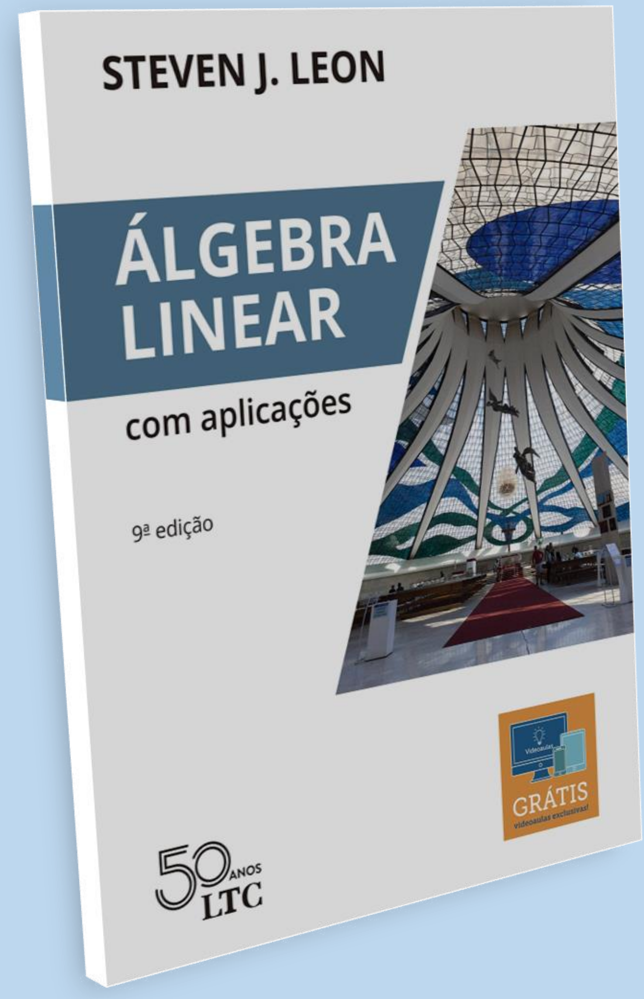
UENF

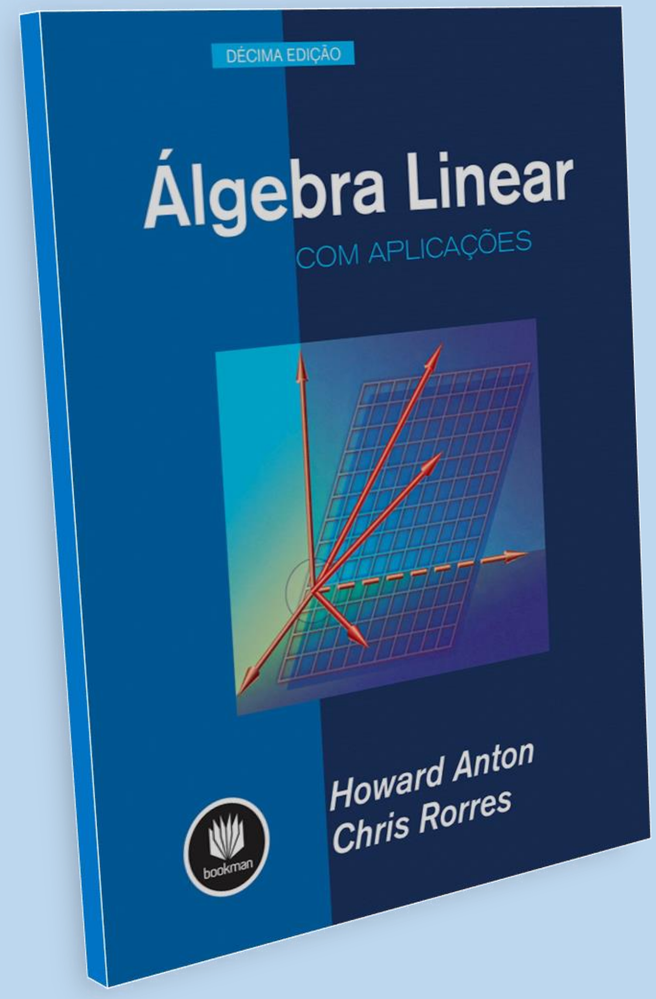
Álgebra Linear

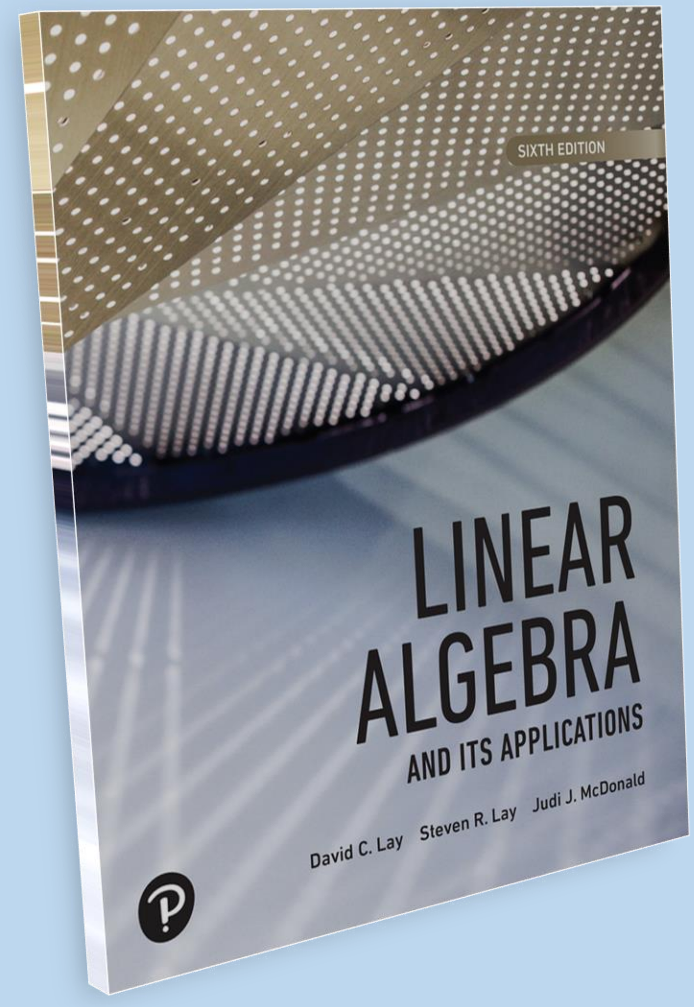
Espaços Vetoriais

Profa. Elba O. Bravo Asenjo
eoba@uenf.br

Referências Bibliográficas





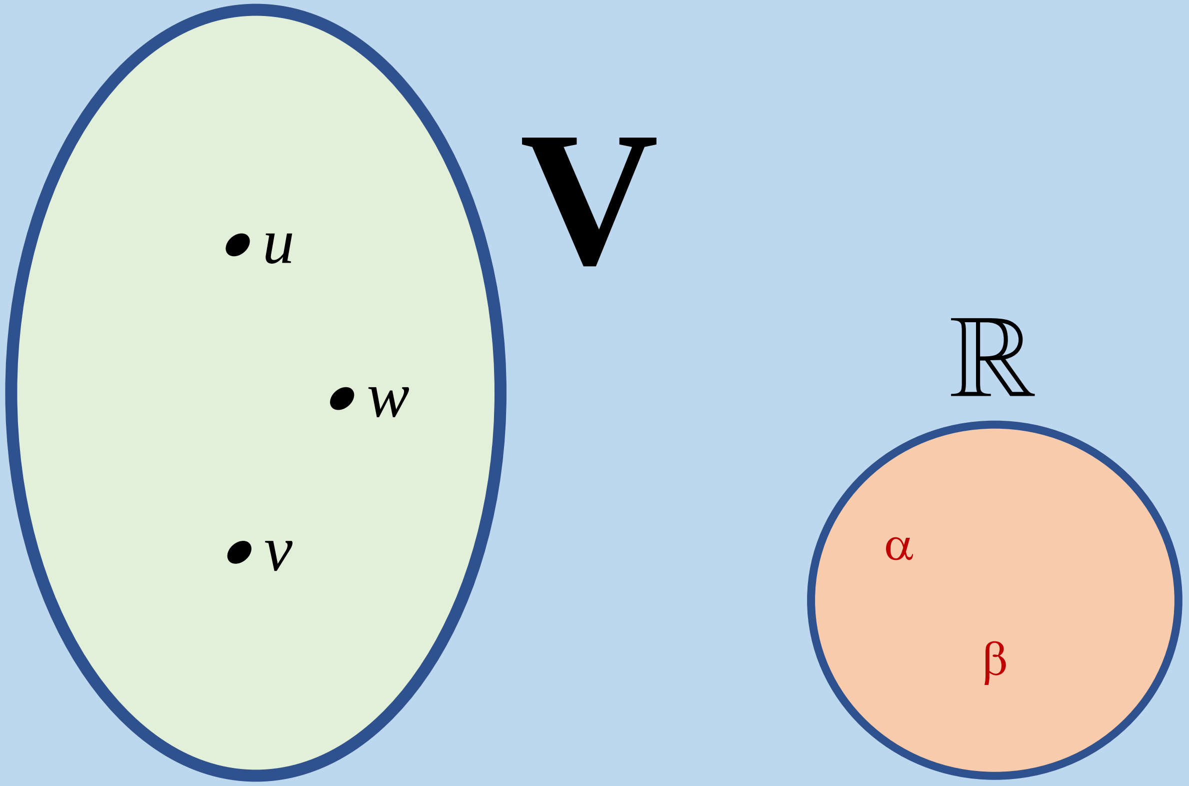


Espaços vetoriais

$$u, v, w \in V$$

$$u + v \in V$$

$$\alpha u \in V$$



Espaços vetoriais - Definição

Definição.

Um **espaço vetorial** é um conjunto não vazio **V** de objetos, chamados *vetores*, sobre os quais são definidas duas operações:

- *Adição*, e
- *Multiplicação por escalar*

Além disso, devem satisfazer os seguintes axiomas (condições):

1. A soma de u e v , denotado por $u+v$ está em V
2. $u+v = v+u$ (comutatividade)
3. $(u+v) + w = u+(v+w)$ (associatividade)
4. Existe o vetor 0 em V, denominado *vetor nulo* de V, ou *vetor zero*, tal que $0+u = u+0 = u$
5. Para cada vetor $u \in V$, existe um vetor $-u \in V$, denominado *negativo* de u, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$

Espaços vetoriais - Definição

6. Se $\boldsymbol{\alpha}$ for qualquer escalar e **u** um elemento em V, então $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}$ é um elemento em V.
7. $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
8. $(\alpha+\beta)\mathrm{u} = \alpha\mathrm{u} + \beta\mathrm{u}$
