Aceleração (como varia a velocidade)

Aceleração média:

$$Se \;\; em \; t_1 \rightarrow v_1 \;\; e \; em \; t_2 \rightarrow v_2$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Unidade:

$$[\bar{a}] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{m}{s^2}$$

Aceleração instantânea:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow o} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Interpretação gráfica análoga, mas com relação ao gráfico $v \;\; vs \;\; t$.

Aceleração (significado dos sinais)

$\Delta t = 2s$

1) $v_1 = 2\,m/s$

$v_2 = 4\,m/s$

$$\bar{a} = \frac{4-2}{2} = 1\,m/s^2$$

2) $v_1 = 4\,m/s$

$v_2 = 2\,m/s$

$$\bar{a} = \frac{2-4}{2} = -1\,m/s^2$$

3) $v_1 = -2\,m/s$

$v_2 = -4\,m/s$

$$\bar{a} = \frac{-4-(-2)}{2} = -1\,m/s^2$$

4) $v_1 = -4\,m/s$

$v_2 = -2\,m/s$

$$\bar{a} = \frac{-2-(-4)}{2} = 1\,m/s^2$$

Em suma:

Se conhecemos $x(t)$, conhecemos a dinâmica da partícula, pois:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

e

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Exemplo 2-3 (8ª ed.):

A posição de uma partícula que se move em um eixo x é dada por

$$x(t) = 7{,}8 + 9{,}2t - 2{,}1t^3$$

com x em metros e t em segundos. Qual a velocidade da partícula em $t = 3{,}5$ s? A velocidade é constante ou está variando continuamente?

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 9{,}2 - 6{,}3t^2$$

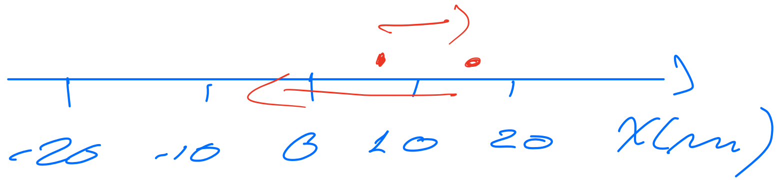
$$v(3{,}5) = 9{,}2 - 6{,}3.(3{,}5)^2 = \boxed{-68 \text{ m/s}}$$

Explorando um pouco mais...

Análise do movimento

$$x(t) = 7{,}8 + 9{,}2t - 2{,}1t^3$$

$$v(t) = 9{,}2 - 6{,}3t^2$$



- $t = 0 \Rightarrow x_0 = 7{,}8\,m$; $\Rightarrow v_0 = 9{,}2\,m/s$
- PONTO DE RETORNO: $v = 0$

$$9{,}2 - 6{,}3t^2 = 0$$

$$t = \sqrt{\frac{9{,}2}{6{,}3}} = 1{,}2\,s$$

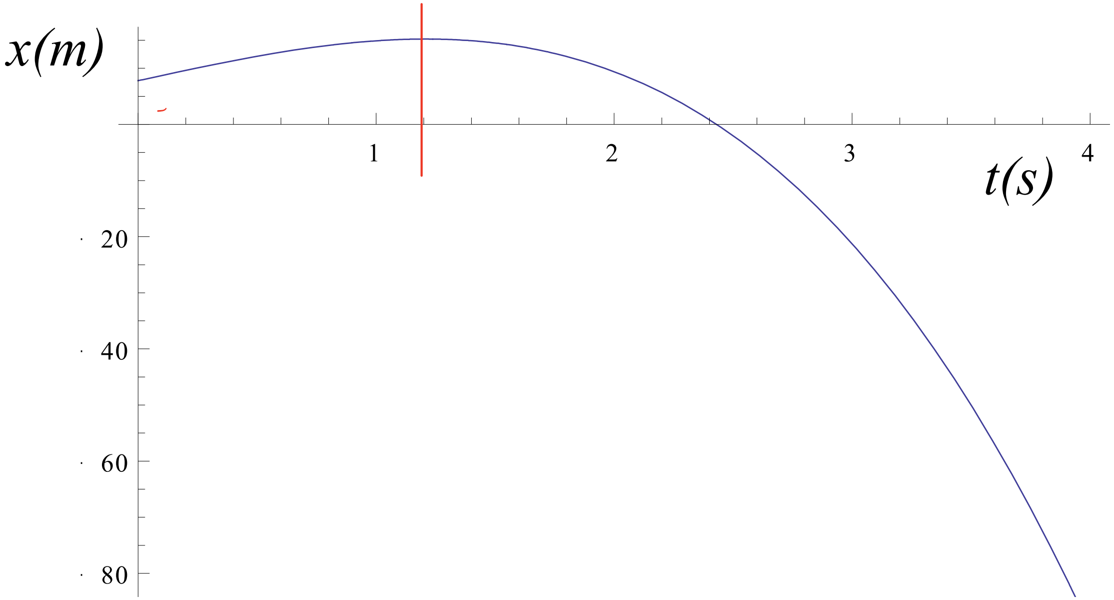
$$x(1{,}2) = 7{,}8 + 9{,}2(1{,}2) - 2{,}1.(1{,}2)^3$$

