



# Análisis de la respuesta transitoria y estacionaria

## 5-1 Introducción

---

En capítulos anteriores se planteó que el primer paso para analizar un sistema de control era obtener un modelo matemático del mismo. Una vez obtenido tal modelo, existen varios métodos para el análisis del comportamiento del sistema.

En la práctica, la señal de entrada para un sistema de control no se conoce con anticipación, pero es de naturaleza aleatoria, y la entrada instantánea no puede expresarse de forma analítica. Sólo en algunos casos especiales se conoce con anticipación la señal de entrada y se puede expresar de forma analítica o mediante curvas; tal es el caso del control automático de herramientas de corte.

En el análisis y diseño de sistemas de control, se debe tener una base de comparación del comportamiento de diversos sistemas de control. Esta base se configura especificando las señales de entrada de prueba particulares y comparando las respuestas de varios sistemas a estas señales de entrada.

Muchos criterios de diseño se basan en tales señales o en la respuesta del sistema a los cambios en las condiciones iniciales (sin señales de prueba). El uso de señales de prueba se justifica porque existe una correlación entre las características de respuesta de un sistema para una señal de entrada de prueba común y la capacidad del sistema de manejar las señales de entrada reales.

**Señales de prueba típicas.** Las señales de prueba que se usan regularmente son funciones escalón, rampa, parábola, impulso, etc. Con estas señales de prueba, es posible realizar con facilidad análisis matemáticos y experimentales de sistemas de control, ya que las señales son funciones del tiempo muy simples.

La forma de la entrada a la que el sistema estará sujeto con mayor frecuencia en una operación normal determina cuál de las señales de entrada típicas se debe usar para analizar las características del sistema. Si las entradas para un sistema de control son funciones del tiempo que cambian en forma gradual, una función rampa será una buena señal de prueba. Asimismo, si un sistema está sujeto a perturbaciones repentinas, una función escalón será una buena señal de prueba; y para un sistema sujeto a entradas de choque, una función impulso será la mejor. Una vez diseñado un sistema de control con base en las señales de prueba, por lo general el comportamiento del sistema en respuesta a las entradas reales es satisfactorio. El uso de tales señales de prueba permite comparar el comportamiento de todos los sistemas sobre la misma base.

**Respuesta transitoria y respuesta en estado estacionario.** La respuesta en el tiempo de un sistema de control consta de dos partes: la respuesta transitoria y la respuesta en estado estacionario. La respuesta transitoria se refiere a la que va del estado inicial al estado final. Por respuesta en estado estacionario se entiende la manera como se comporta la salida del sistema conforme  $t$  tiende a infinito. Por tanto, la respuesta del sistema  $c(t)$  se puede escribir como

$$c(t) = c_{tr} + c_{ss}(t)$$

donde el primer término del miembro derecho de la ecuación es la respuesta transitoria y el segundo término es la respuesta en el estado estacionario.

**Estabilidad absoluta, estabilidad relativa y error en estado estacionario.** Al diseñar un sistema de control, se debe ser capaz de predecir su comportamiento dinámico a partir del conocimiento de los componentes. La característica más importante del comportamiento dinámico de un sistema de control es la estabilidad absoluta, es decir, si el sistema es estable o inestable. Un sistema de control está en equilibrio si, en ausencia de cualquier perturbación o entrada, la salida permanece en el mismo estado. Un sistema de control lineal e invariante con el tiempo es estable si la salida termina por regresar a su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial. Un sistema de control lineal e invariante con el tiempo es críticamente estable si las oscilaciones de la salida continúan de forma indefinida. Es inestable si la salida diverge sin límite a partir de su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial. En realidad, la salida de un sistema físico puede aumentar hasta un cierto grado, pero puede estar limitada por «detenciones» mecánicas, o el sistema puede colapsarse o volverse no lineal una vez que la salida excede cierta magnitud, por lo cual ya no se aplican las ecuaciones diferenciales lineales.

Entre los comportamientos importantes del sistema (aparte de la estabilidad absoluta) que deben recibir una cuidadosa consideración están la estabilidad relativa y el error en estado estacionario. Como un sistema de control físico implica un almacenamiento de energía, la salida del sistema, cuando este está sujeto a una entrada, no sucede a la entrada de inmediato, sino que muestra una respuesta transitoria antes de alcanzar un estado estacionario. La respuesta transitoria de un sistema de control práctico, con frecuencia, muestra oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar un estado estacionario. Si la salida de un sistema en estado estacionario no coincide exactamente con la entrada, se dice que el sistema tiene un error en estado estacionario. Este error indica la precisión del sistema. Al analizar un sistema de control, se debe examinar el comportamiento de la respuesta transitoria y el comportamiento en estado estacionario.

**Contenido del capítulo.** Este capítulo se relaciona con las respuestas de los sistemas a las señales aperiódicas (como las funciones escalón, rampa, parábola e impulso). El capítulo incluye lo siguiente. La Sección 5-1 presenta el material introductorio. La Sección 5-2 trata la respuesta de los sistemas de primer orden ante entradas aperiódicas. La Sección 5-3 aborda la respuesta transitoria de los sistemas de segundo orden. Se presentan análisis detallados de la respuesta escalón, rampa e impulso de los sistemas de segundo orden. La Sección 5-4 estudia el

análisis de respuesta transitoria de los sistemas de orden superior. La Sección 5-5 ofrece una introducción al enfoque de MATLAB para la solución de respuesta transitoria. La Sección 5-6 presenta un ejemplo de un problema de respuesta transitoria solucionado con MATLAB. La Sección 5-7 expone el criterio de estabilidad de Routh. La Sección 5-8 examina los efectos de las acciones de control integral y derivativo en el comportamiento del sistema. Por último, la Sección 5-9 trata los errores en estado estacionario de los sistemas de control con realimentación unitaria.

## 5-2 Sistemas de primer orden

Considérese el sistema de primer orden de la Figura 5-1(a). Físicamente, este sistema representa un circuito  $RC$ , un sistema térmico o algo similar. La Figura 5-1(b) presenta un diagrama de bloques simplificado. La relación entrada-salida se obtiene mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (5-1)$$

En lo sucesivo, se analizan las respuestas del sistema a entradas como la función escalón unitario, rampa unitaria e impulso unitario. Se supone que las condiciones iniciales son cero.

Obsérvese que todos los sistemas que tienen la misma función de transferencia presentarán la misma salida en respuesta a la misma entrada. Para cualquier sistema físico dado, la respuesta matemática recibe una interpretación física.

**Respuesta escalón unitario de sistemas de primer orden.** Como la transformada de Laplace de la función escalón unitario es  $1/s$ , sustituyendo  $R(s) = 1/s$  en la Ecuación (5-1), se obtiene

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

Si se desarrolla  $C(s)$  en fracciones simples se obtiene

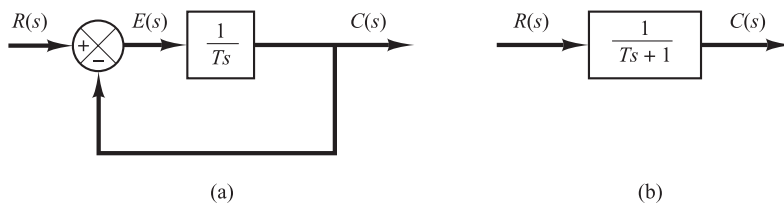
$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/T)} \quad (5-2)$$

Si se toma la transformada inversa de Laplace de la Ecuación (5-2), se obtiene

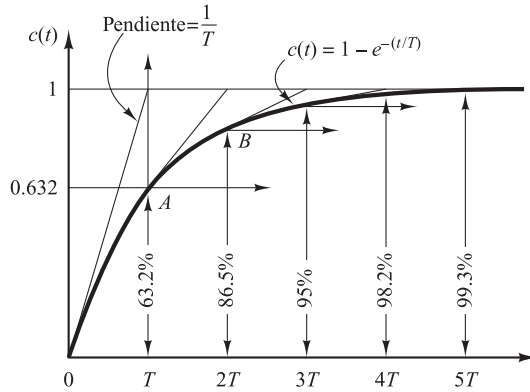
$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5-3)$$

La Ecuación (5-3) plantea que la salida  $c(t)$  es inicialmente cero y al final se vuelve unitaria. Una característica importante de tal curva de respuesta exponencial  $c(t)$  es que, para  $t = T$ , el valor de  $c(t)$  es 0.632, o que la respuesta  $c(t)$  alcanzó 63.2% de su cambio total. Esto se aprecia con facilidad sustituyendo  $t = T$  en  $c(t)$ . Es decir,

$$c(T) = 1 - e^{-1} = 0.632$$



**Figura 5-1.** (a) Diagrama de bloques de un sistema de primer orden; (b) diagrama de bloques simplificado.



**Figura 5-2.** Curva de respuesta exponencial.

Obsérvese que, conforme más pequeña es la constante de tiempo  $T$ , más rápida es la respuesta del sistema. Otra característica importante de la curva de respuesta exponencial es que la pendiente de la línea de tangente en  $t = 0$  es  $1/T$ , ya que

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{T} e^{-t/T} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T} \quad (5-4)$$

La salida alcanzará el valor final en  $t = T$  si mantuviera su velocidad de respuesta inicial. A partir de la Ecuación (5-4) se observa que la pendiente de la curva de respuesta  $c(t)$  disminuye de forma monótona de  $1/T$  en  $t = 0$  a cero en  $t = \infty$ .

La curva de respuesta exponencial  $c(t)$  obtenida mediante la Ecuación (5-3) aparece en la Figura 5-2. En una constante de tiempo, la curva de respuesta exponencial ha ido de 0 a 63.2% del valor final. En dos constantes de tiempo, la respuesta alcanza 86.5% del valor final. En  $t = 3T$ ,  $4T$  y  $5T$ , la respuesta alcanza 95, 98.2 y 99.3%, respectivamente, del valor final. Por tanto, para  $t \geq 4T$ , la respuesta permanece dentro del 2% del valor final. Como se observa en la Ecuación (5-3), el estado estacionario se alcanza matemáticamente sólo después de un tiempo infinito. Sin embargo, en la práctica, una estimación razonable del tiempo de respuesta es la longitud de tiempo que necesita la curva de respuesta para alcanzar la línea de 2% del valor final, o cuatro constantes de tiempo.

**Respuesta rampa unitaria de sistemas de primer orden.** Como la transformada de Laplace de la función rampa unitaria es  $1/s^2$ , se obtiene la salida del sistema de la Figura 5-1(a), como

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s^2}$$

Desarrollando  $C(s)$  en fracciones simples se obtiene

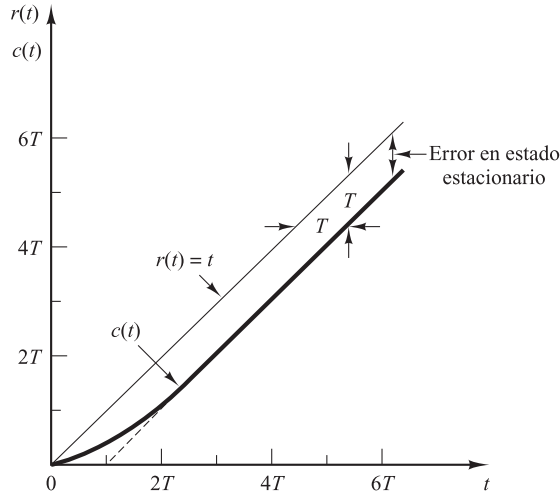
$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts + 1} \quad (5-5)$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de la Ecuación (5-5), se obtiene

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5-6)$$

De este modo, la señal de error  $e(t)$  es

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - c(t) \\ &= T(1 - e^{-t/T}) \end{aligned}$$



**Figura 5-3.** Respuesta a rampa unitaria del sistema mostrado en la Figura 5-1(a).

Conforme  $t$  tiende a infinito,  $e^{-t/T}$  se aproxima a cero y, por tanto, la señal de error  $e(t)$  se aproxima a  $T$  o

$$e(\infty) = T$$

La entrada rampa unitaria y la salida del sistema se muestran en la Figura 5-3. El error después de la entrada rampa unitaria es igual a  $T$  para una  $t$  suficientemente grande. Cuanto más pequeña es la constante de tiempo  $T$ , menor es el error en estado estacionario después de la entrada rampa.

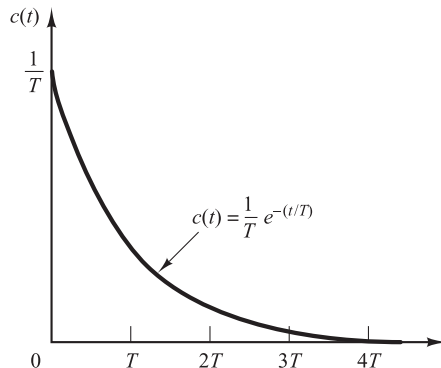
**Respuesta impulso unitario de sistemas de primer orden.** Para la entrada impulso unitario,  $R(s) = 1$  y la salida del sistema de la Figura 5-1(a) pueden obtenerse como

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (5-7)$$

La transformada inversa de Laplace de la Ecuación (5-7) produce

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5-8)$$

La curva de respuesta obtenida mediante la Ecuación (5-8) aparece en la Figura 5-4.



**Figura 5-4.** Respuesta a impulso unitario del sistema mostrado en la Figura 5-1(a).

**Una propiedad importante de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo.** En el análisis anterior, se demostró que, para la entrada rampa unitaria, la salida  $c(t)$  es

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad [\text{Véase Ecuación (5-6)}]$$

Para la entrada escalón unitario, que es la derivada de la entrada rampa unitaria, la salida  $c(t)$  es

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad [\text{Véase Ecuación (5-3)}]$$

Por último, para la entrada impulso unitario, que es la derivada de la entrada escalón unitario, la salida  $c(t)$  es

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad [\text{Véase Ecuación (5-8)}]$$

Una comparación de las respuestas del sistema para estas tres entradas indica con claridad que la respuesta a la derivada de una señal de entrada se obtiene diferenciando la respuesta del sistema para la señal original. También se observa que la respuesta para la integral de la señal original se obtiene integrando la respuesta del sistema para la señal original y determinando las constantes de integración a partir de la condición inicial de salida cero. Esta es una propiedad de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Los sistemas lineales y variables con el tiempo y los sistemas no lineales no poseen esta propiedad.

## 5-3 Sistemas de segundo orden

En esta sección, se obtendrá la respuesta de un sistema de control típico de segundo orden para una entrada escalón, rampa e impulso. Aquí se considera un servomotor como ejemplo de un sistema de segundo orden.

**Servosistema.** El servosistema que se muestra en la Figura 5-5(a) consiste en un controlador proporcional y elementos de carga (elementos de inercia y fricción viscosa). Se supone que se desea controlar la posición de salida  $c$  de forma que siga a la posición de entrada  $r$ .

La ecuación para los elementos de carga es

$$J\ddot{c} + B\dot{c} = T$$

donde  $T$  es el par producido por el controlador proporcional de ganancia  $K$ . Tomando la transformada de Laplace a ambos lados de esta última ecuación, suponiendo condiciones iniciales nulas, se obtiene

$$Js^2C(s) + BsC(s) = T(s)$$

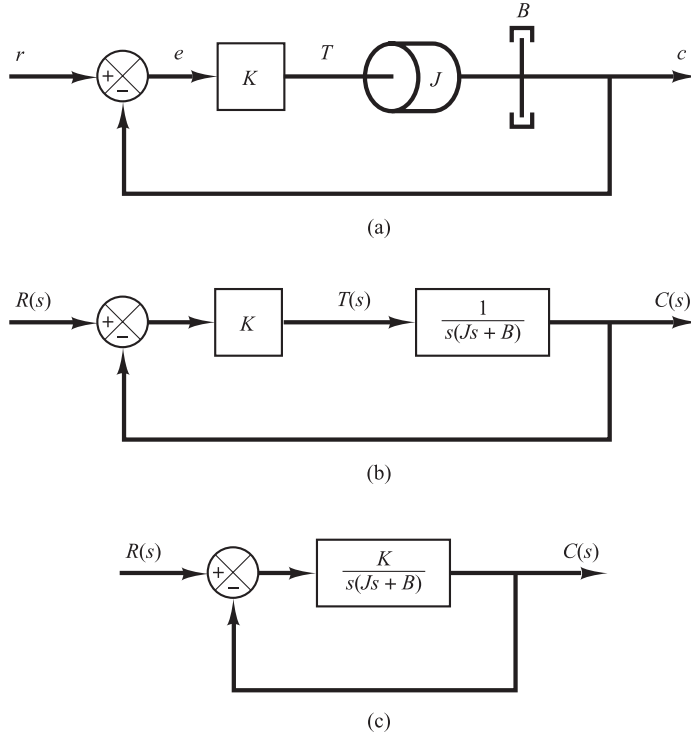
Por tanto, la función de transferencia entre  $C(s)$  y  $T(s)$  es

$$\frac{C(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js + B)}$$

Utilizando esta función transformada, la Figura 5-5(a) se puede redibujar como se muestra en la Figura 5-5(b), que se puede modificar como se muestra en la Figura 5-5(c). La función de transferencia en lazo cerrado se obtiene entonces como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{K/J}{s^2 + (B/J)s + (K/J)}$$

Tal sistema en el que la función de transferencia en lazo cerrado posee dos polos se denomina sistema de segundo orden. (Algunos sistemas de segundo orden pueden contener uno o dos ceros.)



