

Ejemplos de diseño de PD y PID por lugar de raíces

Control Básico - Bioingeniería - FI-UNER

31 de mayo de 2019

1. Introducción

En las unidades anteriores se presentaron mecanismos para caracterizar una planta determinada. Entre ellos, vimos la respuesta a estímulos conocidos, en análisis del lugar geométrico de raíces, y también el análisis frecuencial. Generalmente, cuando se solicita el diseño de un sistema de control (como se define en la Figura 1), parte de los requisitos se presentan en términos de parámetros temporales (tiempo de estabilización, máximo sobreimpulso, etc.) o frecuenciales (margen de fase, margen de ganancia).

En la clase de teoría se vieron distintos tipos de reguladores, entre los que mencionamos:

- On/Off
- P
- PD $\rightarrow G_c(s) = G_{PD}(s) = K_p(T_d s + 1)$
- PI $\rightarrow G_c(s) = G_{PI}(s) = K_p(T_i s + 1)/(T_i s)$
- PID¹ $\rightarrow G_c(s) = G_{PID}(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s)$

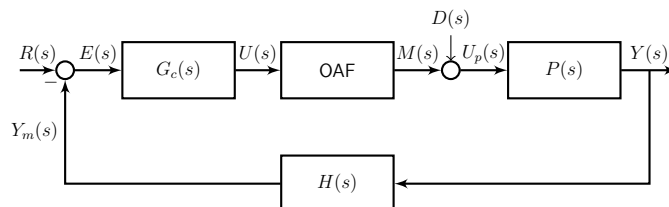


Figura 1: Esquema de control clásico

Una descripción detallada de cada uno de ellos se puede consultar en (OGATA, 2010). A continuación, mencionamos las principales características de aquellos con los que vamos a trabajar en mayor medida.

¹forma estándar, no interactiva, o ideal

1.1. Regulador PD

Entre sus principales características podemos mencionar:

- Esencialmente anticipativo.
- Afecta el error en estado estable sólo si éste varía con el tiempo.
- Reduce t_r , t_s y el M_p .
- No es efectivo para sistemas ligeramente amortiguados o inicialmente inestables
- La adición de un cero mueve el lugar de raíces a la izquierda

Su función de transferencia genérica queda determinada por

$$G_c(s) = G_{PD}(s) = K_p(T_d s + 1) \quad (1)$$

mientras que su síntesis circuital se expresa en la Figura 2, con función de transferencia:

$$G_{PD}(s) = \frac{R_4 R_2}{R_3 R_1} (R_1 C_1 s + 1) \quad (2)$$

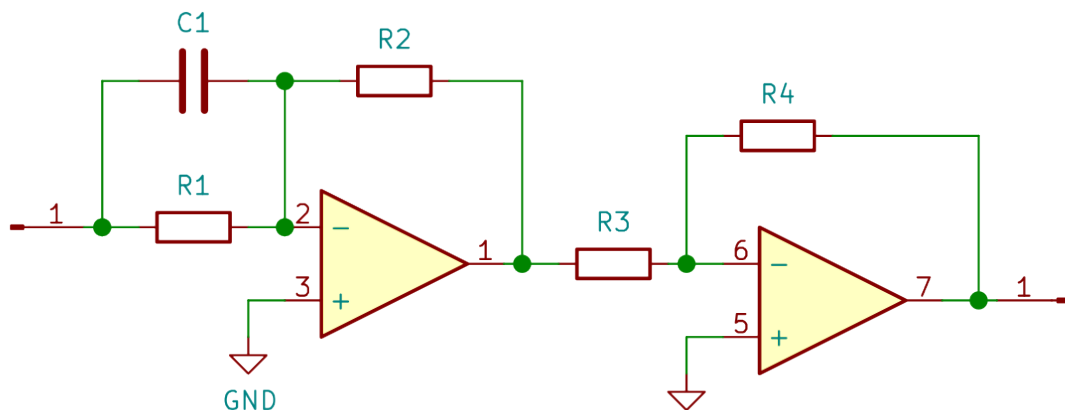


Figura 2: Síntesis circuital de regulador PD

1.2. Regulador PI

Entre sus principales características podemos mencionar:

- Reduce el error estacionario del sistema.
- Aumenta la inestabilidad relativa del sistema

- Reduce t_s .
- En sistemas de orden superior, puede tener un efecto desestabilizante si no se calcula apropiadamente.
- La adición de un polo mueve el lugar de raíces a la derecha

Su función de transferencia genérica queda determinada por

$$G_{PI}(s) = K_p(T_i s + 1)/(T_i s). \quad (3)$$

Para este controlador, la síntesis circuital se expresa en la Figura 3, con función de transferencia

$$G_{PI}(s) = \frac{R_4 R_2 R_2 C_2 s + 1}{R_3 R_1 R_2 C_2 s}. \quad (4)$$

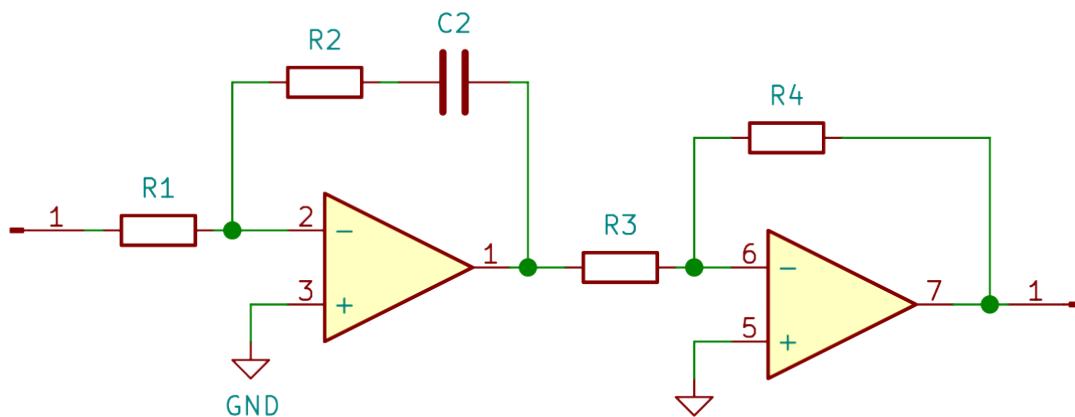


Figura 3: Síntesis circuital de regulador PI

1.3. Regulador PID

Es un regulador que combina características de un PI con las de un PD, introduciendo dos ceros y un polo. Entre sus principales características, se menciona:

- El termino integral busca anular el error estacionario.
- La mejora en el transitorio se obtiene con el termino derivativo (en ausencia de ruido).
- Buen compromiso entre rapidez de respuesta y error.

Su función de transferencia genérica viene dada por :

$$G_{PID}(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s) \quad (5)$$

mientras que su síntesis circuital se expresa en la Figura 4, con función de transferencia:

$$G_{PI}(s) = \frac{R4 R2 (R1C1s + 1)(R2C2s + 1)}{R3 R1 R2C2s} \quad (6)$$

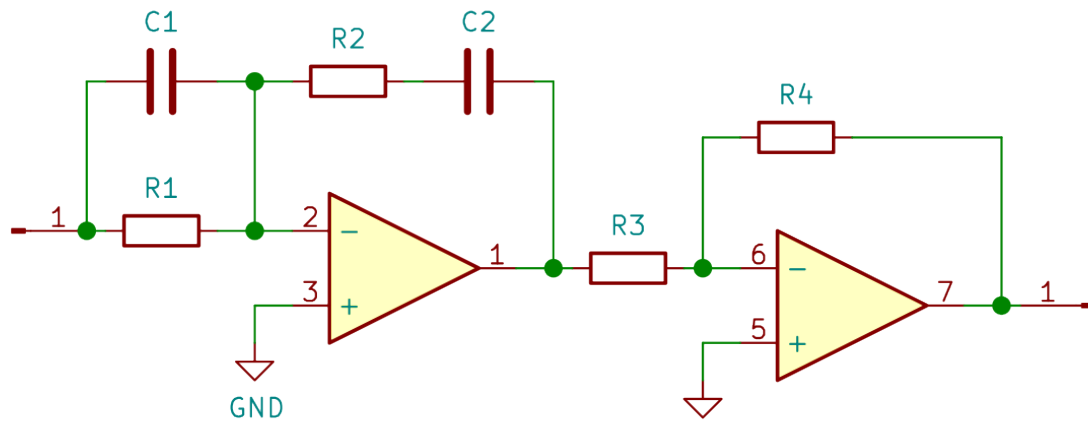


Figura 4: Síntesis circuital de regulador PID

2. Diseño por lugar de raíces: Casos de estudio

2.1. Enunciado

Ejemplo 1. Se desea controlar una planta como en la Figura 1, donde $G_p(s)$ viene dado por

