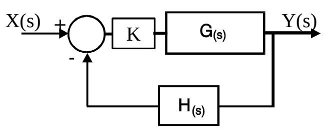
Facultad de UNER Ingeniería

# Control Básico

## LUGAR DE RAÍCES

Carrera: Bioingeniería

## Sistema de Control a Bucle Cerrado

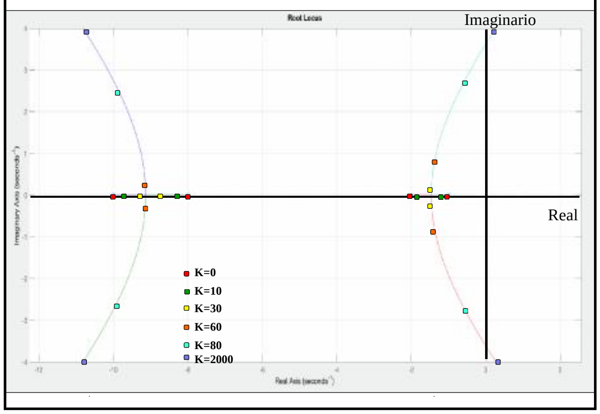



$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad \mathbf{H(s)} = \frac{1}{(s+8)(s+10)}$$

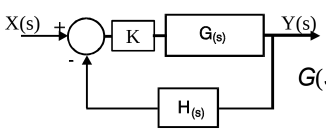
Función de bucle cerrado ????

$$D(s) = s^4 + 21.s^3 + 136.s^2 + 276.s + (160 + K)$$

| Valor de K | Raíz 1 | Raíz 2 | Raíz 3 | Raíz 4 |
|---|---|---|---|---|
| **0** | -10 | -8 | -2 | -1 |
| **10** | -9.93 | -8.12 | -1.74 | -1.21 |
| **14** | -9.89 | -8.17 | -1.47 + 0.04i | -1.47 - 0.04i |
| **30** | -9.74 | -8.39 | -1.43 + 0.53i | -1.43 - 0.53i |
| **60** | -9.14 + 0.22i | -9.14 - 0.22i | -1.36+ 0.88i | -1.36- 0.88i |
| **400** | -9.65 + 2.09i | -9.65 - 2.09i | -0.85 + 2.24i | -0.85 - 2.24i |
| **800** | -10 + 2.83i | -10 - 2.83i | -0.45 + 2.93i | -0.45 - 2.93i |
| **1442** | -10.5 + 3.54i | -10.5 - 3.54i | 3.61i | -3.61i |
| **2000** | -10.8 + 3.97i | -10.8 - 3.97i | 0.3 + 4 i | 0.3 - 4 i |
| **3000** | -11.2 + 4.54i | -11.2 - 4.54i | 0.7 + 4.59i | 0.7 - 4.59i |



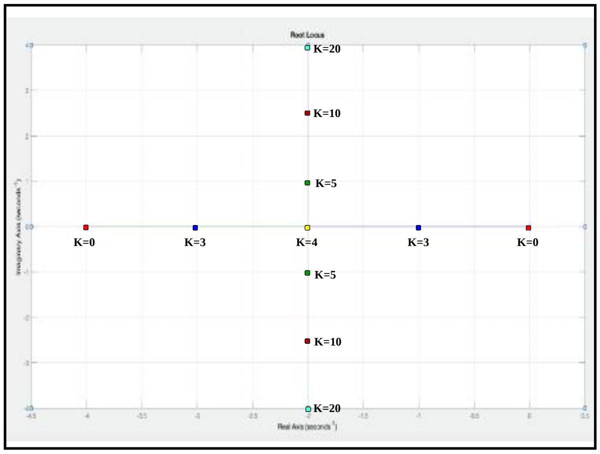

## Sistema de Control a Bucle Cerrado




$$G(s)=\frac{1}{s(s+4)} \qquad \mathrm{H(s)=1}$$

Ecuación característica ???? $EC=(s^2+4s+K)=0$

| Valor de K | Raiz 1 | Raiz 2 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | -4 |
| 3 | -1 | -3 |
| 4 | -2 | -2 |
| 5 | -2+j | -2-j |
| 10 | -2+2,45j | -2-2,45j |
| 20 | -2+4j | -2-4j |



¿Cómo podemos sistematizar la ubicación de las raíces a bucle cerrado sin necesidad de calcularlas una por una?

