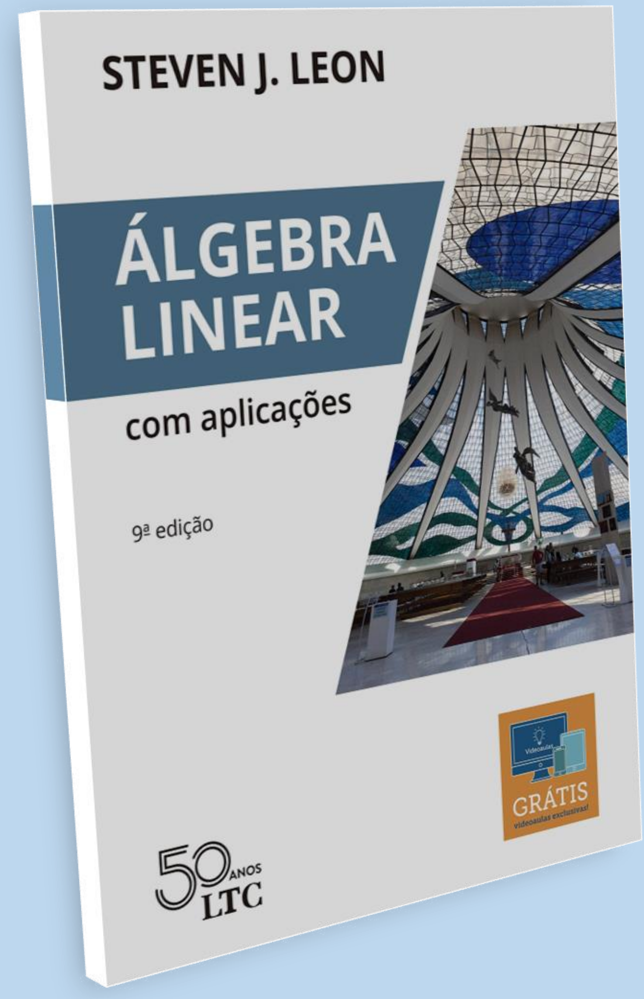
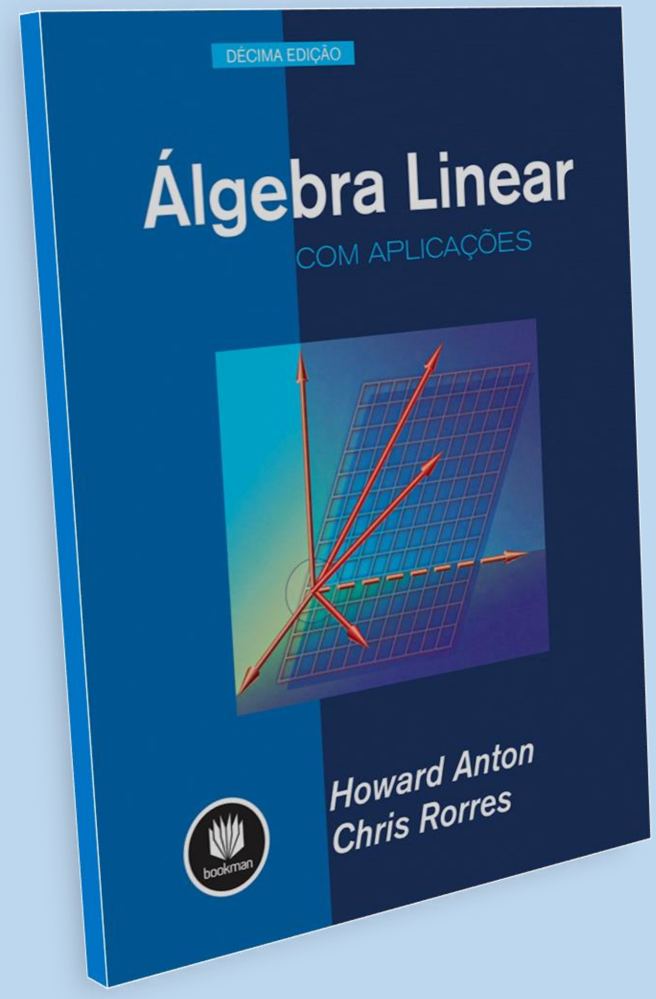
Álgebra Linear

