



Análisis y diseño de sistemas de control por el método de la respuesta en frecuencia

7-1 Introducción

Con el término respuesta en frecuencia, se quiere hacer referencia a la respuesta de un sistema en estado estacionario a una entrada sinusoidal. En los métodos de respuesta en frecuencia, la frecuencia de la señal de entrada se varía en un cierto rango, para estudiar la respuesta resultante.

En este y en el próximo capítulo se presentan los métodos de respuesta en frecuencia para el análisis y diseño de sistemas de control. La información que se extrae de dichos análisis es diferente a la obtenida en el análisis del lugar de las raíces. De hecho, los métodos de la respuesta en frecuencia y del lugar de las raíces se complementan. Una ventaja del método de la respuesta en frecuencia es que se pueden utilizar los datos que se obtienen de las medidas sobre el sistema físico sin deducir su modelo matemático. Los ingenieros de control deben familiarizarse con ambos métodos.

Los métodos de respuesta en frecuencia fueron desarrollados en los años 1930 y 1940 por Nyquist, Bode y Nichols, entre otros. Los métodos de respuesta en frecuencia son los más potentes en la teoría de control convencional. También son indispensables para la teoría de control robusto.

El criterio de estabilidad de Nyquist permite averiguar la estabilidad relativa y absoluta de los sistemas lineales en lazo cerrado a partir del conocimiento de sus características de frecuencia en lazo abierto. Una ventaja del método de la respuesta en frecuencia es que las pruebas de la respuesta en frecuencia son, en general, sencillas y pueden ser muy precisas con el uso de generadores de señales sinusoidales y un equipo de medición preciso. A menudo las funciones de transferencia de los componentes complicados se determinan experimentalmente mediante pruebas de la respuesta en frecuencia. Además, este método tiene la ventaja de que permite diseñar un sistema en el que se eliminan los efectos no deseados del ruido así como extender este análisis y diseño a ciertos sistemas de control no lineales.

Aunque la respuesta en frecuencia de un sistema de control presenta una imagen cualitativa de la respuesta transitoria, la correlación entre las respuestas en frecuencia y transitoria es indirecta, excepto en el caso de los sistemas de segundo orden. Al diseñar un sistema en lazo cerrado, las características de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia en lazo abierto se ajustan mediante varios criterios de diseño, con el fin de obtener características adecuadas de respuesta transitoria para el sistema.

Salida en estado estacionario para una entrada sinusoidal. A continuación se muestra cómo la salida en estado estacionario de una función de transferencia de un sistema se puede obtener directamente de la función de transferencia sinusoidal, es decir, sustituyendo en la función de transferencia s por $j\omega$, donde ω es la frecuencia.

Considérese el sistema lineal e invariante en el tiempo de la Figura 7-1. La entrada y la salida de este sistema, cuya función de transferencia es $G(s)$, se denotan por $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente. Si la entrada $x(t)$ es una señal sinusoidal, la salida en estado estacionario será también una señal sinusoidal de la misma frecuencia, pero posiblemente con diferente magnitud y ángulo de fase.

Supóngase que la señal de entrada viene dada por

$$x(t) = X \sin \omega t$$

[En este texto « ω » se mide siempre en rad/seg. Cuando la frecuencia se mide en ciclos/seg, usamos la notación « f ». Esto es $\omega = 2\pi f$.]

La función de transferencia $G(s)$ se puede escribir como cociente de dos polinomios en s ; es decir,

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_n)}$$

La transformada de Laplace de la salida $Y(s)$ es

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{p(s)}{q(s)} X(s) \quad (7-1)$$

donde $X(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada $x(t)$.

Se demostrará que, después de alcanzar las condiciones de estado estacionario, la respuesta en frecuencia se puede calcular sustituyendo s por $j\omega$ en la función de transferencia. También se mostrará que la respuesta en estado estacionario puede darse como

$$G(j\omega) = Me^{j\phi} = M \angle \phi$$

donde M es el cociente de amplitud de las señales sinusoidales de entrada y salida y ϕ es el desplazamiento de fase entre ambas señales. En la prueba de respuesta en frecuencia, la frecuencia de entrada ω se varía a lo largo de todo el rango de frecuencias de interés.

