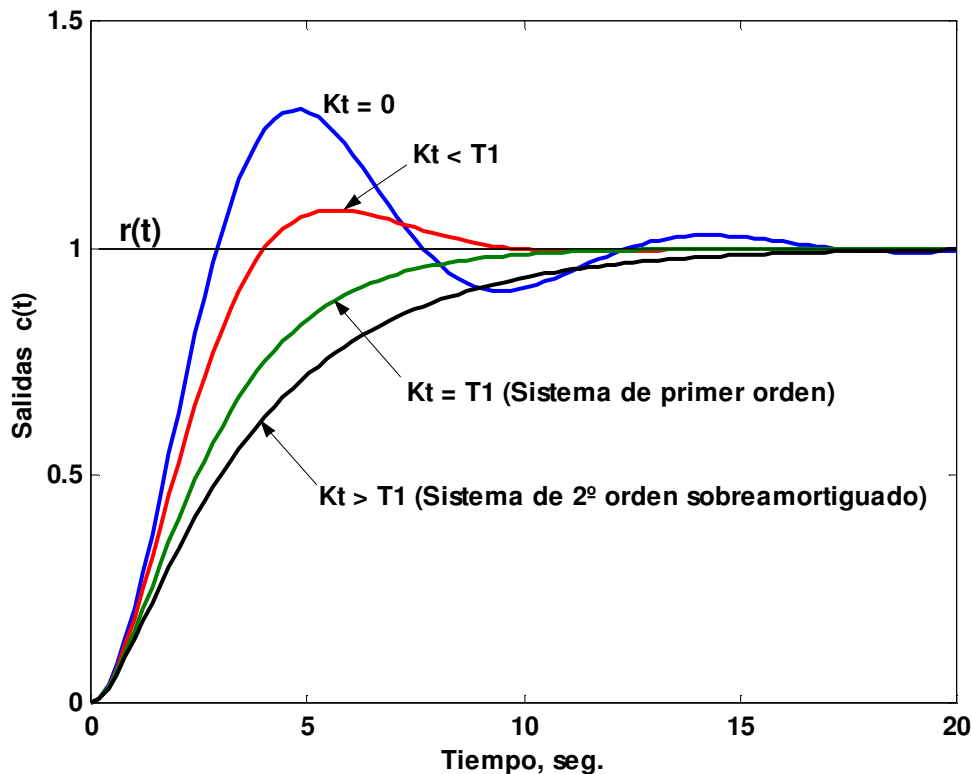


Figura 70

Para explicar el problema descrito en segundo término:

Se supone que  $K_1$  y  $Kt$  son parámetros variables. Este es un problema mas práctico ya que normalmente se escoge un tacómetro con función de transferencia, por ejemplo, de  $Kt$  s, para producir un funcionamiento satisfactorio del sistema. El primer paso para la construcción de los contornos de las raíces consiste en considerar el sistema sin el tacómetro. La ecuación característica del sistema descompensado es, con  $Kt=0$ :

$$s(1 + T_1 s) + K_1 = 0$$

En otras palabras, la última ecuación representa la ecuación característica del sistema, con el lazo interno abierto, ( $Kt=0$ ). El lugar de las raíces con  $T_1$  fijo y  $Kt=0$  será el indicado en la figura 71.

El siguiente paso consiste en cerrar la trayectoria de realimentación tacométrica, y entonces queda en rigor la ecuación característica:

$$s(1 + T_1 s) + K_1 Kt s + K_1 = 0$$

Los diferentes contornos de las raíces cuando  $Kt$  es el parámetro variable, (para diferentes valores de  $K_1$ ), pueden obtenerse a partir de la siguiente función:

$$G_1(s) = \frac{(K_1 Kt) s}{s(1 + T_1 s) + K_1}$$

Se reconoce que el denominador del segundo miembro es en realidad la ecuación característica del sistema cuando  $Kt=0$ , por lo tanto, los

contornos de las raíces cuando varía  $Kt$ , deben empezar en los puntos de los lugares dados en la figura 71.

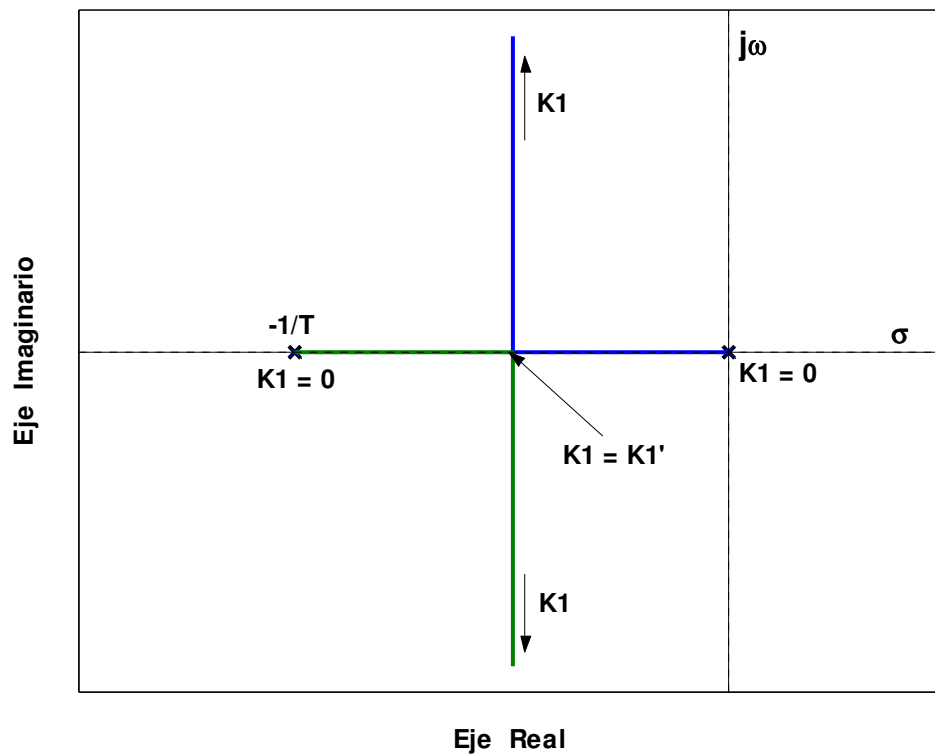


Figura 71

Cuatro contornos de las raíces se muestran en la figura 72 para cuatro

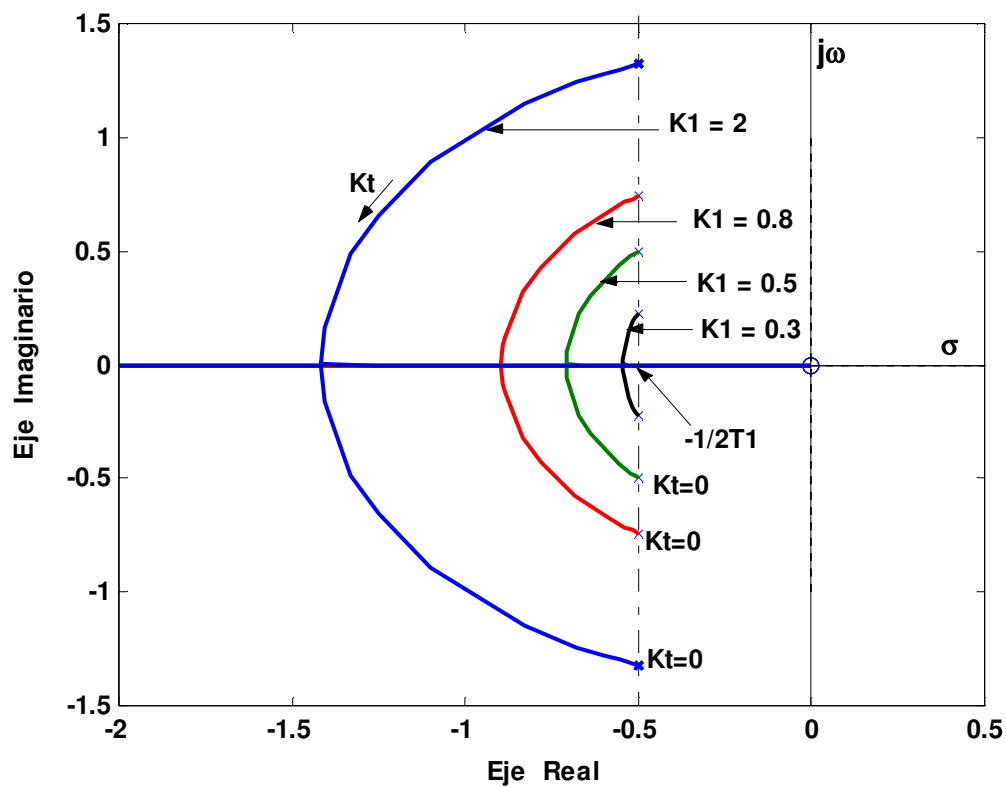


Figura 72

valores de fijos de  $K_1 > K_1'$ , con  $K_t$  variable.-

En los mismos se puede ver el efecto estabilizador de la compensación tacométrica, los polos se mueven hacia la izquierda en el plano  $s$  y aumentando el coeficiente de amortiguamiento relativo.

El concepto del contorno de las raíces puede extenderse a sistemas que tengan más de dos parámetros variables.

El ejemplo siguiente el comportamiento del sistema puede llevarse la salida del tacómetro a la entrada de un filtro R-C, como se verá.

### Ejemplo 43:

Un sistema de control de posición con los controladores en un lazo secundario se muestra en la figura 73.

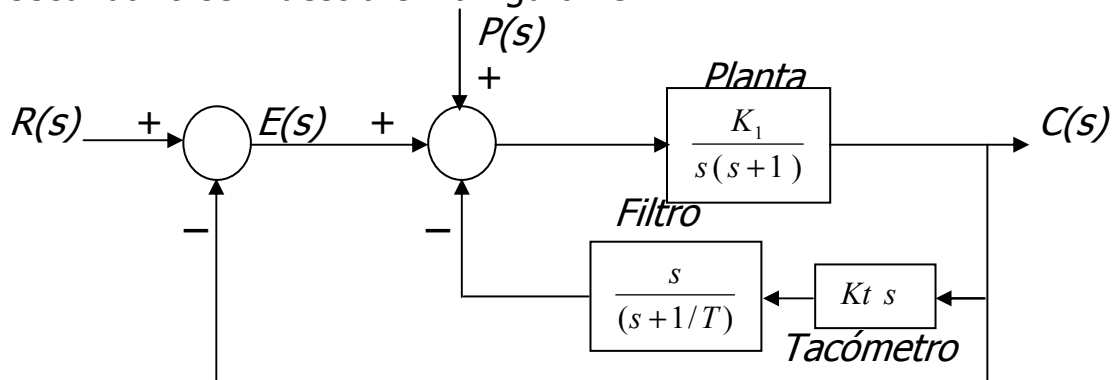


Figura 73

El filtro pasa alto R-C es el indicado en la figura 74.

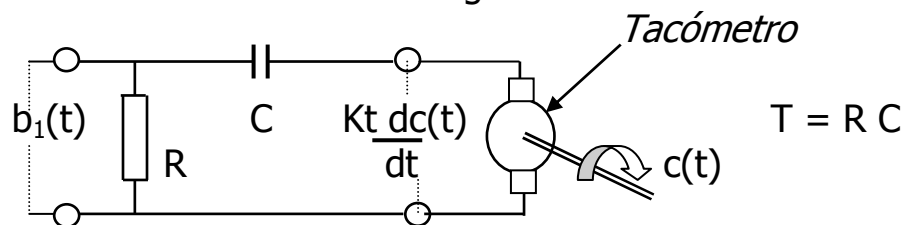


Figura 74

El empleo de este filtro pasa-alto dará lugar a un mayor coeficiente de error  $K_v$ , como se vera:

$$\text{Sin el filtro: } G(s) = \frac{K_1}{s(s+1) + K_1 K_t s} \Rightarrow K_v = \frac{K_1}{1 + K_1 K_t}$$

$$\text{Con el filtro: } G(s) = \frac{K_1 (s+1/T)}{s \{ (s+1)(s+1/T) + K_1 K_t s \}} \Rightarrow K_v = K_1$$

Como se puede apreciar se mejora el  $K_v$ . Fijado  $K_1$  y con valores adecuados de  $K_t$  y  $T$  se puede tener aproximadamente el mismo transitorio al escalón que sin el filtro, como se vera a continuación.

Si se especifica  $K_v = 20 \text{ seg}^{-1}$ , para una entrada rampa de pendiente unitaria,  $r(t) = t \mu_s(t)$ .-

Por lo tanto  $K_1$  deberá ser:  $K_1 = 20$

La función del lazo del sistema será:

$$G(s) = \frac{20(s + 1/T)}{s(s + 1)(s + 1/T) + 20Kt s^2}$$

Los contornos de las raíces con Kt y T como parámetros variables se construirán siguiendo los procedimientos de discutidos con anterioridad.

