Asignatura: CONTROL BÁSICO

**TEMAS:**

**- Sistemas de Segundo Orden**

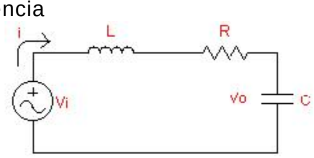
**- Sistemas de Orden Superior**

Facultad de Ingeniería – UNER
Carrera: Bioingeniería
Plan de estudio: 2008

## SISTEMAS de SEGUNDO ORDEN

Función de trasferencia

$$\frac{Vo(s)}{Vi(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$




Frecuencia natural

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

## Sistemas de Segundo Orden

**$Y''(t)+2.\zeta.wnY'(t)+wn^2\,Y(t) = K.wn^2\,X(t)$**

**X(t) = entrada**
**Y(t) = salida**

**Aplicando Laplace y considerando condiciones iniciales nulas:**

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K.wn^2}{s^2 + 2\zeta.wn.s + wn^2} = \frac{K}{T^2.s^2 + 2.\zeta.T.s + 1}$$

**Función de transferencia de segundo orden**

**Donde:** $\zeta$ = coeficiente de amortiguamiento, normalmente $0<\zeta<1$
**wn**= frecuencia natural no amortiguada
**T→** Constante de tiempo de un sistema de Seg. Orden **T=1/wn**
**K**= ganancia del sistema

## Sistemas de Segundo Orden

**En el denominador de G(s) se encuentran los polos, que dan la estabilidad y características a la respuesta transitoria, para encontrarlos hacemos:**

**D(s) = $s^2$+2 ¸.wn. s+$wn^2$ = 0 => resolvente => ??????????**

Polos de Segundo Orden → $p_{1,}\ p_2 = -¸\, wn \pm wn\sqrt{¸^{\,2} - 1}$

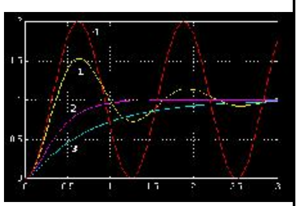
## SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

1.- Subamortiguado 0< ζ<1
Respuesta transitoria oscilatoria

2.- Amortiguamiento critico ζ=1
Respuesta deja de oscilar

3.- Sobreamortiguado ζ>1
Respuesta nunca oscila

4.- No amortiguado ζ=0
Respuesta oscilatoria o críticamente estable



Que pasa si ζ<0 ????

## Sistemas de Segundo Orden

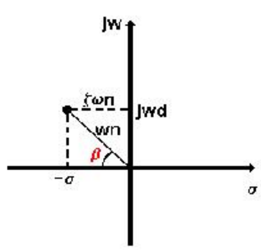
**Polos de Segundo orden en el plano complejo cuando 0<¶<1**

$$-¸\, wn \pm jwd$$

$$\pm = ¸\, wn$$

$$wd = wn\sqrt{1 - ¸^{\,2}}$$

$$¸ = \cos$$



## Sistemas de segundo orden: Respuesta al Escalón

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K.\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad X(s) = \frac{M}{s}$$

(1) Caso subamortiguado $(0 < \zeta < 1)$: en este caso $C(s)/R(s)$ se escribe

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{K.\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

donde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ se denomina frecuencia natural amortiguada

$$Y(s) = \frac{K.M.\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s} = K.M\left(\frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right)$$

## Sistemas de segundo orden: Respuesta al Escalón

y conociendo que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t} sen\,\omega_d t$$

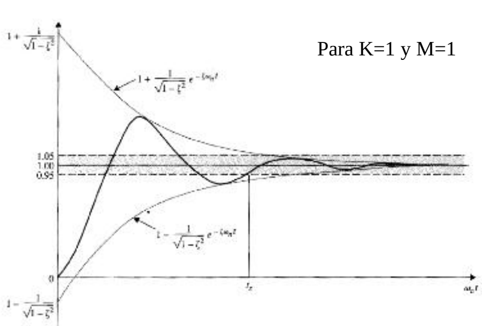
Se obtiene la salida en el tiempo

$$y(t) = K.M\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}.\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}.sen(\omega_d t)\right)\right] \qquad (t \geq 0)$$

Por relaciones trigonométricas se puede expresar también como:

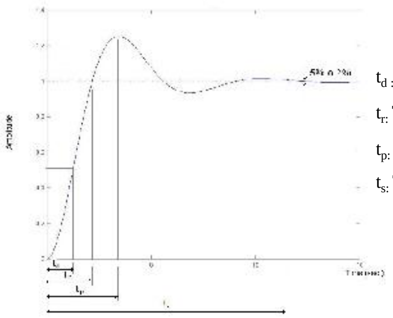
$$y(t) = K.M\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} sen\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right] \qquad (t \geq 0)$$

