Método Dedutivo
Conjuntos Completos
Formas Normais

Lógica Matemática

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO UENF

Prof. Fermín A. Tang

Método Dedutivo

Definição

- Todas as implicações e equivalências foram demonstradas até aqui pelo método das tabelas-verdade. Um método mais eficiente é a demonstração de implicações e equivalências pelo método dedutivo.
- No método dedutivo utilizam-se as equivalências apresentadas na Álgebra de Proposições.
- Vale observar que as equivalências da álgebra de proposições continuam sendo válidas quando as proposições simples p, q, r e t (verdadeira) e c (falsa) que fazem parte de uma proposição são substituídas por proposições compostas P, Q, R e T (tautologia) e C (contradição).

Método Dedutivo

Exemplo1A

- Demonstrar as implicações:

  i) $c \Longrightarrow p$

  ii) $p \Longrightarrow t$

- onde p é uma proposição qualquer e c e t são proposições cujos valores lógicos são F (falsidade) e V (verdade), respectivamente.

- Demonstração1A.- Para demonstrar cada implicação pelo método dedutivo devemos demonstrar que a condicional associada é tautológica. Temos assim:

i) $c \longrightarrow p \Longleftrightarrow \sim c \vee p$ (Equiv. da condicional)

$\Longleftrightarrow t \vee p$ (Def. do operador ~)

$\Longleftrightarrow t$ (Def. do operador ∨)

ii) $p \longrightarrow t \Longleftrightarrow \sim p \vee t$ (Equiv. da condicional)

$\Longleftrightarrow t$ (Def. do operador ∨)

Método Dedutivo

Exemplo1B

- Demonstrar as implicações:

  i) $c \Longrightarrow p$

  ii) $p \Longrightarrow t$

- onde p é uma proposição qualquer e c e t são proposições cujos valores lógicos são F (falsidade) e V (verdade), respectivamente.

- Demonstração1B.- Também podemos demonstrar as implicações usando tabelas tabelas-verdade para $c \longrightarrow p$ e $p \longrightarrow t$. Observe que elas mostram que ambas condicionais são tautológicas:

p	c	t	$c \longrightarrow p$	$p \longrightarrow t$
V	F	V	V	V
F	F	V	V	V

MÉTODO DEDUTIVO

EXEMPLO2

- Demonstrar a implicação:

$$p \wedge q \Longrightarrow p \qquad \text{(Simplificação)}$$

- Demonstração2.- Para demonstrar a implicação devemos demonstrar que a condicional $p \wedge q \longrightarrow p$ é tautológica.

- Temos assim:

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \longrightarrow p &\Leftrightarrow \sim(p \wedge q) \vee p && \text{(Equiv. da condicional)}\\
&\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee p && \text{(De Morgan)}\\
&\Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee \sim q && \text{(Comutativa e Associativa)}\\
&\Leftrightarrow T \vee \sim q && \text{(Def. do operador } \vee\text{)}\\
&\Leftrightarrow T && \text{(Def. do operador } \vee\text{)}
\end{aligned}$$

Método Dedutivo

Exemplo3

- Demonstrar a implicação:

$$p \Longrightarrow p \vee q \qquad \text{(Adição)}$$

- <u>Demonstração3</u>.- Para demonstrar a implicação devemos demonstrar que a condicional $p \longrightarrow p \vee q$ é tautológica. Temos assim:

- Temos assim:

$$
\begin{aligned}
p \longrightarrow p \vee q &\Longleftrightarrow \sim p \vee (p \vee q) && \text{(Equiv. da condicional)}\\
&\Longleftrightarrow (\sim p \vee p) \vee q && \text{(Associativa)}\\
&\Longleftrightarrow \quad T \vee q && \text{(Def. do operador } \vee\text{)}\\
&\Longleftrightarrow \quad T && \text{(Def. do operador } \vee\text{)}
\end{aligned}
$$

Método Dedutivo

Exemplo4

- Demonstrar a implicação:

$$(p \longrightarrow q) \wedge p \Longrightarrow q \qquad \text{(Modus ponens)}$$

- Demonstração4.- Para demonstrar a implicação devemos demonstrar que a condicional $(p \longrightarrow q) \wedge p \longrightarrow q$ é tautológica.
- Outra forma é mostrar que o antecedente nos leva ao consequente.