Con Kt variable y T = Cte. o (1/T) = Cte.:

$$G_1(s) = \frac{20Kt s^2}{(s + 1/T)(s^2 + s + 20)}$$

Con T o (1/T) variable y Kt = Cte.:

$$G_2(s) = \frac{(1/T)(s^2 + s + 20)}{s\{s^2 + (1 + 20Kt)s + 20\}}$$

Para (1/T) = 0, o T tendiendo a infinito con Kt variable:

$$G_3(s) = \frac{20Kt s^2}{s(s^2 + s + 20)} \Rightarrow G_3(s) = \frac{20Kt s}{(s^2 + s + 20)}$$

Por ende los puntos de iniciación de los contornos determinados por  $G_2(s)$ , son: uno está en el origen, y los otros dos varían con Kt según lo indicara la función  $G_3(s)$ .-

Para Kt = 0, con T o (1/T) variable:

$$G_4(s) = \frac{(1/T)(s^2 + s + 20)}{s(s^2 + s + 20)} \Rightarrow G_4(s) = \frac{(1/T)}{s}$$

En consecuencia los puntos de iniciación de los contornos determinados por  $G_1(s)$ , son: 2 fijos en,  $s_{1-2} = -0.5 \pm j \sqrt{19.25}$  y el otro varia según sea el valor de T, indicado por la función  $G_4(s)$ , o sea en  $-1/T$ .-

Contornos determinados por  $G_2(s)$ :

El lugar de los dos puntos de iniciación variables con el valor de Kt, el otro esta siempre en el origen, es el indicado por la  $G_3(s)$ , y mostrado en la figura 75.



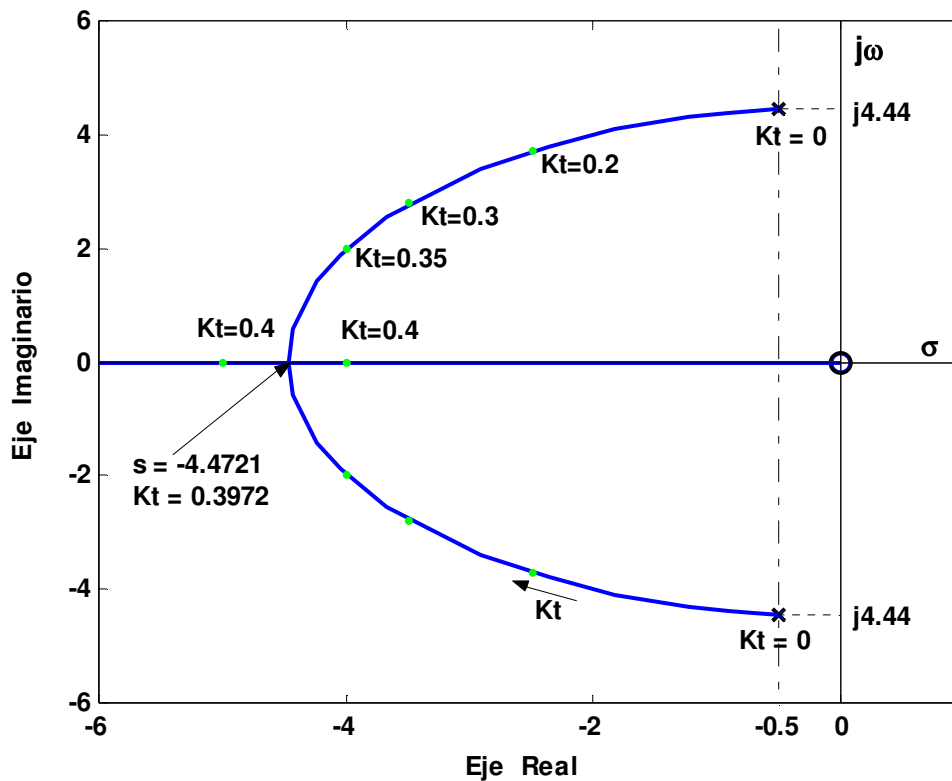


Figura 75

El punto de ruptura del lugar de la figura 75 es, para  $K_t > 0$ :

$$N \frac{d}{ds} G_3(s) = 0 \Rightarrow s^2 - 20 = 0 \quad s_1 = \sqrt{20} \cong 4.472$$

El valor de  $K_t$  en  $s_1$  será:

$$K_t = \frac{-(s_1^2 + s_1 + 20)}{20s_1} = \frac{-(20 - \sqrt{20} + 20)}{20(-\sqrt{20})} \Rightarrow K_t \cong 0.3972$$

Para determinar como se mueven los posibles puntos de ruptura de los contornos, delineados por  $G_2(s)$ , en función del parámetro  $K_t$  se hace:

$$N \frac{d}{ds} G_2(s) = 0 \Rightarrow (s^2 + s + 20)^2 + 20K_t s(s + 40) = 0$$

Por ende:

$$G'(s) = \frac{20K_t s(s + 40)}{(s^2 + s + 20)^2}$$

El lugar se muestra en la figura 76, solo para  $K_t > 0$ .-

Un resumen seria:

Si  $K_t$  varia en el rango:  $0 < K_t < 0.30$  no hay puntos de ruptura.-

Si  $K_t = 0.30$ : hay un punto de ruptura en  $-2.641$  de orden 2,  $y=2$ , ( $q=3$ ).-

Si  $K_t$  varia en el rango:  $0.30 < K_t < 0.3972$  hay dos puntos de ruptura de orden 1,  $y=1$ , ( $q=2$ ).

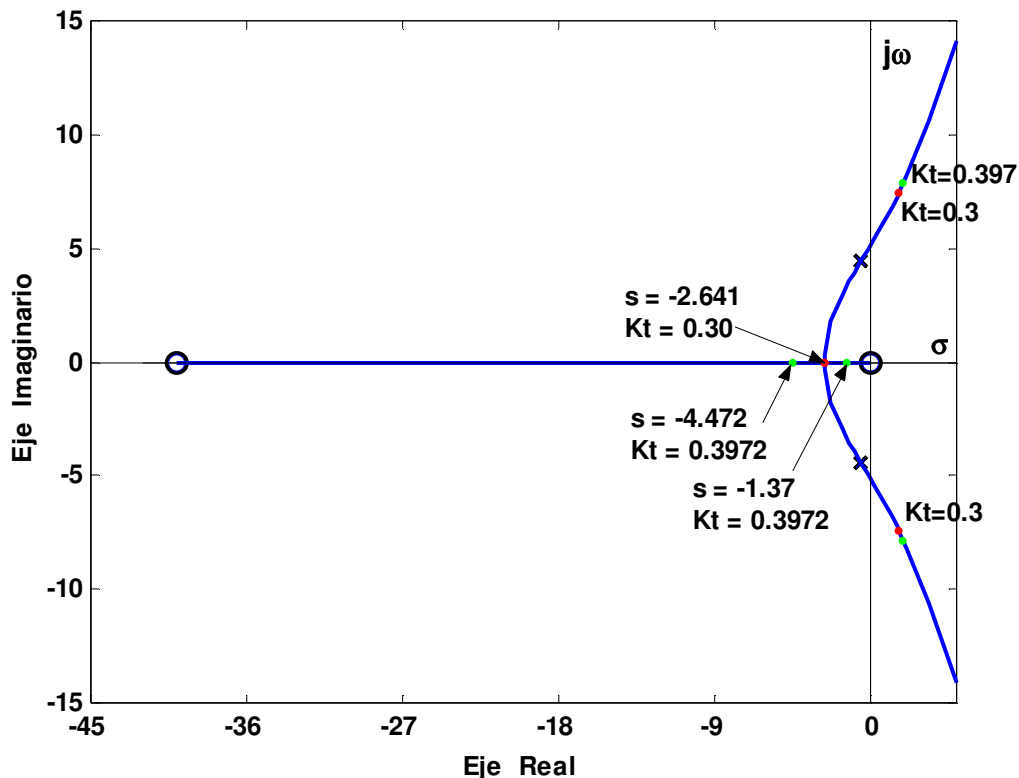


Figura 76

Si  $Kt = 0.3972$ : hay un punto de ruptura en  $-4.472$  (para  $1/T=0$ ), o  $T$  tendiendo a infinito. Y otro en  $-1.37$ , para  $T = 1.5555$ , ambos de orden uno  $y=1$ , ( $q=2$ ).-

Si  $Kt = 0.3972$ : hay un punto de ruptura entre  $-1.37$  y el origen, (para  $T>0$ ) y el origen de orden 1,  $y=1$ , ( $q=2$ ).-

Los valores de  $1/T$  o  $T$  en los contornos se pueden determinar con el requerimiento de magnitud, o reemplazar en  $1/t=f(s)$  o  $T=f(s)$ , por el valor correspondientes de los puntos.

$$T = \frac{-(s^2 + s + 20)}{s\{s^2 + (1 + 20Kt)s + 20\}}$$

Por ejemplo en el punto de ruptura de orden 2, en  $s^*=-2.641$ , para  $Kt^*=0.3001$ ,  $T^*$  será

$$T^* = \frac{-((-2.641)^2 + (-2.641) + 20)}{-2.641\{(-2.641)^2 + (1 + 20 \times 0.30)(-2.641) + 20\}} \Rightarrow T^* = 1.086.-$$

Los contornos para 8 valores de  $Kt$ , variando  $1/T$  o  $T$  en forma continua se muestran en la figura 77. Por ejemplo para  $Kt=0.5$  y  $T>0$ , el punto de ruptura esta en  $s=-1.03$  y el valor de  $1/T = 0.5004$  o  $T = 1.9984$ .-

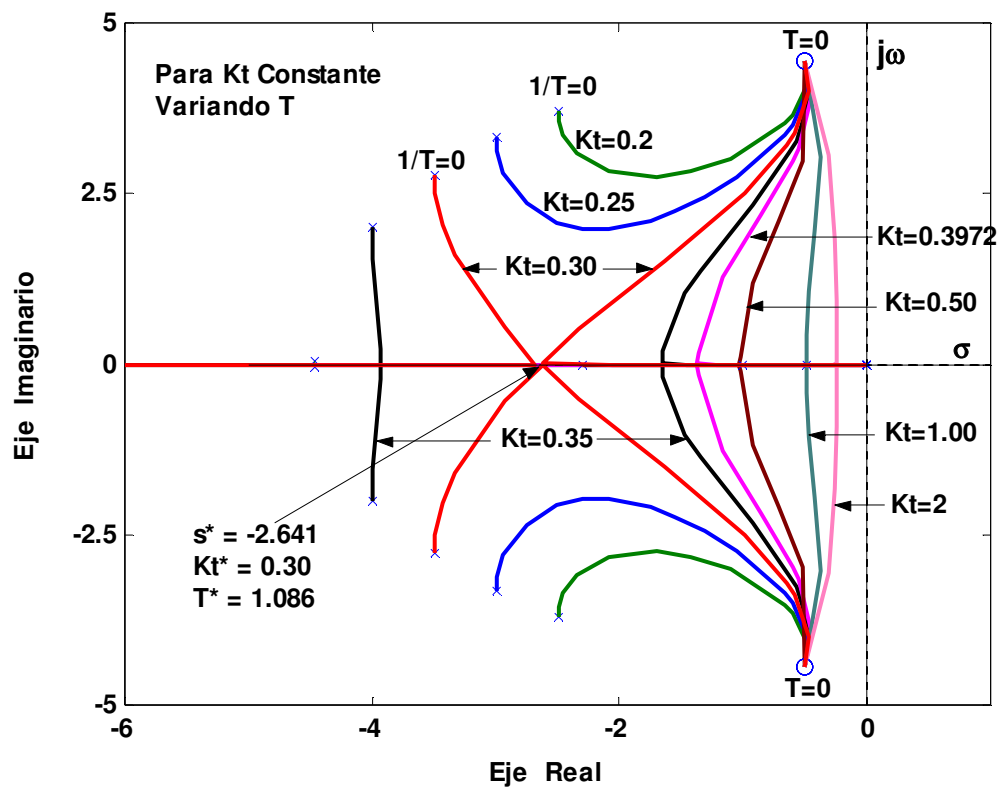


Figura 77

Para graficar los contornos determinados por  $G_1(s)$ , para  $T = \text{Cte.}$  Con  $K_t$  variable en todo su rango positivo, se puede seguir el mismo procedimiento que para los contornos dados por  $G_2(s)$ . El lector puede desarrollarlo como un ejercicio propuesto. Al mismo resultado se tiene que llegar si en los contornos de la figura 77 se unen los puntos de igual  $T$ .

Recordar que:

$$G_1(s) = \frac{20 K_t s^2}{(s + 1/T)(s^2 + s + 20)}$$

Los puntos de inicio de los contornos serán: dos fijos en  $-0.5 \pm j\sqrt{1975}$  y uno que varía con  $T$ , en  $-1/T$ .