## Sistemas de segundo orden: Respuesta al Escalón




Para K=1 y M=1

## Sistemas de segundo orden: Respuesta al Escalón



$t_{d:}$ Tiempo de retardo

$t_{r:}$ Tiempo de crecimiento

$t_{p:}$ Tiempo de pico

$t_{s:}$ Tiempo de establecimiento

## Sistemas de segundo orden: Respuesta al Escalón

- Tiempo pico

$$t_p = \frac{®}{μ_d}$$

- Tiempo de crecimiento

$$t_r = \frac{1}{μ_d}\tan^{-1}\left[-\frac{\sqrt{1-s^2}}{s}\right] = \frac{® -}{μ_d}$$

- Máximo Sobreimpulso o Máxima Sobre elongación (Mp)

$$Mp(\%) = e^{-(s/\sqrt{1-s^2})®}.100$$

## Sistemas de segundo orden: Respuesta al Escalón

- Tiempo de establecimiento

Criterio del 2% $t_s = \frac{4}{sμ_n}$

Criterio del 5% $t_s = \frac{3}{sμ_n}$

## Sistemas de segundo orden con ς=1 y ς=0 : Respuesta al Escalón con MATLAB

**(3) Caso de amortiguamiento crítico** $(\zeta = 1)$

en este caso se tienen dos polos reales iguales:

$$Y(s) = \frac{K.M.\mu_n^2}{(s+\mu_n)^2 s}$$

la transformada inversa: $y(t) = K.M\left(1 - e^{-\mu_n t}(1+\mu_n t)\right) \qquad (t \geq 0)$

**(4) Caso SIN amortiguamiento** $(\zeta = 0)$

en este caso se tienen dos polos imaginarios puros:

$$Y(s) = \frac{K.M.\mu_n^2}{(s^2+\mu_n^2).s}$$

la transformada inversa: $y(t) = K.M\left(1 - \cos \mu_n t\right) \qquad (t \geq 0)$

## Sistemas de segundo orden con ς>1 Respuesta al Escalón

**(2) Caso sobreamortiguado** $(\zeta > 1)$ **:**

$$Y(s) = \frac{K.M.\mu_n^2}{(s+\zeta\mu_n+\mu_n\sqrt{\zeta^2-1})(s+\zeta\mu_n-\mu_n\sqrt{\zeta^2-1})s}$$

Obteniendo Y(s) en fracciones parciales queda:

$$Y(s) = K.M\left(\frac{1}{s} + \frac{w_n^2}{p_1.(p_1-p_2)} * \frac{1}{(s-p_1)} + \frac{w_n^2}{p_2.(p_2-p_1)} * \frac{1}{(s-p_2)}\right)$$

## Sistemas de segundo orden con ς>1 : Respuesta al Escalón

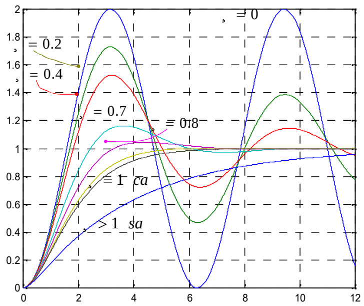
La transformada inversa de Laplace de Y(s) es:

$$y(t) = K.M\left(1 - \frac{w_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}.\left(\frac{e^{p_1.t}}{p_1} - \frac{e^{p_2.t}}{p_2}\right)\right)$$

*Siendo* $p_1 = -\zeta.w_n - w_n.\sqrt{\zeta^2-1}$

$p_2 = -\zeta.w_n + w_n.\sqrt{\zeta^2-1}$

## Sistemas de segundo orden: Respuesta al Escalón para distintos ς




Curvas de respuesta al escalón unitario para un sistema de segundo con distintos zitas.

## Sistemas de segundo orden: Respuesta al Impulso

(Resolver con Matlab a partir de las respuesta al escalón)

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K.\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad X(s) = M$$

Utilizando transformada inversa obtenemos las siguientes soluciones de $c(t)$

para $(0 \le \zeta < 1)$

$$y(t) = \frac{K.M.\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} sen\,\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t \qquad (t \ge 0)$$

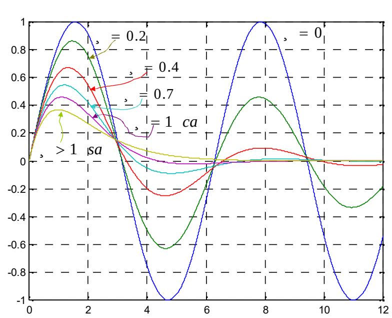
para $(\zeta = 1)$

$$y(t) = K.M.\omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \qquad (t \ge 0)$$

para $(\zeta > 1)$

$$y(t) = \frac{K.M.\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(e^{-(\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t} - e^{-(\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t}\right) \qquad (t \ge 0)$$

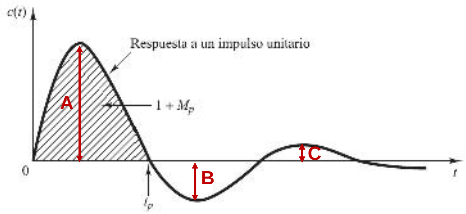
## Sistemas de segundo orden: Respuesta al Impulso para distintos ς




