

Obtención de Funciones de transferencia a partir de Diagramas de Bloques y Diagramas de Flujo

Control Básico - Bioingeniería

25 de marzo de 2020

Parte I

Generalidades de Diagramas de Bloques y Diagramas de Flujo

1. Resolución de diagramas de bloque

En clase de teoría se sugirió la resolución mediante álgebra de bloques del siguiente diagrama (se omite la variable dependiente s a fin de simplificar la notación):

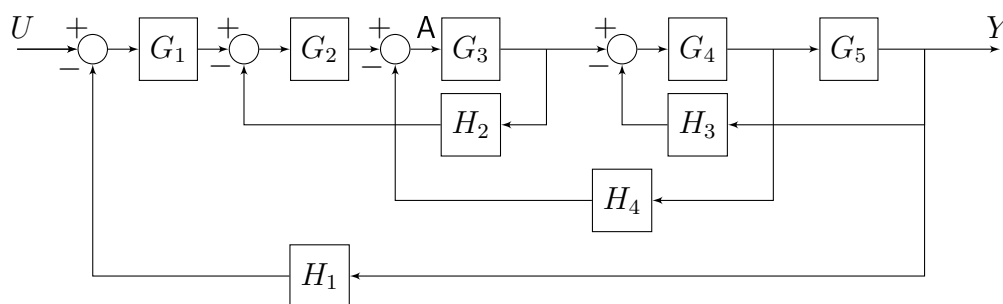


Figura 1: Diagrama de bloques propuesto en clase de teoría

Este problema como muchos otros admite múltiples soluciones (utilizando mayor o menor complejidad algebraica) pero con todas se debería llegar al mismo resultado. Un primer paso puede ser procurar que las realimentaciones no queden entrelazadas. En este sentido, trabajamos sobre el punto de donde sale la realimentación entre G_4 y G_5 , llevándolo a la salida, como se ve en la Figura 2.

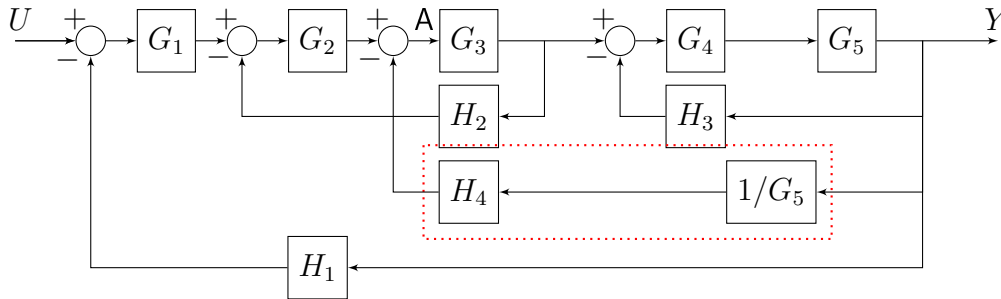


Figura 2: Resolución: primer paso

Vemos que ahora podemos resolver el lazo $G_4 - G_5 - H_3$, pero vemos que para resolver el lazo que vincula los bloques $G_2 - G_3 - H_2$ debemos correr el punto de suma que conecta con el bloque H_4 , antes del punto A. Para ello, una opción es multiplicar la rama que contiene H_4 por $1/G_2$ y lo sumamos en el sumador previo. Resolviendo en este sentido, obtenemos el diagrama de la Figura 3.

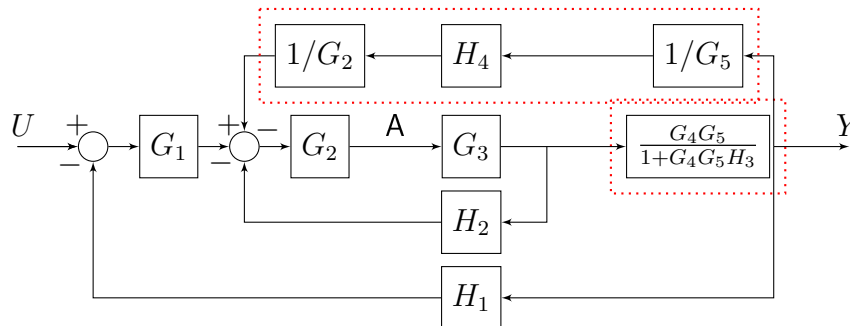


Figura 3: Resolución: segundo paso

En este punto, podemos resolver el lazo $G_2 - G_3 - H_2$, y combinarla con el lazo $G_4 - G_5 - H_3$ resuelto en el ítem anterior. A la vez, combinamos los bloques del lazo superior, como vemos en la Figura 4.

