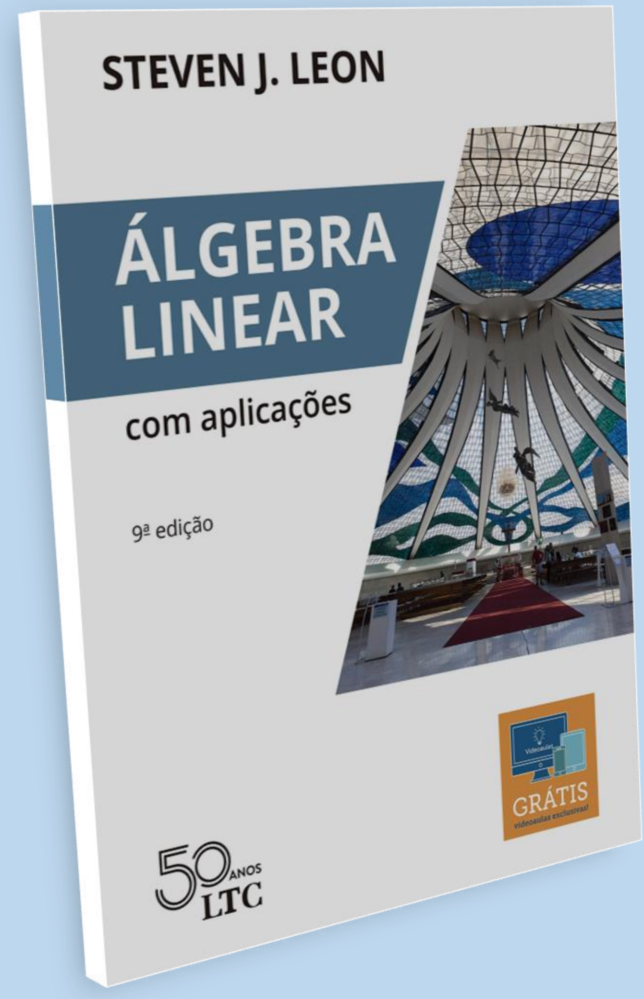
UENF

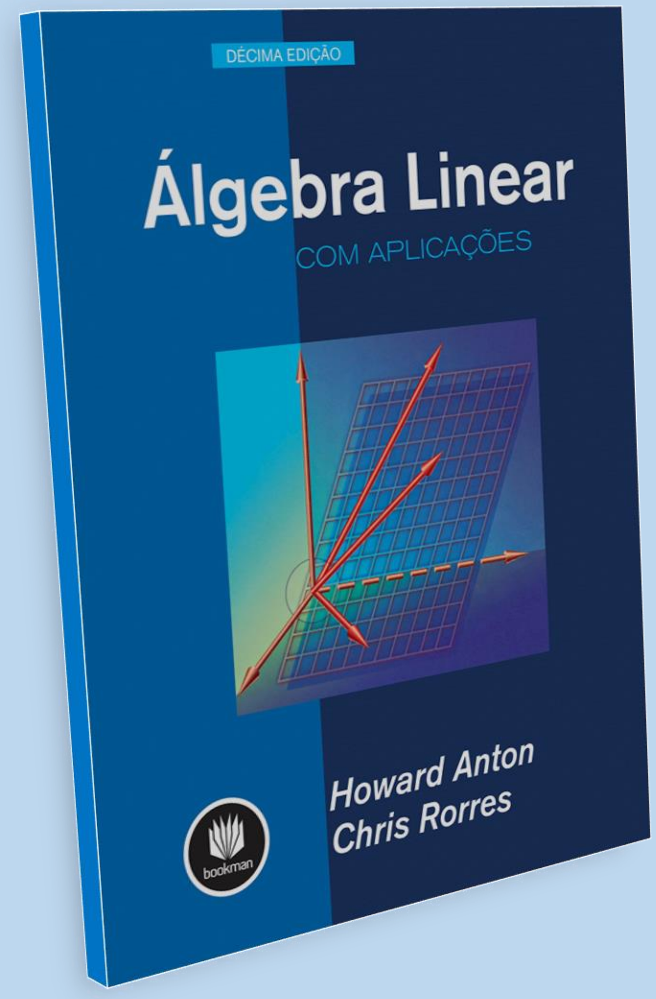
Álgebra Linear

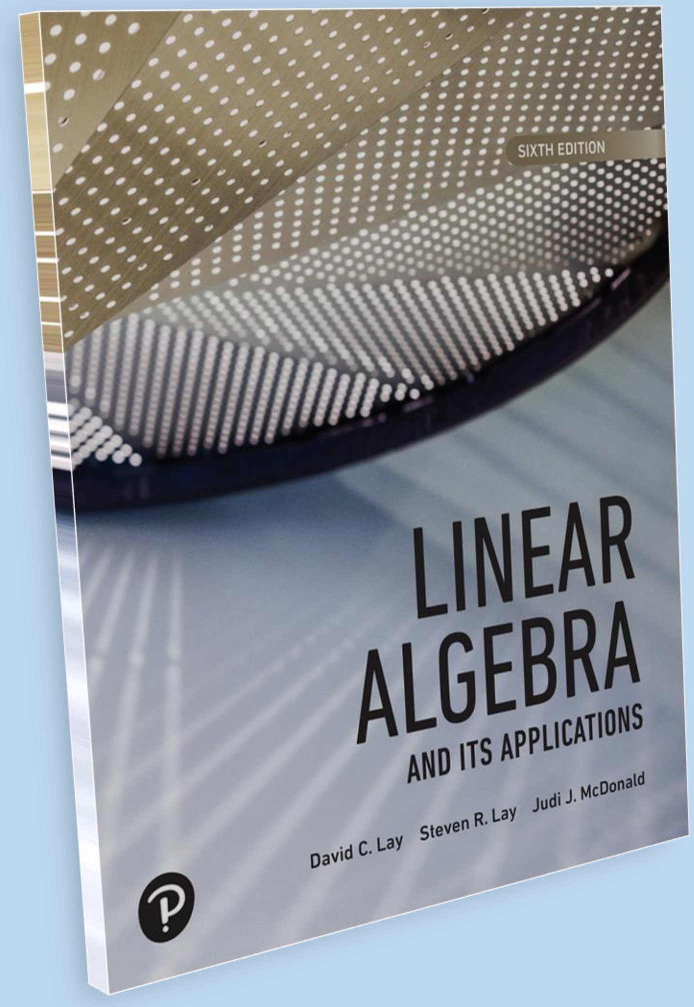
Matriz Inversa

Profa. Elba O. Bravo Asenjo
eoba@uenf.br

Referências Bibliográficas







Matriz Inversa

Definição. Dada uma matriz quadrada ***A*,** se pudermos encontrar uma matriz ***B*** de mesmo tamanho tal que ***AB*** = ***BA*** = ***I*,** então diremos que ***A*** é ***invertível*** e que ***B*** é uma ***Inversa*** de ***A***. Se não puder ser encontrada uma tal matriz ***B*** então diremos que ***A*** é ***não-invertível*** ou ***singular***.

Exemplo.

A matriz $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é uma inversa de $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Pois $\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ e $\mathrm{BA} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

Matriz Inversa

Teorema. SE B e C são ambas inversas da matriz A, então B = C.

Isto é, uma matriz invertível tem exatamente uma inversa.
Se A é invertível, então sua inversa será denotada pelo símbolo A^{-1}
Assim,

$$A^{-1}A = I \qquad \text{e} \qquad AA^{-1} = I$$

Inversa de uma matriz quadrada de ordem 2

Teorema.

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada de ordem 2. Se $ad - bc \neq 0$ então

A é invertível e $$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Se $ad - bc = 0$, então A é não invertível.
A expressão $ad - bc$ é chamada *determinante* de A e escreve-se $\det(A) = ad - bc$

Este Teorema diz que, uma matriz quadrada A de ordem 2 é invertível se, e somente se $\det(A) \neq 0$.

Inversa de uma matriz quadrada de ordem 2

Exemplo.

Encontrar a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Como *det* (*A*) = 3(6) – 4(5) = - 2 então A é invertível e

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/(-2) & -4/(-2) \\ -5/(-2) & 3/(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Teorema.

a) Se A é uma matriz invertível, então A^{-1} é invertível e

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

b) Se A e B são matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então AB é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

c) Se A é uma matriz invertível, então A^T também é invertível e

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Operações Elementares sobre as linhas da Matriz

1. Permutar duas linhas de A
   Indicamos a troca das linhas L_i e L_j por $L_i \leftrightarrow L_j$

2. Multiplicar uma linha de A por um número real não nulo