**Método de Lugar de Raíces**

## Introducción

- El lugar de las raíces sirve para estudiar como influye la ganancia en bucle abierto en el comportamiento dinámico de un sistema realimentado.
- Es una herramienta para el análisis dinámico de sistemas realimentados:
  - Estabilidad
  - Rapidez
  - Oscilaciones

  al variar k → del sistema a **LAZO CERRADO** !!!

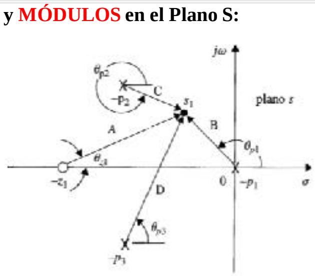
## Criterio del Módulo y Argumento

**Medición de ANGULOS y MÓDULOS en el Plano S:**

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+z_1)}{s(s+p_2)(s+p_3)}$$

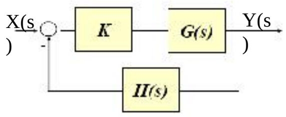
$$|G(s)H(s)|_{s=s_1} = \frac{A}{B.C.D}$$

$$\angle Angulo\, G(s)H(s)|_{s=s_1} = \theta_{z1} - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \theta_{p3}$$



## Criterio del Módulo y Argumento

**Sistema genérico que trabaja a Bucle cerrado :**




**Donde la ecuación característica a *bucle cerrado* es:**

**$1+F(s)=1+K.G_{(s)}H_{(s)}=0$ ó $K.G_{(s)}H_{(s)}=-1$**

(permiten determinar si un punto pertenece o no al LR para polos a parte real negativa y realimentacion negativa)

$$\left|K.G_{(s)}H_{(s)}\right|=1$$

**Condición de módulo**

$$\left\langle G(s)H(s)\right\rangle = \pm 180(2k+1) \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

**Condición de argumento**

## Generalidades del lugar de raíces

**Si $K.G_{(s)}H_{(s)}$ es la función a bucle abierto, cuyo denominador es de orden n y su numerador de orden m (con n ñ m ). Considerando K mayor que cero, entonces:**

- En la función G(s).H(s), **el parámetro** en estudio debe estar **como producto**
- El **número de ramas** que existe es n, igual al orden del polinomio del denominador de $G_{(s)}H_{(s)}$. si $n \geq m$.
- El lugar de raíces es **simétrico** con respecto al eje real.

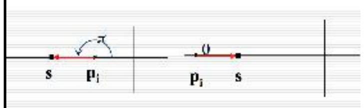
## Generalidades del lugar de raíces

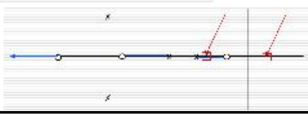
- El **origen de una rama** es un polo de $G_{(s)}H_{(s)}$.- El **fin de la rama** es un cero o en un cero virtual (esta en el infinito). En caso de polos o ceros múltiples: salen o convergen en esos puntos, tantas ramas como sea la multiplicidad.
- La reglas para la construcción de un lugar de raíces varían si la **realimentación es positiva o negativa**

## Pasos para trazar el Lugar de Raíces

**1) Lugar de raíces sobre el eje real**: Todo punto del eje real que a su derecha posea número impar de polos y/o ceros reales, cumple con la condición de argumento y es LR. Las raíces complejas por ser conjugadas, no contribuyen.

$\langle G(s)H(s)\rangle = \pm 180(2k+1)$ k = 0, 1, 2, 3,...



