Asignatura: CONTROL BÁSICO

TEMAS:

- Sistemas de Primer Orden

Facultad de Ingeniería – UNER
Carrera: Bioingeniería
Plan de estudios: 2008

SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Expresión General:

$$Ty'(t) + y(t) = K\,x(t)$$

Su transformada de Laplace es:

$$Y(s) = \frac{K * X(s)}{Ts + 1} + \frac{T * Y(0)}{Ts + 1}$$

Posibles entradas al sistema:

Impulso => $x(t) \begin{cases} \lim\limits_{t_0 \to 0} \frac{M}{t_0} & 0<t<t_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Escalón => **x(t) = M** M=cte. Para t>=0

Rampa => **x(t) = M*t** M=cte. Para t>=0

Estímulo tipo impulso :

Entrada: $X(s) = M$

Salida: $$Y(s) = \frac{KM}{(Ts + 1)}$$

Antitransformando, obtenemos:

$$Y(t) = \frac{KM}{T} e^{-t/T}$$

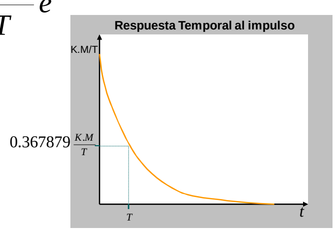
Estímulo tipo impulso:

Entrada → $X(s) = M$ **Salida→** $Y(s) = \frac{KM}{(Ts + 1)}$

Antitransformando, obtenemos:

$$Y(t) = \frac{KM}{T} e^{-t/T}$$

t	$y(t)$
0	$K.\frac{M}{T}$
T	$0.367879\,\frac{K.M}{T}$
$2T$	$0.135335\,\frac{K.M}{T}$
$3T$	$0.049787\,\frac{K.M}{T}$
$4T$	$0.018315\,\frac{K.M}{T}$



Estímulo tipo escalón:

Entrada: $$X(s) = \frac{M}{s}$$

Salida: $$Y(s) = \frac{KM}{s(Ts+1)} = \frac{KM}{s} - \frac{TKM}{(Ts + 1)}$$

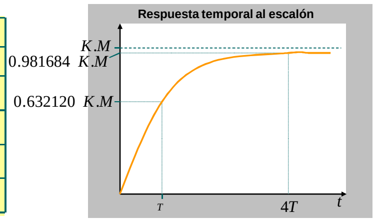
Antitransformando, obtenemos:

$$Y(t) = KM\left(1 - e^{-t/T}\right)$$

Respuesta Temporal al escalón:

$$Y(t) = K.M\left(1 - e^{-t/T}\right)$$

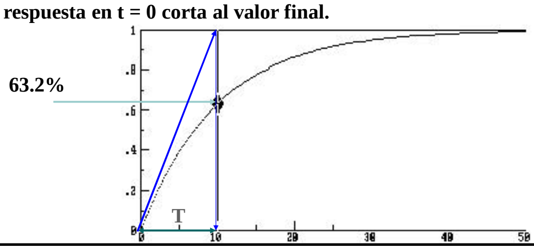
t	$y(t)$
0	0
T	0.632120 $K.M$
$2T$	0.864664 $K.M$
$3T$	0.950212 $K.M$
$4T$	0.981684 $K.M$



Determinación de la constante de tiempo a partir de la respuesta temporal al Escalón

Existen 3 métodos para la medición de la constante de tiempo:

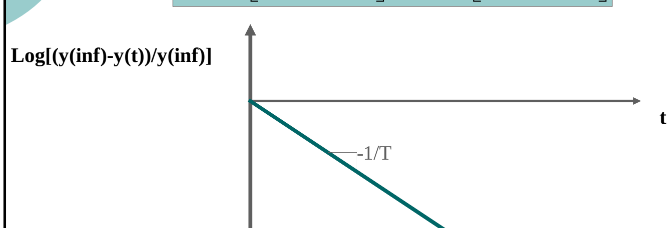
- **Método 1: El valor de la constante T es aquel tiempo en el que la respuesta ha alcanzado el 63.2% de su valor final.**
- **Método 2: T es el valor de tiempo en el que la recta tangente a la respuesta en t = 0 corta al valor final.**



Otra forma de determinar la constante de tiempo….

