CONTROL BÁSICO

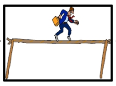
TEMAS:

- Errores en estado estacionario
- Diseño de reguladores PI y PD en bucle cerrado por método frecuencial

Facultad de Ingeniería – UNER
Carrera: Bioingeniería

ESTABILIDAD

¿Qué es la ESTABILIDAD?

$r(t)$ →  → $y(t)$

Definición BIBO (por su sigla en Ingles Boundet input – Boundet Ouput)

El sistema es ESTABLE si toda entrada acotada produce una salida total Acotada

ESTABILIDAD RELATIVA

- Margen de Ganancia (MG): es la ganancia adicional que puede incrementarse en un sistema para llevarlo al borde de la inestabilidad.

$$MG = \frac{1}{\left|G(jw).H(jw)\right|_{w1}} = \frac{K_{critico}}{K_{trabajo}}$$ W1=frecuencia de cruce de fase

En decibeles $\mathrm{MG}\,[\mathrm{db}] = 20.\log MG = -20.\log \left|\mathrm{G(jw1).H(j\ w1)}\right|$

- Margen de Fase (MF): es la cantidad de retardo de fase adicional, en la frecuencia de cruce de ganancia, que lleva al sistema al borde de la inestabilidad.

MF= 180º+q

ESTABILIDAD RELATIVA

*Para ESTABILIDAD se requiere que el MG en [db] y el MF **sean positivos**.*

*Para una **buena estabilidad relativa** el MF* y *MG* se recomienda que se encuentren entre:

MF>30º

y

MG>6 [db]

Errores Estáticos

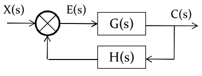
- Función de transferencia en Lazo Abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{s^N (T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)}$$

- Tipo de un sistema de control
  - Definición
    - Tipo N según el exponente N del polo en el origen (no es el orden)
  - Propiedades
    - Al aumentar
      - AUMENTA LA EXACTITUD
      - EMPEORA LA ESTABILIDAD
    - Existe un compromiso entre exactitud y estabilidad

Errores Estáticos

- Error Estacionario:



$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s.E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sX(s)}{1+G(s)H(s)}$$

- Caracterización del error estacionario
  - Clasificación según función de transferencia en Lazo Abierto
    - Definen el tipo de un sistema
  - Coeficientes Estacionarios definidos por las entradas
    - Escalón
    - Rampa
    - Parábola

Errores Estáticos

- Coeficiente estático de error de posición
  - Se define para una entrada escalón

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sX(s)}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)H(s)}\frac{1}{s}=\frac{1}{1+G(0)H(0)}$$

$$e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}\quad \text{siendo}\quad K_p=G(0)H(0)$$

  - Para sistemas de tipo 0

$$e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$$

  - Para sistemas de tipo 1 o mayor

$$e_{ss}=0$$

Errores Estáticos

- Coeficiente estático de error de velocidad
  - Se define para una entrada rampa

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sX(s)}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)H(s)}\frac{1}{s^2}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{sG(s)H(s)}$$

$$e_{ss}=\frac{1}{K_v}\quad \text{siendo}\quad K_v=\lim_{s\to 0}sG(s)H(s)$$

  - Para sistemas de tipo 0

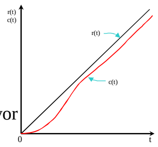
$$e_{ss}=\infty$$

  - Para sistemas de tipo 1

$$e_{ss}=\frac{1}{K_v}$$

  - Para sistemas de tipo 2 o mayor

$$e_{ss}=0$$



Errores Estáticos

- Coeficiente estático de error de aceleración
  - Se define para una entrada tipo parábola