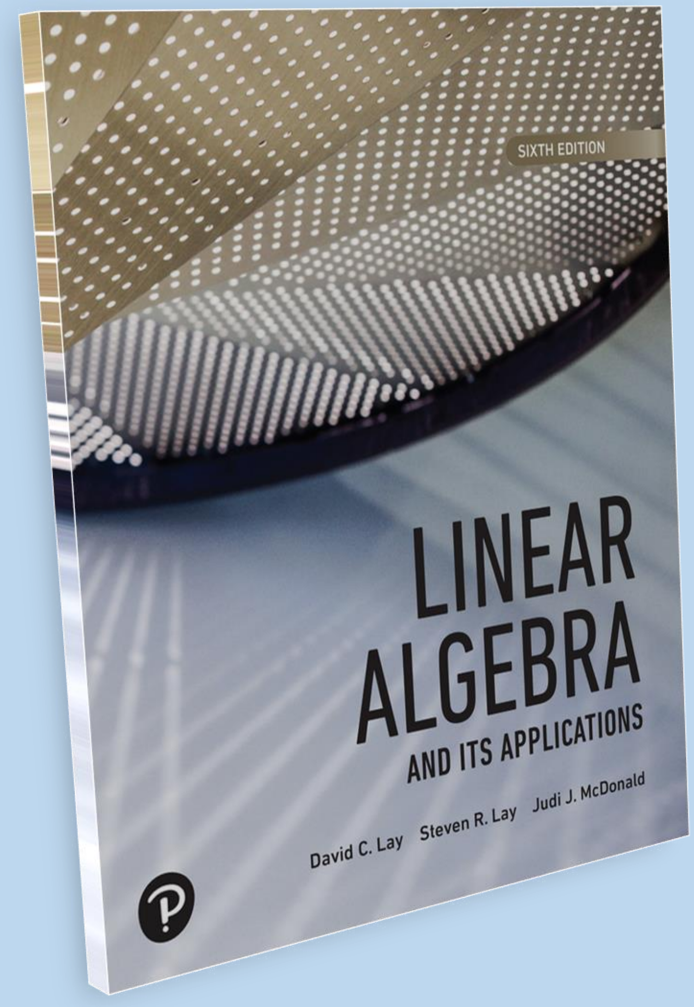
Sistemas Lineares – Regra de Cramer

Profa. Elba O. Bravo Asenjo
eoba@uenf.br

Referências Bibliográficas







Sistemas Lineares Homogêneos

Definição. Um sistema de equações lineares é dito ***homogêneo*** se os termos constantes são todos zero; ou seja, o sistema tem a forma

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Todo sistema de equações lineares homogêneo é ***consistente.***
Só há duas possibilidades para suas soluções.

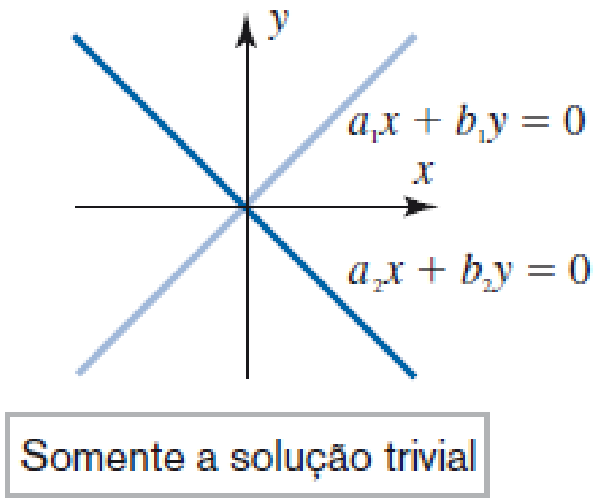
- O sistema tem somente a ***solução trivial*** ou ***solução nula*** $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$
- O sistema tem uma infinidade de soluções além da solução trivial (soluções ***não triviais***).

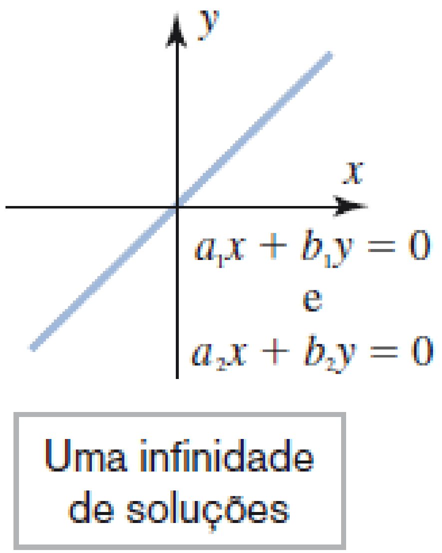
Exemplos de Sistemas homogêneos

Exemplo 1. Seja o caso especial de um sistema linear homogêneo de duas equações em duas incógnitas, digamos