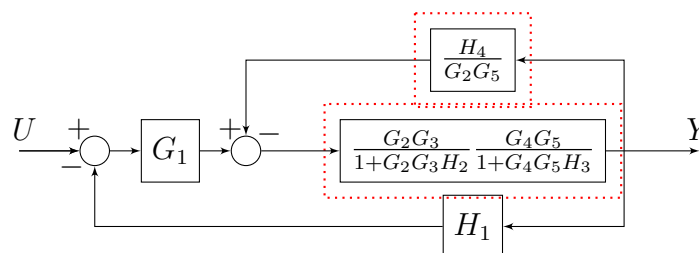


Figura 4: Resolución: tercer paso

Ahora estamos en condiciones de resolver el lazo interno, lo que produce el diagrama de la

Figura 5.

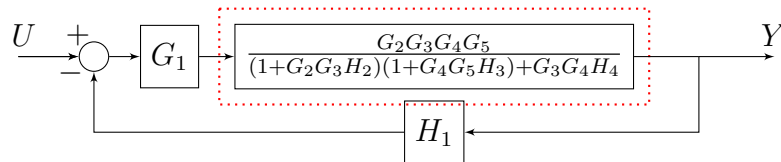


Figura 5: Resolución: cuarto paso

El paso remanente es agrupar los bloques del camino directo y resolver la realimentación, lo que resulta en la siguiente función de transferencia de la salida Y respecto a la entrada U :

$$F_1 = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5}{1 + G_4 G_5 H_3 + G_2 G_3 H_2 + G_3 G_4 H_4 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 H_1 + G_4 G_5 H_3 G_2 G_3 H_2} \quad (1)$$

2. Conversión a diagrama de flujo y resolución

Para convertir este diagrama de bloques en diagrama de flujos, habremos de convertir cada señal en un nodo y las funciones de transferencia en las transmitancias que a estos vinculan. Por otro lado, los sumadores se convierten en nodos que reciben tantas transmitancias como entradas tiene el sumador, y por tanto, la señal de salida de dicho nodo es la suma de las señales que le entran al sumador, representada como la salida del bloque sumador. De este modo, el diagrama adquiere la siguiente forma:

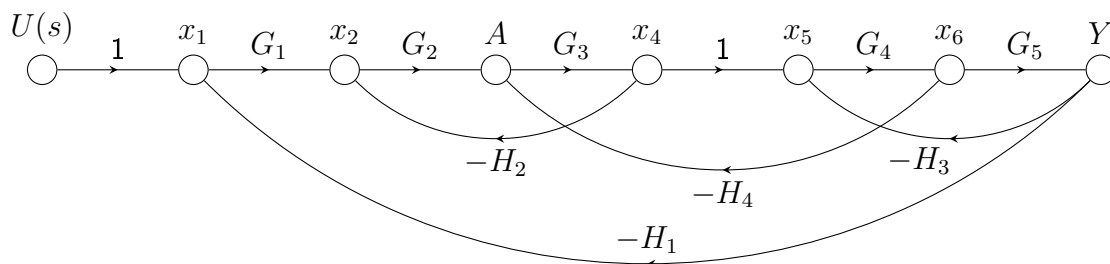


Figura 6: Diagrama de Flujo equivalente al diagrama de bloques de la Figura 1

Noten que al salir la realimentación entre el bloque G_4 y el sumador (y no después de éste), ha de separarse la bifurcación del nodo sumador, con una transmitancia 1.

2.1. Resolución

En el gráfico de flujo debemos buscar los caminos entre la salida y la entrada para la función de transferencia a determinar y los lazos. En este caso, tenemos un único camino (P_1) y 4 lazos (L_1 , L_2 , L_3 , y L_4), como se ve en la Figura 7.

