



# Introducción a los sistemas de control

## 1-1 Introducción

---

Las teorías de control que se utilizan habitualmente son la teoría de control clásica (también denominada teoría de control convencional), la teoría de control moderno y la teoría de control robusto. Este libro presenta el tratamiento del análisis y diseño de sistemas de control basado en la teoría de control clásica y teoría de control moderno. En el Capítulo 10 se incluye una breve introducción a la teoría de control robusto.

El control automático ha desempeñado un papel vital en el avance de la ingeniería y la ciencia. El control automático se ha convertido en una parte importante e integral en los sistemas de vehículos espaciales, en los sistemas robóticos, en los procesos modernos de fabricación y en cualquier operación industrial que requiera el control de temperatura, presión, humedad, flujo, etc. Es deseable que la mayoría de los ingenieros y científicos estén familiarizados con la teoría y la práctica del control automático.

Este libro pretende ser un texto en sistemas de control para un nivel avanzado en el bachillerato o en la universidad. Todos los materiales necesarios se incluyen en el libro. La matemática relacionada con las transformadas de Laplace y el análisis vectorial y matricial se presentan en apéndices separados.

**Breve revisión de los desarrollos históricos de la teoría y práctica del control.** El primer trabajo significativo en control automático fue el regulador de velocidad centrífugo de James Watt para el control de la velocidad de una máquina de vapor, en el siglo dieciocho. Minorsky, Hazen y Nyquist, entre muchos otros, aportaron trabajos importantes en las

etapas iniciales del desarrollo de la teoría de control. En 1922, Minorsky trabajó en controladores automáticos para el guiado de embarcaciones, y mostró que la estabilidad puede determinarse a partir de las ecuaciones diferenciales que describen el sistema. En 1932, Nyquist diseñó un procedimiento relativamente simple para determinar la estabilidad de sistemas en lazo cerrado, a partir de la respuesta en lazo abierto a entradas sinusoidales en estado estacionario. En 1934, Hazen, quien introdujo el término *servomecanismos* para los sistemas de control de posición, analizó el diseño de los servomecanismos con relé, capaces de seguir con precisión una entrada cambiante.

Durante la década de los cuarenta, los métodos de la respuesta en frecuencia (especialmente los diagramas de Bode) hicieron posible que los ingenieros diseñaran sistemas de control lineales en lazo cerrado que cumplieran los requisitos de comportamiento. En los años cuarenta y cincuenta muchos sistemas de control industrial utilizaban controladores PID para el control de la presión, de la temperatura, etc. A comienzos de la década de los cuarenta Ziegler y Nichols establecieron reglas para sintonizar controladores PID, las denominadas reglas de sintonía de Ziegler-Nichols. A finales de los años cuarenta y principios de los cincuenta, se desarrolló por completo el método del lugar de las raíces propuesto por Evans.

Los métodos de respuesta en frecuencia y del lugar de las raíces, que forman el núcleo de la teoría de control clásica, conducen a sistemas estables que satisfacen un conjunto más o menos arbitrario de requisitos de comportamiento. En general, estos sistemas son aceptables pero no óptimos desde ningún punto de vista. Desde el final de la década de los cincuenta, el énfasis en los problemas de diseño de control se ha desplazado del diseño de uno de los posibles sistemas que funciona adecuadamente al diseño de un sistema óptimo respecto de algún criterio.

Conforme las plantas modernas con muchas entradas y salidas se vuelven más y más complejas, la descripción de un sistema de control moderno requiere una gran cantidad de ecuaciones. La teoría de control clásica, que trata de los sistemas con una entrada y una salida, pierde su potencialidad cuando se trabaja con sistemas con entradas y salidas múltiples. Hacia 1960, debido a la disponibilidad de las computadoras digitales fue posible el análisis en el dominio del tiempo de sistemas complejos. La teoría de control moderna, basada en el análisis en el dominio del tiempo y la síntesis a partir de variables de estados, se ha desarrollado para manejar la creciente complejidad de las plantas modernas y los requisitos cada vez más exigentes sobre precisión, peso y coste en aplicaciones militares, espaciales e industriales.

Durante los años comprendidos entre 1960 y 1980, se investigó a fondo el control óptimo tanto de sistemas determinísticos como estocásticos, así como el control adaptativo y con aprendizaje de sistemas complejos. Desde la década de los ochenta hasta la de los noventa, los avances en la teoría de control moderna se centraron en el control robusto y temas relacionados.

La teoría de control moderna se basa en el análisis en el dominio temporal de los sistemas de ecuaciones diferenciales. La teoría de control moderna simplificó el diseño de los sistemas de control porque se basa en un modelo del sistema real que se quiere controlar. Sin embargo, la estabilidad del sistema depende del error entre el sistema real y su modelo. Esto significa que cuando el controlador diseñado basado en un modelo se aplica al sistema real, éste puede no ser estable. Para evitar esta situación, se diseña el sistema de control definiendo en primer lugar el rango de posibles errores y después diseñando el controlador de forma que, si el error del sistema está en dicho rango, el sistema de control diseñado permanezca estable. El método de diseño basado en este principio se denomina teoría de control robusto. Esta teoría incorpora tanto la aproximación de respuesta en frecuencia como la del dominio temporal. Esta teoría es matemáticamente muy compleja.

Como esta teoría requiere una base matemática de nivel de licenciados, la inclusión de la teoría de control robusto en este libro está limitada únicamente a aspectos introductorios. El lector interesado en detalles sobre la teoría de control robusto debería cursar previamente un curso de control de una licenciatura en una universidad.

**Definiciones.** Antes de analizar los sistemas de control, deben definirse ciertos términos básicos.

**Variable controlada y señal de control o variable manipulada.** La variable *controlada* es la cantidad o condición que se mide y controla. La *señal de control* o variable *manipulada* es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada. Normalmente, la variable controlada es la salida del sistema. *Controlar* significa medir el valor de la variable controlada del sistema y aplicar la variable manipulada al sistema para corregir o limitar la desviación del valor medido respecto del valor deseado.

En el estudio de la ingeniería de control, es necesario definir términos adicionales que se precisan para describir los sistemas de control.

**Plantas.** Una planta puede ser una parte de un equipo, tal vez un conjunto de los elementos de una máquina que funcionan juntos, y cuyo objetivo es efectuar una operación particular. En este libro se llamará planta a cualquier objeto físico que se va a controlar (como un dispositivo mecánico, un horno de calefacción, un reactor químico o una nave espacial).

**Procesos.** El *Diccionario Merriam-Webster* define un proceso como una operación o un desarrollo natural progresivamente continuo, marcado por una serie de cambios graduales que se suceden unos a otros de una forma relativamente fija y que conducen a un resultado o propósito determinados; o una operación artificial o voluntaria que se hace de forma progresiva y que consta de una serie de acciones o movimientos controlados, sistemáticamente dirigidos hacia un resultado o propósito determinado. En este libro se llamará *proceso* a cualquier operación que se va a controlar. Algunos ejemplos son los procesos químicos, económicos y biológicos.

**Sistemas.** Un sistema es una combinación de componentes que actúan juntos y realizan un objetivo determinado. Un sistema no está necesariamente limitado a los sistemas físicos. El concepto de sistema se puede aplicar a fenómenos abstractos y dinámicos, como los que se encuentran en la economía. Por tanto, la palabra sistema debe interpretarse en un sentido amplio que comprenda sistemas físicos, biológicos, económicos y similares.

**Perturbaciones.** Una perturbación es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina *interna*, mientras que una perturbación *externa* se genera fuera del sistema y es una entrada.

**Control realimentado.** El control realimentado se refiere a una operación que, en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia, y lo realiza tomando en cuenta esta diferencia. Aquí sólo se especifican con este término las perturbaciones impredecibles, ya que las perturbaciones predecibles o conocidas siempre pueden compensarse dentro del sistema.

## 1-2 Ejemplos de sistemas de control

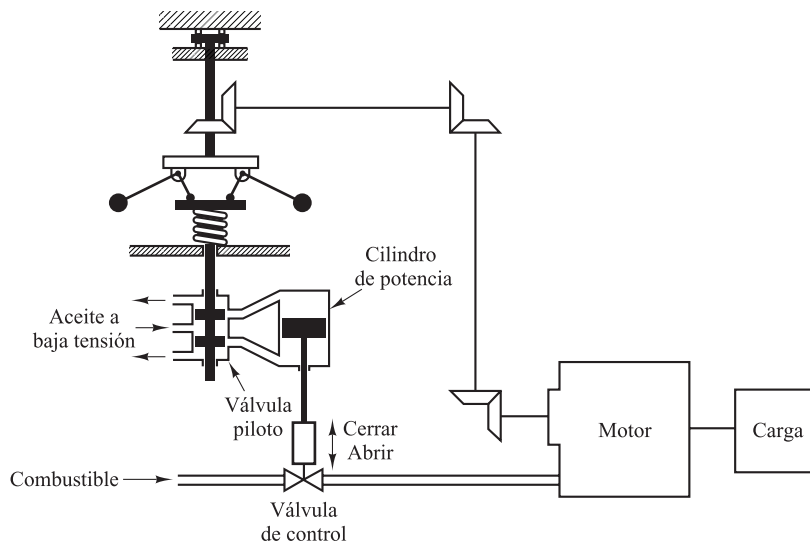
En esta sección se presentarán algunos ejemplos de sistemas de control.

**Sistema de control de velocidad.** El principio básico del regulador de velocidad de Watt para una máquina se ilustra en el diagrama esquemático de la Figura 1-1. La cantidad de combustible que se admite en la máquina se ajusta de acuerdo con la diferencia entre la velocidad de la máquina que se pretende y la velocidad real.

La secuencia de acciones puede describirse del modo siguiente: el regulador de velocidad se ajusta de modo que, a la velocidad deseada, no fluya aceite a presión en ningún lado del cilindro de potencia. Si la velocidad real cae por debajo del valor deseado debido a una perturbación, la disminución de la fuerza centrífuga del regulador de velocidad provoca que la válvula de control se mueva hacia abajo, aportando más combustible, y la velocidad del motor aumenta hasta alcanzar el valor deseado. Por otra parte, si la velocidad del motor aumenta por encima del valor deseado, el incremento en la fuerza centrífuga del regulador provoca que la válvula de control se mueva hacia arriba. Esto disminuye el suministro de combustible, y la velocidad del motor se reduce hasta alcanzar el valor deseado.

En este sistema de control de velocidad, la planta (el sistema controlado) es la máquina y la variable controlada es la velocidad de la misma. La diferencia entre la velocidad deseada y la velocidad real es la señal de error. La señal de control (la cantidad de combustible) que se va a aplicar a la planta (la máquina) es la señal de actuación. La entrada externa que se aplica para alterar la variable controlada es la perturbación. Un cambio inesperado en la carga es una perturbación.

