Control Automático

DIAPOSITIVAS

Dr. Roberto Cárdenas Dobson
Profesor de la Asignatura

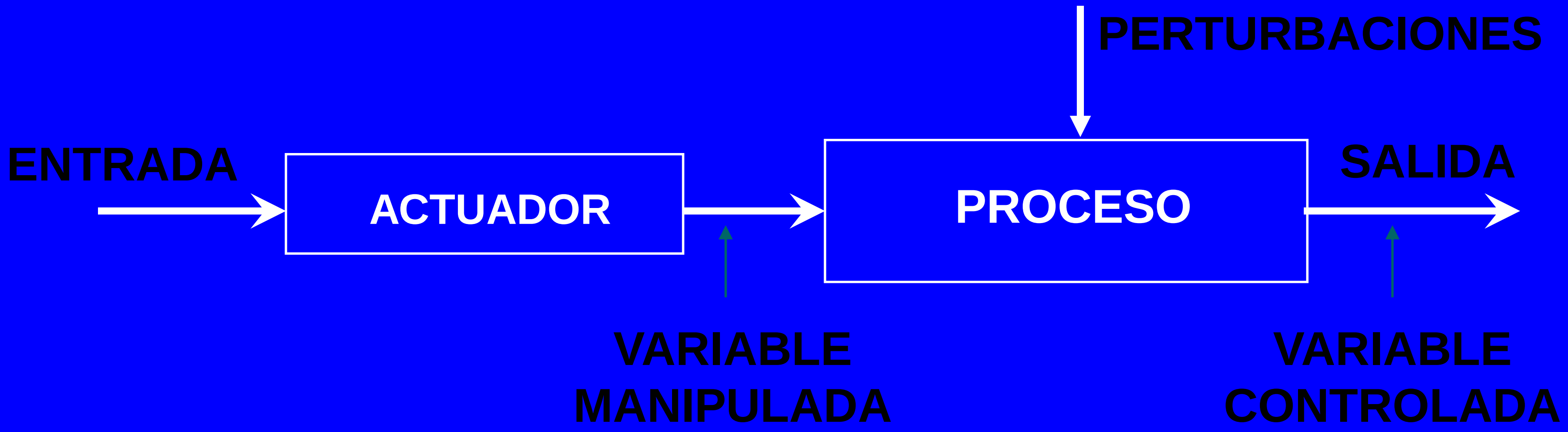
Sistema de Control

- Interconexión de componentes, que en su conjunto, presenta un comportamiento deseado. Asume relaciones de causa-efecto.

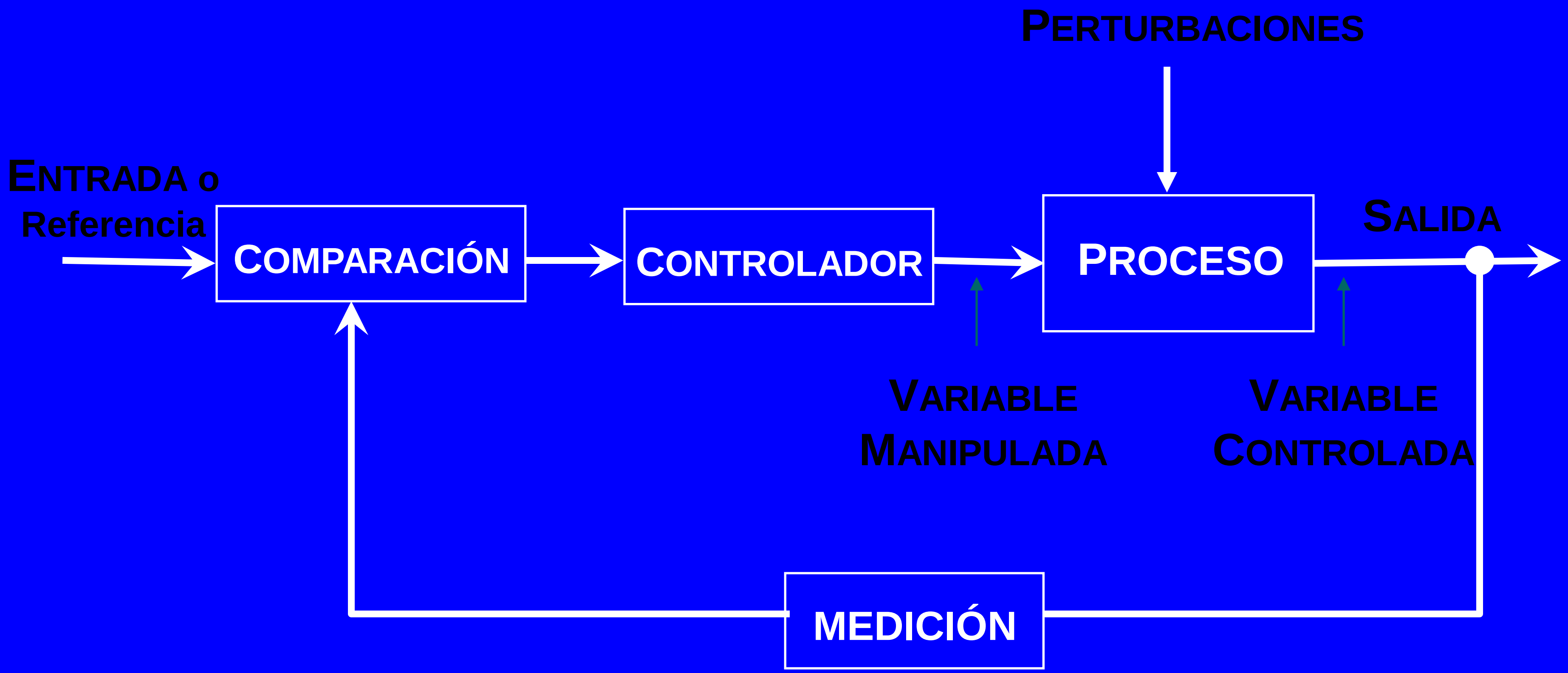
Sistemas de Control

- Control en lazo abierto o guiado
- Control en lazo cerrado o realimentado
- Control prealimentado
- Control avanzado