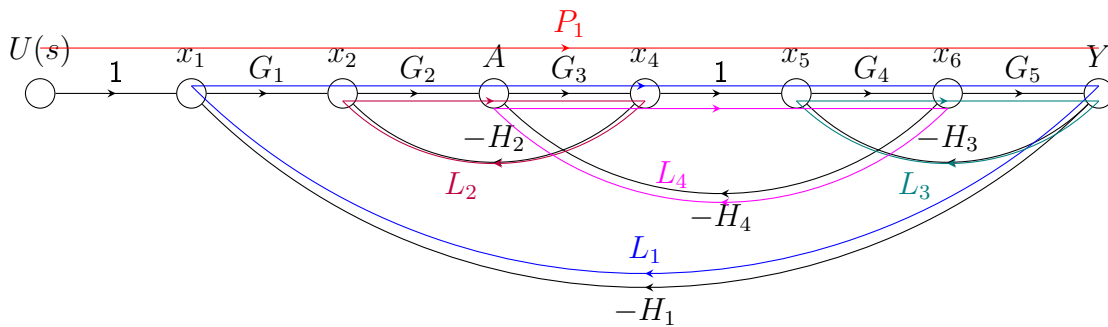


Figura 7: Caminos y lazos del diagrama en estudio.

En ecuaciones, se transforma como sigue:

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 \quad : \quad U \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow A \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow Y \quad (2)$$

$$L_1 = -G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 H_1 \quad : \quad x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow A \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow Y \rightarrow x_1 \quad (3)$$

$$L_2 = -G_2 G_3 H_2 \quad : \quad x_2 \rightarrow A \rightarrow x_4 \rightarrow x_2 \quad (4)$$

$$L_3 = -G_4 G_5 H_3 \quad : \quad x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow Y \rightarrow x_5 \quad (5)$$

$$L_4 = -G_3 G_4 H_4 \quad : \quad A \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow A \quad (6)$$

Identificados los caminos y los lazos del diagrama, debemos construir el determinante, para lo cual debemos inspeccionar los lazos disjuntos en la figura 7. Vemos que son disjuntos de a 2 los lazos L_2 y L_3 , y no hay lazos disjuntos de a 3. Por tanto el determinante queda dado por

$$\Delta = 1 - \sum_{i=1}^4 L_i + \sum_{i,k} L_i L_k - \sum_{i,k,m} L_i L_k L_m + \dots = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_2 L_3 \quad (7)$$

$$\Delta = 1 - (-G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 H_1 - G_2 G_3 H_2 - G_4 G_5 H_3 - G_3 G_4 H_4) + G_2 G_3 H_2 G_4 G_5 H_3 \quad (8)$$

En base a la ecuación (7), debemos calcular el cofactor de los caminos (en este caso, sólo uno). Para ello, hacemos cero todos los lazos que tocan el camino vinculado al cofactor que se está calculando. De este modo,

$$\Delta_1 = 1 - \cancel{(L_1 + L_2 + L_3 + L_4)} + L_2 \cancel{L_3} = 1 \quad (9)$$

Finalmente, la función de transferencia del sistema se obtiene a partir de la aplicación de la Fórmula de Mason:

$$F_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{n_c} P_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{P_1(s) \cdot 1}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_2 L_3} \quad (10)$$

$$F_1(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5}{1 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_4 G_5 H_3 + G_3 G_4 H_4 + G_2 G_3 H_2 G_4 G_5 H_3} \quad (11)$$

que es coincidente con (1). Dejamos para el lector el cálculo de la función de transferencia $F_2 = A/U$; compare ambas funciones de transferencia, tanto en numerador como en denominador. ¿Le sugiere alguna relación entre ambas funciones de transferencia?

3. Elaboración de un diagrama de flujo a partir de una función de transferencia

En ocasiones, nos es de interés determinar un posible diagrama de flujo para una función de transferencia determinada. Como veremos más adelante, esto nos será de utilidad a la hora de obtener una representación circuital de una función de transferencia. Veámos este paso inicial mediante un ejemplo. Consideremos la función de transferencia dada por

$$G_1(s) = \frac{10}{s^3 + 5s^2 + 20s + 10}. \quad (12)$$

La estrategia a utilizar consiste en procurar representar la función de transferencia deseada (en este caso, la ecuación (12)) en la forma equivalente a (10), prestando especial atención a que el denominador adquiera la forma del determinante en (7). Para ello, el primer paso consiste en dividir numerador y denominador por el monomio de mayor orden del denominador (en este caso s^3):