- Temos assim:

$$\begin{aligned} (p \longrightarrow q) \wedge p &\Longleftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge p && \text{(Equiv. da condicional)} \\ &\Longleftrightarrow p \wedge (\sim p \vee q) && \text{(Comutativa)} \\ &\Longleftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) && \text{(Distributiva)} \\ &\Longleftrightarrow C \vee (p \wedge q) && \text{(Def. do operador } \wedge\text{)} \\ &\Longleftrightarrow (p \wedge q) && \text{(Identidade)} \end{aligned}$$

- Sabemos que:

$$(p \wedge q) \Longrightarrow q \qquad \text{(Simplificação)}$$

- Com isso, temos que:

$$\boxed{(p \longrightarrow q) \wedge p \Longrightarrow q}$$

Método Dedutivo

Exemplo5

- Demonstrar a implicação:

$$(p \longrightarrow q) \wedge {\sim}q \Longrightarrow {\sim}p \qquad \text{(Modus tollens)}$$

- Demonstração5.- Para demonstrar a implicação procuramos equivalências para o antecedente que impliquem no consequente.

- Temos assim:

$$\begin{aligned}
(p \longrightarrow q) \wedge {\sim}q &\Leftrightarrow ({\sim}p \vee q) \wedge {\sim}q && \text{(Equiv. da condicional)}\\
&\Leftrightarrow ({\sim}p \wedge {\sim}q) \vee (q \wedge {\sim}q) && \text{(Distributiva)}\\
&\Leftrightarrow ({\sim}p \wedge {\sim}q) \vee C && \text{(Def. do operador } \wedge\text{)}\\
&\Leftrightarrow ({\sim}p \wedge {\sim}q) && \text{(Identidade)}
\end{aligned}$$

- Sabemos que:

$$({\sim}p \wedge {\sim}q) \Longrightarrow {\sim}p \qquad \text{(Simplificação)}$$

- Com isso, temos que:

$$\boxed{(p \longrightarrow q) \wedge {\sim}q \Longrightarrow {\sim}p}$$

Método Dedutivo

Exemplo6

- Demonstrar a implicação:

$$(p \vee q) \wedge \sim p \Longrightarrow q \qquad \text{(Silogismo disjuntivo)}$$

- Demonstração6.- Para demonstrar a implicação procuramos equivalências para o antecedente que impliquem no consequente.

- Temos assim:

$$(p \vee q) \wedge \sim p \Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p) \qquad \text{(Distributiva)}$$

$$\Leftrightarrow \ C \vee (q \wedge \sim p) \qquad \text{(Def. do operador } \wedge \text{)}$$

$$\Leftrightarrow (q \wedge \sim p) \qquad \text{(Identidade)}$$

- Sabemos que:

$$(q \wedge \sim p) \Longrightarrow q \qquad \text{(Simplificação)}$$

- Com isso, temos que:

$$\boxed{(p \vee q) \wedge \sim p \Longrightarrow q}$$

Método Dedutivo

Exemplo7

- Demonstrar a implicação:

$$p \wedge q \Longrightarrow p \vee q$$

- Demonstração7.- Para demonstrar a implicação devemos demonstrar que a condicional $p \wedge q \longrightarrow p \vee q$ é tautológica. Temos assim:

$$
\begin{aligned}
p \wedge q \longrightarrow p \vee q &\Leftrightarrow \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q) && \text{(Equiv. da condicional)}\\
&\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) && \text{(De Morgan)}\\
&\Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee (\sim q \vee q) && \text{(Associativa e Comutativa)}\\
&\Leftrightarrow T \vee T && \text{(Def. do operador } \vee \text{)}\\
&\Leftrightarrow T && \text{(Def. do operador } \vee \text{)}
\end{aligned}
$$

Método Dedutivo

Exemplo8

- Demonstrar a implicação:

$$p \Longrightarrow q \longrightarrow p$$

- <u>Demonstração8</u>.- Para demonstrar a implicação devemos demonstrar que a condicional $p \longrightarrow (q \longrightarrow p)$ é tautológica. Observe a precedência das duas condicionais.

