

TAUTOLOGIAS, CONTRADIÇÕES E CONTIGÊNCIAS

Lógica Matemática



TAUTOLOGIA

DEFINIÇÃO

- ✗ Uma **tautologia** é toda proposição composta $P(p,q,r,...)$ cujo valor lógico é sempre V (verdade), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples componentes $p,q,r, ...$
- ✗ Chama-se tautologia toda proposição cuja última coluna da sua tabela-verdade (Método1) possui somente valor lógico V (verdade).
- ✗ As tautologias são também denominadas **proposições tautológicas** ou **proposições logicamente verdadeiras**.

Exemplos:

- ✗ As seguintes proposições são tautologias (**Princípio de identidade**):

$$p \rightarrow p$$

$$p \leftrightarrow p$$

TAUTOLOGIA

EXEMPLO 1

- ✗ Considere a proposição:

$$H = \neg(p \wedge \neg p) \quad (1)$$

Ordem das operações



- ✗ Identifique as proposições simples e a ordem das operações lógicas.
- ✗ Identifique as subfórmulas associadas as operações lógicas.

$$A = \neg p$$

$$B = (p \wedge A)$$

$$H = \neg B$$

- ✗ Construa a tabela-verdade correspondente.

	A	B	H
p	$\neg p$	$(p \wedge A)$	$\neg B$
V	F	F	V
F	V	F	V

- ✗ A proposição é tautológica conforme a sua tabela-verdade.
- ✗ Observe que a proposição é uma forma de representar o **Princípio do terceiro excluído**. Por tanto, afirmar que uma proposição ou é verdadeira ou é falsa é sempre verdadeiro.

TAUTOLOGIA

EXEMPLO 2

- ✗ Considere a proposição:

$$H = (p \vee \neg p) \quad (2)$$

Ordem das
operações

2 1

- ✗ Identifique as proposições simples e a ordem das operações lógicas.
- ✗ Identifique as subfórmulas associadas as operações lógicas.

$$A = \neg p$$

$$H = (p \vee A)$$

- ✗ Construa a tabela-verdade correspondente.

	A	H
p	$\neg p$	$(p \vee A)$
V	F	V
F	V	V

- ✗ A proposição é tautológica conforme a sua tabela-verdade.
- ✗ Observe que a proposição é outra forma de representar o **Princípio do terceiro excluído**. Por tanto, afirmar que uma proposição ou é verdadeira ou é falsa é sempre verdadeiro.

TAUTOLOGIA

EXEMPLO 3

- ✗ Considere a proposição:

$$H = p \vee \neg(p \wedge q) \quad (3)$$

Ordem das
operações



- ✗ Identifique as proposições simples e a ordem das operações lógicas.
- ✗ Identifique as subfórmulas associadas as operações lógicas.

$$A = (p \wedge q)$$

$$B = \neg A$$

$$H = p \vee B$$

- ✗ Construa a tabela-verdade correspondente.

		A	B	H
p	q	$(p \wedge q)$	$\neg A$	$p \vee B$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

- ✗ A proposição é tautológica conforme a sua tabela-verdade.

TAUTOLOGIA

EXEMPLO 4

- ✗ Considere a proposição:

$$H = p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q) \quad (4)$$

Ordem das operações

2 3 1

- ✗ Identifique as proposições simples e a ordem das operações lógicas.
- ✗ Identifique as subfórmulas associadas as operações lógicas.

$$A = (p \leftrightarrow q)$$

$$B = p \wedge q$$

$$H = B \rightarrow A$$

- ✗ Construa a tabela-verdade correspondente.

		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>H</i>
<i>p</i>	<i>q</i>	$(p \leftrightarrow q)$	$p \wedge q$	$B \rightarrow A$
<i>V</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>V</i>
<i>V</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>V</i>
<i>F</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>V</i>
<i>F</i>	<i>F</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>V</i>

- ✗ Mostra-se que a proposição é tautológica.

TAUTOLOGIA

EXEMPLO 5

- ✗ Considere a proposição:

$$H = p \vee (q \wedge \neg q) \leftrightarrow p \quad (5)$$

Ordem das operações



- ✗ Identifique as proposições simples e a ordem das operações lógicas.
- ✗ Identifique as subfórmulas associadas as operações lógicas.

$$A = \neg q$$

$$B = (q \wedge A)$$

$$C = p \vee B$$

$$H = C \leftrightarrow p$$

- ✗ Construa a tabela-verdade correspondente.