9. $\alpha(\beta\mathrm{u}) = (\alpha\beta)\,\mathrm{u}$
10. $1\cdot u = u$

onde $u, v, w \in \mathrm{V}$ e $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ (números reais)

Espaços Vetoriais - Exemplos

Exemplo 1. $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial

Seja $V = \mathbb{R}^n$ e defina as operações de espaço vetorial em V como as operações conhecidas de adição e multiplicação por escalar de ênuplas, ou seja,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

$$a\mathbf{u} = (au_1, au_2, \ldots, au_n)$$

O conjunto $V = \mathbb{R}^n$ é fechado na adição e na multiplicação por escalar, porque as operações que acabamos de definir produzem ênuplas, e essas operações satisfazem todos os Axiomas da definição.

Por exemplo, vamos provar a propriedade associativa da adição.

Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$. Então

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= \big((u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n)\big) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) \\
&= \big((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2, \ldots, (u_n + v_n) + w_n\big) \\
&= \big(u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), \ldots, u_n + (v_n + w_n)\big) \\
&= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n) \\
&= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})
\end{aligned}$$

Espaços Vetoriais - Exemplos

Em especial,

- O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial
- O plano $\mathbb{R}^{\mathbf{2}} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\ ;\ \ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial
- O espaço $\mathbb{R}^{\mathbf{3}} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\ ;\ \ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial

com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar

Espaços Vetoriais - Exemplos

Exemplo 2. **O espaço vetorial das matrizes 2 x 2**

Seja V o conjunto de todas as matrizes 2 x 2 com entradas reais e tomemos as operações de espaço vetorial em V como sendo as operações usuais de adição matricial e a multiplicação matricial por escalar, ou seja,

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix}$$

$$a\mathbf{u}=a\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} au_{11} & au_{12} \\ au_{21} & au_{22} \end{bmatrix}$$

O conjunto V é fechado na adição e na multiplicação por escalar, porque as operações matriciais usadas nessa definição produzem matrizes 2 x 2 como resultado final. Resta verificar os outros axiomas da definição.
Por exemplo a propriedade comutativa da adição.

