

Ejemplos de diseño de PD y PID por método frecuencial

Control Básico - Bioingeniería

4 de junio de 2019

1. Introducción

Ya hemos visto como se procede para obtener la función de transferencia de un sistema a controlar (como se define en la Figura 1) por diferentes métodos: respuesta a estímulos conocidos, lugar de raíces, análisis frecuencial. A su vez, se han presentado los parámetros que lo caracterizan en términos temporales o frecuenciales. Estos parámetros son frecuentemente presentados también como requisitos de comportamiento deseado para un sistema a controlar.

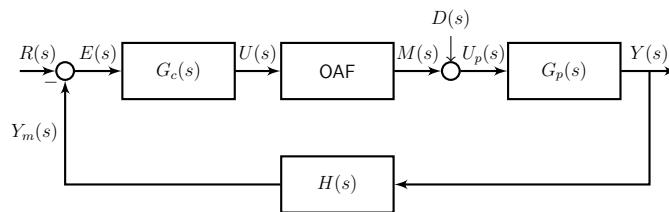


Figura 1: Esquema de control clásico

1.1. Errores estáticos

En el diseño de los sistemas de control, un requerimiento que se presenta con frecuencia es el nivel de error aceptable de la salida con respecto a la entrada. Este error en general se especifica con respecto a una entrada tipificada (escalón, rampa o parábola). Su valor queda determinado por las características propias del sistema y por el regulador utilizado. Por tanto, el conocimiento de las características del sistema y de los distintos tipos de reguladores, darán herramientas para seleccionar cual es el regulador más apropiado para una aplicación determinada. Una descripción detallada de cada uno de estos temas se puede consultar en (OGATA, 2010).

La definición del *error estático* puede obtenerse de la siguiente manera. Si consideramos un sistema a lazo cerrado como el de la Figura 1.1, tenemos que la función de transferencia

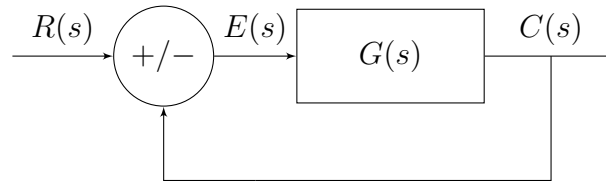


Figura 2: Planta a lazo cerrado

a lazo cerrado está dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (1)$$

y la relación error a entrada viene dada por

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}. \quad (2)$$

Operando sobre (2) y aplicando el teorema del valor final, obtenemos una expresión para el error en estado estacionario:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} R(s) \quad (3)$$

Surge entonces que el error estático o estacionario de un sistema a lazo cerrado queda determinado por la dinámica del mismo y por el tipo de entrada del sistema. Independientemente de la variable física medida, la salida de un sistema dado puede ser caracterizada como la posición, la velocidad o la aceleración de una variable determinada, en función de si lo que se mide es la variable propiamente dicha, su primer derivada, o la segunda. Para cada una de ellas, se utilizan constantes vinculadas a cada uno de estos errores, las cuales a mayor valor, garantizan menores valores de error estacionario. Un parámetro que condiciona el valor del error estacionario de un sistema es el *tipo* de sistema, según se define a continuación

Definición 1. Tipo de sistema: Se define el tipo de sistema N como el exponente del polo al origen de su función de transferencia.

"El tipo de sistema determina la pendiente de la curva de magnitud logarítmica a bajas frecuencias. Por tanto, la información relacionada con la existencia y la magnitud del error en estado estacionario de un sistema ante una entrada definida se determina a partir de la observación de baja frecuencia de la curva de magnitud logarítmica." (OGATA, 2010)

1.1.1. Constante de error de posición estática K_p

Se mide este error para una entrada de tipo escalón unitario. Utilizando (3) para dicha entrada, obtenemos

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + G(0)} \quad (4)$$

por lo que, para este caso, se define la constante de error de posición estática K_p se define como

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0) \quad (5)$$

En base a la Definición 1 de Tipo de sistema, veamos que valores de K_p y e_{ss} se obtienen al evaluar (1)–(5).

- $N = 0$: para un sistema sin polos al origen se obtiene

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{\prod_{j=0}^m (T_j s + 1)}{\prod_{i=0}^n (T_i s + 1)} = K \quad \text{y} \quad e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}. \quad (6)$$

- $N > 0$: Para sistemas tipo 1 o superior, obtenemos

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{\prod_{j=0}^m (T_j s + 1)}{s^N \prod_{i=0}^n (T_i s + 1)} = \infty \quad \text{y} \quad e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = 0 \quad (7)$$

Se desprende de este análisis que siempre que tengamos un sistema tipo 0 con realimentación tendremos un error en estado estacionario cuando el estímulo sea un escalón; ese error será función de inversa de la ganancia directa del sistema, aunque aquí entra en juego la estabilidad relativa del sistema. Por otro lado, si existe una acción integral pura, el error va a ser nulo.

1.1.2. Constante de error de velocidad estática K_v

Utilizando la definición de (3), y tomando como entrada la rampa unitaria, el error estático obtenido queda expresado como

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)} \quad (8)$$

a la vez que la constante de error de velocidad viene dada por

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad (9)$$

por lo que usando (9) en (8) se obtiene

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}. \quad (10)$$

Veamos ahora como impactan los resultados de (8)–(10) en función del tipo de sistema:

- $N = 0$: para un sistema sin polos al origen se obtiene

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sK \frac{\prod_{j=0}^m (T_j s + 1)}{\prod_{i=0}^n (T_i s + 1)} = 0 \quad y \quad e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty. \quad (11)$$

- $N = 1$: Para sistemas tipo 1, obtenemos

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sK \frac{\prod_{j=0}^m (T_j s + 1)}{s \prod_{i=0}^n (T_i s + 1)} = K \quad y \quad e_{ss} = \frac{1}{K_v} \quad (12)$$

- $N \geq 2$: Para sistemas tipo 2 o mayor, obtenemos

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sK \frac{\prod_{j=0}^m (T_j s + 1)}{s^N \prod_{i=0}^n (T_i s + 1)} = \infty \quad y \quad e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0 \quad (13)$$

De lo anterior, se desprende que un sistema tipo 0 no puede seguir una rampa; uno de tipo 1 tendrá un error acotado en la posición, aunque la velocidad será la misma; por ultimo, la rampa sobre un sistema tipo 2 o mayor genera un error estacionario nulo.