$$= 15{,}8\,m$$

- $a = \frac{dv}{dt} = -12{,}6\,t$

Posição em função do tempo

$$\boxed{x(t) = 7{,}8 + 9{,}2t - 2{,}1t^3}$$



Determinar o deslocamento e a velocidade média nos intervalos (0 – 1,5 s) e (1,5 – 3,0 s)

$$x(t) = 7{,}8 + 9{,}2t - 2{,}1t^3$$

- $\Delta x_{0-1,5} = \cancel{7{,}8} + 9{,}2(1{,}5) - 2{,}1(1{,}5)^3 - \cancel{7{,}8} = 6{,}7\,m$

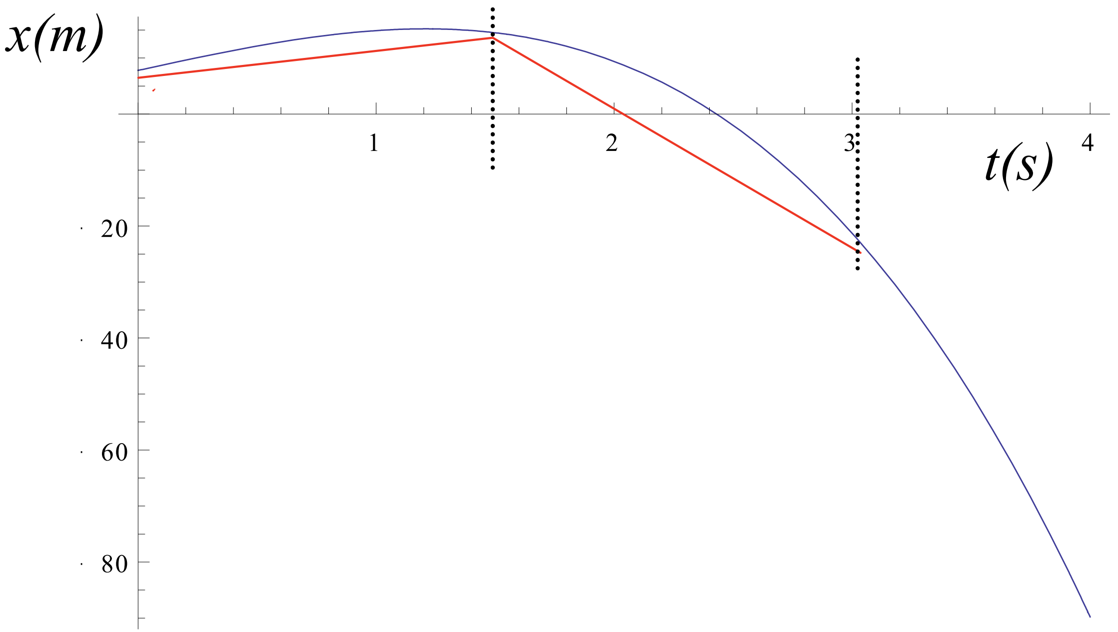
$$\bar{v}_{0-1,5} = \frac{\Delta x_{0-1,5}}{1{,}5} = 4{,}5\,m/s$$

- $\Delta x_{1,5-3,0} = 7{,}8 + 9{,}2.(3{,}0) - 2{,}1(3{,}0)^3 + - 7{,}8 - 9{,}2(1{,}5) + 2{,}1(1{,}5)^3 = -35{,}8\,m$