**Sistema de control de temperatura.** La Figura 1-2 muestra un diagrama esquemático del control de temperatura de un horno eléctrico. La temperatura del horno eléctrico se mide mediante un termómetro, que es un dispositivo analógico. La temperatura analógica se convierte a una temperatura digital mediante un convertidor A/D. La temperatura digital se introduce en un controlador mediante una interfaz. Esta temperatura digital se compara con la temperatura de entrada programada, y si hay una discrepancia (error) el controlador envía una señal al



**Figura 1-1.** Sistema de control de velocidad.

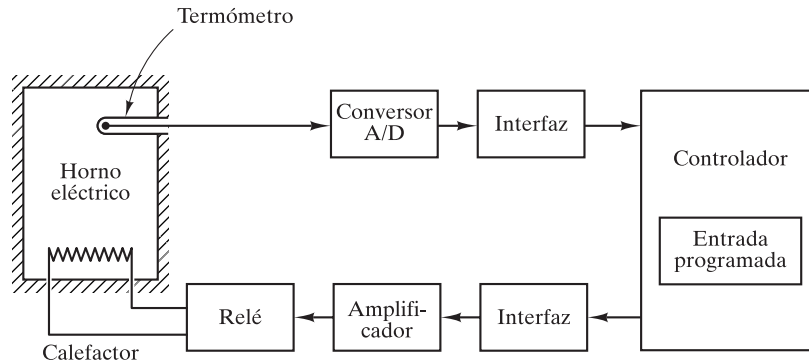


Figura 1-2. Sistema de control de temperatura.

calefactor, a través de una interfaz, amplificador y relé, para hacer que la temperatura del horno adquiriera el valor deseado.

**Sistemas empresariales.** Un sistema empresarial está formado por muchos grupos. Cada tarea asignada a un grupo representará un elemento dinámico del sistema. Para la correcta operación de este sistema deben establecerse métodos de realimentación para informar de los logros de cada grupo. El acoplamiento cruzado entre los grupos funcionales debe reducirse a un mínimo para evitar retardos de tiempo que no son deseables en el sistema. Cuanto más pequeño sea dicho acoplamiento, más regular será el flujo de señales y materiales de trabajo.

Un sistema empresarial es un sistema en lazo cerrado. Un buen diseño del mismo reducirá el control administrativo requerido. Obsérvese que las perturbaciones en este sistema son la falta de personal o de materiales, la interrupción de las comunicaciones, los errores humanos, etc.

El establecimiento de un buen sistema de estimación, basado en estadísticas, es imprescindible para lograr una administración adecuada. Obsérvese que es un hecho bien conocido que el comportamiento de tal sistema puede mejorar mediante el uso de tiempo de previsión o *anticipación*.

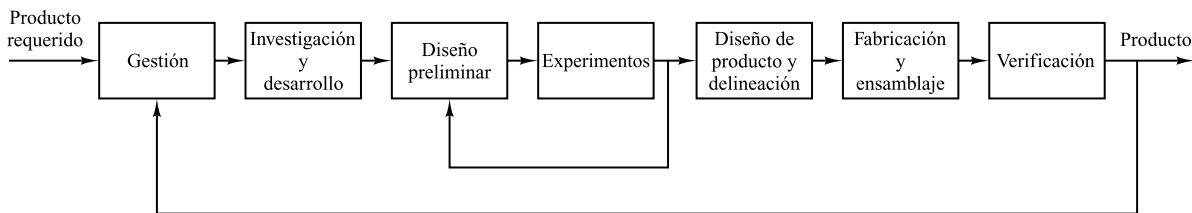
Con el propósito de aplicar la teoría de control para mejorar el comportamiento de este sistema, se debe representar la característica dinámica de los grupos componentes del sistema mediante un conjunto de ecuaciones relativamente simples.

Aunque es ciertamente un problema difícil obtener representaciones matemáticas de los grupos componentes, la aplicación de técnicas de optimización a los sistemas empresariales mejora significativamente el comportamiento de tales sistemas.

Considérese, como ejemplo, una estructura organizativa en ingeniería que está constituida por una serie de grupos tales como gestión, investigación y desarrollo, diseño preliminar, experimentos, diseño de producto y delineación, fabricación y ensamblaje y verificación. Estos grupos se interconectan para constituir el sistema completo.

Tal sistema se puede analizar reduciéndolo al conjunto más elemental de componentes necesarios que proporciona los detalles analíticos requeridos y representando las características dinámicas de cada componente mediante un conjunto de ecuaciones simples. (El comportamiento dinámico de este sistema se puede determinar a partir de la relación entre los resultados progresivos y el tiempo.)

Se puede dibujar un diagrama de bloque funcional utilizando bloques para representar las actividades funcionales e interconectar líneas de señal para representar la salida de información



**Figura 1-3.** Diagrama de bloques de un sistema de organización en ingeniería.

o producto de la operación del sistema. En la Figura 1-3 se muestra un posible diagrama de bloque.

**Sistema de control robusto.** El primer paso para el diseño de un sistema de control es la obtención del modelo matemático de la planta u objeto de control. En realidad, cualquier modelo de una planta que se quiere controlar incluirá un error debido al proceso de modelado. Esto es, la planta real difiere del modelo que se va a utilizar en el diseño del sistema de control.

Una aproximación razonable para asegurar que el controlador diseñado basado en un modelo funcionará adecuadamente cuando se utilice con la planta real, consiste en asumir desde el comienzo que existe una incertidumbre o error entre la planta real y su modelo matemático e incluir dicha incertidumbre o error en el proceso de diseño del sistema de control. El sistema de control diseñado basado en esta aproximación se denomina sistema de control robusto.

Si se supone que la planta real que se desea controlar es  $\tilde{G}(s)$  y que el modelo matemático de la planta real es  $G(s)$ , esto es

$\tilde{G}(s)$  = modelo de la planta real que tiene una incertidumbre  $\Delta(s)$

$G(s)$  = modelo de la planta nominal que se va a utilizar en el diseño del sistema de control

$\tilde{G}(s)$  y  $G(s)$  pueden estar relacionados por un factor multiplicativo del tipo

$$\tilde{G}(s) = G(s)[1 + \Delta(s)]$$

o por un factor aditivo

$$\tilde{G}(s) = G(s) + \Delta(s)$$

o de otras formas.

Puesto que no se conoce la descripción exacta de la incertidumbre o error  $\Delta(s)$ , se utiliza una estimación de  $\Delta(s)$  y en el diseño del controlador se emplea esta estimación,  $W(s)$ .  $W(s)$  es una función de transferencia escalar del tipo

$$\|\Delta(s)\|_{\infty} < \|W(s)\|_{\infty} = \max_{0 \leq \omega \leq \infty} |W(j\omega)|$$

donde  $\|W(s)\|_{\infty}$  es el máximo valor de  $|W(j\omega)|$  para  $0 \leq \omega \leq \infty$  y se denomina norma H infinito de  $W(s)$ .

Si se utiliza el teorema de la pequeña ganancia, el proceso de diseño conlleva la determinación del controlador  $K(s)$  que satisfaga la desigualdad,

$$\left\| \frac{W(s)}{1 + K(s)G(s)} \right\|_{\infty} < 1$$

donde  $G(s)$  es la función de transferencia del modelo utilizada en el proceso de diseño,  $K(s)$  es la función de transferencia del controlador y  $W(s)$  se escoge como una función de transferencia que aproxima  $\Delta(s)$ . En la mayoría de los casos prácticos, se debe satisfacer más de una desigualdad dependientes de  $G(s)$ ,  $K(s)$  y  $W(s)$ . Por ejemplo, para garantizar la estabilidad robusta y el comportamiento robusto se requiere que se satisfagan las dos desigualdades siguientes

$$\left\| \frac{W_m(s)K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \right\|_{\infty} < 1 \quad \text{para estabilidad robusta}$$

$$\left\| \frac{W_s(s)}{1 + K(s)G(s)} \right\|_{\infty} < 1 \quad \text{para comportamiento robusto}$$

(En la Sección 10-9 se deducirán estas desigualdades). Hay muchas desigualdades de este tipo que se tienen que satisfacer en muchos sistemas diferentes de control robusto. (Estabilidad robusta significa que el controlador  $K(s)$  garantiza la estabilidad interna de todos los sistemas que pertenecen a un grupo de sistemas que representan el sistema de la planta real. Comportamiento robusto significa que el comportamiento especificado se satisface para todos los sistemas que pertenecen a este grupo). En este libro se supone que se conocen con precisión todas las plantas de los sistemas de control que se presentan, excepto las plantas que se discuten en la Sección 10-9, en la que se presentan aspectos introductorios de la teoría de control robusto.

## 1-3 Control en lazo cerrado en comparación con control en lazo abierto

**Sistemas de control realimentados.** Un sistema que mantiene una relación determinada entre la salida y la entrada de referencia, comparándolas y usando la diferencia como medio de control, se denomina *sistema de control realimentado*. Un ejemplo sería el sistema de control de temperatura de una habitación. Midiendo la temperatura real y comparándola con la temperatura de referencia (temperatura deseada), el termostato activa o desactiva el equipo de calefacción o de enfriamiento para asegurar que la temperatura de la habitación se mantiene en un nivel confortable independientemente de las condiciones externas.

Los sistemas de control realimentados no se limitan a la ingeniería, sino que también se encuentran en diversos campos ajenos a ella. Por ejemplo, el cuerpo humano es un sistema de control realimentado muy avanzado. Tanto la temperatura corporal como la presión sanguínea se conservan constantes mediante una realimentación fisiológica. De hecho, la realimentación realiza una función vital: hace que el cuerpo humano sea relativamente insensible a las perturbaciones externas, permitiendo que funcione de forma adecuada en un entorno cambiante.

**Sistemas de control en lazo cerrado.** Los sistemas de control realimentados se denominan también sistemas de *control en lazo cerrado*. En la práctica, los términos control realimentado y control en lazo cerrado se usan indistintamente. En un sistema de control en lazo cerrado, se alimenta al controlador la señal de error de actuación, que es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de realimentación (que puede ser la propia señal de salida o una función de la señal de salida y sus derivadas y/o integrales), con el fin de reducir el error y llevar la salida del sistema a un valor deseado. El término control en lazo cerrado siempre implica el uso de una acción de control realimentado para reducir el error del sistema.

**Sistemas de control en lazo abierto.** Los sistemas en los cuales la salida no tiene efecto sobre la acción de control se denominan *sistemas de control en lazo abierto*. En otras palabras, en un sistema de control en lazo abierto no se mide la salida ni se realimenta para compararla con la entrada. Un ejemplo práctico es una lavadora. El remojo, el lavado y el centrifugado en la lavadora operan con una base de tiempo. La máquina no mide la señal de salida, que es la limpieza de la ropa.

En cualquier sistema de control en lazo abierto, la salida no se compara con la entrada de referencia. Así, a cada entrada de referencia le corresponde una condición de operación fija; como resultado de ello, la precisión del sistema depende de la calibración. Ante la presencia de perturbaciones, un sistema de control en lazo abierto no realiza la tarea deseada. En la práctica, el control en lazo abierto sólo se usa si se conoce la relación entre la entrada y la salida y si no hay perturbaciones internas ni externas. Es evidente que estos sistemas no son de control realimentado. Obsérvese que cualquier sistema de control que opere con una base de tiempo está en lazo abierto. Por ejemplo, el control de tráfico mediante señales operadas con una base de tiempo es otro ejemplo de control en lazo abierto.