Control en Lazo Abierto



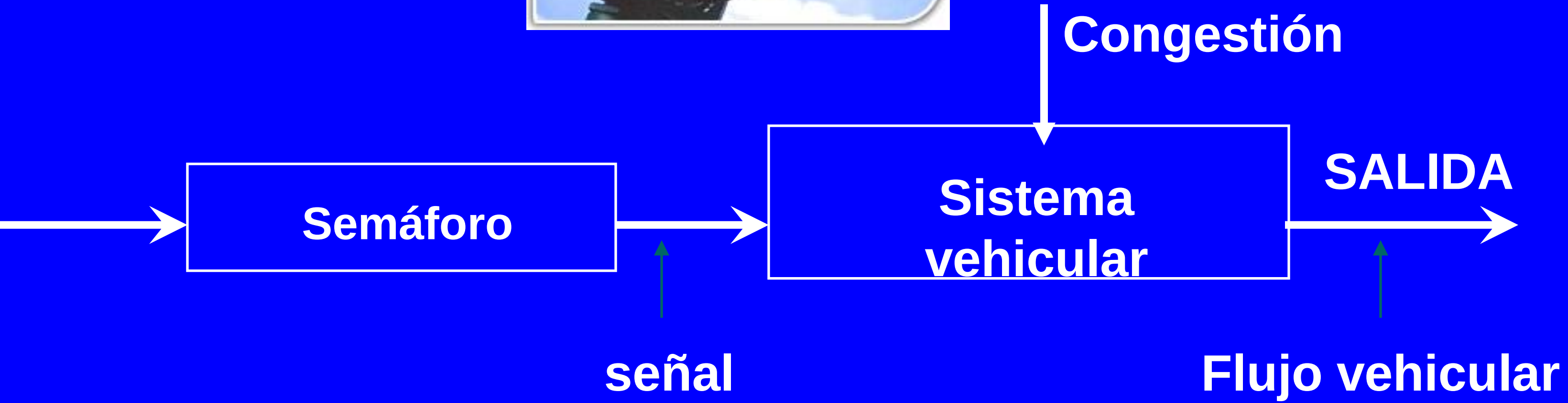
Control en Lazo Cerrado



Definiciones Básicas

- Planta
- Proceso
- Variables manipuladas
- Variables de estado
- Variables controladas
- Perturbaciones
- Set-points o referencias

Ejemplo: Control en Lazo Abierto



Sistemas

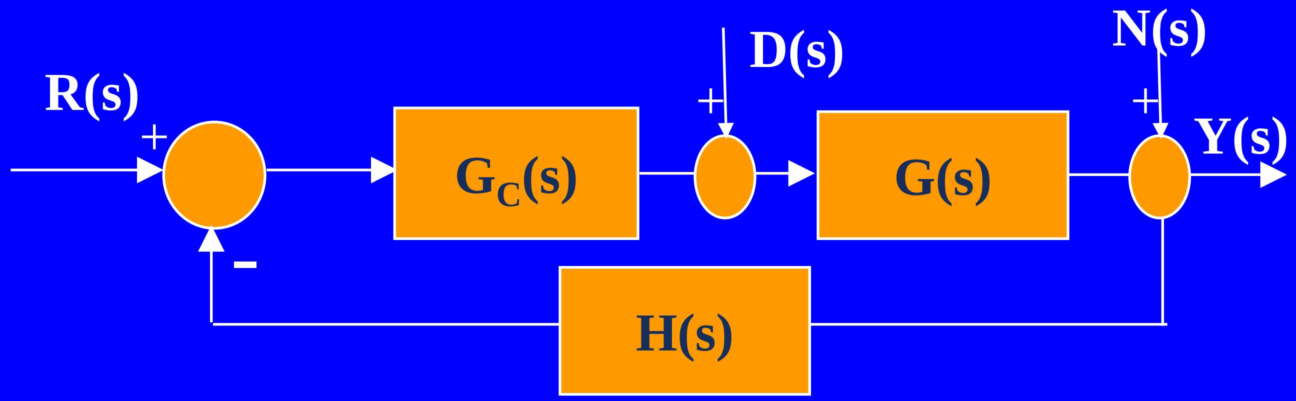
- No Lineal.
- Estáticos (no depende del tiempo).
- En tiempo continuo (Ec. Diferencial).

- Lineal.
- Dinámico (depende del tiempo).
- En tiempo discreto (Ec. de diferencia).

Representantes de Sistemas Lineales Dinámicos

- Ecuaciones diferenciales o ecuaciones de diferencia.
- Función de transferencia (Laplace o Transforma Z).
- Representación en variables de estado continua o discreta

Sistema de Control Realimentado
Control en Lazo Cerrado



Sistema de Segundo Orden

La función de transferencia de un sistema de segundo orden es:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad (1)$$

Donde el término ω_n se denomina frecuencia natural y ζ es el coeficiente de amortiguamiento. Si se consideran polos complejos conjugados ($0 < \zeta < 1$), la respuesta en el tiempo para entrada escalón es:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} sin\left[\omega_n \left(\sqrt{1-\zeta^2}\right) t + \theta\right] \qquad (2)$$