**Respuesta al impulso de diferentes sistemas de segundo orden.**

## Sistemas de segundo orden: Respuesta al Impulso para 0< ς <1

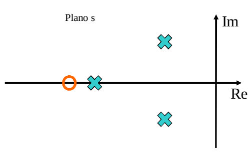
Para K=1 y M=1




$$M_p(\%) = \frac{C}{B}*100 = \frac{B}{A}*100 = e^{\frac{-ς.®}{\sqrt{1-ς^2}}}*100$$

## Sistemas de orden superior

- Los sistemas de orden superior contienen ceros y polos adicionales que afectan al comportamiento tanto en régimen transitorio como permanente.




$$H(s) = \frac{K.M.\mu_n^2}{s^2 + 2¶\mu_n s + \mu_n^2} * \frac{(1+c.s)}{(1+b.s)}$$

## Sistemas de orden superior

- Partimos de una función de transferencia genérica del tipo:

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_o}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_o} \qquad H(s) = K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

- Separando polos en el origen, polos reales y polos complejos queda:

$$H(s) = K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{s^l \prod_{h=1}^{q}(s-\pm_h)^{3_h} \prod_{h=1}^{¥}(s-\sim_k+j\mu_k)^{a_k}(s-\sim_k-j\mu_k)^{a_k}}$$

## Sistemas de orden superior

- Descomponiendo en fracciones simples:

$$H(s)=\sum_{u=1}^{l}\frac{A_u}{s^u}+\sum_{h=1}^{q}\sum_{u=1}^{{}^3{}_h}\frac{B_{hu}}{\left(s-\pm_h\right)^u}+\sum_{k=1}^{\yen}\sum_{u=1}^{{}^a{}_k}\frac{C_{ku}}{\left(s-\sim_k+j\mu_k\right)^u}+\frac{C_{ku}^{\ *}}{\left(s-\sim_k-j\mu_k\right)^u}$$

- Agrupando términos:

$$H(s)=\sum_{u=1}\frac{A_u}{s^u}+\sum_{h=1}^{q}\sum_{u=1}^{{}^3{}_h}\frac{B_{hu}}{\left(s-\pm_h\right)^u}+\sum_{k=1}^{\yen}\sum_{u=1}^{{}^a{}_k}\frac{M_{ku}s+N_{ku}}{\left(s^2-2\sim_k s+\left(\mu_k^{\ 2}+\sim_k^{\ 2}\right)\right)^u}$$

Con lo que estos sistemas pueden verse como una combinación de sistemas de primer y segundo orden.

## Sistemas de orden superior

- Si agregamos polos:
  - A) Afectan la naturaleza de la respuesta
  - B) A medida que el o los polos adicionales tienen parte real mas negativa que la de los polos dominantes, pierden su efecto en la respuesta temporal.
- Si adicionamos ceros:
  - A) Afectan la amplitud de la respuesta pero NO su naturaleza (es decir seguirán siendo de tipo amortiguada, sobreamortiguada, etc).
  - B) Si el valor del cero es próximo al del polo dominante tiene mayor efecto.
  - C) Los ceros pueden tener parte real positiva y el sistema seguir siendo estable y de respuesta inversa.

## Sistemas equivalentes de orden reducido

- En algunos casos, los sistemas de orden superior pueden simplificarse para dar lugar a sistemas de orden inferior más fáciles de analizar.
- EL SISTEMA APROXIMADO DEBE TENER LA MISMA GANANCIA ESTÁTICA QUE EL SISTEMA ORIGINAL

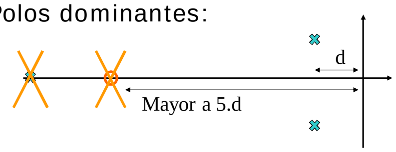
MÉTODOS DE SIMPLIFICACIÓN:

A) Dominancia: Eliminando Polos y ceros alejados (no dominantes).

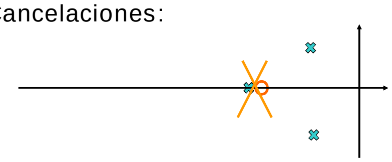
B) Cancelaciones: Eliminando Pares de polos y ceros próximos.

## Sistemas equivalentes de orden reducido

A) Polos dominantes:

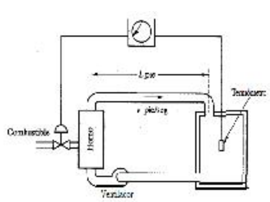



B) Cancelaciones:



## Sistemas con Tiempo Muerto

- Se entiende por tiempo muerto una demora en la medición o un retardo en el funcionamiento del accionador.



$$T = \frac{L}{v}$$

Pasará un T tiempo antes de que el termómetro detecte cualquier cambio en la temperatura del horno

## Sistemas con Tiempo Muerto

- Aproximación de PADE:

$$e^{-Ts} = \frac{1 - \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} - \frac{(Ts)^3}{48} + \cdots}{1 + \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} + \frac{(Ts)^3}{48} + \cdots}$$

$$e^{-(^2 .s)} \cong \frac{1-(^2/2)s}{1+(^2/2)s} = \frac{2-^2 .s}{2+^2 .s}$$

# FIN !!!!

**Dudas ……**
**Preguntas ????**