

IMPLICAÇÃO LÓGICA

Lógica Matemática



IMPLICAÇÃO LÓGICA

DEFINIÇÃO

X Diz-se que uma proposição $P(p, q, r, \dots)$ **implica logicamente** ou apenas **implica** uma proposição $Q(p, q, r, \dots)$, se $Q(p, q, r, \dots)$ é verdadeira (V) todas as vezes que $P(p, q, r, \dots)$ é verdadeira (V).

X Dito de forma equivalente, uma proposição $P(p, q, r, \dots)$ implica uma proposição $Q(p, q, r, \dots)$, se não ocorrem $P(p, q, r, \dots)$ e $Q(p, q, r, \dots)$ com valores lógicos simultâneos V e F, respectivamente, em uma mesma linha da tabela-verdade.

X Denota-se que a proposição $P(p, q, r, \dots)$ **implica** a proposição $Q(p, q, r, \dots)$ da seguinte maneira:

$$P(p, q, r, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, \dots)$$

X Vale observar que os símbolos \rightarrow e \Rightarrow são distintos. O primeiro corresponde a operação lógica condicional enquanto que o segundo é de relação de implicação.

IMPLICAÇÃO LÓGICA

EXEMPLOS

- x Com base na definição de implicação lógica podemos deduzir algumas implicações:
 - Qualquer proposição implica em uma tautologia.
 - Somente uma contradição pode implicar outra contradição.

IMPLICAÇÃO LÓGICA

PROPRIEDADES

- ✗ A implicação lógica é uma **relação** entre proposições (diferente do operador condicional) que goza das propriedades reflexiva (R) e transitiva (T), denotadas simbolicamente como:

$$(R) \quad P(p, q, r, \dots) \Rightarrow P(p, q, r, \dots)$$

$$(T) \quad \text{se } P(p, q, r, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, \dots) \text{ e} \\ Q(p, q, r, \dots) \Rightarrow R(p, q, r, \dots) \text{ então} \\ P(p, q, r, \dots) \Rightarrow R(p, q, r, \dots)$$

- ✗ Apenas para ilustrar o significado de relações **reflexivas**, **simétricas** e **transitivas**, podemos pensar nas relações entre pessoas.

- Uma relação de parentesco do tipo: “É parente de” pode ser considerada reflexiva, simétrica e transitiva.
- Já uma relação de afeto do tipo: “Gosta de” pode ser reflexiva, costuma não ser simétrica, nem transitiva.

IMPLICAÇÃO LÓGICA

EXEMPLO 1A

✕ Considere as seguintes proposições:

$$(p \wedge q), \quad (p \vee q), \quad (p \leftrightarrow q) \quad (1)$$

✕ E as suas tabelas-verdade correspondentes:

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

✕ Observe que $(p \wedge q)$ é verdadeira (V) somente na linha 1, onde $(p \vee q)$ e $(p \leftrightarrow q)$ também são verdadeiras.

✕ Com isso, pode-se concluir que:

$$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow (p \leftrightarrow q)$$

✕ Podemos interpretar isso, da seguinte maneira:

- Sempre que $(p \wedge q)$ é verdadeira, temos que $(p \vee q)$ é verdadeira.
- Sempre que $(p \wedge q)$ é verdadeira, temos que $(p \leftrightarrow q)$ é verdadeira.

✕ No entanto, observe que neste caso não existe implicação no sentido inverso:

$$(p \vee q) \nRightarrow (p \wedge q)$$

$$(p \leftrightarrow q) \nRightarrow (p \wedge q)$$

IMPLICAÇÃO LÓGICA

EXEMPLO 1B

✕ Observando novamente a tabela anterior:

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

✕ Podemos também mostrar as seguintes implicações lógicas que são conhecidas **regras de inferência**:

i) $p \wedge q \Rightarrow p$ e $p \wedge q \Rightarrow q$ (Simplificação)

ii) $p \Rightarrow p \vee q$ e $q \Rightarrow p \vee q$ (Adição)

IMPLICAÇÃO LÓGICA

EXEMPLO 2

✕ Considere as seguintes proposições:

$$(p \leftrightarrow q), \quad (p \rightarrow q), \quad (q \rightarrow p) \quad (2)$$

✕ E as suas tabelas-verdade correspondentes:

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

✕ Observe que $(p \leftrightarrow q)$ é verdadeira(V) nas linhas 1 e 4, e nestas linhas $(p \rightarrow q)$ e $(q \rightarrow p)$ também são verdadeiras. Com isso, pode-se concluir que:

$$(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (q \rightarrow p)$$

IMPLICAÇÃO LÓGICA

EXEMPLO 3

- ✗ Considere a seguinte proposição:

$$(p \vee q) \wedge \neg p \quad (3)$$

- ✗ E a sua tabela-verdade correspondente:

p	q	$(p \vee q)$	$\neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg p$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

- ✗ Observe que $(p \vee q) \wedge \neg p$ é verdadeira (V) somente na linha 3, onde a proposição q também é verdadeira (V). Com isso, temos a seguinte implicação lógica, denominada de **Regra do Silogismo Disjuntivo**:

$$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$$

- ✗ Uma outra implicação semelhante a anterior que não aparece na tabela verdade é:

$$(p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow p$$

- ✗ Ambas implicações podem ser usadas como regras de inferência.