La respuesta en estado estacionario de un sistema estable, lineal e invariante en el tiempo a una entrada sinusoidal no depende de las condiciones iniciales (por tanto, se puede suponer que las condiciones iniciales son cero). Si $Y(s)$ tiene únicamente polos distintos (simples), el desarrollo de la Ecuación (7-1) en fracciones parciales queda

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)X(s) = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + s_1} + \frac{b_2}{s + s_2} + \cdots + \frac{b_n}{s + s_n} \end{aligned} \quad (7-2)$$

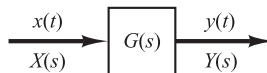


Figura 7-1. Sistema estable, lineal e invariante en el tiempo.

donde a y los b_i (donde $i = 1, 2, \dots, n$) son constantes y \bar{a} es el complejo conjugado de a . La transformada inversa de Laplace de la Ecuación (7-2) da

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1e^{-s_1t} + b_2e^{-s_2t} + \dots + b_ne^{-s_nt} \quad (t \geq 0) \quad (7-3)$$

Para un sistema estable, $-s_1, -s_2, \dots, -s_n$, tienen parte real negativa. Por lo tanto, cuando t se aproxima a infinito, los términos $e^{-s_1t}, e^{-s_2t}, \dots$, y e^{-s_nt} se aproximan a cero. Así, todos los términos del lado derecho de la Ecuación (7-3), excepto los dos primeros, se desprecian en estado estacionario.

Si $Y(s)$ contiene polos múltiples s_j de multiplicidad m_j , entonces, $y(t)$ contendrá términos como $t^{h_j}e^{-s_jt}$ ($h_j = 0, 1, 2, \dots, m_j - 1$). Para un sistema estable, los términos $t^{h_j}e^{-s_jt}$ tienden a cero cuando t se aproxima a infinito.

Por tanto, independientemente de si el sistema tiene polos distintos o no, la respuesta en estado estacionario es

$$y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} \quad (7-4)$$

donde la constante a se puede calcular con la Ecuación (7-2) de la siguiente forma:

$$a = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s = -j\omega} = -\frac{XG(-j\omega)}{2j}$$

Obsérvese que

$$\bar{a} = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s = j\omega} = \frac{XG(j\omega)}{2j}$$

Como $G(j\omega)$ es una cantidad compleja, se puede reescribir de la siguiente forma:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$$

donde $|G(j\omega)|$ representa la magnitud y ϕ el ángulo de $G(j\omega)$, es decir,

$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{parte imaginaria de } G(j\omega)}{\text{parte real de } G(j\omega)} \right]$$

El ángulo ϕ puede ser negativo, positivo o cero. Análogamente, se obtiene la siguiente expresión para $G(-j\omega)$:

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)|e^{-j\phi} = |G(j\omega)|e^{-j\phi}$$

Por tanto, verificando que

$$a = \frac{X|G(j\omega)|e^{-j\phi}}{2j}, \quad \bar{a} = \frac{X|G(j\omega)|e^{j\phi}}{2j}$$

la Ecuación (7-4) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= X|G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\ &= X|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \\ &= Y \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (7-5)$$

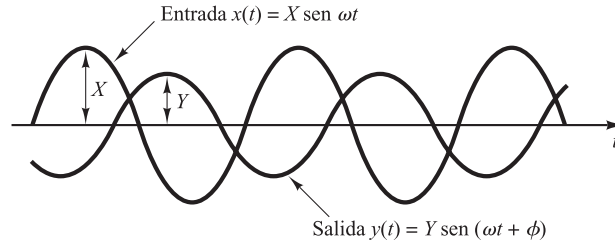


Figura 7-2. Señales sinusoidales de entrada y salida.

donde $Y = X|G(j\omega)|$. Un sistema estable, lineal e invariante en el tiempo, sujeto a una entrada sinusoidal, tendrá, en estado estacionario, una salida sinusoidal de la misma frecuencia que la entrada. Pero, en general, la amplitud y la fase de la salida serán diferentes de las de la entrada. De hecho, la amplitud de la salida se obtiene del producto de la amplitud de la entrada $|G(j\omega)|$, en tanto que el ángulo de fase difiere del de la entrada en una cantidad $\phi = \angle G(j\omega)$. Un ejemplo de las señales sinusoidales de entrada y salida se muestra en la Figura 7-2.

Basándose en esto, se obtiene un resultado importante: Para entradas sinusoidales,

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right| = \text{Cociente de amplitud entre las señales sinusoidales de salida y de entrada}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \text{Desplazamiento de fase de la señal sinusoidal de salida con respecto a la de entrada}$$

Por tanto, la característica de respuesta en estado estacionario de un sistema para una entrada sinusoidal se obtiene directamente de

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = G(j\omega)$$

La función $G(j\omega)$ se denomina función de transferencia sinusoidal. Es decir, el cociente entre $Y(j\omega)$ y $X(j\omega)$ es una cantidad compleja y se puede representar mediante la magnitud y el ángulo de fase con la frecuencia como parámetro. La función de transferencia sinusoidal de cualquier sistema lineal se obtiene sustituyendo s por $j\omega$ en la función de transferencia del sistema.