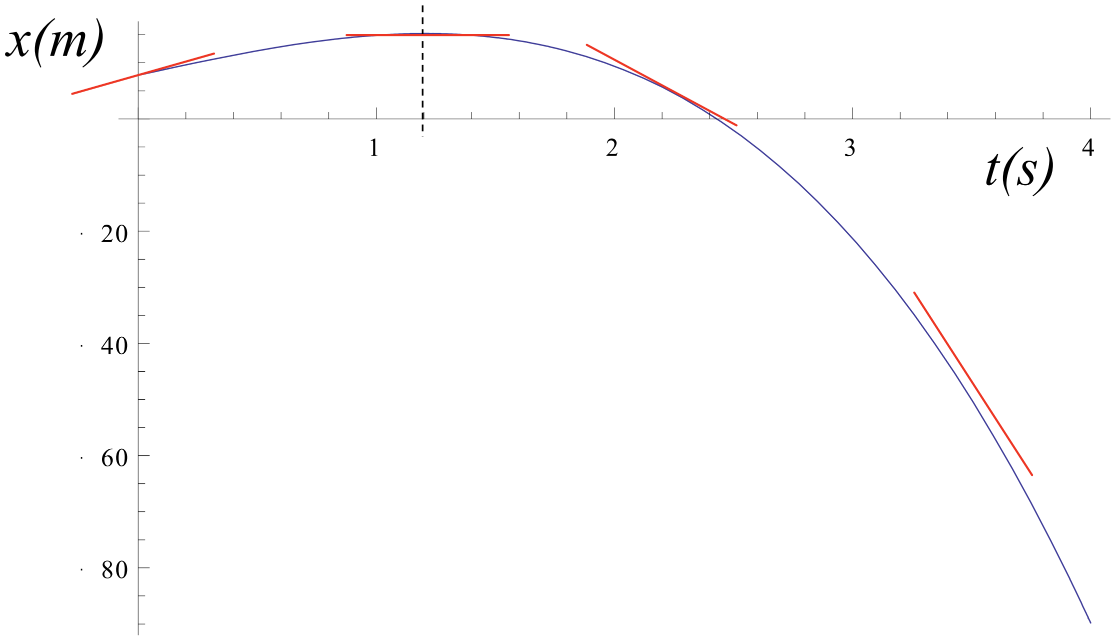
$$\bar{v}_{1,5-3,0} = \frac{\Delta x_{1,5-3,0}}{1{,}5} = -23{,}8\,m/s$$

Determinar o deslocamento e a velocidade média nos intervalos (0 – 1,5 s) e (1,5 – 3,0 s)

No gráfico



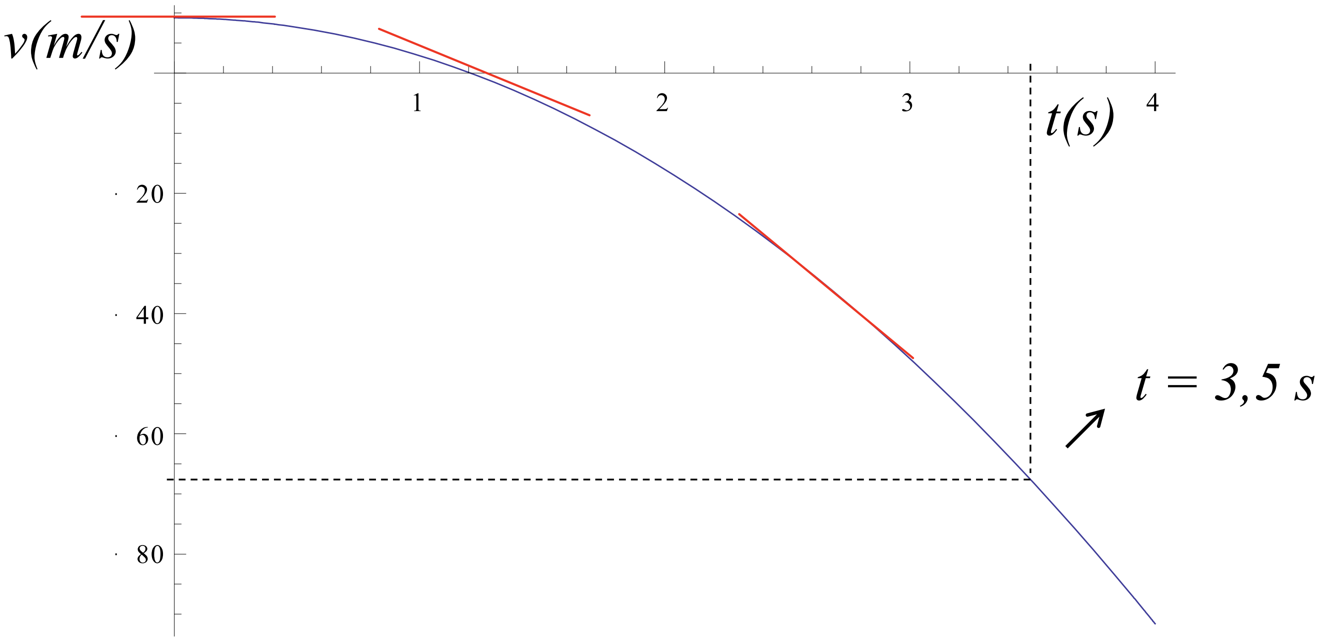
Posição em função do tempo



É possível esboçar $v(t)$...