En la figura 78, se muestran ocho contornos con  $K_t$  variable para  $T = 0.80$ ; 1.0; 1.086; 1.5; 10.0; 2.0 e infinito.-

Como se puede apreciar cuando  $T$  es grande, la posición de los polos del sistema es prácticamente la misma a la que tenían sin el filtro, similares a las indicadas por la figura 75 ( $T \rightarrow \infty$ ).

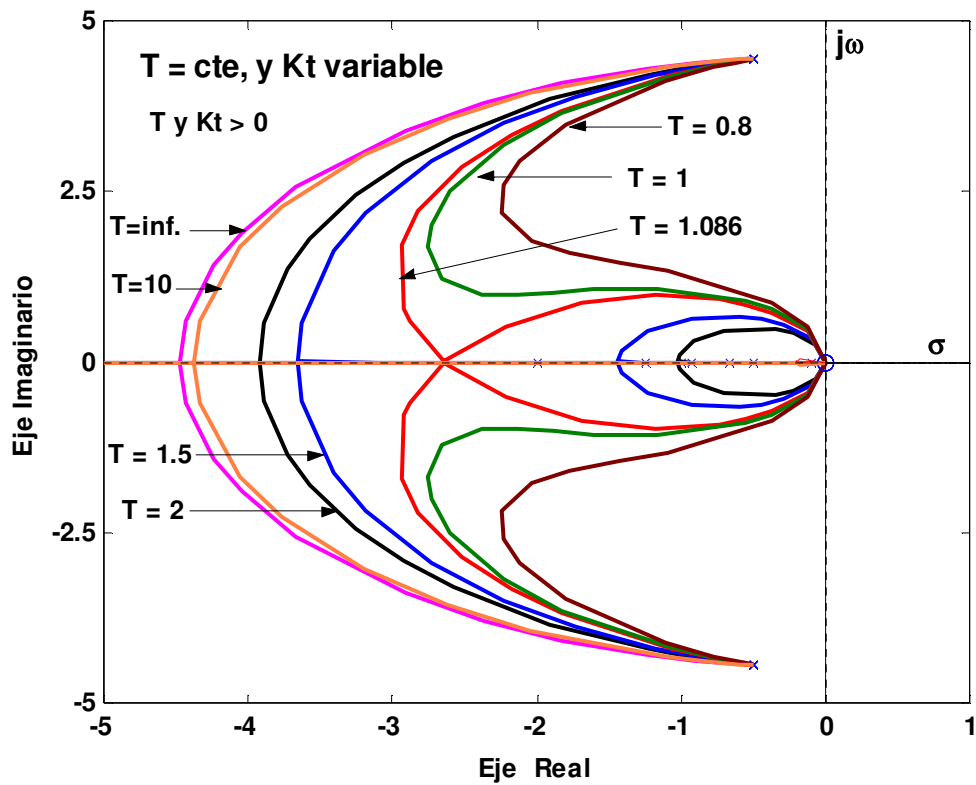


Figura 78

Si se superponen los contornos dados por  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$  nos quedará el gráfico de la figura 79.-

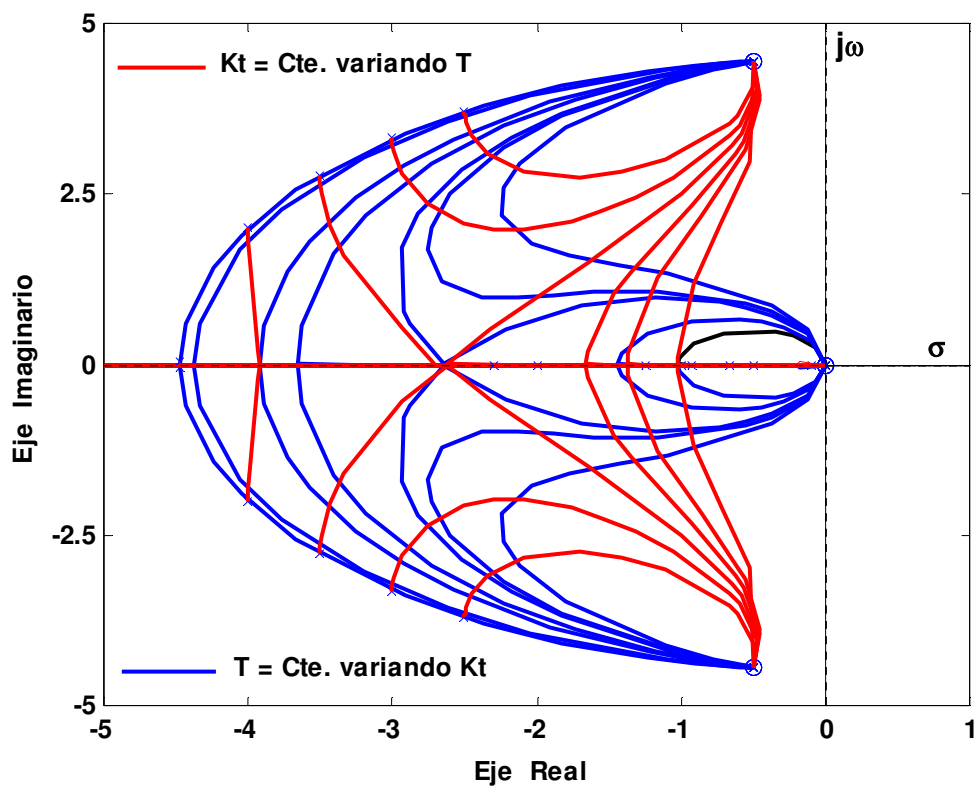


Figura 79

Como se dijo si  $T$  es grande, (por ejemplo  $T > 10$ ), se obtiene casi la misma configuración de polos y ceros que sin el filtro pero con el coeficiente de error  $K_v$  mucho mayor.

Por ejemplo:

Si  $K_1 = 20$  y  $K_t = 0.30$ , sin el filtro:

$$K_v = \frac{K_1}{1 + K_1 K_t} = \frac{20}{1 + 6} = \frac{20}{7} \cong 2.857 \text{ seg}^{-1}$$

Y la configuración de polos y ceros del sistema será:

$$\begin{cases} \lambda_{1-2} = -3.5 \pm j2.784 \\ Z \text{ no hay.} - \end{cases}$$

Si  $K_1 = 20$  y  $K_t = 0.30$ , pero con el filtro:

$K_v = K_1 = 20 \text{ seg}^{-1}$ .- para  $T = 10 \text{ seg}$ .

La configuración de polos y ceros del sistema será:

$$\begin{cases} \lambda_{1-2} = -3.4984 \pm j2.672 \\ \lambda_3 = -0.1032 \\ Z = -0.100 \end{cases}$$

En la figura 80 se muestran las respuestas, en los dos casos.

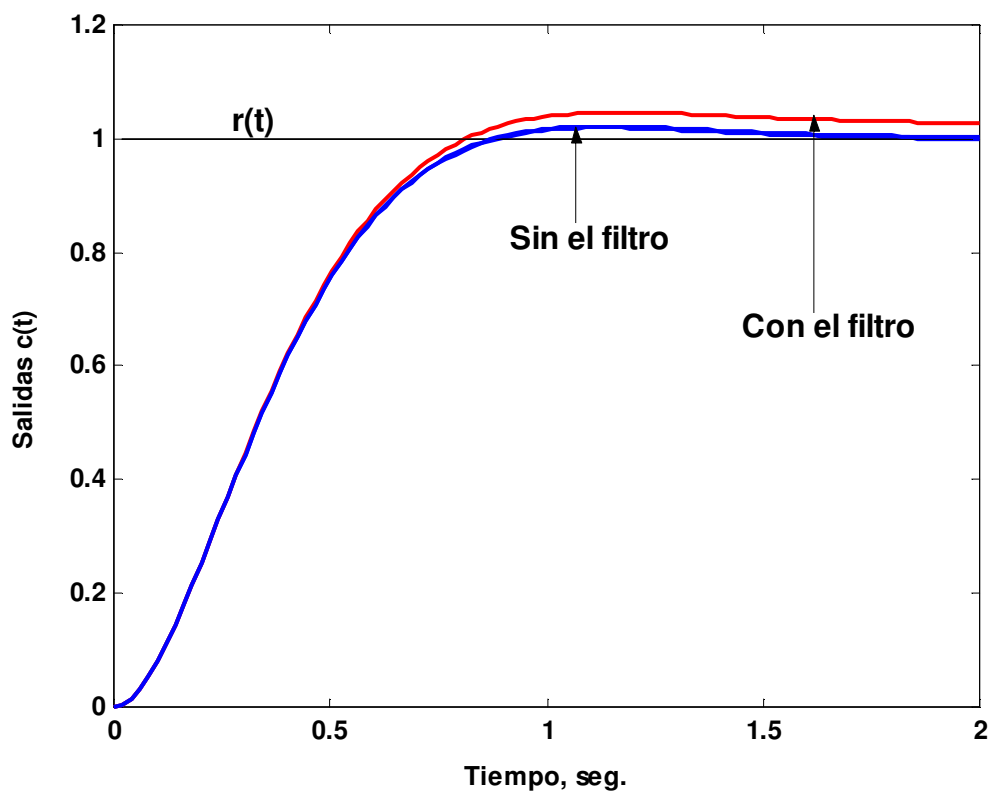


Figura 80

### Lugar de las Raíces de Sistemas con retardos Puros.

Existen varios sistemas de control en los cuales se pueden producir demoras, (tiempos muertos), ya sea en la medición, en la acción de control, en la operación del actuador etc. Estas demoras se denominan retardos puros de tiempo. La entrada y la salida de un retardo puro están relacionadas por;

$y(t)=x(t-T)$  e  $y(T)=x(0)$ , donde:  $y(t)$  es la salida y  $x(t)$  es la entrada.-  
 $T$  en segundos es el tiempo de retardo puro.

La función de transferencia del mismo, como se sabe, está dada por el término exponencial siguiente:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-Ts}$$

Un ejemplo de un sistema con un retardo puro en el lazo, es el indicado en el diagrama esquemático de figura 81, el cual es de un proceso de laminado de planchas de acero, junto con un diagrama de bloques:

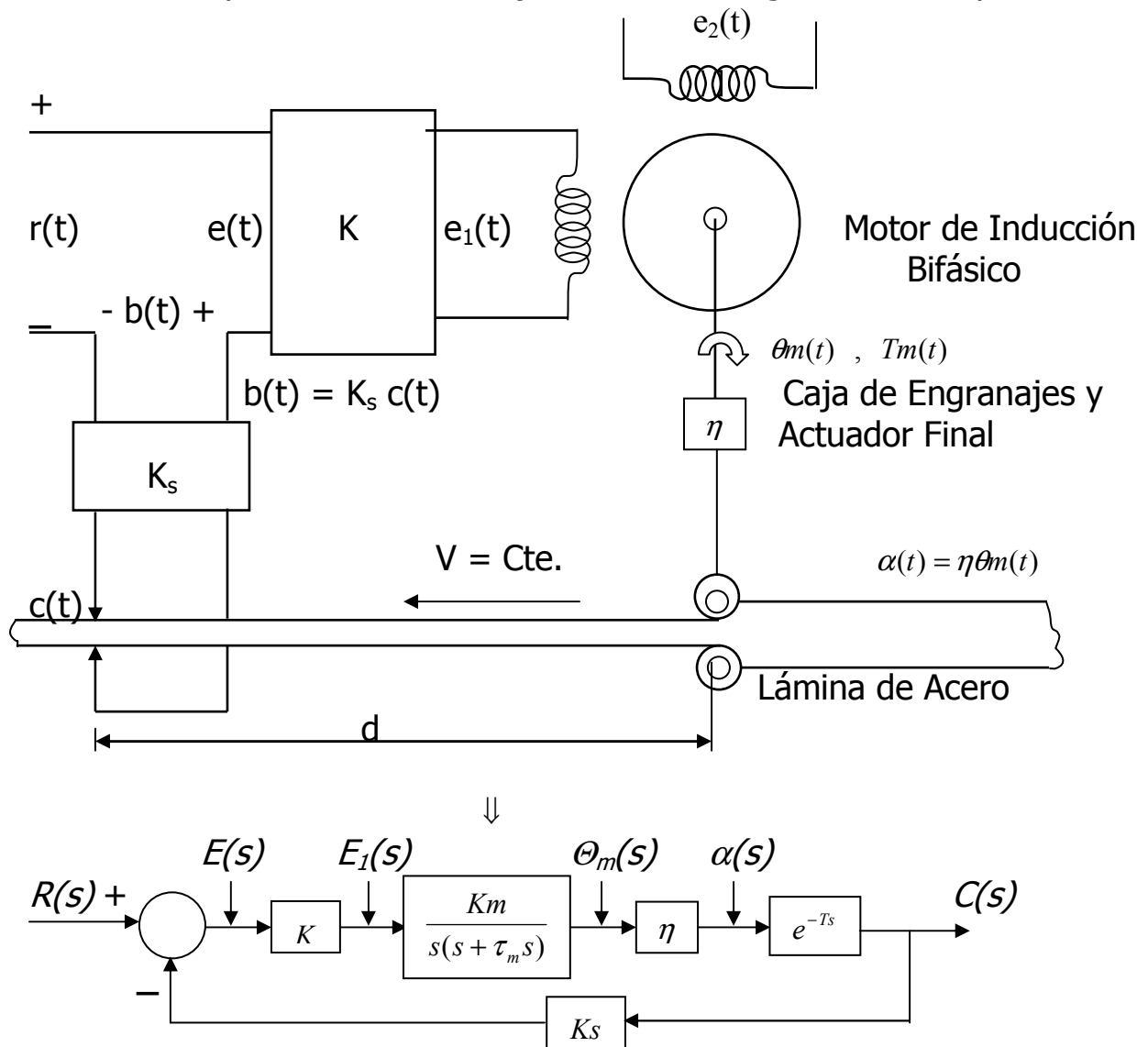


Figura 81

Por lo tanto:  $G(s)H(s) = \frac{(KKm\eta Ks) e^{-Ts}}{s(1 + \tau_m s)} \equiv \frac{K^* e^{-Ts}}{s(s + 1/\tau_m)} \quad \begin{cases} K^* = KKm\eta Ks / \tau_m \\ d/v = T \text{ (seg.)} \end{cases}$