Como ya se mencionó en el Capítulo 6 un ángulo de fase positivo se denomina adelanto de fase y un ángulo de fase negativo se llama retardo de fase. Una red que tiene una característica de adelanto de fase se denomina red de adelanto, mientras que una red que tiene una característica de retardo de fase se denomina red de retardo.

EJEMPLO 7-1 Considere el sistema de la Figura 7-3. La función de transferencia $G(s)$ es

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

Para la entrada sinusoidal $x(t) = X \sin \omega t$, la salida en estado estacionario $y_{ss}(t)$ se puede obtener de la siguiente forma. Sustituya $j\omega$ por s en $G(s)$:

$$G(j\omega) = \frac{K}{jT\omega + 1}$$

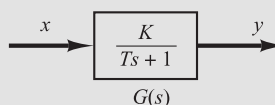


Figura 7-3. Sistema de primer orden.

El cociente de amplitudes entre la salida y la entrada es

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$

mientras que el ángulo de fase ϕ es

$$\phi = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} T\omega$$

Por tanto, para la entrada $x(t) = X \sin \omega t$, la salida en estado estacionario $y_{ss}(t)$ se puede obtener de la Ecuación (7-5) como sigue:

$$y_{ss}(t) = \frac{XK}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1} T\omega) \quad (7-6)$$

De la Ecuación (7-6), se puede observar que para una ω pequeña, la amplitud de la salida $y_{ss}(t)$ en estado estacionario es casi igual a K veces la amplitud de la entrada. El desplazamiento de fase de la salida es pequeño para ω pequeña. Para valores grandes de ω , la amplitud de la salida es pequeña y casi inversamente proporcional a ω . El desplazamiento de fase tiende a 90° cuando ω tiende a infinito. Esto es una red de retardo de fase.

EJEMPLO 7-2 Considere la red siguiente:

$$G(s) = \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{T_2}}$$

Determine si se trata de una red de adelanto o de una red de retraso.

Para la entrada sinusoidal $x(t) = X \sin \omega t$, la salida en estado estacionario $y_{ss}(t)$ se puede obtener de la siguiente forma. Como

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + \frac{1}{T_1}}{j\omega + \frac{1}{T_2}} = \frac{T_2(1 + T_1j\omega)}{T_1(1 + T_2j\omega)}$$

se tiene

$$|G(j\omega)| = \frac{T_2 \sqrt{1 + T_1^2\omega^2}}{T_1 \sqrt{1 + T_2^2\omega^2}}$$

y

$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} T_1\omega - \tan^{-1} T_2\omega$$

Por tanto, la salida en estado estacionario es

$$y_{ss}(t) = \frac{XT_2 \sqrt{1 + T_1^2\omega^2}}{T_1 \sqrt{1 + T_2^2\omega^2}} \sin(\omega t + \tan^{-1} T_1\omega - \tan^{-1} T_2\omega)$$

De esta expresión, se observa que si $T_1 > T_2$, entonces $\tan^{-1} T_1\omega - \tan^{-1} T_2\omega > 0$. Por tanto, si $T_1 > T_2$, la red es una red de adelanto. Si $T_1 < T_2$, la red es de retardo.

Presentación de las características de la respuesta en frecuencia de forma gráfica. La función de transferencia sinusoidal, función compleja de la frecuencia ω , se caracteriza por su magnitud y ángulo de fase, con la frecuencia como parámetro. Por lo general se usan tres representaciones gráficas de las funciones de transferencia sinusoidales:

1. El diagrama de Bode o diagrama logarítmico.
2. El diagrama de Nyquist o diagrama polar.
3. El diagrama de magnitud logarítmico contra la fase (diagrama de Nichols).

En este capítulo se analizan estas representaciones con detalle, y se muestra la utilización de MATLAB para obtener los diagramas de Bode y los de Nyquist.