**Sistemas de control en lazo cerrado en comparación con sistemas en lazo abierto.** Una ventaja del sistema de control en lazo cerrado es que el uso de la realimentación vuelve la respuesta del sistema relativamente insensible a las perturbaciones externas y a las variaciones internas en los parámetros del sistema. Es así posible usar componentes relativamente poco precisos y baratos para obtener el control adecuado de una planta determinada, mientras que hacer eso es imposible en el caso de un sistema en lazo abierto.

Desde el punto de vista de estabilidad, el sistema de control en lazo abierto es más fácil de desarrollar, porque la estabilidad del sistema no es un problema importante. Por otra parte, la estabilidad es un gran problema en el sistema de control en lazo cerrado, que puede conducir a corregir en exceso errores que producen oscilaciones de amplitud constante o cambiante.

Debe señalarse que, para los sistemas en los que se conocen con anticipación las entradas y en los cuales no hay perturbaciones, es aconsejable emplear un control en lazo abierto. Los sistemas de control en lazo cerrado sólo tienen ventajas cuando se presentan perturbaciones y/o variaciones impredecibles en los componentes del sistema. Obsérvese que la potencia nominal de salida determina en forma parcial el coste, peso y tamaño de un sistema de control. El número de componentes usados en un sistema de control en lazo cerrado es mayor que el que se emplea para un sistema de control equivalente en lazo abierto. Por tanto, el sistema de control en lazo cerrado suele tener costes y potencias más grandes. Para disminuir la potencia requerida de un sistema, se emplea un control en lazo abierto siempre que pueda aplicarse. Por lo general, una combinación adecuada de controles en lazo abierto y en lazo cerrado es menos costosa y ofrecerá un comportamiento satisfactorio del sistema global.

La mayoría de los análisis y diseños de sistemas de control presentados en este libro son sistemas de control en lazo cerrado. En ciertas circunstancias (por ejemplo, si no hay perturbaciones o la salida es difícil de medir) pueden ser deseables los sistemas de control en lazo abierto. Por tanto, es conveniente resumir las ventajas y desventajas de utilizar sistemas de control en lazo abierto.

Las ventajas fundamentales de los sistemas de control en lazo abierto son las siguientes:

1. Construcción simple y facilidad de mantenimiento.
2. Menos costosos que el correspondiente sistema en lazo cerrado.
3. No hay problemas de estabilidad.



4. Convenientes cuando la salida es difícil de medir o cuando medir la salida de manera precisa no es económicamente viable. (Por ejemplo, en el caso de la lavadora, sería bastante costoso proporcionar un dispositivo para medir la calidad de la salida de la lavadora, es decir, la limpieza de la ropa lavada.)

Las desventajas fundamentales de los sistemas de control en lazo abierto son las siguientes:

1. Las perturbaciones y los cambios en la calibración originan errores, y la salida puede ser diferente de lo que se desea.
2. Para mantener la calidad requerida en la salida, es necesaria la recalibración de vez en cuando.

## 1-4 Diseño y compensación de sistemas de control

Este libro presenta aspectos básicos del diseño y compensación de los sistemas de control. La compensación es la modificación de la dinámica del sistema para que se satisfagan unas especificaciones determinadas. Las aproximaciones al diseño de sistemas de control y compensación que se presentan en este libro son la aproximación mediante el lugar de las raíces, la respuesta en frecuencia y la aproximación en el espacio de estados. El diseño de sistemas de control utilizando estos métodos se presenta en los Capítulos 6, 7, 9 y 10. El diseño de sistemas de control basado en compensadores PID se presenta en el Capítulo 8.

En el diseño real de un sistema de control, el que se utilice un compensador electrónico, neumático o hidráulico debe decidirse en parte en función de la naturaleza de la planta que se controla. Por ejemplo, si la planta que se controla contiene fluidos inflamables, debe optarse por los componentes neumáticos (tanto un compensador como un actuador) para eliminar la posibilidad de que salten chispas. Sin embargo, si no existe el riesgo de incendio, los que se usan con mayor frecuencia son los compensadores electrónicos. (De hecho, es común transformar las señales no eléctricas en señales eléctricas, debido a la sencillez de la transmisión, mayor precisión, mayor fiabilidad, una mayor facilidad en la compensación, etcétera.)

**Especificaciones de comportamiento.** Los sistemas de control se diseñan para realizar tareas específicas. Los requisitos impuestos sobre el sistema de control se dan como especificaciones de comportamiento. Las especificaciones pueden venir dadas como requisitos en la respuesta transitoria (como, por ejemplo, la máxima sobreelongación y el tiempo de asentamiento en la respuesta a un escalón) y requisitos en el estado estacionario (como, por ejemplo, el error en estado estacionario frente a una entrada tipo rampa). Las especificaciones de un sistema de control se deben dar antes de que comience el proceso de diseño.

Para problemas de diseño rutinarios, las especificaciones de comportamiento (las cuales relacionan la precisión, la estabilidad relativa y la velocidad de respuesta) se proporcionan en términos de valores numéricos precisos. En otros casos, se ofrecen una parte en términos de valores numéricos precisos y otra parte en términos de planteamientos cualitativos. En este último caso, puede ser necesario modificar las especificaciones durante el proceso del diseño, ya que es posible que las especificaciones dadas nunca se cumplan (debido a que los requisitos producen conflictos) o conduzcan a un sistema muy costoso.

Por lo general, las especificaciones de comportamiento no deben ser más restrictivas de lo necesario para realizar la tarea definida. Si la precisión de una operación en estado estable es de vital importancia para un sistema de control, no se deben pedir especificaciones de comportamiento más restrictivas de lo necesario sobre la respuesta transitoria, ya que tales especifica-

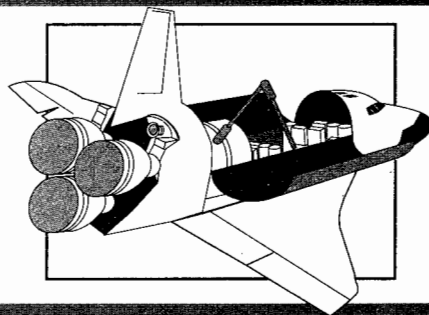
ciones requerirán componentes costosos. Recuérdese que la parte más importante del diseño de un sistema de control es la precisión en el planteamiento de las especificaciones de comportamiento con el fin de obtener un sistema de control óptimo para el propósito deseado.

**Compensación del sistema.** Establecer la ganancia es el primer paso para llevar al sistema a un comportamiento satisfactorio. Sin embargo, en muchos casos prácticos, ajustando únicamente la ganancia tal vez no proporcione la alteración suficiente en el comportamiento del sistema para cumplir las especificaciones dadas. Como ocurre con frecuencia, incrementar el valor de la ganancia mejora el comportamiento en estado estacionario pero produce una estabilidad deficiente o, incluso, inestabilidad. En este caso, es necesario volver a diseñar el sistema (modificando la estructura o incorporando dispositivos o componentes adicionales) para alterar el comportamiento general, de modo que el sistema se comporte como se desea. Este nuevo diseño o adición de un dispositivo apropiado se denomina *compensación*. Un elemento insertado en el sistema para satisfacer las especificaciones se denomina *compensador*. El compensador modifica el comportamiento deficiente del sistema original.

**Procedimientos de diseño.** En la aproximación de prueba y error para el diseño de un sistema, se parte de un modelo matemático del sistema de control y se ajustan los parámetros de un compensador. La parte de este proceso que requiere más tiempo es la verificación del comportamiento del sistema mediante un análisis, después de cada ajuste de los parámetros. El diseñador debe utilizar un programa para computador como MATLAB para evitar gran parte del cálculo numérico que se necesita para esta verificación.

Una vez obtenido un modelo matemático satisfactorio, el diseñador debe construir un prototipo y probar el sistema en lazo abierto. Si se asegura la estabilidad absoluta en lazo abierto, el diseñador cierra el lazo y prueba el comportamiento del sistema en lazo cerrado. Debido a los efectos de carga no considerados entre los componentes, la falta de linealidad, los parámetros distribuidos, etc., que no se han tenido en cuenta en el diseño original, es probable que el comportamiento real del prototipo del sistema difiera de las predicciones teóricas. Por tanto, tal vez el primer diseño no satisfaga todos los requisitos de comportamiento. Mediante el método de prueba y error, el diseñador debe cambiar el prototipo hasta que el sistema cumpla las especificaciones. Debe analizar cada prueba e incorporar los resultados de este análisis en la prueba siguiente. El diseñador debe conseguir que el sistema final cumpla las especificaciones de comportamiento y, al mismo tiempo, sea fiable y económico.

# 2 Fundamentos matemáticos



## PALABRAS CLAVE Y TEMAS

- |                                     |                             |
|-------------------------------------|-----------------------------|
| ▲ Variables complejas               | ▲ Ecuaciones de estado      |
| ▲ Transformada de Laplace           | ▲ Ecuaciones en diferencias |
| ▲ Expansión en fracciones parciales | ▲ Teoría de matrices        |
| ▲ Ecuaciones diferenciales          | ▲ Transformada $z$          |

### 2-1 Introducción

Los estudios de los sistemas de control dependen fuertemente del uso y aplicación de las matemáticas. Uno de los propósitos principales de los estudios de sistemas de control, es desarrollar un conjunto de herramientas analíticas, de tal forma que el diseñador pueda llegar a diseños razonablemente predecibles y confiables, sin depender por completo de la experimentación o de una extensa simulación en computadora.

Para el estudio de la teoría clásica de control, que representa una buena parte de este libro, los antecedentes matemáticos requeridos incluyen temas tales como la **teoría de la variable compleja, ecuaciones diferenciales y en diferencias, transformada de Laplace y transformada  $z$** , etcétera. Por otro lado, la teoría de control moderna requiere de un mayor apoyo matemático. Además de los temas anteriormente citados, la teoría de control moderna

basada en la **teoría de matrices, teoría de conjuntos, álgebra lineal y transformación lineal, cálculo variacional, programación matemática, teoría de probabilidades**, y otras matemáticas avanzadas.

En este capítulo se presenta el material de apoyo necesario para la discusión de los temas de sistemas de control que se presentan en este libro. Debido a limitaciones de espacio y al hecho de que la mayoría de los temas están considerados como repaso para el lector, el tratamiento de estos temas matemáticos no es exhaustivo. El lector que desee adentrarse más en este campo, se le remite a los libros dedicados a cada tema.