$$G_p(s) = \frac{1}{(s^2 + 3,6s + 9)} \quad (7)$$

OAF = 1 y $H(s) = 1$, que permita un tiempo de establecimiento t_s que satisfaga $2 \leq t_s \leq 3$, y que trabaje con un $\zeta = 0,5$.

2.2. Planteo

Dado que los requisitos son en términos de parámetros temporales, se puede utilizar la metodología de diseño de lugar de raíces. Esta metodología busca introducir un regulador con una dinámica determinada, de modo tal que el lugar de raíces del sistema compensado pase por un punto particular del plano complejo, al que denominamos *polo deseado*. Para ello, lo primero que vemos es si con el controlador más simple (K) el sistema a regular pasa por el lugar de raíces. El sistema tiene un par de polos complejos conjugados en $s = -1,8 \pm 2,4j$, lo que genera dos ramas que van a los ceros en $s = \pm\infty$.

```
1 close all;
```

```

2 clear all;
3 s = tf('s');
4 Gp = 1/(s^2+3.6*s+9);
5 PolesGp = pole(Gp)
6 zita = 0.5;
7 ts = 2;
8 sigma = 4/ts;
9 wn = sigma/zita;
10 wd = wn*sqrt(1-zita^2);
11 pd1 = -sigma+wd*1i
12 pd2 = -sigma-wd*1i
13 figure;
14 rlocus(Gp);
15 hold on;
16 plot(real(pd1),imag(pd1),'rx');
17 plot(real(pd2),imag(pd2),'rx');

```

De los cálculos, surge que el polo deseado es $p_{d1,2} = -2 \pm 3,4641j$; observamos que el lugar de raíces del sistema no pasa por el polo deseado, por lo que regulando sólo con ganancia no podremos satisfacer los requisitos de diseño. Esto nos lleva a introducir un elemento con dinámica, por lo que la ecuación característica del sistema quedará determinada por

$$EC : 1 + G_c(s)G_p(s)H(s) = 0 \quad (8)$$

Para satisfacer la ecuación característica (8), la dinámica del regulador a introducir deberá ser tal que satisfaga las condiciones de módulo y ángulo:

$$|G_c(s)G_p(s)H(s)| = 1 \text{ y } \angle G_c(s)G_p(s)H(s) = 180^\circ \quad (9)$$

Para ello, debemos calcular el aporte angular que habrá de dar el regulador a introducir. Obsérvese que el ángulo se calcula en sentido antihorario, trasladando el origen de coordenadas a la singularidad con respecto a la que se mide el aporte angular, como se ve en la Figura 5. Este cálculo puede realizarse como

$$\phi = \sum_{i=1}^n \alpha_{p_i} - \sum_{j=1}^m \alpha_{z_j} - 180 = \alpha_{p_1} + \alpha_{p_2} - 180 \quad (10)$$

```

1 alpha1 = angle(pd1-PolesGp(1))*180/pi
2 alpha2 = angle(pd1-PolesGp(2))*180/pi
3 phi = alpha1+alpha2-180