Velocidade em função do tempo

$$\boxed{v(t) = 9{,}2 - 6{,}3t^2}$$

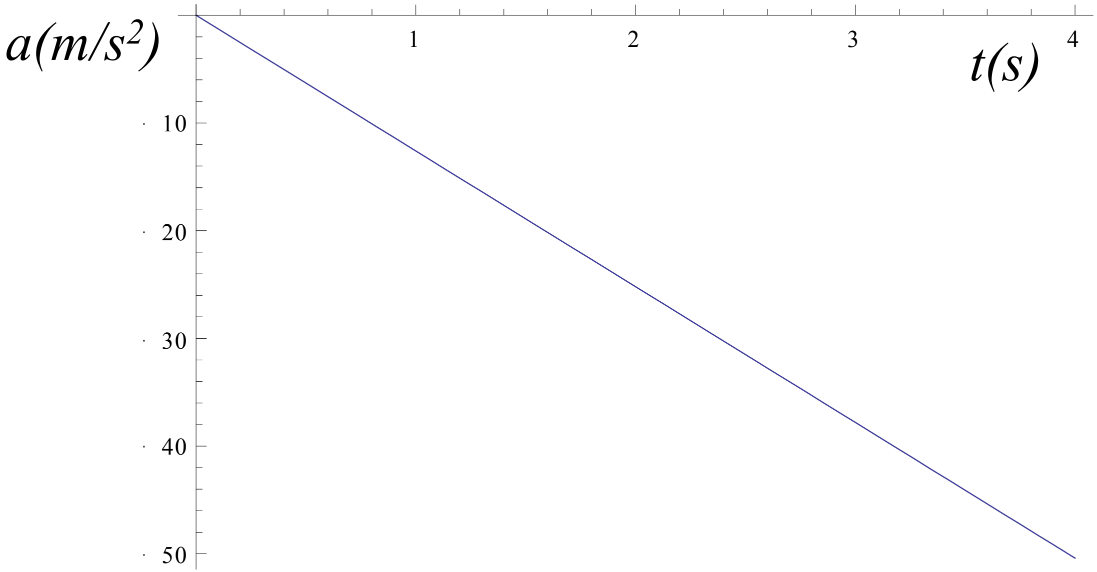


É possível esboçar $a(t)$...

Aceleração em função do tempo

$$\boxed{v(t) = -12{,}6t}$$

a(t)



De fato, a aceleração apresenta relação linear com t.

Aceleração constante: um caso especial

2ª Lei de Newton: $\sum F = ma$

Logo, se o somatório de forças for constante,
a aceleração também será.

Equações da cinemática:

a = CONSTANTE

$a = \frac{dv}{dt}$; $dv = a\,dt \Rightarrow \int dv = \int a\,dt = a\int dt$

$v = at + C$; $t = 0 \Rightarrow v_0 = C$

$v = v_0 + at$ I

- $v = \frac{dx}{dt}$; $dx = v\,dt$; $\int dx = \int v\,dt = \int (v_0 + at)\,dt$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + C' \; ; \; t = 0 \Rightarrow x_0 = C'$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{II}$$

- t DESCONHECIDO

DE I $\quad t = \frac{v - v_0}{a}$ $\quad \to$ II

$$x = x_0 + v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2$$

$$x = x_0 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

$$x = x_0 + \frac{v v_0 - v_0^2}{a} + \frac{\cancel{a}\,(v^2 - 2 v v_0 + v_0^2)}{2\,a^{\cancel{2}}}$$

$$2a(x - x_0) = \cancel{2 v v_0} - 2 v_0^2 + v^2 - \cancel{2 v v_0} + v_0^2$$

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$$

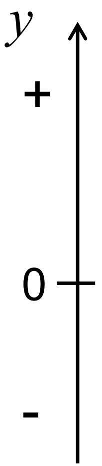
$$\underline{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