**Figura 5-5.** (a) Servosistema; (b) diagrama de bloques; (c) diagrama de bloques simplificado.

**Respuesta escalón de sistemas de segundo orden.** La función de transferencia en lazo cerrado del sistema de la Figura 5-5(c) es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} \quad (5-9)$$

que puede reescribirse como

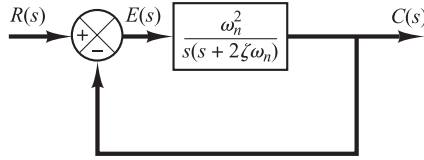
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{J}}{\left[ s + \frac{B}{2J} + \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right] \left[ s + \frac{B}{2J} - \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right]}$$

Los polos en lazo cerrado son complejos si  $B^2 - 4JK < 0$ , y son reales si  $B^2 - 4JK \geq 0$ . En el análisis de la respuesta transitoria, es conveniente escribir

$$\frac{K}{J} = \omega_n^2, \quad \frac{B}{J} = 2\zeta\omega_n = 2\sigma$$

donde  $\sigma$  se denomina *atenuación*;  $\omega_n$ , *frecuencia natural no amortiguada*, y  $\zeta$ , *factor de amortiguamiento relativo* del sistema. El factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  es el cociente entre el amortiguamiento real  $B$  y el amortiguamiento crítico  $B_c = 2\sqrt{JK}$  o bien

$$\zeta = \frac{B}{B_c} = \frac{B}{2\sqrt{JK}}$$



**Figura 5-6.** Sistema de segundo orden.

En términos de  $\zeta$  y  $\omega_n$ , el sistema de la Figura 5-5(c) se convierte en el que aparece en la Figura 5-6, y la función de transferencia en lazo cerrado  $C(s)/R(s)$  obtenida mediante la Ecuación (5-9) se escribe como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5-10)$$

Esta forma se denomina *forma estándar* del sistema de segundo orden.

El comportamiento dinámico del sistema de segundo orden se describe a continuación en términos de dos parámetros  $\zeta$  y  $\omega_n$ . Si  $0 < \zeta < 1$ , los polos en lazo cerrado son complejos conjugados y se encuentran en el semiplano izquierdo del plano  $s$ . El sistema, entonces, se denomina subamortiguado y la respuesta transitoria es oscilatoria. Si  $\zeta = 0$ , la respuesta transitoria no se amortigua. Si  $\zeta = 1$ , el sistema se denomina críticamente amortiguado. Los sistemas sobreamortiguados corresponden a  $\zeta > 1$ .

Ahora se obtendrá la respuesta del sistema que aparece en la Figura 5-6 para una entrada escalón unitario. Se considerarán tres casos diferentes: el subamortiguado ( $0 < \zeta < 1$ ), el críticamente amortiguado ( $\zeta = 1$ ) y el sobreamortiguado ( $\zeta > 1$ ).

1) *Caso subamortiguado* ( $0 < \zeta < 1$ ): en este caso,  $C(s)/R(s)$  se escribe como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

donde  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ . La frecuencia  $\omega_d$  se denomina *frecuencia natural amortiguada*. Para una entrada escalón unitario,  $C(s)$  se escribe como

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s} \quad (5-11)$$

La transformada inversa de Laplace de la Ecuación (5-11) se obtiene con facilidad si  $C(s)$  se escribe de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned}$$

En el Capítulo 2 se mostró que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] &= e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] &= e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \end{aligned}$$



Por tanto, la transformada inversa de Laplace de la Ecuación (5-11) se obtiene como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}[C(s)] &= c(t) \\
 &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \\
 &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left( \omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right), \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5-12)
 \end{aligned}$$

Este resultado se obtiene directamente usando una tabla de transformadas de Laplace. A partir de la Ecuación (5-12) se observa que la frecuencia de oscilación transitoria es la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$  y que, por tanto, varía con el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$ . La señal de error para este sistema es la diferencia entre la entrada y la salida, y es

$$\begin{aligned}
 e(t) &= r(t) - c(t) \\
 &= e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right), \quad \text{para } t \geq 0
 \end{aligned}$$

Esta señal de error presenta una oscilación sinusoidal amortiguada. En estado estacionario, o en  $t = \infty$ , no existe un error entre la entrada y la salida.

Si el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  es igual a cero, la respuesta se vuelve no amortiguada y las oscilaciones continúan indefinidamente. La respuesta  $c(t)$  para el caso del amortiguamiento cero se obtiene sustituyendo  $\zeta = 0$  en la Ecuación (5-12), lo cual produce

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5-13)$$

Por tanto, a partir de la Ecuación (5-13), se establece que  $\omega_n$  representa la frecuencia natural no amortiguada del sistema. Es decir,  $\omega_n$  es la frecuencia a la cual el sistema oscilará si el amortiguamiento disminuyera a cero. Si el sistema lineal tiene cualquier cantidad de amortiguamiento, no se puede observar experimentalmente la frecuencia natural no amortiguada. La frecuencia que se observa es la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$ , que es igual a  $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ . Esta frecuencia siempre es menor que la frecuencia natural no amortiguada. Un aumento en  $\zeta$  reduciría la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$ . Si  $\zeta$  aumenta más de la unidad, la respuesta se vuelve sobreamortiguada y no oscilará.

2) *Caso críticamente amortiguado* ( $\zeta = 1$ ): si los dos polos de  $C(s)/R(s)$  son casi iguales, el sistema se aproxima mediante uno críticamente amortiguado.

Para una entrada escalón unitario,  $R(s) = 1/s$  y  $C(s)$  se escribe como

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2 s} \quad (5-14)$$

La transformada inversa de Laplace de la Ecuación (5-14) se encuentra como

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5-15)$$

Este resultado se obtiene suponiendo que  $\zeta$  se aproxima a la unidad en la Ecuación (5-12) y utilizando el límite siguiente:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sin \omega_d t}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \omega_n t$$

3) *Caso sobreamortiguado* ( $\zeta > 1$ ): en este caso, los dos polos de  $C(s)/R(s)$  son reales negativos y diferentes. Para una entrada escalón unitario,  $R(s) = 1/s$  y  $C(s)$  se escriben como

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s} \quad (5-16)$$

La transformada inversa de Laplace de la Ecuación (5-16) es:

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \\ &= 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right), \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned} \quad (5-17)$$

donde  $s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$  y  $s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$ . Por tanto, la respuesta  $c(t)$  incluye dos términos exponenciales que decaen.

Cuando  $\zeta$  es apreciablemente mayor que la unidad, uno de los dos exponenciales que decaen disminuye mucho más rápido que el otro, por lo que el término exponencial que decae más rápido puede pasarse por alto (corresponde a una constante de tiempo más pequeña). Es decir, si  $-s_2$  se localiza mucho más cerca del eje  $j\omega$  que  $-s_1$  (lo cual significa que  $|s_2| \ll |s_1|$ ), para una solución aproximada se puede no considerar  $-s_1$ . Esto se permite debido a que el efecto de  $-s_1$  en la respuesta es mucho más pequeño que el de  $-s_2$ , ya que el término que incluye  $s_1$  en la Ecuación (5-17) se descompone mucho más rápido que el término que tiene a  $s_2$ . Una vez desaparecido el término exponencial que decae más rápido, la respuesta es similar a la de un sistema de primer orden, y  $C(s)/R(s)$  se aproxima mediante:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} = \frac{s_2}{s + s_2}$$

Esta forma aproximada es una consecuencia directa de que los valores iniciales y los valores finales tanto del  $C(s)/R(s)$  original como del aproximado coincidan.

Con la función de transferencia aproximada  $C(s)/R(s)$ , la respuesta escalón unitario se obtiene como

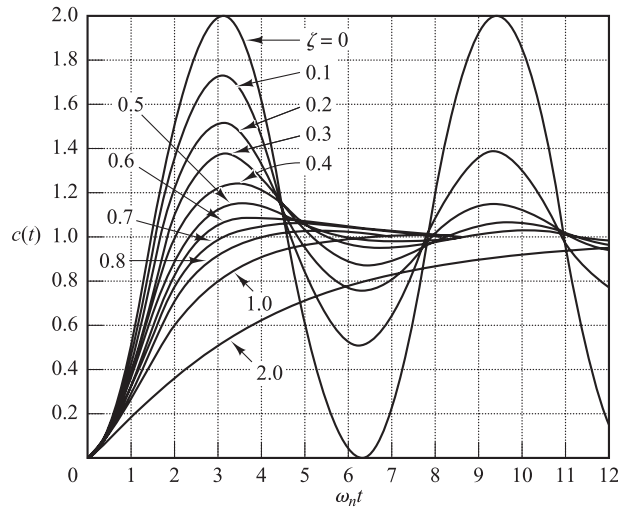
$$C(s) = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s}$$

La respuesta del tiempo  $c(t)$  es, entonces,

$$c(t) = 1 - e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}, \quad \text{para } t \geq 0$$

Esto proporciona una respuesta escalón unitario aproximada cuando uno de los polos de  $C(s)/R(s)$  puede pasarse por alto.

La Figura 5-7 contiene una familia de curvas  $c(t)$  con diversos valores de  $\zeta$ , donde la abscisa es la variable adimensional  $\omega_n t$ . Las curvas sólo son funciones de  $\zeta$  y se obtienen a partir de las



**Figura 5-7.** Curvas de respuesta a escalón unitario del sistema mostrado en la Figura 5-6.

Ecuaciones (5-12), (5-15) y (5-17). El sistema descrito mediante estas ecuaciones estaba inicialmente en reposo.

Obsérvese que los dos sistemas de segundo orden que tienen el mismo  $\zeta$  pero diferente  $\omega_n$  presentarán la misma sobreelongación y mostrarán el mismo patrón oscilatorio. Se dice que tales sistemas tienen la misma estabilidad relativa.

Es importante observar que, para los sistemas de segundo orden, cuyas funciones de transferencia en lazo cerrado son diferentes de las obtenidas mediante la Ecuación (5-10), las curvas de respuesta escalón se ven muy distintas de las que aparecen en la Figura 5-7.

En la Figura 5-7 se observa que un sistema subamortiguado con  $\zeta$  entre 0.5 y 0.8 se acerca al valor final con mayor rapidez que un sistema críticamente amortiguado o sobreamortiguado. Entre los sistemas que responden sin oscilación, un sistema críticamente amortiguado presenta la respuesta más rápida. Un sistema sobreamortiguado siempre es lento para responder a las entradas.

**Definiciones de las especificaciones de respuesta transitoria.** En muchos casos prácticos, las características de desempeño deseadas del sistema de control se especifican en términos de cantidades en el dominio del tiempo. Los sistemas que pueden almacenar energía no responden instantáneamente y presentan respuestas transitorias cada vez que están sujetos a entradas o perturbaciones.

Con frecuencia, las características de desempeño de un sistema de control se especifican en términos de la respuesta transitoria para una entrada escalón unitario, puesto que esta es fácil de generar y es suficientemente drástica. (Si se conoce la respuesta a una entrada escalón, es matemáticamente posible calcular la respuesta para cualquier entrada.)

La respuesta transitoria de un sistema para una entrada escalón unitario depende de las condiciones iniciales. Por conveniencia al comparar respuestas transitorias de varios sistemas, es una práctica común usar la condición inicial estándar de que el sistema está en reposo al inicio, por lo cual la salida y todas las derivadas con respecto al tiempo son cero. De este modo, las características de respuesta se comparan con facilidad.

La respuesta transitoria de un sistema de control práctico muestra con frecuencia oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estacionario. Al especificar las características de la

respuesta transitoria de un sistema de control para una entrada escalón unitario, es común especificar lo siguiente:

1. Tiempo de retardo,  $t_d$
2. Tiempo de subida,  $t_r$
3. Tiempo pico,  $t_p$
4. Sobreelongación,  $M_p$
5. Tiempo de asentamiento,  $t_s$

Estas especificaciones se definen enseguida y aparecen en forma gráfica en la Figura 5-8.

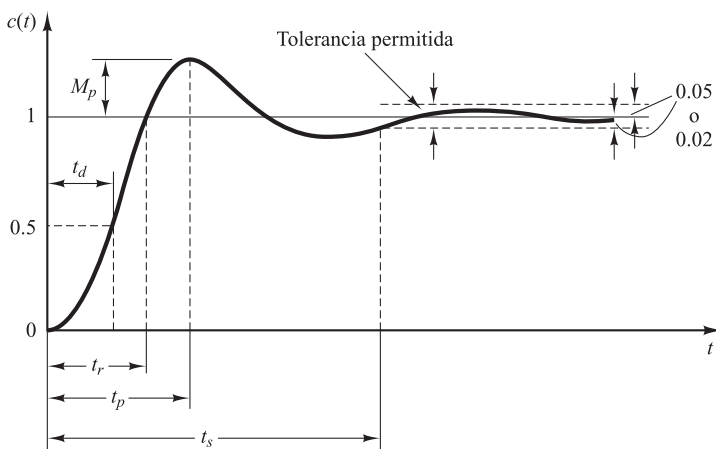
1. Tiempo de retardo  $t_d$ : el tiempo de retardo es el tiempo requerido para que la respuesta alcance la primera vez la mitad del valor final.
2. Tiempo de subida,  $t_r$ : el tiempo de subida es el tiempo requerido para que la respuesta pase del 10 al 90%, del 5 al 95% o del 0 al 100% de su valor final. Para sistemas subamortiguados de segundo orden, por lo general se usa el tiempo de subida de 0 a 100%. Para sistemas sobreamortiguados, suele usarse el tiempo de levantamiento de 10 a 90%.
3. Tiempo pico,  $t_p$ : el tiempo pico es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico de sobreelongación.
4. Sobreelongación máxima (porcentaje),  $M_p$ : la máxima sobreelongación es el máximo valor del pico de la curva de respuesta, medido a partir de la unidad. Si el valor final en estado estacionario de la respuesta es diferente de la unidad, es frecuente utilizar el porcentaje de sobreelongación máxima. Se define mediante

$$\text{Porcentaje de sobreelongación máxima} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

La cantidad de sobreelongación máxima (en porcentaje) indica de manera directa la estabilidad relativa del sistema.

5. Tiempo de asentamiento,  $t_s$ : El tiempo de asentamiento es el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final del tamaño especificado por el porcentaje absoluto del valor final (por lo general, de 2 o 5%). El tiempo de asentamiento se relaciona con la mayor constante de tiempo del sistema de control. Los objetivos del diseño del sistema en cuestión determinan qué criterio de error en porcentaje utilizar.

Las especificaciones en el dominio del tiempo que se han proporcionado son muy importantes, ya que casi todos los sistemas de control son sistemas en el dominio del tiempo; es decir,



**Figura 5-8.** Curva de respuesta a escalón unitario con  $t_d$ ,  $t_r$ ,  $t_p$ ,  $M_p$  y  $t_s$ .

deben presentar respuestas de tiempo aceptables. (Esto significa que el sistema de control debe modificarse hasta que la respuesta transitoria sea satisfactoria.)

Obsérvese que todas estas especificaciones no se aplican necesariamente a cualquier caso determinado. Por ejemplo, para un sistema sobreamortiguado no se aplican los términos tiempo pico y sobreelongación máxima. (En los sistemas que producen errores en estado estacionario para entradas escalón, este error debe conservarse dentro de un nivel de porcentaje especificado. En la Sección 5-9 se incluyen análisis detallados de los errores en estado estacionario.)

**Algunos comentarios sobre las especificaciones de la respuesta transitoria.** Excepto para ciertas aplicaciones en las que no se pueden tolerar oscilaciones, es conveniente que la respuesta transitoria sea suficientemente rápida y amortiguada. Por tanto, para una respuesta transitoria conveniente de un sistema de segundo orden, el factor de amortiguamiento relativo debe estar entre 0.4 y 0.8. Valores pequeños de  $\zeta$  ( $\zeta < 0.4$ ) producen un valor de la sobreelongación excesivo en la respuesta transitoria, y un sistema con un valor grande de  $\zeta$  ( $\zeta > 0.8$ ) responde con lentitud.

Más adelante se mostrará el conflicto entre la sobreelongación máxima y el tiempo de subida. En otras palabras, tanto la sobreelongación máxima como el tiempo de subida no pueden hacerse más pequeños de forma simultánea. Si uno de ellos se reduce, el otro necesariamente aumenta.

**Sistemas de segundo orden y especificaciones de la respuesta transitoria.** A continuación, se obtendrá el tiempo de subida, el tiempo pico, la sobreelongación máxima y el tiempo de asentamiento del sistema de segundo orden obtenido mediante la Ecuación (5-10). Estos valores se obtendrán en términos de  $\zeta$  y  $\omega_n$ . Se supone que el sistema está subamortiguado.