$$G_1(s) = \frac{10/s^3}{1 + 5/s + 20/s^2 + 10/s^3}. \quad (13)$$

Ahora, vemos que para que el denominador en (13) tenga la forma de (7), en el denominador tendríamos que tener un polinomio de la forma $1 - \dots$. Esto se logra invirtiendo los signos de la

suma en el denominador del siguiente modo:

$$G_1(s) = \frac{10/s^3}{1 - (-5/s - 20/s^2 - 10/s^3)}. \quad (14)$$

En (14) podemos distinguir que nuestro diagrama tendrá un camino (dado por el único monomio presente en el numerador), con cofactor unitario, y tres lazos. Para la construcción del diagrama, se puede proseguir del siguiente modo. Primero construya los caminos directos, utilizando tantos integradores entre entrada y salida como el monomio del numerador a representar indique, y ubicando la ganancia de cada camino entre el último integrador por el que pasa y la salida. En este caso, tomar la forma de la Figura 8.

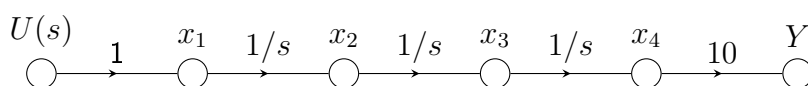


Figura 8: Caminos directos para la Función de Transferencia dada por (12).

Ahora, los lazos quedan representados por los monomios que se encuentran entre paréntesis en el denominador de (14), haciendo que cada lazo parta desde el primer integrador, siga por el camino con mayor cantidad de integradores, y pase por tantos integradores como el orden del monomio analizado indique. Luego, retorna al punto de inicio con una transmitancia igual a su coeficiente, como se ve en la Figura 9.

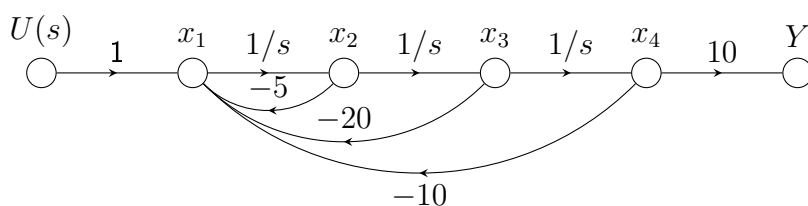


Figura 9: Diagrama de flujo para la Función de Transferencia dada por (12).

En la Figura 9 hemos obtenido una posible (entre varias) representaciones de la función de transferencia dada por (12). Esta forma de representarla nos va a ser de utilidad a lo largo de la materia para dar expresión circuital a funciones de transferencia. Se recomienda al lector obtener al función de transferencia del diagrama de la Figura 9, y realizar el ejercicio 5.b de la Guía correspondiente.

Parte II

Aplicación a circuitos eléctricos y electrónicos

Una de las características más útiles de los diagramas de flujo es su facilidad para obtener una función de transferencia a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales. Estas ecuaciones diferenciales se logran en base a las leyes físicas que modelan estos componentes. A continuación veremos este concepto analizando la dinámica vinculada con un circuitos pasivos, sistemas con integradores, y circuitos con amplificadores operacionales en configuraciones más complejas. Si bien en este punto nos centramos en sistemas eléctricos, los sistemas mecánicos, neumáticos, e hidráulicos se analizan de modo equivalente. Queda para el lector el estudio de dichos sistemas análogos.

4. Circuitos Pasivos

Como se vió en teoría y en cursos previos, las leyes físicas que se utilizan en la resolución de estos problemas son las ley de Ohm y las leyes de Kirchoff. Vamos a verlo mediante un ejemplo.

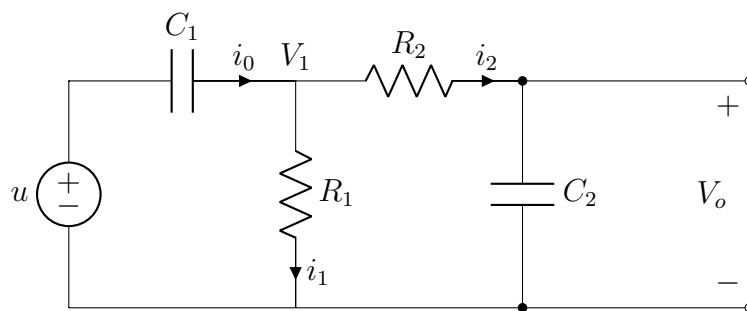


Figura 10: Circuito RC pasivo.