<u>TORRICELLI</u>

Queda livre

Um corpo sob a ação da gravidade, nas proximidades da superfície da Terra, cai com aceleração g = 9,8 m/s^2

Convenção:



aceleração

a = - g

$$\begin{cases} y = y_0 + v_0 t - \dfrac{1}{2} g t^2 \\ v = v_0 - g t \\ v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) \end{cases}$$

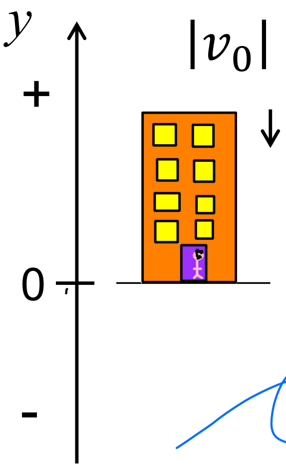
Exercício 46 (8ª ed.):

Um desordeiro joga uma pedra verticalmente para baixo com uma velocidade de 12,0 m/s, a partir do telhado de um edifício, 30,0 m acima do solo. (a) Quanto tempo leva a pedra para atingir o solo? (b) Qual a velocidade da pedra no momento do choque?

Exercício 46 (8ª ed.):

Solução 1a

$|v_0| = 12{,}0\ m/s$



a) $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$0 = 30 - 12t - 4{,}9t^2$

$4{,}9t^2 + 12t - 30 = 0$

$$\frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot 4{,}9 \cdot (-30)}}{2 \cdot 4{,}9}$$

$\rightarrow \boxed{1{,}5\ s}$

$\rightarrow \cancel{t < 0}$

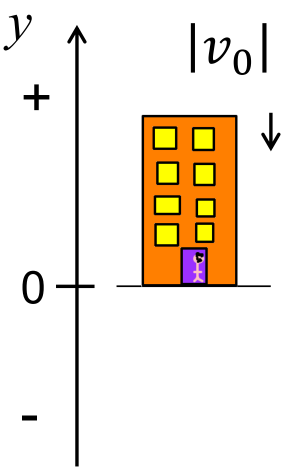
b) $v = v_0 + at$

$v = -12 - 9{,}8 \cdot (1{,}5)$

$= -27{,}1\ m/s$

Exercício 46 (8ª ed.):

Solução 1b



$$|v_0| = 12{,}0\ m/s$$

b) $v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0)$

$v^2 = (12)^2 - 2{,}9{,}8(-30)$

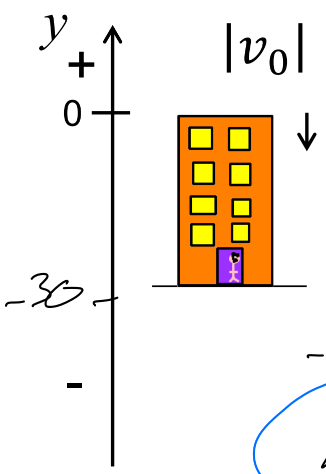
$v = 27{,}1\ m/s$

a) $v = v_0 + at$

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{-27{,}1 - (-12)}{-9{,}8} = 1{,}5\ s$$

Exercício 46 (8ª ed.):

Solução 2



$$|v_0| = 12{,}0\ m/s$$

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$-30 = 0 - 12t - 4{,}9t^2$$

$$4{,}9t^2 + 12t - 30 = 0$$

$$t = 1{,}5\ s$$

b)

$$v = v_0 + at$$

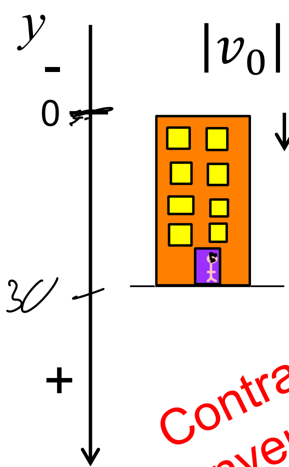
$$v = -12 - 9{,}8 \cdot (1{,}2$$

$$= -27{,}1\ m/s$$

Exercício 46 (8ª ed.):

Solução 3

$|v_0| = 12{,}0\ m/s$



Contra a convenção

a) $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$30 = 0 + 12t + 4{,}9t^2$

$4{,}9t^2 + 12t - 30 = 0$

$\Downarrow$

$t = 1{,}5\ s$

b) $v = v_0 + at$

$v = 12 + 9{,}8 \cdot (1{,}5)$

$= 27{,}1\ m/s$