*Tiempo de subida  $t_r$ :* si se remite a la Ecuación (5-12), se obtiene el tiempo de subida  $t_r$ , suponiendo que  $c(t_r) = 1$ , o que

$$c(t_r) = 1 = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r} \left( \cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r \right) \quad (5-18)$$

Como  $e^{-\zeta\omega_n t_r} \neq 0$ , se obtiene la ecuación siguiente a partir de la Ecuación (5-18):

$$\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r = 0$$

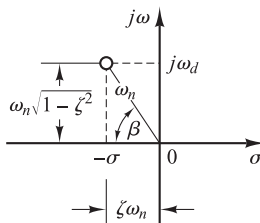
Como  $\omega_n = \sqrt{1-\zeta^2} = \omega_d$  y  $\zeta\omega_n = \sigma$ , se tiene

$$\tan \omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = -\frac{\omega_d}{\sigma}$$

Por tanto, el tiempo de subida  $t_r$  es

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left( \frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad (5-19)$$

donde  $\beta$  se define en la Figura 5-9. Es evidente que para un valor pequeño de  $t_r$ ,  $\omega_d$  debe ser grande.



**Figura 5-9.** Definición del ángulo  $\beta$ .

*Tiempo pico  $t_p$* : si se remite a la Ecuación (5-12), se obtiene el tiempo pico diferenciando  $c(t)$  con respecto al tiempo y suponiendo que esta derivada es igual a cero. Como

$$\begin{aligned}\frac{dc}{dt} &= \zeta \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \\ &+ e^{-\zeta \omega_n t} \left( \omega_d \sin \omega_d t - \frac{\zeta \omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos \omega_d t \right)\end{aligned}$$

y los términos de coseno de esta última ecuación se cancelan uno al otro,  $dc/dt$ , evaluada en  $t = t_p$ , se simplifica a

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=t_p} = (\sin \omega_d t_p) \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t_p} = 0$$

Esta última ecuación da lugar a la ecuación siguiente:

$$\sin \omega_d t_p = 0$$

o bien

$$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Como el tiempo pico corresponde al primer pico sobreelongación máximo,  $\omega_d t_p = \pi$ . Por tanto,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (5-20)$$

El tiempo pico  $t_p$  corresponde a medio ciclo de la frecuencia de oscilación amortiguada.

*Sobreelongación máxima  $M_p$* : la sobreelongación máxima se presenta en el tiempo pico o en  $t = t_p = \pi/\omega_d$ . Por tanto, a partir de la Ecuación (5-12),  $M_p$  se obtiene como

$$\begin{aligned}M_p &= c(t_p) - 1 \\ &= -e^{-\zeta \omega_n (\pi/\omega_d)} \left( \cos \pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \pi \right) \\ &= e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}\end{aligned} \quad (5-21)$$

El porcentaje de sobreelongación máxima es  $e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} \times 100\%$ .

Si el valor final  $c(\infty)$  de la salida no es la unidad, entonces se necesita utilizar la ecuación siguiente:

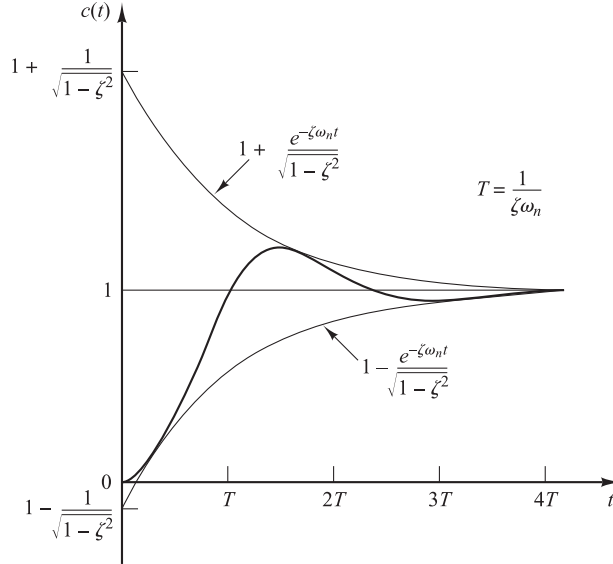
$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)}$$

*Tiempo de asentamiento  $t_s$* : para un sistema subamortiguado de segundo orden, la respuesta transitoria se obtiene a partir de la Ecuación (5-12),

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left( \omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right), \quad \text{para } t \geq 0$$

Las curvas  $1 \pm (e^{-\zeta \omega_n t}/\sqrt{1-\zeta^2})$  son las curvas envolventes de la respuesta transitoria para una entrada escalón unitario. La curva de respuesta  $c(t)$  siempre permanece dentro de un par de curvas envolventes, como se aprecia en la Figura 5-10. La constante de tiempo de estas curvas envolventes es  $1/\zeta \omega_n$ .

La velocidad de decaimiento de la respuesta transitoria depende del valor de la constante de tiempo  $1/\zeta \omega_n$ . Para un  $\omega_n$  determinado, el tiempo de asentamiento  $t_s$  es una función del factor de



**Figura 5-10.** Par de curvas envolventes para la curva de respuesta a escalón unitario del sistema mostrado en la Figura 5-6.

amortiguamiento relativo  $\zeta$ . A partir de la Figura 5-7, se observa que, para el mismo  $\omega_n$  y para un rango de  $\zeta$  entre 0 y 1 el tiempo de asentamiento  $t_s$  para un sistema ligeramente amortiguado es más grande que para un sistema amortiguado de manera moderada. Para un sistema sobreamortiguado, el tiempo de asentamiento  $t_s$  se vuelve más grande debido al inicio lento de la respuesta.

El tiempo de asentamiento que corresponde a una banda de tolerancia de  $\pm 2\%$  o  $\pm 5\%$  se mide en función de la constante de tiempo  $T = 1/\zeta\omega_n$  a partir de las curvas de la Figura 5-7 para diferentes valores de  $\zeta$ . Los resultados se muestran en la Figura 5-11. Para  $0 < \zeta < 0.9$ , si se utiliza el criterio del 2%,  $t_s$  es aproximadamente cuatro veces la constante de tiempo del sistema. Si se emplea el criterio del 5%,  $t_s$  es aproximadamente tres veces la constante de tiempo. Obsérvese que el tiempo de asentamiento alcanza un valor mínimo alrededor de  $\zeta = 0.76$  (para el criterio del 2%) o de  $\zeta = 0.68$  (para el criterio del 5%), y después aumenta casi linealmente para valores grandes de  $\zeta$ . Las discontinuidades en las curvas de la Figura 5-11 surgen debido a que un cambio infinitesimal en el valor de  $\zeta$  puede provocar un cambio finito en el tiempo de asentamiento.

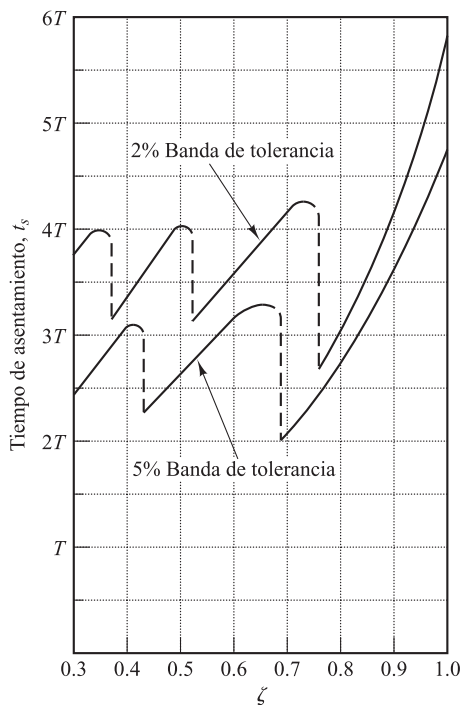
Por conveniencia, cuando se comparan las respuestas de los sistemas, por lo general se define el tiempo de asentamiento  $t_s$  como

$$t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (\text{criterio del } 2\%) \quad (5-22)$$

o bien

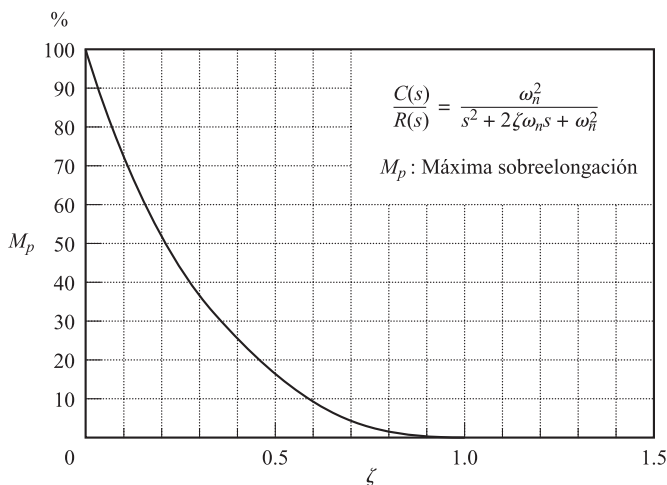
$$t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (\text{criterio del } 5\%) \quad (5-23)$$

Obsérvese que el tiempo de asentamiento es inversamente proporcional al producto del factor de amortiguamiento relativo y la frecuencia natural no amortiguada del sistema. Como el valor de  $\zeta$  se determina, por lo general, a partir de los requerimientos de la sobreelongación máxima permisible, el tiempo de asentamiento se determina principalmente mediante la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$ . Esto significa que la duración del período transitorio puede variarse, sin modificar la sobreelongación máxima, ajustando la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$ .



**Figura 5-11.** Tiempo de asentamiento  $t_s$  frente a las curvas  $\zeta$ .

A partir del análisis anterior, es evidente que, para una respuesta rápida,  $\omega_n$  debe ser grande. Para limitar la sobreelongación máxima  $M_p$  y para reducir el tiempo de asentamiento, el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  no debe ser demasiado pequeño. La relación entre la sobreelongación en porcentaje  $M_p$  y el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  se presenta en la Figura 5-12. Obsérvese que, si el factor de amortiguamiento relativo está entre 0.4 y 0.7, el porcentaje de sobreelongación máxima para la respuesta escalón está entre 25 y 4%.



**Figura 5-12.**  $M_p$  frente a la curva  $\zeta$ .



Es importante darse cuenta de que las ecuaciones que se han obtenido para el tiempo de subida, tiempo de pico, sobreelongación máxima y tiempo de asentamiento son válidas únicamente para el sistema de segundo orden estándar definido por la Ecuación (5-10). Si el sistema de segundo orden contiene uno o dos ceros, la forma de la curva de respuesta a un escalón unitario será bastante diferente de las que se muestran en la Figura 5-7.

**EJEMPLO 5-1** Considere el sistema de la Figura 5-6, en el que  $\zeta = 0.6$  y  $\omega_n = 5$  rad/seg. Se va a obtener el tiempo de subida  $t_s$ , el tiempo pico  $t_p$ , la sobreelongación máxima  $M_p$  y el tiempo de asentamiento  $t_s$  cuando el sistema está sujeto a una entrada escalón unitario.

A partir de los valores dados de  $\zeta$  y  $\omega_n$  se obtiene  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 4$  y  $\sigma = \zeta \omega_n = 3$ .

*Tiempo de subida  $t_s$ :* el tiempo de subida es

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{3.14 - \beta}{4}$$

donde  $\beta$  se obtiene mediante

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\sigma} = \tan^{-1} \frac{4}{3} = 0.93 \text{ rad}$$

Por lo tanto, el tiempo de subida  $t_s$  es

$$t_r = \frac{3.14 - 0.93}{4} = 0.55 \text{ seg}$$

*Tiempo pico  $t_p$ :* el tiempo pico es

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3.14}{4} = 0.785 \text{ seg}$$

*Sobreelongación máxima  $M_p$ :* la sobreelongación máxima es

$$M_p = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(3/4) \times 3.14} = 0.095$$

Por tanto, el porcentaje de sobreelongación máxima es 9.5%.

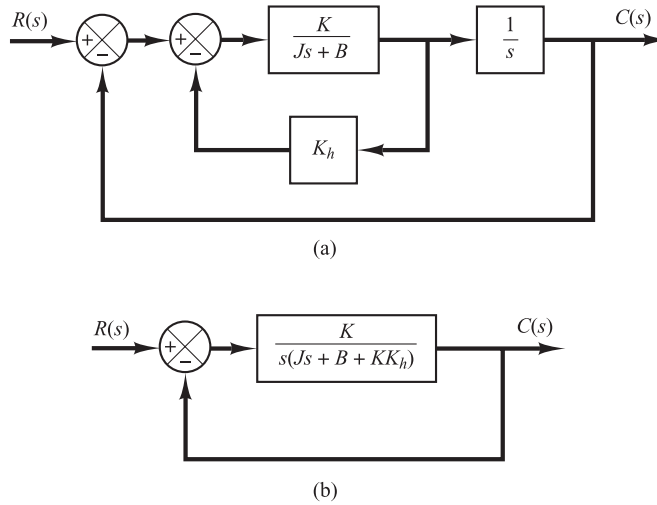
*Tiempo de asentamiento  $t_s$ :* para el criterio del 2%, el tiempo de asentamiento es

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{3} = 1.33 \text{ seg}$$

Para el criterio del 5%,

$$t_s = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{3} = 1 \text{ seg}$$

**Servosistema con realimentación de velocidad.** La derivada de la señal de salida se usa para mejorar el comportamiento del sistema. Al obtener la derivada de la señal de posición de salida es conveniente utilizar un tacómetro en lugar de diferenciar físicamente la señal de salida. (Obsérvese que la diferenciación amplifica los efectos del ruido. De hecho, si existen ruidos discontinuos, la diferenciación amplifica estos más que la señal útil. Por ejemplo, la salida de un potenciómetro es una señal de voltaje discontinua porque, conforme el cursor del potenciómetro se mueve sobre la bobina, se inducen voltajes en las vueltas de intercambio y, por tanto, se generan transitorios. Por tal razón, a la salida del potenciómetro no debe seguirle un elemento de diferenciación.)



**Figura 5-13.** (a) Diagrama de bloques de un servosistema; (b) diagrama de bloques simplificado.

El tacómetro, generador especial de cc, se utiliza frecuentemente para medir la velocidad sin un proceso de diferenciación. La salida de un tacómetro es proporcional a la velocidad angular del motor.

Considérese el sistema de seguimiento de la Figura 5-13(a). En este aparato se realimenta la señal de velocidad a la entrada, junto con la señal de posición, para producir una señal de error. En cualquier sistema de seguimiento, tal señal de velocidad se genera con facilidad mediante un tacómetro. El diagrama de bloques de la Figura 5-13(a) se simplifica, tal como se aprecia en la Figura 5-13(b), y se obtiene

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + (B + KK_h)s + K} \quad (5-24)$$

Comparando la Ecuación (5-24) con la Ecuación (5-9), se observa que la realimentación de velocidad tiene el efecto de aumentar el amortiguamiento. El factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  se convierte en

$$\zeta = \frac{B + KK_h}{2\sqrt{KJ}} \quad (5-25)$$

La frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n = \sqrt{K/J}$  no se ve afectada por la realimentación de velocidad. Considerando que la sobreelongación máxima para una entrada escalón unitario se controla manejando el valor del factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$ , se reduce la sobreelongación máxima ajustando la constante de realimentación de velocidad  $K_h$  para que  $\zeta$  esté entre 0.4 y 0.7.

Recuérdese que la realimentación de velocidad tiene el efecto de aumentar el factor de amortiguamiento relativo sin afectar a la frecuencia natural no amortiguada del sistema.

**EJEMPLO 5-2** Para el sistema de la Figura 5-13(a), determine los valores de la ganancia  $K$  y la constante de realimentación de velocidad  $K_h$  para que la sobreelongación máxima en la respuesta escalón unitario sea 0.2 y el tiempo pico sea 1 seg. Con estos valores de  $K$  y  $K_h$  obtenga el tiempo de subida y el tiempo de asentamiento. Suponga que  $J = 1 \text{ kg-m}^2$  y que  $B = 1 \text{ N-m/rad/seg}$ .