- Temos assim:

$$
\begin{aligned}
p \longrightarrow (q \longrightarrow p) &\Leftrightarrow \sim p \vee (q \longrightarrow p) && \text{(Equiv. da condicional)}\\
&\Leftrightarrow \sim p \vee (\sim q \vee p) && \text{(Equiv. da condicional)}\\
&\Leftrightarrow \sim p \vee (p \vee \sim q) && \text{(Comutativa)}\\
&\Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee \sim q && \text{(Associativa)}\\
&\Leftrightarrow T \vee \sim q && \text{(Def. do operador } \vee \text{)}\\
&\Leftrightarrow T && \text{(Def. do operador } \vee \text{)}
\end{aligned}
$$

Método Dedutivo

Exemplo9

- Demonstrar a implicação:

$$p \Longrightarrow \sim p \longrightarrow q$$

- Demonstração9.- Para demonstrar a implicação devemos demonstrar que a condicional $p \longrightarrow (\sim p \longrightarrow q)$ é tautológica. Observe a precedência das duas condicionais.

- Temos assim:

$$
\begin{aligned}
p \longrightarrow (\sim p \longrightarrow q) &\Leftrightarrow \sim p \vee (\sim p \longrightarrow q) && \text{(Equiv. da condicional)}\\
&\Leftrightarrow \sim p \vee (\sim\sim p \vee q) && \text{(Equiv. da condicional)}\\
&\Leftrightarrow \sim p \vee (p \vee q) && \text{(Dupla negação)}\\
&\Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee q && \text{(Associativa)}\\
&\Leftrightarrow T \vee q && \text{(Def. do operador } \vee \text{)}\\
&\Leftrightarrow T && \text{(Def. do operador } \vee \text{)}
\end{aligned}
$$

Método Dedutivo

Exemplo10

- Demonstrar a implicação: $p \longrightarrow q \Longrightarrow p \wedge r \longrightarrow q$

- Demonstração.- Para demonstrar a implicação devemos demonstrar que a condicional $(p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \wedge r \longrightarrow q)$ é tautológica. Observe a precedência das três condicionais. Temos assim:

$$
\begin{aligned}
(p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \wedge r \longrightarrow q) &\Longleftrightarrow \sim(p \longrightarrow q) \vee (p \wedge r \longrightarrow q) && \text{(Equiv. da condicional)}\\
&\Longleftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \vee (\sim(p \wedge r) \vee q) && \text{(Equiv. da condicional)}\\
&\Longleftrightarrow (\sim\sim p \wedge \sim q) \vee \big((\sim p \vee \sim r) \vee q\big) && \text{(De Morgan)}\\
&\Longleftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee \big((\sim p \vee q) \vee \sim r\big) && \text{(Comutativa e Associativa)}\\
&\Longleftrightarrow \big((p \wedge \sim q) \vee \sim(p \wedge \sim q)\big) \vee \sim r && \text{(De Morgan e Associativa)}\\
&\Longleftrightarrow T \vee \sim r && \text{(Def. do operador } \vee \text{)}\\
&\Longleftrightarrow T && \text{(Def. do operador } \vee \text{)}
\end{aligned}
$$

Método Dedutivo

Exercício11

- Demonstrar a implicação:

$$p \longrightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \sim q \longrightarrow c$$ (Redução ao absurdo)

- Demonstração11.–

Método Dedutivo

Exercício12

- Demonstrar a implicação:

$$p \longrightarrow q \Leftrightarrow p \vee q \longrightarrow q$$

- Demonstração12.-

Método Dedutivo

Exercício13

- Demonstrar a implicação:

$$(p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow \sim q) \Longleftrightarrow \sim p$$