Contenido del capítulo. La Sección 7-1 presentó el material introductorio para la respuesta en frecuencia. La Sección 7-2 presenta los diagramas de Bode de diferentes sistemas de funciones de transferencia. La Sección 7-3 trata los diagramas polares de funciones de transferencia. La Sección 7-4 presenta los diagramas de magnitud logarítmica frente a la fase. La Sección 7-5 realiza una explicación detallada del criterio de estabilidad de Nyquist. La Sección 7-6 estudia el análisis de estabilidad de sistemas en lazo cerrado mediante el mismo criterio de estabilidad. La Sección 7-7 de estabilidad relativa introduce medidas. La Sección 7-8 presenta un método para obtener la respuesta en frecuencia en lazo cerrado a partir de la respuesta en frecuencia en lazo abierto, mediante el uso de los círculos M y N . También se describe el uso del diagrama de Nichols. La Sección 7-9 aborda la determinación experimental de funciones de transferencia. La Sección 7-10 presenta aspectos introductorios de diseño de sistemas de control mediante el método de la respuesta en frecuencia. Las Secciones 7-11, 7-12 y 7-13 dan, respectivamente, una presentación detallada de la compensación por adelanto, compensación por retardo y compensación por retardo-adelanto.

7-2 Diagramas de Bode

Diagramas de Bode o diagramas logarítmicos. Un diagrama de Bode está formado por dos gráficas: una es la gráfica del logaritmo de la magnitud de la función de transferencia sinusoidal, y la otra es la gráfica del ángulo de fase; ambas se dibujan contra la frecuencia en escala logarítmica.

La representación común de la magnitud logarítmica de $G(j\omega)$ es $20 \log |G(j\omega)|$, donde la base del logaritmo es 10. La unidad utilizada en esta representación para la magnitud es el decibelio, por lo general abreviado dB. En la representación logarítmica, se dibujan las curvas sobre papel semilogarítmico, con la escala logarítmica para la frecuencia y la escala lineal para cualquier magnitud (en decibelios) o el ángulo de fase (en grados). (El rango de frecuencia de interés determina el número de ciclos logarítmicos que se requieren en la abscisa.)

La ventaja principal de utilizar el diagrama de Bode es que la multiplicación de magnitudes se convierte en suma. Además, cuenta con un método simple para dibujar una curva aproximada de magnitud logarítmica. Se basa en aproximaciones asintóticas. Esta aproximación, mediante asintotas (líneas rectas), es suficiente si sólo se necesita información general sobre la característica de la respuesta en frecuencia. Si se desea obtener curvas exactas, es fácil corregir las curvas asintóticas. Es muy útil ampliar el rango de bajas frecuencias mediante el uso de una escala logarítmica, debido a que las características de las bajas frecuencias son las más importantes en los sistemas prácticos. Aunque no es posible dibujar las curvas hasta una frecuencia cero, debido a la frecuencia logarítmica ($\log 0 = -\infty$), esto no es un problema serio.

Obsérvese que la determinación experimental de una función de transferencia se hace simplemente si los datos de la respuesta en frecuencia se presentan como un diagrama de Bode.

Factores básicos de $G(j\omega)H(j\omega)$. Como se planteó anteriormente, la ventaja principal de utilizar un diagrama logarítmico es la facilidad relativa de dibujar las curvas de la respuesta en frecuencia. Los factores básicos que suele presentar una función de transferencia arbitraria $G(j\omega)H(j\omega)$ son:

1. La ganancia K
2. Los factores integrales y derivativos $(j\omega)^{\mp 1}$
3. Los factores de primer orden $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$
4. Los factores cuadráticos $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{\mp 1}$

Cuando los diagramas logarítmicos de estos factores básicos resulten familiares, es posible utilizarlos con el fin de construir un diagrama logarítmico para cualquier forma de $G(j\omega)H(j\omega)$ dibujando las curvas para cada factor y agregando curvas individuales de forma gráfica, ya que agregar los logaritmos de las ganancias corresponde a multiplicarlos entre sí.

La ganancia K . Un número mayor que la unidad tiene un valor positivo en decibelios, mientras que un número menor que la unidad tiene un valor negativo. La curva de magnitud logarítmica para una ganancia constante K es una recta horizontal cuya magnitud es de $20 \log K$ decibelios. El ángulo de fase de la ganancia K es cero. El efecto de variar la ganancia K en la función de transferencia es que sube o baja la curva de magnitud logarítmica de la función de transferencia en la cantidad constante correspondiente, pero no afecta a la curva de fase.

