Facultad de Ingeniería UNER

Control Básico

Repaso de Transformada de Laplace y Circuitos con operacionales

2017

Control de Procesos

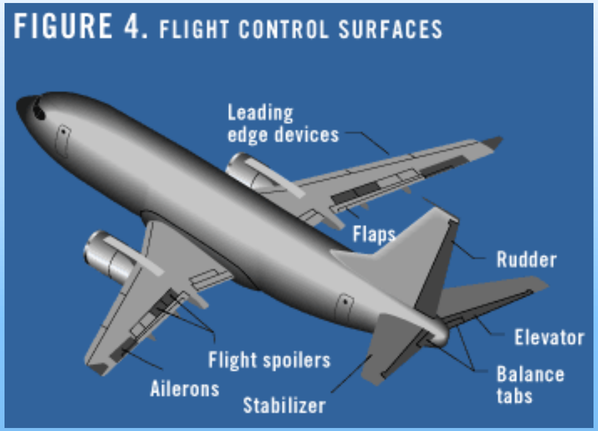
- En los últimos años, los sistemas de control han asumido un papel cada vez más importante en el desarrollo y avance de la tecnología.

- Éstos se encuentran en gran cantidad en todos los sectores:
  - ✓ Control de calidad de productos manufacturados
  - ✓ Líneas de ensamble automático
  - ✓ Domótica
  - ✓ Tecnología espacial
  - ✓ Bioingeniería
  - ✓ Robótica
  - ✓ Etc.

Facultad de UNER Ingeniería

Ejemplos de procesos automatizados

Aeronáutica



Satelital

Autoclave

Incubadora

Control de Procesos

Como vemos, el campo de aplicación de los sistemas de control es muy amplio.

Y una herramienta que se utiliza en el diseño de control clásico es precisamente:

La Transformada de Laplace

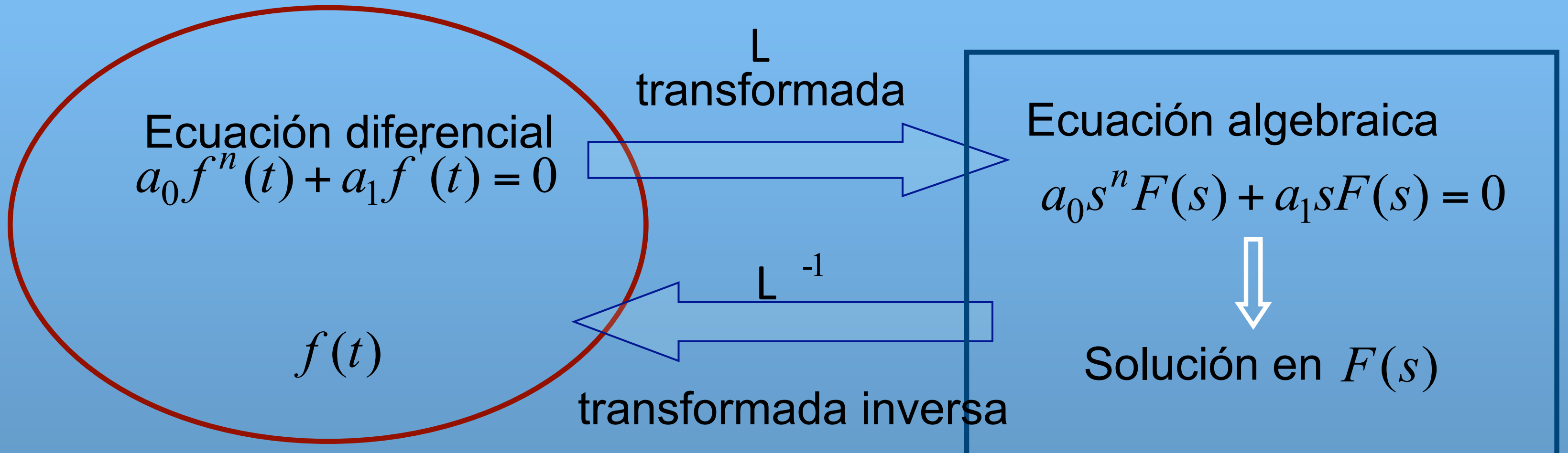
¿Por qué usar Transformada de Laplace?