IMPLICAÇÃO LÓGICA

EXEMPLO 4

- ✗ Considere a seguinte proposição:

$$(p \rightarrow q) \wedge p \quad (4)$$

- ✗ E a sua tabela-verdade correspondente:

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

- ✗ Observe que $(p \rightarrow q) \wedge p$ é verdadeira (V) somente na linha 1, onde a proposição q também é verdadeira (V). Com isso, temos a seguinte implicação lógica, denominada de **Regra Modus ponens**:

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

- ✗ Outras implicações que podem ser observadas a partir da tabela-verdade são dois casos de simplificação:

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow p$$

IMPLICAÇÃO LÓGICA

EXEMPLO 5

- ✗ Considere as seguintes proposições:

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \quad \text{e} \quad \neg p \quad (5)$$

- ✗ E a suas tabelas-verdade correspondentes:

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\neg p$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

- ✗ Observe que $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$ é verdadeira (V) somente na linha 4, onde a proposição $\neg p$ também é verdadeira (V). Com isso, temos a seguinte implicação lógica, denominada de **Regra Modus tollens**:

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$$

- ✗ A mesma tabela-verdade também mostra a seguinte implicação:

$$\neg p \Rightarrow (p \rightarrow q)$$

- ✗ Observe que basta ter a negação do antecedente de uma condicional para provar que essa condicional é verdadeira sem importar o que é o consequente.

TAUTOLOGIAS E IMPLICAÇÃO LÓGICA

TEOREMA

X **Teorema.**– A proposição $P(p, q, r, \dots)$ implica a proposição $Q(p, q, r, \dots)$, ou seja:

$$P(p, q, r, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, \dots)$$

se e somente se a condicional:

$$P(p, q, r, \dots) \rightarrow Q(p, q, r, \dots)$$

é tautológica.

TAUTOLOGIAS E IMPLICAÇÃO LÓGICA

COLORARIO

- x **Corolário.**– Se $P(p, q, r, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, \dots)$ então também temos que:

$$P(P_0, Q_0, R_0, \dots) \Rightarrow Q(P_0, Q_0, R_0, \dots)$$

quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0, \dots .

- x Este colorário é semelhante ao princípio de substituição apresentado anteriormente.

TAUTOLOGIAS E IMPLICAÇÃO LÓGICA

EXEMPLO 1

- ✗ Considere a seguinte condicional:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r) \quad (1)$$

- ✗ Podemos provar que esta condicional é **tautológica** com base em tabelas-verdade.

- ✗ Com isso, temos a seguinte implicação lógica, denominada de **Regra do Silogismo hipotético**.

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$$

$(p$	\rightarrow	$q)$	\wedge	$(q$	\rightarrow	$r)$	\rightarrow	$(p$	\rightarrow	$r)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

TAUTOLOGIAS E IMPLICAÇÃO LÓGICA

EXEMPLO 2

- ✗ Considere a seguinte proposição:

$$p \wedge \neg p \rightarrow q \quad (2)$$

- ✗ Podemos provar que esta condicional é **tautológica** com base em tabelas-verdade.

p	q	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$p \wedge \neg p \rightarrow q$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

- ✗ Com isso, temos a seguinte implicação lógica:

$$p \wedge \neg p \Rightarrow q$$

- ✗ Podemos concluir que de uma contradição como $p \wedge \neg p$ se deduz qualquer proposição q (Princípio da inconsistência).
- ✗ Colocado de outra forma, a partir de uma contradição podemos concluir qualquer coisa. Por isso, assume-se que partimos de uma afirmação sempre verdadeira.

TAUTOLOGIAS E IMPLICAÇÃO LÓGICA

EXEMPLO 3

- ✗ Podemos provar que $(p \leftrightarrow q) \wedge p$ implica a proposição q .
- ✗ Basta mostrar que a condicional $(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ é **tautológica**. Mostra-se isso na seguinte tabela-verdade:

- ✗ Com isso, temos a seguinte implicação lógica:

$$(p \leftrightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

REFERÊNCIAS

- x De Alencar Filho, Edgar. Iniciação à Lógica Matemática. Capítulo 5. Editora Nobel. São Paulo. 1975. Reimpresso em 2015.