La Figura 7-4 contiene una línea de conversión de números a decibelios. El valor en decibelios de cualquier número se obtiene a partir de esta línea. A medida que un número aumenta en un factor de 10, el valor correspondiente en decibelios aumenta en un factor de 20. Esto se observa a partir de lo siguiente:

$$20 \log (K \times 10) = 20 \log K + 20$$

Análogamente,

$$20 \log (K \times 10^n) = 20 \log K + 20n$$

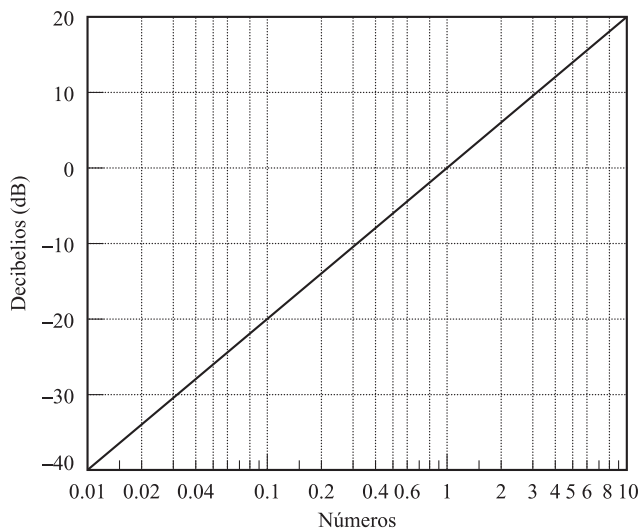


Figura 7-4. Línea de conversión de números a decibelios.

Obsérvese que, cuando se expresa en decibelios, el recíproco de un número difiere de su valor sólo en el signo; es decir, para el número K ,

$$20 \log K = -20 \log \frac{1}{K}$$

Factores integrales y derivativos $(j\omega)^{\pm 1}$. La magnitud logarítmica de $1/j\omega$ en decibelios es

$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ dB}$$

El ángulo de fase de $1/j\omega$ es constante e igual a -90° .

En los diagramas de Bode, las razones de frecuencia se expresan en términos de octavas o décadas. Una octava es una banda de frecuencia de ω_1 a $2\omega_1$, donde ω_1 es cualquier frecuencia. Una década es una banda de frecuencia de ω_1 a $10\omega_1$, donde, otra vez, ω_1 es cualquier frecuencia. (En la escala logarítmica del papel semilogarítmico, cualquier razón de frecuencia determinada se representa mediante la misma distancia horizontal. Por ejemplo, la distancia horizontal de $\omega = 1$ a $\omega = 10$ es igual a la de $\omega = 3$ a $\omega = 30$.)

Si se dibuja la magnitud logarítmica de $-20 \log \omega$ dB con respecto a ω en una escala logarítmica, se obtiene una recta. Para trazar esta recta, se necesita localizar un punto (0 dB, $\omega = 1$) en ella. Como

$$(-20 \log 10\omega) \text{ dB} = (-20 \log \omega - 20) \text{ dB}$$

la pendiente de la recta es -20 dB/década (o -6 dB/octava).

De la misma manera, la magnitud logarítmica de $j\omega$ en decibelios es

$$20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \text{ dB}$$

El ángulo de fase de $j\omega$ es constante e igual a 90° . La curva de magnitud logarítmica es una recta con una pendiente de 20 dB/década. Las Figuras 7-5(a) y (b) muestran curvas de respuesta en frecuencia para $1/j\omega$ y $j\omega$, respectivamente. Es fácil observar que las diferencias en las respuestas en frecuencia de los factores $1/j\omega$ y $j\omega$ se encuentran en los signos de las pendientes de las curvas de magnitud logarítmica y en los signos de los ángulos de fase. Ambas magnitudes logarítmicas llegan a ser iguales a 0 dB en $\omega = 1$.

Si la función de transferencia contiene el factor $(1/j\omega)^n$ o $(j\omega)^n$, la magnitud logarítmica se convierte, respectivamente, en

$$20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^n} \right| = -n \times 20 \log |j\omega| = -20n \log \omega \text{ dB}$$

o bien

$$20 \log |(j\omega)^n| = n \times 20 \log |j\omega| = 20n \log \omega \text{ dB}$$

Por tanto, las pendientes de las curvas de magnitud logarítmica para los factores $(1/j\omega)^n$ y $(j\omega)^n$ son $-20n$ dB/década y $20n$ dB/década, respectivamente. El ángulo de fase de $(1/j\omega)^n$ es igual a $-90^\circ \times n$ durante todo el rango de frecuencia, mientras que el de $(j\omega)^n$ es igual a $90^\circ \times n$ en todo el rango de frecuencia. Las curvas de magnitud pasarán por el punto (0 dB, $\omega = 1$).