## 2-2 Concepto de variable compleja

### 2-2-1 Variable compleja

Una variable compleja  $s$  tiene dos componentes: una componente real  $\sigma$  y una imaginaria  $\omega$ . En forma gráfica, la componente real de  $s$  está representada por el eje  $\sigma$  en la dirección horizontal y la componente imaginaria se mide a lo largo del eje vertical  $j\omega$ , en el plano complejo  $s$ . La Fig. 2-1 ilustra el plano complejo  $s$ , en donde cualquier punto arbitrario  $s = s_1$  está definido por las coordenadas  $\sigma = \sigma_1$ , y  $\omega = \omega_1$ , o simplemente  $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ .

### 2-2-2 Funciones de una variable compleja

Se dice que la función  $G(s)$  es una función de la variable compleja  $s$ , si para cada valor de  $s$  existen uno o más valores correspondientes de  $G(s)$ . Debido a que  $s$  se define con partes real e imaginaria, la función  $G(s)$  también está representada por sus partes real e imaginaria:

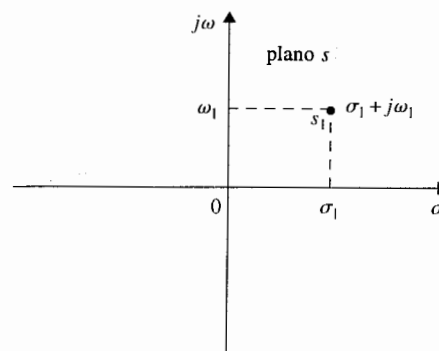
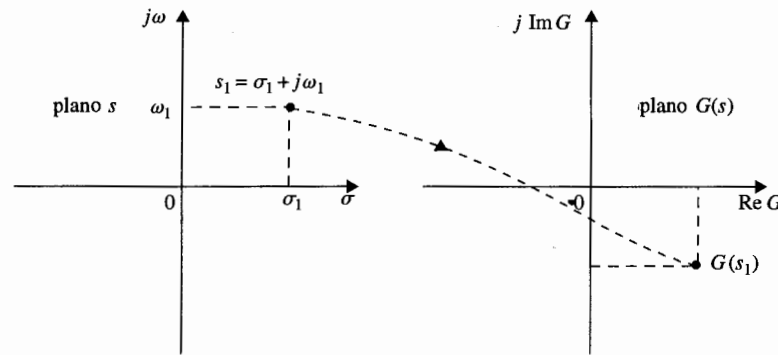


Figura 2-1 Plano complejo  $s$ .



- **Figura 2-2** Mapeo de valores simples desde el plano  $s$  al plano  $G(s)$ .

esto es:

$$G(s) = \text{Re } G(s) + j \text{Im } G(s) \quad (2-1)$$

donde  $\text{Re } G(s)$  denota la parte real de  $G(s)$  e  $\text{Im } G(s)$  representa la parte imaginaria de  $G(s)$ . La función  $G(s)$  también está representada mediante el plano complejo  $G(s)$ , con  $\text{Re } G(s)$  como el eje real e  $\text{Im } G(s)$  como el imaginario. Si para cada valor de  $s$  existe sólo un valor correspondiente de  $G(s)$  en el plano  $G(s)$ , se dice que  $G(s)$  es una **función univaluada**, y el mapeo de los puntos en el plano  $s$  dentro de los puntos en el plano  $G(s)$  se describe como un **solo valor** (Fig. 2-2). Si el mapeo desde el plano  $G(s)$  al plano  $s$  también es un valor sencillo, el mapeo se denomina **uno a uno**. Sin embargo, existen muchas funciones cuyo mapeo desde el plano de función al plano de la variable compleja no es un solo valor. Por ejemplo, dada la siguiente función:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (2-2)$$

es aparente que para cada valor de  $s$ , existe sólo un valor correspondiente para  $G(s)$ . Sin embargo, para el mapeo inverso esto no es verdad, por ejemplo, el punto  $G(s) = \infty$  está mapeado en dos puntos,  $s = 0$  y  $s = -1$ , en el plano  $s$ .

### 2-2-3 Función analítica

Una función  $G(s)$  de una variable compleja  $s$  se llama **función analítica** en una región del plano  $s$  si la función y todas sus derivadas existen en dicha región. Por ejemplo, la función dada en la ecuación (2-2) es analítica en cada punto en el plano  $s$ , excepto en los puntos  $s = 0$  y  $s = -1$ . En estos dos puntos, el valor de la función es infinita. Como otro ejemplo, la función  $G(s) = s + 2$  es analítica en cada punto en el plano  $s$  finito.

### 2-2-4 Singularidades y polos de una función

Las **singularidades** de una función son los puntos en el plano  $s$  en donde la función o sus derivadas no existen. Un **polo** es el tipo más común de singularidad y juega un papel muy importante en los estudios de la teoría de control clásica.

La definición de un polo se puede enunciar como: Si una función  $G(s)$  es analítica y univaluada, en la vecindad de  $s_p$ , se dice que tiene un polo de orden  $r$  en  $s = s_p$ , si el límite

$$\lim_{s \rightarrow s_p} [(s - s_p)^r G(s)]$$

tiene un valor finito diferente de cero. En otras palabras, el denominador de  $G(s)$  debe incluir el factor  $(s - s_p)^r$ , por lo que cuando  $s = s_p$ , la función se vuelve infinita. Si  $r = 1$ , el polo en  $s = s_p$  se llama un **polo sencillo**. Como un ejemplo, la función

$$G(s) = \frac{10(s + 2)}{s(s + 1)(s + 3)^2} \quad (2-3)$$

tiene un polo de orden 2 en  $s = -3$  y polos sencillos en  $s = 0$  y  $s = -1$ . También se puede decir que la función  $G(s)$  es analítica en el plano  $s$ , excepto en estos polos.

### 2-2-5 Ceros de una función

La definición de un **cero** de una función se puede enunciar como: Si la función  $G(s)$  es analítica en  $s = s_p$ , se dice que tiene un cero de orden  $r$  en  $s = s_p$ , si el límite

$$\lim_{s \rightarrow s_p} [(s - s_p)^{-r} G(s)]$$

tiene un valor finito diferente de cero. O, simplemente,  $G(s)$  tiene un cero de orden  $r$  en  $s = s_p$ , si  $1/G(s)$  tiene un polo de orden  $r$  en  $s = s_p$ . Por ejemplo, la función de la ecuación (2-3) tiene un cero sencillo en  $s = -2$ .

Si la función que se considera es una función racional de  $s$ , esto es, un cociente de dos polinomios en  $s$ , el número total de polos es igual al número total de ceros, al contar los polos y ceros de orden múltiple, y al tomar en cuenta los polos y ceros en el infinito. La función de la ecuación (2-3) tiene cuatro polos finitos en  $s = 0, -1, -3$  y  $-3$ ; existe un cero finito en  $s = -2$ , pero hay tres ceros infinitos, ya que:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{10}{s^3} = 0 \quad (2-4)$$

Por tanto, la función tiene un total de cuatro polos y cuatro ceros en el plano  $s$ , incluyendo los que están en el infinito.

▲ Los números totales de polos y de ceros de una función racional son iguales, contando los que están en el infinito.

## 2-3 Ecuaciones diferenciales

### 2-3-1 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Una gran variedad de sistemas en ingeniería se modelan matemáticamente mediante ecuaciones diferenciales. Estas ecuaciones generalmente involucran derivadas e integrales de variables dependientes con respecto a la variable independiente. Por ejemplo, un circuito eléctrico *RLC* en serie (resistencia-inductancia-capacitancia) se puede representar por la ecuación diferencial:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t) \quad (2-5)$$

en donde  $R$  es la resistencia,  $L$  la inductancia,  $C$  la capacitancia,  $i(t)$  la corriente en la red y  $e(t)$  el voltaje aplicado. En este caso,  $e(t)$  es la función de excitación,  $t$  la variable independiente e  $i(t)$  la variable dependiente o desconocida que será determinada al resolver la ecuación diferencial.

La ecuación (2-5) se denomina como una ecuación diferencial de segundo orden, y se hace referencia al sistema como un **sistema de segundo orden**. Estrictamente hablando, la ecuación (2-5) se debe nombrar como una ecuación integrodiferencial, ya que involucra una integral.

En general, la ecuación diferencial de un sistema de  $n$ -ésimo orden se escribe como:

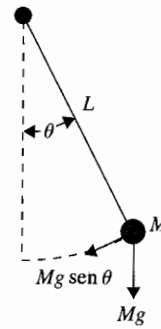
$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t) \quad (2-6)$$

que también se conoce como **ecuación diferencial ordinaria lineal** si los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  no son funciones de  $y(t)$ .

En este libro, debido a que se trata sólo con sistemas de parámetros concentrados, todas las ecuaciones diferenciales son del tipo ordinario. Para sistemas con parámetros distribuidos, tales como los sistemas de transferencia de calor, se emplean las ecuaciones en derivadas parciales.

### 2-3-2 Ecuaciones diferenciales no lineales

Muchos sistemas físicos son no lineales y se deben describir mediante ecuaciones diferenciales no lineales. Por ejemplo, la ecuación diferencial que describe el movimiento de un péndulo que se muestra en la Fig. 2-3 es:



**Figura 2-3** Péndulo simple.

$$ML \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + Mg \sin \theta(t) = 0 \quad (2-7)$$

Ya que  $\theta(t)$  aparece con una función seno, la ecuación (2-7) es no lineal, y el sistema se conoce como **sistema no lineal**.

### 2-3-3 | Ecuaciones diferenciales de primer orden: Ecuaciones de estado

En general, una ecuación diferencial de  $n$ -ésimo orden se puede descomponer en  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden. Ya que, en principio, las ecuaciones diferenciales de primer orden son más fáciles de resolver que otras de orden más alto, existen razones por las que las ecuaciones diferenciales de primer orden se emplean en los estudios analíticos de sistemas de control.

Para la ecuación diferencial de la ecuación (2-5), se tiene:

$$x_1(t) = \int i(t) dt \quad (2-8)$$

y

$$x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = i(t) \quad (2-9)$$

La ecuación (2-5) se descompone en las siguientes dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \quad (2-10)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{LC}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}e(t) \quad (2-11)$$



En forma similar, para la ecuación (2-6), se define:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt} \\ \vdots \\ x_n(t) = \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} \end{array} \right. \quad (2-12)$$

Entonces la ecuación diferencial de  $n$ -ésimo orden se descompone en  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \cdots - a_{n-2}x_{n-1}(t) - a_{n-1}x_n(t) + f(t) \end{array} \right. \quad (2-13)$$

Observe que la última ecuación se obtiene al igualar el término de la derivada de mayor orden en la ecuación (2-6) con el resto de los términos. En la teoría de los sistemas de control, el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden de la ecuación (2-13) se conoce como **ecuaciones de estado**, y  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , son llamadas **variables de estado**.

### Definición de las variables de estado

▲ El estado de un sistema se refiere al pasado, presente y futuro del sistema.