```

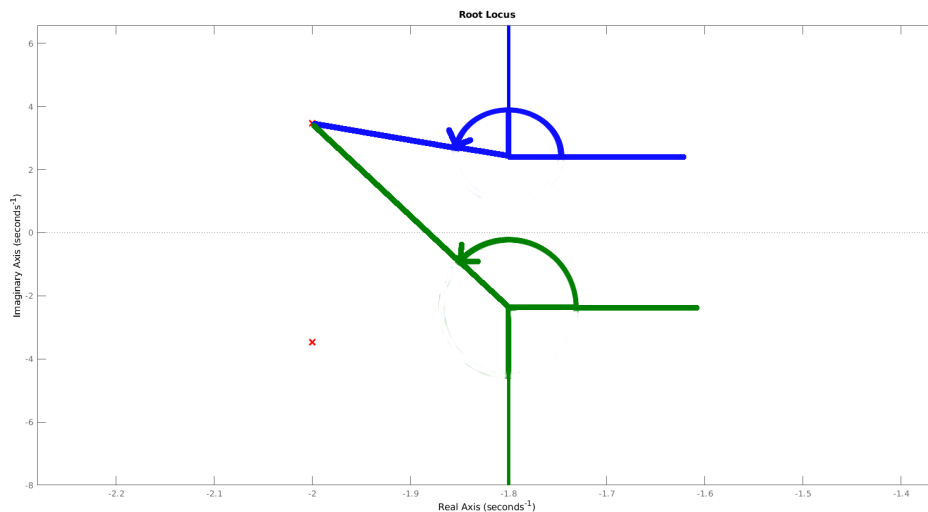


Figura 5: Cálculo de los aportes angulares.

Para los valores seleccionados, este cálculo nos da un valor de $\phi = 12,598^\circ$; dado que $\phi > 0$, podemos elegir regular con un regulador PD, o un PID. Para reducir la complejidad, probamos primero con un PD.

2.3. Cálculo del regulador PD

A fin de determinar la posición del cero del regulador PD, utilizamos trigonometría, y verificamos que el lugar de raíces del sistema compensado pase por el polo deseado:

```

1 dx = imag(pd1)/tand(phi)
2
3 z1 = dx+real(pd1)           % posicion del polo deseado
4 Gd = (s/abs(z1)+1);
5 figure;
6 rlocus(Gp*Gd)
7 hold on;
8 plot(real(pd1),imag(pd1),'rx');
9 plot(real(pd2),imag(pd2),'rx');
```

El resultado de esta verificación puede observarse en la Figura 6. Vemos entonces que la condición de ángulo ha quedado satisfecha, por lo que resta calcular la ganancia del regulador para terminar de satisfacer las condiciones de (9). Para ello podemos:

1. Medir en la Figura 6 el valor de la ganancia: posicionándonos con el cursor en el polo deseado y leyendo el valor de ganancia que nos da la aplicación;

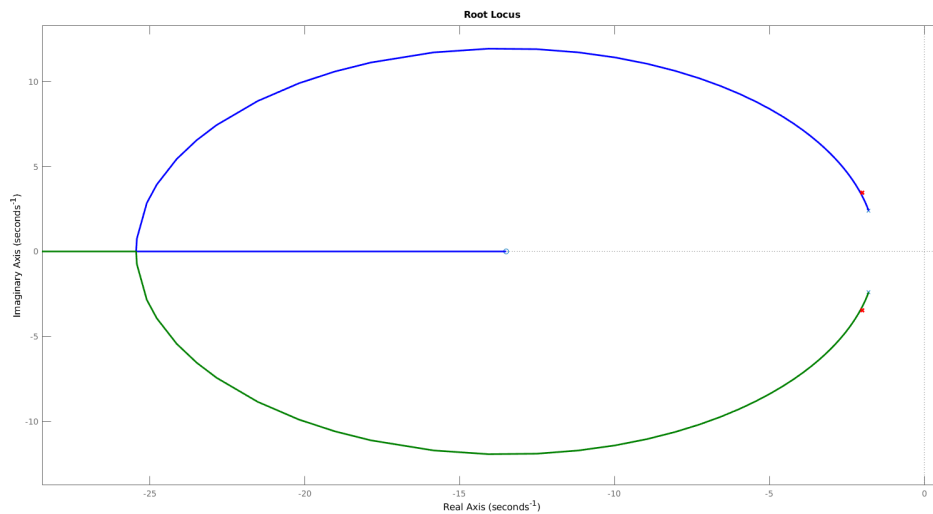


Figura 6: Lugar de raíces del sistema regulado con un PD.