1.1.3. Constante de error de aceleración estática K_a

Para este caso consideramos como entrada la parábola unitaria definida como $r(t) = t^2/2$ para $t \geq 0$. Para esta entrada, aplicando (3) obtenemos

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)} \quad (14)$$

Con esto, la constante de aceleración estática K_a queda definida como

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \quad (15)$$

Veamos ahora como impactan los resultados de (14)–(15) en función del tipo de sistema:

- $N = 0$: para un sistema sin polos al origen se obtiene

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 K \frac{\prod_{j=0}^m (T_j s + 1)}{\prod_{i=0}^n (T_i s + 1)} = 0 \quad y \quad e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \infty. \quad (16)$$

- $N = 1$: Para sistemas tipo 1, obtenemos

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 K \frac{\prod_{j=0}^m (T_j s + 1)}{s \prod_{i=0}^n (T_i s + 1)} = 0 \quad y \quad e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \infty. \quad (17)$$

- $N = 2$: Para sistemas tipo 2, obtenemos

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 K \frac{\prod_{j=0}^m (T_j s + 1)}{s^2 \prod_{i=0}^n (T_i s + 1)} = K \quad \text{y} \quad e_{ss} = \frac{1}{K_a}. \quad (18)$$

- $N \geq 3$: Para sistemas tipo 3 o superior, obtenemos

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 K \frac{\prod_{j=0}^m (T_j s + 1)}{s^N \prod_{i=0}^n (T_i s + 1)} = \infty \quad \text{y} \quad e_{ss} = \frac{1}{K_a} = 0. \quad (19)$$

De este modo, vemos que los sistemas tipo 0 y 1 son incapaces de seguir una parábola, el sistema tipo 2 sigue la referencia unitaria con un error finito. El sistema 3 o mayor sigue a la parábola con error nulo en estado estacionario.

1.1.4. Resumen

De lo anterior, vemos que el comportamiento en estado estacionario y la constante con este vinculada quedan definidos por el tipo del sistema, y las condiciones del estímulo con el que se desea evaluar. Se resumen estos resultados en el Cuadro 1.

Tipo	Entrada escalón	Entrada Rampa	Entrada parábola
0	$e_{ss} = \frac{1}{1+K}$ y $K_p = K$	$e_{ss} = \infty$ y $K_v = 0$	$e_{ss} = \infty$ y $K_a = 0$
1	$e_{ss} = 0$ y $K_p = \infty$	$e_{ss} = \frac{1}{K}$ y $K_v = K$	$e_{ss} = \infty$ y $K_a = 0$
2	$e_{ss} = 0$ y $K_p = \infty$	$e_{ss} = 0$ y $K_v = \infty$	$e_{ss} = \frac{1}{K}$ y $K_a = K$

Cuadro 1: Tipos de sistemas, error y constantes de posición, velocidad y aceleración

2. Reguladores en dominio frecuencial

En la Subsección 1.1 vimos como utilizar parámetros de error para seleccionar el tipo de regulador, y un indicativo respecto al cálculo de la ganancia en función del error aceptable. Veamos ahora como es el comportamiento de los reguladores clásicos PD, PI, y PID, en el dominio frecuencial. Un mayor desarrollo de estos temas puede hallarse en (KUO, 1996), desde donde se extrae gran parte del presente texto.

2.1. Regulador PD

2.1.1. Generalidades del PD

El regulador proporcional derivativo (en adelante, PD), como su nombre lo indica, trabaja sobre el error instantáneo (proporcional) y sobre su tasa de cambio (derivativo). Su

función de transferencia genérica queda determinada por

$$G_c(s) = G_{PD}(s) = K_p(T_d s + 1) \quad (20)$$

representado entonces por un un cero simple en $s = -1/T_d$. Una posible forma de síntesis circuital se expresa en la Figura 3. Note que esta representación deja apareados los valores de K_p y T_d en la combinación de resistencias del primer operacional. Existen otras representaciones que desacoplan esta relación, pero utilizan un número mayor de operacionales. para el circuito de la Figura 3, la función de transferencia resulta

$$G_{PD}(s) = \frac{R_4 R_2}{R_3 R_1} (R_1 C_1 s + 1). \quad (21)$$

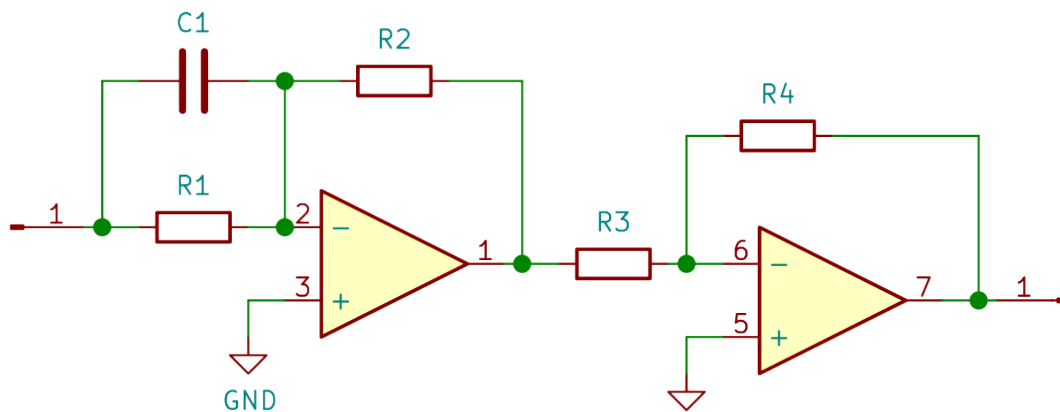


Figura 3: Síntesis circuital de regulador PD

Entre sus principales características podemos mencionar:

- Esencialmente anticipativo.
- Afecta el error en estado estable sólo si éste varía con el tiempo.
- La propiedad de adelanto de fase se puede utilizar para mejorar el Mf de un sistema.
- Tiene la desventaja de que acentúa el ruido en altas frecuencias.
- Reduce t_r , t_s y el M_p .
- Aumenta el BW, GM, y Mr
- No es efectivo para sistemas ligeramente amortiguados o inicialmente inestables