- Demonstração13.-

Método Dedutivo

Exercício14

- Demonstrar a implicação:

$$p \wedge q \longrightarrow r \Leftrightarrow p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$$ (Exportação-Importação)

- Demonstração14.–

Método Dedutivo

Exercício15

- Demonstrar a implicação:

$$(p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r) \Leftrightarrow p \vee q \longrightarrow r$$

- Demonstração15.-

Método Dedutivo

Exercício16

- Demonstrar a implicação:

$$(p \longrightarrow q) \vee (p \longrightarrow r) \Leftrightarrow p \longrightarrow q \vee r$$

- Demonstração16.-

Método Dedutivo
Exercício17

- ✘ Demonstrar a implicação:

$$(p \longrightarrow r) \vee (q \longrightarrow s) \Leftrightarrow p \wedge q \longrightarrow r \vee s$$

- ✘ Demonstração17.–

Método Dedutivo

Exercício18

- Demonstrar as equivalências:

  a) $\sim p \Leftrightarrow p \downarrow p$

  b) $p \wedge q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

  c) $p \vee q \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

  d) $p \longrightarrow q \Leftrightarrow \big((p \downarrow p) \downarrow q\big) \downarrow \big((p \downarrow p) \downarrow q\big)$

- <u>Demonstração18</u>.–

Método Dedutivo

Exercício19

- Demonstrar as equivalências:

  a) $\sim p \Leftrightarrow p \uparrow p$

  b) $p \wedge q \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$

  c) $p \vee q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

  d) $p \longrightarrow q \Leftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q)$

- <u>Demonstração19</u>.-

Conjuntos completos

Teorema

- Considerando-se os cinco conectivos fundamentais $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$ e $\longleftrightarrow$, pode-se representar esses conectivos em termos de qualquer um dos seguintes pares de conectivos:

  1) $\sim$ e $\vee$ 2) $\sim$ e $\wedge$ 3) $\sim$ e $\longrightarrow$

- O que significa que podemos usar apenas um par de conectivos para representar os outros três. Um conjunto de conectivos capaz de representar os cinco conectivos fundamentais é chamado de conjunto completo.

- Demonstração.- Dado cada par de conectivos devemos encontrar expressões para representar as operações dos outros três conectivos.

- No primeiro caso, queremos expressar $\wedge$, $\longrightarrow$ e $\longleftrightarrow$ em termos de $\sim$ e $\vee$:

$$\begin{aligned} p \wedge q &\Leftrightarrow {\sim\sim p} \wedge {\sim\sim q} \\ &\Leftrightarrow {\sim}({\sim p} \vee {\sim q}) \end{aligned}$$

$$p \longrightarrow q \Leftrightarrow {\sim p} \vee q$$

$$\begin{aligned} p \longleftrightarrow q &\Leftrightarrow (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p) \\ &\Leftrightarrow ({\sim p} \vee q) \wedge ({\sim q} \vee p) \\ &\Leftrightarrow {\sim}\big({\sim}({\sim p} \vee q) \vee {\sim}({\sim q} \vee p)\big) \end{aligned}$$

Conjuntos completos

Teorema

- ✗ No segundo caso, queremos expressar $\vee$, $\longrightarrow$ e $\longleftrightarrow$ em termos de $\sim$ e $\wedge$:

$$\begin{aligned} p \vee q &\Leftrightarrow {\sim}{\sim}p \vee {\sim}{\sim}q \\ &\Leftrightarrow {\sim}({\sim}p \wedge {\sim}q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \longrightarrow q &\Leftrightarrow {\sim}p \vee q \\ &\Leftrightarrow {\sim}p \vee {\sim}{\sim}q \\ &\Leftrightarrow {\sim}(p \wedge {\sim}q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \longleftrightarrow q &\Leftrightarrow (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p) \\ &\Leftrightarrow {\sim}(p \wedge {\sim}q) \wedge {\sim}(q \wedge {\sim}p) \end{aligned}$$