		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>H</i>
<i>p</i>	<i>q</i>	$\neg q$	$(q \wedge A)$	$p \vee B$	$C \leftrightarrow p$
<i>V</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>V</i>	<i>V</i>
<i>V</i>	<i>F</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>V</i>	<i>V</i>
<i>F</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>V</i>
<i>F</i>	<i>F</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>V</i>

- ✗ Mostra-se que a proposição é tautológica.

TAUTOLOGIA

EXEMPLO 6

- ✗ Considere a proposição:

$$H = p \wedge r \rightarrow \neg q \vee r \quad (6)$$

Ordem das operações

2 4 1 3

- ✗ Identifique as proposições simples e a ordem das operações lógicas.
- ✗ Identifique as subfórmulas associadas as operações lógicas.

$$A = \neg q$$

$$B = p \wedge r$$

$$C = A \vee r$$

$$H = B \rightarrow C$$

- ✗ Construa a tabela-verdade correspondente.

			<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>H</i>
<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	$\neg q$	$p \wedge r$	$A \vee r$	$B \rightarrow C$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

- ✗ Mostra-se que a proposição é tautológica.

TAUTOLOGIA

EXEMPLO 7

✗ Considere a proposição:

$$H = ((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \quad (7)$$

Ordem das operações

① ② ③ ② ①

✗ Identifique as proposições simples e a ordem das operações lógicas.

✗ Identifique as subfórmulas associadas as operações lógicas.

$$A = (p \rightarrow q)$$

$$B = (q \rightarrow r)$$

$$C = (A \rightarrow r)$$

$$D = (p \rightarrow B)$$

$$H = (C \rightarrow D)$$

✗ Construa a tabela-verdade correspondente.

			<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>H</i>
<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow r)$	$(A \rightarrow r)$	$(p \rightarrow B)$	$(C \rightarrow D)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V

✗ Mostra-se que a proposição é tautológica.

TAUTOLOGIA

PRINCÍPIO DE SUBSTITUIÇÃO

- X Seja $H(p, q, r, \dots)$ uma tautologia e sejam $P_0(p, q, r, \dots)$, $Q_0(p, q, r, \dots)$, $R_0(p, q, r, \dots)$, ... proposições quaisquer.
- X A nova proposição obtida pela substituição de p por P_0 , q por Q_0 , r por R_0 , ... na tautologia $H(p, q, r, \dots)$ também será uma tautologia.
- X Podemos denotar a nova proposição de $H(P_0, Q_0, R_0, \dots)$.
- X Subsiste para as tautologias o chamado **princípio de substituição** seguinte:
- X Se $H(p, q, r, \dots)$ é uma tautologia, então $H(P_0, Q_0, R_0, \dots)$ também é uma tautologia, quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0, \dots .

TAUTOLOGIA

PRINCÍPIO DE SUBSTITUIÇÃO – EXEMPLO 1

- Podemos exemplificar o princípio da substituição considerando a seguinte proposição tautológica:

$$H = (p \vee \neg p)$$

- Podemos substituir p por qualquer outra proposição envolvendo p e a nova proposição continuará sendo tautológica, por exemplo:

$$P_0 = (p \rightarrow p)$$

- Substituindo temos:

$$H_0 = ((p \rightarrow p) \vee \neg(p \rightarrow p))$$

- Que é também uma proposição tautológica.

- A tabela-verdade para a proposição H_0 é a seguinte:

	A	B	H
p	$p \rightarrow p$	$\neg A$	$(A \vee B)$
V	V	F	V
F	V	F	V

- Observe que o importante para garantir a tautologia é a estrutura da proposição.

TAUTOLOGIA

PRINCÍPIO DE SUBSTITUIÇÃO – EXEMPLO 2

- ✗ Considere a seguinte proposição tautológica:

$$H = p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q)$$

- ✗ Podemos substituir p e q por qualquer outra proposição composta envolvendo p e q , por exemplo:

$$P_0 = (p \wedge q) \quad Q_0 = (p \vee q)$$

- ✗ Substituindo temos:

$$H_0 = P_0 \wedge Q_0 \rightarrow (P_0 \leftrightarrow Q_0)$$

$$H_0 = (p \wedge q) \wedge (p \vee q) \rightarrow ((p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q))$$

- ✗ Que é também uma proposição tautológica.