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sX(s)}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)H(s)}\frac{1}{s^3}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2G(s)H(s)}$$

$$e_{ss}=\frac{1}{K_a}\quad \text{siendo}\quad K_a=\lim_{s\to 0}s^2G(s)H(s)$$

  - Para sistemas de tipo 0 y 1

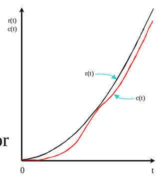
$$e_{ss}=\infty$$

  - Para sistemas de tipo 2

$$e_{ss}=\frac{1}{K_a}$$

  - Para sistemas de tipo 3 o mayor

$$e_{ss}=0$$



Errores Estáticos

- Error estático en función del tipo entrada con x(t) definida para t≥0:

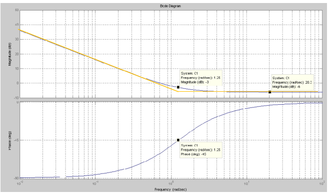
Tipo	Error de POSICIÓN Entrada escalón	Error de VELOCIDAD Entrada rampa	Error de ACELERACIÓN Entrada parábola
0	1/(1+Kp)	∞	∞
1	0	1/Kv	∞
2	0	0	1/Ka

Regulador Proporcional – Integral (PI) Diseño por método Frecuencial

La ley de control de un regulador PI responde a la siguiente ecuación:

$$y = K_p(e + \frac{1}{T_I}\int_0^t e.dt) \longrightarrow G_{PI}(s) = \left(K_p + \frac{K_p}{T_I s}\right)$$

Diagrama de Bode de un regulador PI (Ti=0,8 y Kp=0,5)



Regulador Proporcional – Integral (PI) Diseño por método Frecuencial

De la gráfica de Bode de un PI se puede observar:

- Una década después de 1/Ti el aporte de fase casi cero.
- Para frecuencias superiores a 10/Ti la magnitud atenúa en una valor igual a 20 log Ki en [dB] y la fase es cercana a los cero grados. ESTA ES LA ZONA DE DISEÑO!!!!

Regulador Proporcional – Integral (PI) Diseño por método Frecuencial

Pasos orientativos para realizar el diseño:

- Si hay requisito de Error Estático y Margen de Fase verificar si al colocar un PI se cumple con la condición de error por tener un polo al origen. Caso contrario no se puede usar un PI.
- Si se cumple con la condición de error y hay requisito de MARGEN DE FASE (MF), esto es MF=a entonces buscar en el diagrama de Bode de G(s).H(s) la frecuencia wa donde la fase de G(s).H(s)= a+5-180 y Medir la magnitud en dicha frecuencia a la que llamaremos Ma [dB]
- Hacer:

$$\frac{1}{T_i} = \frac{w_a}{10} \Rightarrow T_i = \frac{10}{w_a} \qquad 20.\log \mathrm{K_p} = -M_a$$

Regulador Proporcional – Integral (PI) Diseño por método Frecuencial

Pasos orientativos para realizar el diseño:

- Si hay requisito de Error Estático y Margen de Ganancia verificar si al colocar un PI se cumple con la condición de error por tener un polo al origen. Caso contrario no se puede usar un PI.
- Si se cumple con la condición de error y hay además requisito de MARGEN DE GANANCIA (MG), esto es MG=b [dB] entonces buscar en el diagrama de Bode de G(s).H(s) la frecuencia wb donde la fase de G(s).H(s)= -180 y Medir la magnitud en dicha frecuencia a la que llamaremos Mb [dB]
- Hacer: $\frac{1}{T_i} = \frac{w_b}{10} \Rightarrow T_i = \frac{10}{w_b} \qquad 20.\log \mathrm{K_p} = -M_b - b$

Regulador Proporcional – Integral (PI) Diseño por método Frecuencial

Ejemplo para Resolver con Matlab:

Dado el sistema G(s) que trabaja en un lazo de control con realimentación unitaria y negativa se solicita que diseñe un regulador PI para estos dos casos:

$$G(s) = \frac{8}{(s+1)^3}$$

a) Error de posición menor al 5% y Margen de Fase de 40 grados.