- ✗ No terceiro caso, queremos expressar $\wedge$, $\vee$ e $\longleftrightarrow$ em termos de $\sim$ e $\longrightarrow$:

$$\begin{aligned} p \wedge q &\Leftrightarrow {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q) \\ &\Leftrightarrow {\sim}(p \longrightarrow {\sim}q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \vee q &\Leftrightarrow {\sim}{\sim}p \vee q \\ &\Leftrightarrow {\sim}p \longrightarrow q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \longleftrightarrow q &\Leftrightarrow (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p) \\ &\Leftrightarrow {\sim}\big((p \longrightarrow q) \longrightarrow {\sim}(q \longrightarrow p)\big) \end{aligned}$$

Conjuntos completos

Conectivos de Scheffer

- Os conectivos $\wedge$, $\vee$ e $\longrightarrow$ não podem ser representados em termos de $\sim$ e $\longleftrightarrow$. Ou seja, $\sim$ e $\longleftrightarrow$ não é um conjunto completo.
- O conectivo $\vee$ pode ser representado em termos de um único conectivo, $\longrightarrow$, como mostra a equivalência:

$$p \vee q \iff (p \longrightarrow q) \longrightarrow q$$

- Todos os conectivos fundamentais podem ser representados em termos de um único conectivo (conectivo de Scheffer): seja o conectivo $\downarrow$ (negação conjunta) ou seja o conectivo $\uparrow$ (negação disjunta).

Forma Normal

Definição

- Diz-se que uma proposição está na forma normal (FN) se e somente se , contém apenas alguns dos seguintes conectivos: $\sim$, $\wedge$ e $\vee$.
- As seguintes proposições estão na forma normal (FN):

$i)\ \sim p \wedge \sim q$

$ii)\ \sim (\sim p \vee \sim q)$

$iii)\ (p \wedge q) \vee (\sim q \vee r)$

- Toda proposição pode ser levada para uma FN equivalente pela eliminação dos conectivos $\longrightarrow$ e $\longleftrightarrow$. A condicional $p \longrightarrow q$ pode ser substituída por $\sim p \vee q$ enquanto a bicondicional $p \longleftrightarrow q$ pode ser substituída por $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$.
- Há dois tipos de FN de particular interesse para uma proposição: a forma normal conjuntiva (FNC) e a forma normal disjuntiva (FND).

Forma Normal Conjuntiva

Definição

- Diz-se que uma proposição está na forma normal conjuntiva (FNC) se e somente se são verificadas as seguintes condições:
  1. Somente contém os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$;
  2. O conectivo $\sim$ somente incide sobre letras proposicionais (ex.: $\sim p$), não aparece repetido (ex.: $\sim\sim p$) e não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$; (ex.: $\sim(p \vee q)$)
  3. Apenas o conectivo $\wedge$ tem alcance sobre os outros dois. O conectivo $\vee$ somente tem alcance sobre $\sim$.

- Chama-se literal a uma proposição simples ou a sua negação. (ex. $p, q, \sim p, \sim q$)

- As seguintes proposições estão na FNC:

$i)\ \sim p \vee \sim q$

$ii)\ \sim p \wedge q \wedge r$

$iii)\ (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$

- Podemos pensar na FNC como uma proposição que é uma conjunção de termos que poderá ter conectivos $\sim$ e $\vee$. É claro que se temos apenas um termo não teremos uma conjunção.

- Em geral, podemos pensar na FNC como uma conjunção da disjunção de literais.

Forma Normal Conjuntiva

Conversão

- Para toda proposição pode-se determinar uma FNC equivalente mediante as seguintes transformações:
  1. Eliminando os conectivos $\longrightarrow$ e $\longleftrightarrow$; mediante a substituição de $p \longrightarrow q$ por $\sim p \vee q$ e de $p \longleftrightarrow q$ por $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$;
  2. Eliminando negações repetidas e parênteses precedidos de $\sim$; mediante as regras de "Dupla Negação" e "De Morgan";
  3. Substituindo as expressões do tipo: $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \wedge q) \vee r$ pelas suas equivalentes respectivas:

$$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad \text{e} \quad (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

conforme a regra distributiva.