El diagrama de Bode del regulador PD se presenta en la Figura 4. De allí, observamos que esencialmente es un filtro pasa altos. El adelanto de fase se puede utilizar para mejorar el

margen de fase del sistema, aunque ha de considerarse que el efecto de la curva de magnitud puede adelantar la frecuencia de cruce de ganancia. De este modo, la frecuencia de corte del controlador $\omega = 1/T_d$ ha de ser tal que logre mejorar efectivamente el margen de fase en la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Es por esto que la región de operación del regulador PD es a la izquierda de $\omega = 1/T_d$, como se observa en verde en la Figura 4. Debido a que a partir de $\omega = 1/T_d$ el aporte en magnitud comienza a ser significativo, si el aporte de fase para el regulador seleccionado en el punto deseado es superior a 40° , es preferible utilizar dos reguladores que aporten cantidades menores (en principio, la mitad cada uno) de fase.

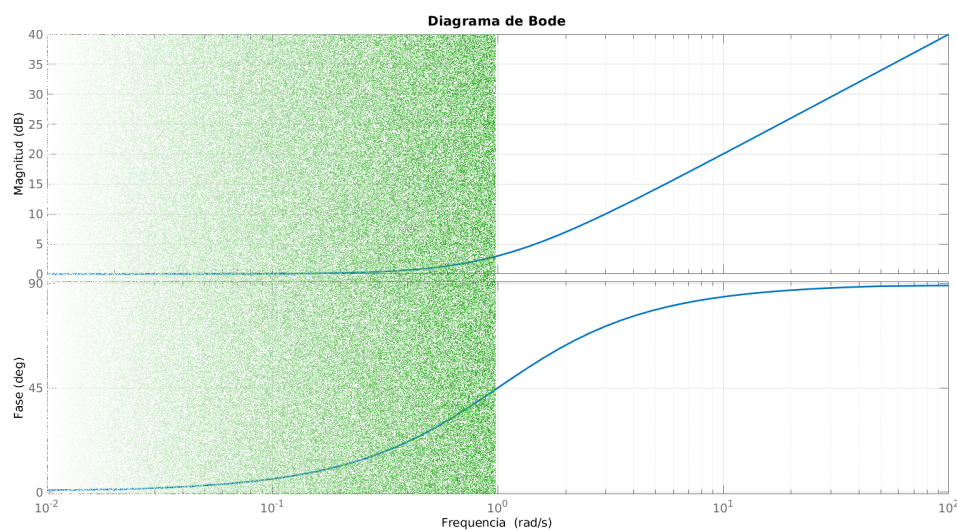


Figura 4: Diagrama de Bode del regulador PD ($K_p = 1$, $T_d = 1$). En verde, difumado, la región donde tiene acción de interés el regulador.

2.1.2. Procedimiento de diseño del regulador PD

Cuando se desea regular una planta, llamémosle $G_p(s)$, los requisitos pueden presentarse (generalmente) en términos de Margen de Fase (Mf) o Margen de ganancia (Mg), así como también en términos del error estacionario o las constantes asociadas. Para obtener el regulador se puede proceder como sigue:

1. En base al requisito de error, calcular K_p y determinar el diagrama de Bode de $K_p G_p(s)$
 - a) Si el requisito está presentado en términos de un $Mf = Mf_d$
 - 1) Determinar ω_a tal que $|K_p G_p(\omega_a)| = 0[dB]$.
 - 2) Determinar la fase F_a en dicho punto.

- 3) Calcular el aporte de fase que deberá dar el regulador para obtener el margen de fase deseado:

$$\psi_a = Mf_d + 5 - F_a - 180 \quad (22)$$

b) Si el requisito está presentado en términos de un $Mg = Mg_d$

- 1) Determinar ω_b tal que $|K_p G_p(\omega_b)| = -Mg_d[dB]$.
- 2) Determinar la fase F_b en dicho punto.
- 3) Calcular el aporte de fase que deberá dar el regulador para que en dicha frecuencia se de el cruce de fase por -180° :

$$\psi_a = 180 + F_b \quad (23)$$

2. Si $\psi_a < 40^\circ$, utilizamos el aporte de fase demandado al regulador, para calcular T_d

$$\text{tg}^{-1}(w_a T_d) = \psi_a \Rightarrow T_d = (\text{tg}(\psi_a)) / \omega_a \quad (24)$$

2.2. Regulador PI

Como su nombre lo indica, este regulador tiene una acción proporcional al error y una a la integral del mismo. Su función de transferencia genérica agrega un polo al origen (incrementando en uno el tipo del sistema, según la Definición 1) y un cero en $s = -1/T_i$ y queda determinada por

$$G_{PI}(s) = K_p(T_i s + 1)/(T_i s). \quad (25)$$

Entre sus principales características podemos mencionar:

- Mejora el amortiguamiento y reduce el sobrepaso máximo
- Incrementa el tiempo de levantamiento.
- Disminuye el ancho de banda
- Mejora el margen de ganancia, margen de fase, y M_r
- Filtra el ruido de alta frecuencia.
- Reduce el error estacionario del sistema.
- Aumenta la inestabilidad relativa del sistema
- Reduce t_s .

- En sistemas de orden superior, puede tener un efecto desestabilizante si no se calcula apropiadamente.