Representación de polos y ceros

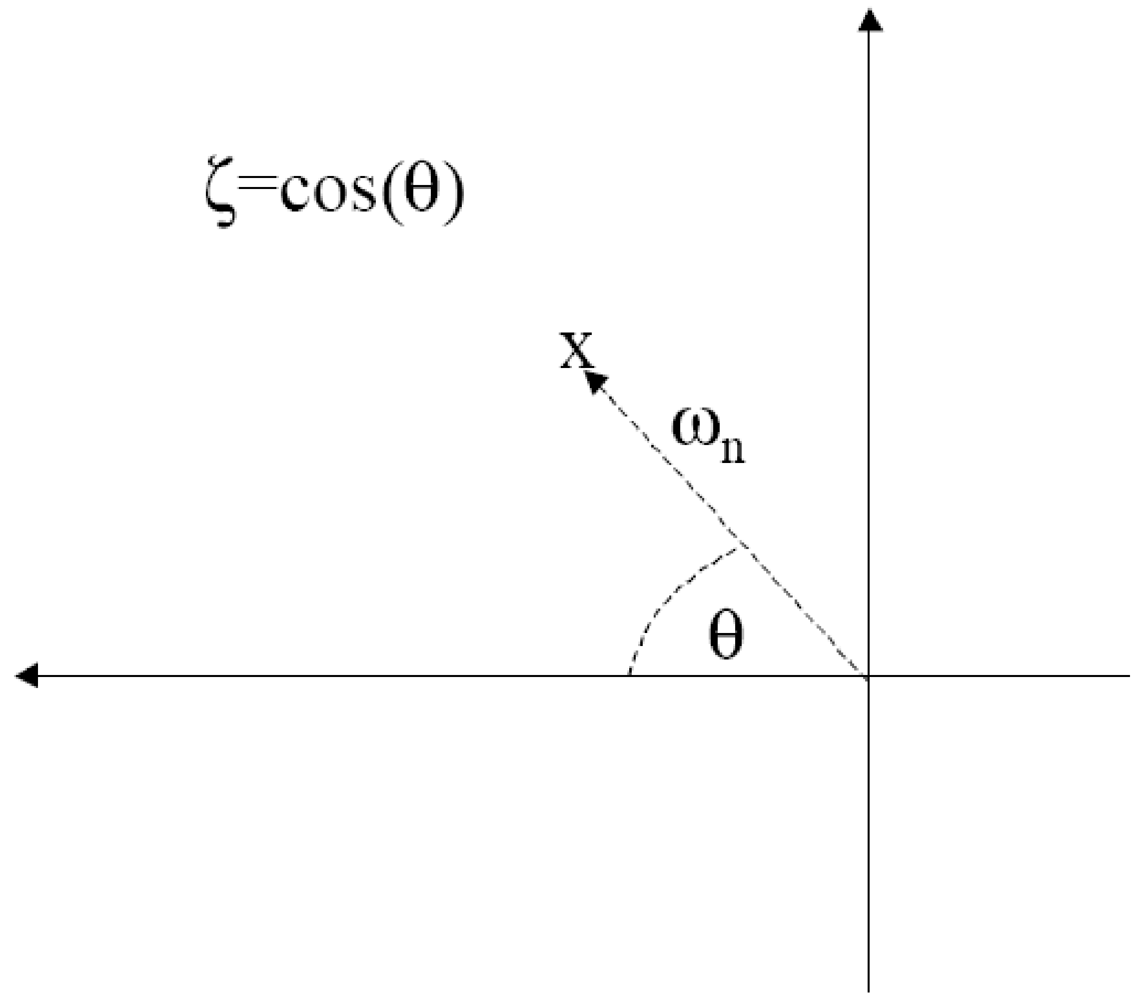
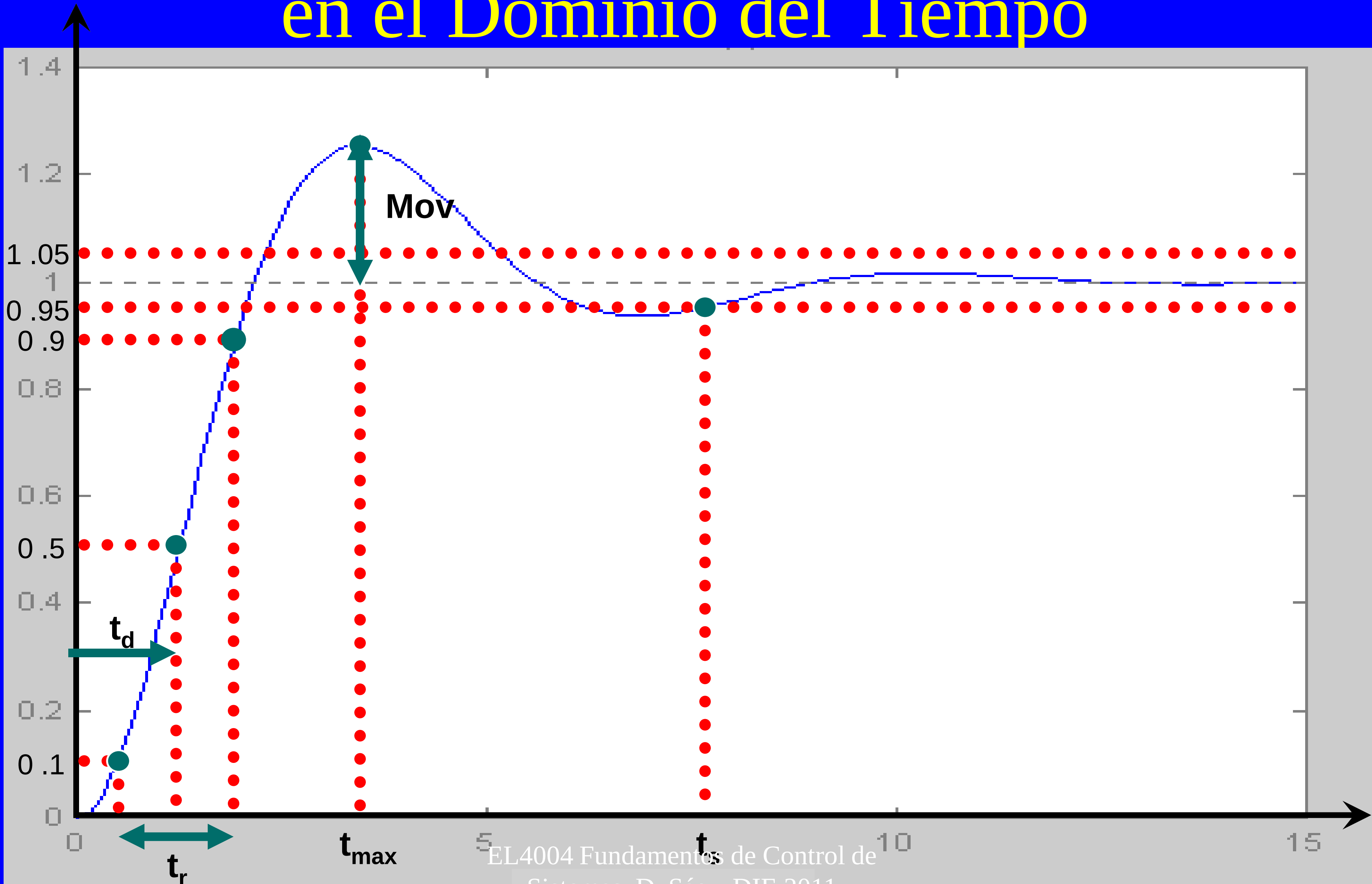


Figura 1. Representación en el plano complejo del sistema de segundo orden.

Especificaciones en el Dominio del Tiempo



Especificaciones en el Dominio del Tiempo

Sobrenivel máximo Mov:

$$Mov = y_{max} - y_{ss}$$

$$Mov[\%] = \frac{Mov}{y_{ss}} * 100\%$$

y_{ss} : Salida en regimen permanente

Retardo t_d: Tiempo requerido para alcanzar el 50% del valor final. (y_{ss}).

Especificaciones en el Dominio del Tiempo

<u>Tiempo de subida</u> t_r: Tiempo requerido en irse desde el 10% de y_{ss} al 90% de y_{ss}

<u>Tiempo de estabilización (asentamiento)</u> t_s: Tiempo requerido para que la respuesta este dentro del 5% alrededor de y_{ss}