Forma Normal Conjuntiva

Exemplo1

- Determinar a FNC da proposição: $\sim\big(((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (q \wedge r)\big)$

- <u>Resolução</u>.– Temos, sucessivamente por equivalências:

$$\sim\big(((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (q \wedge r)\big) \Leftrightarrow \sim((p \vee q) \wedge \sim q) \wedge \sim(q \wedge r) \qquad \text{(De Morgan)}$$

$$\Leftrightarrow (\sim(p \vee q) \vee \sim\sim q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \qquad \text{(De Morgan)}$$

$$\Leftrightarrow \big((\sim p \wedge \sim q) \vee q\big) \wedge (\sim q \vee \sim r) \qquad \text{(De Morgan e Dupla negação)}$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \qquad \text{(Distributiva)}$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \qquad \text{(Identidade)}$$

Forma Normal Conjuntiva

Exemplo2

- Determinar a FNC da proposição: $(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\sim q \longrightarrow \sim p)$

- Resolução.– Temos, sucessivamente por equivalências:

$$(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\sim q \longrightarrow \sim p) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \longleftrightarrow (\sim\sim q \vee \sim p) \quad \text{(Equiv. da condicional)}$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \longleftrightarrow (q \vee \sim p) \quad \text{(Dupla Negação)}$$

$$\Leftrightarrow \big((\sim p \vee q) \longrightarrow (q \vee \sim p)\big) \wedge \big((q \vee \sim p) \longrightarrow (\sim p \vee q)\big) \quad \text{(Equiv. da bicondicional)}$$

$$\Leftrightarrow \big(\sim(\sim p \vee q) \vee (q \vee \sim p)\big) \wedge \big(\sim(q \vee \sim p) \vee (\sim p \vee q)\big) \quad \text{(Equiv. da condicional)}$$

$$\Leftrightarrow \big((\sim\sim p \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim p)\big) \wedge \big((\sim q \wedge \sim\sim p) \vee (\sim p \vee q)\big) \quad \text{(De Morgan)}$$

$$\Leftrightarrow \big((p \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim p)\big) \wedge \big((\sim q \wedge p) \vee (q \vee \sim p)\big) \quad \text{(Dupla negação e comutativa)}$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee q \vee \sim p) \wedge (p \vee q \vee \sim p) \quad \text{(Distributiva)}$$

- Observe que todos os termos são tautológicos.

Forma Normal Conjuntiva

Exemplo3

- ✘ Determinar a FNC da proposição: $p \leftrightarrow q \vee {\sim}r$

- ✘ Resolução.– Temos, sucessivamente por equivalências:

$$p \leftrightarrow (q \vee {\sim}r) \Leftrightarrow \big(p \longrightarrow (q \vee {\sim}r)\big) \wedge \big((q \vee {\sim}r) \longrightarrow p\big) \quad \text{(Equiv. da bicondicional)}$$

$$\Leftrightarrow \big({\sim}p \vee (q \vee {\sim}r)\big) \wedge \big({\sim}(q \vee {\sim}r) \vee p\big) \quad \text{(Equiv. da condicional)}$$

$$\Leftrightarrow ({\sim}p \vee q \vee {\sim}r) \wedge \big(({\sim}q \wedge r) \vee p\big) \quad \text{(Associativa e De Morgan)}$$

$$\Leftrightarrow ({\sim}p \vee q \vee {\sim}r) \wedge ({\sim}q \vee p) \wedge (r \vee p) \quad \text{(Distributiva)}$$

Forma Normal Disjuntiva

Definição

- Diz-se que uma proposição está na forma normal disjuntiva (FND) se e somente se são verificadas as seguintes condições:
  1. Somente contém os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$;
  2. O conectivo $\sim$ somente incide sobre letras proposicionais (ex.: $\sim p$), não aparece repetido (ex.: $\sim\sim p$) nem tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$; (ex.: $\sim(p \vee q)$)
  3. Apenas o conectivo $\vee$ tem alcance sobre os outros dois. O conectivo $\wedge$ somente tem alcance sobre $\sim$.

