



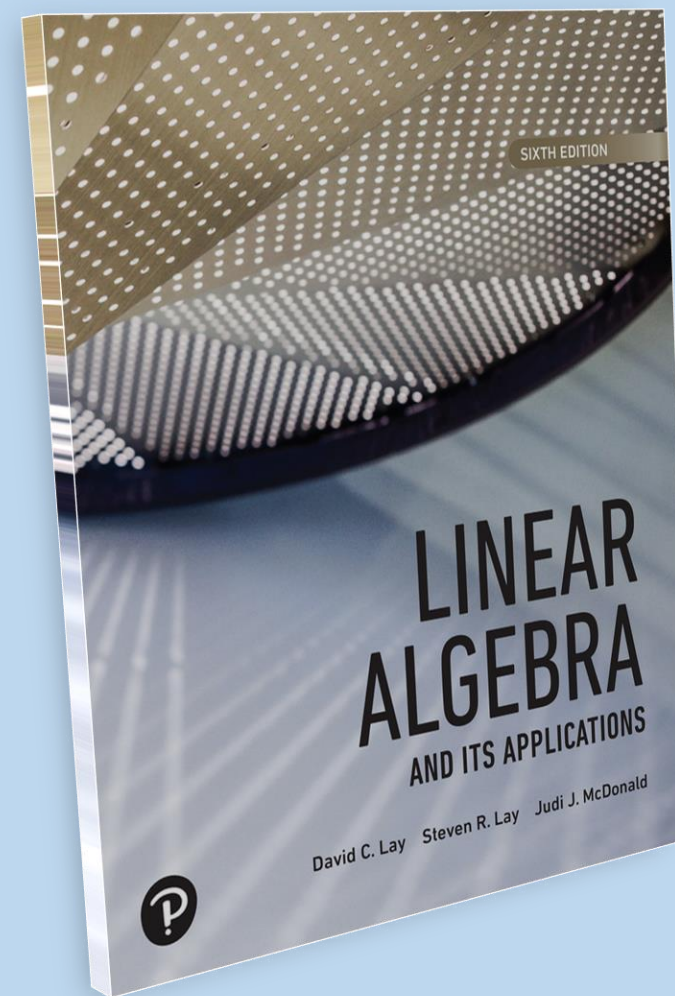
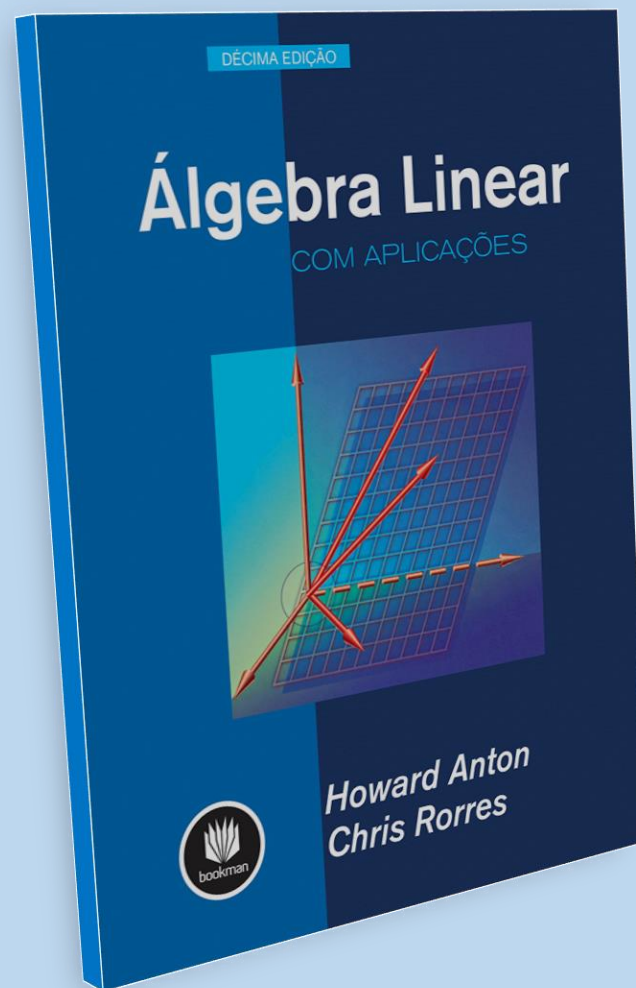
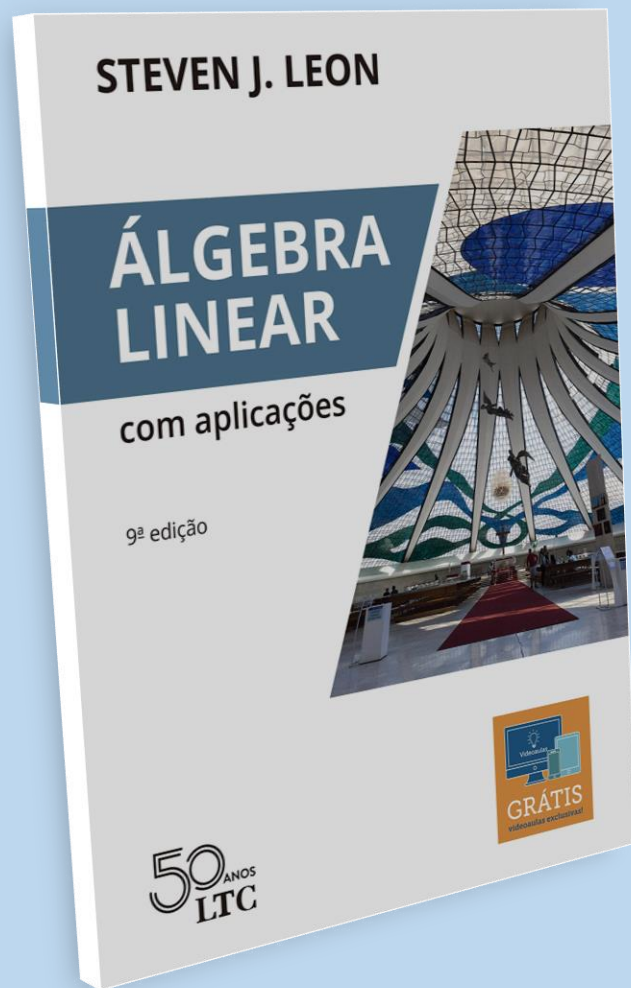
*Álgebra Linear*