- ✗ A tabela-verdade para a proposição H_0 é a seguinte:

		A	B	C	D	H_0
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$A \wedge B$	$A \leftrightarrow B$	$C \rightarrow D$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V	V

- ✗ Observe que o importante para garantir a tautologia é a estrutura da proposição.

CONTRADIÇÃO

DEFINIÇÃO

- X Uma **contradição** é toda proposição composta $P(p, q, r, \dots)$ cujo valor lógico é sempre F (falsidade), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples componentes p, q, r, \dots .
- X Chama-se contradição toda proposição composta cuja última coluna (Método1) da sua tabela-verdade possui somente valor lógico F (falsidade).
- X As contradições são também denominadas **proposições contraválidas** ou **proposições logicamente falsas**.
- X Como uma tautologia é sempre verdadeira (V), a negação de uma tautologia é sempre falsa (F), ou seja, é uma contradição e vice-versa.
- X Portanto, $P(p, q, r, \dots)$ é uma tautologia se e somente se $\neg P(p, q, r, \dots)$ é uma contradição, e $P(p, q, r, \dots)$ é uma contradição se e somente se $\neg P(p, q, r, \dots)$ é uma tautologia.

CONTRADIÇÃO

PRINCÍPIO DE SUBSTITUIÇÃO

- X Para as contradições também vale o princípio de substituição semelhante ao que foi descrito para as tautologias.
- X Se $H(p, q, r, \dots)$ é uma contradição, então $H(P_0, Q_0, R_0, \dots)$ também é uma contradição, quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0, \dots

CONTRADIÇÃO

EXEMPLO 1

- ✗ Considere a proposição:

$$H = p \wedge \neg p \quad (1)$$

Ordem das
operações

2 1

- ✗ Identifique as proposições simples e a ordem das operações lógicas.
- ✗ Identifique as subfórmulas associadas as operações lógicas.

$$A = \neg p$$

$$H = p \wedge A$$

- ✗ Construa a tabela-verdade correspondente.

	A	H
p	$\neg p$	$p \wedge A$
V	F	F
F	V	F

- ✗ A proposição é uma contradição conforme a sua tabela-verdade.
- ✗ Por tanto, afirmar que uma proposição p pode ser simultaneamente verdadeira e falsa é sempre falso.

CONTRADIÇÃO

EXEMPLO 2

- ✗ Considere a proposição:

$$H = p \leftrightarrow \neg p \quad (2)$$

Ordem das
operações

2 1

- ✗ Identifique as proposições simples e a ordem das operações lógicas.
- ✗ Identifique as subfórmulas associadas as operações lógicas.

$$A = \neg p$$

$$H = p \leftrightarrow A$$

- ✗ Construa a tabela-verdade correspondente.

	A	H
p	$\neg p$	$p \leftrightarrow A$
V	F	F
F	V	F

- ✗ A proposição é uma contradição conforme a sua tabela-verdade.

CONTRADIÇÃO

EXEMPLO 3

- ✗ Considere a proposição:

$$H = (p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q) \quad (3)$$

Ordem das operações



- ✗ Identifique as proposições simples e a ordem das operações lógicas.
- ✗ Identifique as subfórmulas associadas as operações lógicas.

$$A = (p \wedge q)$$

$$B = (p \vee q)$$

$$C = \neg B$$

$$H = A \wedge C$$

- ✗ Construa a tabela-verdade correspondente.

		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>H</i>
<i>p</i>	<i>q</i>	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$\neg B$	$A \wedge C$
<i>V</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>F</i>
<i>V</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>F</i>
<i>F</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>F</i>
<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>V</i>	<i>F</i>

- ✗ A proposição é uma contradição conforme a sua tabela-verdade.