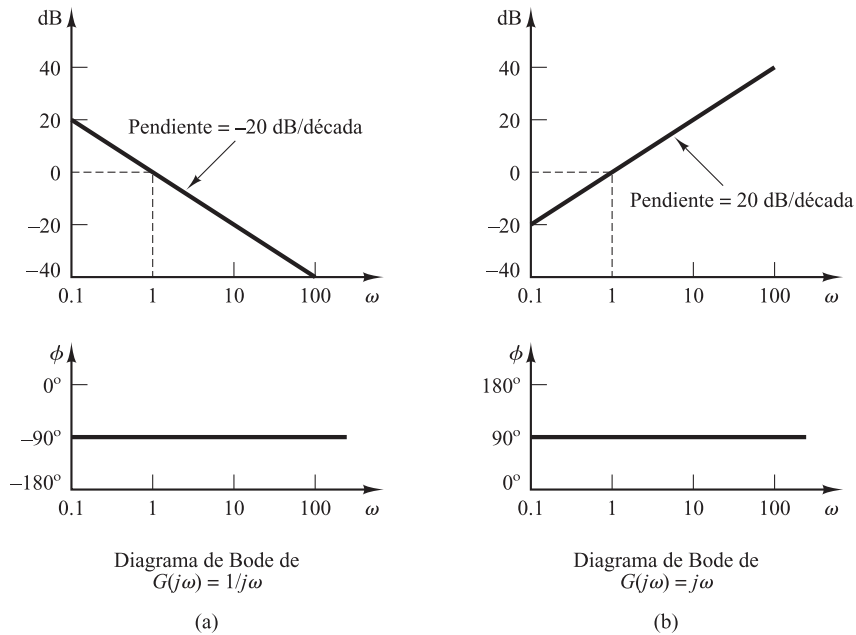


Figura 7-5. (a) Diagrama de Bode de $G(j\omega) = 1/j\omega$; (b) diagrama de Bode de $G(j\omega) = j\omega$.

Factores de primer orden $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$. La magnitud logarítmica del factor de primer orden $1/(1 + j\omega T)$ es

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \text{ dB}$$

Para bajas frecuencias, tales que $\omega \ll 1/T$, la magnitud logarítmica se aproxima mediante

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \doteq -20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Por tanto, la curva de magnitud logarítmica para bajas frecuencias es la línea 0 dB constante. Para altas frecuencias, tales que $\omega \gg 1/T$,

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \doteq -20 \log \omega T \text{ dB}$$

Esta es una expresión aproximada para el rango de altas frecuencias. En $\omega = 1/T$, la magnitud logarítmica es igual a 0 dB; en $\omega = 10/T$, la magnitud logarítmica es de -20 dB. Por tanto, el valor de $-20 \log \omega T$ disminuye en 20 dB para todas las décadas de ω . De esta forma, para $\omega \gg 1/T$, la curva de magnitud logarítmica es una línea recta con una pendiente de -20 dB/década (o -6 dB/octava).

Este análisis muestra que la representación logarítmica de la curva de respuesta en frecuencia del factor $1/(1 + j\omega T)$ se aproxima mediante dos asíntotas (líneas rectas), una de las cuales es una recta de 0 dB para el rango de frecuencia $0 < \omega < 1/T$ y la otra es una recta con una pendiente de -20 dB/década (o -6 dB/octava) para el rango de frecuencia $1/T < \omega < \infty$. La curva de magnitud logarítmica exacta, las asíntotas y la curva de ángulo de fase exacta se muestran en la Figura 7-6.

La frecuencia en la cual las dos asíntotas se encuentran se denomina frecuencia esquina o frecuencia de corte. Para el factor $1/(1 + j\omega T)$, la frecuencia $\omega = 1/T$ es la frecuencia esquina, debido a que en $\omega = 1/T$, ambas asíntotas tienen el mismo valor. (La expresión asintótica de