La ecuación característica del sistema será:

$$s(s + 1) + K^* e^{-Ts} = 0$$

En general se supondrá que la ecuación característica de un sistema típico con un retardo de tiempo puro puede ser escrita:

$$Q(s) + KP(s)e^{-Ts} = 0 \quad (1)$$

Donde Q(s) y P(s) son polinomios de s. Una forma alternativa de la ecuación (1) será:

$$1 + \frac{K P(s) e^{-Ts}}{Q(s)} = 0, \text{ o también:}$$

$$1 + KG_1(s)H_1(s)e^{-Ts} = 0 \quad (2)$$

$$\text{donde: } G_1(s)H_1(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (3)$$

Las condiciones de módulo y argumento que deben ser satisfechas serán:

$$K G_1(s)H_1(s)e^{-Ts} = -1$$

Requerimiento de Magnitud:

$$|KG_1(s)H_1(s)e^{-Ts}| = 1 \Rightarrow |K| \cdot |G_1(s)H_1(s)| \cdot |e^{-Ts}| = 1$$

$$\text{Como: } e^{-Ts} = e^{-T(\sigma + j\omega)} = e^{-T\sigma} \cdot e^{-j\omega T} \Rightarrow |e^{-Ts}| = e^{-T\sigma}$$

En consecuencia:

$$|K| = \frac{1}{|G_1(s)H_1(s)| \cdot e^{-T\sigma}} \Rightarrow |K| = \frac{e^{T\sigma} \cdot \left| \prod_{j=1}^n (s - P_j) \right|}{\left| \prod_{i=1}^m (s - Z_i) \right|} \quad (-\infty < K < \infty) \quad (4)$$

y como  $\angle e^{-Ts} = -\omega T$ , el Requerimiento Angular será:

$$\begin{aligned} \angle G_1(s)H_1(s) &= (m\pi + \omega T) \text{ en radianes, o } \equiv m180^\circ + (\omega T)180^\circ / \pi \\ \text{donde: Si } m &= \pm 1, \pm 3; \dots \dots \dots (K \geq 0) \quad (5) \\ \text{y Si } m &= 0; \pm 2; \pm 4; \dots \dots \dots (K \leq 0) \quad (6) \end{aligned}$$

Notar que la condición para que un punto  $s = s_1$ , del plano s sea un punto del lugar completo de las raíces está dado por las condiciones (5) y (6), las cuales difieren de las condiciones para un lugar común en el término ( $\omega T$ ). Cuando  $T = 0$ , las ecuaciones (5) y (6) se convierten en las mismas que para el lugar de las raíces común. Como  $\omega$  es una variable en el plano s, las condiciones angulares no son constantes a lo largo del plano s, pues dependen de donde esté ubicado el punto el cual es una raíz de la ecuación (2). Viendo el problema desde otro punto de vista, se sabe que si  $T = 0$ , dado un valor de K, hay solo n puntos en el plano s que satisfacen

las ecuaciones (5) o (6), para todos los valores posibles de  $m$ , donde  $n$  es el mayor orden de  $P(s)$  o  $Q(s)$ . Sin embargo para  $T \neq 0$ , las condiciones angulares de las ecuaciones (5) y (6) dependen de  $w$ , que varía a lo largo de un eje vertical en el plano  $s$ . Por lo tanto para un  $K$  dado, los puntos pueden ser más que  $n$ , los que satisfacen las condiciones angulares en el plano  $s$ , cuando  $m$  toma todos los valores enteros posibles. En efecto, hay un número infinito de estos puntos ya que la ecuación (2) es trascendental, es conocido que tiene un número infinito de raíces. La dificultad que tiene la construcción del lugar de las raíces de la ecuación (2) es que muchas de las reglas de construcción desarrolladas originalmente para sistemas sin retardo de tiempo puro no serán todas válidas para el presente caso. Es de interés investigar como algunas de las reglas de construcción ya vistas para lugares comunes pueden ser modificadas para aplicarlas en el caso bajo estudio.

#### 1) Puntos de $K = 0$ :

Los puntos de  $K = 0$  sobre el lugar completo de las raíces de la ecuación característica están en los polos de  $G_1(s)H_1(s)$  y además cuando  $\sigma = -\infty$ .

Demostración: La condición de módulo se puede poner de la manera siguiente:

$$e^{-T\sigma} |G_1(s)H_1(s)| = \frac{1}{|K|}$$

Por lo tanto, si  $K = 0$ ,  $e^{-T\sigma} |G_1(s)H_1(s)| \rightarrow \infty$ , por ende  $s$  tenderá a los polos de  $G_1(s)H_1(s)$ , o si  $\sigma$ , que es la parte real de  $s$ , tiende a  $-\infty$ .

#### 2) Puntos de $K = \pm\infty$ :

Los puntos de  $K = \pm\infty$  sobre el lugar completo de las raíces de la ecuación característica están en los ceros de  $G_1(s)H_1(s)$  y en  $\sigma = +\infty$ .

Demostración:

Por lo tanto, si  $K = \pm\infty$ ,  $e^{-T\sigma} |G_1(s)H_1(s)| \rightarrow 0$ , por ende  $s$  tiende a los ceros de  $G_1(s)H_1(s)$ , o si  $\sigma$ , que es la parte real de  $s$ , tiende a  $+\infty$ .

#### 3) Número de Ramas del Lugar Completo de las Raíces:

El número de ramas sobre el lugar de las raíces de la ecuación característica es infinito, pues la ecuación tiene infinitas raíces.

#### 4) Simetría del Lugar Completo de las Raíces:

El lugar completo de las raíces es simétrico con respecto al eje real del plano  $s$ . Esto se explica expandiendo  $e^{-Ts}$  en una serie infinita, luego la ecuación característica se transforma en un polinomio con coeficientes reales pero con orden infinito.

#### 5) Asíntotas del Lugar Completo de las Raíces:

Las asíntotas del lugar de las raíces de la ecuación característica son infinitas en número y todas paralelas al eje real del plano  $s$ . Las intersecciones de las mismas con el eje imaginario está dadas por:



$$N = \frac{N\pi}{T}$$

Donde N está tabulado en la tabla siguiente para todas las condiciones indicadas.

n = Número de polos finitos de  $G_1(s).H_1(s)$ .-

w = Número de ceros finitos de  $G_1(s).H_1(s)$ .-

#### Demostración:

Cuando s tiende a infinito sobre el lugar de las raíces, K se aproxima a cero o a  $\pm\infty$ , ya vimos que las asíntotas están en  $\sigma = \infty$  ( $K = \pm\infty$ ) y  $\sigma = -\infty$  ( $K = 0$ ).

Las intersecciones de las asíntotas con el eje jw y las condiciones dadas en la tabla se obtienen usando las ecuaciones (5) y (6).

K	n-w	K=0 (Asíntotas)	K= $\pm\infty$ (Asíntotas)
$\geq 0$	impar	N = entero pares =0; $\pm 2$ ; $\pm 4$ .....	N = entero impares = $\pm 1$ ; $\pm 3$ ; $\pm 5$ ...
$\geq 0$	par	N = entero impares = $\pm 1$ ; $\pm 3$ ; $\pm 5$ ...	N = entero impares = $\pm 1$ ; $\pm 3$ ; $\pm 5$ ...
$\leq 0$	impar	N = entero impares = $\pm 1$ ; $\pm 3$ ; $\pm 5$ ...	N = entero pares =0; $\pm 2$ ; $\pm 4$ .....
$\leq 0$	par	N = entero pares =0; $\pm 2$ ; $\pm 4$ .....	N = entero pares =0; $\pm 2$ ; $\pm 4$ .....

#### 6) Lugar de las Raíces sobre el eje Real:

##### Demostración:

La propiedad del lugar de las raíces de la ecuación característica sobre el eje real es la misma que para el lugar común, pues en el eje real w = 0, y las condiciones angulares de las ecuaciones (5) y (6) serán las mismas que para los lugares comunes.

#### 7) Ángulos de Partida y de Llegada:

Estos ángulos son determinados por el uso de las ecuaciones (5) y (6).-

#### 8) Intersección del Lugar de las Raíces con el eje Imaginario:

Como la ecuación característica no es algebraica en s, la intersección del lugar con el eje jw no puede ser determinada usando el criterio de Routh-Hurwitz. La determinación de los puntos de intersección del lugar con el eje jw es una tarea difícil, pues el lugar tiene un número infinito de ramas. Sin embargo, se mostrará mas adelante que solo las intersecciones próximas al eje real son de interés para los estudios de estabilidad.

#### 9) Puntos de Ruptura:

Los puntos de ruptura del lugar completo de las raíces deben satisfacer a:

$$\frac{d G_1(s)H_1(s)e^{-Ts}}{ds} = 0$$

#### 10) Determinación de los Valores de K sobre el Lugar de las Raíces:

El valor de K en cualquier punto  $s = s_1$  sobre el lugar de las raíces se determina empleando:

$$|K| = \frac{e^{T\sigma_1} \cdot \left| \prod_{j=1}^n (s_1 - P_j) \right|}{\left| \prod_{i=1}^w (s_1 - Z_i) \right|} \quad (-\infty < K < \infty)$$

Donde  $\sigma_1$  es la parte real de  $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$  y  $P_j, Z_i$ : los polos y ceros del lazo.

#### Ejemplo 44:

Consideremos el sistema visto al principio de este estudio, la función de transferencia del lazo era, si  $T = 1$  seg.

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{K e^{-s}}{s(s+1)}$$

Graficaremos el lugar completo de las raíces de la ecuación característica:

$$s^2 + s + K e^{-Ts} = 0$$

#### 1) Puntos de $K = 0$ :

Están en:  $s = 0$ ;  $s = -1$  y además en  $\sigma = -\infty$ .

#### 2) Puntos de $K = \pm\infty$ :

Están todos en  $\sigma = \infty$ .

#### 3) Número de Ramas del Lugar:

El número de ramas es infinito. (Se dibujaran las ramas más dominantes).

#### 4) Simetría del Lugar:

El lugar es simétrico respecto al eje real.-

#### 5) Asíntotas del Lugar, (intersección con el eje imaginario):

Para  $K \geq 0$ , (L.R.D.), cuando  $K \rightarrow 0$ ,  $\sigma \rightarrow -\infty$ , y como  $(n - w) = (2 - 0) = 2$ , (par) se tendrá que:  $N =$  entero impar, por lo tanto, estas asíntotas

interceptan el eje  $j\omega$  en:  $\omega = \frac{N\pi}{T} = N\pi = \pm\pi; \pm 3\pi; \pm 5\pi; \dots$ .-

Para  $K \geq 0$ , (L.R.D.), cuando  $K \rightarrow \infty$ ,  $\sigma \rightarrow +\infty$ , y como  $(n - w) = (2 - 0) = 2$ , (par) se tendrá que:  $N =$  entero impar, por lo tanto, estas asíntotas

interceptan el eje  $j\omega$  también en:  $\omega = \frac{N\pi}{T} = N\pi = \pm\pi; \pm 3\pi; \pm 5\pi; \dots$ .-

Para  $K \leq 0$ , (L.R.I.), cuando  $K \rightarrow 0$ ,  $\sigma \rightarrow -\infty$ , y como  $(n - w) = (2 - 0) = 2$ , (par) se tendrá que:  $N =$  entero par, por lo tanto, estas asíntotas

interceptan el eje  $j\omega$  en:  $\omega = \frac{N\pi}{T} = N\pi = 0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi; \dots$ .-

Para  $K \leq 0$ , (L.R.I.), cuando  $K \rightarrow -\infty$ ,  $\sigma \rightarrow +\infty$ , y como  $(n - w) = (2 - 0) = 2$ , (par) se tendrá que:  $N =$  entero par, por lo tanto, estas asíntotas

interceptan el eje  $j\omega$  en:  $\omega = \frac{N\pi}{T} = N\pi = 0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi; \dots$ .-

#### 6) Lugar de las raíces sobre el eje real:

El L.R.D. ( $K > 0$ ) ocupa la región entre  $s = 0$  y  $s = -1$  sobre el eje real.  
 El resto del eje real es ocupado por el L.R.I. ( $K < 0$ ).-

7) Ángulos de partida y de llegada:

Esta regla no tiene aplicación pues no hay polos/ceros complejos.