Influencia de ω_n

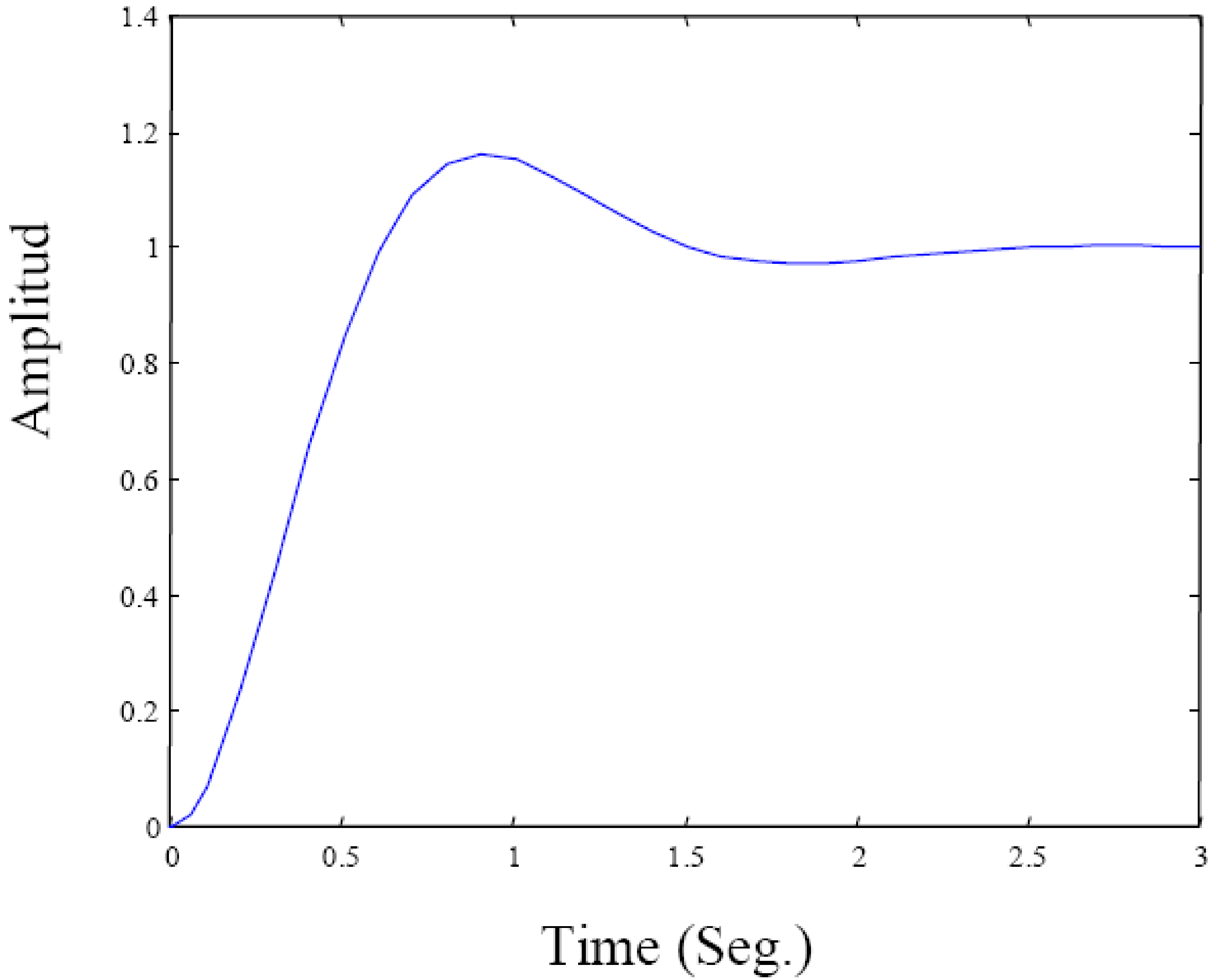


Figura 3. Respuesta para ω_n= 4rads^{-1}

Influencia de ωn

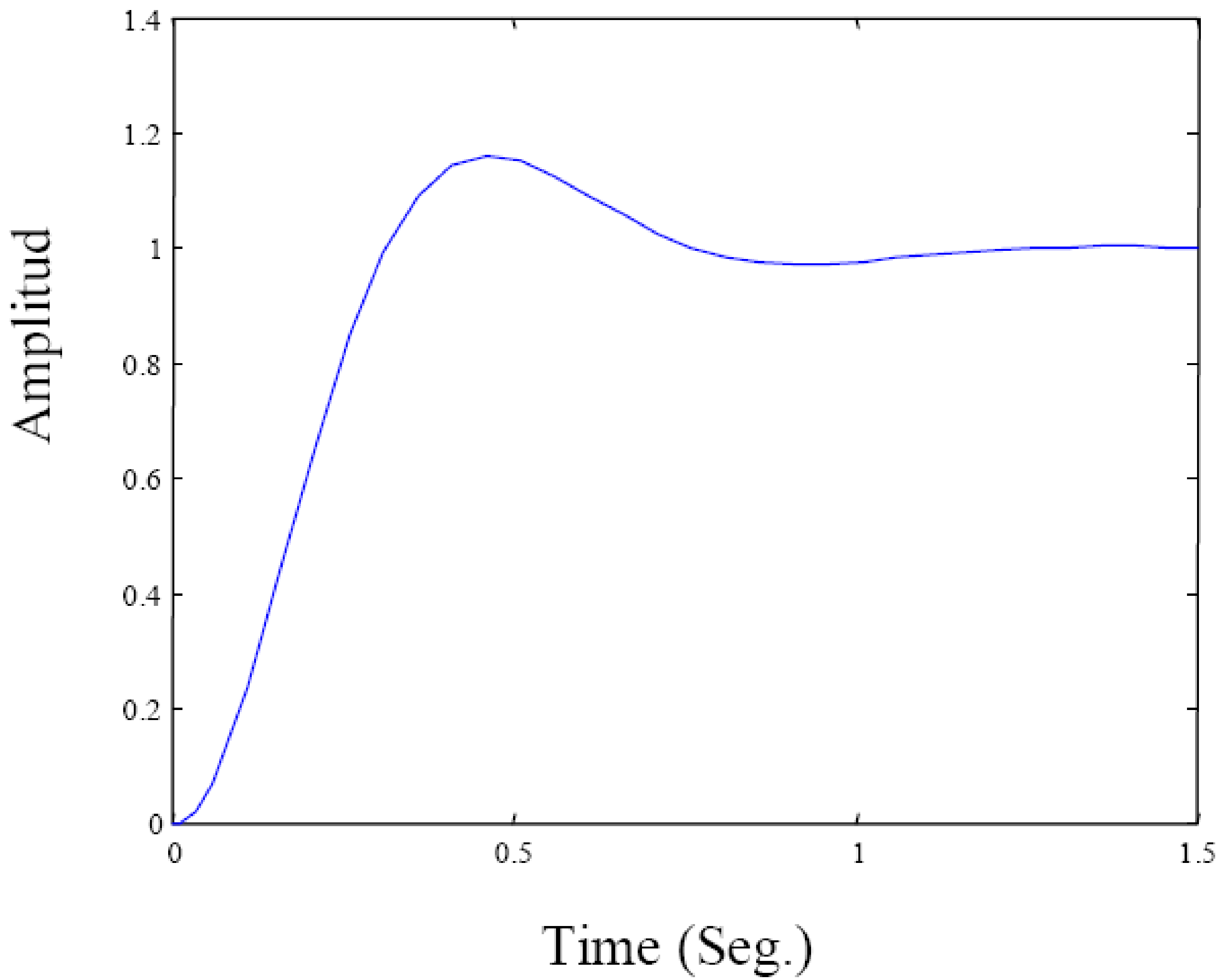
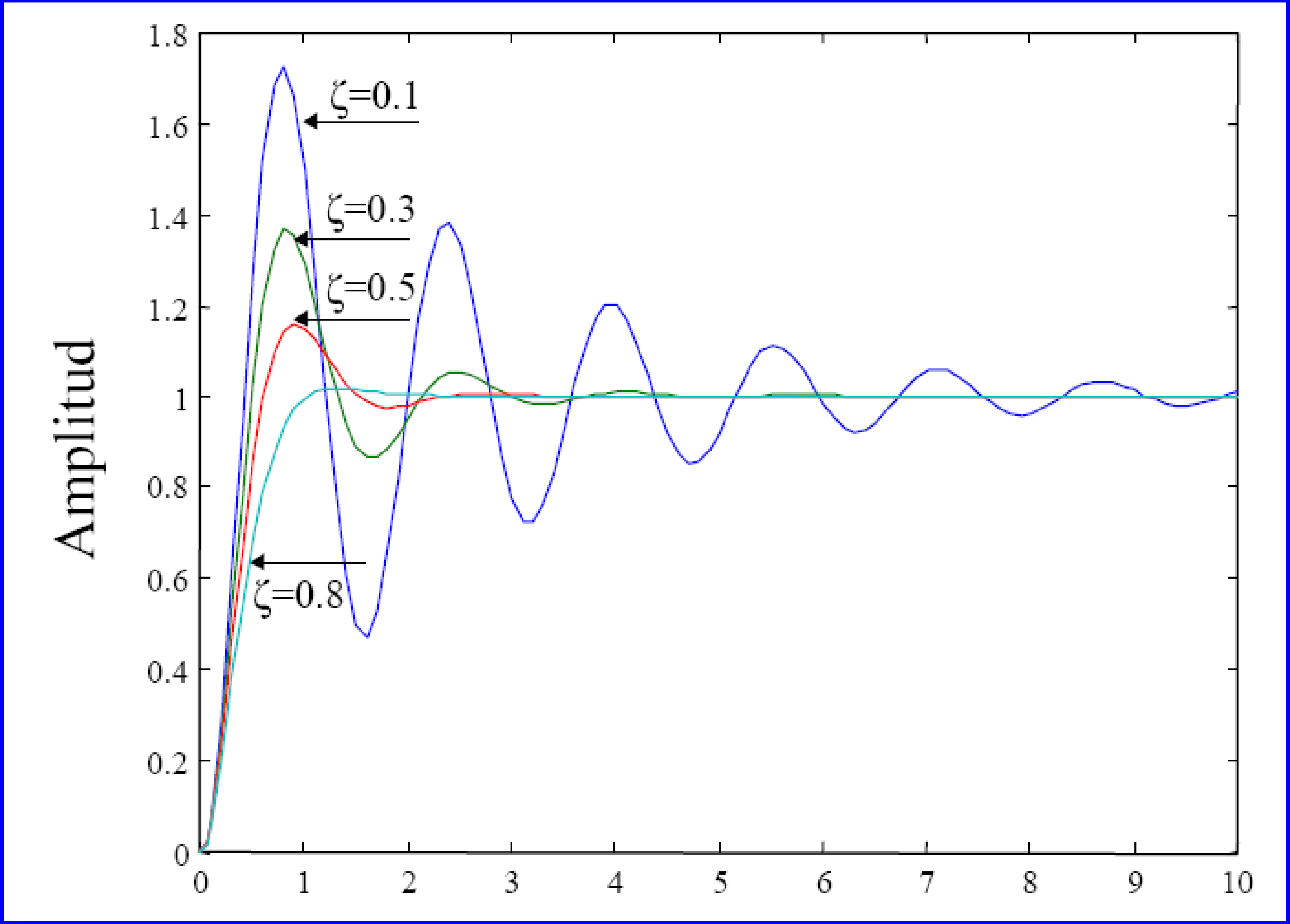