*Determinación de los valores de  $K$  y  $K_h$ :* La sobreelongación máxima  $M_p$  se obtiene mediante la Ecuación (5-21) como

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

Este valor debe ser 0.2. Por tanto,

$$e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} = 0.2$$

o bien

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.61$$

lo cual lleva a

$$\zeta = 0.456$$

El tiempo pico  $t_p$  se especifica como 1 seg; Por tanto, a partir de la Ecuación (5-20),

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1$$

o bien

$$\omega_d = 3.14$$

Como  $\zeta$  es 0.456,  $\omega_n$  es

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 3.53$$

Como la frecuencia natural  $\omega_n$  es igual a  $\sqrt{K/J}$ ,

$$K = J\omega_n^2 = \omega_n^2 = 12.5 \text{ N-m}$$

Por tanto,  $K_h$  a partir de la Ecuación (5-25),

$$K_h = \frac{2\sqrt{KJ\zeta} - B}{K} = \frac{2\sqrt{K\zeta} - 1}{K} = 0.178 \text{ seg}$$

*Tiempo de levantamiento  $t_r$ :* A partir de la Ecuación (5-19), el tiempo de levantamiento  $t_r$  es

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

donde

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\sigma} = \tan^{-1} 1.95 = 1.10$$

Por tanto,  $t_r$  es

$$t_r = 0.65 \text{ seg}$$

*Tiempo de asentamiento  $t_s$ :* Para el criterio del 2%,

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 2.48 \text{ seg}$$

Para el criterio del 5%,

$$t_s = \frac{3}{\sigma} = 1.86 \text{ seg}$$

**Respuesta impulso de sistemas de segundo orden.** Para una entrada impulso unitario  $r(t)$ , la transformada de Laplace correspondiente es la unidad, o  $R(s) = 1$ . La respuesta impulso unitario  $C(s)$  del sistema de segundo orden de la Figura 5-6 es

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

La transformada inversa de Laplace de esta ecuación da la solución en el tiempo para la respuesta  $c(t)$ , del modo siguiente:

Para  $0 \leq \zeta < 1$ ,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5-26)$$

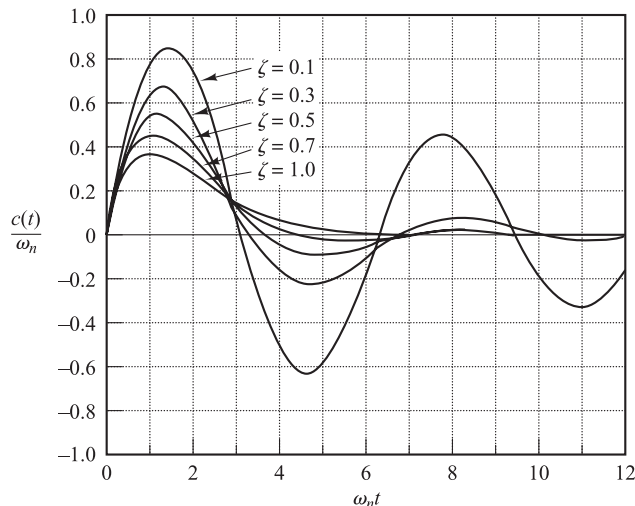
Para  $\zeta = 1$ ,

$$c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5-27)$$

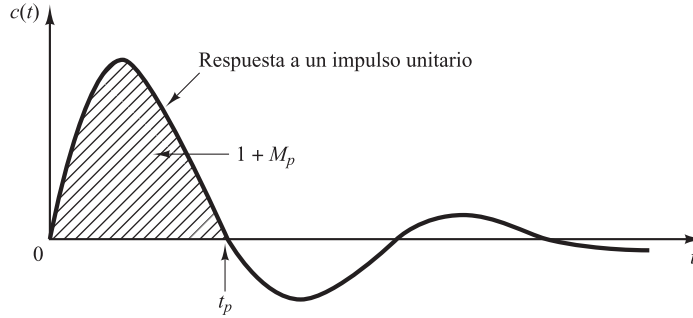
Para  $\zeta > 1$ ,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5-28)$$

Obsérvese que, sin tomar la transformada inversa de Laplace de  $C(s)$ , también se obtiene el tiempo de respuesta  $c(t)$  diferenciando la respuesta escalón unitario correspondiente, ya que la función impulso unitario es la derivada con respecto al tiempo de la función de escalón unitario. En la Figura 5-14 aparece una familia de curvas de respuesta impulso unitario obtenida mediante las Ecuaciones (5-26) y (5-27) con diversos valores de  $\zeta$ . Las curvas  $c(t)/\omega_n$  se dibujan frente a la variable adimensional  $\omega_n t$  y, por tanto, sólo son funciones de  $\zeta$ . Para los casos críticamente amortiguado y sobreamortiguado, la respuesta impulso unitario siempre es positiva o cero; es decir,  $c(t) \geq 0$ . Esto se aprecia en las Ecuaciones (5-27) y (5-28). Para el caso subamortiguado, la respuesta impulso unitario  $c(t)$  oscila alrededor de cero y toma valores tanto positivos como negativos.



**Figura 5-14.** Curvas de respuesta a impulso unitario del sistema mostrado en la Figura 5-6.



**Figura 5-15.** Curvas de respuesta a impulso unitario del sistema mostrado en la Figura 5-6.

A partir del análisis anterior, se concluye que si la respuesta impulso  $c(t)$  no cambia de signo, el sistema es críticamente amortiguado o sobreamortiguado, en cuyo caso la respuesta escalón correspondiente no se sobrepasa pero aumenta o disminuye en forma monótona y tiende a un valor constante.

La sobreelongación máxima para la respuesta impulso unitario del sistema subamortiguado se da en

$$t = \frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \text{donde } 0 < \zeta < 1 \quad (5-29)$$

[La Ecuación (5-29) se puede obtener igualando  $dc/dt$  a cero y resolviendo para  $t$ .] La sobreelongación máxima es

$$c(t)_{\text{máx}} = \omega_n \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right), \quad \text{donde } 0 < \zeta < 1 \quad (5-30)$$

[La Ecuación 5-30) se puede obtener sustituyendo la Ecuación (5-29) en la Ecuación (5-26).]

Como la respuesta impulso unitario es la derivada con respecto al tiempo de la función de respuesta escalón unitario, la sobreelongación máxima  $M_p$  para la respuesta escalón unitario se encuentra a partir de la respuesta impulso unitario correspondiente. Es decir, el área bajo la curva de respuesta impulso unitario desde  $t = 0$  hasta el tiempo del primer cero, tal como aparece en la Figura 5-15, es  $1 + M_p$ , donde  $M_p$  es la sobreelongación máxima (para la respuesta escalón unitario) obtenida mediante la Ecuación (5-21). El tiempo pico  $t_p$  (para la respuesta escalón unitario) obtenido mediante la Ecuación (5-20) corresponde al tiempo en que la respuesta impulso unitario cruza primero el eje de tiempo.

## 5-4 Sistemas de orden superior

En esta sección se presentará un análisis de la respuesta transitoria de los sistemas de orden superior en términos generales. Se verá que la respuesta de sistemas de orden superior es la suma de las respuestas de sistemas de primer orden y segundo orden.

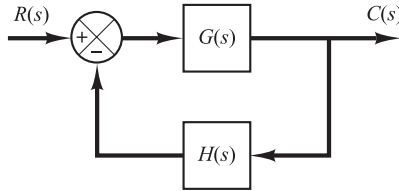


Figura 5-16. Sistema de control.

**Respuesta transitoria de los sistemas de orden superior.** Considérese el sistema de la Figura 5-16. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (5-31)$$

En general,  $G(s)$  y  $H(s)$  se obtienen como cocientes de polinomios en  $s$ , o bien

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \quad \text{y} \quad H(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

donde  $p(s)$ ,  $q(s)$ ,  $n(s)$  y  $d(s)$  son polinomios en  $s$ . A continuación, la función de transferencia en lazo cerrado obtenida con la Ecuación (5-31) se escribe como

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{p(s)d(s)}{q(s)d(s) + p(s)n(s)} \\ &= \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (m \leq n) \end{aligned}$$

La respuesta transitoria de este sistema a cualquier entrada determinada se obtiene mediante una simulación por computador (véase Sección 5-5). Si se pretende una expresión analítica para la respuesta transitoria, es preciso factorizar el polinomio del denominador. [Puede usarse MATLAB para encontrar las raíces del polinomio del denominador. Utilícese la orden `roots(den)`.] Una vez factorizados el numerador y el denominador,  $C(s)/R(s)$  se escribe como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \quad (5-32)$$

A continuación se examina el comportamiento de respuesta de este sistema para una entrada escalón unitario. Considérese primero el caso en el que todos los polos en lazo cerrado son reales y distintos. Para una entrada escalón unitario, la Ecuación (5-32) se escribe

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + p_i} \quad (5-33)$$

donde  $a_i$  es el residuo del polo en  $s = -p_i$ . (Si el sistema contiene polos múltiples, entonces  $C(s)$  tendrá términos de polos múltiples.) [El desarrollo en fracciones simples de  $C(s)$  dado por la Ecuación (5-33), se puede obtener fácilmente con MATLAB. Utilice la orden `residuez`.]

Si todos los polos en lazo cerrado se encuentran en el semiplano izquierdo del plano  $s$ , las magnitudes relativas de los residuos determinan la importancia relativa de las componentes en

la forma desarrollada de  $C(s)$ . Si hay un cero en lazo cerrado cerca de un polo en lazo cerrado, el residuo en este polo es pequeño y el coeficiente del término de respuesta transitoria que corresponde a este polo se vuelve pequeño. Un par polo-cero cercanos entre sí se cancelarán efectivamente uno al otro. Si un polo se localiza muy lejos del origen, su residuo puede ser pequeño. Los valores transitorios que corresponden a tal polo remoto son pequeños y duran un tiempo corto. Los términos en la forma desarrollada de  $C(s)$  que tienen residuos muy pequeños contribuyen poco a la respuesta transitoria, por lo que pueden pasarse por alto. Si se hace esto, el sistema de orden superior se aproxima mediante uno de orden inferior. (Tal aproximación nos permite con frecuencia estimar las características de respuesta de un sistema de orden superior a partir de las de uno simplificado.)

A continuación, considérese el caso en el que los polos de  $C(s)$  están formados por polos reales y pares de polos complejos conjugados. Un par de polos complejos conjugados produce un término de segundo orden en  $s$ . Como la forma factorizada de la ecuación característica de orden superior está formada por términos de primer y segundo orden, la Ecuación (5-3) se vuelve a escribir como

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k(s + \zeta_k \omega_k) + c_k \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2} \quad (q + 2r = n)$$

donde se supone que los polos en lazo cerrado son distintos. [Si los polos en lazo cerrado contienen polos múltiples,  $C(s)$  debe contener términos de polos múltiples]. A partir de esta última ecuación, se observa que la respuesta de un sistema de orden superior está compuesta de varios términos que contienen las funciones simples encontradas en las respuestas de los sistemas de primer y segundo orden. Por tanto, la respuesta escalón unitario  $c(t)$ , la transformada inversa de Laplace de  $C(s)$ , es

$$c(t) = a + \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t + \sum_{k=1}^r c_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5-34)$$

En este caso, la curva de respuesta de un sistema estable de orden superior es la suma de un número de curvas exponenciales y curvas sinusoidales amortiguadas.

Si todos los polos en lazo cerrado se encuentran en el semiplano izquierdo del plano  $s$ , los términos exponenciales y los términos sinusoidales amortiguados de la Ecuación (5-34) se aproximarán a cero, conforme el tiempo  $t$  aumente. Por tanto, la salida en estado estacionario es  $c(\infty) = a$ .

Supóngase que el sistema que se considera es estable. Por tanto, los polos en lazo cerrado que se localizan lejos del eje  $j\omega$  tienen partes reales grandes y negativas. Los términos exponenciales que corresponden a estos polos llegan a cero con mucha rapidez. (Obsérvese que la distancia horizontal del polo en lazo cerrado al eje  $j\omega$  determina el tiempo de asentamiento de los transitorios producidos por tal polo. Cuanto más pequeña es la distancia, más prolongado es el tiempo de asentamiento.)

Recuérdese que los polos en lazo cerrado determinan el tipo de respuesta transitoria, mientras que los ceros en lazo cerrado determinan principalmente la forma de la respuesta transitoria. Como se vio antes, los polos de la entrada  $R(s)$  producen los términos de la respuesta en estado estacionario en la solución, mientras que los polos de  $C(s)/R(s)$  se introducen en los términos exponenciales de la respuesta transitoria y/o en los términos sinusoidales amortiguados de la res-

puesta transitoria. Los ceros de  $C(s)/R(s)$  no afectan a los exponentes en los términos exponenciales, pero afectan a las magnitudes y a los signos de los residuos.

**Polos dominantes en lazo cerrado.** La dominancia relativa de los polos en lazo cerrado se determina mediante el cociente de las partes reales de los polos en lazo cerrado, al igual que mediante las magnitudes relativas de los residuos evaluados en los polos en lazo cerrado. Las magnitudes de los residuos dependen tanto de los polos en lazo cerrado como de los ceros.

Si los cocientes de las partes reales son superiores a 5 y no hay ceros cerca, los polos en lazo cerrado más cercanos al eje  $j\omega$  dominarán el comportamiento de la respuesta transitoria, debido a que corresponden a los términos de la respuesta transitoria que se disminuyen lentamente. Los polos en lazo cerrado que tienen efectos dominantes sobre el comportamiento de la respuesta transitoria se denominan *polos dominantes en lazo cerrado*. Con mucha frecuencia, los polos dominantes en lazo cerrado aparecen en forma de un par complejo conjugado. Los polos dominantes en lazo cerrado son los más importantes entre todos los polos en lazo cerrado.

Es frecuente que la ganancia de un sistema de orden superior se ajuste para que exista un par de polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado. La presencia de tales polos en un sistema estable reduce el efecto de las no linealidades, tales como la zona muerta, el huelgo (*backlash*) y la fricción de Coulomb.

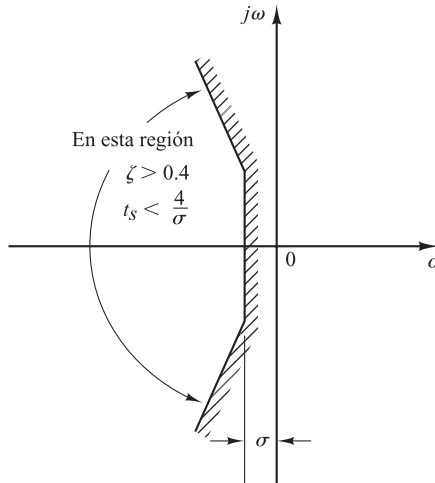
**Análisis de estabilidad en el plano complejo.** La estabilidad de un sistema lineal en lazo cerrado se determina a partir de la ubicación de los polos en lazo cerrado en el plano  $s$ . Si alguno de estos polos se encuentra en el semiplano derecho del plano  $s$ , entonces conforme aumenta el tiempo producirá el modo dominante, y la respuesta transitoria aumentará de forma monótona u oscilará con una amplitud creciente. Esto representa un sistema inestable. Para tal sistema, tan pronto como se conecta la alimentación, la salida aumenta con el tiempo. Si no ocurre una saturación en el sistema y no se incluye una detención mecánica, el sistema puede terminar por dañarse y fallar, ya que la respuesta de un sistema físico real no puede aumentar indefinidamente. Por ende, en el sistema de control lineal normal no se permiten los polos en lazo cerrado en el semiplano derecho del plano  $s$ . Si todos los polos en lazo cerrado se encuentran a la izquierda del eje  $j\omega$ , cualquier respuesta transitoria termina por alcanzar el equilibrio. Esto representa un sistema estable.

Que un sistema lineal sea estable o inestable es una propiedad del sistema mismo y no depende de la entrada ni de la función de excitación del sistema. Los polos de la entrada, o de la función de excitación, no afectan a la propiedad de estabilidad del sistema, sino sólo contribuyen a los términos de respuesta en estado estacionario en la solución. Por tanto, el problema de estabilidad absoluta se soluciona con facilidad al no elegir polos en lazo cerrado en el semiplano derecho del plano  $s$ , incluyendo el eje  $j\omega$ . (Matemáticamente, los polos en lazo cerrado sobre el eje  $j\omega$  producirán oscilaciones, cuya amplitud no se reduce ni crece con el tiempo. Sin embargo, en los casos prácticos en los que hay ruido, la amplitud de las oscilaciones aumenta a una velocidad determinada por el nivel de la potencia del ruido. Por tanto, un sistema de control no debe tener polos en lazo cerrado en el eje  $j\omega$ .)

Obsérvese que el solo hecho de que todos los polos en lazo cerrado se encuentren en el semiplano izquierdo del plano  $s$  no garantiza características satisfactorias de respuesta transitoria. Si los polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado se encuentran cerca del eje  $j\omega$ , la respuesta transitoria presentará oscilaciones excesivas o será muy lenta. Por esta razón, a fin de garantizar características de respuesta transitoria rápidas y bien amortiguadas, es necesario que los polos en lazo cerrado del sistema se encuentren en una región determinada del plano complejo, como la región delimitada por el área sombreada de la Figura 5-17.

Como la estabilidad relativa y el comportamiento transitorio de un sistema de control en lazo cerrado se relacionan directamente con el patrón de polos y ceros en lazo cerrado en el





**Figura 5-17.** Región del plano complejo que satisface las condiciones  $\zeta > 0.4$  y  $t_s < 4/\sigma$ .

plano  $s$ , con frecuencia es necesario ajustar uno o más parámetros para obtener los patrones convenientes. Los efectos de los parámetros que varían sobre los polos de un sistema en lazo cerrado se analizarán con detalle en el Capítulo 6.