Para este controlador, una posible síntesis circuital se expresa en la Figura 5. Como en el caso de la síntesis circuital presentada para el regulador PD, esta propuesta deja acoplados los valores de K_p y T_i . Para este caso, la función de transferencia queda dada por

$$G_{PI}(s) = \frac{R4 R2 R2C2s + 1}{R3 R1 R2C2s}. \quad (26)$$

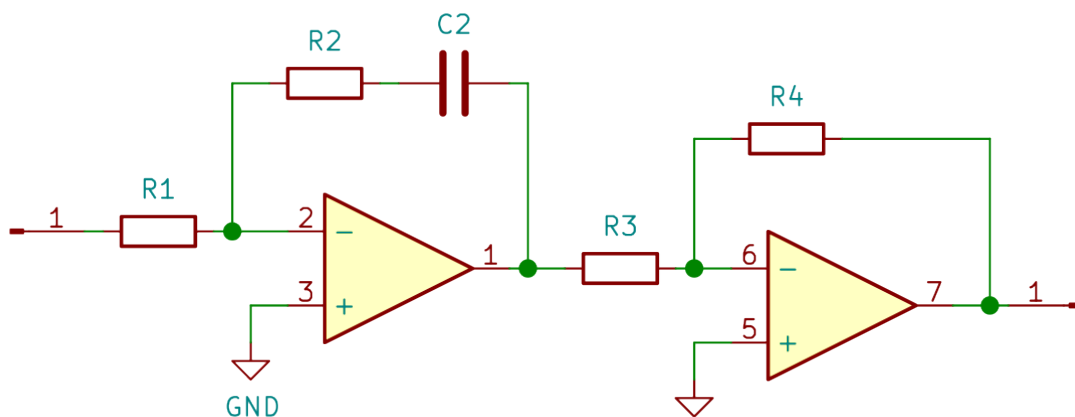


Figura 5: Síntesis circuital de regulador PI

En el diagrama de Bode del regulador PI (Figura 6) vemos que el regulador es esencialmente un filtro pasa bajos. La atenuación en $\omega = \infty$ va a estar determinada por $20\log(K_p)[dB]$. Si el valor de $K_p < 1$, esta atenuación se puede utilizar para mejorar la estabilidad del sistema. Al ser la fase siempre negativa, esto perjudica la estabilidad, por lo que la frecuencia de corte del controlador $\omega = 1/T_i$ ha de ser colocada tan a la izquierda como el requisito del ancho de banda lo permita, a fin de que impacte lo menos posible el margen de fase del sistema.

2.2.1. Procedimiento para el diseño de un PI

Pra determinar los valores ed K_p y T_i , se procede como se define a continuación:

1. Verificar si la incorporación del polo al origen por parte del regulador ayuda a satisfacer los requerimientos de diseño.
2. Si se satisface el requisito 1, determinar el diagrama de Bode de $G_p(s)$
 - a) Si el requisito está presentado en términos de un $Mf = Mf_d$

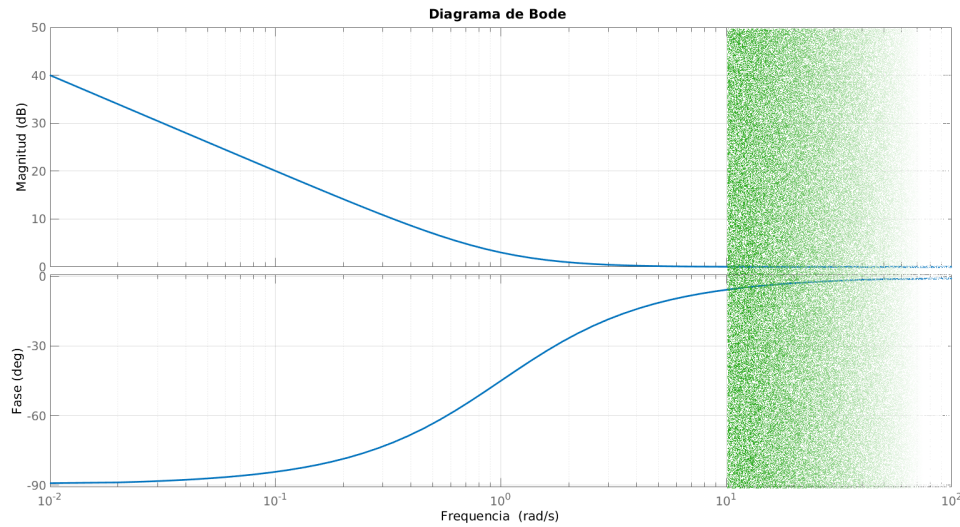


Figura 6: Diagrama de Bode de regulador PI ($K_p = 1$, $T_i = 1$). En verde, difumado, la región donde tiene acción de interés el regulador.

- 1) Determinar ω_d donde se la fase es tal que, si allí se diera el cruce de ganancia por $0dB$, se cumpliría el requisito de margen de fase: $\angle G_p(s) = Mf_d + 5 - 180^\circ$.
- 2) Determinar la magnitud en dicho punto, para poder saber cuanto ganancia tiene que compensar el regulador PI $M_a = |F(j\omega_d)|$.
- 3) Calcular la ganancia del regulador:

$$20 \log K_p = -M_a \Rightarrow K_p = 10^{-M_a/20} \quad (27)$$

b) Si el requisito está presentado en términos de un $Mg = Mg_d$

- 1) Determinar ω_d tal que $\angle G_p(\omega_d) = -180$.
- 2) Determinar la magnitud M_b en dicho punto: $M_b = |G_p(j\omega_d)|$ a fin de determinar el faltante de ganancia para obtener el Mg_d .
- 3) Calcular la ganancia del regulador:

$$20 \log K_p = -M_b - Mg_d \Rightarrow K_p = 10^{-(M_b + Mg_d)/20} \quad (28)$$

3. Utilizamos el aporte de fase demandado al regulador, para calcular T_i

$$1/T_i = \omega_d/10 \Rightarrow T_i = 10/\omega_d \quad (29)$$

2.3. Regulador PID

De lo visto anteriormente, se desprende que un PD no da amortiguamiento pero no afecta el estado estable, mientras que un PI afecta la estabilidad relativa y el error estable al mismo tiempo, pero aumenta el levantamiento. La utilización de un PID busca potenciar las características positivas de ambos. Entre sus principales características, se menciona:

- El termino integral busca anular el error estacionario.
- La mejora en el transitorio se obtiene con el termino derivativo (en ausencia de ruido).
- Buen compromiso entre rapidez de respuesta y error.