- **Método 3 (Regresión logarítmica): T es el valor de tiempo que satisface:**

$$\frac{-t}{T} = \ln\left[\frac{y(\infty) - y(t)}{y(\infty)}\right] = 2{,}3\log\left[\frac{y(\infty) - y(t)}{y(\infty)}\right]$$



Respuesta ante una entrada rampa:

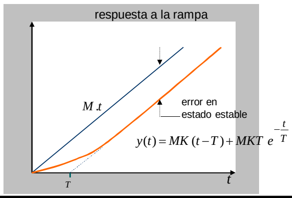
$$X(s)=\frac{M}{s^2} \Rightarrow Y(s)=\frac{KM}{s^2(Ts+1)}=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{Ts+1}$$

Calculando A, B y C, obtenemos:

$$Y(s)=\frac{KM}{s^2}-\frac{KMT}{s}+\frac{T^2KM}{Ts+1}=\frac{KM}{s^2}-\frac{KMT}{s}+\frac{TKM}{s+\frac{1}{T}}$$

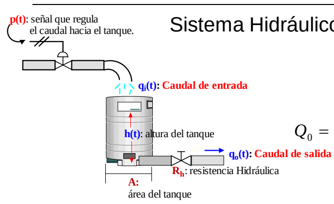
Antitransformando, obtenemos:

$Y(t) = KM\,[\,t-T+T*e^{-t/T}]$



EJEMPLOS DE SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Sistema Hidráulico: Almacena masa



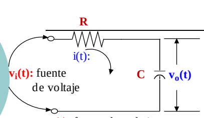
$$Q_0=\frac{h}{R_h}=\frac{fuerza\ \ que\ \ acciona\ \ el\ \ flujo}{resistenci\ a\ al\ \ flujo}$$

Se asume que el flujo Qo es lineal a la presión hidrostática del nivel del liquido h, a través de la resistencia R.

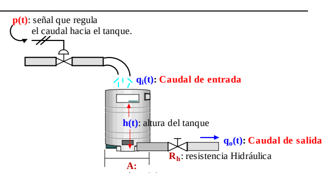
En algún momento el tanque habrá almacenado masa y el balance total será:

$$A\frac{dh}{dt}=Q_i-Q_o=Q_i-\frac{h}{R_h}$$

Analogía de Sistemas de Primer Orden



$v_i(t)$: fuente de voltaje
$v_o(t)$: voltaje de salida
C: Capacitor
R: Resistencia



$$R.C\frac{dvo(t)}{dt}+vo(t)=vi(t)$$

$$2\ \frac{dvo(t)}{dt}+vo(t)=vi(t)$$

$$R_h.A\frac{dh(t)}{dt}+h(t)=R_h.q_i(t)$$

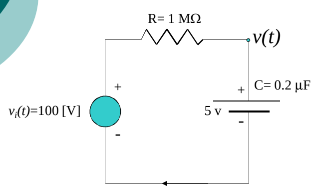
$$t\ \frac{dh(t)}{dt}+h(t)=K.q_i(t)$$

$$\boxed{\tau\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=K.x(t)}$$

K: Ganancia en estado estable

²: Constante de tiempo

Otro Ejemplo: Circuito Eléctrico con condición inicial



Entrada: $v_i(t)$
Salida: $v(t)$

La ecuación diferencial del sistema será

$$0.2*\frac{dv(t)}{dt}+v(t)=100u(t)$$

se puede escribir como

$$\frac{dv(t)}{dt}+5*v(t)=500u(t)$$

aplicando Transformada de Laplace

$$sV(s)-v(0^-)+5V(s)=\frac{500}{s}$$

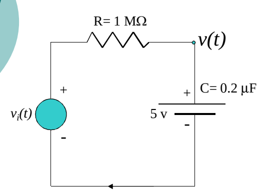
ya que $v(0^-)=5$, se obtiene

$$V(s)=\frac{\frac{500}{s}+5}{s+5}$$

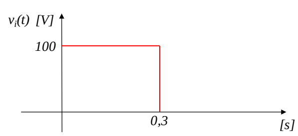
aplicando anti - transformada de Laplace

$$v(t)=(100-95*e^{-5t})u(t)$$

Otro Ejemplo: Circuito Eléctrico con condición inicial y entrada combinada



Si la entrada al circuito $v_i(t)$ es combinada:



Cómo obtendría la respuesta temporal analítica y gráfica?

FIN !!!!

Dudas ……
Preguntas ????