## 5-5 Análisis de la respuesta transitoria con MATLAB

**Introducción.** El procedimiento práctico para dibujar las curvas de respuesta temporal de sistemas de orden mayor que segundo es mediante simulación con computador. En esta sección se presenta el enfoque computacional para el análisis de la respuesta transitoria con MATLAB. En particular se discute la respuesta escalón, impulso, rampa y las respuestas a otras entradas simples.

**Representación de sistemas lineales en MATLAB.** La función de transferencia de un sistema se representa mediante dos arrays de números. Considérese el sistema

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s + 25}{s^2 + 4s + 25} \quad (5-35)$$

Este sistema se representa como dos arrays, cada uno de los cuales contiene los coeficientes de los polinomios en potencias decrecientes de  $s$  del modo siguiente:

```
num = [ 2  25 ]
den = [ 1  4  25 ]
```

Una representación alternativa es

```
num = [ 0  2  25 ]
den = [ 1  4  25 ]
```

Esta expresión se completa añadiendo un cero. Obsérvese que si se añaden los ceros, la dimensión de los vectores «num» y «den» es la misma. Una ventaja de añadir los ceros es que los vectores «num» y «den» se pueden sumar directamente. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\text{num} + \text{den} &= [0 \quad 2 \quad 25] + [1 \quad 4 \quad 25] \\ &= [1 \quad 6 \quad 50]\end{aligned}$$

Si se conocen num y den (el numerador y denominador de la función de transferencia en lazo cerrado), instrucciones del tipo

`step(num,den),      step(num,den,t)`

generarán gráficas de respuestas escalón unitario. (En el comando `step`, `t` es el tiempo especificado por el usuario.)

**Descripción en MATLAB de un sistema estándar de segundo orden.** Como ya se dijo, el sistema de segundo orden

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5-40)$$

se denomina sistema de segundo orden estándar. Dadas  $\omega_n$  y  $\zeta$ , el comando

`printsys(num,den)`      o      `printsys(num,den,s)`

imprime num/den como un cociente de polinomios en  $s$ .

Considérese, por ejemplo, el caso en el que  $\omega_n = 5$  rad/seg y  $\zeta = 0.4$ . El Programa MATLAB 5-3 genera el sistema estándar de segundo orden donde  $\omega_n = 5$  rad/seg y  $\zeta = 0.4$ .

**MATLAB Programa 5-3**

```
wn = 5;
damping_ratio = 0.4;
[num0,den] = ord2(wn,damping_ratio);
num = 5^2*num0;
printsys(num,den,'s')
num/den =
```

$$\frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

**Obtención de la respuesta escalón unitario de un sistema dado como función de transferencia.** Considérese la respuesta escalón unitario del sistema dado por

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

El Programa MATLAB 5-4 produce la gráfica de la respuesta escalón unitario de este sistema. En la Figura 5-20 se muestra un dibujo de la curva respuesta escalón unitario.

Obsérvese en la Figura 5-20 (y en muchas otras) que las etiquetas de los ejes  $x$  e  $y$  se determinan de forma automática. Si se quiere etiquetar el eje  $x$  y el eje  $y$  de forma diferente, se tiene que modificar el comando `step`. Por ejemplo, si se quiere que en el eje  $x$  se etiquete como 't Seg' y el eje  $y$  como 'Entrada y Salida', se utiliza el comando respuesta escalón con los argumentos en el lado izquierdo siguientes

$$c = \text{step}(\text{num}, \text{den}, t)$$

o, de forma más general,

$$[y, x, t] = \text{step}(\text{num}, \text{den}, t)$$

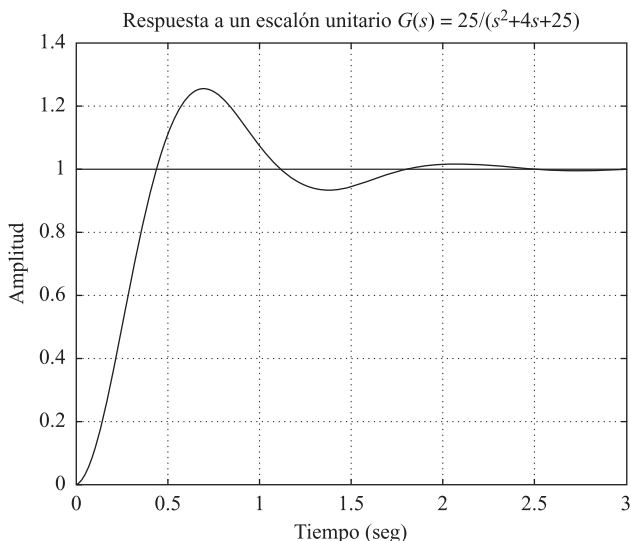
y utilizar la orden `plot(t, y)`. Véase, por ejemplo, el Programa MATLAB 5-5 y la Figura 5-21.

#### MATLAB Programa 5-4

```
% ----- Respuesta a un escalón unitario -----
% ***** Introduzca el numerador y el denominador de la función
% de transferencia *****
num = [25];
den = [1 4 25];

% ***** Introduzca la siguiente orden de respuesta escalón *****
step(num, den)

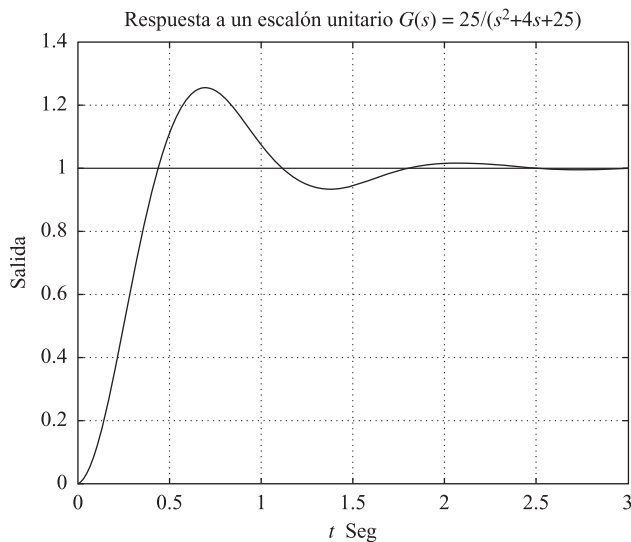
% ***** Introduzca grid y el título de la gráfica *****
grid
title('Respuesta a un escalón unitario de  $G(s) = 25/(s^2 + 4s + 25)$ ')
```



**Figura 5-20.** Curva de respuesta a escalón unitario.

**MATLAB Programa 5-5**

```
% ----- Respuesta a un escalón unitario -----
num = [25];
den = [1 4 25];
t = 0:0.01:3;
[y,x,t] = step(num,den,t)
Plot(t,y)
grid
title('Respuesta a un escalón unitario de  $G(s) = 25/(s^2 + 4s + 25)$ ')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salida')
```



**Figura 5-21.** Curva de respuesta a escalón unitario.

**Obtención de gráficas de respuesta escalón unitario en tres dimensiones utilizando MATLAB.** MATLAB permite dibujar gráficas en tres dimensiones fácilmente. Los comandos para obtener dibujos en tres dimensiones son «mesh» y «surf». La diferencia entre las gráficas dibujadas con «mesh» y «surf» es que en la primera sólo se dibujan las líneas y en la segunda los espacios entre las líneas se colorean. En este texto se utiliza únicamente el comando «mesh».

**EJEMPLO 5-4** Considere el sistema en lazo cerrado definido por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

(La frecuencia natural subamortiguada  $\omega_n$  está normalizada a 1.) Dibuje las curvas de respuesta escalón unitario  $c(t)$  cuando  $\zeta$  tiene los siguientes valores

$$\zeta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$$

También dibuje una gráfica en tres dimensiones.

El Programa 5-6 es un programa ilustrativo en MATLAB para dibujar un diagrama en tres dimensiones para las curvas de respuesta escalón unitario de este sistema de segundo orden.

En las Figuras 5-22(a) y (b) se muestran las curvas resultantes. Observe que se ha utilizado el comando `mesh(t,zeta,y')` para obtener el dibujo en tres dimensiones. El comando `mesh(y')` producirá el mismo resultado. [Observe que el comando `mesh(t,zeta,y')` o `mesh(y')` producirá el mismo dibujo en tres dimensiones que el de la Figura 5-22(b), excepto que el eje  $x$  y el eje  $y$  están intercambiados. Véase el Problema A-5-15.]

Cuando se requiere resolver un problema utilizando MATLAB y la solución incluye cálculos repetitivos, se puede simplificar el programa en MATLAB de diferentes maneras. Una forma usual de simplificar los cálculos consiste en utilizar «bucles for». El Programa 5-6 en MATLAB utiliza estos «bucles for». En este libro muchos programas en MATLAB utilizan «bucles for» para resolver una variedad de problemas. Se aconseja al lector estudiar esos programas en detalle para familiarizarse con ellos.

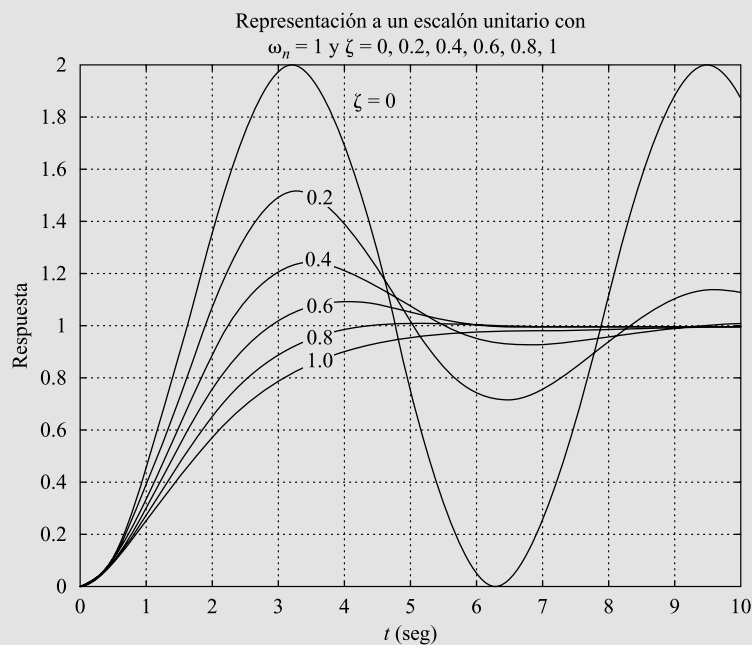
#### MATLAB Programa 5-6

```
% ----- Gráficas bidimensional y tridimensional de la respuesta
% escalón de un sistema de segundo orden estandar con  $\omega_n = 1$ 
% y zeta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, y 1. -----
t = 0:0.2:10;
zeta = [0 0.2 0.4 0.6 0.8 1];
    for n = 1:6;
        num = [1];
        den = [1 2*zeta(n) 1];
        [y(1:51,n),x,t] = step(num,den,t);
    end
% Para representar un diagrama bidimensional, introduzca la orden
% plot(t,y).

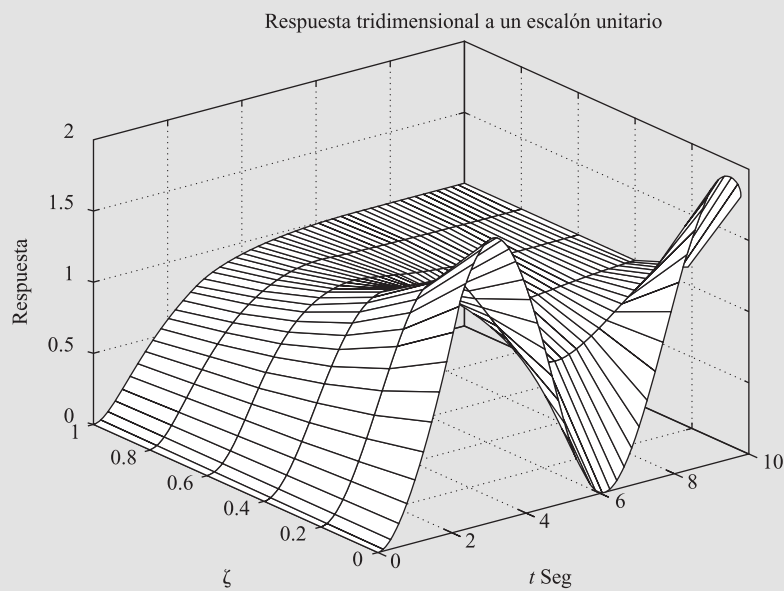
plot(t,y)
grid
title('Respuesta a un escalón unitario con  $\omega_n = 1$ 
y \zeta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1')
xlabel('t (seg)')
ylabel('Respuesta')
text(4.1,1.86,'\zeta = 0')
text(3.5,1.5,'0.2')
text(3.5,1.24,'0.4')
text(3.5,1.08,'0.6')
text(3.5,0.95,'0.8')
text(3.5,0.86,'1.0')

% Para representar un diagrama tridimensional, introduzca la orden
mesh(t,zeta,y').

mesh(t,zeta,y')
title('Respuesta tridimensional a un escalón unitario')
xlabel('t Seg')
ylabel('\zeta')
zlabel('Respuesta')
```



(a)



(b)

**Figura 5-22.** (a) Gráficas bidimensionales de las curvas de respuesta a escalón unitario para  $\zeta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  y  $1.0$ ; (b) gráficas tridimensionales de las curvas de respuesta a escalón unitario.

**Obtención del tiempo de subida, tiempo de pico, máxima sobreelongación y tiempo de asentamiento utilizando MATLAB.** MATLAB se puede utilizar de forma conveniente para obtener el tiempo de subida, el tiempo de pico, la máxima sobreelongación y el tiempo de asentamiento. Considérese el sistema definido por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$

Con el Programa en MATLAB 5-7 se obtiene el tiempo de subida, el tiempo de pico, la máxima sobreelongación y el tiempo de asentamiento. En la Figura 5-23 se presenta una curva de respuesta escalón unitario para este sistema, para verificar el resultado obtenido con el Programa MATLAB 5-7. Obsérvese que este programa se puede aplicar a sistemas de orden más alto (véase el Problema A-5-10).

#### MATLAB Programa 5-7

```
% ----- Este es un programa MATLAB para encontrar el tiempo de subida,
% tiempo de pico, sobreelongación máxima, y tiempo de asentamiento del
% sistema de segundo orden y sistemas de orden superior -----
% ----- En este ejemplo se supone que zeta = 0.6 y wn = 5 -----

num = [25];
den = [1 6 25];
t = 0:0.005:5;
[y,x,t] = step(num,den,t);
r = 1; while y(r) < 1.0001; r = r + 1; end;
tiempo_subida = (r - 1)*0.005
tiempo_subida =
    0.5550

[ymax,tp] = max(y);
tiempo_pico = (tp - 1)*0.005
tiempo_pico =
    0.7850

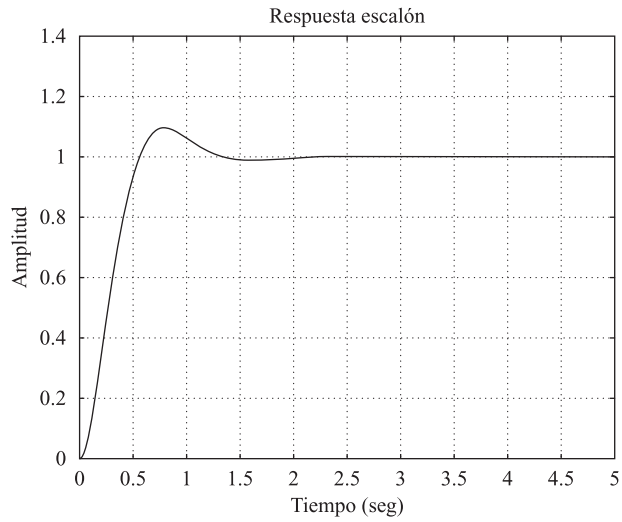
sobreelongación_max = ymax-1
sobreelongación_max =
    0.0948
s = 1001; while y(s) > 0.98 & y(s) < 1.02; s = s - 1; end;
tiempo_asentamiento = (s - 1)*0.005
tiempo_asentamiento =
    1.1850
```

**Respuesta impulso.** La respuesta impulso unitario de un sistema de control se obtiene mediante alguno de los siguientes comandos de MATLAB:

```
impulse(num,den)
[y,x,t] = impulse(num,den)
[y,x,t] = impulse(num,den,t)
```

(5-41)





**Figura 5-23.** Curva de respuesta a escalón unitario.

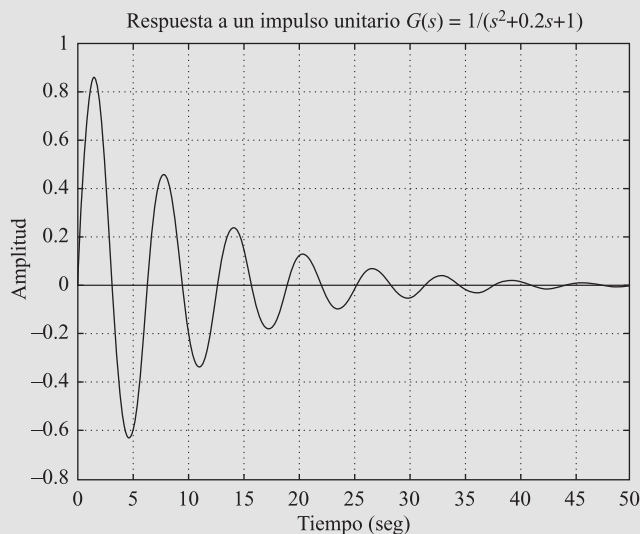
**EJEMPLO 5-5** Obtenga la respuesta impulso unitario del sistema siguiente:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$$

El Programa MATLAB 5-8 es una de las posibilidades. En la Figura 5-24 aparece la curva de respuesta resultante.