Su función de transferencia genérica viene dada por :

$$G_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (30)$$

mientras que su síntesis circuital se expresa en la Figura 7, con función de transferencia:

$$G_{PI}(s) = \frac{R_4 R_2 (R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_3 R_1 R_2 C_2 s} \quad (31)$$

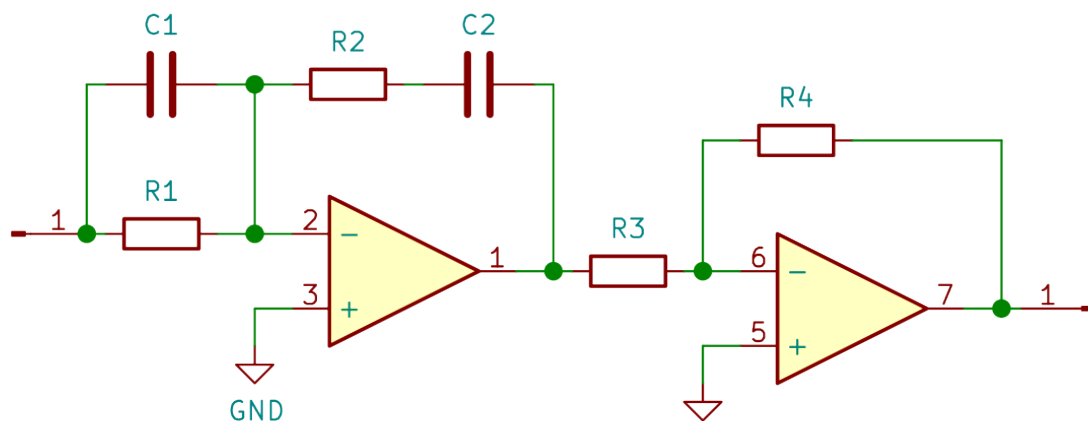


Figura 7: Síntesis circuital de regulador PID

2.3.1. Procedimiento de diseño para un regulador PID

Para diseñar un regulador PID por método frecuencial se utiliza la forma serie, obteniéndose dos reguladores en cascada.

1. Considerar el regulador como un serie PI y PD

2. Tomando como que si sólo el PD estuviere operando, diseñar éste para satisfacer el Margen de fase.
3. Con el diseño anterior, diseñar el PI para terminar de satisfacer los requisitos, con la planta y el regulador PD diseñado en el punto anterior.

Alternativamente, se puede diseñar primero el PI para margen de ganancia y luego el PD para margen de fase.

3. Diseño por método de análisis frecuencial: Casos de estudio

3.1. Enunciado

Ejemplo 1. *Bajo un esquema como el de la Figura 1, se desea controlar la temperatura de salida de una caldera de vapor actuando sobre la válvula de regulación de combustible. Para que la caldera funcione de un modo aceptable, se debe cumplir que para una temperatura deseada de 200°C , la temperatura no supere 230°C y en régimen permanente la temperatura sea superior a 198°C . Para ello se modela dicho sistema obteniéndose la siguiente función de transferencia*

$$G_p(s) = \frac{1}{(100s + 1)(10s + 1)^3} \quad (32)$$

$OAF = 1$ y $H(s) = 1$. Se solicita:

1. *Determinar las especificaciones que deberá cumplir el sistema regulado en el dominio de la frecuencia como así también la ganancia del regulador que se coloque en el lazo de control para cumplir con las especificaciones de funcionamiento antes detalladas.*
2. *Diseñe un regulador que cumpla con los requisitos definidos en el punto anterior. Explícite todos los pasos realizados y suposiciones hechas en el diseño.*
3. *Verifique que se cumplen con las condiciones tanto frecuenciales como temporales. Deje constancia del resultado medido en el examen como también realice la gráfica temporal de la salida/consigna con valores de referencia más representativos.*

3.2. Planteo

3.2.1. Planteo de los requisitos en términos frecuenciales

Lo primero que nos plantea el ejercicio es la medición del Máximo sobrepico. Para ello, lo planteamos como

$$M_p = \frac{\text{máx } y - y(\infty)}{y(\infty)} = \frac{230 - 200}{200} = 0,15 \quad (33)$$

A fin de tener un margen de seguridad, proponemos

$$M_p = 0,1 \quad (34)$$

por lo que el valor del coeficiente de amortiguamiento queda definido por

$$\zeta = -\frac{\log M_p}{\sqrt{\pi^2 + \log M_p^2}} = 0,59 \quad (35)$$

Obsérvese que si bien este requisito de diseño es de tipo temporal, podemos usar la relación (OGATA, 2010)

$$M_f = 100\zeta = 59^\circ \approx 60^\circ \quad (36)$$

El siguiente término que plantea el ejercicio es el error en estado estacionario. Dado que la entrada de consigna es una constante, se habrá de considerar un error de posición:

$$e_{ss} = \left| \frac{y - y(\infty)}{y(\infty)} \right| = \left| \frac{198 - 200}{200} \right| = 0,01 = \frac{1}{1 + K_p}. \quad (37)$$

Despejando de (37), obtenemos un valor de

$$K_p = e_{ss}^{-1} - 1 = 99. \quad (38)$$

3.2.2. Diseño del controlador

Primera aproximación: Regulador PD. Dado que la planta es Tipo 0 (Definición 1), en este caso podemos utilizar un regulador tipo PD, PI o PID. Siendo que el primer requisito ha sido planteado indirectamente en términos de margen de fase, proponemos iniciar el diseño con un controlador PD.

Para diseñar el regulador, lo primero que tenemos que tener en cuenta es que el valor de K_p obtenido en (38) es el valor de **ganancia directa de la planta con el regulador**. En este caso, la planta tienen ganancia directa unitaria, por lo que este valor es el de la ganancia del regulador. Con ese requisito satisfecho, diseñamos la posición del cero del regulador para satisfacer el requisito de margen de fase:

```

1 close all
2 clear all;
3 s = tf('s');
4
5 Gp = 1/((100*s+1)*(10*s+1)^3);
6
7 Mp = (230-200)/200;
8 Mp = 0.1
9 zita = -log(Mp)/sqrt(pi^2+(log(Mp))^2)
10 Mfd = 100*zita
11 ess = abs(198-200)/200;
12 Kp = 1/ess -1;
13
14 figure;
15 bode(Kp*Gp)
16 grid on;
17 [Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(Kp*Gp)
18 Fa = Pm -180
19 psi = Mfd+5-Fa-180

