Álgebra das Proposições

Lógica Matemática

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO UENF

Prof. Fermín A. Tang

Álgebra das Proposições

- Estudaremos algumas propriedades dos operadores lógicos que são semelhantes a algumas propriedades dos operadores aritméticos.
- Também estudaremos outras propriedades dos operadores lógicos que são importantes para a definição de implicações e equivalências lógicas, assim como para a transformação e simplificação das expressões lógicas.

Álgebra das Proposições

Propriedades da Lógica

- Começaremos estudando algumas propriedades fundamentais:
  - Idempotente;
  - Comutativa;
  - Associativa;
  - Identidade;
  - Nulidade.

- Vamos usar um operador fictício, denotado como ⊙, e um elemento neutro N, e outro absorvente A, para ilustrar a ideia em cada caso:
  - Idempotente: $p \odot p \Leftrightarrow p$
  - Comutativa: $p \odot q \Leftrightarrow q \odot p$
  - Associativa: $(p \odot q) \odot r \Leftrightarrow p \odot (q \odot r)$
  - Identidade: $p \odot N \Leftrightarrow p$
  - Nulidade: $p \odot A \Leftrightarrow A$

- Onde, p e q são proposições.

Álgebra das Proposições

Propriedades da Aritmética

- Podemos usar a aritmética para ilustrar algumas dessas propriedades nos operadores lógicos:

- Idempotente:
- Comutativa:
  - Soma: $p + q = q + p$
  - Multiplicação: $p \times q = q \times p$
- Associativa:
  - Soma: $(p + q) + r = p + (q + r)$
  - Multiplicação: $(p \times q) \times r = p \times (q \times r)$
- Identidade:
  - Soma: $p + 0 = p$ Onde, 0 é elemento neutro para a soma.
  - Multiplicação: $p \times 1 = p$ Onde, 1 é elemento neutro para a multiplicação.
- Nulidade
  - Multiplicação: $p \times 0 = 0$ Onde, 0 é elemento absorvente para a multiplicação.

Álgebra das Proposições

Propriedade Idempotente

- Os operadores de conjunção $\wedge$ e disjunção $\vee$ possuem a propriedade idempotente, conforme mostrado mediante as tabelas-verdade:

i) $p \wedge p \Leftrightarrow p$

p	$p \wedge p$	$(p \wedge p) \leftrightarrow p$
V	V	V
F	F	V

ii) $p \vee p \Leftrightarrow p$

p	$p \vee p$	$(p \vee p) \leftrightarrow p$
V	V	V
F	F	V

- Em ambos casos, as equivalências são verificadas dado que as bicondicionais correspondentes são tautologias. Observe que as colunas de cada lado da bicondicional são idênticas.

- Por outro lado, pode ser verificado que os operadores condicional $\longrightarrow$ e bicondicional $\longleftrightarrow$ não possuem a propriedade idempotente.

Álgebra das Proposições

Propriedade Comutativa

- Os operadores de conjunção $\wedge$ e disjunção $\vee$ possuem a propriedade comutativa, conforme mostrado mediante as tabelas-verdade:

i) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

ii) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

- Em ambos casos, as equivalências são verificadas dado que as bicondicionais correspondentes são tautologias. Observe que as colunas de cada lado da bicondicional são idênticas.
- O operador condicional $\longrightarrow$ não goza da propriedade comutativa.
- Já o operador bicondicional $\longleftrightarrow$ sim goza da propriedade comutativa.

Álgebra das Proposições

Propriedade Associativa

- O operador de conjunção $\wedge$ goza da propriedade associativa, conforme mostrado na tabela-verdade.

i) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

- Observa-se que a equivalência é verificada dado que as colunas de cada lado da bicondicional correspondente são idênticas.
- Portanto, a bicondicional correspondente é tautológica.

Álgebra das Proposições

Propriedade Associativa

- O operador de disjunção $\vee$ goza da propriedade associativa, conforme mostrado na tabela-verdade:

ii) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

- Observa-se que a equivalência é verificada dado que as colunas de cada lado da bicondicional correspondente são idênticas.
- Portanto, a bicondicional correspondente é tautológica.

