Formas Normais

Lógica Matemática

Prof. Fermín A. Tang

Alfabeto Simplificado

Definição

- ✘ Com a definição de conjuntos completos, sabemos que os conectivos definidos no alfabeto da lógica proposicional $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ são redundantes.
- ✘ Assim, é possível redefinir o alfabeto da lógica proposicional de maneira simplificada utilizando um conjunto completo.
- ✘ Esta simplificação não muda em nada a linguagem da lógica proposicional do ponto de vista semântico.
- ✘ Há varias definições possíveis para o alfabeto da lógica proposicional, todas equivalentes expressando a mesma linguagem.

- ✘ Definição.– (Alfabeto simplificado) Um alfabeto simplificado da Lógica Proposicional é constituído por:
- ✘ 1.– Símbolos de pontuação: (,);
- ✘ 2.– Símbolos proposicionais: P, Q, R, S, P1, Q1, R1, S1, P2, Q2, ... ;
- ✘ 3.– Conectivos proposicionais: $\neg, \vee$.

Literal
Definição

- <u>Definição</u>.– (Literal) Um literal, na lógica proposicional, é um símbolo proposicional ou a sua negação.

- Exemplo.– Veja os exemplos de literais:

$$\neg P,\ Q,$$
$$\neg R,\ \neg Q,$$
$$P,\ S$$

Formas Normais

Definição

- <u>Definição</u>.– (Formas Normais) Há dois tipos de formas normais:
- 1.– Uma fórmula H está na forma normal disjuntiva (fnd) se é uma disjunção de conjunção de literais.
- 2.– Uma fórmula H está na forma normal conjuntiva (fnc) se é uma conjunção de disjunção de literais.

Forma Normal Disjuntiva

Definição

- **Exemplo.–** (Forma Normal Disjuntiva)
- A fórmula H, está na forma normal disjuntiva (fnd):

Disjunção

fnd

$$H = (\neg P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge \neg Q \wedge P) \vee (P \wedge S)$$

Conjunção de literais

Forma Normal Conjuntiva

Definição

- ✘ Exemplo.– (Forma Normal Conjuntiva)
- ✘ A fórmula H, está na forma normal conjuntiva (fnc):

Conjunção

fnc

$$H = \underbrace{(\neg P \lor Q)} \land \underbrace{(\neg R \lor \neg Q \lor P)} \land \underbrace{(P \lor S)}$$

Disjunção de literais

Formas Normais

Proposição

- Proposição.- (Formas Normais) Seja H uma fórmula qualquer da lógica proposicional.
- 1.- Existe uma fórmula H_{fnd} na forma normal disjuntiva que é equivalente a H;
- 2.- Existe uma fórmula H_{fnc} na forma normal conjuntiva que é equivalente a H.

- Apresenta-se algoritmos para a transformação de uma fórmula H qualquer nas formas normais disjuntiva e conjuntiva, respectivamente usando tabelas-verdade.

Transformação de fórmulas para a FND

Algoritmo

- Converter uma fórmula H na forma fnd, significa expressar H como uma disjunção de componentes. Cada componente é uma conjunção de literais que representa um caso em que a fórmula H assume valor verdadeiro. Como cada componente é uma conjunção de literais, então essa componente será verdadeira se os literais forem todos verdadeiros.
- A fórmula H_{fnd} será verdadeira se uma das componentes da disjunção for verdadeira. Caso contrário, a fórmula H_{fnd} será falsa, uma vez que todas as componentes sejam falsas.
- Observe que a ocorrência de um caso exclui os outros, sejam eles casos em que a fórmula é verdadeira ou falsa. Temos um exemplo de FND:

$$H = (\neg P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge \neg Q \wedge P) \vee (P \wedge S)$$

Transformação de fórmulas para a fnd

Algoritmo

- Algoritmo para a fnd.- (Transformação de H para fnd)
  - Passo 1.- Construa a tabela-verdade associada a H;
  - Passo 2.- Extrair as linhas da tabela-verdade que interpretam H como verdadeiro;
  - Passo 3.- Utilizando as informações de cada linha extraída, construir uma conjunção de literais que represente o caso verdadeiro representado pela linha;
  - Passo 4.- Construir a fórmula H_{fnd} como a disjunção das expressões obtidas no passo 3.

Transformação de fórmulas para a FND

Exemplo

- **Exemplo.-** Considere a fórmula H: $H = (P \to Q) \wedge R$
- Executamos os passos do algoritmo fnd.