## Pasos para trazar el Lugar de Raíces

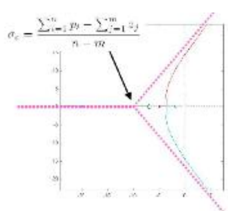
**2) Asíntotas:** Cada rama tiene su **asíntota**, recta definida por:

**Cantidad:** $N = n - m$

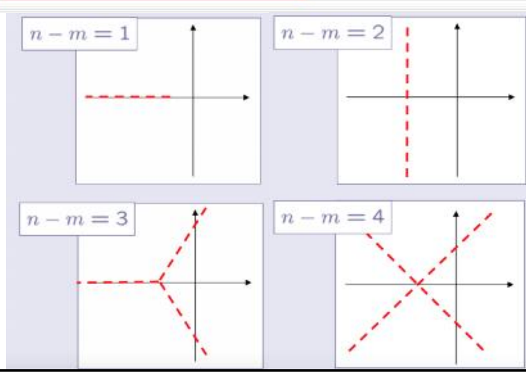
**Abscisa** $\sigma_a = \dfrac{\sum real(p_j) - \sum real(z_i)}{n-m}$

**Áng. de la asíntota**

$\phi = \dfrac{180(2k+1)}{n-m}$



## Pasos para trazar el Lugar de Raíces



## Pasos para trazar el Lugar de Raíces

**3) Cálculo de los puntos de ruptura (llegada o salida)**: se obtienen resolviendo la siguiente igualdad :

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

✓Si esta entre 2 polos es un punto de partida.

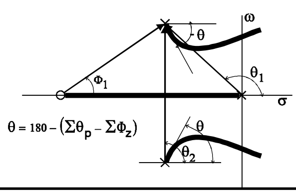
✓Si esta entre 2 ceros (incluyendo los de ∞) es un punto de llegada.

## Pasos para trazar el Lugar de Raíces

**4) Ángulo de partida o de llegada**

**¤$_{partida}$= 180 - p de ángulos de los polos en BA al punto de prueba + p de ángulos de los ceros a BA al punto de prueba.**

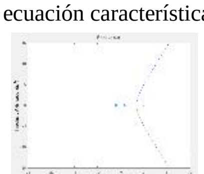
**¤ $_{llegada}$= 180 + p de ángulos de los polos en BA al punto de prueba - p de ángulos de los ceros a BA al punto de prueba.**




## Pasos para trazar el Lugar de Raíces

**5) Las ramas pueden cruzar el eje imaginario en puntos de frecuencia crítica ($w_{cr}$). A partir de allí, las raíces en tal rama son a parte real positiva y el sistema a bucle cerrado es *inestable*. El valor de K en ese punto se llama *$K_{crítico}$* ($K_{cr}$).**

Tanto $K_{cr}$ y $w_{cr}$ se pueden calcular por haciendo s = jw en la ecuación característica a bucle cerrado:



$$1 + K.G_{(s)}\,H_{(s)} = 0$$

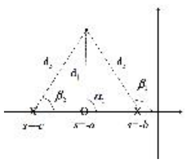
$$\boxed{1+K.G_{(j\mu)}H_{(j\mu)}=\Re_{(j\mu)}+j\Im_{(j\mu)}=0}$$

Debiendo cumplirse: $\boxed{\Re_{(j\mu)}=0 \; y \; \Im_{(j\mu)}=0}$

## Pasos para trazar el Lugar de Raíces

**6)** Utilizar la condición de módulo para:

- Encontrar una ganancia **K** mediante la cual el sistema en bucle cerrado operará en el polo $s_k$ del LR
- Encontrar la ubicación de las singularidades $s_k$ del LR para un dado valor de **K**; sabiendo que:

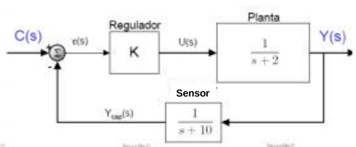


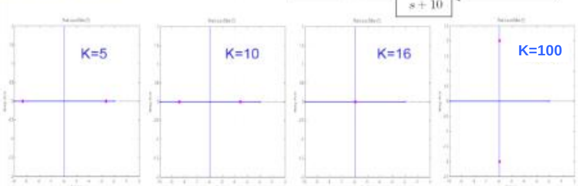
$$k\frac{|s_p+a|}{|s_p+b||s_p+c|}=1$$

$$k=\frac{|s_p+b||s_p+c|}{|s_p+a|}=\frac{d_2\cdot d_3}{d_1}$$

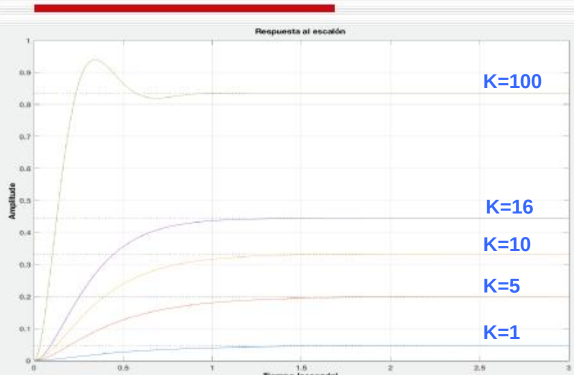
## Ejemplo

**Definición:**
*El L.R. es el lugar geométrico en el plano complejo que ocupan las raíces de la ecuación característica cuando varía el parámetro K*

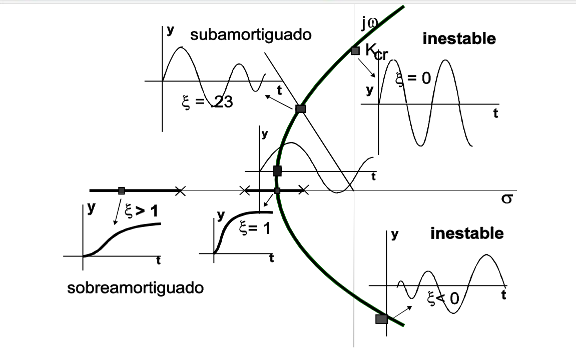



## Ejemplo

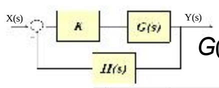


## Variación de la respuesta en función de K

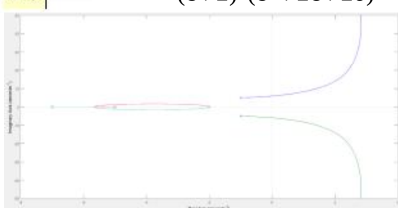



## Ejemplo

Realice el lugar de raíces del sistema y encuentre el valor de ganancia para un valor de zita=0.1.




$$G(s) = \frac{(s+7)(s+5)}{(s+2)^2(s^2+2s+26)} \qquad H(s) = 1$$



## En Resumen (pasos a seguir para LR):

- ✓Parámetro a estudiar debe estar como producto de mi GH
- ✓N° de ramas
- ✓LR sobre el eje Real
- ✓Asíntotas
- ✓Puntos de ruptura (llegada o partida)
- ✓Ángulo de partida o llegada
- ✓Cruce con el eje imaginario
- ✓Calculo del valor de K para el polo deseado.

## Pasos para trazar el LR (realim. positiva)

**La ecuación característica a *bucle cerrado* es:**

**1-F(s)=1- $K.G_{(s)}H_{(s)}$=0 ó $K.G_{(s)}\,H_{(s)}$= +1**

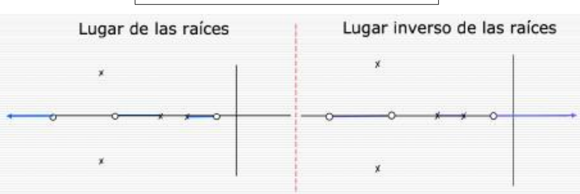
$$\left|K.G_{(s)}H_{(s)}\right|=1$$ **Condición de módulo** (permiten determinar si un punto pertenece o no al LR)

$$\langle G(s)H(s)\rangle = 0^O \pm k.360^O \quad \text{k = 0, 1, 2, 3,...}$$ **Condición de argumento**

## Pasos para trazar el LR (realim. positiva)

**1) Lugar de raíces sobre el eje real**: Todo intervalo sobre el eje real que tenga a su derecha un número PAR de polos y ceros reales.