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

Espaços Vetoriais - Exemplos

O *vetor nulo* ou *vetor zero* de V seria a Matriz zero 2 x2 tal que,

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{0} + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

e, analogamente u+0 = u

Definindo o negativo de u como $-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}$ temos

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

e, analogamente (-u) + u = 0

Finalmente

$$1\mathbf{u} = 1\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

Espaços Vetoriais - Exemplos

Exemplo 3. O espaço vetorial das matrizes *m x n* denotado por M_{mn}

Exemplo 4. O espaço vetorial das funções reais

Seja V o conjunto das funções reais que estão definidas em cada x do intervalo $(+\infty, -\infty)$. Se $\mathbf{f} = f(x)$ e $\mathbf{g} = g(x)$ forem duas funções em V e se $\boldsymbol{a}$ for um escalar qualquer, definimos as operações de adição e multiplicação por escalar por

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = f(x) + g(x)$$

$$(a\mathbf{f})(x) = af(x)$$

O conjunto V com essas operações, denotado pelo símbolo $F(+\infty\ , -\infty)$, é um espaço vetorial.

Espaços Vetoriais - Exemplos

Exemplo 4. Para $n \geq 0$, o conjunto $\boldsymbol{P_n}$ de polinômios de grau menor ou igual que **n** consiste de todos os polinômios da forma

$$\mathbf{p}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \qquad (*)$$

onde os coeficientes a_0 , … , a_n e a variável t são números reais.
O grau de $\boldsymbol{p}$ é a potencia mais alta de t (na equação *) cujo coeficiente é diferente de zero.
Se $\mathrm{p(t)} = a_0 \neq 0$, o grau de $\boldsymbol{p}$ é zero.
Se todos os coeficientes são zero, $\boldsymbol{p}$ é chamado o *polinômio zero*.
O polinômio zero está incluído em $\boldsymbol{P_n}$ mesmo que seu grau, por razões técnicas, não esteja definido.

Se $\boldsymbol{p}$ é dado por (*) e se $\mathbf{q}(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$, então a soma $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$ é definida por

$$\begin{aligned}(\mathbf{p} + \mathbf{q})(t) &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n\end{aligned}$$

Espaços Vetoriais - Exemplos

A multiplicação escalar $c\mathbf{p}$ é o polinômio definido por

$$(c\mathbf{p})(t) = c\mathbf{p}(t) = ca_0 + (ca_1)t + \cdots + (ca_n)t^n$$

Essas definições satisfazem os Axiomas 1 e 6 da definição de espaço vetorial, devido a que $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$ e $c\boldsymbol{p}$ são polinômios de grau menor ou igual que $\boldsymbol{n}$.

O conjunto $\boldsymbol{P_n}$ com as duas operações de soma e multiplicação escalar é um espaço vetorial.

Espaços Vetoriais - Exemplos

Exemplo 5.

Seja $V = R^2$ e defina as operações de adição e multiplicação por escalar como segue: se $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, defina

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

e se a for um número real qualquer, defina

$$a\mathbf{u} = (au_1, 0)$$

Por exemplo, se $\mathbf{u} = (2, 4)$, $\mathbf{v} = (-3, 5)$ e $a = 7$, então

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2 + (-3), 4 + 5) = (-1, 9)$$
$$a\mathbf{u} = 7\mathbf{u} = (7 \cdot 2, 0) = (14, 0)$$

Espaços Vetoriais - Exemplos

Vamos verificar os 8 Axiomas:

2. Comutatividade: u + v = v + u

u + v = $(u_1 , u_2) \ + \ (v_1 , v_2)$

= $(u_1 + v_1 , u_2 + v_2)$ = $(v_1 + u_1 , v_2 + u_2)$ = $(v_1 , v_2) \ + \ (u_1 , u_2)$