```

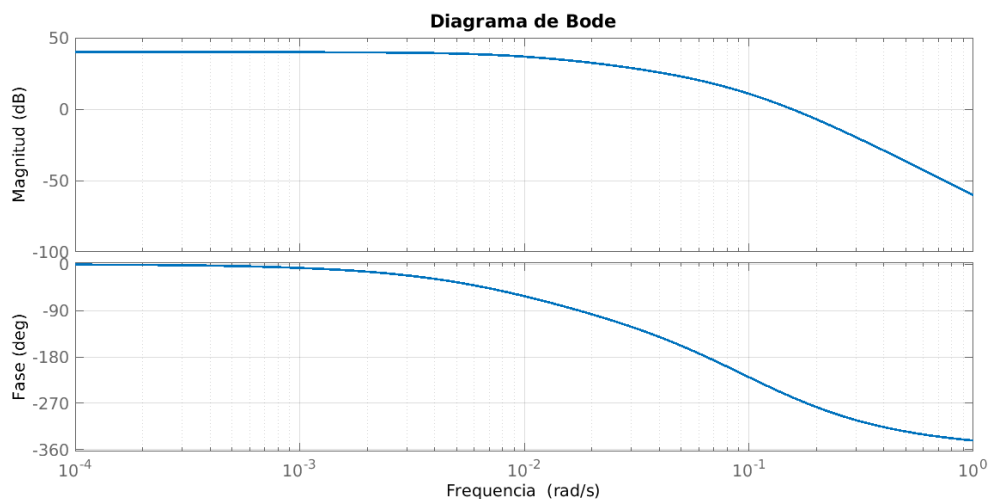


Figura 8: Diagrama de Bode de $K_p G_p(s)$.

En la Figura 8 tenemos el resultado de la ejecución del script. En la variable Fa almacenamos el valor de fase que tiene el sistema, que en este caso da un valor de $\approx -258^\circ$,

por lo que el aporte angular que debería hacer el regulador, utilizando (22) resulta

$$\psi_a = Mf_d + 5 - F_a - 180 = 60 + 5 - (-258) - 180 \approx 143^\circ \quad (39)$$

Debido a las características propias del regulador PD, el aporte de fase máximo que se puede utilizar sin que afecte demasiado la ganancia es de 40° , lo que nos llevaría a tener que usar unos 4 reguladores en serie, lo cual eleva la complejidad del sistema. En el caso en que se cumpliera el requisito del aporte de fase, obsérvese que la pendiente en la zona de cruce por $0dB$ es de aproximadamente $-80dB/dec$. Esto hace que ligeros cambios en la naturaleza del sistema (en este caso podría ser cambios en la calidad del agua o del combustible, el coeficiente de transmisión térmica de la caldera por incrustaciones en sus paredes, etc.) cambiarían más rápidamente el margen de fase del sistema regulado.

Segunda aproximación: Regulador PI. A fin de simplificar la implementación, procuraremos la utilización de un PI para satisfacer los requisitos de diseño. El requisito de error estacionario queda satisfecho con la utilización del PI: la planta es Tipo 0 y la función de transferencia del regulador es Tipo 1, por lo que la función de transferencia del sistema regulado a lazo abierto es Tipo 1. Para estos sistemas, con entrada escalón, $e_{ss} = 0$ y $K_p = \infty$. Veamos ahora el proceso de diseño para satisfacer el margen de ganancia.

En primer lugar, buscamos en el diagrama de Bode de $G_p(s)$ la frecuencia a la cual se encontraría el margen de fase deseado. Para ello, utilizamos (2a1) para obtener $\angle G_p(\omega_d) = Mf_d + 5 - 180^\circ = 60 + 5 - 180 = -115^\circ$, y como se aprecia en la Figura 9, esto se da en $\omega_d = 0,0271 rad/seg$.

```
1 figure;
2 bode(Gp)
3 grid on;
4 %[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(Gp)
5 phi_a = -180+Mfd+5
```

Con esto, podemos obtener el valor de T_i utilizando (29):

$$T_i = 10/\omega_d = 10/0,0271 \approx 369 \quad (40)$$

```
1 wa = 0.0271;
2 Ti = 10/wa;
3 Ma = -10.2;
4 Kp = 10^(-Ma/20)
```

En este punto, en el diagrama de Bode de nuestro sistema regulado, vemos que en el punto de operación indicado no se da el cruce de ganancia, debido a que no hemos calculado

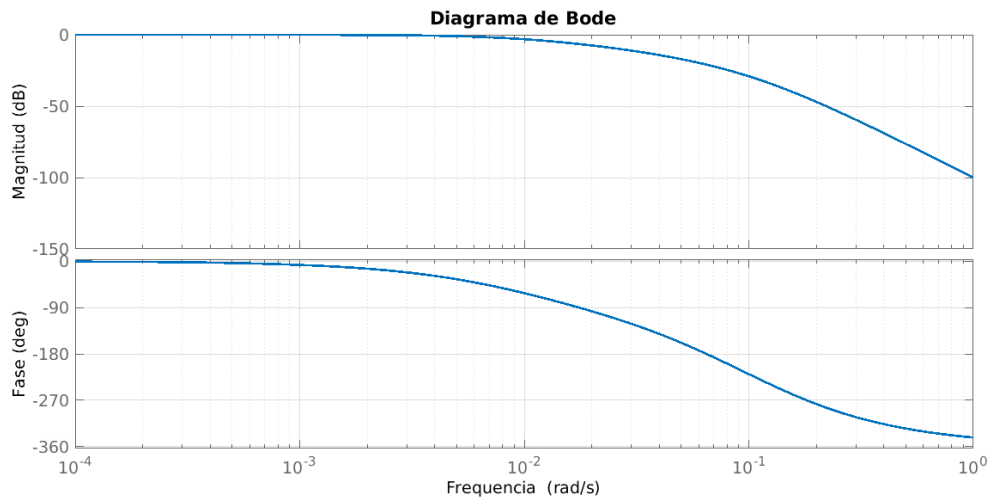


Figura 9: Diagrama de Bode de $G_p(s)$.

todavía la ganancia del regulador. En dicho punto $|G_p(j\omega_d)| = -10,2\text{dB} = M_a$, por lo que utilizando (27), obtenemos

$$K_p = 10^{-M_a/20} = 10^{-(-10,2)/20} = 3,23 \quad (41)$$

Con esto, nuestro regulador queda definido como

$$G_{PI}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = 3,23 \left(1 + \frac{1}{369s} \right) \quad (42)$$