Figura 4. Respuesta para ω_n= 8rads^{-1}

Respuesta en el tiempo



Formulas del sistema

Tabla I. Porcentaje de sobrepaso vs. coeficiente de amortiguamiento

ζ	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3
P.O	0.2	1.5	4.6	9.5	16.3	25.4	37.2

Especificaciones en el dominio del tiempo

$$S_p = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$ sobrenivel máximo

$$\xi \in [0; 0.69] \Rightarrow t_s \approx \frac{3.2}{\xi\omega_n}$$

$$t_s \approx \frac{4.5\xi}{\omega_n} \quad \xi > 0.69$$

Ecuación característica :

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow \text{polos} : s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Sistema de segundo orden no ideal

A. Sistema de Segundo Orden con un Polo Extra.

La función de transferencia considerando un polo extra es la siguiente:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\omega_n^2 \, a}{\left(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2\right)\left(s + a\right)} \qquad (9)$$

Sistema de segundo orden no ideal

La siguiente tabla muestra la respuesta del sistema en términos de sobrepaso y tiempo de establecimiento para un sistema con un extra polo, $\omega_n=1$, $\zeta=0.45$.

Tabla 2. Influencia de un polo extra en la respuesta del sistema

Posición a del polo extra	*Porcentaje de sobrepaso*	*Tiempo de establecimiento*
0.444	0.0	9.63
0.666	3.9	9.30
1.111	12.3	8.81
2.500	18.6	8.67
20.0	20.5	8.37
∞	20.5	8.24 (*)

Sistema de segundo orden no ideal

B. Sistema de Segundo Orden con un Cero Extra.

La función de transferencia, considerando un cero extra, es la siguiente:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\omega_n^2 / a \ (s + a)}{\left(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2\right)}$$

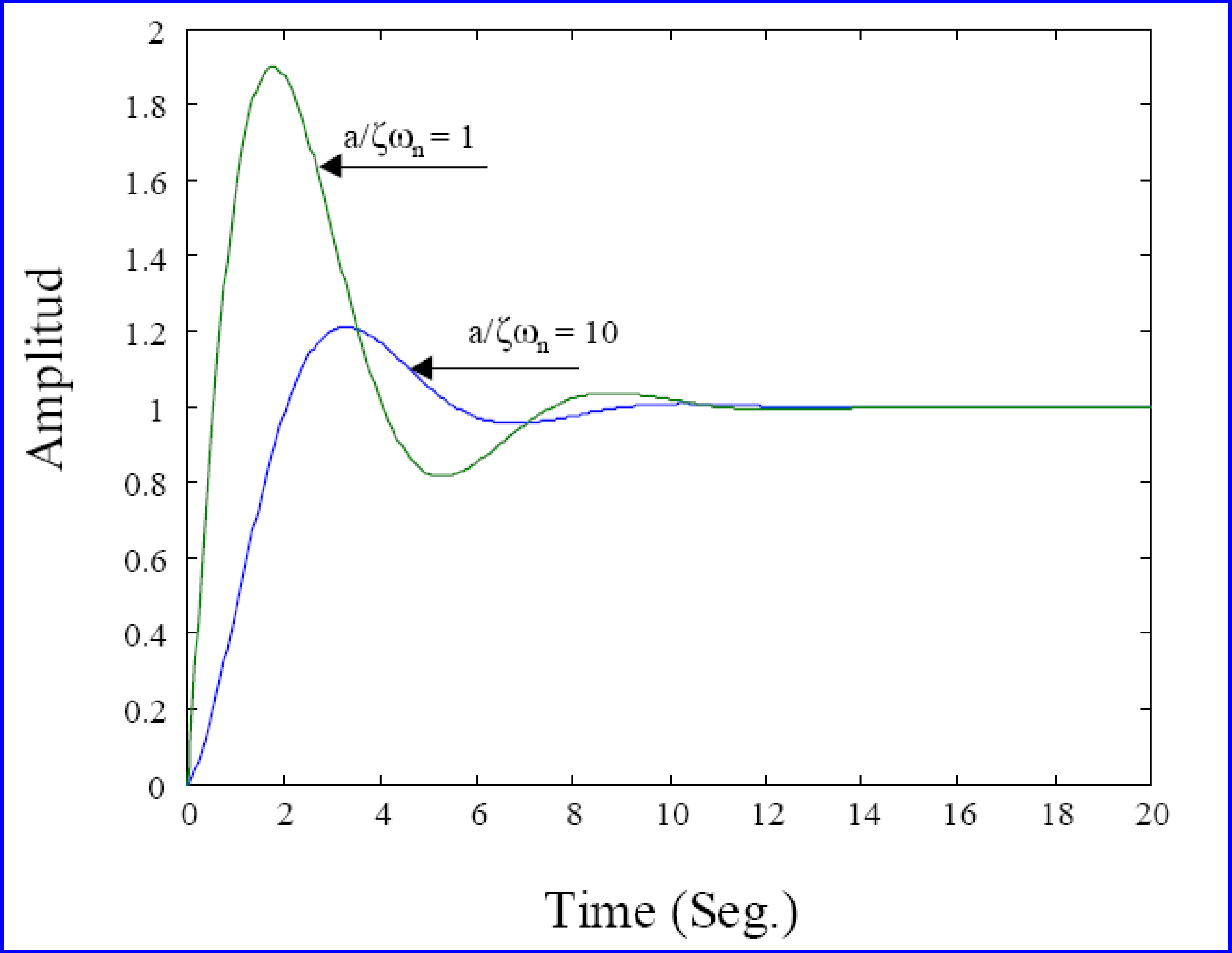
Sistema de segundo orden no ideal

La siguiente tabla muestra la respuesta del sistema en términos de sobrepaso y tiempo de establecimiento para un sistema con un cero extra, $\omega_n=1$, $\zeta=0.45$.