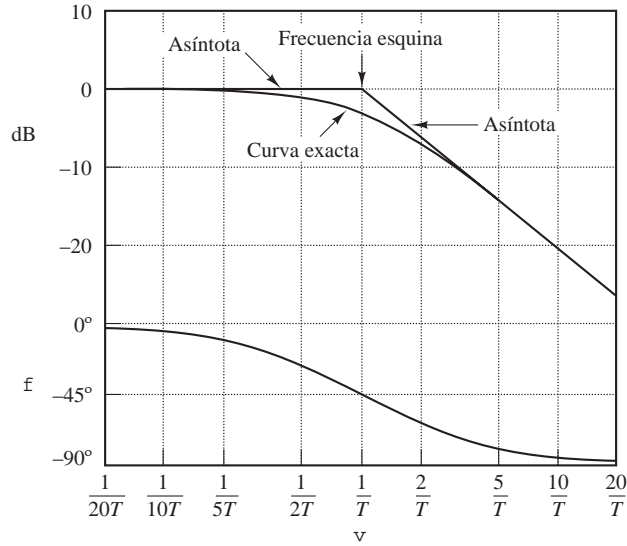


Figura 7-6. Curva de magnitud logarítmica, junto con las asíntotas y la curva de ángulo de fase de $1/(1 + j\omega T)$.

baja frecuencia en $\omega = 1/T$ es $20 \log 1 \text{ dB} = 0 \text{ dB}$, y la expresión asintótica de alta frecuencia en $\omega = 1/T$ también es $20 \log 1 \text{ dB} = 0 \text{ dB}$.) La frecuencia esquina divide la curva de respuesta en frecuencia en dos regiones: una curva para la región de baja frecuencia y una curva para la región de alta frecuencia. La frecuencia esquina es muy importante cuando se dibujan curvas logarítmicas de frecuencia en respuesta.

El ángulo de fase ϕ exacto del factor $1/(1 + j\omega T)$ es

$$\phi = -\tan^{-1} \omega T$$

En una frecuencia cero, el ángulo de fase es 0° . En la frecuencia esquina, el ángulo de fase es

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{T}{T} = -\tan^{-1} 1 = -45^\circ$$

En el infinito, el ángulo de fase se convierte en -90° . Debido a que el ángulo de fase se obtiene mediante una función de tangente inversa, el ángulo de fase tiene una pendiente simétrica con respecto al punto de inflexión en $\phi = -45^\circ$.

Se puede calcular el error en la curva de magnitud provocado por el uso de las asíntotas. El error máximo ocurre en la frecuencia esquina y es aproximadamente igual a -3 dB debido a que

$$-20 \log \sqrt{1 + 1} + 20 \log 1 = -10 \log 2 = -3.03 \text{ dB}$$

El error en la frecuencia una octava por debajo de la frecuencia esquina, es decir, en $\omega = 1/(2T)$, es

$$-20 \log \sqrt{\frac{1}{4} + 1} + 20 \log 1 = -20 \log \frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97 \text{ dB}$$

El error en la frecuencia una octava por encima de la frecuencia esquina, es decir, en $\omega = 2/T$, es

$$-20 \log \sqrt{2^2 + 1} + 20 \log 2 = -20 \log \frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97 \text{ dB}$$

Por tanto, el error en una octava por debajo o por encima de la frecuencia esquina es aproximadamente igual a -1 dB. Asimismo, el error en una década por debajo o por encima de la frecuencia esquina es aproximadamente -0.04 dB. El error en decibelios implícito al usar la expresión asintótica para la curva de respuesta en frecuencia de $1/(1 + j\omega T)$ se muestra en la Figura 7-7. El error es simétrico con respecto a la frecuencia esquina.

Debido a que las asíntotas se dibujan con facilidad y están suficientemente cerca de la curva exacta, su uso es adecuado para dibujar los diagramas de Bode con el fin de establecer con rapidez y con un mínimo de cálculos la naturaleza general de las características de la respuesta en frecuencia, y significa una ayuda en gran parte del trabajo de diseño preliminar. Si se desea obtener curvas de respuesta en frecuencia precisas, es fácil hacer correcciones como se muestra en la curva obtenida de la Figura 7-7. En la práctica, para dibujar una curva de respuesta en frecuencia precisa se introduce una corrección de 3 dB en la frecuencia esquina y una corrección de 1 dB en los puntos una octava por debajo y por encima de la frecuencia esquina, y después se conectan estos puntos mediante una curva regular.

Obsérvese que variar la constante de tiempo T mueve la frecuencia esquina a la izquierda o a la derecha, aunque las formas de las curvas de magnitud logarítmica y de ángulo de fase no cambian.