El **estado** de un sistema se refiere a las condiciones **pasadas, presentes y futuras** del sistema. Desde un sentido matemático, es conveniente definir un conjunto de **variables de estado** y **ecuaciones de estado** para modelar sistemas dinámicos. Las variables  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  definidas en la ecuación (2-12) son las variables de estado de un sistema de  $n$ -ésimo orden descrito por la ecuación (2-6), y las  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden son las ecuaciones de estado. En general, existen algunas reglas básicas relacionadas con la definición de una variable de estado y lo que constituye una ecuación de estado. Las variables de estado deben satisfacer las siguientes condiciones:

▲ Las variables de estado deben siempre ser un conjunto mínimo.

1. En cualquier tiempo inicial  $t = t_0$ , las variables de estado  $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$  definen los **estados iniciales** del sistema.

2. Una vez que las entradas del sistema para  $t \geq t_0$  y los estados iniciales antes definidos son especificados, las variables de estado deben definir completamente el comportamiento futuro del sistema.

*Las variables de estado de un sistema se definen como un **conjunto mínimo** de variables  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , de cuyo conocimiento en cualquier tiempo  $t_0$  y del conocimiento de la información de la entrada de excitación que se aplica subsecuentemente, son suficientes para determinar el estado del sistema en cualquier tiempo  $t > t_0$ .*

### Ecuaciones de salida

▲ La salida de un sistema debe ser siempre medible.

No se deben confundir las variables de estado con las salidas de un sistema. Una salida de un sistema es una variable que puede ser **medida**, pero una variable de estado no siempre satisface este requerimiento. Por ejemplo, en un motor eléctrico, las variables de estado como el flujo de corriente, la velocidad del rotor y el desplazamiento se pueden medir físicamente, y estas variables califican como variables de salida. Por otra parte, el flujo magnético también se puede considerar como una variable de estado en un motor eléctrico, ya que representa el estado pasado, presente y futuro del motor, pero no puede ser medido directamente durante el funcionamiento, y por tanto, no califica como una variable de salida. En general, una variable de salida se puede expresar como una combinación algebraica de las variables de estado. Para el sistema descrito por la ecuación (2-6), si  $y(t)$  se designa como la salida, la ecuación de salida es  $y(t) = x_1(t)$ .

## 2-4 Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una de las herramientas matemáticas utilizadas para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. En comparación con el método clásico de resolución de ecuaciones diferenciales lineales, la transformada de Laplace tiene dos características atractivas.

1. La solución de la ecuación homogénea y la solución particular se obtienen en una sola operación.
2. La transformada de Laplace convierte la ecuación diferencial en una ecuación algebraica en  $s$ . Entonces es posible manipular la ecuación algebraica mediante reglas algebraicas simples, para obtener la solución en el dominio  $s$ . La solución final se obtiene tomando la transformada inversa de Laplace.

### 2-4-1 Definición de la transformada de Laplace

Dada la función real  $f(t)$  que satisface la condición:

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (2-14)$$

para alguna  $\sigma$  real finita, la transformada de Laplace de  $f(t)$  se define como:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2-15)$$

o

$$F(s) = \text{transformada de Laplace de } f(t) = \mathcal{L}[f(t)] \quad (2-16)$$

▲ La respuesta de un sistema causal no precede a la entrada.

La variable  $s$  se denomina el **operador de Laplace**, que es una variable compleja; esto es,  $s = \sigma + j\omega$ . La ecuación (2-15) también se conoce como **transformada de Laplace unilateral**, ya que la integral se evalúa desde  $t = 0$  hasta  $\infty$ . Esto simplemente significa que toda la información contenida en  $f(t)$  antes de  $t = 0$  se ignora o se considera cero. Esta suposición no implica ninguna limitante en las aplicaciones de la transformada de Laplace a problemas de sistemas lineales, ya que en los estudios en el dominio del tiempo, la referencia de tiempo se escoge a menudo en  $t = 0$ . Además, para un sistema físico cuando una entrada se aplica en  $t = 0$ , la respuesta del sistema no comienza antes que  $t = 0$ ; esto es, la respuesta no precede a la excitación. Tal sistema es también conocido como **causal** o simplemente, **físicamente realizable**.

Estrictamente, la transformada de Laplace unilateral se debe definir desde  $t = 0^-$  hasta  $t = \infty$ . El símbolo  $t = 0^-$  implica que el límite de  $t \rightarrow 0$  se toma por la izquierda de  $t = 0$ . Este proceso limita situaciones en donde la función  $f(t)$  no es continua o tiene un impulso en  $t = 0$ . Para los temas tratados en este libro, la ecuación que define la transformada de Laplace en la ecuación (2-15) se utiliza rara vez en la solución de un problema, ya que las expresiones de transformadas que se utilizan ya están dadas o se pueden encontrar en la tabla de transformadas de Laplace. Por tanto, el punto fino al utilizar  $0^-$  o  $0^+$  nunca se necesita especificar. Por sencillez, simplemente se utilizará  $t = 0$  o  $t = t_0$  como el tiempo inicial en todas las discusiones subsecuentes.

El siguiente ejemplo ilustra cómo se utiliza la ecuación (2-15) para evaluar la transformada de Laplace de  $f(t)$ .

**Ejemplo  
2-1**

Sea  $f(t)$  una función escalón unitario que se define como:

$$f(t) = \begin{cases} u_s(t) = 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2-17)$$

La transformada de Laplace de  $f(t)$  se obtiene como:

$$F(s) = \mathcal{L}[u_s(t)] = \int_0^{\infty} u_s(t) e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (2-18)$$

La ecuación (2-18) es válida si:

$$\int_0^{\infty} |u_s(t) e^{-\sigma t}| dt = \int_0^{\infty} |e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (2-19)$$

lo que significa que la parte real de  $s$ ,  $\sigma$ , debe ser mayor a cero. En la práctica, a la transformada de Laplace de la función escalón unitario se le indica simplemente como  $1/s$ , y rara vez uno se tiene que preocupar por la región en el plano  $s$  en donde la integral de la transformada converge absolutamente. ▲

**Ejemplo  
2-2**

Considere la función exponencial:

$$f(t) = e^{-\alpha t} \quad t \geq 0 \quad (2-20)$$

donde  $\alpha$  es una constante real. La transformada de Laplace de  $f(t)$  se escribe como:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \frac{e^{-(s+\alpha)t}}{s + \alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s + \alpha} \quad (2-21)$$

▲

**2-4-2 Transformada inversa de Laplace**

Dada la transformada de Laplace  $F(s)$ , la operación para obtener  $f(t)$  se denomina como la **transformada inversa de Laplace** que se denota por:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \quad (2-22)$$

La integral de la transformada inversa de Laplace se representa como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (2-23)$$

en donde  $c$  es una constante real que es mayor que las partes reales de todas las singularidades de  $F(s)$ . La ecuación (2-23) representa una integral de línea que se evalúa en el plano  $s$ . Para funciones simples, la operación de la transformada inversa de Laplace se puede llevar a cabo simplemente refiriéndose a la tabla de transformadas de Laplace, tal como la que se presenta en el Apéndice B. Para funciones complejas, la transformada inversa de Laplace se puede obtener, primero realizando una expansión en fracciones parciales (Sec. 2-5) de  $F(s)$  y después se utiliza la tabla de transformadas. Un programa de computadora, tal como el **pfe**, de las herramientas de **CSAD** en conjunto con **MATLAB** también se pueden utilizar para la expansión en fracciones parciales/inversa de la transformada de Laplace. Encontrará mayores detalles sobre lo anterior en la Sec. 2-5.

### 2-4-3 Teoremas importantes de la transformada de Laplace

Las aplicaciones de la transformada de Laplace, en muchos casos se simplifican al emplear las propiedades de la transformada. Estas propiedades se presentan con los siguientes teoremas, para los cuales no se da ninguna prueba.

#### ▲ Teorema 1. *Multiplicación por una constante*

Sea  $k$  una constante y  $F(s)$  es la transformada de Laplace de  $f(t)$ . Entonces:

$$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s) \quad (2-24)$$

#### ▲ Teorema 2. *Suma y resta*

Sean  $F_1(s)$  y  $F_2(s)$  las transformadas de Laplace de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , respectivamente. Entonces:

$$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s) \quad (2-25)$$

#### ▲ Teorema 3. *Diferenciación*

Sea  $F(s)$  la transformada de Laplace de  $f(t)$ , y  $f(0)$  es el límite de  $f(t)$ , cuando  $t$  tiende a 0. La transformada de Laplace de la derivada con respecto al tiempo de  $f(t)$  es:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = sF(s) - f(0) \quad (2-26)$$

En general, para las derivadas de orden superior de  $f(t)$ ,

$$\left| \begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] &= s^n F(s) - \lim_{t \rightarrow 0} \left[ s^{n-1} f(t) + s^{n-2} \frac{df(t)}{dt} + \dots + \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} \right] \\ &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \end{aligned} \right| \quad (2-27)$$

en donde  $f^{(i)}(0)$  denota la derivada de  $i$ -ésimo orden de  $f(t)$  con respecto a  $t$ , evaluada en  $t = 0$ .

#### ▲ Teorema 4. Integración

La transformada de Laplace de la primera integral de  $f(t)$  con respecto al tiempo, es la transformada de Laplace de  $f(t)$  dividida entre  $s$ , esto es:

$$\left| \mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s} \right| \quad (2-28)$$

Para la integración de  $n$ -ésimo orden:

$$\left| \mathcal{L} \left[ \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_n} f(\tau) d\tau dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1} \right] = \frac{F(s)}{s^n} \right| \quad (2-29)$$

#### ▲ Teorema 5. Traslación en el tiempo

La transformada de Laplace de  $f(t)$  retrasada un tiempo  $T$  es igual a la transformada de Laplace de  $f(t)$  multiplicada por  $e^{-Ts}$ ; esto es:

$$\left| \mathcal{L}[f(t - T)u_s(t - T)] = e^{-Ts}F(s) \right| \quad (2-30)$$

en donde  $u_s(t - T)$ , denota la función escalón unitario que está desplazada en tiempo a la derecha por  $T$ .

#### ▲ Teorema 6. Teorema del valor inicial

Si la transformada de Laplace de  $f(t)$  es  $F(s)$ , entonces:

$$\left| \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \right| \quad (2-31)$$

si el límite existe.

**▲ Teorema 7. Teorema del valor final**

▲ El teorema del valor final es válido sólo si  $sF(s)$  no tiene polos sobre el eje  $j\omega$  o en el semiplano derecho del plano  $s$ .

Si la transformada de Laplace de  $f(t)$  es  $F(s)$ , y si  $sF(s)$  es analítica sobre el eje imaginario y en el semiplano derecho del plano  $s$ , entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (2-32)$$

El teorema del valor final es muy útil para el análisis y diseño de sistemas de control, ya que proporciona el valor final de una función de tiempo mediante el conocimiento del comportamiento de su transformada de Laplace en  $s = 0$ . El teorema del valor final *no* es válido si  $sF(s)$  contiene algún polo cuya parte real es cero o positiva, lo que equivale al requisito de que  $sF(s)$  sea analítica en el semiplano derecho como se especifica en el enunciado del teorema. Los siguientes ejemplos ilustran el cuidado que debe tomarse en la aplicación de este teorema.