Tabla 3. Influencia de un cero en la respuesta del sistema

$a/(\zeta\omega_n)$	*Porcentaje de sobrepaso*	*Tiempo de establecimiento*	*Tiempo de peak*
10	21.1	8.13	3.28
5	23.10	8.0	3.0
1	89.90	10.1	2.2
0.5	210.0	10.3	1.5
0.1	1220	15.79	1.3

Sistema de segundo orden no ideal



- La influencia de los ceros de lazo cerrado es muchas veces ignorada al diseñar sistemas de control.

- Los ceros de lazo cerrado no producen inestabilidad pero pueden afectar la velocidad de respuesta y el sobrepaso (overshoot) en el dominio del tiempo.

- En un sistema SISO convencional los ceros de lazo cerrado contienen los ceros de la función de transferencia del lazo directo y los polos de la función de transferencia del lazo de realimentación.

- Por lo tanto los ceros de lazo cerrado se pueden encontrar por simple inspección del sistema.

Influencia de los ceros

La influencia de los ceros es mejor entendida si consideramos la siguiente función en el domino de Laplace (función de transferencia sin ceros):

$$y(s) = \frac{k}{\prod_{i=1}^{N}(s+p_i)} = \frac{A_1}{s+p_1} + \frac{A_2}{s+p_2} + \ldots\ldots\ldots \frac{A_N}{s+p_N} \qquad (12)$$

La respuesta en el tiempo se encuentra aplicando la transformada inversa de Laplace a (12) obteniéndose:

$$y(t) = A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_N e^{-p_N t} \qquad (13)$$

Influencia de los ceros

Donde los polos p_i pueden ser reales o complejos conjugados. Suponiendo ahora que la función de transferencia en (12) incluye ceros, se tiene:

$$y(s) = \frac{k \prod_{j=1}^{M} (s + z_i)}{\prod_{i=1}^{N} (s + p_i)} = \frac{A_1}{s + p_1} + \frac{A_2}{s + p_2} + \ldots\ldots\ldots \frac{A_N}{s + p_N} \qquad (14)$$

Donde N ≥ M. La expansión en fracciones parciales utiliza los polos y no los ceros por lo tanto (14) tiene la misma forma que (12). La respuesta en el tiempo se encuentra aplicando la transformada inversa de Laplace a (14) obteniéndose:

$$y(t) = A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_N e^{-p_N t} \qquad (15)$$

Polos Dominantes

$$y(t) = 1 - e^{-3t} - e^{-30t}$$

Habitualmente los polos dominantes son aquellos mas cercanos al origen

Polos Dominantes

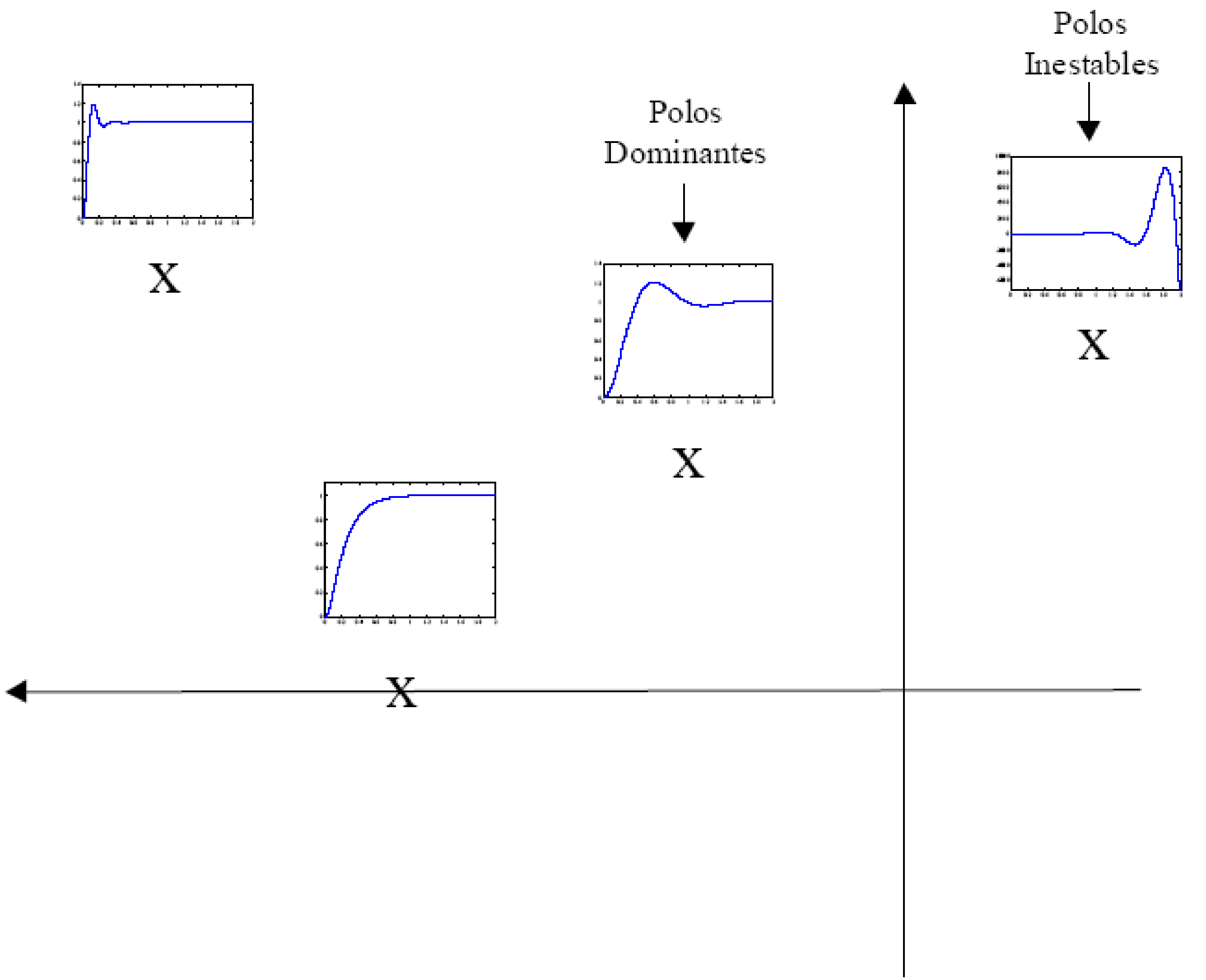
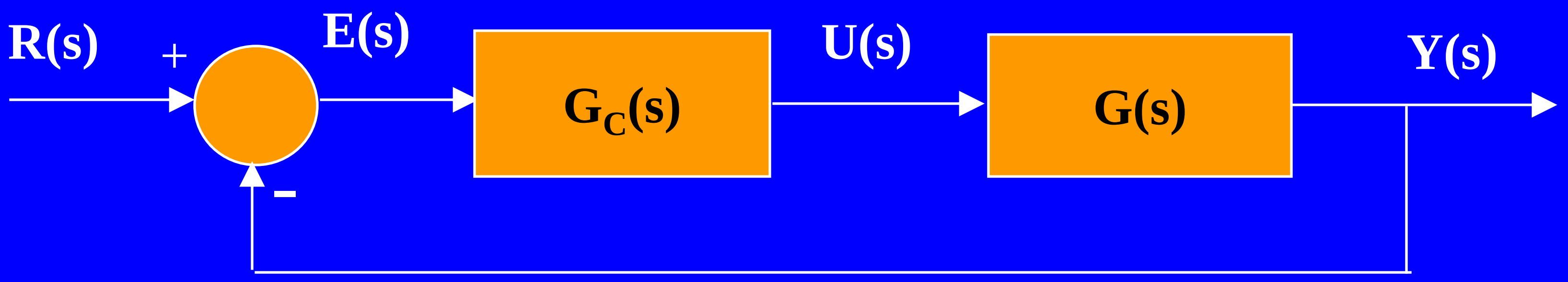