= v + u

4. Existe o vetor zero 0 = (0,0) em $\mathbb{R}^2$ tal que

0 + u = (0,0) + (u_1 , u_2) = $(0 + u_1 , 0 + u_2)$ = (u_1 , u_2) = u

5. Para todo vetor u = (u_1 , u_2) em $\mathbb{R}^2$ existe o vetor negativo

-u = $(-u_1 , -u_2)$ em $\mathbb{R}^2$ tal que

-u + u = $(-u_1 , -u_2)$ + (u_1 , u_2) = $(-u_1 + u_1 , -u_2 + u_2)$ = (0,0) = 0

Espaços Vetoriais - Exemplos

7. Provar que $a(u + v) = a\,u + a\,v$, para todo a escalar real

$a\,(u + v) = a\,(u_1 + v_1\,,\, u_2 + v_2)$

$= (\,a\,(u_1 + v_1)\,,\,0) = (au_1 + av_1\,,\,0+0)$

$= (au_1\,,\,0) + (av_1\,,\,0)$

$= a\,u + a\,v$

8. Provar que $(a + b)\,\mathrm{u} = a\,\mathrm{u} + b\,\mathrm{u}$

$(a + b)\,(u_1\,,\,u_2) = ((a + b)\,u_1\,,\,0\,) = (a\,u_1 + b\,u_1\,,\,0+0\,)$

$= (au_1\,,\,0) + (bu_1\,,\,0)$

$= a\,\mathrm{u} + b\,\mathrm{u}$

Espaços Vetoriais - Exemplos

9. Provar que $a(bu) = (ab)\,u$, para todo a, b escalares reais

$$
\begin{aligned}
a(bu) &= a\,(b\,(u_1\,,u_2)\,) \\
&= a\,(bu_1\,,0) \\
&= (ab\,u_1\,,0) = (\,(ab)\,u_1\,,0) \\
&= (ab)\,u
\end{aligned}
$$

10. Provar que $1.\,u = u$

O Axioma 10 falha!!!

Seja u = $(u_1\,,u_2)$ tal que $u_2 \neq 0$, então

$$1\mathbf{u} = 1(u_1, u_2) = (1 \cdot u_1, 0) = (u_1, 0) \neq \mathbf{u}$$

Assim, *V* não é um espaço vetorial com as operações fornecidas.

Subespaços Vetoriais

Definição. Um subconjunto W de um espaço vetorial V é denominado ***subespaço*** de V se W for um espaço vetorial por si só com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V.

Teorema. Se W for um conjunto de um ou mais vetores num espaço vetorial V, então W é um subespaço de V se, e só se, as condições seguintes forem válidas.

(i) O vetor zero de V está em W.

(ii) Se **u** e **v** forem vetores em W, então **u** + **v** está em W.

(iii) Se a for um escalar qualquer e **u** algum vetor de W, então ***au*** está em W.

Subespaços - Exemplos

Exemplo 1. **O subespaço zero**

Se V for um espaço vetorial qualquer e se $W = \{\mathbf{0}\}$ for o subespaço de V que consiste somente no vetor nulo, então W é fechado na adição e na multiplicação por escalar, já que

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \qquad \text{e} \qquad a\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