La función de transferencia $1/(1 + j\omega T)$ tiene la característica de un filtro paso-baja. Para frecuencias por encima de $\omega = 1/T$, la magnitud logarítmica disminuye rápidamente hacia $-\infty$. Esto se debe, en esencia, a la presencia de la constante de tiempo. En el filtro paso-baja, la salida sigue fielmente una entrada sinusoidal a bajas frecuencias. Pero, conforme aumenta la frecuencia de entrada, la salida no puede seguir a la entrada debido a que se necesita cierta cantidad de tiempo para que el sistema aumente en magnitud. Por tanto, para altas frecuencias, la amplitud de la salida tiende a cero y el ángulo de fase de la salida tiende a -90° . En este caso, si la función de entrada contiene muchos armónicos, las componentes de baja frecuencia se reproducen fielmente en la salida, mientras que las componentes de alta frecuencia se atenúan en amplitud y cambian en fase. Por tanto, un elemento de primer orden produce una duplicación exacta, o casi exacta, sólo para fenómenos constantes o que varían lentamente.

Una ventaja de los diagramas de Bode es que, para factores recíprocos, por ejemplo el factor $1 + j\omega T$, las curvas de magnitud logarítmica y de ángulo de fase sólo necesitan cambiar de signo, puesto que

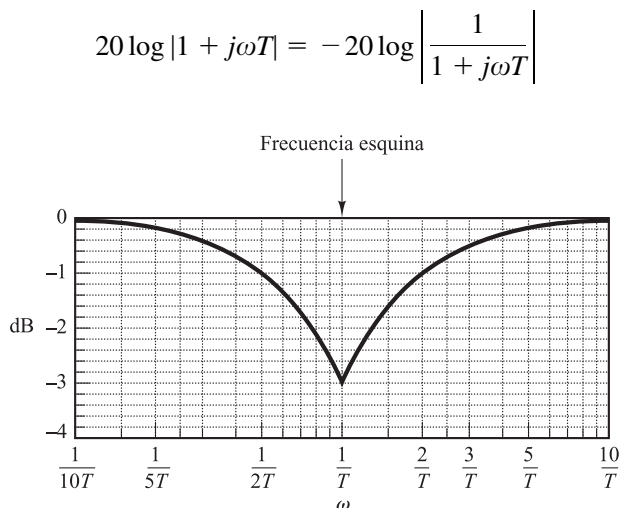


Figura 7-7. Error de magnitud logarítmica en la expresión asintótica de la curva de respuesta en frecuencia $1/(1 + j\omega T)$.

y

$$\angle 1 + j\omega T = \tan^{-1} \omega T = - \angle \frac{1}{1 + j\omega T}$$

La frecuencia esquina es igual para ambos casos. La pendiente de la asíntota de alta frecuencia de $1 + j\omega T$ es 20 dB/década, y el ángulo de fase varía de 0° a 90° a medida que la frecuencia ω se incrementa de cero a infinito. La curva de magnitud logarítmica, junto con las asíntotas y la curva del ángulo de fase para el factor $1 + j\omega T$, se muestra en la Figura 7-8.

Para dibujar la curva de fase con precisión será necesario localizar varios puntos sobre la curva. Los ángulos de fase de $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$ son

$$\mp 45^\circ \quad \text{en} \quad \omega = \frac{1}{T}$$

$$\mp 26.6^\circ \quad \text{en} \quad \omega = \frac{1}{2T}$$

$$\mp 5.7^\circ \quad \text{en} \quad \omega = \frac{1}{10T}$$

$$\mp 63.4^\circ \quad \text{en} \quad \omega = \frac{2}{T}$$

$$\mp 84.3^\circ \quad \text{en} \quad \omega = \frac{10}{T}$$

Para el caso en el que una función de transferencia determinada contiene términos como $(1 + j\omega T)^{\mp n}$, se hace una construcción asintótica similar. La frecuencia esquina está todavía en $\omega = 1/T$ y las asíntotas son rectas. La asíntota de baja frecuencia es una recta horizontal en 0 dB,

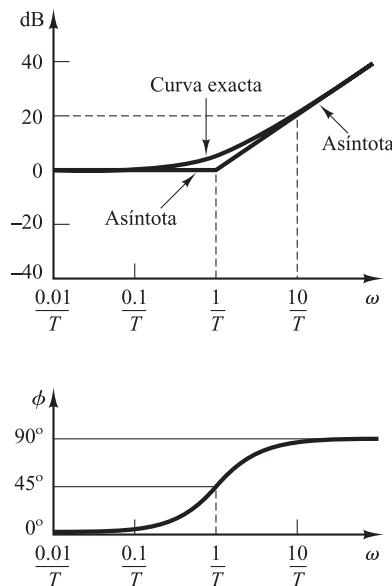


Figura 7-8. Curva de magnitud logarítmica, asíntotas y curva de ángulo de fase para $1 + j\omega T$.