# **Sistemas de Equações Lineares**

Profa. Elba O. Bravo Asenjo

[eoba@uenf.br](mailto:eoba@uenf.br)

# Referências Bibliográficas



# Sistema de Equações Lineares

Seja o sistema de ***m*** equações lineares e ***n*** incógnitas,

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

O sistema linear poderá ter:

- Uma única solução (sistema possível ou consistente e determinado),
- Infinitas soluções (sistema possível e indeterminado),
- Nenhuma solução (sistema impossível)

# Matriz Aumentada do Sistema

Seja o Sistema Linear de equações

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots & + & a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

**Matriz Aumentada** do Sistema:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

# Operações Elementares com Linhas

Exemplo 1. A matriz aumentada do sistema de equações dado

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{array} \quad \text{é} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right]$$

Solução do sistema.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right]$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$$

# Operações Elementares com Linhas

Exemplo 1. Continuação.

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array} \quad \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 11/2 & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow -2L_3$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 11/2 & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{11}{2}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{7}{2}L_3 \end{array} \quad \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Logo a solução é dada por:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ , e  $x_3 = 3$

# Eliminação Gaussiana

## Formas Escalonada e Escalonada Reduzida por Linhas

As matrizes a seguir estão em forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes a seguir estão em forma escalonada, mas não reduzida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Forma Escalonada Reduzida por Linhas

## Propriedades.

- 1) Se uma linha não consistir inteiramente em zeros, então o primeiro número não nulo da linha é um 1. Dizemos que esse número 1 é um *pivô*.
- 2) Se existirem linhas constituídas inteiramente de zeros, então elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz.
- 3) Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem só em zeros, o pivô da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivô da linha superior.
- 4) Cada coluna que contém um pivô tem zeros nas demais entradas.



# Eliminação Gaussiana

**Exemplo 2.** Suponha que a matriz aumentada de um sistema linear nas incógnitas  $x$ ,  $y$  e  $z$  tenha sido reduzida por operações com linhas à forma escalonada reduzida por linhas dada. Resolva o sistema.

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

**Solução.**

O sistema linear correspondente à matriz aumentada dada é

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & & + & 3z & = & -1 \\ & y & - & 4z & = & 2 \end{array}$$

Como  $x$  e  $y$  correspondem a pivôs na matriz aumentada, dizemos que essas são as *variáveis líderes*. As demais variáveis (nesse caso, só  $z$ ) são ditas *variáveis livres*.

Resolvendo para as variáveis líderes em termos das variáveis livres, obtemos

$$\begin{aligned}x &= -1 - 3z \\ y &= 2 + 4z\end{aligned}$$

Seja  $z = t$ ,  $t$  parâmetro. Assim, o conjunto de soluções pode ser representado pelas equações paramétricas  $x = -1 - 3t$ ,  $y = 2 + 4t$ ,  $z = t$

**Infinitas soluções!**

Para  $t = 0$  temos a solução:  $x = -1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 0$

para  $t = 1$  temos a solução:  $x = -4$ ,  $y = 6$ ,  $z = 1$

# Eliminação Gaussiana

**Exemplo 3.** Suponha que a matriz aumentada de um sistema linear nas incógnitas  $x$ ,  $y$  e  $z$  tenha sido reduzida por operações com linhas à forma escalonada reduzida por linhas dada. Resolva o sistema.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

## Solução.

Temos  $x - 5y + z = 4$ . Isolamos a **variável Lider**  $x$  em termos das **variáveis livres**  $y$  e  $z$

Assim:  $x = 4 + 5y - z$  Sejam  $y = s$  e  $z = t$  onde  $s$  e  $t$  são parâmetros

Logo, a **Solução Geral do Sistema** será dada por:

$$\text{Solução Paramétrica} \quad \begin{cases} x = 4 + 5s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

# Eliminação Gaussiana

**Exemplo 4.** Suponha que a matriz aumentada de um sistema linear nas incógnitas  $x$ ,  $y$  e  $z$  tenha sido reduzida por operações com linhas à forma escalonada reduzida por linhas dada. Resolva o sistema.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

**Solução.**

A equação que corresponde à última linha da matriz aumentada é

$$0x + 0y + 0z = 1$$

O sistema é **inconsistente**, porque essa equação não é satisfeita por valor algum de  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

# Eliminação Gaussiana

**Exemplo 5.** Reduzir a seguinte matriz à forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2$$

# Eliminação Gaussiana

**Exemplo 5.** Continuação,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -23/2 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -23/2 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{23}{2}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{7}{2}L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz  
Escalonada  
Reduzida  
por linhas

**Observação.** O procedimento (ou algoritmo) que acabamos de descrever, que reduz uma matriz à forma escalonada reduzida por linhas, é denominado *eliminação de Gauss-Jordan*.