Considere la función:

### Ejemplo 2-3

$$F(s) = \frac{5}{s(s^2 + s + 2)} \quad (2-33)$$

Debido a que  $sF(s)$  es analítica sobre el eje imaginario y en el semiplano derecho del plano  $s$ , el teorema del valor final puede ser aplicado. Utilizando la ecuación (2-32), se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5}{s^2 + s + 2} = \frac{5}{2} \quad (2-34)$$

▲

Considere la función:

### Ejemplo 2-4

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2-35)$$

lo cual es la transformada de Laplace de  $f(t) = \sin \omega t$ . Debido a que la función  $sF(s)$  tiene dos polos sobre el eje imaginario del plano  $s$ , en este caso el teorema del valor final *no* puede ser aplicado. En otras palabras, aún cuando el teorema del valor final pudiese arrojar un valor cero como el valor final de  $f(t)$ , el resultado es erróneo. ▲

**▲ Teorema 8. Traslación compleja**

La transformada de Laplace de  $f(t)$  multiplicada por  $e^{\mp \alpha t}$ , donde  $\alpha$  es una constante, es igual a la transformada de Laplace  $F(s)$ , con  $s$  remplazada por  $s \pm \alpha$ ; esto es:

$$\mathcal{L}[e^{\mp \alpha t} f(t)] = F(s \pm \alpha) \quad (2-36)$$

**▲ Teorema 9. Convolución real (multiplicación compleja)**

Sean  $F_1(s)$  y  $F_2(s)$  las transformadas de Laplace de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , respectivamente, y que  $f_1(t) = 0$ ,  $f_2(t) = 0$ , para  $t < 0$ ; entonces:

$$\begin{aligned} F_1(s)F_2(s) &= \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] \\ &= \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau) d\tau\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau) d\tau\right] \end{aligned} \quad (2-37)$$

donde el símbolo “\*” denota la **convolución** en el dominio del tiempo.

La ecuación (2-37) muestra que la multiplicación de dos funciones transformadas en el dominio complejo  $s$ , es equivalente a la convolución de dos funciones reales correspondientes en  $t$  en el dominio de  $t$ . Un factor importante por recordar es que *la transformada inversa de Laplace del producto de dos funciones en el dominio de  $s$  no es igual al producto de las dos funciones reales correspondientes en el dominio de  $t$ ; esto es, en general:*

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] \neq f_1(t)f_2(t) \quad (2-38)$$

Existe también una relación dual al teorema de la convolución real, llamada **convolución compleja** o **multiplicación real**. Esencialmente, el teorema establece que la multiplicación en el dominio real de  $t$  es equivalente a la convolución en el dominio complejo de  $s$ ; esto es:

$$\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)] = F_1(s) * F_2(s) \quad (2-39)$$

en donde, en este caso, \* denota la convolución compleja. Aquí no se proporcionan los detalles de la fórmula de la convolución compleja.

La Tabla 2-1 resume los teoremas de la transformada de Laplace.

## 2-5 Transformada inversa de Laplace mediante la expansión en fracciones parciales

En la mayoría de los problemas de sistemas de control, la evaluación de la transformada inversa de Laplace no recae en el uso de la integral de inversión de la ecuación (2-23). Más bien, la operación de la transformada inversa de Laplace que involucra funciones racionales se puede realizar mediante el empleo de la tabla de transformadas de Laplace y la expansión en fracciones parciales. Esta última y la búsqueda de la transformada inversa en la tabla de transformadas se pueden realizar a través de programas de computadora.



**Tabla 2-1 Teoremas de la transformada de Laplace**

Multiplicación por una constante	$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s)$
Suma y resta	$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
Diferenciación	$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$ $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
	en donde
	$f^{(k)}(0) = \left. \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right _{t=0}$
Integración	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$ $\mathcal{L}\left[\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_n} f(\tau) d\tau dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}\right] = \frac{F(s)}{s^n}$
Traslación en tiempo	$\mathcal{L}[f(t - T)u(t - T)] = e^{-Ts}F(s)$
Teorema de valor inicial	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Teorema de valor final	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ si $sF(s)$ no tiene polos en/o a la derecha del eje imaginario en el plano $s$
Traslación compleja	$\mathcal{L}[e^{\pm \alpha t} f(t)] = F(s \pm \alpha)$
Convolución real	$F_1(s)F_2(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau) d\tau\right]$ $= \mathcal{L}\left[\int_0^t f_2(\tau)f_1(t - \tau) d\tau\right] = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)]$

### 2-5-1 Expansión en fracciones parciales

Cuando la solución mediante la transformada de Laplace de una ecuación diferencial es una función racional en  $s$ , se puede escribir como:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (2-40)$$

en donde  $P(s)$  y  $Q(s)$  son polinomios en  $s$ . Se supone que el grado de  $P(s)$  en  $s$  es mayor que el de  $Q(s)$ . El polinomio  $P(s)$  se puede escribir como:

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (2-41)$$

en donde  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  son coeficientes reales. Los métodos de la expansión en fracciones parciales serán dados para los casos de polos simples, polos de orden múltiple y polos complejos conjugados de  $G(s)$ .

### $G(s)$ Tiene polos simples

Si todos los polos de  $G(s)$  son simples y reales, la ecuación (2-40) se puede escribir como:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_n)} \quad (2-42)$$

en donde  $s_1 \neq s_2 \neq \dots \neq s_n$ . Al aplicar la expansión en fracciones parciales, la ecuación (2-42) se escribe como:

$$G(s) = \frac{K_{s1}}{s + s_1} + \frac{K_{s2}}{s + s_2} + \cdots + \frac{K_{sn}}{s + s_n} \quad (2-43)$$

El coeficiente  $K_{si}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) se determina al multiplicar ambos miembros de la ecuación (2-42) o de la ecuación (2-43) por el factor  $(s + s_1)$  y después se hace que  $s$  sea igual a  $-s_i$ . Para encontrar el coeficiente  $K_{s1}$ , por ejemplo, se multiplican ambos miembros de la ecuación (2-42) por  $(s + s_1)$  y se hace que  $s = -s_1$ . Por lo que,

$$K_{s1} = \left[ (s + s_1) \frac{Q(s)}{P(s)} \right] \Big|_{s=-s_1} = \frac{Q(-s_1)}{(s_2 - s_1)(s_3 - s_1) \cdots (s_n - s_1)} \quad (2-44)$$

Considere la función:

$$G(s) = \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} \quad (2-45)$$

que se expande en fracciones parciales como:

$$G(s) = \frac{K_{-1}}{s + 1} + \frac{K_{-2}}{s + 2} + \frac{K_{-3}}{s + 3} \quad (2-46)$$

Los coeficientes  $K_{-1}$ ,  $K_{-2}$ , y  $K_{-3}$  se determinan como sigue:

$$K_{-1} = [(s + 1)X(s)] \Big|_{s=-1} = \frac{5(-1) + 3}{(2 - 1)(3 - 1)} = -1 \quad (2-47)$$

$$K_{-2} = [(s + 2)X(s)] \Big|_{s=-2} = \frac{5(-2) + 3}{(1 - 2)(3 - 2)} = 7 \quad (2-48)$$

$$K_{-3} = [(s + 3)X(s)] \Big|_{s=-3} = \frac{5(-3) + 3}{(1 - 3)(2 - 3)} = -6 \quad (2-49)$$

### Ejemplo 2-5

Por lo que la ecuación (2-46) se convierte en:

$$G(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{7}{s+2} - \frac{6}{s+3} \quad (2-50)$$

▲

### **$G(s)$ Tiene polos de orden múltiple**

Si  $r$  de los  $n$  polos de  $G(s)$  son idénticos, o se dice que el polo en  $s = -s_i$  es de multiplicidad  $r$ ,  $G(s)$  se escribe:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s+s_1)(s+s_2) \cdots (s+s_{n-r})(s+s_i)^r} \quad (2-51)$$

( $i \neq 1, 2, \dots, n-r$ ). Entonces  $G(s)$  se puede expandir como:

$$\left| \begin{aligned} G(s) &= \frac{K_{s1}}{s+s_1} + \frac{K_{s2}}{s+s_2} + \cdots + \frac{K_{s(n-r)}}{s+s_{n-r}} \\ &\quad | \leftarrow n-r \text{ términos de polos simples} \rightarrow | \\ &\quad + \frac{A_1}{s+s_i} + \frac{A_2}{(s+s_i)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(s+s_i)^r} \\ &\quad | \leftarrow r \text{ términos de polos repetidos} \rightarrow | \end{aligned} \right. \quad (2-52)$$

Los  $(n-r)$  coeficientes,  $K_{s1}, K_{s2}, \dots, K_{s(n-r)}$ , que corresponden a los polos simples, se pueden evaluar con el método descrito por la ecuación (2-44). Las ecuaciones para determinar los coeficientes que corresponden a los polos de orden múltiple se describen como sigue:

$$A_r = [(s+s_i)^r G(s)]|_{s=-s_i} \quad (2-53)$$

$$A_{r-1} = \frac{d}{ds} [(s+s_i)^r G(s)]|_{s=-s_i} \quad (2-54)$$

$$A_{r-2} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [(s+s_i)^r G(s)]|_{s=-s_i} \quad (2-55)$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ A_1 &= \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} [(s+s_i)^r G(s)]|_{s=-s_i} \end{aligned} \quad (2-56)$$

**Ejemplo  
2-6**

Considere la función:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)} \quad (2-57)$$

Al utilizar la forma de la ecuación (2-52),  $G(s)$  se escribe como:

$$G(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_{-2}}{s+2} + \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)^3} \quad (2-58)$$

Los coeficientes correspondientes a los polos simples son:

$$K_0 = [sG(s)]|_{s=0} = \frac{1}{2} \quad (2-59)$$

$$K_{-2} = [(s+2)G(s)]|_{s=-2} = \frac{1}{2} \quad (2-60)$$

y los del polo de tercer orden son:

$$A_3 = [(s+1)^3 G(s)]|_{s=-1} = -1 \quad (2-61)$$

$$A_2 = \frac{d}{ds} [(s+1)^3 G(s)]|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{s(s+2)} \right] \bigg|_{s=-1} = 0 \quad (2-62)$$

$$A_1 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [(s+1)^3 G(s)]|_{s=-1} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[ \frac{1}{s(s+2)} \right] \bigg|_{s=-1} = -1 \quad (2-63)$$

La expansión en fracciones parciales completa es:

$$G(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^3} \quad (2-64)$$

▲

 **$G(s)$  Tiene polos complejos conjugados simples**

La expansión en fracciones parciales de la ecuación (2-43) también es válida para los polos complejos conjugados simples. Debido a que los polos complejos conjugados son más difíciles de manejar y son de interés especial en los estudios de sistemas de control, merecen un tratamiento especial.