$$\langle G(s)H(s)\rangle = \pm k.360^O \quad \text{k = 0, 1, 2, 3,...}$$




## Pasos para trazar el LR (realim. positiva)

**2)** Para las **asíntotas:**

**Ángulo de la abscisa** ¥ $= \dfrac{\pm k.360^o}{n-m}$ k = 0, 1, 2, ....

## Pasos para trazar el LR (realim. positiva)

**4) El ángulo de partida o llegada a una singularidad compleja será:**

**¤$_{partida}$= 0 - p de ángulos de los polos en BA al punto de prueba**
**+ p de ángulos de los ceros a BA al punto de prueba.**

**ϕ $_{llegada}$= 0 + p de ángulos de los polos en BA al punto de prueba**
**- p de ángulos de los ceros a BA al punto de prueba.**

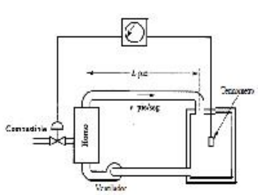
- **Las otras reglas <u>NO</u> varían**

## En Resumen (pasos a seguir para LR):

✓Parámetro a estudiar debe estar como producto de mi GH
✓N° de ramas
✓LR sobre el eje Real
✓Asíntotas
✓Puntos de ruptura (llegada o partida)
✓Ángulo de partida o llegada
✓Cruce con el eje imaginario
✓Calculo del valor de K para el polo deseado.

## Sistemas con Tiempo muerto

Se entiende por tiempo muerto una demora en la medición o un retardo en el funcionamiento del accionador.

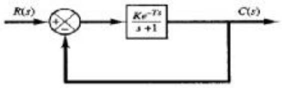


$$T=\frac{L}{v}$$

Pasará un T tiempo antes de que el termómetro detecte cualquier cambio en la temperatura del horno

## LR de sistemas con Tiempo muerto

Dado el sistema G(s) con tiempo muerto que trabaja en bucle cerrado con realimentación negativa:




$$1 + \frac{Ke^{-Ts}}{s+1} = 0$$

$$\angle \frac{Ke^{-Ts}}{s+1} = \angle e^{-Ts} - \angle s+1 = \pm 180°(2k+1) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Se halla el ángulo de $e^{-Ts}$, escribiendo $s = \delta + jw$. Entonces se obtiene

$$e^{-Ts} = e^{-T\delta - jwT}$$

Como $e^{-T\delta}$ es una cantidad real, su ángulo es cero. De aquí que.

$$\angle e^{-Ts} = \angle e^{-jwT}$$

Aplicando el teorema de Euler, se tiene que.

$$\angle e^{-Ts} = \angle \cos wT - j\,\text{sen}\,wT$$

$$\angle e^{-Ts} = -wT \quad \text{(radianes)}$$

$$\angle e^{-Ts} = -57.3wT \quad \text{(grados)}$$

LR: Rectas paralelas al eje Real según w

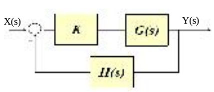
## Sistemas con Tiempo muerto

Aproximación de PADE:

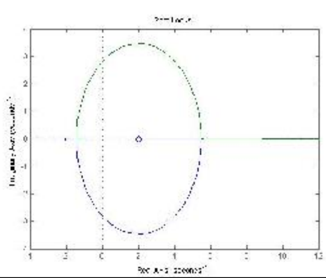
$$e^{-Ts} = \frac{1 - \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} - \frac{(Ts)^3}{48} + \cdots}{1 + \frac{Ts}{2} + \frac{(Ts)^2}{8} + \frac{(Ts)^3}{48} + \cdots}$$

$$e^{-(^2 . s)} \cong \frac{1-(^2/2)s}{1+(^2/2)s} = \frac{2-^2 . s}{2+^2 . s}$$

## Ejemplo




$$KG(s) = \frac{Ke^{-s}}{(s+1)} \approx \frac{(2-s)}{(2+s).(s+1)} = \frac{-(s-2)}{(2+s).(s+1)} \quad H(s) = 1$$



# FIN !!!!

**Dudas ……**
**Preguntas ????**