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= 0 \quad (a_1, b_1 \text{ não ambas nulas}) \\ a_2x + b_2y &= 0 \quad (a_2, b_2 \text{ não ambas nulas}) \end{aligned}$$

Os gráficos das equações são retas pela origem, e a solução trivial corresponde ao ponto de corte na origem





Exemplos de Sistemas Homogêneos

Exemplo 2. Resolva o seguinte sistema homogêneo com eliminação de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \phantom{{}-2x_4} + 2x_5 \phantom{{}-3x_6} &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= 0 \\ 5x_3 + 10x_4 \phantom{{}+4x_5} + 15x_6 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 \phantom{{}-5x_3} + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Solução

A matriz aumentada do sistema homogêneo dado é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 0 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow -L_2$$

Sistemas Homogêneos

Exemplo 2. Continuação

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftrightarrow L_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{6} L_3 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 6L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Variáveis **Líderes** x_1 , x_3 , x_6

Variáveis **livres** x_2 , x_4 , x_5

Sistemas Homogêneos

O sistema de equações correspondente é

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad + 4x_4 + 2x_5 \qquad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \qquad\qquad &= 0 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo para as variáveis líderes, obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Sejam $x_2 = r$, $x_4 = s$, $x_5 = t$, onde r, s e t são valores arbitrários

Logo podemos expressar o conjunto de soluções parametricamente por

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, x_6 = 0$$

Observação. A solução trivial é obtida fazendo $r = s = t = 0.$

Sistemas Lineares e Matrizes Invertíveis

Teorema. Uma matriz quadrada A é invertível se, e só se, *det(A)* $\neq$ *0.*

Teorema. Se A for invertível, então

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

Prova

Como $A^{-1}A = I,$

segue que $\det(A^{-1}A) = \det(I).$

Logo, devemos ter $\det(A^{-1})\det(A) = 1$

Como det(A) $\neq$ 0, dividindo ambos os lados dessa equação por $\det(A)$ obtém-se

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

Matriz Adjunta de A

Definição. Se A for uma matriz $n \times n$ qualquer e C_{ij} o cofator de a_{ij}, então a matriz

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

é denominada ***matriz de cofatores de A***. A transposta dessa matriz é denominada ***adjunta de A*** e denotada por **adj(*A*)**.

Exemplo 1. Determinar a matriz adjunta de A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Adjunta de A – Exemplo 1

Exemplo 1. Os cofatores de A são

$C_{11} = +\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 12$ $\quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(-6)=6$ $\quad C_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -16$

$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$ $\quad C_{22} = +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$ $\quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(-16)=16$

$C_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 12$ $\quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10$ $\quad C_{33} = +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 16$

De modo que a matriz dos cofatores é

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

E a matriz adjunta de A é

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Inversa de uma Matriz via Matriz Adjunta

Teorema. A inversa de uma matriz usando sua adjunta

Se A for uma matriz invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$$

Exemplo 2. Seja a matriz do Exemplo 1.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos

$\det(A) = 64$ e

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Inversa de uma matriz

Assim,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & -\frac{10}{64} \\ -\frac{16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix}$$

Regra de Cramer

Teorema. Regra de Cramer

Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *for um sistema de n equações lineares em n incógnitas tal que* $\det(A) \neq 0$, *então o sistema tem uma única solução. Essa solução é*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

em que A_j *é a matriz obtida substituindo as entradas da j-ésima coluna de A pelas entradas da matriz*

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Regra de Cramer - Exemplo

Exemplo. Usando a Regra de Cramer resolver o sistema

$$\begin{aligned} x_1 + \quad\quad + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Solução

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11} \quad \blacktriangleleft$$

Sistemas Lineares

Exemplo. Seja o sistema, determine os valores de *a* com os quais o sistema não tem solução, tem exatamente uma solução ou tem uma infinidade de soluções.

$$
\begin{aligned}
x + \quad 2y &= 1 \\
2x + (a^2 - 5)y &= a - 1
\end{aligned}
$$

Solução

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a^2-5 & a-1 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a^2-9 & a-3 \end{bmatrix}
$$

i) Solução única se, e somente se det(A) $\neq 0$, isto é , $a^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 3$

Sistemas Lineares

ii) Infinitas soluções, quando $a^2 - 9 = 0 \quad e \quad a - 3 = 0$

$a^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 3$ ou $a = -3$ e ***a = 3***

Logo o sistema tem infinitas soluções quando ***a = 3***

iii) Nenhuma solução, quando $a^2 - 9 = 0$ e $a - 3 \neq 0$

Isto é, $a = 3$ ou $a = -3$ e $a \neq 3$

Logo o sistema não tem solução quando $\boldsymbol{a = -3}$