- En el estudio sistemas es necesario considerar **modelos dinámicos**, es decir, modelos de comportamiento variable respecto al tiempo.
- Esto trae como consecuencia el uso de **ecuaciones diferenciales** respecto al tiempo que describan el comportamiento del modelo utilizando las leyes físicas, químicas y/o eléctricas.
- El comportamiento dinámico de los procesos en la naturaleza puede representarse de manera aproximada por el siguiente **modelo:**

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n - 1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \ldots\ldots + a_0 y(t) = x(t)$$

¿Por qué usar Transformada de Laplace?

- De hecho, la transformada de Laplace permite **resolver** ecuaciones diferenciales lineales mediante la transformación en ecuaciones algebraicas con lo cual se facilita su estudio.



La transformada de Laplace

La transformada de Laplace es un operador lineal perteneciente a la familia de las integrales de transformación. Se puede decir que es la segunda transformación más utilizada para resolver problemas físicos, después de la transformación de Fourier. La transformada de Laplace unilateral se define como:

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

donde:

$f(t)$ es una función en el tiempo

$F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$

s es una variable compleja

$\mathcal{L}$ es el operador lineal de Laplace

La transformada de Laplace

La transformada de Laplace convierte una ecuación diferencial en una ecuación algebraica, su solución se obtiene a partir de operaciones básica de álgebra.

No todas las funciones tienen transformada de Laplace. La transformada de Laplace de $f(t)$ existe si

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

donde:

σ es una constante real positiva

Si la integral converge para $0 < \sigma < \infty$

La transformada inversa de Laplace

La transformada inversa de Laplace formalmente se define por la siguiente integral de inversión:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

donde c es una constante mayor que cualquier punto singular de $F(s)$
Esta integral de inversión rara vez se usa, ya que existen otros métodos más directos y simples. Como por ejemplo tablas de transformadas o .
fracciones parciales.

Propiedades de la transformada de Laplace

Sean $f(t), f_1(t), f_2(t)$ funciones cuyas TL son: $F(s), F_1(s), F_2(s)$

y a un escalar (real o complejo). Se cumplen las siguientes propiedades:

Linealidad: $\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\} = F_1(s)+F_2(s)$ $\quad \mathcal{L}\{af(t)\} = aF(s)$

Derivación: $L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ **y** $L\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

Integración: $\boxed{L\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{1}{s}L\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}}$

Traslación temporal:

$$\boxed{\begin{aligned} &L\{f(t)\} = F(s) \\ &L\{f(t)u(t-t_0)\} = e^{-st_0}F(s) \end{aligned}}$$

Propiedades de la transformada de Laplace

Desplazamiento en la Frecuencia:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a)$$

Teorema de valor Inicial:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Teorema de valor final:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Tabla de transformadas de Laplace

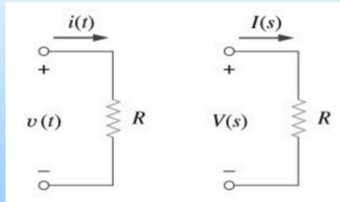
$f(t)$	$F(s)$
$\mu(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{\sigma t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$
$e^{\sigma t} \cos \omega t$	$\frac{(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$

$t^n \mu(t)$	$\frac{n!}{s^{(n+1)}}$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{(n+1)}}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$te^{\sigma t} \sin \omega t$	$\frac{2\omega(s-\sigma)}{((s-\sigma)^2+\omega^2)^2}$
$te^{\sigma t} \cos \omega t$	$\frac{(s-\sigma)^2-\omega^2}{((s-sigma)^2+\omega^2)^2}$

Facultad de
UNER Ingeniería

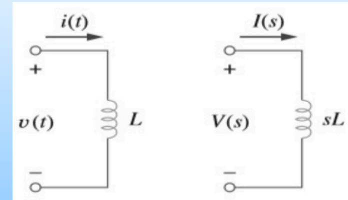
Transformada de circuitos electricos

Circuito Resistivo:



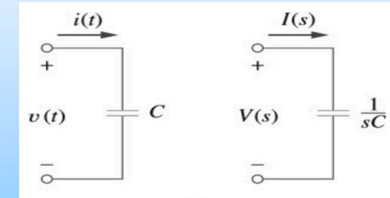
$$v(t) = i(t)R \Leftrightarrow V(s) = I(s)R$$

Circuito Inductivo:



$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \Leftrightarrow V(s) = sLI(s) - Li(0)$$

Circuito Capacitivo:



$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \Leftrightarrow V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{1}{s}v(0)$$

En Resumen (suponiendo condiciones iniciales nulas:

Resistor: $V(s) = RI(s)$

Inductor: $V(s) = sLI(s)$

Capacitor: $V(s) = \dfrac{1}{sC}I(s)$

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$$

Resistor: $Z(s) = R$

Inductor: $Z(s) = sL$

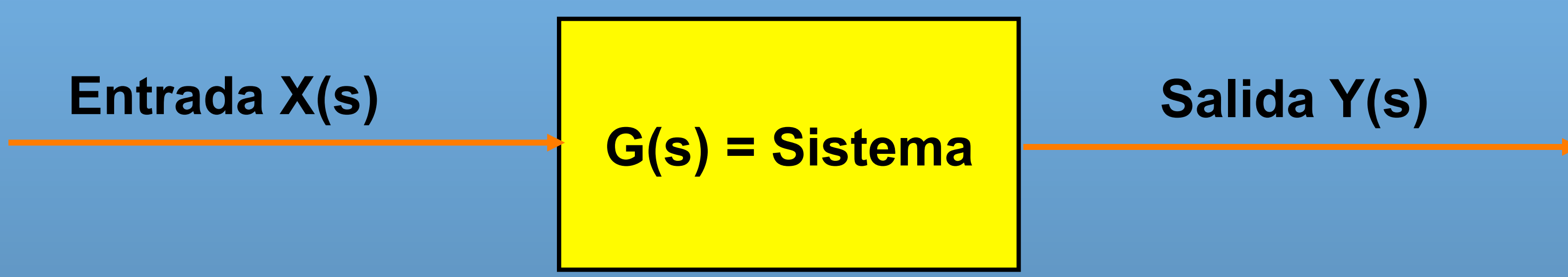
Capacitor: $Z(s) = \dfrac{1}{sC}$

Función de Transferencia:

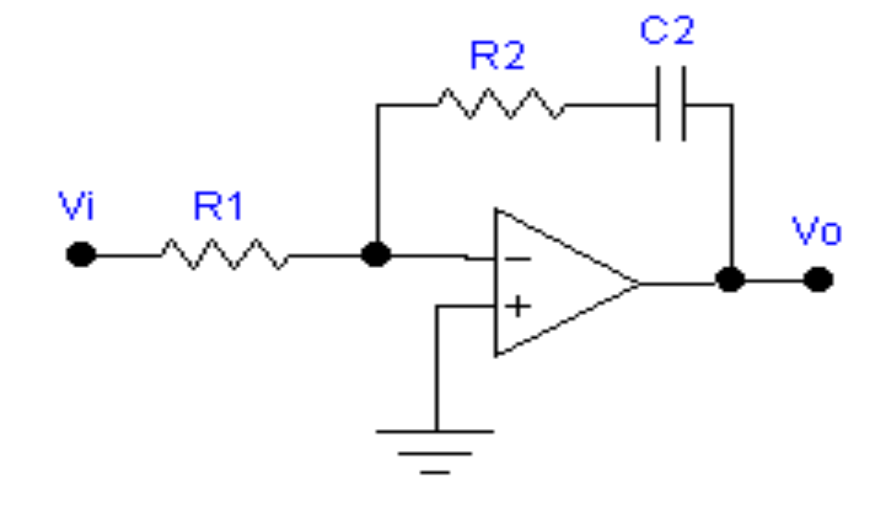
- Representa el comportamiento dinámico del proceso
- Nos indica como cambia la salida ante un cambio en la entrada

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \mathrm{G(s)}$$

- Diagrama de bloques



Circuitos con operacionales:



Calcular la función de transferencia: $F(s) = \frac{Vo(s)}{Vi(s)}$

Desarrollo de Fracciones Parciales:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}$$

Raíces del denominador *D*(*s*) o polos de F(s):

Caso I – Polos reales simples	$(s-a)$
Caso II – Polos reales múltiples	$(s-a)^2$
Caso III – Polos complejos conjugados	$\left(as^2 + bs + c\right)$

Caso 1: Polos reales simples:

$$\boxed{F(s) = \frac{A}{s-a}}$$

Ejemplo:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s+1}{s^3 + s^2 - 6s} = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+3}$$