8) Intersección del lugar con el eje imaginario:

$$G(j\omega)H(j\omega) = K \frac{\cos(\omega T) - j\sin(\omega T)}{-\omega^2 + j\omega}, \text{ pues } e^{-j\omega T} = \cos(\omega T) - j\sin(\omega T). -$$

Las intersecciones con el eje imaginario se producen, como se sabe, si:

$$\omega_c^2 \sin(\omega_c T) = \omega_c \cos(\omega_c T) \Rightarrow \tan(\omega_c T) = 1/\omega_c \equiv T/(\omega_c T), \text{ si } \omega_c T = x_c :$$

$\tan(x_c) = 1/x_c$ , Llamando:  $y = \tan(x)$ , e  $y_1 = 1/x$ , cuando  $y$  e  $y_1$  tengan puntos comunes ellos serán las soluciones buscadas:

Empleando Matlab se tendrá:

```
» syms x
» y=tan(x);
» y1=1/x;
» ezplot(y,0,10)
» hold on
» ezplot(y1,0,10)
```

El gráfico resultante es el indicado en la figura 82.

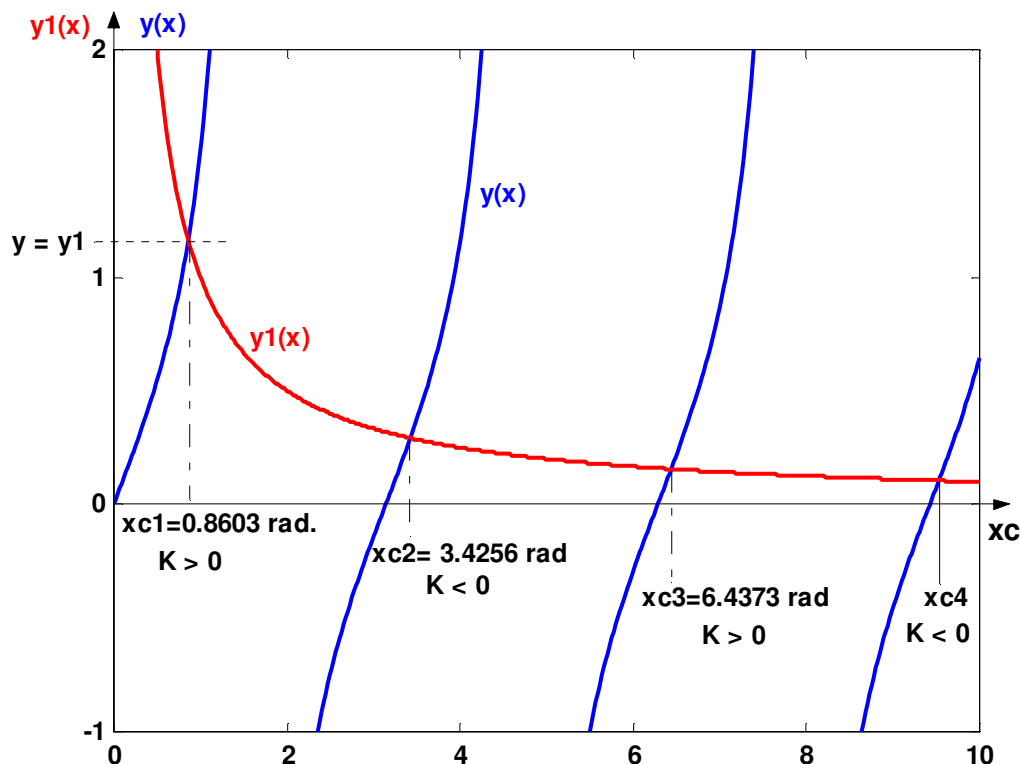


Figura 82

Como  $\omega_{c1} = x_{c1}/T \equiv x_{c1} = 0.8603 \text{ rad / seg.}$

$\omega_{c2} = x_{c2}/T \equiv x_{c2} = 3.4256 \text{ rad / seg.}$

$\omega_{c3} = x_{c3}/T \equiv x_{c3} = 6.4373 \text{ rad / seg. , etc.}$

Por lo tanto el valor de las ganancias en las intersecciones será:

$$L(j\omega_c) = K_{cL} \frac{-\sin(x_c)}{\omega_c} = -1 \Rightarrow K_{cL} = \frac{\omega_c}{\sin(x_c)}, \text{ las primeras tres intercepciones:}$$

$$K_{cL} = 1.1349; (LRD) \quad K_{cL} = -12.225; (LRI) \quad y \quad K_{cL} = 41.935; (LRD)$$

La figura 83 muestra el lugar de las raíces del sistema:

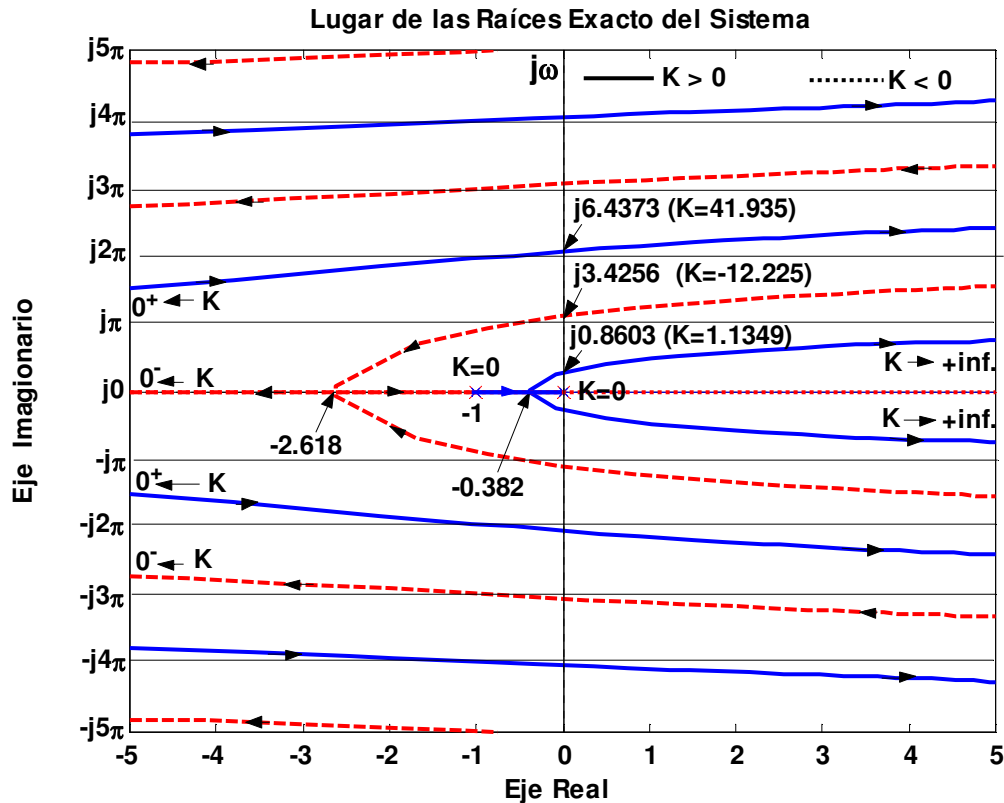


Figura 83

### 9) Puntos de Ruptura:

Se obtienen de :

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{e^{-Ts}}{s(s+1)} \right] = 0 \Rightarrow \frac{-T e^{-Ts} s(s+1) - e^{-Ts} (2s+1)}{[s(s+1)]^2} = 0$$

Operando se llega a:

$$Ts^2 + (T+2)s + 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{2T} \left[ -(T+2) \pm \sqrt{T^2 + 4} \right]$$

Para  $T = 1$  seg. Los dos puntos de ruptura están en:

$$s_1 = -0.382 \quad y \quad s_2 = -2.618$$

Donde es fácilmente verificable que uno pertenece al L.R.D. ( $K > 0$ ) y el otro al L.R.I. ( $K < 0$ ).

Notar que desde el punto de vista del análisis del sistema, solo la parte del lugar de las raíces que está ubicada entre  $\omega = \pi$  y  $\omega = -\pi$ , ramas primarias, para  $K > 0$ , son de relevancia. El sistema de lazo cerrado es estable para:  $0 < K < 1.1349$ .

Como se puede apreciar, graficar el lugar de las raíces **exacto**, de un sistema con un retardo en el lazo, utilizando un método sistemático para la

construcción del mismo, en general para la mayoría de los sistemas de control el problema resulta muy tediosa. Por ende se investigaran diferentes formas de aproximar el término del retardo puro, por un polinomio o una función racional de s. Un primer método de aproximar  $e^{-Ts}$  sería como sigue:

$$e^{-Ts} \cong \frac{1}{[1 + (Ts/n)]^n} \quad (*)$$

Como se sabe  $e^{-Ts}$  tiene un número infinito de polos, la aproximación es perfecta cuando n tiende a infinito. Si la ecuación (\*) se usa para la aproximación, solo las llamadas *ramas primarias o dominantes* del lugar serán las construidas, se sabe que realmente son infinitas.

Sin embargo, esto será adecuado para la gran mayoría de los problemas prácticos, pues solo las ramas primarias contendrán los polos dominantes del sistema.

Supongamos que se desea aproximar el término exponencial de la función de transferencia simple del lazo siguiente:

$$L(s) = \frac{K e^{-Ts}}{s} \cong \frac{K \times 1}{s \left[ 1 + \frac{Ts}{n} \right]^n}$$

La figura 84, ilustra las raíces dominantes del lugar aproximado, para n=2, n=3 y n=4, cuando T = 1. Si n tiende a infinito las ramas dominantes aproximadas se van aproximando a las reales.

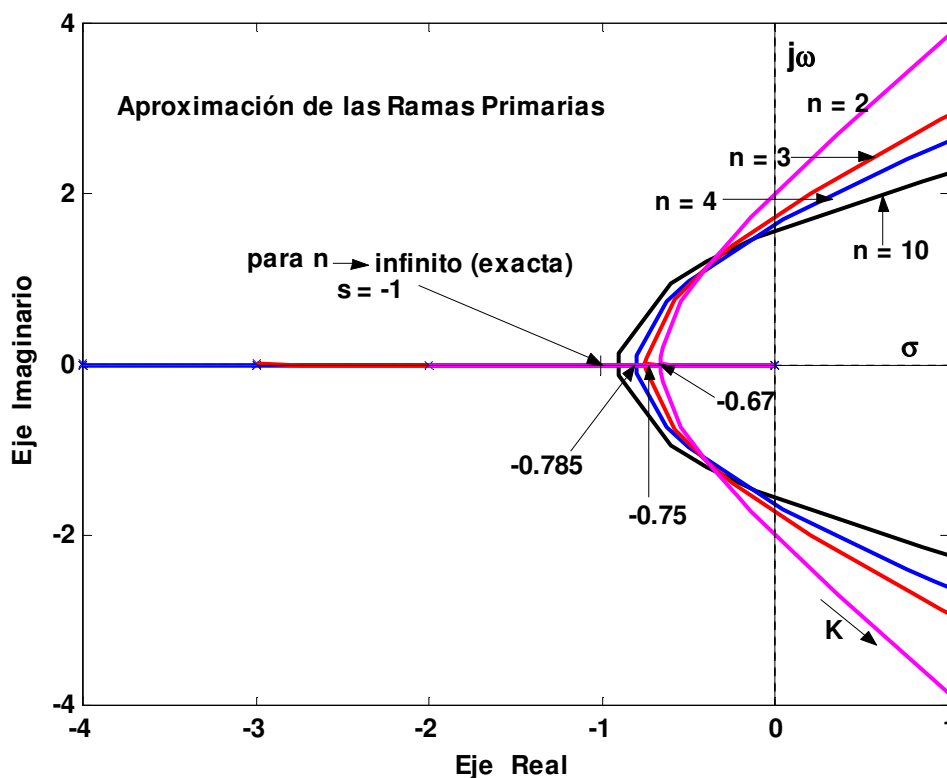


Figura 84

Otra forma de aproximar la función de transferencia del retardo puro, es usar una serie de potencias, serie de Taylor, o las llamadas aproximaciones de Padé. La diferencia entre estas aproximaciones y la dada por la ecuación (\*), es que en ésta la precisión mejora haciendo "n" mas grande, mientras que en las dos últimas formas, la validez de la aproximación depende de el valor de T, mientras mas chico sea T mejor.