En el circuito que se presenta en la Figura 10, tenemos un circuito RC de dos mallas, del cual se desea obtener la relación $F(s) = V_o(s)/U(s)$. Para ello, planteamos las ecuaciones que definen el sistema:

$$U - V_1 = i_0 \frac{1}{C_1 s} \quad (15)$$

$$i_0 = i_1 + i_2 \quad (16)$$

$$V_1 = i_1 R_1 \quad (17)$$

$$V_1 - V_o = i_2 R_2 \quad (18)$$

$$V_o = i_2 \frac{1}{C_2 s} \quad (19)$$

Con las ecuaciones (15)–(19) tenemos tantas ecuaciones como incógnitas, por lo cual podemos establecer la relación deseada. El siguiente paso es construir un diagrama de flujo que nos permita obtener dicha relación. Tengan en cuenta que de cada ecuación, vamos a despejar una incógnita (esto es, un nodo), arrancando por una ecuación que incluya la variable de entrada entre sus términos (en este caso, la (15)). De ésta, despejamos $i_0 = C_1 s(U - V_1)$, para obtener el diagrama de la Figura 11.

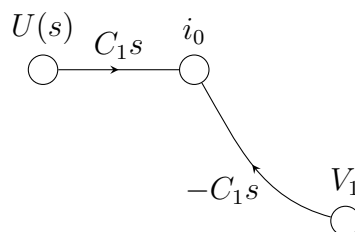


Figura 11: Construcción del diagrama de flujo del circuito representado en la Figura 10: primer ecuación.

Queda entonces descartada la ecuación (15), por lo que para continuar el diagrama de la Figura 11, tenemos que buscar entre las ecuaciones (16)–(19) una que vincule i_0 con otros nodos no definidos. En este caso, es la ecuación (16). Podríamos despejar i_1 o i_2 . Vemos que la incógnita i_1 nos permite abrir las otras ecuaciones, por lo que despejamos de la forma $i_1 = i_0 - i_2$ y el diagrama toma la forma de la Figura 12.

Ahora buscamos una ecuación que vincule el último nodo introducido (i_1) con un nuevo nodo. Esto es posible utilizando la ecuación (17), de donde despejamos el nodo V_1 para incorporarlo como vemos en el diagrama de la Figura 13.

Vemos que en el diagrama de la Figura 13, ya tenemos el nodo V_1 que requiere para la entrada de i_0 . El siguiente nodo a construir se hace por intermedio de la ecuación (18), de donde despejamos el nodo $i_2 = (V_1 - V_o)/R_2$. Noten que ahora el nodo V_1 realimenta i_0 y el nodo i_2 creado en este paso, realimenta i_1 .

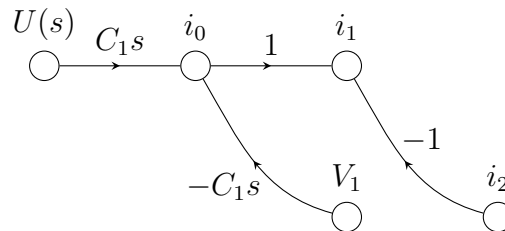


Figura 12: Construcción del diagrama de flujo del circuito representado en la Figura 10: segunda ecuación.

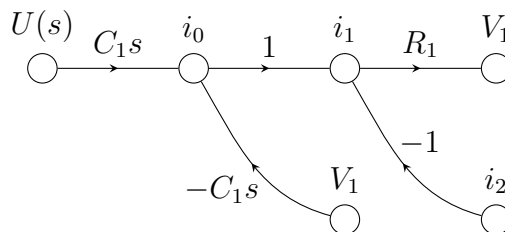


Figura 13: Construcción del diagrama de flujo del circuito representado en la Figura 10: tercera ecuación.

Finalmente, podemos construir el nodo de salida V_o a partir de la ecuación (19)

Tenemos finalizado el diagrama de flujo del circuito representado en la Figura 10. Resta utilizar las estrategias de la Sección 2.1 para obtener la función de transferencia solicitada. Queda al lector los pasos finales de la resolución.

$$\text{Rta.: } F(s) = (R_1 C_1 s) / (R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2) s + 1).$$

5. Circuitos activos simples

En ocasiones, el análisis de una función de transferencia de un circuito compuesto por una serie de amplificadores operacionales (OA) en configuración sumador inversor o integradores puede resolverse de modo relativamente sencillo a través de un diagrama de bloques. Veámoslo en el circuito de la Figura 16, donde consideraremos $RC = 1$.