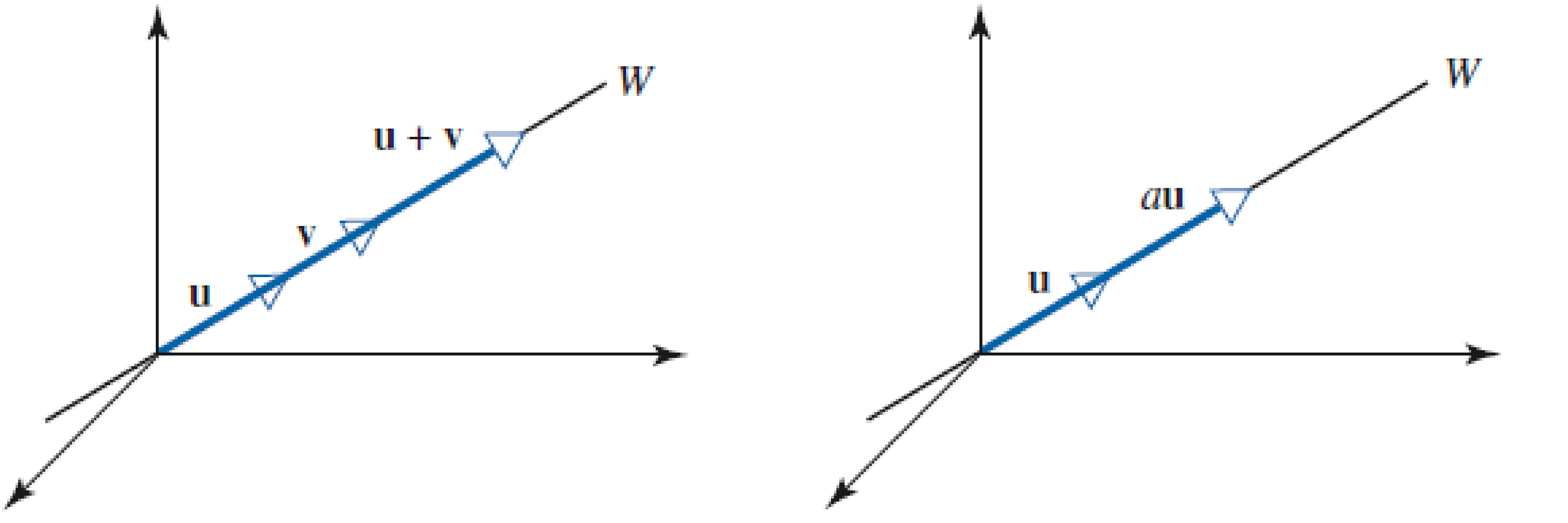
com qualquer escalar a. Dizemos que W é o ***subespaço zero*** ou ***nulo*** de V.

Observação. Cada espaço vetorial tem pelo menos dois subespaços, ele mesmo e seu subespaço nulo.

Subespaços - Exemplos

Exemplo 2. Retas pela origem são subespaços em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Se W for uma reta pela origem de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, então a soma de dois vetores na reta W ou a multiplicação de um vetor na reta W por algum escalar produz um outro vetor na reta W, de modo que W é fechado na adição e na multiplicação por escalar



(a) W é fechado na adição. (b) W é fechado na multiplicação por escalar.

Subespaços - Exemplos

Exemplo 3. **Planos pela origem são subespaços de** $\mathbb{R}^3$

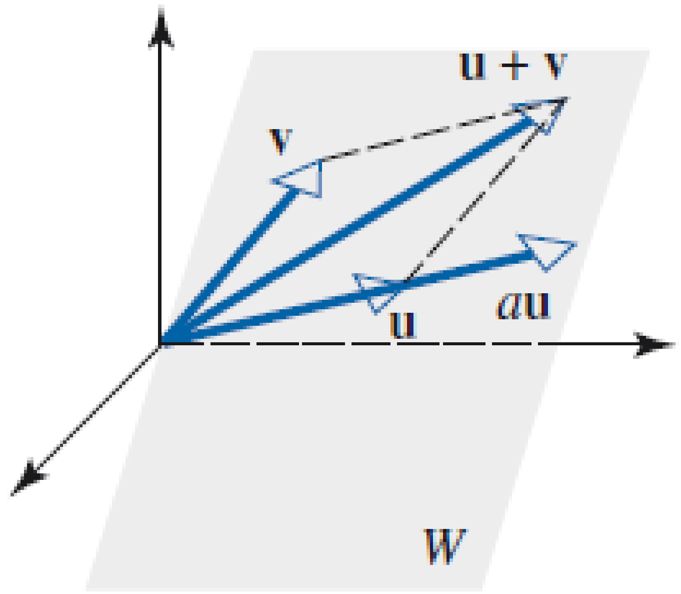


Figura 4.2.3 Ambos os vetores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $a\mathbf{u}$ estão no mesmo plano de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