- Chama-se literal a uma proposição simples ou a sua negação. (ex. $p, q, \sim p, \sim q$)

- As seguintes proposições estão na FND:

  $i)\ \sim p \vee q$

  $ii)\ p \vee (\sim q \wedge r)$

  $iii)\ (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r)$

- Podemos pensar na FND como uma proposição que é uma disjunção de termos, onde cada termo poderá ter conectivos $\sim$ e $\wedge$. É claro que se temos apenas um termo não teremos uma disjunção.

- Em geral, podemos pensar na FND como uma disjunção da conjunção de literais.

Forma Normal Disjuntiva

Conversão

- Para toda proposição pode-se determinar uma FND equivalente mediante as seguintes transformações:
  1. Eliminando os conectivos $\longrightarrow$ e $\longleftrightarrow$; mediante a substituição de $p \longrightarrow q$ por $\sim p \vee q$ e de $p \longleftrightarrow q$ por $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$;
  2. Eliminando negações repetidas e parênteses precedidos de $\sim$; mediante as regras de "Dupla Negação" e "De Morgan";
  3. Substituindo as expressões do tipo: $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \vee q) \wedge r$ pelas suas equivalentes respectivas:

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad e \quad (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

conforme a regra distributiva.

Forma Normal Disjuntiva

Exemplo1

- Determinar a FND da proposição: $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

- <u>Resolução</u>.- Temos, sucessivamente por equivalências:

$$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \qquad \text{(Equiv. da condicional)}$$

$$\Leftrightarrow \big((\sim p \vee q) \ \wedge \sim q\big) \vee \big((\sim p \vee q) \ \wedge p\big) \qquad \text{(Distributiva)}$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p) \qquad \text{(Distributiva)}$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p) \qquad \text{(Identidade)}$$

Forma Normal Disjuntiva

Exemplo2

- Determinar a FND da proposição: $\sim\big(((p \vee q) \wedge \sim q) \ \vee \ (q \wedge r)\big)$
- <u>Resolução</u>.– Temos, sucessivamente por equivalências:

$$\sim\big(((p \vee q) \wedge \sim q) \ \vee \ (q \wedge r)\big) \Leftrightarrow \sim((p \vee q) \wedge \sim q) \wedge \sim(q \wedge r) \qquad \text{(De Morgan)}$$

$$\Leftrightarrow (\sim(p \vee q) \vee \sim\sim q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \qquad \text{(De Morgan)}$$

$$\text{(De Morgan e Dupla negação)} \qquad \Leftrightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$$

$$\text{(Distributiva)} \qquad \Leftrightarrow \big(((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge \sim q\big) \vee \big(((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge \sim r\big)$$

$$\text{(Distributiva)} \qquad \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r)$$

$$\text{(Identidade)} \qquad (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r)$$

Proposição Dual

Definição

- Seja P uma proposição que só contém os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$. A proposição obtida a partir de P trocando cada símbolo $\wedge$ por $\vee$ e cada símbolo $\vee$ por $\wedge$ chama-se de a proposição dual de P.

- Considere a seguinte proposição:

$$\sim((p \wedge q) \vee \sim p)$$

- A proposição dual correspondente é:

$$\sim((p \vee q) \wedge \sim p)$$

Princípio de Dualidade

Definição

- Se P e Q são proposições equivalentes que só contém os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$, então as suas duais respectivas P_1 e Q_1 também são equivalentes.

- Exemplo1.-

- Considere as seguintes proposições equivalentes:

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

- Pelo princípio de dualidade temos que:

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

- Exemplo2.-

- Considere as seguintes proposições equivalentes:

$$(p \wedge \sim p) \vee q \Leftrightarrow q$$

- Pelo princípio de dualidade temos que:

$$(p \vee \sim p) \wedge q \Leftrightarrow q$$

Referências

- De Alencar Filho, Edgar. Iniciação à Lógica Matemática. Capítulo 8. Editora Nobel. São Paulo. 1975. Reimpresso em 2015.