En un OA en configuración inversor, la relación entre la salida y la entrada viene dada por la relación entre la impedancia de realimentación y la de entrada de la señal. En estos casos, las salidas de los OAs serán los nodos y la ganancia la transmitancia que le llega desde la fuente previa en el diagrama. Al estar todos los OAs en configuración inversora, el signo resultará de la productoria de los signos en el lazo evaluado.

Naturalmente, el primer nodo sobre el que trabajaremos será el de entrada, el cual se conecta

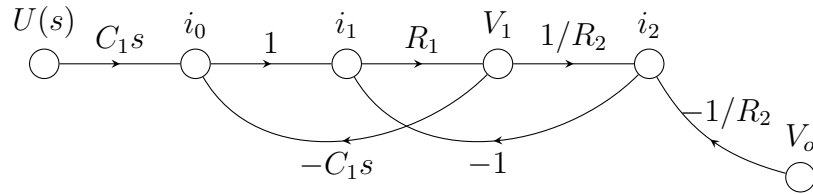


Figura 14: Construcción del diagrama de flujo del circuito representado en la Figura 10: cuarta ecuación.

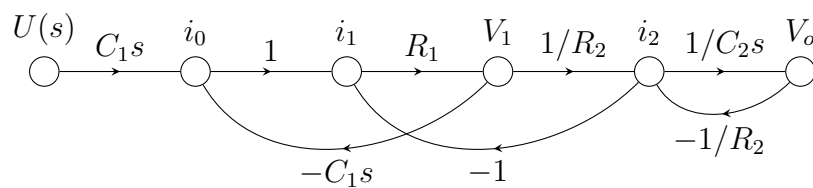


Figura 15: Construcción del diagrama de flujo del circuito representado en la Figura 10: quinta ecuación.

con el nodo del sumador en V_1 , con una transmitancia dada por la relación antes mencionada, que en este caso da -1 . El diagrama de flujo comienza entonces como se ve en la Figura 17.

Vemos que para obtener los nodos V_2 y V_3 . En estos casos la transmitancia entre el nodo V_1 y V_2 y entre V_3 y V_2 , que está dada por $-1/s$ y $-4/s$ respectivamente (recordar que $RC = 1$), como vemos en la Figura 18.

El nodo de salida V_o queda constituido por el amplificador inversor, que tiene ganancia unitaria, que lo vemos en el diagrama de la Figura 19.

Las realimentaciones se terminan cerrando como se ve en el diagrama de la Figura 20.

Finalmente, notemos que tanto en el camino como en los lazos tenemos varias multiplicaciones

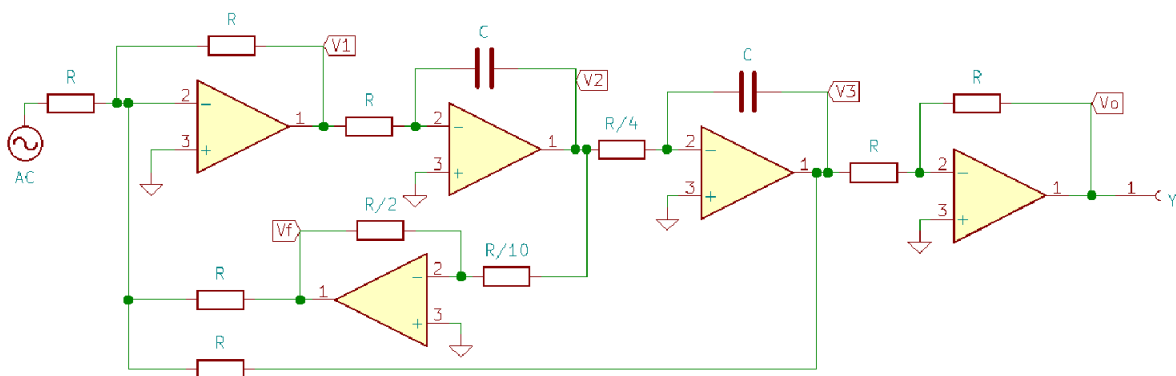


Figura 16: Circuito de amplificadores operacionales simple.

