Equivalência Lógica

Lógica Matemática

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO UENF

Prof. Fermín A. Tang

Equivalência Lógica

Definição

- Diz-se que uma proposição $P(p, q, r, \ldots)$ é logicamente equivalente ou apenas equivalente a uma proposição $Q(p, q, r, \ldots)$, se as tabelas-verdade destas duas proposições são idênticas.
- Denota-se que a proposição $P(p, q, r, \ldots)$ é equivalente a proposição $Q(p, q, r, \ldots)$ da seguinte maneira:

$$P(p, q, r, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \ldots)$$

- Vale observar que os símbolos $\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$ são distintos. O primeiro corresponde a operação bicondicional enquanto que o segundo é de relação entre proposições equivalentes.

Equivalência Lógica

Exemplos

- Como exemplos de proposições equivalentes, podemos considerar o caso particular em que as proposições $P(p, q, r, \ldots)$ e $Q(p, q, r, \ldots)$ são ambas tautologias ou são ambas contradições.

Equivalência Lógica

Propriedades

- A relação de equivalência lógica entre proposições goza das propriedades reflexiva(R), simétrica(S), e transitiva (T), denotadas simbolicamente como:

$(R)\quad P(p,q,r,\ldots) \Leftrightarrow P(p,q,r,\ldots)$

(S) se $P(p,q,r,\ldots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\ldots)$ então
$Q(p,q,r,\ldots) \Leftrightarrow P(p,q,r,\ldots)$

(T) se $P(p,q,r,\ldots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\ldots)$ e
$Q(p,q,r,\ldots) \Leftrightarrow R(p,q,r,\ldots)$ então
$P(p,q,r,\ldots) \Leftrightarrow R(p,q,r,\ldots)$

Equivalência Lógica

Exemplo 1

- As proposições $\neg\neg p$ e p são equivalentes, isto é, simbolicamente:

$$\neg\neg p \Leftrightarrow p$$

- Conhecida como Regra da dupla negação.
- Mostra-se isso com base na sua tabela-verdade:

p	$\neg p$	$\neg\neg p$
V	F	V
F	V	F

- Observe que as colunas de cada lado da equivalência são idênticas.
- Portanto, a dupla negação de uma proposição qualquer equivale a proposição em questão e é uma afirmação.

Equivalência Lógica

Exemplo2

- As proposições $(\neg p \to p)$ e p são equivalentes, isto é, simbolicamente:

$$\neg p \to p \Leftrightarrow p$$

- Conhecida como Regra de Clavius.
- Mostra-se isso com base na sua tabela-verdade:

p	$\neg p$	$\neg p \to p$
V	F	V
F	V	F

- Observe que as colunas de cada lado da equivalência são idênticas.

Equivalência Lógica

Exemplo 3

- As condicionais $(p \to p \wedge q)$ e $(p \to q)$ tem tabelas-verdade idênticas:

p	q	$p \wedge q$	$p \to p \wedge q$	$p \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

- Portanto, estas condicionais são equivalentes, verifica-se a equivalência lógica, denominada regra de absorção:

$$\boxed{p \to p \wedge q \Leftrightarrow p \to q}$$

Equivalência Lógica

Exemplo 4

- A condicional $(p \rightarrow q)$ e a disjunção $(\neg p \vee q)$ tem tabelas-verdade idênticas:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

- Portanto, as duas proposições são equivalentes, verifica-se a importante equivalência lógica:

$$\boxed{p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q}$$

Equivalência Lógica

Exemplo 5

- A bicondicional $(p \leftrightarrow q)$ e a conjunção $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ tem tabelas-verdade idênticas:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

- Portanto, as duas proposições são equivalentes, verifica-se a importante equivalência lógica:

$$\boxed{p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$$

- Observe que esta relação define a bicondicional como a conjunção de duas condicionais.

Equivalência Lógica

Exemplo 6

- Uma outra equivalência para e bicondicional será mostrada a seguir.
- A bicondicional $(p \leftrightarrow q)$ e a disjunção $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ tem tabelas-verdade idênticas:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
V	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V

- Portanto, as duas proposições são equivalentes, verifica-se a importante equivalência lógica:

$$\boxed{p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)}$$

- Esta relação define a bicondicional como a disjunção de duas situações possíveis para conseguir o valor verdadeiro; ou ambas as proposições são verdadeiras ou ambas são falsas. Caso contrário, ela será falsa.

Tautologias e Equivalência Lógica

Teorema

- Teorema.- A proposição $P(p,q,r,\dots)$ é equivalente a proposição $Q(p,q,r,\dots)$, ou seja:

$$P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\dots)$$

se e somente se a bicondicional:

$$P(p,q,r,\dots) \leftrightarrow Q(p,q,r,\dots)$$

é tautológica.

- Lembre que os símbolos $\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$ são distintos.
- O primeiro corresponde a operação bicondicional $(P \leftrightarrow Q)$, entre duas proposições P e Q.
- O segundo é a relação de equivalência entre as proposições P e Q, que estabelece que a bicondicional $P(p,q,r,\dots) \leftrightarrow Q(p,q,r,\dots)$ é tautológica.

Tautologias e Equivalência Lógica

Corolário

- **Corolário.-** Se $P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$ então também temos que:

$$P(P_0, Q_0, R_0, \dots) \Leftrightarrow Q(P_0, Q_0, R_0, \dots)$$

quaisquer que sejam as proposições $P_0, Q_0, R_0, \dots$.

- Este colorário é semelhante ao princípio de substituição apresentado anteriormente.