2. Calcular $|G_d(s)G_p(s)|$ con $s = pd_1 \rightarrow$ su inversa será el valor de la ganancia que tiene que aportar el regulador:

```
1      Kpd = 1/abs(evalfr(Gd*Gp,pd1));
2      Gpd = Kpd*Gd;
```

Para estos valores, el cero queda ubicado en $s = -13,5$ y la ganancia del regulador da $K_{pd} = 7,14$. Verificamos ahora que la respuesta temporal del sistema regulado satisfaga los requisitos de diseño; para ello

```
1      figure;
2      step(feedback(Gp*Gpd,1));
```

Vemos en 7 que el sistema responde con un tiempo de establecimiento $t_s = 1,91[s]$, lo cual está por debajo de los requisitos de diseño. Este adelantamiento en el comportamiento del sistema pone en evidencia el comportamiento anticipativo del regulador PD. Si el requerimiento de $2 \leq t_s \leq 3$ fuera un requerimiento estricto, deberíamos elegir otro tipo de regulador. Obsérvese además que utilizando el regulador seleccionado, el sistema a lazo cerrado se estabiliza en un valor de amplitud de $y = 0,44$; este es su valor de ganancia estática a lazo cerrado e impacta directamente en el error del sistema. Una alternativa puede ser considerar un valor de t_s para el diseño superior al utilizado inicialmente, pero no resolveríamos el problema del error. La otra es diseñar para el mismo valor de t_s , un regulador PID. Veámoslo en el siguiente caso.

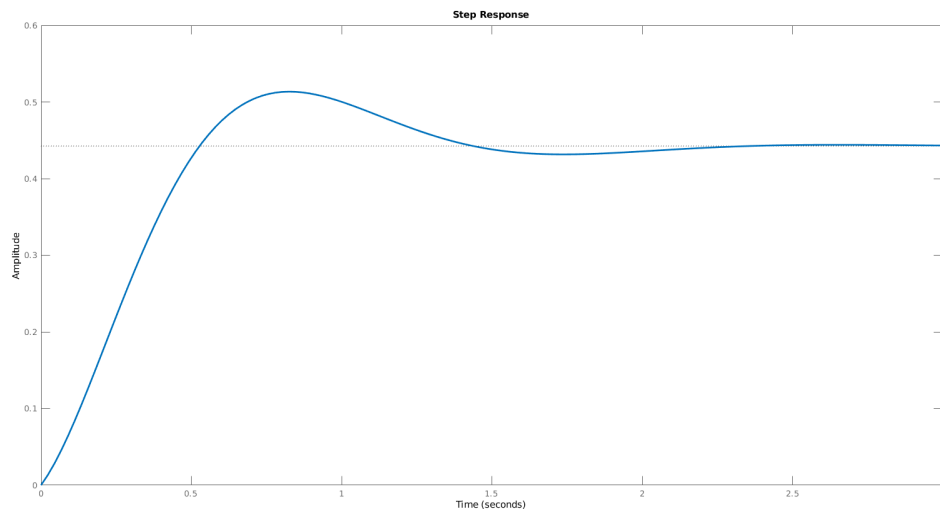


Figura 7: Respuesta al escalón que el sistema regulado con un PD.

2.4. Cálculo del regulador PID

Para calcular el regulador PID, habremos de recalcular el aporte angular que deberán realizar los ceros de nuestro regulador. Para ello, consideramos el aporte del polo al origen (proveniente del integrador) al polo deseado:

$$\phi = \sum_{i=1}^n \alpha_{p_i} - \sum_{j=1}^m \alpha_{z_j} - 180 = \alpha_{p_0} + \alpha_{p_1} + \alpha_{p_2} - 180 \quad (11)$$

```
1 alpha0 = angle(pd1-0)*180/pi
2 phi = alpha0 + alpha1 + alpha2 - 180
```