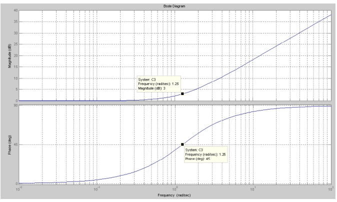
b) Error de posición menor al 5% y Margen de Ganancia superior de 6 [dB].

Regulador Proporcional – Derivativo (PD) Diseño por método Frecuencial

La ley de control de un regulador PD responde a la siguiente ecuación:

$$y = K_p \cdot e + K_p . T_D \cdot \frac{de}{dt} \longrightarrow G_{PD}(s) = K_p (1 + T_D . s)$$

Diagrama de Bode de un regulador PD (Td=0,8 y Kp=1)



Regulador Proporcional – Derivativo (PD) Diseño por método Frecuencial

De la gráfica de Bode de un PD se puede observar:

- Para frecuencias mayores a w=1/Td la magnitud es mayor que 0 [dB] y la fase crece de 45 a 90 grados.
- Para frecuencias menores a 1/Td la magnitud es 0 [dB] y el regulador puede aportar hasta 45 grados de fase. ESTA ES LA ZONA DE DISEÑO!!!!

$\angle$PD=arctg (w.Td)

Regulador Proporcional – Derivativo (PD) Diseño por método Frecuencial

Pasos orientativos para realizar el diseño:

- Si hay requisito de Error Estático y Margen de Fase utilizar el valor de Kp del regulador para cumplir con la condición de error solicitada (aplicar los límites vistos para el cálculo de los errores estáticos).
- Si se cumple con la condición de error y hay requisito de MARGEN DE FASE (MF), esto es MF=a entonces buscar en el diagrama de Bode de Kp.G(s).H(s) la frecuencia wa donde el módulo de Kp.G(s).H(s)= 0 [dB]. Medir la fase en dicha frecuencia a la que llamaremos Fa. Hacer (a+5-Fa-180) si es menor a 40 grados se puede utilizar un PD.
- Hacer:

$$arctg(w_a . T_D) = (a + 5 - F_a - 180) \qquad T_D = \frac{tg(a + 5 - F_a - 180)}{w_a}$$

Regulador Proporcional – Derivativo (PD)
Diseño por método Frecuencial

Pasos orientativos para realizar el diseño:

- Si hay requisito de Error Estático y Margen de Ganancia utilizar el valor de Kp del regulador para cumplir con la condición de error solicitada (aplicar los límites vistos para el cálculo de los errores estáticos).
- Si se cumple con la condición de error y hay además requisito de MARGEN DE GANANCIA (MG), esto es MG=b [dB], entonces buscar en el diagrama de Bode de Kp.G(s).H(s) la frecuencia wb donde el módulo vale –b [dB]. Medir la fase a esa frecuencia que será Fb. Si –(180+Fb) es menor de 40 grados poder utilizar un PD.
- Hacer:

$$arctg(w_b.T_D) = -(180 + F_b) \qquad T_D = \frac{tg(-180 - F_b)}{w_b}$$

Regulador Proporcional – Derivativo (PD)
Diseño por método Frecuencial

Ejemplo para Resolver con Matlab:

Dado el sistema G(s) que trabaja en un lazo de control con realimentación unitaria y negativa se solicita que diseñe un regulador PD para estos dos casos:

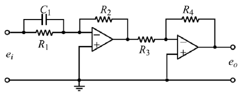
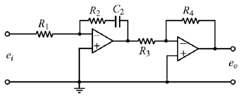
$$G(s) = \frac{6}{(s+2)^3}$$

a) Error de posición del 10% y Margen de Fase de 30 grados.

b) Error de posición del 10% y Margen de Ganancia igual o superior de 6 [dB].

c) Si tuviera que elegir unos de los dos diseños para implementar: ¿Cuál elegiría? ¿Por qué?

Recordando Algunos Circuitos para Diseñar un Regulador…

PD	$\frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}(R_1C_1s+1)$	
PI	$\frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}\frac{R_2C_2s+1}{R_2C_2s}$	
PID	$\frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}\frac{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}{R_2C_2s}$