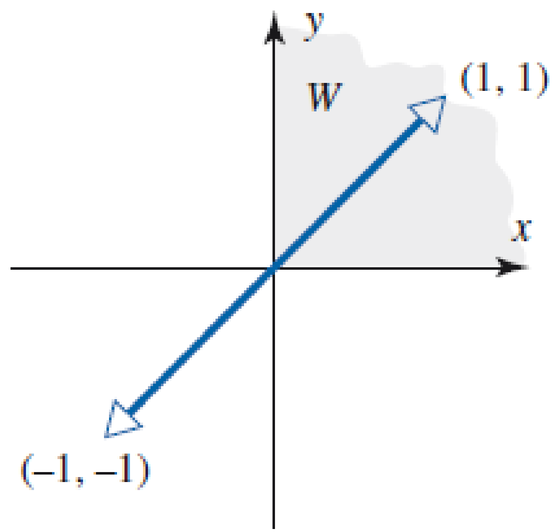
Subespaços - Exemplos

Subespaços de R^2	Subespaços de R^3
• $\{0\}$ • Retas pela origem • R^2	• $\{0\}$ • Retas pela origem • Planos pela origem • R^3

Subespaços - Exemplos

Exemplo 4. Um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que não é um subespaço

Seja W o conjunto de todos os pontos (x, y) em $\mathbb{R}^2$ tais que $x \geq 0$ e $y \geq 0$ (a região destacada na Figura abaixo). Esse conjunto não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$, pois não é fechado na multiplicação por escalar. Por exemplo, $\mathbf{v} = (1, 1)$ é um vetor em W, mas $(-1)\mathbf{v} = (-1, -1)$ não é.



▲ Figura 4.2.4 *W* não é fechado na multiplicação por escalar.

Subespaços - Exemplos

Exemplo 5. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e W = {(x , y) ∈ $\mathbb{R}^2$ / y = 2x} ou W = {(x , 2x) ; x ∈ $\mathbb{R}$}

W é um subespaço vetorial de $V = \mathbb{R}^2$

De fato,

(i) O vetor (0 , 0) ∈ W

(ii) Verificar, se u , v ∈ W então u + v ∈ W

Se u , v ∈ W então u = $(x_1, 2\,x_1)$ e v = $(x_2, 2\,x_2)$

Logo u + v = $(x_1, 2\,x_1) + (x_2, 2\,x_2) = (x_1+x_2\ , 2\,x_1 + 2\,x_2)$

$= (x_1+x_2\ ,\ 2(x_1+x_2))$ ∈ W

(iii) Sejam u = $(x_1, 2\,x_1)$ ∈ W e $a \in \mathbb{R}$, então

$a\,u = a\,(x_1, 2\,x_1) = (ax_1, 2\,ax_1) \in \boldsymbol{W}$

Logo W é um subespaço vetorial de $V = \mathbb{R}^2$

Observação. O gráfico de W é uma reta no plano que passa pela origem.

Subespaços - Exemplos

Exemplo 6. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e

$$W = \{(x , y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 1\} = \{ (x , -x+1) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$$

W não é subespaço vetorial de V

(i) $(0 , 0) \notin W$

(ii) Sejam u , v $\in \boldsymbol{W}$, então u = $(x_1, -x_1+1)$ e v = $(x_2, -x_2+1)$,

$$\text{Logo, } u + v = (x_1, -x_1 + 1) + (x_2, -x_2+1) = (x_1+x_2 , -x_1 + 1 -x_2+1)$$

$$= (x_1+x_2 , -(x_1 + x_2) + 2) \notin W$$

Observação. O gráfico de W é uma reta que não passa pela origem.

Subespaços

Teorema. *Se* W_1 , W_2 , ... , W_r forem subespaços de um espaço vetorial V, então a interseção desses subespaços também será um subespaço de V.

Prova

Seja W a interseção dos subespaços W_1 , W_2 , ... , W_r .

Esse conjunto não é vazio porque, como cada um desses subespaços contém o vetor nulo de V, também sua interseção tem o vetor nulo.

Assim, falta mostrar que W é fechado na adição e na multiplicação por escalar.

Para provar o fechamento na adição, sejam **u** e **v** vetores em W. Como W é a interseção de W_1 , W_2 , ... , W_r, segue que **u** e **v** também estão em cada um desses subespaços. Como esses subespaços são fechados na adição, todos contêm o vetor **u + v** e, portanto, sua interseção W também contém esse vetor. Isso prova que W é fechado na adição.

Da mesma forma, prova-se que W é fechado na multiplicação por escalar.

Combinações Lineares

Definição. Dizemos que um vetor **w** num espaço vetorial ***V*** é uma ***combinação linear*** dos vetores $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_r}$ em *V* se **w** puder ser expresso na forma

$$\mathbf{w} = a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \ldots + a_r\boldsymbol{v_r}$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_r$ são escalares. Esses escalares são denominados ***coeficientes*** da combinação linear.