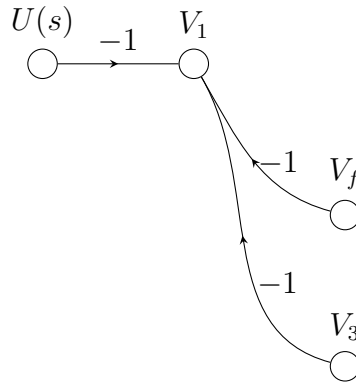


Figura 17: Construcción del diagram de flujo del circuito representado en la Figura 16: Construcción nodo V_1 .

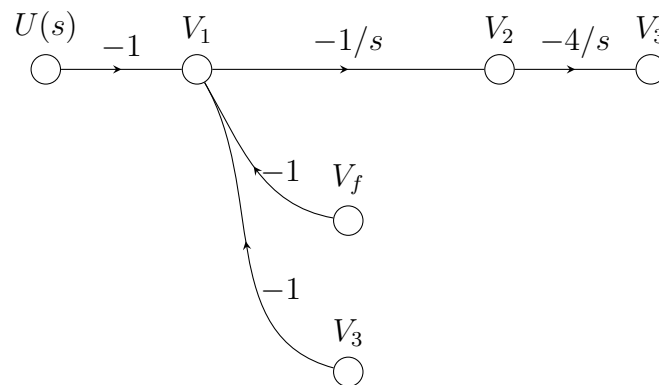


Figura 18: Construcción del diagram de flujo del circuito representado en la Figura 16: Construcción nodo V_2 y V_3 .

por factores negativos. Si bien los nodos de este diagrama representan fielmente el circuito de la Figura 16, se puede simplificar contando la paridad de las factores negativos y dejando sólo uno en caso de que esta cantidad sea impar. Esto se evidencia en el diagrama de la Figura 21. En la práctica, es conveniente hacer esta simplificación al momento de construir el diagrama, contando la cantidad de OA en configuración inversora que pasa por cada camino/lazo y estableciendo su signo en función de la paridad de dicha cuenta. Queda para el lector la determinación de la función de transferencia. ¿Que efecto tendría en la función de transferencia si el inversor final sumara además de la señal V_3 la señal V_2 invertida de signo?

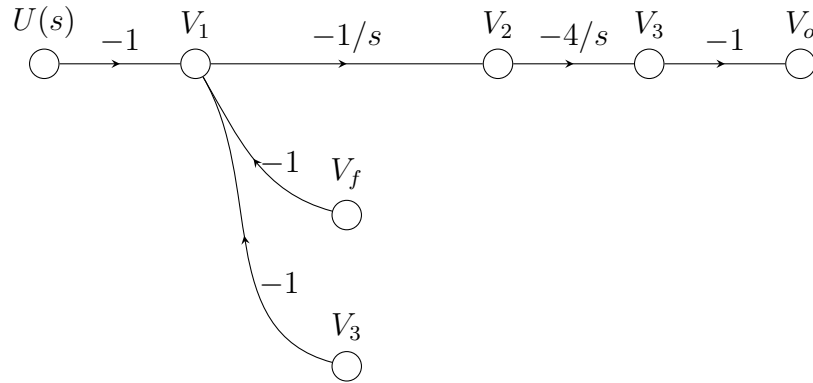


Figura 19: Construcción del diagram de flujo del circuito representado en la Figura 16: Construcción nodo V_o .

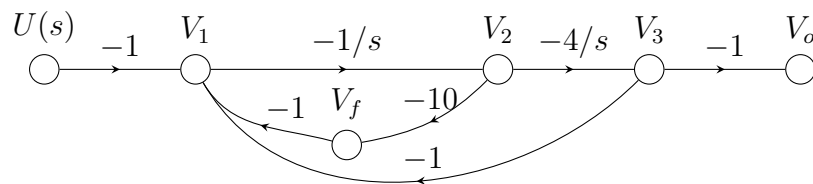


Figura 20: Construcción del diagram de flujo del circuito representado en la Figura 16: Realimentaciones.

6. Circuitos con amplificadores operacionales en configuraciones alternativas

En ocasiones, los circuitos que se nos presentan no están en una configuración inversora tradicional, sino que requieren un análisis más riguroso para poder obtener su función de transferencia. Este es el caso, por ejemplo, de la topología de [Sallen-Key](#), utilizada para la implementación de filtros activos de segundo orden, que se utilizan en los cursos de procesamiento de señales.