**MATLAB Programa 5-8**

```
num = [1];
den = [1 0.2 1];
impulse(num,den);
grid
title('Respuesta a un impulso unitario de  $G(s) = 1/(s^2 + 0.2s + 1)$ ')
```



**Figura 5-24.** Curva de respuesta a impulso unitario.

**Enfoque alternativo para obtener la respuesta impulso.** Obsérvese que, cuando las condiciones iniciales son cero, la respuesta impulso unitario de  $G(s)$  es igual a la respuesta escalón unitario de  $sG(s)$ .

Considérese la respuesta impulso unitario del sistema del Ejemplo 5-6. Como  $R(s) = 1$  para la entrada impulso unitario, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= C(s) = G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1} \\ &= \frac{s}{s^2 + 0.2s + 1} \cdot \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Por tanto, se convierte la respuesta impulso unitario de  $G(s)$  en la respuesta impulso unitario de  $sG(s)$ .

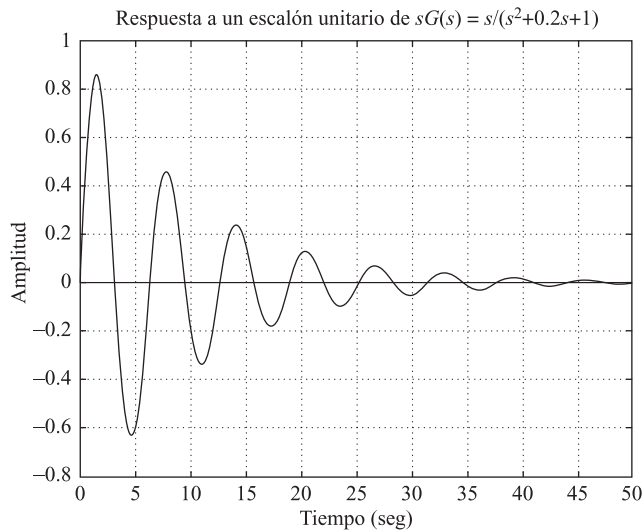
Si se introducen los siguientes num y den en MATLAB,

```
num = [0 1 0]
den = [1 0.2 1]
```

y se usa el comando de respuesta unitaria, como se incluye en el Programa MATLAB 5-9, se obtiene una gráfica de la respuesta impulso unitario del sistema que aparece en la Figura 5-25.

**MATLAB Programa 5-9**

```
num = [1 0];
den = [1 0.2 1];
step(num,den);
grid
title('Respuesta a un impulso unitario de  $sG(s) = s/(s^2 + 0.2s + 1)$ ')
```



**Figura 5-25.** Curva de respuesta a un impulso unitario obtenida como la respuesta a un escalón unitario de  $sG(s) = s/(s^2 + 0.2s + 1)$ .

**Respuesta rampa.** No hay un comando rampa de MATLAB. Por tanto, es necesario utilizar el comando step para obtener la respuesta rampa. Específicamente, para obtener la respuesta rampa del sistema con función de transferencia  $G(s)$ , divídase  $G(s)$  entre  $s$  y utilícese el comando de respuesta escalón. Por ejemplo, considérese el sistema en lazo cerrado

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s + 1}{s^2 + s + 1}$$

Para una entrada rampa unitaria,  $R(s) = 1/s^2$ . Por tanto,

$$C(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + s + 1} \frac{1}{s^2} = \frac{2s + 1}{(s^2 + s + 1)s} \frac{1}{s}$$

Para obtener la respuesta rampa unitaria de este sistema, introdúzcanse el numerador y el denominador siguientes en el Programa MATLAB:

```
num = [2 1];
den = [1 1 1 0];
```

y utilícese el comando de respuesta escalón. Véase el Programa MATLAB 5-10. En la Figura 5-26 aparece la gráfica obtenida mediante este programa.

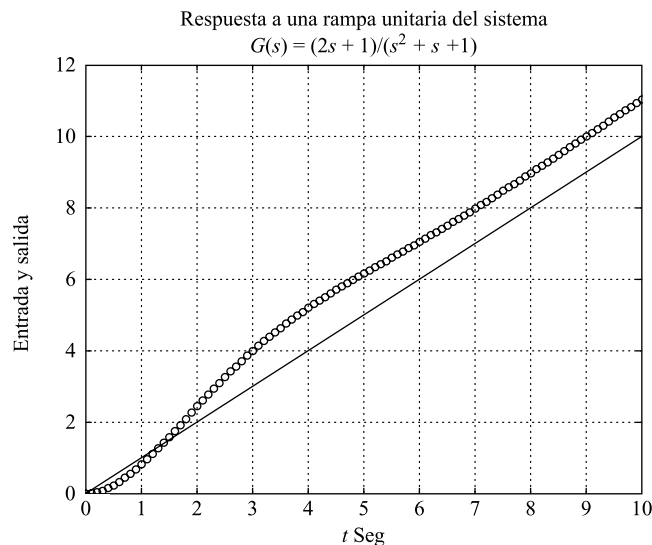
### MATLAB Programa 5-10

```
% ----- Respuesta a una rampa unitaria -----
% ***** La respuesta a una rampa unitaria se obtiene como
% la respuesta a un escalón unitario de  $G(s)/s$  *****
% ***** Introduzca el numerador y el denominador de  $G(s)/s$  *****
num = [2 1];
den = [1 1 1 0];

% ***** Especifique los puntos de tiempo de cálculo (como  $t = 0:0.1:7$ )
% e introduzca entonces la orden de respuesta a un escalón:
%  $c = \text{step}(\text{num}, \text{den}, t)$  *****
t = 0:0.1:10;
c = step(num, den, t);

% ***** Para representar la respuesta a una rampa, añada la entrada de
% referencia a la gráfica. La entrada de referencia es  $t$ . Añada como
% argumento de la orden plot lo siguiente:  $t, t, '-'$ . Así la orden plot
% queda como sigue:  $\text{plot}(t, c, 'o', t, t, '-')$  *****
plot(t, c, 'o', t, t, '-')

% ***** Añada grid, title, xlabel, e ylabel *****
grid
title('Respuesta a una rampa unitaria del sistema  $G(s) = (2s+1)/(s^2+s+1)$ ')
xlabel('t Seg')
ylabel('Entrada y Salida')
```



**Figura 5-26.** Curva de respuesta a una rampa unitaria.

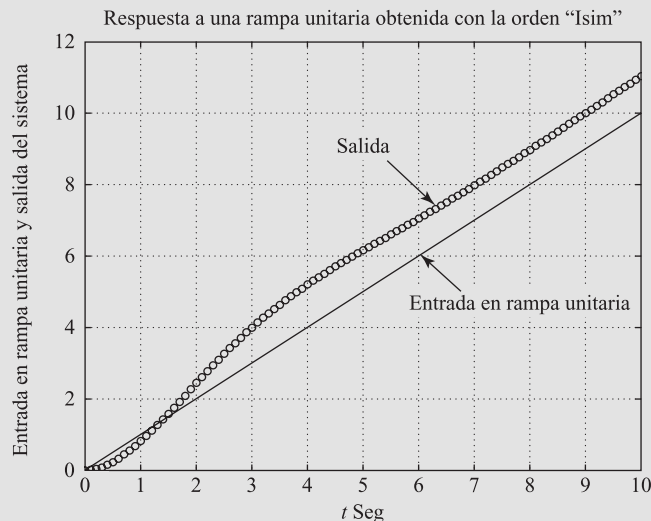
**EJEMPLO 5-6** Utilizando la orden `lsim`, obtenga la respuesta frente a una rampa unitaria del siguiente sistema:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Se puede escribir el Programa 5-12 en MATLAB en el computador para obtener la respuesta frente a la rampa unitaria. En la Figura 5-28 se muestra la gráfica que se obtiene.

#### MATLAB Programa 5-12

```
% ----- Respuesta a una rampa -----
num = [2 1];
den = [1 1 1];
t = 0:0.1:10;
r = t;
y = lsim(num,den,r,t);
plot(t,r,'-',t,y,'o')
grid
title('Respuesta a una rampa unitaria obtenida con la orden "lsim"')
xlabel('t Seg')
ylabel('Entrada en rampa unitaria y salida del sistema')
text(6.3,4.6, 'Entrada en rampa unitaria')
text(4.75,9.0, 'Salida')
```



**Figura 5-28.** Curva de respuesta a rampa unitaria.

**Respuesta a condiciones iniciales.** A continuación se presentan unos cuantos métodos para obtener la respuesta a condiciones iniciales. Los comandos que se pueden utilizar son «step» o «initial». En primer lugar se presenta un método para obtener la respuesta a condiciones iniciales utilizando un ejemplo simple. Después se analizará la respuesta a la condición inicial cuando el sistema está dado en la forma de espacio de estados. Por último, se presentará un comando «initial» para obtener la respuesta de un sistema descrito en el espacio de estados.

**EJEMPLO 5-8** Considere el sistema mecánico de la Figura 5-30, en el que  $m = 1$  kg,  $b = 3$  N-seg/m y  $k = 2$  N/m. Suponga que en  $t = 0$  la masa  $m$  se tira hacia abajo, de modo que  $x(0) = 0.1$  m y que  $\dot{x}(0) = 0.05$  m/seg. El desplazamiento  $\bar{x}(t)$  se mide a partir de la posición de equilibrio antes de que la masa se tire hacia abajo. Obtenga el movimiento de la masa sujeto a las condiciones iniciales. (Suponga que no existe una función de excitación externa.)

La ecuación del sistema es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

con la condición inicial  $x(0) = 0.1$  m y  $\dot{x}(0) = 0.05$  m/seg. ( $x$  está medido desde la posición de equilibrio.) La transformada de Laplace de esta ecuación del sistema produce

$$m[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + b[sX(s) - x(0)] + kX(s) = 0$$

o bien

$$(ms^2 + bs + k)X(s) = mx(0)s + m\dot{x}(0) + bx(0)$$

Despejando  $X(s)$  de esta última ecuación y sustituyendo los valores numéricos dados, se obtiene

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{ms(0)s + m\dot{x}(0) + bx(0)}{ms^2 + bs + k} \\ &= \frac{0.1s + 0.35}{s^2 + 3s + 2} \end{aligned}$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$X(s) = \frac{0.1s^2 + 0.35s}{s^2 + 3s + 2} \frac{1}{s}$$

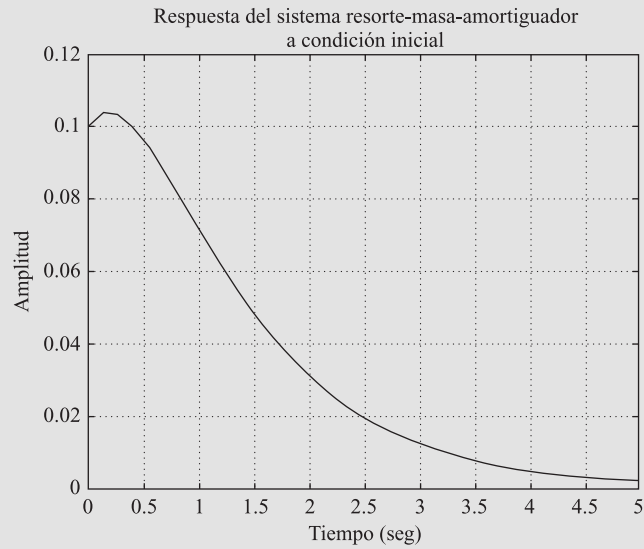
Por tanto, el movimiento de la masa se obtiene como la respuesta escalón unitario del sistema siguiente:

$$G(s) = \frac{0.1s^2 + 0.35s}{s^2 + 3s + 2}$$

El Programa MATLAB 5-14 proporciona una gráfica del movimiento de la masa. La gráfica aparece en la Figura 5-31.

#### MATLAB Programa 5-14

```
% ----- Respuesta a condición inicial -----
% ***** La respuesta del sistema a condición inicial se convierte a una respuesta
% en escalón unitario modificando el numerador del polinomio *****
% ***** Introduzca el numerador y el denominador de la función
% de transferencia G(s) *****
num = [0.1 0.35 0];
den = [1 3 2];
% ***** Introduzca la siguiente orden de respuesta a un salto *****
step(num,den)
% ***** Introduzca grid y title en la gráfica *****
grid
title('Respuesta del sistema de resorte-masa-amortiguador a condición inicial')
```



**Figura 5-31.** Respuesta del sistema mecánico considerado en el Ejemplo 5-8.



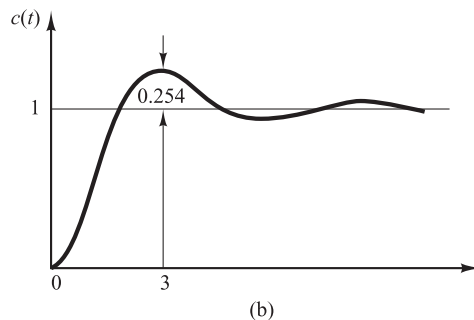
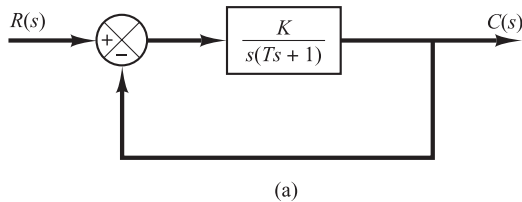
**A-5-3.** Cuando el sistema de la Figura 5-52(a) está sujeto a una entrada escalón unitario, la salida del sistema responde como se aprecia en la Figura 5-52(b). Determine los valores de  $K$  y  $T$  a partir de la curva de respuesta.

**Solución.** La sobreelongación máxima de 25.4% corresponde  $\zeta = 0.4$ . A partir de la curva de respuesta, se tiene que

$$t_p = 3$$

En consecuencia,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - 0.4^2}} = 3$$



**Figura 5-52.** (a) Sistema en lazo cerrado; (b) curva de respuesta a escalón unitario.

De aquí se deduce que

$$\omega_n = 1.14$$

A partir del diagrama de bloques, se tiene que

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s + K}$$

de donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}$$

Por tanto, los valores de  $T$  y  $K$  se determinan como

$$T = \frac{1}{2\zeta\omega_n} = \frac{1}{2 \times 0.4 \times 1.14} = 1.09$$

$$K = \omega_n^2 T = 1.14^2 \times 1.09 = 1.42$$

- A-5-4.** Determine los valores de  $K$  y  $k$  del sistema en lazo cerrado de la Figura 5-53 para que la sobreelongación máxima de la respuesta escalón unitario sea del 25% y el tiempo pico sea de 2 seg. Suponga que  $J = 1 \text{ kg-m}^2$ .

**Solución.** La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Kks + K}$$

Sustituyendo  $J = 1 \text{ kg-m}^2$  en esta última ecuación se tiene que

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + Kks + K}$$

Observe que en este problema

$$\omega_n = \sqrt{K}, \quad 2\zeta\omega_n = Kk$$

La sobreelongación máxima  $M_p$  es

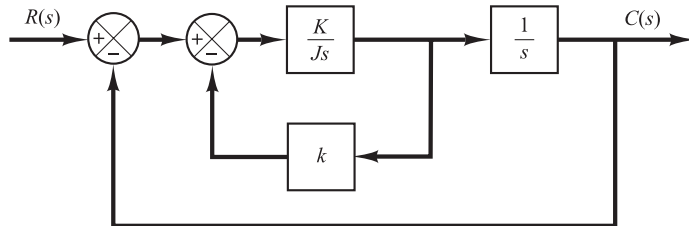
$$M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

que se especifica como 25%. Por tanto,

$$e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.25$$

de donde

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.386$$



**Figura 5-53.** Sistema en lazo cerrado.

o bien

$$\zeta = 0.404$$

El tiempo pico  $t_p$  se especifica como 2 seg. Y, por tanto,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 2$$

o bien

$$\omega_d = 1.57$$

En este caso la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  es

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{1.57}{\sqrt{1 - 0.404^2}} = 1.72$$

Por tanto, se obtiene

$$K = \omega_n^2 = 1.72^2 = 2.95 \text{ N-m}$$

$$k = \frac{2\zeta\omega_n}{K} = \frac{2 \times 0.404 \times 1.72}{2.95} = 0.471 \text{ seg}$$

**A-5-5.** La Figura 5-54(a) muestra un sistema vibratorio mecánico. Cuando se aplica al sistema una fuerza de 2 lb (entrada escalón), la masa oscila como se aprecia en la Figura 5-54(b). Determine  $m$ ,  $b$  y  $k$  del sistema a partir de esta curva de respuesta. El desplazamiento  $x$  se mide a partir de la posición de equilibrio.