Suponiendo que  $G(s)$  de la ecuación (2-40) contiene un par de polos complejos:

$$s = -\alpha + j\omega \quad \text{and} \quad s = -\alpha - j\omega$$

Los coeficientes correspondientes de estos polos son:

$$K_{-\alpha+j\omega} = (s + \alpha - j\omega)G(s)|_{s=-\alpha+j\omega} \quad (2-65)$$

$$K_{-\alpha-j\omega} = (s + \alpha + j\omega)G(s)|_{s=-\alpha-j\omega} \quad (2-66)$$

**Ejemplo  
2-7**

Considere la función:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2-67)$$

Suponiendo que los valores de  $\zeta$  y  $\omega_n$  son tales que los polos de  $G(s)$  son complejos. Entonces  $G(s)$  se expande como sigue:

$$G(s) = \frac{K_{-\alpha+j\omega}}{s + \alpha - j\omega} + \frac{K_{-\alpha-j\omega}}{s + \alpha + j\omega} \quad (2-68)$$

en donde:

$$\alpha = \zeta\omega_n \quad (2-69)$$

y

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2-70)$$

Los coeficientes en la ecuación (2-68) se determinan como:

$$K_{-\alpha+j\omega} = (s + \alpha - j\omega)G(s)|_{s=-\alpha+j\omega} = \frac{\omega_n^2}{2j\omega} \quad (2-71)$$

$$K_{-\alpha-j\omega} = (s + \alpha + j\omega)G(s)|_{s=-\alpha-j\omega} = -\frac{\omega_n^2}{2j\omega} \quad (2-72)$$

La expansión en fracciones parciales completa de la ecuación (2-67) es:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{2j\omega} \left[ \frac{1}{s + \alpha - j\omega} - \frac{1}{s + \alpha + j\omega} \right] \quad (2-73)$$

Al tomar la transformada inversa de Laplace en ambos miembros de la ecuación (2-73), se tiene:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{\omega_n^2}{2j\omega} e^{-\alpha t} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \\ &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (2-74)$$

▲

### 2-5-2 Solución por computadora de la expansión en fracciones parciales

La expansión en fracciones parciales se puede realizar mediante un programa de computadora. Por ejemplo, la función **pfe** de las herramientas **CSAD** asociada con **MATLAB** y **pfe** de **ACSP** se pueden utilizar para realizar la expansión en fracciones parciales al introducir la

expresión de la función de transferencia  $G(s)$ . A continuación se proporciona una corrida típica en CSAD para la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{20(s + 10)}{s(s + 2)^2(s^2 + 10s + 100)} \quad (2-75)$$

### pfe de CSAD

Al introducir pfe <CR> en el prompt de MATLAB®, el programa responde:

```
Enter Numerator polynomial vector >20*[1 10] <CR>
- Enter Denominator polynomial vector >([1 0],[1 2],[1 2],[1 10 100])
<CR>
```

La respuesta de pfe es:

Terms in the partial fraction expansion are:  
Complex Conjugate Pole at: -5.000 +/- j8.660

$$\frac{(0.02721)(s + 5)}{(s + 5)^2 + (8.66)^2}$$

$$\frac{(0.003928)(8.66)}{(s + 5)^2 + (8.66)^2}$$

Time Domain:  $0.02721 \cdot \exp(-5t) \cdot \cos(8.66t) \cdot u(t)$   
+  $0.003828 \cdot \exp(-5t) \cdot \sin(8.66t) \cdot u(t)$

Double pole on Real Axis at: -2.000

$$\frac{-0.5272}{s + 2} + \frac{-0.9524}{(s + 2)^2}$$

Time Domain:  $-0.5272 \cdot \exp(-2t) \cdot u(t)$   
-  $0.9524 \cdot t \cdot \exp(-2t) \cdot u(t)$

Pole at the origin:

$$\frac{0.5}{s}$$

Time Domain:  $0.5 \cdot u(t)$

Partial Fraction Expansion Complete

Observe que CSAD también regresa la transformada inversa de Laplace de  $G(s)$ .

## 2-6 Aplicación de la transformada de Laplace a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales se pueden resolver mediante el método de la transformada de Laplace con la ayuda de los teoremas de la transformada de Laplace dados en la Sec. 2-4, de la expansión en fracciones parciales, y de una tabla de transformadas de Laplace. El procedimiento se detalla como sigue:

1. Transformar la ecuación diferencial al dominio de  $s$  mediante la transformada de Laplace, utilizando la tabla de transformadas de Laplace.
2. Manipular las ecuaciones algebraicas transformadas y resolverlas para la variable de salida.
3. Realizar la expansión en fracciones parciales de la ecuación algebraica transformada.
4. Obtener la transformada inversa de Laplace de la tabla de transformadas de Laplace.

Se ilustra el método mediante varios ejemplos.

### Ejemplo 2-8

Considere la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 5u_s(t) \quad (2-76)$$

en donde  $u_s(t)$  es la función escalón unitario. Las condiciones iniciales son  $y(0) = -1$  y  $y^{(1)}(0) = dy(t)/dt|_{t=0} = 2$ . Para resolver la ecuación diferencial, primero se toma la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (2-76):

$$s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = 5/s \quad (2-77)$$

Al sustituir los valores de las condiciones iniciales en la ecuación (2-77) y al resolver para  $Y(s)$ , se obtiene:

$$Y(s) = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)} \quad (2-78)$$

La ecuación (2-78) se expande en fracciones parciales para dar:

$$Y(s) = \frac{5}{2s} - \frac{5}{s+1} + \frac{3}{2(s+2)} \quad (2-79)$$

Al tomar la transformada inversa de Laplace de la ecuación (2-79), se obtiene la solución completa como:

$$y(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} \quad t \geq 0 \quad (2-80)$$

El primer término en la ecuación (2-80) es la solución en estado estable o la solución particular; los dos últimos términos representan la solución transitoria, o la solución homogénea. A diferencia del método clásico, que requiere de pasos separados para obtener las soluciones transitoria y en estado estable, el método de la transformada de Laplace proporciona la solución completa en una operación.

Si sólo es de interés la magnitud de la solución en estado estable de  $y(t)$ , se puede aplicar el teorema de valor final de la ecuación (2-32). Por lo que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s^2 - s + 5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{5}{2} \quad (2-81)$$

en donde primero se ha verificado y encontrado que la función  $sY(s)$  tiene polos solamente en el semiplano izquierdo del plano  $s$ , por lo que el teorema del valor final es válido. ▲

Considere la ecuación diferencial lineal:

### Ejemplo 2-9

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 34.5 \frac{dy(t)}{dt} + 1000y(t) = 1000u_s(t) \quad (2-82)$$

Los valores iniciales de  $y(t)$  y  $dy(t)/dt$  son cero. Al tomar la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (2-82) y al resolver para  $Y(s)$ , se obtiene:

$$Y(s) = \frac{1000}{s(s^2 + 34.5s + 1000)} = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (2-83)$$

en donde  $\zeta = 0.5455$  y  $\omega_n = 31.62$ . La transformada inversa de Laplace de la ecuación (2-83) se puede obtener en un sinnúmero de formas. La tabla de transformadas de Laplace en el Apéndice B proporciona directamente el par de transformadas de la ecuación (2-83). El resultado es:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \theta) \quad t \geq 0 \quad (2-84)$$

en donde:

$$\theta = \cos^{-1} \zeta = 56.94^\circ \quad (2-85)$$

Por lo que:

$$y(t) = 1 - 1.193e^{-17.25t} \sin(26.5t + 56.94^\circ) \quad t \geq 0 \quad (2-86)$$

La ecuación (2-86) se puede obtener al expandir en fracciones parciales a la ecuación (2-83), sabiendo que los polos están en  $s = 0, -\alpha + j\omega$ , y  $-\alpha - j\omega$ , en donde:

$$\alpha = \zeta\omega_n = 17.25 \quad (2-87)$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 26.5 \quad (2-88)$$



La expansión en fracciones parciales de la ecuación (2-83) se escribe como:

$$Y(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_{-\alpha+j\omega}}{s + \alpha - j\omega} + \frac{K_{-\alpha-j\omega}}{s + \alpha + j\omega} \quad (2-89)$$

en donde:

$$K_0 = sY(s)|_{s=0} = 1 \quad (2-90)$$

$$K_{-\alpha+j\omega} = (s + \alpha - j\omega)Y(s)|_{s=-\alpha+j\omega} = \frac{e^{-j\phi}}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2-91)$$

$$K_{-\alpha-j\omega} = (s + \alpha + j\omega)Y(s)|_{s=-\alpha-j\omega} = \frac{-e^{-j\phi}}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2-92)$$

El ángulo  $\phi$  está dado por:

$$\phi = 180^\circ - \cos^{-1} \zeta \quad (2-93)$$

y se ilustra en la Fig. 2-4.

La transformada inversa de Laplace de la ecuación (2-89) se escribe ahora como:

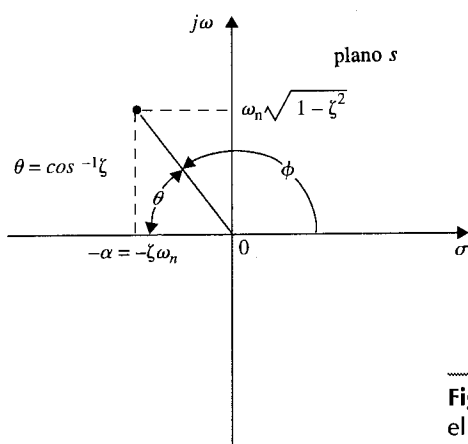
$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + \frac{1}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} [e^{j(\omega_n t - \phi)} - e^{-j(\omega_n t - \phi)}] \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi) \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (2-94)$$

Al sustituir la ecuación (2-93) en la ecuación (2-94) para  $\phi$ , se tiene:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \cos^{-1} \zeta) \quad t \geq 0 \quad (2-95)$$

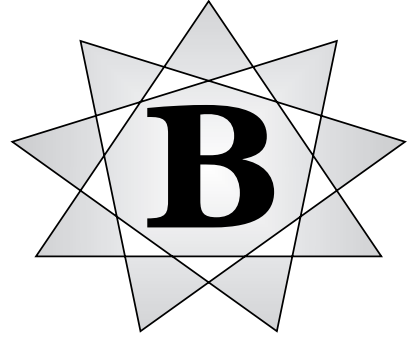
o

$$y(t) = 1 - 1.193 e^{-17.25t} \sin(26.5t + 56.94^\circ) \quad t \geq 0 \quad (2-96)$$



**Figura 2-4** Localización de las raíces en el plano  $s$ .

# APÉNDICE



## Método de desarrollo en fracciones simples

Antes de presentar la aproximación de MATLAB para el cálculo de desarrollos en fracciones simples de funciones de transferencia, se presenta la aproximación manual para calcular desarrollos en fracciones simples de funciones de transferencia.