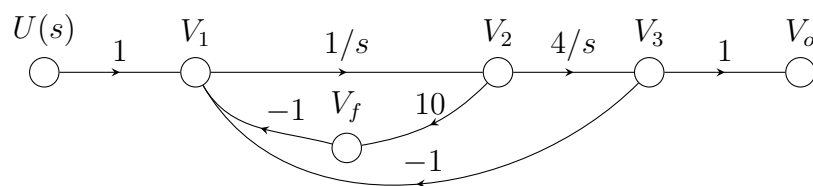


Figura 21: Construcción del diagram de flujo del circuito representado en la Figura 16: Simplificación de los signos.

Como en la Sección 4, la estrategia implica la utilización de las Leyes de Kirchoff, pero además, se utiliza la idealización del OA: impedancia de entrada infinita e impedancia de salida nula. Veamoslo mediante un ejemplo, en el circuito representado en la Figura 22

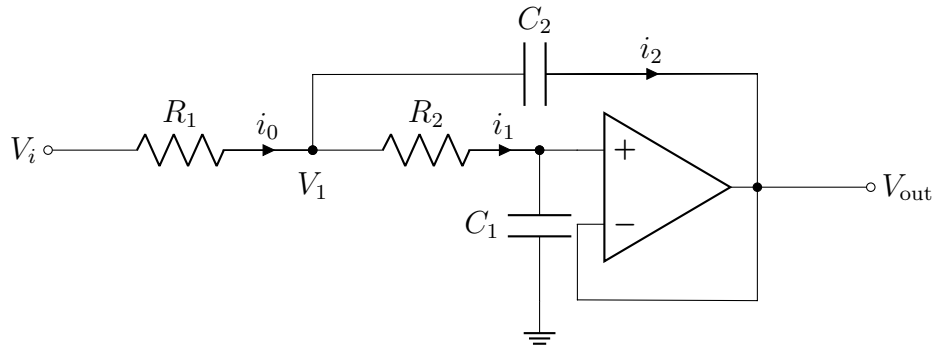


Figura 22: Ejemplo de filtro en topología Sallen-Key.

Para esta topología en particular, el sistema de ecuaciones que determinan la relación entre las distintas variables viene dado por

$$V_i - V_1 = i_0 R_1 \rightarrow i_0 = \frac{1}{R_1} (V_i - V_1) \quad (20)$$

$$i_0 = i_1 + i_2 \rightarrow i_2 = i_0 - i_1 \quad (21)$$

$$V_1 - V_o = i_2 \frac{1}{C_2 s} \rightarrow V_1 = i_2 \frac{1}{C_2 s} + V_o \quad (22)$$

$$V_1 = i_1 \left(R_2 + \frac{1}{C_1 s} \right) \rightarrow i_1 = V_1 \frac{C_1 s}{R_2 C_1 s + 1} \quad (23)$$

$$V_0 = V_+ = i_1 \frac{1}{C_1 s} \rightarrow V_0 = i_1 \frac{1}{C_1 s} \quad (24)$$

Note que la ecuación (24) utiliza la idealización del OA vinculada con la impedancia de entrada infinita; esto es, al ser $r_{in} \rightarrow \infty$, la tensión en las patas + y - es la misma.

La relación V_o/V_i que determina la función de transferencia del circuito puede obtenerse llevando las ecuaciones (20)–(24), como se muestra en la Figura 23. Se deja para el lector la resolución por medio de la fórmula de Mason de dicha ecuación. A modo de ejercicio, procure sustituir R_1 por una inductancia L_1 y resuelva nuevamente.

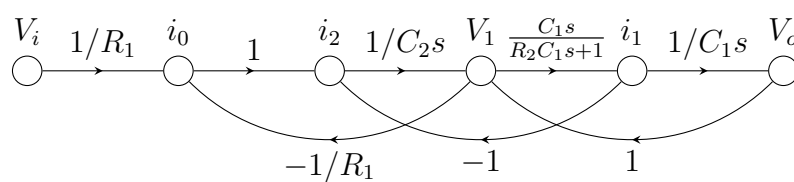


Figura 23: Diagram de flujo del circuito representado en la Figura 22.