Álgebra das Proposições

Propriedade Associativa

- Por outro lado, pode ser verificado que o operador condicional $\longrightarrow$ não goza da propriedade associativa.
- Também, pode ser verificado que o operador bicondicional $\longleftrightarrow$ sim goza da propriedade associativa.

Álgebra das Proposições

Propriedade de Identidade

- Os operadores de conjunção $\wedge$ e disjunção $\vee$ gozam da propriedade de identidade, sempre que se considerem como elementos neutros t e c , respectivamente, onde t representa uma tautologia e c uma contradição.

- Em ambos casos, as equivalências são verificadas dado que as bicondicionais correspondentes são tautologias. Observe que as colunas de cada lado da bicondicional são idênticas.

i) $p \wedge t \Leftrightarrow p$

p	t	$p \wedge t$	$(p \wedge t) \leftrightarrow p$
V	V	V	V
F	V	F	V

ii) $p \vee c \Leftrightarrow p$

p	c	$p \vee c$	$(p \vee c) \leftrightarrow p$
V	F	V	V
F	F	F	V

Álgebra das Proposições

Propriedade de Nulidade

- Os operadores de conjunção $\wedge$ e disjunção $\vee$ gozam da propriedade de nulidade, sempre que se considerem como elementos absorventes c e t, respectivamente, onde c uma contradição e t representa uma tautologia.

- Em ambos casos, as equivalências são verificadas dado que as bicondicionais correspondentes são tautologias. Observe que as colunas de cada lado da bicondicional são idênticas.

i) $p \wedge c \Leftrightarrow c$

p	c	$p \wedge c$	$(p \wedge c) \leftrightarrow c$
V	F	F	V
F	F	F	V

ii) $p \vee t \Leftrightarrow t$

p	t	$p \vee t$	$(p \vee t) \leftrightarrow t$
V	V	V	V
F	V	V	V

Álgebra das Proposições

Propriedades Distributivas

- Sejam p, q e r proposições simples quaisquer, as propriedades distributivas são as seguintes:

i) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

ii) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- Essas regras estabelecem o seguinte:
  - i) A conjunção é distributiva em relação à disjunção.
  - ii) A disjunção é distributiva em relação à conjunção.

Álgebra das Proposições

Propriedades Distributivas – Exemplos

- Considerando a primeira equivalência:

  i) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

- Temos que a proposição:

  "Carlos estuda **e** Jorge ouve música **ou** lê"

  seria equivalente à seguinte proposição:

  "Carlos estuda **e** Jorge ouve música" **ou**
  "Carlos estuda **e** Jorge lê"

- Considerando a segunda equivalência:

  ii) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- Temos que a proposição:

  "Chove **ou** faz vento **e** frio"

  seria equivalente à seguinte proposição:

  "Chove **ou** faz vento " **e** "Chove **ou** faz frio"

Álgebra das Proposições

Propriedades Distributivas

- Mostra-se a equivalência da primeira regra distributiva usando tabelas-verdade:

i) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

- Na tabela-verdade, observe que as proposições de cada lado da equivalência possuem colunas idênticas, portanto elas são equivalentes.

Álgebra das Proposições

Propriedades Distributivas

- Mostra-se a equivalência da segunda regra distributiva usando tabelas-verdade:

ii) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

- Na tabela-verdade, observe que as proposições de cada lado da equivalência possuem colunas idênticas, portanto elas são equivalentes.

Álgebra das Proposições

Propriedades de Absorção

- As regras de absorção estabelecem que certas proposições que combinam operadores $\wedge$ e $\vee$ tem valor de verdade definido por apenas um único termo. Tais proposições possuem a seguinte estrutura:

i) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

ii) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

- Em ambos casos, o primeiro termo determina o valor de verdade de toda a proposição. Esse termo também faz parte do segundo termo.