Este aporte angular deberá ser entregado por los dos ceros del regulador PID, y esto va a estar determinado por su ubicación relativa; su relación surge de la resolvente del numerador de (5). De dicha resolvente surge que la relación entre T_d y T_i determinará que los ceros sean complejos conjugados, reales iguales y negativos, o reales distintos y negativos. Elegir los polos reales negativos e iguales nos lleva a tener que calcular un sólo cero, y en la implementación, una sola combinación de capacitores y resistencias. Dado que los ceros sean reales e iguales, el aporte angular ϕ en (11) será entregado en partes iguales por los dos ceros. La ubicación de los ceros queda entonces determinada por trigonometría, y el cálculo de la ganancia del regulador, la verificación de la traza del lugar de raíces y del requisito temporal se realiza de un modo similar al del cálculo del regulador $G_{PD}(s)$:

```
1 phi2 = phi/2;
2 dx = imag(pd1)/tand(phi2)
3 z12 = -dx+real(pd1)
```



```

4 Td = abs(1/(2*z12))
5 Ti = 4*Td
6 Gid = (1+1/(Ti*s)+Td*s); % solo la parte integral
    derivativa, sin el proporcional
7 figure;
8 rlocus(Gp*Gid)
9 hold on;
10 plot(real(pd1),imag(pd1),'rx');
11 plot(real(pd2),imag(pd2),'rx');
12 K = 1/abs(evalfr(Gid*Gp,pd1));
13 Gpid = K*Gid;
14 figure;
15 step(feedback(Gp*Gpid,1))

```

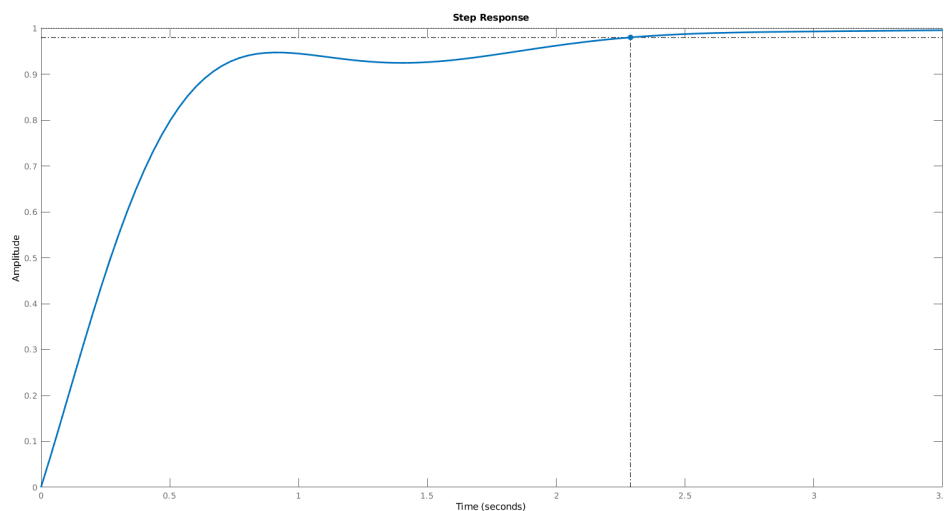


Figura 8: Respuesta al escalón que el sistema regulado con un PID.

La respuesta al escalón obtenida se presenta en la Figura 8. Obsérvese que, si bien se cumplen los requisitos de tiempo de establecimiento, y el error en estado estacionario es nulo (característica aportada por la parte integral del regulador a la planta), la dinámica obtenida no se corresponde con una típica de segundo orden. La razón de este comportamiento se debe a que

1. Los polos a lazo cerrado del sistema han quedado en

$$s = \{-2 + 3,4641j, -2 - 3,4641j, -1,3755\}. \quad (12)$$

La parte real del tercer polo a lazo cerrado es menor a la parte real de los polos para

los cuales se diseñó la planta, y tiene un valor muy cercano a la magnitud de los mismos; esto produce que el comportamiento sea similar al de un primer orden.

2. Por otro lado, los ceros que introduce el regulador PID (en $s = -3,52$) son también ceros de la planta a lazo cerrado, y al estar cerca del polo deseado modulan la respuesta de la planta.

A fin de canalizar estas dificultades, se pueden utilizar otras técnicas para el cálculo del regulador. Por un lado, se podría explorar colocar los ceros como reales negativos y distintos. Otra alternativa es utilizar el método de asignación de polos, ubicando el tercer polo lo suficientemente lejos del polo deseado. Estas variantes, así como el cálculo de las realizaciones circuitales, se dejan al lector.

Referencias

OGATA, K. *INGENIERIA DE CONTROL MODERNA*. [S.I.]: PRENTICE-HALL, 2010.