Continuación:

$$F(s)=\frac{s+1}{s(s-2)(s+3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+3}$$

$$\frac{A}{s} \quad \Rightarrow \left[\frac{s+1}{(s-2)(s+3)}\right]_{s=0} \quad = -\frac{1}{6}$$

$$\frac{B}{s-2} \quad \Rightarrow \left[\frac{s+1}{s(s+3)}\right]_{s=2} \quad = +\frac{3}{10}$$

$$\frac{C}{s+3} \quad \Rightarrow \left[\frac{s+1}{s(s-2)}\right]_{s=-3} \quad = -\frac{2}{15}$$

Otra forma:

$$\frac{s+1}{s^3+s^2-6s}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+3}$$

$$=\frac{A(s-2)(s+3)+Bs(s+3)+Cs(s-2)}{s(s-2)(s+3)}$$

$$\therefore \quad s+1=A(s-2)(s+3)+Bs(s+3)+Cs(s-2)$$

$$\therefore \quad \left[\frac{s+1}{(s-2)(s+3)}\right]_{s=0}=A$$

$$s+1=A(s^2+s-6)+B(s^2+3s)+C(s^2-2s)$$

método alternativo

$$=s^2(A+B+C)+s(A+3B-2C)+(-6A)$$

$$\longrightarrow A+B+C=0; \quad A+3B-2C=1; \quad -6A=1$$ y resolver...

En definitiva:

$$F(s) = \frac{s+1}{s^3 + s^2 - 6s}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+3}$$

$$= -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{3}{10}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \frac{2}{15}\left[\frac{1}{s+3}\right]$$

La transformada inversa de Laplace es:

$$f(t) = -\frac{1}{6} + \frac{3}{10}e^{2t} - \frac{2}{15}e^{-3t}$$

Caso 2: Polos reales múltiples:

$$\boxed{F(s)=\frac{A}{(s-a)^2}+\frac{B}{(s-a)}}$$

Ejemplo:

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{s^3-4s^2+4}{s^2(s-2)(s-1)}=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s-2}+\frac{D}{s-1}$$

Polos reales múltiples

Polos reales simples

$$A = \left[(s-a)^2 \frac{N(s)}{D(s)} \right]_{s=a}$$

$$B = \left[\frac{d}{ds} \left\{ (s-a)^2 \frac{N(s)}{D(s)} \right\} \right]_{s=a}$$

$$F(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2(s-2)(s-1)}$$

$$\frac{A}{s^2} \Rightarrow \left[\frac{s^3 - 4s^2 + 4}{(s-2)(s-1)} \right]_{s=0} = 2$$

$$\frac{B}{s} \Rightarrow \left[\frac{d}{ds} \left\{ \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{(s-2)(s-1)} \right\} \right]_{s=0} = 3$$

$$F(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2(s-2)(s-1)}$$

$$= \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s-1}$$

$$= 2\left[\frac{1}{s^2}\right] + 3\left[\frac{1}{s}\right] - \left[\frac{1}{s-2}\right] - \left[\frac{1}{s-1}\right]$$

Transformada inversa de Laplace:

$$f(t) = 2t + 3 - e^{2t} - e^{t}$$

Caso 3: Polos complejos conjugados:

conjugados complejos

Ejemplo 1:

$$\frac{4}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-a} + \frac{B^*}{s-a^*}, \qquad a = 2i$$

$$A = \left[\frac{4}{s^2+4}\right]_{s=0} = +1$$

$$B = \left[\frac{4}{s(s+2i)}\right]_{s=2i} = -\frac{1}{2}$$

$$B^* = \left[\frac{4}{s(s-2i)}\right]_{s=-2i} = -\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-a^*}\right]$$

Transformada inversa de Laplace:

$$x(t) = 1 - \cos(2t)$$

Ejemplo 2:

$$\frac{s+4}{s^2+6s+25} = \frac{B}{s-a} + \frac{B^*}{s-a^*}, \qquad a = -3+4i$$

$$\boxed{\begin{aligned} B &= \left[\frac{s+4}{s+3+4i}\right]_{s=-3+4i} = \frac{1}{8}(4-i) \\ B^* &= \left[\frac{s+4}{s+3-4i}\right]_{s=-3-4i} = \frac{1}{8}(4+i) \end{aligned}}$$

Transformada inversa de Laplace: $f(t) = 2|B|e^{-\sigma t}\cos(\omega t+\phi)$

donde $B = \frac{1}{8}(4-i), \quad |B| = \frac{\sqrt{17}}{8},$

$\sigma = 3, \quad \omega = 4, \quad \varphi = -0.245$

$$\therefore \; f(t) = \frac{\sqrt{17}}{4} e^{-3t}\cos(4t-0.245)$$