Una técnica para aproximar la función de transferencia del retardo es expresar la misma con una expansión en serie de Taylor:

$$e^{-Ts} = 1 - Ts + \frac{T^2}{2!} s^2 - \frac{T^3}{3!} s^3 + \dots$$

Si solo se consideran los primeros dos términos, se tendrá como una primera aproximación:

$$e^{-Ts} \cong 1 - Ts$$

Una forma muy conveniente para evaluar una aproximación tal es comparar su diagrama de respuesta de frecuencia, Bode, con la de  $e^{-Ts}$ .

Recordar que la respuesta de frecuencia de  $e^{-Ts}$  es:

Ganancia = 1, o 0 dB.

Angulo de Fase =  $\Phi = -\omega T$  (rad)

En un diagrama de Bode, la curva de ganancia es constante igual a 0dB, (o sea 1), mientras que el ángulo de fase decrece linealmente con la frecuencia para un T dado. En la aproximación la respuesta de frecuencia de (1-Ts) es:

$$\text{Ganancia} = \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \text{y} \quad \text{Angulo de Fase} = \phi = \tan^{-1}(-\omega T) = -\tan^{-1}(\omega T)$$

La figura 85 muestra la respuesta de frecuencia de  $e^{-Ts}$  y de las aproximaciones para compararlas. Notar que en el grafico en lugar de w, está en función de (wT), en radianes y la escala es lineal.

Se puede ver inmediatamente que la ganancia de la aproximación no es constante e igual a uno como es requerido por  $e^{-Ts}$ , y que el ángulo de fase se aproxima solo para valores de (wT) muy pequeños.-

Si  $e^{-Ts}$  se escribe como:  $1/e^{-Ts}$  y el denominador es expandido en una serie de Taylor, el resultado es:

$$e^{-Ts} = \frac{1}{e^{Ts}} = \frac{1}{1 + Ts - \frac{T^2}{2!} s^2 + \frac{T^3}{3!} s^3 + \dots}$$

Si se toman solo los dos primeros términos del denominador se tendrá:

$$e^{-Ts} = \frac{1}{e^{Ts}} \cong \frac{1}{1 + Ts} \equiv (1 + Ts)^{-1}$$

La respuesta de frecuencia para esta aproximación es:

$$\text{Ganancia} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \quad \text{y} \quad \phi = -\tan^{-1}(\omega T)$$

y también se muestra en la figura 85.

Como se puede ver esta aproximación *no es mejor* que  $(1-Ts)$ , (solo varía la curva de ganancia).-

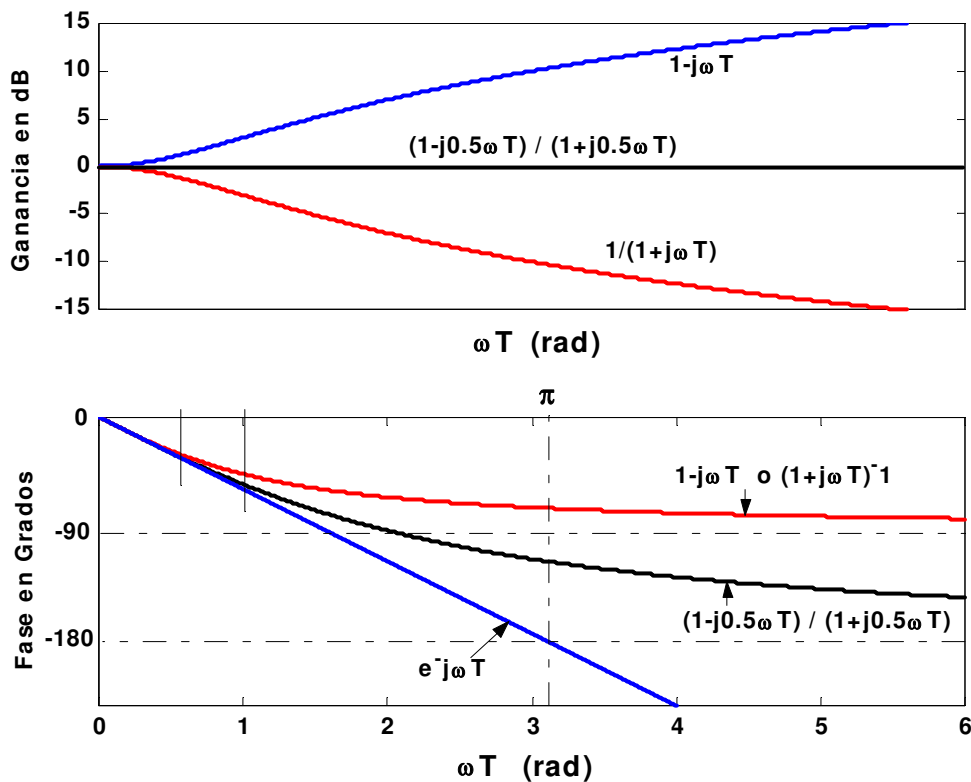


Figura 85

Otra forma de aproximar el retardo sería, escribiendo:

$e^{-Ts} = \frac{e^{-(T/2)s}}{e^{(T/2)s}}$ , expandiendo numerador y denominador de esta expresión en serie de Taylor y tomando solo los términos de primer orden, tendremos:

$$e^{-Ts} \cong \frac{1 - (T/2)s}{1 + (T/2)s}$$

La respuesta de frecuencia para esta aproximación es:

$$\text{Ganancia} = 1 \text{ y } \phi = \tan^{-1}(-\omega T/2) - \tan^{-1}(\omega T/2) = -\tan^{-1}(\omega T/2) - \tan^{-1}(\omega T/2)$$

$$\phi = -2\tan^{-1}(\omega T/2)$$

la cual también se muestra en la figura 85.

Esta aproximación provee la ganancia correcta, pero la curva de fase coincide con la curva verdadera solo para pequeños valores de  $(\omega T)$ . Sin embargo esta aproximación es *mejor* que las dos anteriores. Para un  $T$  dado mientras más chico sea, mayor será el rango de  $\omega$  para el cual la aproximación es válida.-

La otra aproximación que se estudiará, la cual es en general más usada que las anteriores es, como se dijo, la de Padé de diferentes órdenes:

$$e^{-x} = \lim_{(u+v) \rightarrow \infty} \frac{F_{u,v(x)}}{G_{u,v(x)}} \quad \text{con: } x = Ts$$

donde:

$$F_{uv} = 1 - \frac{vx}{(u+v)} + \frac{v(v-1)x^2}{(u+v)(u+v-1)2!} - \dots + \frac{(-1)^v v(v-1)\dots 2 \times 1 x^v}{(u+v)(u+v-1)\dots(u+1)v!}$$

$$G_{uv} = 1 + \frac{ux}{v+u} + \frac{u(u-1)x^2}{(v+u)(v+u-1)2!} + \dots + \frac{u(u-1)\dots 2 \times 1 x^u}{(v+u)(v+u-1)\dots(v+1)u!}$$

Para  $u = v = 1$ , se obtiene la aproximación de *Padé de primer orden*:

$$e^{-Ts} \cong \frac{1 - (T/2)s}{1 + (T/2)s} \equiv \frac{-(s - 2/T)}{(s + 2/T)}$$

la cual es idéntica a la expansión de Taylor ya vista.

Para  $u = v = 2$ , se obtiene la aproximación de *Padé de segundo orden*:

$$e^{-Ts} \cong \frac{1 - (T/2)s + (T^2/12)s^2}{1 + (T/2)s + (T^2/12)s^2} \equiv \frac{T^2 s^2 - 6Ts + 12}{T^2 s^2 + 6Ts + 12} \equiv \frac{s^2 - (6/T)s + (12/T^2)}{s^2 + (6/T)s + (12/T^2)}$$

Cuya respuesta de frecuencia es:

Ganancia = 1

$$\text{La fase: } \phi = -2 \tan^{-1} \frac{6\omega T}{12 - (\omega T)^2}$$

El diagrama de Bode de la fase es mostrado en la figura 86.

Notar que el ángulo de fase es correcto hasta  $\omega T = 2$  radianes.

Como se ve se produce un considerable mejoramiento sobre las aproximaciones con series de Taylor de la figura 85.

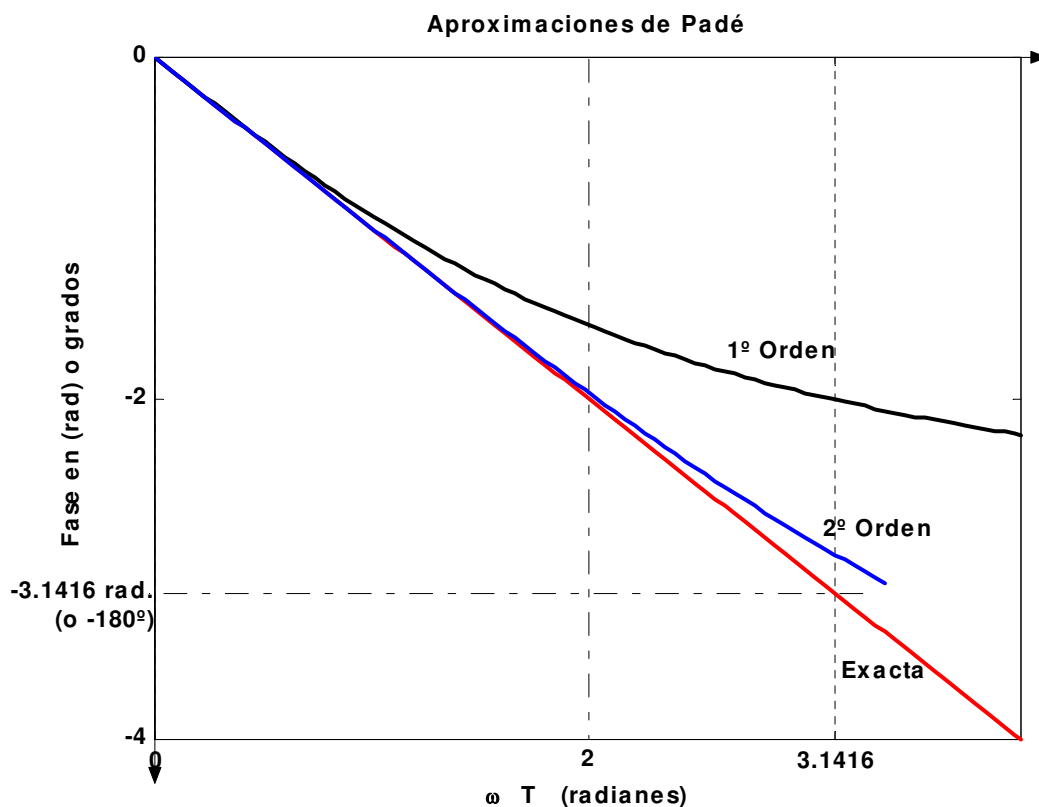


Figura 86



Para la aproximación de *Padé de tercer orden*, se tendrá:

$$e^{-Ts} \cong \frac{1 - \frac{1}{2}x + \frac{3 \times 2 \times x^2}{6 \times 5 \times 2!} - \frac{3 \times 2 \times 1 \times x^3}{6 \times 5 \times 4 \times 3!}}{G_{uv}(x)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{10} - \frac{x^3}{120}}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{10} + \frac{x^3}{120}} \quad \text{como } x = Ts:$$

$$e^{-Ts} \cong \frac{-\{s^3 - (12/T)s^2 + (60/T^2)s - (120/T^3)\}}{\{s^3 + (12/T)s^2 + (60/T^2)s + (120/T^3)\}}$$

Si por ejemplo  $T = 1$  seg., las aproximaciones vistas serían:

- De 1º Orden:  $e^{-2s} \cong \frac{-(s-2)}{(s+2)}$
- De 2º Orden:  $e^{-2s} \cong \frac{(s^3 - 6s + 12)}{(s^3 + 6s + 12)}$
- De 3º Orden:  $e^{-2s} \cong \frac{-(s^3 - 12s^2 + 60s - 120)}{(s^3 + 12s^2 + 60s + 120)}$

#### Ejemplo 45:

El sistema con realimentación unitaria,  $K_s = 1$ , ya visto al principio tenía la siguiente función de transferencia del camino directo:

$$G(s) = \frac{Kc e^{-Ts}}{s(s+1)} \quad \text{Para } T = 1 \text{ seg.}, \quad (\text{y llamamos } Kc \text{ a } K^*).$$

1. Determinar el rango verdadero de  $Kc$  para que el sistema sea estable.
2. Graficar el lugar de las raíces aproximado del sistema, determinando el  $Kc_{\text{Límite}}$ ,  $\omega_c$ , además los polos y ceros del sistema si  $K = 5/12$ .
3. Graficar la respuesta temporal verdadera del mismo a una entrada escalón unitario, se puede usar Frtool.-
4. Graficar la respuesta temporal aproximada del sistema de control a una entrada escalón unitario.