Tercer aproximación: Regulador PID. Si bien el PI puede proveernos buenos resultados relativos, antes de tomar una decisión es conveniente analizar las alternativas. En este caso nos resta realizar el diseño del regulador PID. Debido a que tenemos requisito de margen de fase, iniciamos el cálculo por el PD. Como vimos en los cálculos anteriores, el PD por si sólo no será capaz de asegurar el margen de fase necesario, diseñaremos para que al menos garantice su máximo, y el margen de fase restante lo proveerá el PI. Para ello, siguiendo (24), tomando $\psi_a = 40^\circ$ el aporte de fase que realizará la parte derivativa del PD, obtenemos

$$T_d = (\text{tg}(\psi_a)) / \omega_a = (\text{tg}(40^\circ)) / 0,0647 = 12,9622[s] \quad (43)$$

Por tanto, la parte PD del regulador queda definida como

$$G_{PD}(s) = K_p(1 + T_d s) = 99(1 + 12,9622s). \quad (44)$$

Ahora debemos proceder a calcular el PI, como si nuestra planta fuera $G(s) = G_p(s)G_{PD}(s)$. Como el requisito de error lo voy a satisfacer seguro dado el tipo de planta, procuramos terminar de satisfacer el requisito de margen de fase. De modo similar al cálculo del regulador PI realizado anteriormente, buscamos en el diagrama de fase de $G_p(s)G_{PD}(s)$ la frecuencia ω_d tal que $\angle G_p(j\omega_d)G_{PD}(j\omega_d) = -115^\circ$, la cual resulta en $\omega_d = 0,0407$. En dicho punto $M_a = |G_p(j\omega_d)G_{PD}(j\omega_d)| = 26,5dB$, por lo que utilizando (27) obtenemos $K_{pi} = 10^{(- M_a/20)} = 10^{(-26,5/20)} = 0,0473$. Por tanto, la parte PI del regulador PID resulta

$$G_{PI}(s) = K_{pi}(1/(T_i s) + 1) = \frac{K_{pi}}{T_i s}(T_i s + 1) = \frac{11,63s + 0,04732}{245,7s} \quad (45)$$

y el regulador PID completo toma la forma

$$G_{PID}(s) = G_{PD}(s)G_{PI}(s) = \frac{1,492e04s^2 + 1212s + 4,684}{245,7s} \quad (46)$$

3.2.3. Verificación de los requisitos de diseño

Finalmente, resta verificar el cumplimiento de los requisitos de diseño solicitados. Para ello, comprobamos el margen de fase requerido y la respuesta temporal del sistema a lazo cerrado, para cada uno de los controladores diseñados, a fin de corroborar el cumplimiento de los requisitos de diseño.

```

1  Gpi = Kp*(1/(Ti*s)+1);
2  figure;
3  margin(Gpi*Gp)
4
5  figure;
6  step(200*feedback(Gpi*Gp,1))
7  grid on;
8
9  figure
10 margin(Gp*Gpi*Gpd);
11 grid on;
12
13 figure;
14 step(200*feedback(Gpi*Gp*Gpd,1));
15 grid on;
```

En cuanto al comportamiento frecuencial se presenta en las Figuras 10–11, ambos controladores satisfacen los requisitos de diseño. Los dos tienen buena estabilidad relativa ($M_g > 6dB$ y $M_f > 30^\circ$), y la pendiente en la frecuencia de cruce en ambos casos similar

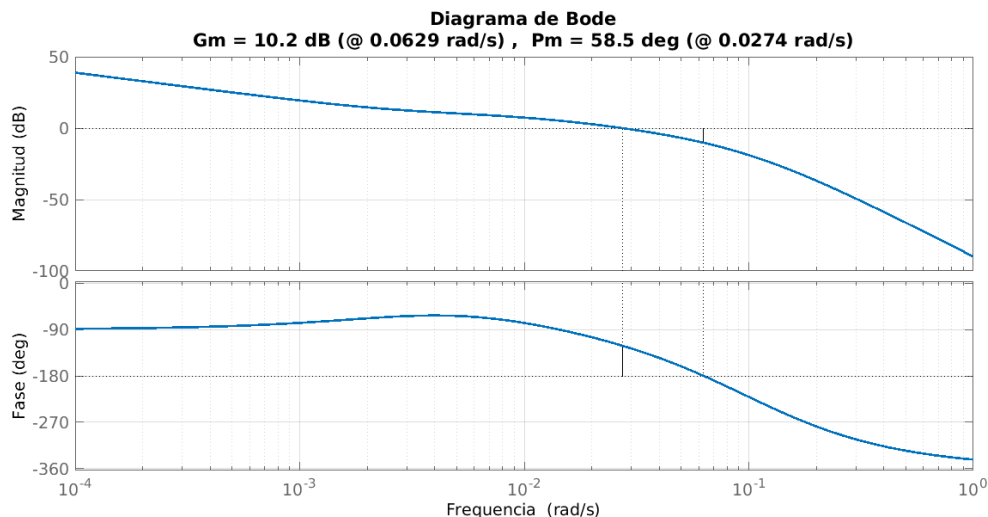


Figura 10: Diagrama de Bode de $G_p(s) * G_{PI}(s)$, indicando margenes de fase y ganancia.