Figura 7. Influencia de la posición de los polos en la respuesta del sistema.

Error Estacionario o Permanente



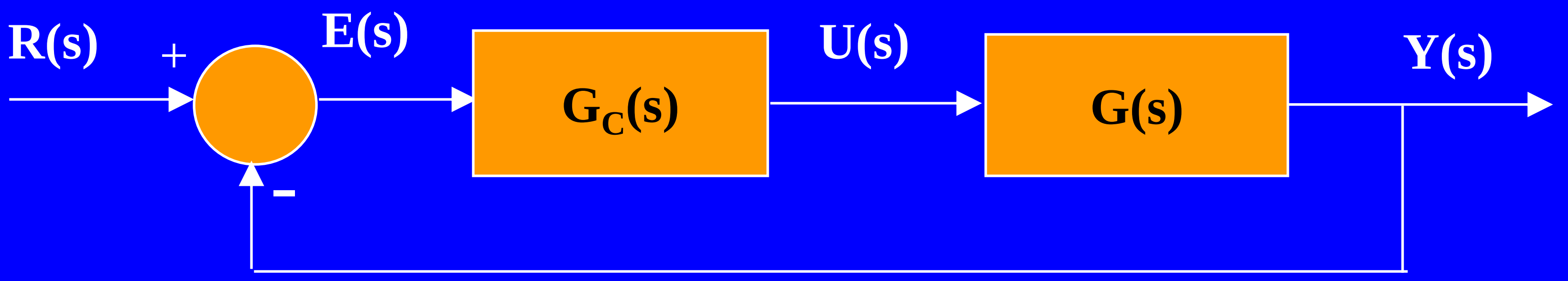
$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)G_C(s)} \Rightarrow E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)G_C(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G(s)G_C(s)}$$

Principio del Modelo Interno

- Para obtener cero error en estado estacionario el polinomio de la señal de referencia debe estar contenido al menos una vez en la función de transferencia de lazo abierto.

Diseño Algebraico



$$G(s) = \frac{a}{s+a} \qquad G_c(s) = ?$$

Lugar Geométrico de las Raíces

- El lugar de la raíz es un método propuesto por W. Evans para resolver gráficamente la ecuación característica de la función de transferencia a lazo cerrado.

- Por lo tanto resuelve $1+G(s)H(s)=0$, donde $G(S)$ es la función de transferencia del lazo directo y $H(s)$ es la función de transferencia del lazo de realimentación.

Lugar Geométrico de las Raíces

- Utilizando:

$$G(s)H(s) = \frac{K\prod_{1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{1}^{l}(s+p_j)}$$

- Al utilizar el método de Evans se asume que existe solo un grado de libertad. La ganancia K del sistema que puede variar entre cero hasta tender a infinito.

Lugar Geométrico de las Raíces

La ecuación característica se escribe como:

$$\Pi(s+p_j)+K\Pi(s+z_i)=0$$

Lugar Geométrico de las Raíces

- Por simple inspección se puede concluir que cuando la ganancia es cero o tiene un valor muy pequeño la posición de los polos de lazo cerrado es la misma que los polos de lazo abierto. Cuando la ganancia $K \rightarrow \infty$ los polos de lazo cerrado están en la misma posición que los ceros de lazo abierto.

Lugar Geométrico de las Raíces

- **No se deben confundir los polos de lazo abierto con los de lazo cerrado.** Los polos de lazo abierto son los que se encuentran en la función de lazo abierto G(s)H(s). Los polos de lazo cerrado son las soluciones de la ecuación característica.

Lugar Geométrico de las Raíces

- Utilizando la ecuación 1+G(s)H(s)=0, se puede demostrar que existe un polo de lazo cerrado, cuando se cumple la condición de módulo y la condición de ángulo. Estas condiciones se expresan como:

$$\left|G(s)H(s)\right| = 1$$

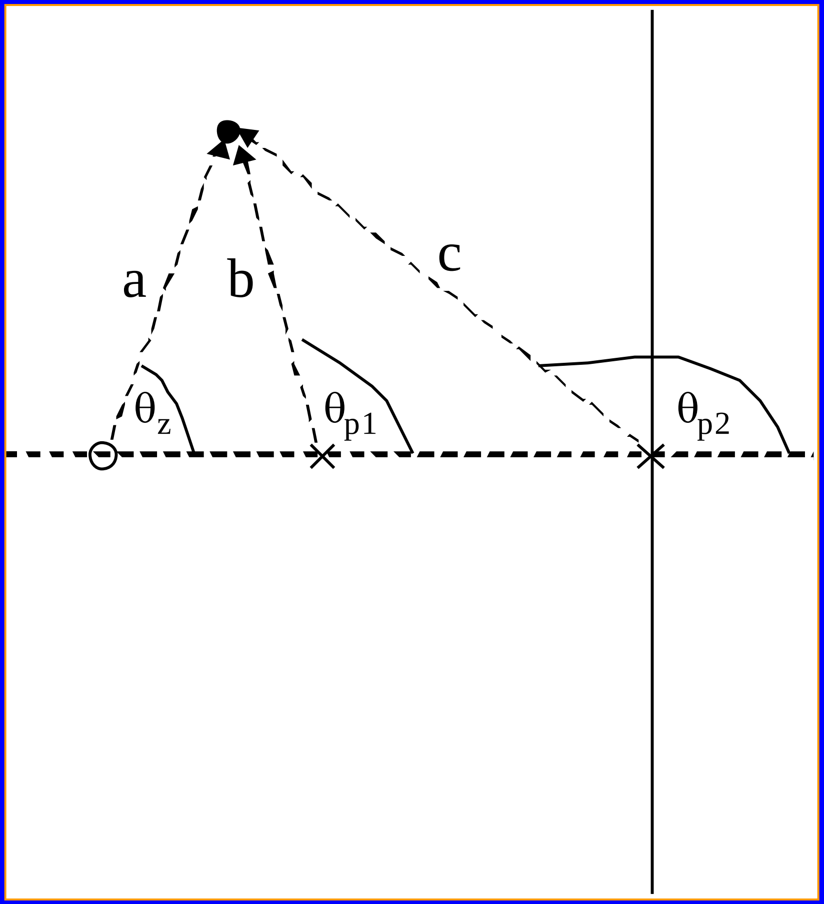
$$Angulo\left(G(s)H(s)\right) = 180 \pm k\,360$$

Lugar Geométrico de las Raíces

- La condición de ángulo es la mas importante ya que la condición de módulo es simple de obtener variando la ganancia del controlador.