   Indicamos que multiplicamos a linha L_i de A pelo número real λ escrevendo $L_i \leftarrow \lambda L_i$

3. Somamos a uma linha de A uma outra linha, multiplicada por um número real. Indicamos que somamos à linha L_i a linha L_j multiplicada pelo número real λ por: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Operações Elementares sobre as linhas da Matriz

Exemplo.

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

1)

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

2)

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow -3L_2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -18 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

3)

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 16 & 9 & 2 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Cálculo da Inversa de uma Matriz

Matriz Aumentada   [A   I]

Se A é equivalente por linhas   a I,   então   [A   I] é equivalente por linhas a [I A^{-1}]. Caso contrário   A não tem inversa.

Exemplo 1.   Calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrr|rrrl} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & L_2 \leftarrow -L_2 \\ 4 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrrl} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & \\ 4 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

Exemplo1

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 4 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & -2 & -2 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{15}L_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/15 & 2/15 & -1/15 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 11L_3 \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6/15 & -9/15 & -3/15 \\ 0 & 1 & 0 & -7/15 & 23/15 & 11/15 \\ 0 & 0 & 1 & 2/15 & 2/15 & -1/15 \end{array}$$

Logo, a matriz A é invertível e

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 6 & -9 & -3 \\ -7 & 23 & 11 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

Exemplo 2.

Determinar a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ se existir.

Solução

$$[A \quad I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; L_1 \leftrightarrow L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \; L_3 \leftarrow \frac{1}{2} \, L_3$$

Exemplo 2

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right]$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right] = [\,I \quad A^{-1}]$$

Logo A é invertível e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

Verificando

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Não é necessário verificar $A^{-1}A = I$ pois A é invertível.