---

1. Aplicando el criterio de Nyquist, como ya se determino:  
 $Kc_{\text{Límite}} = 1.1349$  y  $\omega_c = 0.8603$  rad/seg.

2. Con una aproximación de primer orden se tendrá:

$$G(s) = \frac{-Kc(s-2)}{s(s+1)(s+2)}, \quad \text{el lugar aproximado es el indicado en la figura 87.}$$

3) Para graficar la respuesta exacta del sistema a un escalón unitario en la señal de entrada se puede usar el programa Frtool, no es de Matlab, que usa el Matlab 5.3 como base. El procedimiento sería el siguiente:

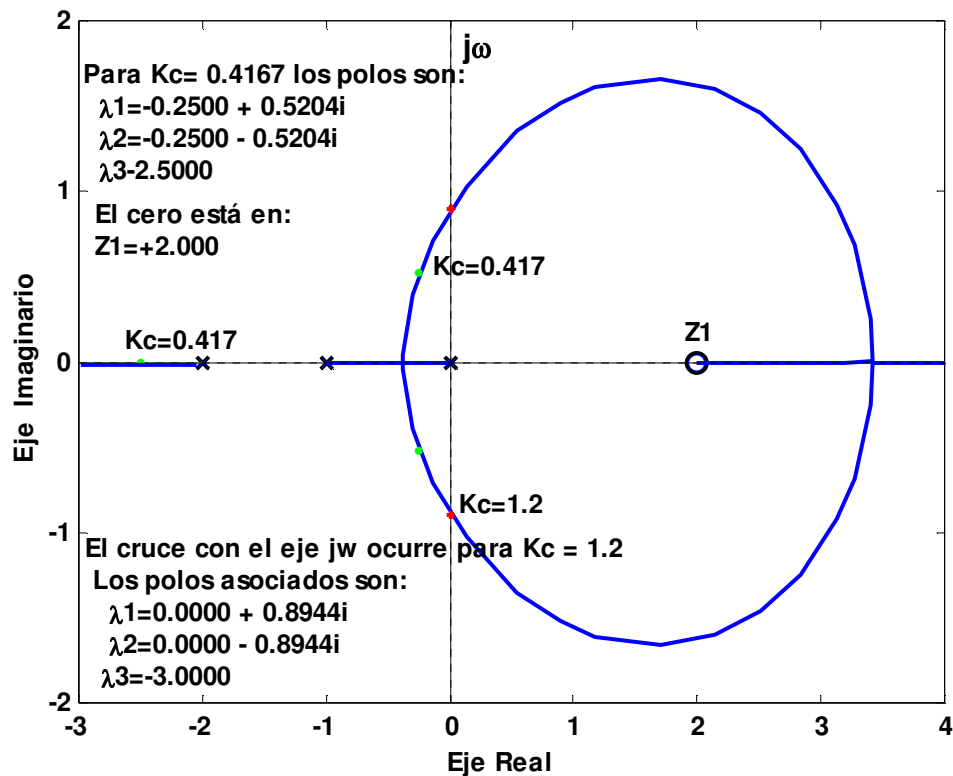


Figura 87

»  $G = \text{tf}(5/12, [1 \ 1 \ 0], 'inputdelay', 1)$

Transfer function:

$$\exp(-1*s) * \frac{0.4167}{s^2 + s}$$

Llamando a Frtool e importando G y siguiendo correctamente los pasos correspondientes se puede graficar la respuesta pedida.-

4) Para graficar la respuesta aproximada del sistema a un escalón unitario en la señal de entrada se puede usar el programa Pidesign del Csad.

» pidesign

Enter numerator [n] > 5/12

Enter denominator [d] > [1 1 0]

Enter controller type (p, pi, pd, pid, other) [pid] > p

PIDESIGN > k

Enter Kp [1] >

PIDESIGN > I

Time Delay [0] > 1

Enter the order Pade approximation: [3] > 1

PIDESIGN DELAY > T

Choose output variable: Y,E,U [y] >

TFTPLOT > f

Enter desired final time [26.4] > 25

TFTPLOT > p

La respuesta con sus atributos se muestra en la figura 88.

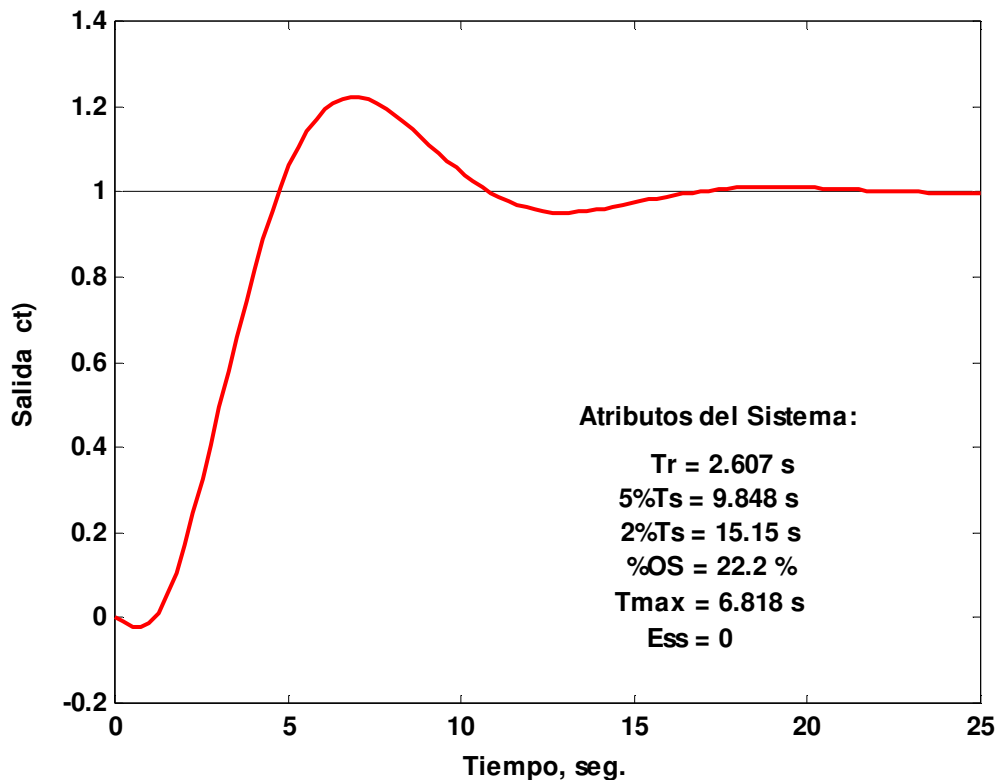


Figura 88

Repetiremos los puntos 2) y 4), con aproximaciones de Padé de 2º y 3º

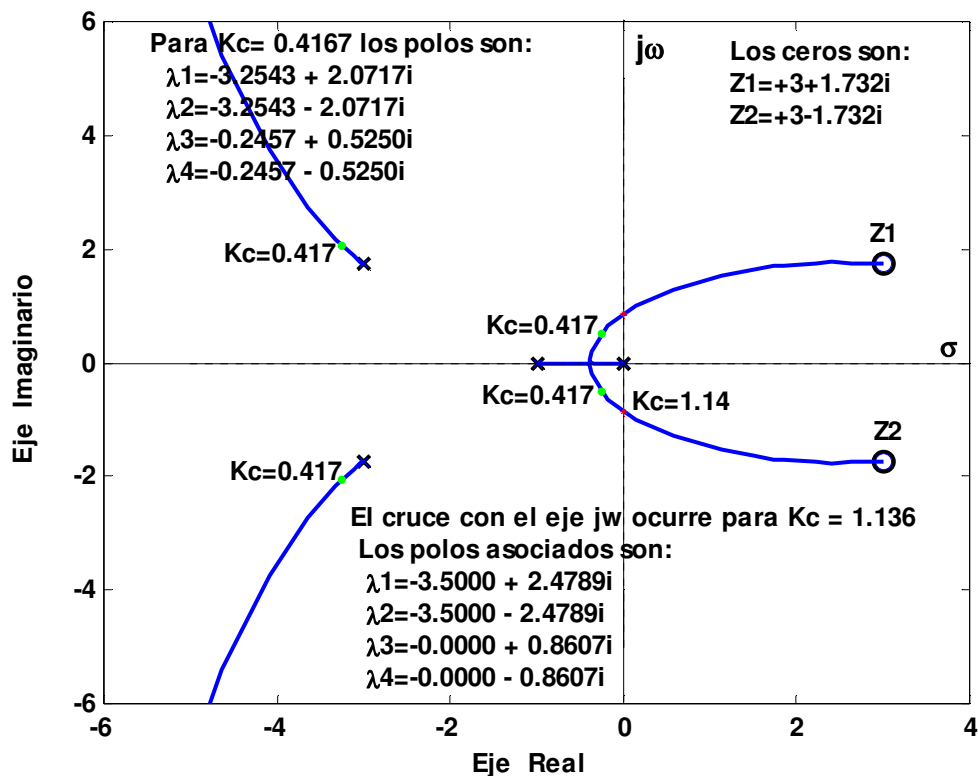


Figura 89

orden.

2) y 4): La función de transferencia del lazo aproximada del sistema para Padé de 2º orden es:

$$G(s) = \frac{Kc(s^2 - 6s + 12)}{s(s+1)(s^2 + 6s + 12)} \text{ el L.R. en la figura 89 y la } c(t) \text{ en la 90.}$$

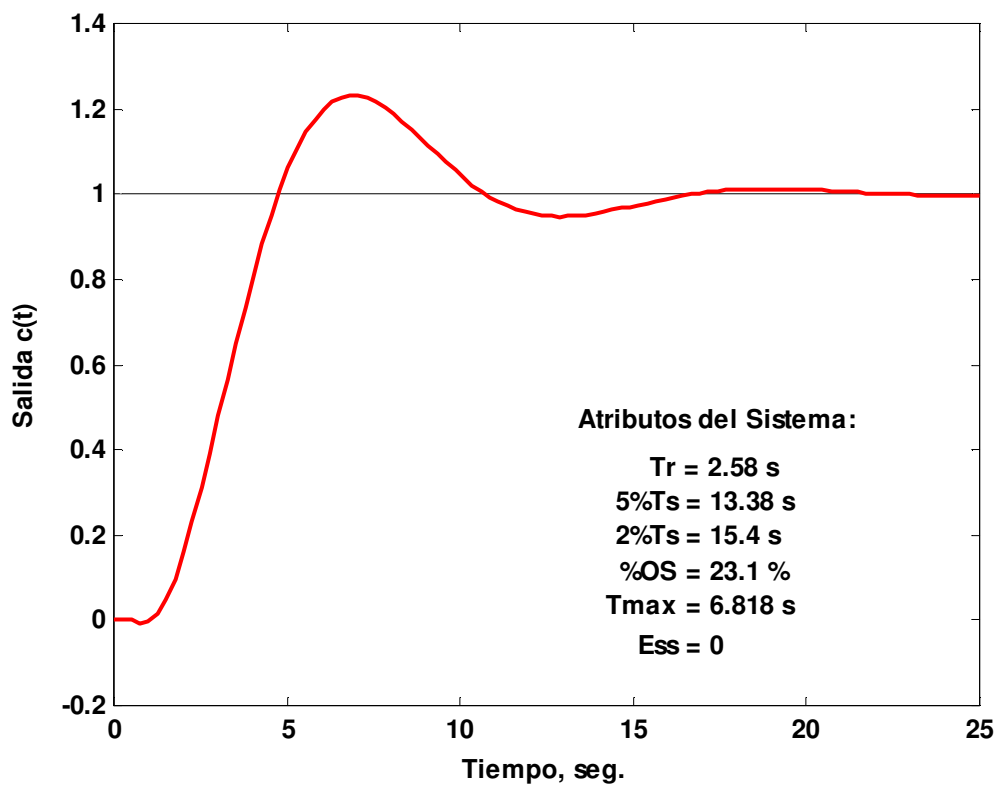


Figura 90

2) y 4) La función de transferencia del lazo aproximada del sistema para Padé de 3º orden será:

$$G(s) = \frac{-Kc(s^3 - 12s^2 + 60s - 120)}{s(s+1)(s^3 + 12s^2 + 60s + 120)}$$

El Lugar de las raíces y la respuesta temporal al escalón unitario en la entrada c(t) se muestran en las figuras 91 y 92 respectivamente.