Exemplo 1. Considere os vetores **u** = (1, 2, -1) e **v** = (6, 4, 2). Mostre que **w** = (9, 2, 7) é uma combinação linear de **u** e **v** e que **w'** = (4, -1, 8) *não é* uma combinação linear de **u** e **v**.

Solução

Para que **w** seja uma combinação linear de **u** e **v**, devem existir escalares *a* e *b* tais que

$$\mathbf{w} = a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v}$$

Combinações Lineares - Exemplos

ou seja,

$$(9, 2, 7) = a\,(1, 2, -1) + b\,(6, 4, 2)$$

Ou

$$(9, 2, 7) = (a + 6b,\ 2a + 4b,\ -a + 2b)$$

Igualando componentes correspondentes, obtemos

$$\begin{aligned} a + 6b &= 9 \\ 2a + 4b &= 2 \\ -a + 2b &= 7 \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema com eliminação gaussiana, obtemos $a = -3$, $b = 2$

De modo que $\mathbf{w} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$

Combinações Lineares - Exemplos

Analogamente, para que **w'** seja uma combinação linear de **u** e **v**, devem existir escalares *a* e *b* tais que

$$\mathbf{w}' = a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v}$$

ou seja,

$$(4, -1, 8) = a\,(1, 2, -1) + b\,(6, 4, 2)$$

Ou

$$(4, -1, 8) = (a + 6b,\ 2a + 4b,\ -a + 2b)$$

Igualando componentes correspondentes, obtemos

$$\begin{aligned} a + 6b &= 4 \\ 2a + 4b &= -1 \\ -a + 2b &= 8 \end{aligned}$$

Esse sistema de equações é inconsistente, de modo que não existem tais escalares *a* e *b*. Consequentemente, **w'** não é uma combinação linear de **u** e **v**.

Combinações Lineares

Teorema. Seja S = $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V.

(a) O conjunto W de todas as combinações lineares possíveis de vetores em S é um subespaço de V.

(b) O conjunto W da parte (a) é o “menor” subespaço de V que contém todos os vetores de S, no sentido de que qualquer outro subespaço de V que contenha todos aqueles vetores contém W.

Subespaço Gerado

Definição. Dizemos que o subespaço de um espaço vetorial *V* que é formado com todas as combinações lineares possíveis de vetores de um conjunto não vazio *S* é ***gerado*** por *S*, e dizemos que os vetores em *S* ***geram*** esse subespaço.

Se $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$, denotamos o gerado de *S* por

$$\text{ger}\{w_1, w_2, \ldots, w_r\} \quad \text{ou} \quad \text{ger}(S) \quad \text{ou} \quad G(S)$$

Subespaço Gerado

Exemplo. Os vetores unitários canônicos geram $\mathbb{R}^n$

Os vetores unitários canônicos em $\mathbb{R}^n$ são

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

Esses vetores geram $\mathbb{R}^n$, pois cada vetor **v** = $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ em $\mathbb{R}^n$ pode ser expresso como

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n$$

que é uma combinação linear de $e_1, e_2, \ldots, e_n$

Subespaço Gerado

Assim, por exemplo, os vetores

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

geram $\mathbb{R}^3$, pois cada vetor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ nesse espaço pode ser expresso como

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

Independência e Dependência Linear

Definição. Se $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ for um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V, então a equação vetorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

tem uma solução, pelo menos, a saber,

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \ldots, \quad k_r = 0$$

Dizemos que essa é a solução trivial. Se essa for a única solução, dizemos que S é um ***conjunto linearmente independente***. Se existem outras soluções além da trivial, dizemos que S é um ***conjunto linearmente dependente***.

Independência e Dependência Linear - Exemplos

Exemplo1. O conjunto linearmente independente mais básico de $\mathbb{R}^n$ é o conjunto dos vetores unitários canônicos

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

Para simplificar a notação, vamos provar a independência linear em $\mathbb{R}^3$ dos vetores

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Seja a equação vetorial

$$k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Em termos de componentes, obtemos $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$

De onde segue que $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

Logo, os vetores são linearmente independentes.