



Lista de Exercícios 6

1. Seja  $V$  o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e considere as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2), a\mathbf{u} = (0, au_2)$$

- (a) Calcule  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  e  $a\mathbf{u}$ , com  $\mathbf{u} = (-1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (3, 4)$  e  $a = 3$ .
  - (b) Explique por que  $V$  é fechado na adição e multiplicação por escalar.
  - (c) Como a adição de  $V$  é a operação de adição padrão de  $\mathbb{R}^2$ , certos axiomas de espaço vetorial valem para  $V$  por valem em  $\mathbb{R}^2$ . Quais são esses axiomas?
  - (d) Mostre que valem os Axiomas 7, 8 e 9.
  - (e) Mostre que o Axioma 10 falha e que, portanto,  $V$  não é um espaço vetorial com as operações dadas.
2. Seja  $V$  o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e considere as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1 + 1, u_2 + v_2 + 1), \quad a\mathbf{u} = (au_1, au_2)$$

- (a) Calcule  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  e  $a\mathbf{u}$ , com  $\mathbf{u} = (0, 4)$ ,  $\mathbf{v} = (1, -3)$  e  $a = 2$ .
- (b) Mostre que  $(0, 0) \neq \mathbf{0}$ .
- (c) Mostre que  $(-1, -1) = \mathbf{0}$ .
- (d) Mostre que vale o Axioma 5 fornecendo um par ordenado  $-\mathbf{u}$  tal que  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ , com  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ .
- (e) Encontre dois axiomas de espaço vetorial que não sejam válidos.

Respostas:

1. (a)  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2, 6)$ ,  $3\mathbf{u} = (0, 6)$  (c) Axiomas 1 a 5.

1. Determinar quais dos seguintes são subespaços de  $R^3$ .

- (a) Todos os vetores da forma  $(a, 0, 0)$ .
- (b) Todos os vetores da forma  $(a, 1, 1)$ .
- (c) Todos os vetores da forma  $(a, b, c)$ , com  $b = a + c$ .
- (d) Todos os vetores da forma  $(a, b, c)$ , com  $b = a + c + 1$ .
- (e) Todos os vetores da forma  $(a, b, 0)$ .

7. Quais dos seguintes são combinações lineares de

$u = (0, -2, 2)$  e  $v = (1, 3, -1)$ ?

- (a)  $(2, 2, 2)$
- (b)  $(3, 1, 5)$
- (c)  $(0, 4, 5)$
- (d)  $(0, 0, 0)$

9. Quais dos seguintes são combinações lineares de

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}?$$

- (a)  $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$
- (b)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- (c)  $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$
- (d)  $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

### Respostas:

1. (a), (c), (e)    7. (a), (b), (d)    9. (a), (b), (c)