- La ecuación de módulo y la ecuación de ángulo pueden resolverse gráficamente.

- Por ejemplo:



$$G(s)H(s) = \frac{K(s+5)}{s(s+3)}$$

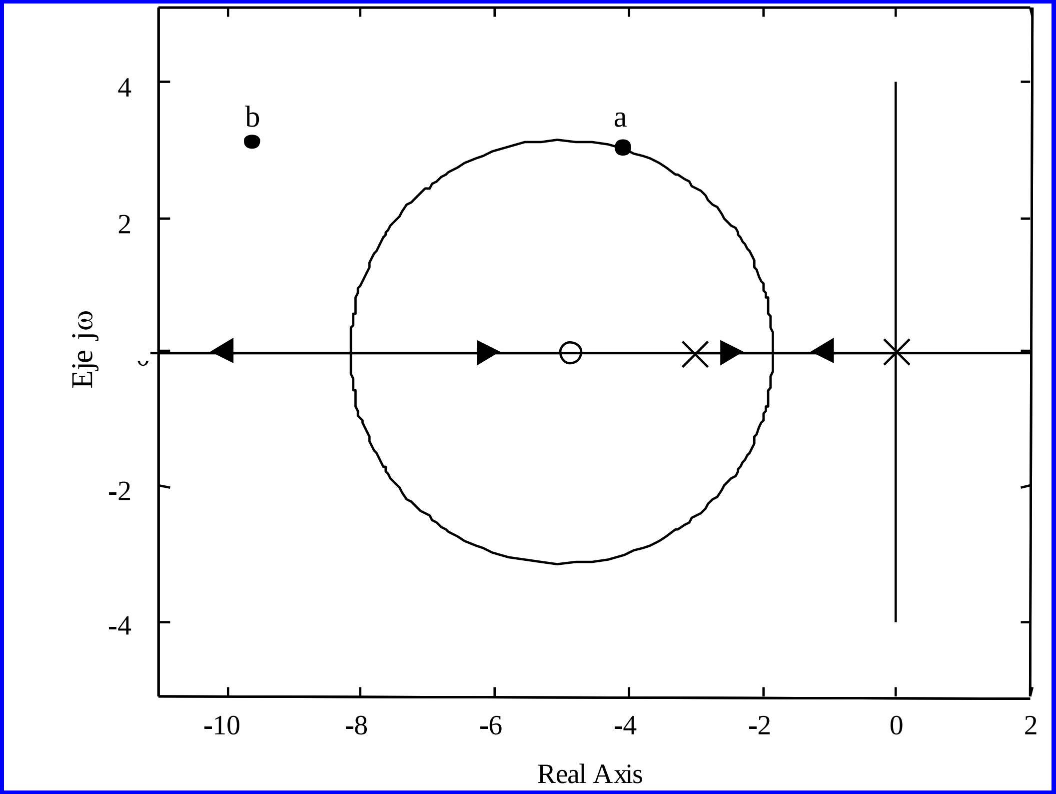
Cálculo gráfico del ángulo

- Para que se cumpla la condición de ángulo, se tiene:

$$\Sigma\,(Angulos\ de\ los\ \ polos) - \Sigma\,(Angulos\ de\ los\ ceros) = 180 \pm k\,360$$

- Si es que un punto cualquiera no cumple con la condición de ángulo entonces un polo de lazo cerrado no puede ubicarse en esa posición aunque se varíe la ganancia K entre cero e infinito. Esto se muestra en la siguiente figura:

- Una raíz de lazo cerrado no puede ubicarse en b aunque la ganancia K varíe entre cero e infinito.



- Para ubicar una raíz en b deben agregarse polos o ceros en la función de transferencia a lazo abierto

- La condición de módulo es la mas fácil de lograr ya que se cuenta con una ganancia variable en el controlador. Esta ganancia se debe ajustar para:

$$\left|G(s)H(s)\right| = K \left. \left| \frac{\prod_{1}^{m}(s+z_i)}{s^n \prod_{1}^{l}(s+p_j)} \right| \right._{s=\sigma \pm j\omega} = 1$$

- Donde $s=\sigma\pm j\omega$ es el punto donde se desea posicionar una raíz de lazo cerrado.

Lugar Geométrico de las Raíces

- Es relativamente simple demostrar que la ganancia K se puede calcular gráficamente como:

$$K = \frac{\Pi(distancia\ del\ punto\ a\ los\ polos)}{\Pi(distancia\ del\ punto\ a\ los\ ceros)}$$

- Cuando no existen ceros en G(s)H(s) el denominador es igual a uno

Lugar Geométrico de las Raíces

- Libros adecuados para efectuar un estudio mas profundo del método del lugar de la raíz son:
-
- Richard C. Dorf, Robert H. Bishop, “ Modern Control System
- John J. D’Azzo and Constantine H. Houpis, “Linear Control System Analysis and Design, Conventional and Modern”,

Otras Reglas del Lugar Geométrico de las Raíces

- Para sistemas de ganancia positiva, existe lugar de la raíz en el eje real cuando el número de polos y ceros a la derecha es impar. Para sistemas con ganancia K negativa, existe lugar de la raíz en el eje real cuando el número total de polos y ceros a la derecha es par.

Otras Reglas del Lugar Geométrico de las Raíces

- El número de raíces es igual al número de polos de lazo abierto.

- El lugar de la raíz es simétrico con respecto al eje real. Esto se debe a que la respuesta en el tiempo no puede contener términos imaginarios.

Otras Reglas del Lugar Geométrico de las Raíces

- Si en un sistema existen N_p polos y N_z ceros, entonces (N_p-N_z) lugares de las raíces van hacia el infinito a través de asíntotas.
- El ángulo de las asíntotas con respecto al eje real puede calcularse como:

$$\theta = \frac{(2k+1)}{N_p - N_z} 180$$

- Donde k=0,1,2......(N_p-N_z-1).

Otras Reglas del Lugar Geométrico de las Raíces

- Estas asíntotas están centradas en:

$$\sigma_A = \frac{\Sigma\, Polos\ G(s)H(s) - \Sigma\, Ceros\ G(s)H(s)}{N_p - N_z} = \frac{\Sigma(-p_j) - \Sigma(-z_i)}{N_p - N_z}$$