**Solución.** La función de transferencia de este sistema es

$$\frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Como

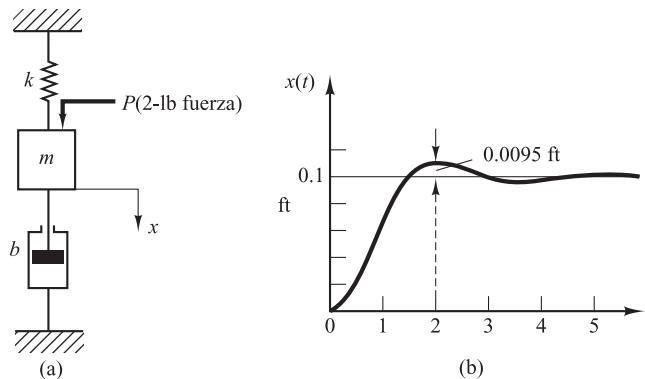
$$P(s) = \frac{2}{s}$$

se obtiene

$$X(s) = \frac{2}{s(ms^2 + bs + k)}$$

de lo cual se deduce que el valor en estado estacionario de  $x$  es

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \frac{2}{k} = 0.1 \text{ ft}$$



**Figura 5-54.** (a) Sistema vibratorio mecánico; (b) curva de respuesta a un escalón.

Por tanto,

$$k = 20 \text{ lb}_f/\text{ft}$$

Observe que  $M_p = 9.5\%$  corresponde a  $\zeta = 0.6$ . El tiempo pico  $t_p$  se obtiene mediante

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{0.8\omega_n}$$

La curva experimental muestra que  $t_p = 2$  seg. Por tanto,

$$\omega_n = \frac{3.14}{2 \times 0.8} = 1.96 \text{ rad/seg}$$

Como  $\omega_n^2 = k/m = 20/m$ , se obtiene

$$m = \frac{20}{\omega_n^2} = \frac{20}{1.96^2} = 5.2 \text{ slug} = 166 \text{ lb}$$

(Observe que  $1 \text{ slug} = 1 \text{ lb}_f\text{-seg}^2/\text{ft}$ .) Después  $b$  se determina a partir de

$$2\zeta\omega_n = \frac{b}{m}$$

o bien

$$b = 2\zeta\omega_n m = 2 \times 0.6 \times 1.96 \times 5.2 = 12.2 \text{ lb}_f/\text{ft/seg}$$

**A-5-6.** Considere la respuesta escalón unitario del sistema de segundo orden

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

La amplitud de la senoide exponencialmente amortiguada cambia como una serie geométrica. En el tiempo  $t = t_p = \pi/\omega_d$ , la amplitud es igual a  $e^{-(\sigma/\omega_d)\pi}$ . Después de una oscilación, o en  $t = t_p + 2\pi/\omega_d = 3\pi/\omega_d$ , la amplitud es igual a  $e^{-(\sigma/\omega_d)3\pi}$ ; después de otro ciclo de oscilación, la amplitud es  $e^{-(\sigma/\omega_d)5\pi}$ . El logaritmo de la razón de las sucesivas amplitudes se denomina *logaritmo decremental*. Determe el logaritmo decremental para este sistema de segundo orden. Describa un método para determinar experimentalmente la razón de amortiguamiento a partir de la razón con la que decae la oscilación.

**Solución.** Se define la amplitud de la oscilación de salida en  $t = t_i$  como  $x_i$ , donde  $t_i = t_p + (i - 1)T$  ( $T$  = periodo de oscilación). La razón de amplitud por un periodo de oscilación amortiguada es

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-(\sigma/\omega_d)\pi}}{e^{-(\sigma/\omega_d)3\pi}} = e^{2(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{2\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Por tanto, el logaritmo decremental  $\delta$  es

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Es una función exclusivamente del coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$ . Por tanto, el coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$  se puede determinar utilizando el logaritmo decremental.

En la determinación experimental del coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$  a partir de la razón con que decae la oscilación, se mide la amplitud  $x_1$  en  $t = t_p$  y la amplitud  $x_n$  en  $t = t_p + (n - 1)T$ . Observe que es necesario escoger  $n$  lo suficientemente grande para que la razón o bien  $x_1/x_n$  no sea cercano a la unidad. Entonces,

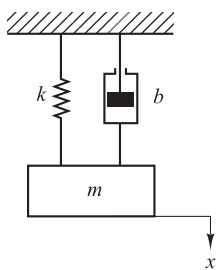
$$\frac{x_1}{x_n} = e^{(n-1)2\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

o bien

$$\ln \frac{x_1}{x_n} = (n-1) \frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

De ahí

$$\zeta = \frac{\frac{1}{n-1} \left( \ln \frac{x_1}{x_n} \right)}{\sqrt{4\pi^2 + \left[ \frac{1}{n-1} \left( \ln \frac{x_1}{x_n} \right) \right]^2}}$$



**Figura 5-55.** Sistema de masa-resorte-amortiguador.

**A-5-7.** En el sistema de la Figura 5-55, los valores numéricos de  $m$ ,  $b$  y  $k$  son  $m = 1$  kg,  $b = 2$  N-seg/m, y  $k = 100$  N/m. La masa se desplaza 0.05 m y se libera sin velocidad inicial. Encuentre la frecuencia observada en la vibración. Además, encuentre la amplitud cuatro ciclos después. El desplazamiento  $x$  se mide a partir de la posición de equilibrio.

**Solución.** La ecuación de movimiento para el sistema es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Sustituyendo los valores numéricos para  $m$ ,  $b$  y  $k$  en esta ecuación se tiene

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 100x = 0$$

donde las condiciones iniciales son  $x(0) = 0.05$  y  $\dot{x}(0) = 0$ . A partir de esta última ecuación, la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  y el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  resultan

$$\omega_n = 10, \quad \zeta = 0.1$$

La frecuencia observada en realidad en la vibración es la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$ .

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 10 \sqrt{1 - 0.01} = 9.95 \text{ rad/seg}$$

En el análisis actual,  $\dot{x}(0)$  se obtiene como cero. Por tanto, la solución  $x(t)$  se escribe como

$$x(t) = x(0)e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

de lo que se deduce que, en  $t = nT$ , donde  $T = 2\pi/\omega_d$ ,

$$x(nT) = x(0)e^{-\zeta\omega_n nT}$$

En consecuencia, la amplitud cuatro ciclos después se convierte en

$$\begin{aligned} x(4T) &= x(0)e^{-\zeta\omega_n 4T} = x(0)e^{-(0.1)(10)(4)(0.6315)} \\ &= 0.05e^{-2.526} = 0.05 \times 0.07998 = 0.004 \text{ m} \end{aligned}$$

**A-5-8.** Obtenga tanto la solución analítica como la computacional de la respuesta escalón unitario del sistema de orden alto siguiente:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3s^2 + 25s^2 + 72s + 80}{s^4 + 8s^3 + 40s^2 + 96s + 80}$$

[Obtenga la expansión en fracciones simples de  $C(s)$  con MATLAB cuando  $R(s)$  es una función escalón unitario.]

**Solución.** El Programa de MATLAB 5-18 proporciona la curva de respuesta escalón unitario que aparece en la Figura 5-56. También origina la expansión en fracciones simples de  $C(s)$  siguiente:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{3s^3 + 25s^2 + 72s + 80}{s^4 + 8s^3 + 40s^2 + 96s + 80} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{-0.2813 - j0.1719}{s + 2 - j4} + \frac{-0.2813 + j0.1719}{s + 2 + j4} \\ &\quad + \frac{-0.4375}{s + 2} + \frac{-0.375}{(s + 2)^2} + \frac{1}{s} \\ &= \frac{-0.5626(s + 2)}{(s + 2)^2 + 4^2} + \frac{(0.3438) \times 4}{(s + 2)^2 + 4^2} \\ &\quad - \frac{0.4375}{s + 2} - \frac{0.375}{(s + 2)^2} + \frac{1}{s} \end{aligned}$$

#### MATLAB Programa 5-18

```
% ----- Respuesta a escalón unitario de C(s)/R(s) y desarrollo
% en fracciones simples de C(s) -----

num = [3 25 72 80];
den = [1 8 40 96 80];
step(num,den);
v = [0 3 0 1.2]; axis(v), grid

% Para obtener el desarrollo en fracciones simples de C(s),
% introduzca las órdenes
% num1 = [3 25 72 80];
% den1 = [1 8 40 96 80 0];
% [r,p,k] = residue(num1,den1)

num1 = [25 72 80];
den1 = [1 8 40 96 80 0];
[r,p,k] = residue(num1,den1)

r =

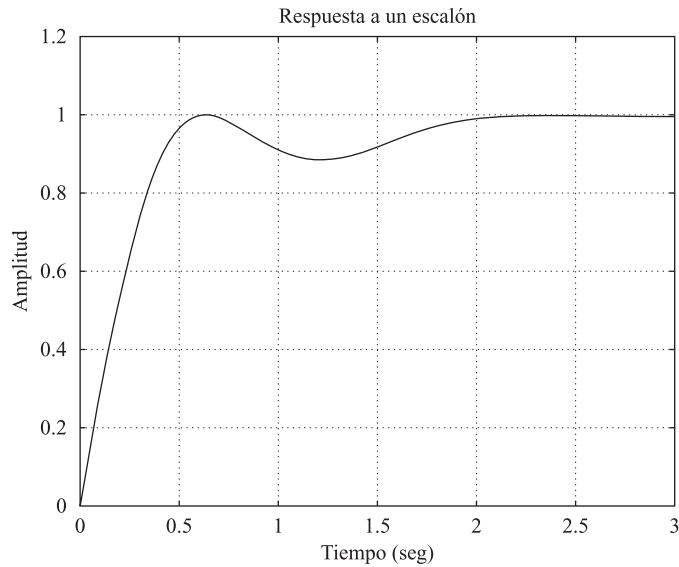
    -0.2813 - 0.1719i
    -0.2813 + 0.1719i
    -0.4375
    -0.3750
     1.0000

p =

    -2.0000 + 4.0000i
    -2.0000 - 4.0000i
    -2.0000
    -2.0000
     0

k =

    []
```



**Figura 5-56.** Curva de respuesta a un escalón unitario.

Por tanto, la respuesta temporal  $c(t)$  está dada por

$$c(t) = -0.5626e^{-2t} \cos 4t + 0.3438e^{-2t} \sin 4t \\ - 0.4375e^{-2t} - 0.375te^{-2t} + 1$$

En la Figura 5-56 se observa el hecho de que la curva de respuesta es una curva exponencial superpuesta a una senoide amortiguada.

- A-5-9.** Cuando un sistema en lazo cerrado involucra un numerador con dinámica, la curva de respuesta a un escalón unitario puede presentar una sobreelongación grande. Obtenga la respuesta a un escalón unitario del siguiente sistema utilizando MATLAB:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10s + 4}{s^2 + 4s + 4}$$

Obtenga también la respuesta a una rampa unitaria con MATLAB.

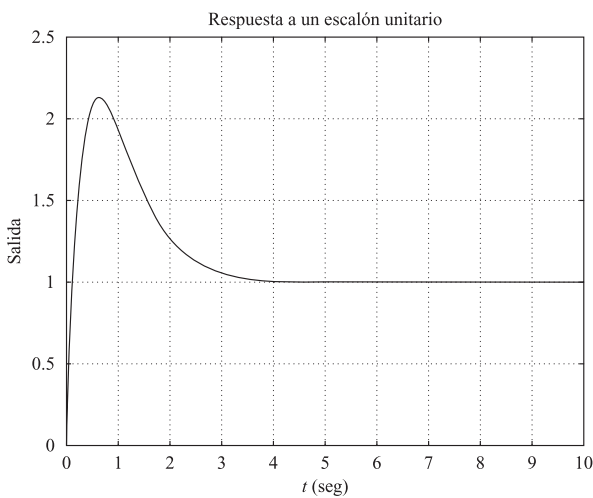
**Solución.** El Programa de MATLAB 5-19 calcula la respuesta del sistema a un escalón unitario y a una rampa unitaria. En las Figuras 5-57(a) y (b) se muestran, respectivamente, la curva de respuesta al escalón unitario y a la entrada rampa unitaria junto con la entrada rampa unitaria.

Observe que la curva de respuesta al escalón unitario presenta una sobreelongación de más del 215%. La curva de respuesta a la rampa unitaria tiende a la curva de entrada. Estos fenómenos se producen por la presencia de un término derivativo grande en el numerador.

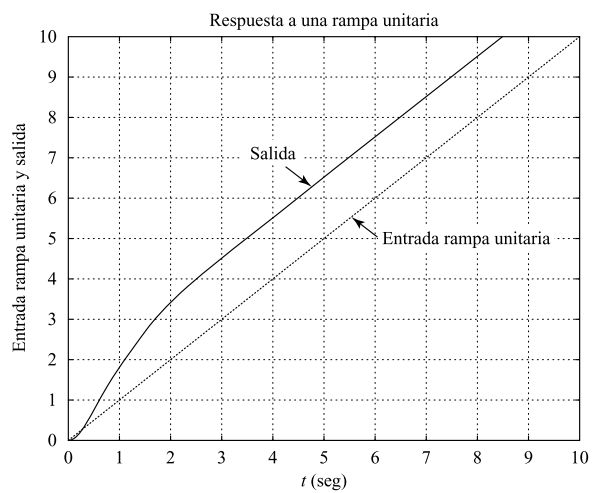
**MATLAB Programa 5-19**

```
num = [10 4];
den = [1 4 4];
t = 0:0.02:10;
y = step(num,den,t);
plot(t,y)
grid
title('Respuesta a un escalón unitario')
xlabel('t (seg)')
ylabel('Salida')

num1 = [10 4];
den1 = [1 4 4 0];
y1 = step(num1,den1,t);
plot(t,t,'--',t,y1)
v = [0 10 0 10]; axis(v);
grid
title('Respuesta a una rampa unitaria')
xlabel('t (seg)')
ylabel('Entrada rampa unitaria y salida')
text(6.1,5,0,'Entrada rampa unitaria')
text(3.5,7.1,'Salida')
```



(a)



(b)

**Figura 5-57.** (a) Curva de respuesta a un escalón unitario; (b) curva de respuesta a una rampa unitaria junto con entrada rampa unitaria.



**A-5-10.** Considere el sistema de orden alto definido por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6.3223s^2 + 18s + 12.811}{s^4 + 6s^3 + 11.3223s^2 + 18s + 12.811}$$

Dibuje la curva de respuesta a un escalón unitario de este sistema utilizando MATLAB. Obtenga también utilizando MATLAB el tiempo de subida, el tiempo de pico, la máxima sobreelongación y el tiempo de asentamiento.

**Solución.** El Programa de MATLAB 5-20 dibuja la curva de respuesta a un escalón unitario y calcula el tiempo de subida, el tiempo de pico, la máxima sobreelongación y el tiempo de asentamiento. En la Figura 5-58 se muestra la curva de respuesta a un escalón unitario.

#### MATLAB Programa 5-20

```
% ----- Este programa representa la respuesta a un escalón
% unitario, así como encuentra el tiempo de subida, tiempo
% de pico, sobreelongación máxima, y tiempo de asentamiento.
% En este programa el tiempo de subida se calcula como el
% tiempo requerido para que la respuesta pase del 10%
% al 90% de su valor final. -----

num = [6.3223 18 12.811];
den = [1 6 11.3223 18 12.811];
t = 0:0.02:20;
[y,x,t] = step(num,den,t);
plot(t,y)
grid
title('Respuesta a un escalón unitario')
xlabel('t (seg)')
ylabel('Salida y(t)')

r1 = 1; while y(r1) < 0.1, r1 = r1+1; end;
r2 = 1; while y(r2) < 0.9, r2 = r2+1; end;
tiempo_subida = (r2-r1)*0.02

tiempo_subida =

    0.5800

[ymax,tp] = max(y);
tiempo_pico = (tp-1)*0.02

tiempo_pico =

    1.6600

sobreelongacion_max = ymax-1

sobreelongacion_max =

    0.6182

s = 1001; while y(s) > 0.98 & y(s) < 1.02; s = s-1; end;
tiempo_asentamiento = (s-1)*0.02

tiempo_asentamiento =

    10.0200
```

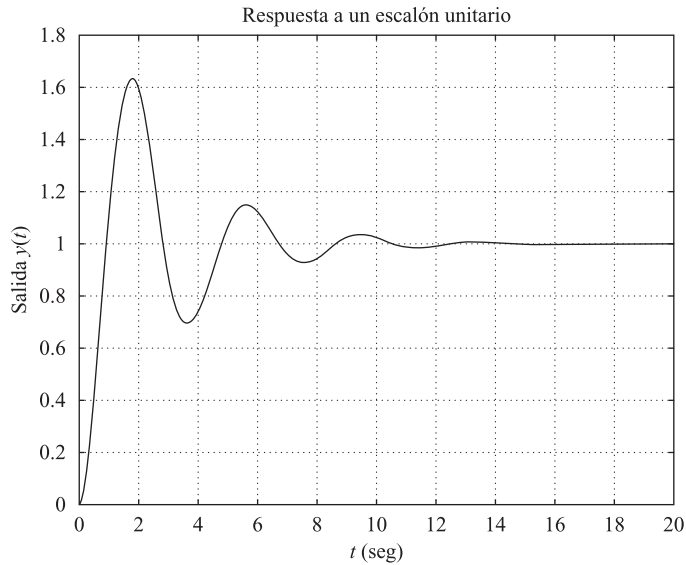


Figura 5-58. Curva de respuesta a un escalón unitario.