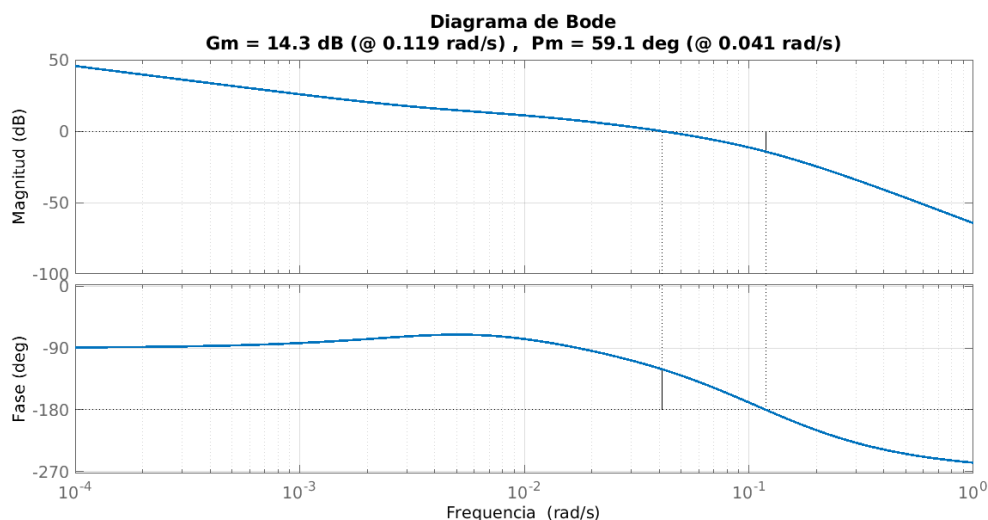


Figura 11: Diagrama de Bode de $G_p(s) * G_{PID}(s)$, indicando margenes de fase y ganancia.

a -20dB/dec , lo cual *desconecta* al diseño de los posibles errores del modelo o de la realización del controlador. Aún así, el regulador PID ofrece mejor margen de ganancia (un 60 % más absoluto).

En cuanto a la respuesta temporal (Figuras 12–13), ambos controladores responden a los requisitos de diseño en cuanto a error y máximo sobreimpulso. Gracias a las características derivativas, el PID tiene un mejor desempeño en el transitorio.

Conclusión Si bien la diferencia de comportamiento no evidencia ser sustantiva, el regulador PID preserva mejores indicadores de comportamiento sobre el PI. El costo que debemos pagar por ello es un capacitor más si se implementa con circuitos activos, lo cual en general no resulta determinante, frente a la mejor característica de estabilidad

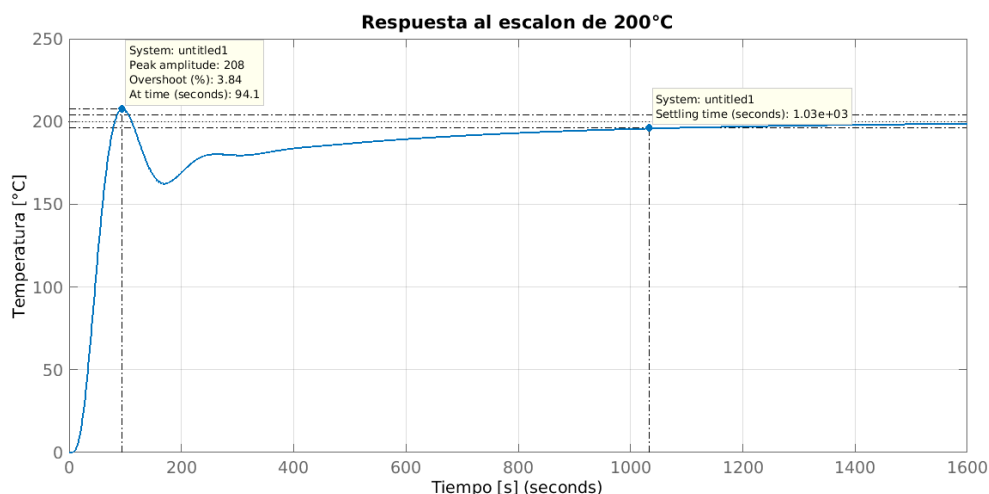


Figura 12: Respuesta a una entrada escalón de $G_p(s) * G_{PI}(s)$ a lazo cerrado, indicando el sobreimpulso y el tiempo de establecimiento.

relativa que el PID otorga en este caso.

Cada diseño obtenido es una propuesta que ha de evaluarse en función de una relación costo beneficio entre los requerimientos, el desempeño, y la implementación; lo crítico o "fuerte" de los requerimientos, si se diseña para un nivel de producción determinado o si son de implementación única.

Otras alternativas para el regulador en base a un requisito de margen de fase, puede venir de la mano de diseñar mediante el método frecuencial- analítico. Este y el cálculo de la representación circuital se dejan para el lector.

Referencias

KUO, B. *Sistemas de Control Automático*. [S.I.]: Pearson Educación, 1996.

OGATA, K. *INGENIERIA DE CONTROL MODERNA*. [S.I.]: PRENTICE-HALL, 2010.

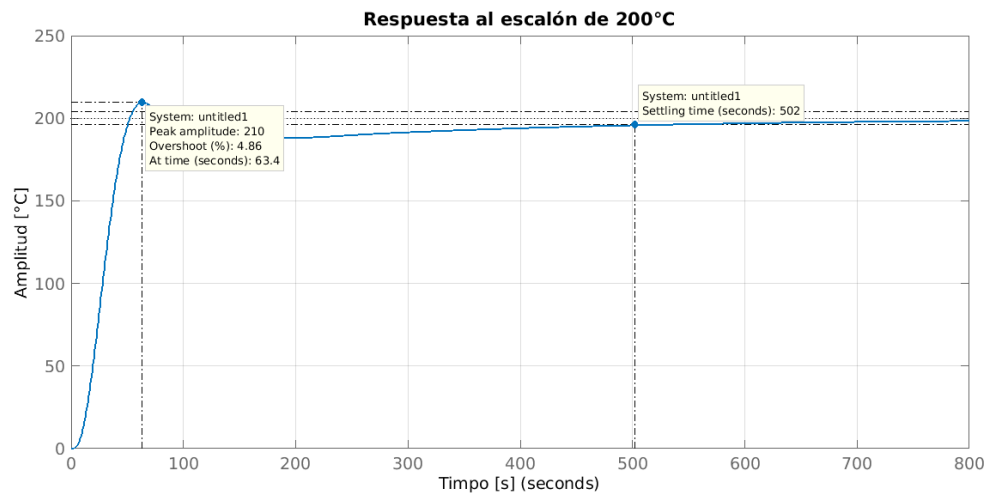


Figura 13: Respuesta a una entrada escalón de $G_p(s) * G_{PID}(s)$ a lazo cerrado, indicando el sobreimpulso y el tiempo de establecimiento.