**Desarrollo en fracciones simples cuando  $F(s)$  sólo contiene polos distintos.**  
Considérese  $F(s)$  escrita en la forma factorizada

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}, \quad \text{para } m < n$$

donde  $p_1, p_2, \dots, p_n$  y  $z_1, z_2, \dots, z_m$  son cantidades reales o complejas, pero para cada  $p_i$  o  $z_j$  complejo se tendrá el complejo conjugado de  $p_i$  o  $z_j$ , respectivamente. Si  $F(s)$  sólo involucra polos distintos, puede expandirse en una suma de fracciones simples del modo siguiente:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n} \quad (\text{B-1})$$

donde  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) son constantes. El coeficiente  $a_k$  se denomina *residuo* del polo en  $s = -p_k$ . El valor de  $a_k$  se calcula multiplicando ambos miembros de la Ecuación (B-1) por  $(s + p_k)$  y suponiendo que  $s = -p_k$ ; esto conduce a

$$\begin{aligned} \left[ (s + p_k) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s = -p_k} &= \left[ \frac{a_1}{s + p_1} (s + p_k) + \frac{a_2}{s + p_2} (s + p_k) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{a_k}{s + p_k} (s + p_k) + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n} (s + p_k) \right]_{s = -p_k} \\ &= a_k \end{aligned}$$

Se observa que todos los términos expandidos se cancelan, con excepción de  $a_k$ . Por tanto, el residuo  $a_k$  se calcula a partir de

$$a_k = \left[ (s + p_k) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s = -p_k}$$

Obsérvese que, como  $f(t)$  es una función real del tiempo, si  $p_1$  y  $p_2$  son complejos conjugados, en tal caso los residuos  $a_1$  y  $a_2$  también son complejos conjugados. Sólo necesita evaluarse uno de los conjugados,  $a_1$  o  $a_2$ , porque el otro se conoce automáticamente.

Como

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{a_k}{s + p_k} \right] = a_k e^{-p_k t}$$

$f(t)$  se obtiene así:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \dots + a_n e^{-p_n t}, \quad \text{para } t \geq 0$$

**EJEMPLO B-1** Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

El desarrollo en fracciones simples de  $F(s)$  es

$$F(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{a_1}{s + 1} + \frac{a_2}{s + 2}$$

donde  $a_1$  y  $a_2$  se encuentran mediante

$$a_1 = \left[ (s + 1) \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} \right]_{s = -1} = \left[ \frac{s + 3}{s + 2} \right]_{s = -1} = 2$$

$$a_2 = \left[ (s + 2) \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} \right]_{s = -2} = \left[ \frac{s + 3}{s + 1} \right]_{s = -2} = -1$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{s + 1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-1}{s + 2} \right] \\ &= 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

**EJEMPLO B-2** Obtenga la transformada inversa de Laplace de

$$G(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s + 1)(s + 2)}$$

Aquí, como el grado del polinomio del numerador es mayor que el polinomio del denominador, se debe dividir el numerador entre el denominador.

$$G(s) = s + 2 + \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

Observe que la transformada de Laplace de la función impulso  $\delta(t)$  es 1 y que la transformada de Laplace de  $d\delta(t)/dt$  es  $s$ . El tercer término del lado derecho de esta última ecuación es  $F(s)$  en el Ejemplo B-1. Por tanto, la transformada inversa de Laplace de  $G(s)$  se obtiene como

$$g(t) = \frac{d}{dt} \delta(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad \text{para } t \geq 0 -$$

**EJEMPLO B-3** Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5}$$

Observe que el polinomio del denominador se puede factorizar como

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1 + j2)(s + 1 - j2)$$

Si la función  $F(s)$  contiene un par de polos complejos conjugados, es conveniente no expandir  $F(s)$  en las fracciones simples usuales, sino en la suma de una función seno amortiguada y una función coseno amortiguada.

Observando que  $s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 2^2$  y utilizando las transformadas de Laplace de  $e^{-\alpha t} \sin \omega t$  y  $e^{-\alpha t} \cos \omega t$ , reescritas por tanto,

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cos \omega t] = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

la  $F(s)$  dada se escribe como una suma de una función seno amortiguada y una función coseno amortiguada.

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5} = \frac{10 + 2(s + 1)}{(s + 1)^2 + 2^2} \\ &= 5 \frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2} + 2 \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} \end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2}\right] \\ &= 5e^{-t} \sin 2t + 2e^{-t} \cos 2t, \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

**Desarrollo en fracciones simples cuando  $F(s)$  contiene polos múltiples.** En lugar de analizar el caso general, se utilizará un ejemplo para mostrar cómo obtener el desarrollo en fracciones simples de  $F(s)$ .

Considérese la siguiente  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}$$

El desarrollo en fracciones simples de esta  $F(s)$  contiene tres términos:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1}{s + 1} + \frac{b_2}{(s + 1)^2} + \frac{b_3}{(s + 1)^3}$$

donde  $b_3$ ,  $b_2$  y  $b_1$  se determinan del modo siguiente. Si se multiplican ambos miembros de esta última ecuación por  $(s + 1)^3$ , se tiene que

$$(s + 1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} = b_1(s + 1)^2 + b_2(s + 1) + b_3 \quad (\text{B-2})$$

Por tanto, si se supone que  $s = -1$ , la Ecuación (B-2) da por resultado:

$$\left[ (s + 1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-1} = b_3$$

Asimismo, la diferenciación de ambos miembros de la Ecuación (B-2) con respecto a  $s$  da

$$\frac{d}{ds} \left[ (s + 1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} \right] = b_2 + 2b_1(s + 1) \quad (\text{B-3})$$

Si se supone que  $s = -1$  en la Ecuación (B-3), entonces,

$$\frac{d}{ds} \left[ (s + 1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-1} = b_2$$

Diferenciando ambos miembros de la Ecuación (B-3) con respecto a  $s$ , resulta

$$\frac{d^2}{ds^2} \left[ (s + 1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} \right] = 2b_1$$

A partir del análisis precedente, se observa que los valores de  $b_3$ ,  $b_2$  y  $b_1$  se encuentran sistemáticamente del modo siguiente:

$$\begin{aligned} b_3 &= \left[ (s + 1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-1} \\ &= (s^2 + 2s + 3)_{s=-1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \left\{ \frac{d}{ds} \left[ (s + 1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} \right] \right\}_{s=-1} \\ &= \left[ \frac{d}{ds} (s^2 + 2s + 3) \right]_{s=-1} \\ &= (2s + 2)_{s=-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2!} \left\{ \frac{d^2}{ds^2} \left[ (s + 1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} \right] \right\}_{s=-1} \\ &= \frac{1}{2!} \left[ \frac{d^2}{ds^2} (s^2 + 2s + 3) \right]_{s=-1} \\ &= \frac{1}{2} (2) = 1 \end{aligned}$$

Por tanto, se obtiene

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\
 &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0}{(s+1)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^3}\right] \\
 &= e^{-t} + 0 + t^2 e^{-t} \\
 &= (1 + t^2)e^{-t}, \quad \text{para } t \geq 0
 \end{aligned}$$

**Comentarios.** Para funciones complicadas con denominadores que contienen polinomios de orden superior, un desarrollo en fracciones simples puede llevar mucho tiempo. En tal caso, se recomienda el uso de MATLAB.

**Desarrollo en fracciones simples con MATLAB.** MATLAB tiene una orden para obtener el desarrollo en fracciones simples de  $B(s)/A(s)$ . Considérese la función de transferencia  $B(s)/A(s)$ :

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

donde algunos  $a_i$  y  $b_j$  pueden ser cero. En MATLAB, los vectores fila num y den especifican los coeficientes del numerador y del denominador en la función de transferencia. Es decir,

$$\begin{aligned}
 \text{num} &= [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_n] \\
 \text{den} &= [1 \ a_1 \ \dots \ a_n]
 \end{aligned}$$

El comando

$$[r, p, k] = \text{residue}(\text{num}, \text{den})$$

encuentra los residuos ( $r$ ), los polos ( $p$ ) y los términos directos ( $k$ ) de una desarrollo en fracciones simples del cociente de dos polinomios  $B(s)$  y  $A(s)$ .

El desarrollo en fracciones simples de  $B(s)/A(s)$  se obtiene mediante

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r(1)}{s - p(1)} + \frac{r(2)}{s - p(2)} + \dots + \frac{r(n)}{s - p(n)} + k(s) \quad (\text{B-4})$$

Comparando las Ecuaciones (B-1) y (B-4), se observa que  $p(1) = -p_1$ ,  $p(2) = -p_2$ , ...,  $p(n) = -p_n$ ;  $r(1) = a_1$ ,  $r(2) = a_2$ , ...,  $r(n) = a_n$ . [ $k(s)$  es un término directo.]

**EJEMPLO B-4** Considere la siguiente función de transferencia:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Para esta función,

```
num = [ 2 5 3 6 ]
```

```
den = [ 1 6 11 6 ]
```

La orden

```
[r,p,k] = residue(num,den)
```

proporciona el resultado siguiente:

```
[r,p,k] = residue(num,den)
r =
    -6.0000
    -4.0000
     3.0000
p =
    -3.0000
    -2.0000
    -1.0000
k =
     2
```

(Observe que los residuos se devuelven en el vector columna  $r$ , las posiciones de los polos en el vector columna  $p$  y el término directo en el vector fila  $k$ ). Esta es la representación en MATLAB del siguiente desarrollo en fracciones simples de  $B(s)/A(s)$ :

$$\begin{aligned}\frac{B(s)}{A(s)} &= \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \\ &= \frac{-6}{s + 3} + \frac{-4}{s + 2} + \frac{3}{s + 1} + 2\end{aligned}$$

Observe que si  $p(j) = p(j + 1) = \dots = p(j + m - 1)$  [esto es,  $p_j = p_{j+1} = \dots = p_{j+m-1}$ ], el polo  $p(j)$  es un polo de multiplicidad  $m$ . En este caso, el desarrollo incluye términos en la forma

$$\frac{r(j)}{s - p(j)} + \frac{r(j + 1)}{[s - p(j)]^2} + \dots + \frac{r(j + m - 1)}{[s - p(j)]^m}$$

Consúltense los detalles en el Ejemplo B-5.

**EJEMPLO B-5** Obtenga el desarrollo  $B(s)/A(s)$  siguiente en fracciones simples utilizando MATLAB.

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3} = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

Para esta función, se tiene

$$\text{num} = [1 \ 2 \ 3]$$

$$\text{den} = [1 \ 3 \ 3 \ 1]$$

La orden

$$[r, p, k] = \text{residue}(\text{num}, \text{den})$$

proporciona el resultado siguiente:

```
num = [1 2 3];
den = [1 3 3 1];
[r, p, k] = residue(num, den)
r =
    1.0000
    0.0000
    2.0000
p =
   -1.0000
   -1.0000
   -1.0000
k =
     []
```

Es la representación en MATLAB del desarrollo en fracciones simples de  $B(s)/A(s)$ :

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{s + 1} + \frac{0}{(s + 1)^2} + \frac{2}{(s + 1)^3}$$

Observe que el término directo  $k$  es cero.