Tautologias e Equivalência Lógica

Exemplo 1

- Considere a seguinte bicondicional:

$$(p \wedge \neg q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \qquad (1)$$

- onde c é uma proposição cujo valor lógico é F (falsidade). Podemos provar que esta bicondicional é tautológica com base em tabelas-verdade.

p	q	$(p$	$\wedge$	$\neg q$	$\rightarrow$	$c)$	$\leftrightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$q)$
V	V	V	F	F	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V	F	V	F	V	F

- Portanto, as proposições $(p \wedge \neg q \rightarrow c)$ e $(p \rightarrow q)$ são equivalentes. Como denotado simbolicamente:

$$\boxed{(p \wedge \neg q \rightarrow c) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)}$$

- Esta equivalência mostra o Método de demostração por absurdo.

- Este método estabelece uma forma indireta de provar um resultado. Considerando que queremos $(p \rightarrow q)$, assume-se que tenho p e $\neg q$ e prova-se que isso nos leva a uma contradição.

Tautologias e Equivalência Lógica

Exemplo 2

- Considere a seguinte bicondicional:

$$(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow \big(p \rightarrow (q \rightarrow r)\big) \qquad (2)$$

- Podemos provar que esta bicondicional é tautológica com base em tabelas-verdade.

$(p$	$\wedge$	q	$\rightarrow$	$r)$	$\leftrightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$(q$	$\rightarrow$	$r)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F

- Portanto, as condicionais $(p \wedge q \rightarrow r)$ e $\big(p \rightarrow (q \rightarrow r)\big)$ são equivalentes.
- Esta equivalência lógica é denominada Regra de Exportação-Importação.

Equivalência Lógica

Proposições associadas a uma condicional

- Chama-se de proposições associadas a condicional $(p \to q)$ as seguintes proposições condicionais:
  - i) Recíproca de $(p \to q)$: $(q \to p)$
  - ii) Contrária de $(p \to q)$: $(\neg p \to \neg q)$
  - iii) Contrapositiva de $(p \to q)$: $(\neg q \to \neg p)$

- As tabelas-verdade destas quatro proposições condicionais são:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\neg p \to \neg q$	$\neg q \to \neg p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

- A tabela-verdade mostra que a condicional é equivalente a sua contrapositiva; e que a recíproca é equivalente a contrária.

Equivalência Lógica

Proposições associadas à condicional – Exemplos

- Sejam as seguintes proposições relativas a um triângulo T:

- (1) Seja a seguinte condicional : $p \longrightarrow q$:

  "Se T é equilátero, então T é isósceles"

- A recíproca desta proposição é: $q \longrightarrow p$:

  "Se T é isósceles, então T é equilátero"

- (2) Seja a seguinte condicional: $p \longrightarrow q$

  "Se Carlos é professor, então é pobre"

- A contrapositiva desta proposição é: $\neg q \longrightarrow \neg p$

  "Se Carlos não é pobre, então não é professor"

Operadores de Scheffer

Negação Conjunta de duas Proposições

- Chama-se negação conjunta de duas proposições p e q a proposição resultante das seguintes operações:

$$\neg p \wedge \neg q$$

- A negação conjunta é denotada usando o símbolo $\downarrow$. De maneira que a negação conjunta de duas proposições p e q é denotada como $p \downarrow q$ e satisfaz a seguinte equivalência:

$$\boxed{p \downarrow q \iff \neg p \wedge \neg q}$$

- A tabela-verdade para esta operação:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

- A tabela-verdade do operador $\downarrow$:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Operadores de Scheffer

Negação Disjunta de duas Proposições

- Chama-se negação disjunta de duas proposições p e q a proposição resultante das seguintes operações:

$$\neg p \vee \neg q$$

- A negação disjunta é denotada usando o símbolo $\uparrow$. De maneira que a negação disjunta de duas proposições p e q é denotada como $p \uparrow q$ e satisfaz a seguinte equivalência:

$$\boxed{p \uparrow q \iff \neg p \vee \neg q}$$

- A tabela-verdade para esta operação:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

- A tabela-verdade do operador $\uparrow$:

p	q	$p \uparrow q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Operadores de Scheffer

- Os símbolos ↓ e ↑ são chamados de conectivos de Scheffer.
- Os conectivos de Scheffer são importantes porque mediante eles é possível representar todos os outros operadores lógicos estudados anteriormente.
- Um operador para representar todos os outros.

Operadores de Scheffer

Relações entre os Operadores

- Na lógica digital as operações $\neg(p \wedge q)$ e $\neg(p \vee q)$ recebem nomes específicos (negação do "e") e (negação do "ou") e possuem as portas lógicas $NAND$ e NOR, associadas respectivamente.
- Vale observar a relação dessas operações com os conectivos de Scheffer.

$$p \uparrow q \iff \neg p \vee \neg q$$

p	q	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$	$p \uparrow q$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

$$p \downarrow q \iff \neg p \wedge \neg q$$

p	q	$(p \vee q)$	$\neg(p \vee q)$	$p \downarrow q$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	V

- Observe que os operadores NOR e $NAND$ correspondem aos conectivos de negação conjunta e negação disjunta de Scheffer, respectivamente.

Operadores de Scheffer

Relações entre os Operadores

- Observe o uso das regras de DeMorgan para relacionar os conectivos de Scheffer ↓ e ↑ as portas NOR e NAND.

$$p \downarrow q \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \qquad p \uparrow q \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$$

Regras de De Morgan

Referências

- De Alencar Filho, Edgar. Iniciação à Lógica Matemática. Capítulo 6. Editora Nobel. São Paulo. 1975. Reimpresso em 2015.