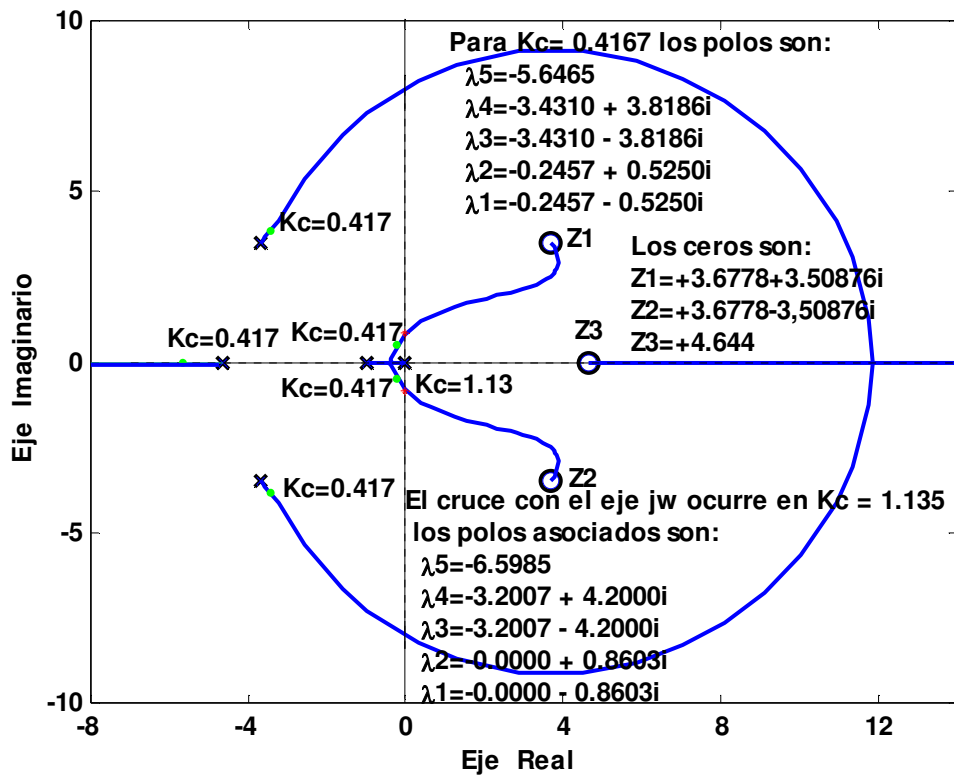


Figura 91

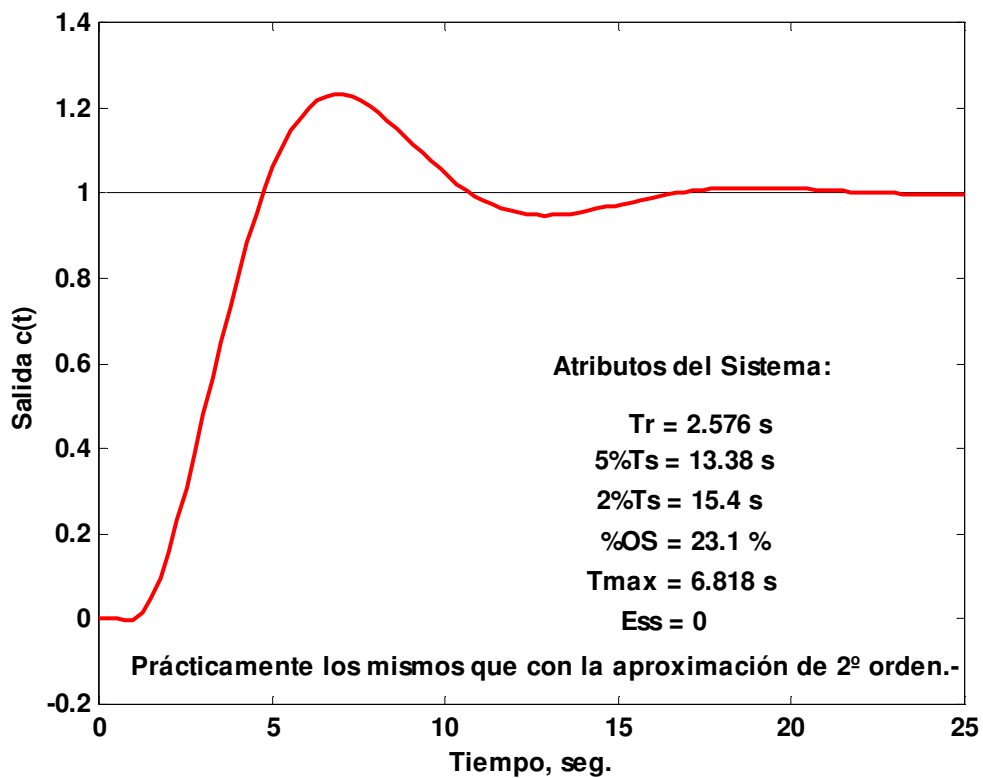


Figura 92

## Sensibilidad de las Raíces. Sistemas Robustos

En el diseño de los sistemas de control, no sólo es importante llegar a sistemas que tengan una característica deseada, sino también es importante que el sistema deba ser en lo posible insensible a la variación de algunos parámetros del mismo. Por ejemplo, un sistema que pueda funcionar satisfactoriamente con una cierta ganancia del lazo K, pero si es muy sensible a la variación de K pueda llegar a una región, los polos en el plano s, de funcionamiento indeseable o volverse inestable si K varia solo en una pequeña cantidad. En la terminología formal de los sistemas de control, un sistema que es insensible a la variación de los parámetros del mismo se llama un *Sistema Robusto*. Por tanto, el estudio del lugar geométrico de las raíces de sistemas de control debe involucrar no sólo la forma del lugar geométrico de las raíces con respecto al parámetro variable, K por ejemplo, sino también *como las raíces a lo largo del lugar geométrico se mueven con la variación de parámetro variable*.

Se definirá la *sensibilidad de las raíces de la ecuación característica*, simplemente como la *sensibilidad de las raíces* con respecto a la variación del algún parámetro tal como la ganancia del lazo K. Específicamente la *sensibilidad de las raíces* con respecto a K se define así:

$$S_K \equiv \frac{\Delta s / s}{\Delta K / K} \Rightarrow S_K = \frac{ds / s}{dK / K} = \frac{ds}{dK} \frac{K}{s} \Rightarrow S_K = \frac{1}{dK / ds} \frac{K}{s}$$

En término del lugar de las raíces de la ecuación característica la sensibilidad de las mismas seria, la variación porcentual del cambio de las mismas, a lo largo del lugar, dividida por la variación porcentual del cambio producido en la ganancia del lazo K.

Como se puede apreciar *la sensibilidad de las raíces de los puntos de ruptura es infinita*. Desde el punto de vista de la *sensibilidad de las raíces*, se deberá evitar seleccionar valores de K que operan sobre puntos de ruptura, que como se sabe corresponden a raíces de orden múltiple de la ecuación característica.

La figura 93, muestra el lugar geométrico de las raíces de:

$$s^2 (s+1)^2 + K (s+2) = 0$$

El mismo a sido construido con el programa Rlplot del Csad/Matlab.

La ganancia K se incrementa uniformemente en el lugar completo de la manera siguiente:

Para el L. R. D. ( $K > 0$ ), linspace (0, 50, 50).-

Para el L. R. I. ( $K < 0$ ), linspace (0, -50, 50).-

Cada marca + sobre la gráfica del lugar geométrico de las raíces representa una raíz para un valor de K. Por tanto, se ve que la sensibilidad

de las raíces se incrementa cuando las raíces se aproximan a los puntos de ruptura en  $s = 0$ ,  $s = -0.543$ ,  $s = -1$  y  $s = -2.457$ .

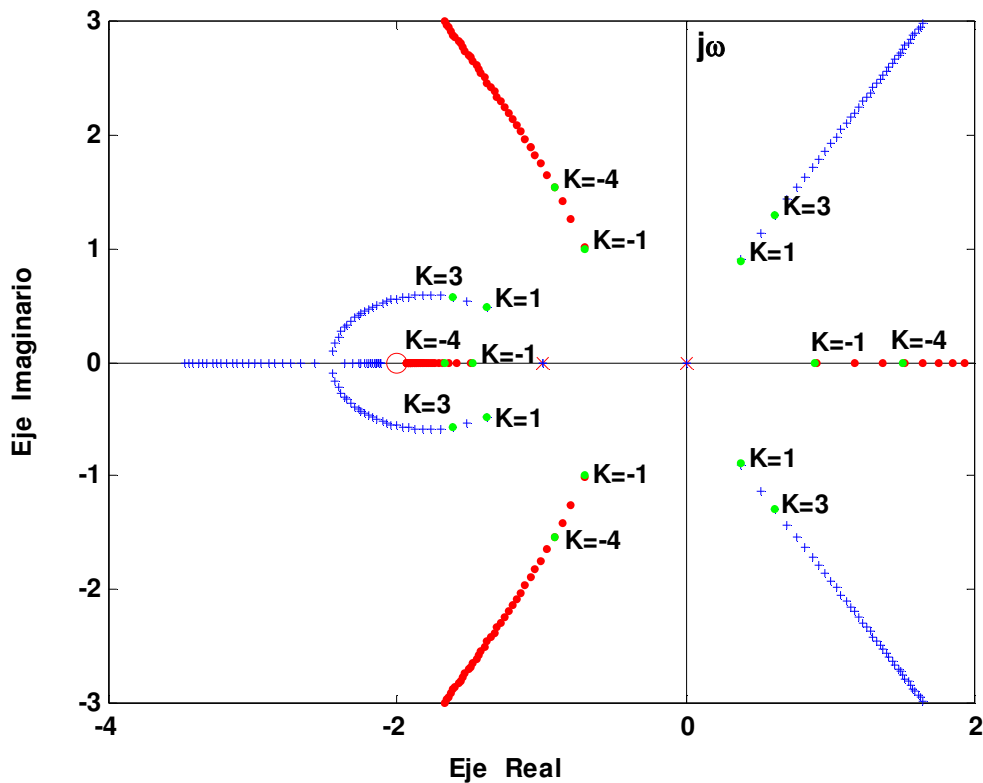


Figura 93

Una expresión analítica de la sensibilidad de las raíces es difícil de obtener para un caso general. Para el sistema de segundo orden que tiene:

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

La ecuación característica es:  $s(s+1) + K = 0$

Por lo tanto:

$$K = -s(s+1) = -(s^2 + s) \quad \text{en consecuencia:} \quad \frac{dK}{ds} = -(2s+1)$$

$$\text{y además:} \quad \frac{K}{s} = -(s+1)$$

La sensibilidad  $S_K$ , será:

$$S_K = \frac{K}{s} \frac{1}{dK/ds} = -(s+1) \frac{1}{-(2s+1)} \Rightarrow \boxed{S_K = \frac{(s+1)}{(2s+1)}}$$

En donde  $s = \sigma + j\omega$ , y  $s$  debe tomar valores sobre el lugar geométrico de las raíces. Para las raíces sobre el eje real,  $\omega = 0$ , por lo tanto:

$$|S_K|_{\omega=0} = \left| \frac{\sigma+1}{2\sigma+1} \right| \quad (**)$$

En esta expresión se ve que en el punto de ruptura  $K = 0.25$ ,  $\sigma = -0.50$  la sensibilidad de las raíces tiende a infinito.-

Cuando las dos raíces son complejas,  $\sigma = -0.50$  para todos los valores de  $\omega$ , por ende:

$$|S_K|_{\sigma=-0.5} = \frac{\sqrt{(0.25 + \omega^2)}}{2\omega}$$

De esta última ecuación es claro que la sensibilidad de las raíces en pares complejos conjugados es la misma, ya que  $\omega$  aparece solo como  $\omega^2$  en la ecuación. La ecuación (\*\*), indica que la sensibilidad de las dos raíces reales son diferentes para un valor dado de la ganancia K. La razón también se puede ver ya que las raíces reales no son simétricas respecto al eje imaginario del plano s.

La tabla siguiente da las magnitudes de la sensibilidad de las dos raíces de la ecuación característica para diferentes valores de K, donde  $|S_{K1}|$ , denota la sensibilidad de la primera raíz y  $|S_{K2}|$  para la segunda raíz. Estos valores indican que aunque las dos raíces reales alcanzan  $\sigma = -0.50$  para el mismo valor de  $K = 0.25$ , y cada raíz viaja la misma distancia desde  $s = 0$  y  $s = -1$ , respectivamente, la sensibilidad de las dos raíces reales no es la misma.-

K	Raíz 1	$ S_{K1} $	Raíz 2	$ S_{K2} $
0	0	1.000	-1.000	0
0.04	-0.042	1.045	-0.958	0.454
0.16	-0.200	1.333	-0.800	0.333
0.24	-0.400	3.000	-0.600	2.000
0.25	-0.500	Infinito	-0.500	Infinito
0.28	-0.5 + j 0.173	1.527	-0.5 - j 0.173	1.527
0.40	-0.5 + j 0.387	0.817	-0.5 - j 0.387	0.817
1.20	-0.5 + j 0.975	0.562	-0.5 - j 0.975	0.562
4	-0.5 + j 1.937	0.516	-0.5 - j 1.937	0.516
infinito	-0.5 + j infinito	0.500	-0.5 - j infinito	0.500