CONTRADIÇÃO

EXEMPLO 4

- ✗ Considere a proposição:

$$H = \neg p \wedge (p \wedge \neg q) \quad (4)$$

Ordem das operações



- ✗ Identifique as proposições simples e a ordem das operações lógicas.
- ✗ Identifique as subfórmulas associadas as operações lógicas.

$$A = \neg p$$

$$B = \neg q$$

$$C = (p \wedge B)$$

$$H = A \wedge C$$

- ✗ Construa a tabela-verdade correspondente.

		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>H</i>
<i>p</i>	<i>q</i>	$\neg p$	$\neg q$	$(p \wedge B)$	$A \wedge C$
<i>V</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>
<i>V</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>F</i>
<i>F</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>
<i>F</i>	<i>F</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>F</i>

- ✗ A proposição é uma contradição conforme a sua tabela-verdade.

CONTINGÊNCIA

DEFINIÇÃO

- X Uma **contingência** é toda proposição composta $P(p, q, r, \dots)$ que não é tautologia nem contradição.
- X Chama-se contingência a toda proposição composta cuja última coluna da sua tabela-verdade (Método1) possui tanto valores lógicos V (verdadeiros) quanto F (falsos), cada um pelo menos uma vez.
- X As contingências são também denominadas **proposições contingentes** ou **proposições indeterminadas**.

CONTINGÊNCIA

EXEMPLO 1

- ✗ Considere a proposição:

$$H = p \rightarrow \neg p \quad (1)$$

Ordem das
operações

2 1

- ✗ Identifique as proposições simples e a ordem das operações lógicas.
- ✗ Identifique as subfórmulas associadas as operações lógicas.

$$A = \neg p$$

$$H = p \rightarrow A$$

- ✗ Construa a tabela-verdade correspondente.

	A	H
p	$\neg p$	$p \rightarrow A$
V	F	F
F	V	V

- ✗ A proposição é uma contingência conforme mostra a sua tabela-verdade.

CONTINGÊNCIA

EXEMPLO 2

- ✗ Considere a proposição:

$$H = p \vee q \rightarrow p \quad (2)$$

Ordem das
operações

① ②

- ✗ Identifique as proposições simples e a ordem das operações lógicas.
- ✗ Identifique as subfórmulas associadas as operações lógicas.

$$A = p \vee q$$

$$H = A \rightarrow p$$

- ✗ Construa a tabela-verdade correspondente.

		A	H
p	q	$p \vee q$	$A \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	V

- ✗ A proposição é uma contingência conforme mostra a sua tabela-verdade.

CONTINGÊNCIA

EXEMPLO 3

- ✗ Considere a proposição:

$$x = 3 \wedge (x \neq y \rightarrow x \neq 3) \quad (3)$$

- ✗ Identifique as proposições simples. Como a expressão se encontra em linguagem matemática, vale a pena identificar as proposições simples e substituir por letras proposicionais.

$$p: x = 3 \quad \neg p: x \neq 3$$

$$q: x = y \quad \neg q: x \neq y$$

- ✗ Temos assim:

$$H = p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p) \quad (3)$$

Ordem das operações



- ✗ Identifique a ordem das operações lógicas.

- ✗ Identifique as subfórmulas associadas as operações lógicas.

$$A = \neg q$$

$$C = (A \rightarrow B)$$

$$B = \neg p$$

$$H = p \wedge C$$

- ✗ Construa a tabela-verdade correspondente.

		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>H</i>
<i>p</i>	<i>q</i>	$\neg q$	$\neg p$	$(A \rightarrow B)$	$p \wedge C$
<i>V</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>V</i>	<i>V</i>
<i>V</i>	<i>F</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>
<i>F</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>F</i>
<i>F</i>	<i>F</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>F</i>

- ✗ A proposição é uma contingência conforme mostra a sua tabela-verdade.

CONCLUSÃO

- x Vimos que as proposições podem ser classificadas em três categorias:
 - Tautologias;
 - Contradições;
 - Contingências.
- x Vimos também o princípio da substituição que afirma que o valor lógico de uma tautologia ou de uma contradição não muda quando as proposições simples são substituídas por proposições compostas que dependem do mesmo conjunto de proposições simples.

REFERÊNCIAS

- x De Alencar Filho, Edgar. Iniciação à Lógica Matemática. Capítulo 4. Editora Nobel. São Paulo. 1975. Reimpresso em 2015.