**A-5-11.** Considere el sistema en lazo cerrado definido por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Utilizando un «bucle for», escriba un programa en MATLAB para obtener la respuesta de este sistema en los cuatro casos siguientes:

Caso 1:  $\zeta = 0.3$ ,  $\omega_n = 1$

Caso 2:  $\zeta = 0.5$ ,  $\omega_n = 2$

Caso 3:  $\zeta = 0.7$ ,  $\omega_n = 4$

Caso 4:  $\zeta = 0.8$ ,  $\omega_n = 6$

**Solución.** Se define  $\omega_n^2 = a$  y  $2\zeta\omega_n = b$ . Entonces,  $a$  y  $b$  tienen cada uno cuatro elementos, que son:

$$a = [1 \quad 4 \quad 16 \quad 36]$$

$$b = [0.6 \quad 2 \quad 5.6 \quad 9.6]$$

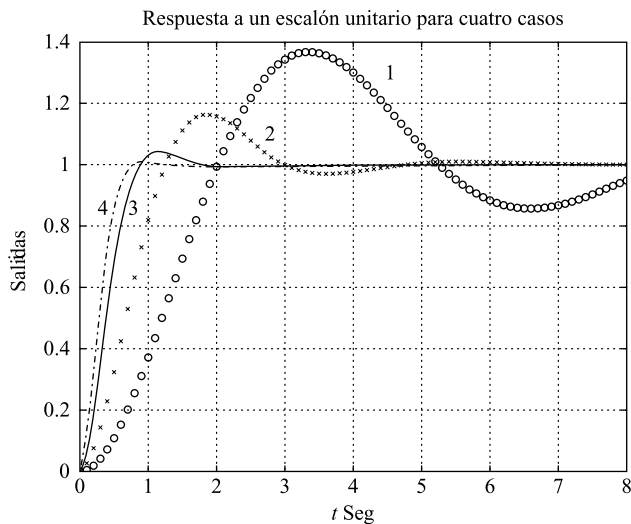
Utilizando los vectores  $a$  y  $b$ , el Programa de MATLAB 5-21 calculará las curvas de respuesta al escalón unitario que se muestran en la Figura 5-59.

**MATLAB Programa 5-21**

```

a = [1  4  16  36];
b = [0.6  2  5.6  9.6];
t = 0:0.1:8;
y = zeros(81,4);
    for i = 1:4;
        num = [a(i)];
        den = [1  b(i)  a(i)];
        y(:,i) = step(num,den,t);
    end
plot(t,y(:,1),'o',t,y(:,2),'x',t,y(:,3),'-',t,y(:,4),'-.')
grid
title('Respuesta a un escalón unitario para cuatro casos')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salidas')
gtext('1')
gtext('2')
gtext('3')
gtext('4')

```



**Figura 5-59.** Curvas de respuesta a un escalón unitario para cuatro casos.

- A-5-12.** Utilizando MATLAB, obtenga la respuesta a una rampa unitaria del sistema de control en lazo cerrado cuya función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s + 10}{s^3 + 6s^2 + 9s + 10}$$

Obtenga también la respuesta de este sistema cuando la entrada está dada por

$$r = e^{-0.5t}$$

**Solución.** El Programa de MATLAB 5-22 calcula la respuesta a una rampa unitaria y la respuesta a la entrada exponencial  $r = e^{-0.5t}$ . Las curvas de respuesta que resultan se muestran en las Figuras 5-60(a) y (b), respectivamente.

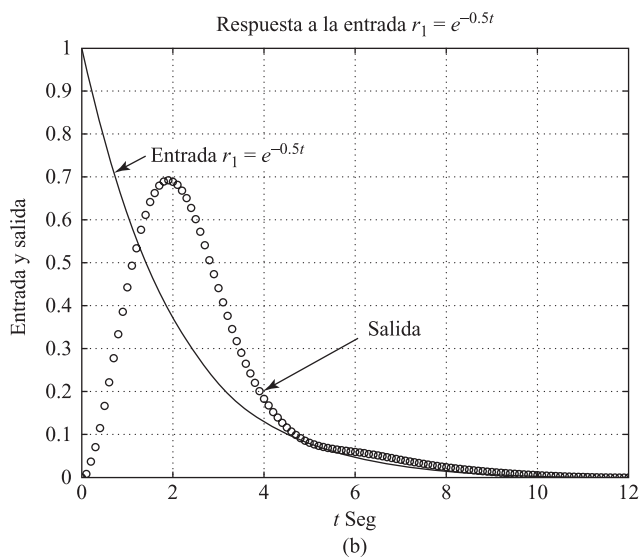
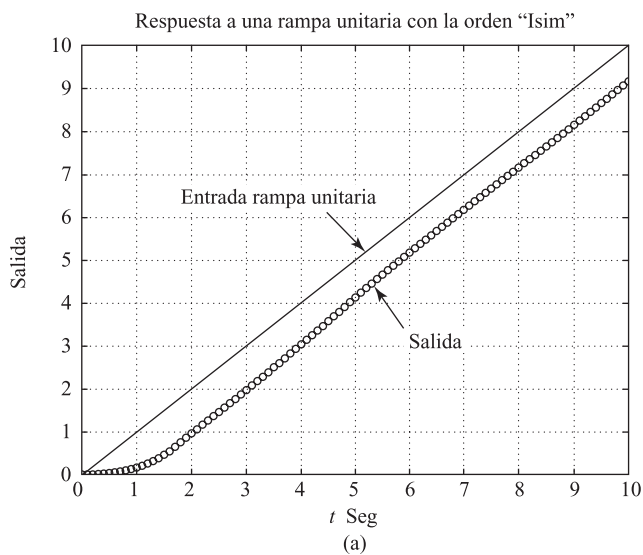
#### MATLAB Programa 5-22

```
% ----- Respuesta a una rampa unitaria -----

num = [1 10];
den = [1 6 9 10];
t = 0:0.1:10;
r = t;
y = lsim(num,den,r,t);
plot(t,r,'-',t,y,'o')
grid
title('Respuesta a una rampa unitaria con la orden "lsim"')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salida')
text(3.2,6.5,'Entrada rampa unitaria')
text(6.0,3.1,'Salida')

% ----- Respuesta a entrada r1 = exp(-0.5t). -----

num = [0 0 1 10];
den = [1 6 9 10];
t = 0:0.1:12;
r1 = exp(-0.5*t);
y1 = lsim(num,den,r1,t);
plot(t,r1,'-',t,y1,'o')
grid
title('Respuesta a la entrada r1 = exp(-0.5t)')
xlabel('t Seg')
ylabel('Entrada y salida')
text(1.4,0.75,'Entrada r1 = exp(-0.5t)')
text(6.2,0.34,'Salida')
```



**Figura 5-60.** (a) Curva de respuesta a rampa unitaria;  
(b) respuesta a entrada exponencial  $r = e^{-0.5t}$ .

**A-5-13.** Obtenga la respuesta del sistema en lazo cerrado definido por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^2 + s + 5}$$

cuando la entrada  $r(t)$  está dada por

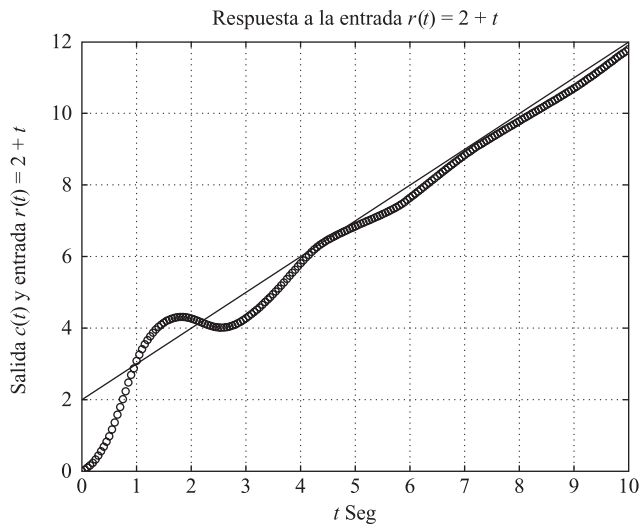
$$r(t) = 2 + t$$

[La entrada  $r(t)$  es una entrada escalón de magnitud 2 más una rampa unitaria.]

**Solución.** El Programa MATLAB 5-23 es una posible solución. En la Figura 5-61 se muestra la curva de respuesta resultante junto con un dibujo de la función de entrada.

**MATLAB Programa 5-23**

```
num = [ 5];
den = [1 1 5];
t = 0:0.05:10;
r = 2 + t ;
c = lsim(num,den,r,t);
plot(t,r,'-',t,c,'o')
grid
title('Respuesta a la entrada r(t) = 2 + t')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salida c(t) y entrada r(t) = 2 + t')
```

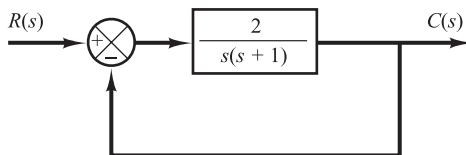


**Figura 5-61.** Respuesta a entrada  $r(t) = 2 + t$ .

**A-5-14.** Obtenga la respuesta del sistema que se muestra en la Figura 5-62 cuando la entrada  $r(t)$  está dada por

$$r(t) = \frac{1}{2} t^2$$

[La entrada  $r(t)$  es una entrada aceleración unitaria.]



**Figura 5-62.** Sistema de control.

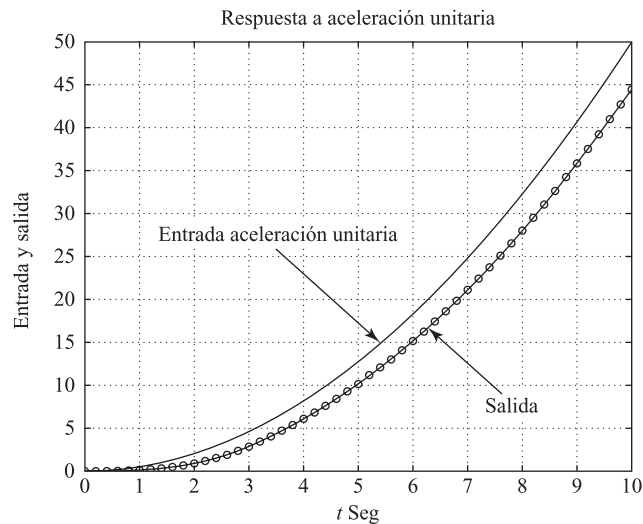
**Solución.** La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + s + 2}$$

El Programa MATLAB 5-24 calcula la respuesta a la aceleración unitaria. En la Figura 5-63 se muestra la respuesta resultante junto con la entrada aceleración unitaria.

**MATLAB Programa 5-24**

```
num = [2];
den = [1 1 2];
t = 0:0.2:10;
r = 0.5*t.^2;
y = lsim(num,den,r,t);
plot(t,r,'-',t,y,'o',t,y,'-')
grid
title('Respuesta a aceleración unitaria')
xlabel('t Seg')
ylabel('Entrada y salida')
text(2.1,27.5,'Entrada aceleración unitaria')
text(7.2,7.5,'Salida')
```



**Figura 5-63.** Respuesta a entrada aceleración unitaria.

**A-5-15.** Considere el sistema definido por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

donde  $\zeta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  y  $1.0$ . Escriba un programa en MATLAB utilizando un «bucle for» para obtener las gráficas en dos y en tres dimensiones de la salida del sistema. La entrada es una función escalón unitario.

**Solución.** El Programa MATLAB 5-25 es una posible solución para obtener los diagramas en dos y en tres dimensiones. La Figura 5-64(a) es el dibujo en dos dimensiones de las curvas de respuesta al escalón unitario para distintos valores de  $\zeta$ . La Figura 5-64(b) es el dibujo en tres dimensiones obtenido utilizando el comando «mesh(y)», y la Figura 5-64(c) se ha obtenido utilizando el comando «mesh(y')». (Estos dos dibujos en tres dimensiones son prácticamente iguales. La única diferencia es que el eje  $x$  y el eje  $y$  están intercambiados.)

#### MATLAB Programa 5-25

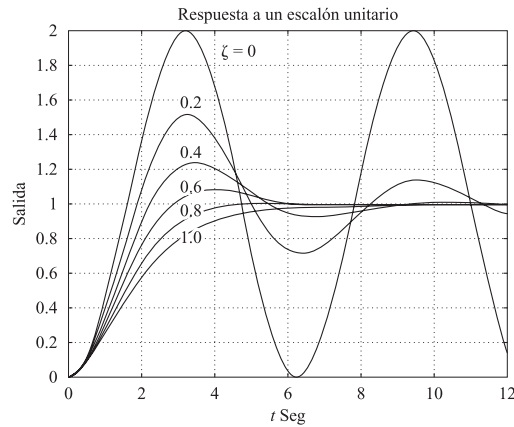
```
t = 0:0.2:12;
    for n = 1:6;
        num = [1];
        den = [1 2*(n-1)*0.2 1];
        [y(1:61,n),x,t] = step(num,den,t);
    end
plot(t,y)
grid
title('Respuestas a un escalón unitario')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salidas')
gtext('\zeta = 0'),
gtext('0.2')
gtext('0.4')
gtext('0.6')
gtext('0.8')
gtext('1.0')

% Para dibujar una gráfica tridimensional, introduzca las órdenes: mesh(y) o mesh(y').
% Se mostrarán dos gráficas tridimensionales, usando en una "mesh(y)" y en la otra
% "mesh(y')". Las dos gráficas son iguales, excepto que se intercambian los ejes x e y.

mesh(y)
title('Representación tridimensional de la respuesta escalón con la orden "mesh(y)" ')
xlabel('n, donde n = 1,2,3,4,5,6')
ylabel('Puntos de tiempo de cálculo')
zlabel('Salidas')

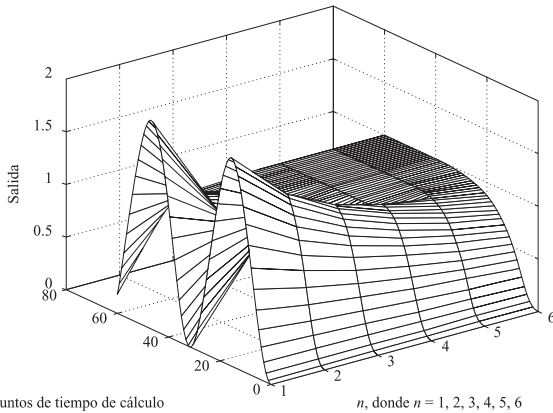
mesh(y')
title('Representación tridimensional de la respuesta escalón con la
orden "mesh(y transpose)" ')
xlabel('Puntos de tiempo de cálculo')
ylabel('n, donde n = 1,2,3,4,5,6')
zlabel('Salidas')
```





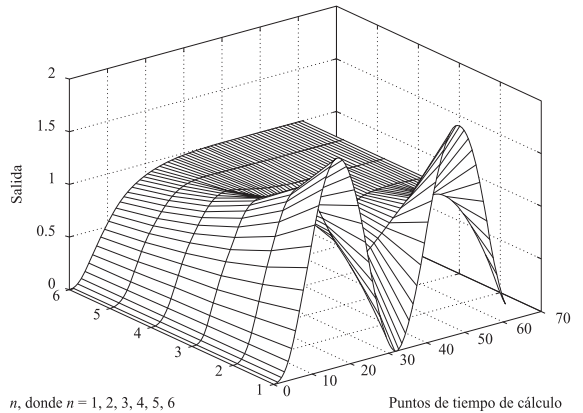
(a)

Representación tridimensional de la respuesta escalón con la orden "mesh(y)"



(b)

Representación tridimensional de curvas de respuesta escalón unitario utilizando la orden "mesh(y transpose)"



(c)

**Figura 5-64.** (a) Gráfica bidimensional de las curvas de respuesta a un escalón unitario; (b) gráfica tridimensional de las curvas de respuesta a un escalón unitario con la orden «mesh(y)»; (c) gráfica tridimensional de las curvas de respuesta a un escalón unitario con la orden «mesh(y')».