Passo 1.-

P	Q	R	$(P \to Q)$	$(P \to Q) \wedge R$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	F

Passo 2.-

P	Q	R	$(P \to Q)$	$(P \to Q) \wedge R$
V	V	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Passo 3.-

$(P \wedge Q \wedge R)$,
$(\neg P \wedge Q \wedge R)$,
$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

Formar uma conjunção com os literais

Passo 4.- $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

- Explicação: No passo 2, cada linha da tabela-verdade representa uma condição na forma de uma conjunção para a expressão lógica ser verdadeira. Temos assim, três formas alternativas de satisfazer a expressão lógica.

Transformação de fórmulas para a FNC

Algoritmo

- Converter uma fórmula H na forma fnc, significa expressar H como uma conjunção de componentes. Cada componente é uma disjunção de literais que representa um caso em que a fórmula H assume valor falso. Como cada componente é uma disjunção de literais, então essa componente será falsa se os literais forem todos falsos.
- A fórmula H_{fnc} será falsa se uma das componentes da conjunção for falsa. Caso contrário, a fórmula H_{fnd} será verdadeira, uma vez que todas as componentes sejam verdadeiras.
- Observe que a ocorrência de um caso exclui os outros, sejam eles casos em que a fórmula é verdadeira ou falsa. Temos um exemplo:

$$H = (\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q \lor P) \land (P \lor S)$$

Transformação de fórmulas para a fnc

Algoritmo

- Algoritmo para a fnc.– (Transformação de H para fnc)
  - Passo 1.– Construa a tabela-verdade associada a H;
  - Passo 2.– Extrair as linhas da tabela-verdade que interpretam H como falso;
  - Passo 3.– Utilizando as informações de cada linha extraída, construir uma disjunção de literais que represente o caso falso representado pela linha. Para isso inverta os literais presentes em cada linha extraída;
  - Passo 4.– Construir a fórmula H_{fnc} como a conjunção das expressões obtidas no passo 3.

Transformação de fórmulas para a FNC

Exemplo

- **Exemplo.-** Considere a fórmula H: $H = (P \rightarrow Q) \wedge R$
- Executamos os passos do algoritmo fnc.

Passo 1.-

P	Q	R	$(P \rightarrow Q)$	$(P \rightarrow Q) \wedge R$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	F

Passo 2.-

P	Q	R	$(P \rightarrow Q)$	$(P \rightarrow Q) \wedge R$
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

Passo 3.-

$(\neg P \vee \neg Q \vee R)$,
$(\neg P \vee Q \vee \neg R)$,
$(\neg P \vee Q \vee R)$,
$(P \vee \neg Q \vee R)$,
$(P \vee Q \vee R)$

Inverter os literais e formar uma disjunção

Passo 4.- $(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$

Transformação de fórmulas para a FNC

Exemplo-Explicação

Passo 2.-

P	Q	R	$(P \to Q)$	$(P \to Q) \wedge R$
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

Passo 3.-

$(\neg P \vee \neg Q \vee R),$
$(\neg P \vee Q \vee \neg R),$
$(\neg P \vee Q \vee R),$
$(P \vee \neg Q \vee R),$
$(P \vee Q \vee R)$

✘ Explicação: No passo 2, cada linha da tabela-verdade representa uma condição verdadeira na forma de conjunção para a expressão lógica ser falsa. Precisamos converter cada condição na forma de disjunção, para isso aplicamos Dupla Negação e De Morgan, conforme ilustrado no exemplo:

$$\overbrace{(P \wedge Q \wedge \neg R)}^{\text{Verdadeiro}} \Leftrightarrow \neg\neg(P \wedge Q \wedge \neg R) \quad \text{Dupla Negação}$$

$$\Leftrightarrow \neg\underbrace{(\neg P \vee \neg Q \vee R)}_{\text{Falso}} \quad \text{De Morgan}$$

Transformação de fórmulas para a FNC

Exemplo-Explicação

- Temos assim, que a expressão:

$$H = (P \rightarrow Q) \wedge R$$

- Na forma normal disjuntiva FND:

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

- Pode ser escrita para a falsidade conforme a tabela:

$$(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

- Negando a expressão e aplicando De Morgan temos:

$$\neg(P \wedge Q \wedge \neg R) \wedge \neg(P \wedge \neg Q \wedge R) \wedge \neg(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \wedge \neg(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \wedge \neg(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

- Aplicando De Morgan a cada termos a forma normal conjuntiva FNC:

$$(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$$

Referências

- De Souza, João Nunes. Lógica para Ciência da Computação e Áreas Afins. Capítulo 3. 3ª Edição. Editora Campus. São Paulo. 2015.