Álgebra das Proposições

Propriedades de Absorção

- Mostra-se a equivalência das propriedades de absorção usando tabelas-verdade:

i) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

ii) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

- Em ambos casos, as colunas das proposições relacionadas são idênticas, portanto essas proposições são equivalentes.
- Com isso, as seguintes bicondicionais são tautológicas:

i) $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$

ii) $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$

Álgebra das Proposições

Propriedades de De Morgan

- As propriedades de De Morgan relacionam os operadores $\wedge$ e $\vee$, da seguinte maneira:

  i) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

  ii) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

- As regras referem-se as negação de uma conjunção e negação de uma disjunção, respectivamente. Essas regras estabelecem o seguinte:

i. Negar que duas proposições são ao mesmo tempo verdadeiras equivale a afirmar que pelo menos uma delas é falsa.

ii. Negar que ao menos uma de duas proposições é verdadeira equivale a afirmar que ambas são falsas.

- Segundo as propriedades de De Morgan podemos afirmar que a negação permite transformar a conjunção em disjunção e a disjunção em conjunção.

Álgebra das Proposições

Propriedades de De Morgan – Exemplos

- Com base na primeira propriedade de DeMorgan:

  i) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

- A negação da proposição:

  "É inteligente **e** estuda"

  seria a seguinte proposição:

  "**Não** é inteligente **ou não** estuda"

- Com base na segunda propriedade de DeMorgan:

  ii) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

- A negação da proposição:

  "É médico **ou** professor"

  seria a seguinte proposição:

  "**Não** é médico **e não** é professor"

Propriedades da Conjunção e Disjunção

Propriedades de De Morgan

- Mostra-se a equivalência da primeira regra de De Morgan usando tabelas-verdade:

i) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

- Na tabela-verdade, observe que as proposições de cada lado da equivalência possuem colunas idênticas, portanto elas são equivalentes.

Propriedades da Conjunção e Disjunção

Propriedades de De Morgan

- Mostra-se a equivalência da segunda regra de De Morgan usando tabelas-verdade:

ii) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

- Na tabela-verdade, observe que as proposições de cada lado da equivalência possuem colunas idênticas, portanto elas são equivalentes.

Propriedades da Conjunção e Disjunção

Propriedades de De Morgan

- Com base nas regras de De Morgan:

i) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

ii) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

- Mostra-se que:

i. É possível definir a conjunção a partir da disjunção e da negação;

i) $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

- Mostra-se que:

i. È possível definir a disjunção a partir da conjunção e da negação.

ii) $(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

Negação da Condicional

- Anteriormente, foi mostrada que a seguinte equivalência para a condicional:

$$p \longrightarrow q \iff \neg p \lor q$$

- Mostraremos uma equivalência para sua negação, usando as propriedades:

$$\neg(p \longrightarrow q) \iff \neg(\neg p \lor q)$$

$$\iff \neg\neg p \land \neg q \qquad \text{(De Morgan)}$$

$$\boxed{\neg(p \longrightarrow q) \iff p \land \neg q} \qquad \text{(Dupla Negação)}$$

- Mostramos a equivalência usando a tabela-verdade de cada proposição:

p	q	$p \longrightarrow q$	$\neg(p \longrightarrow q)$	$\neg q$	$p \land \neg q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

- As tabelas-verdade das duas proposições são idênticas, portanto elas são equivalentes.

Negação da Bicondicional

- Anteriormente, foi mostrada que a seguinte equivalência para a condicional:

$$p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$$

- A partir da equivalência acima, e com base na equivalência da condicional, temos uma outra expressão para a bicondicional:

$$p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

- Mostraremos uma equivalência para a negação da bicondicional:

$$
\begin{aligned}
\neg(p \leftrightarrow q) &\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) && \text{(Negação)}\\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \;\vee\; \neg(\neg q \vee p) && \text{(De Morgan)}\\
&\Leftrightarrow (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p) && \text{(De Morgan)}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)} \qquad \text{(Dupla Negação)}$$

Negação da Bicondicional

- Mostraremos a equivalência para a negação da bicondicional usando tabelas-verdade.
- Considere a equivalência:

$$\boxed{\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)}$$

$$P \Leftrightarrow Q$$

p	q	$p \leftrightarrow q$	P	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p$	$q \wedge \neg p$	Q
V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V	F	F

- As tabelas-verdade das duas proposições são idênticas, portanto elas são equivalentes.

Referência

- De Alencar Filho, Edgar. Iniciação à Lógica Matemática. Capítulo 7. Editora Nobel. São Paulo. 1975. Reimpresso em 2015.