Operações Lógicas sobre Proposições

Lógica Matemática

Prof. Fermín A. Tang

Operações Lógicas sobre Proposições

- Anteriormente, vimos que é possível formar proposições mais complexas utilizando o que foi chamado de conectivo lógico entre proposições.
- Como utilizamos a linguagem natural o termo conectivo pareceu mais apropriado.
- Ao utilizar uma linguagem simbólica ou formal, adotaremos o termo operador lógico.

- Estudaremos as operações lógicas fundamentais:
  - Negação: $\sim$
  - Conjunção: $\wedge$
  - Disjunção: $\vee$
  - Condicional: $\rightarrow$
  - Bicondicional: $\leftrightarrow$

- Com exceção da negação que é unária (opera sobre uma proposição) todas as outras operações são binárias (operam sobre duas proposições).

Negação (~)

Definição

- Chama-se negação de uma proposição p a proposição representada por "não p", cujo valor lógico é a verdade (V) quando p é falsa e a falsidade (F) quando p é verdadeira.
- Assim, "não p" tem valor lógico oposto daquele de p.
- Simbolicamente, a negação de p indica-se com a notação:

$\sim p$ (se lê: "não p")

ou

$\neg p$ (se lê: "não p")

- O valor lógico da negação de uma proposição é definido pela seguinte tabela-verdade:

p	$\sim p$
V	F
F	V

- Ou seja, pelas seguintes igualdades:

$$\sim V = F,$$
$$\sim F = V$$

- Em geral temos:

$$v(\sim p) = \sim v(p)$$

Negação (~)

Exemplos

- **Exemplo 1**
  - p: $2+3=5$ (V)
  - $\sim p$: $2+3\neq 5$ (F)
  - $v(\sim p) = \sim v(p) = \sim V = F$
- **Exemplo 2**
  - q: $7<3$ (F)
  - $\sim q$: $7 \not< 3$ (V)
  - $v(\sim q) = \sim v(q) = \sim F = V$
- **Exemplo 3**
  - r: Roma é a capital da França (F)
  - $\sim r$: Roma não é a capital da França (V)
  - $v(\sim r) = \sim v(r) = \sim F = V$

✘ Observe que o comportamento da negação é o mesmo independente da proposição considerada.

Negação (~)

Exemplos

- ✘ Na linguagem natural, a negação é realizada antepondo o advérbio "não" ao verbo da proposição dada.

- ✔ **Exemplo:**
- ❑ A negação da proposição:
  - p: O sol é uma estrela
- ❑ É escrita como:
  - $\sim p$: O sol não é uma estrela

- ✘ Outra maneira de efetuar a negação consiste em antepor à proposição dada expressões tais como: "não é verdade que", "é falso que". Por exemplo, a negação da proposição:

- ✔ **Exemplo:**
- ❑ A negação da proposição:
  - q: Carlos é mécânico
- ❑ Pode ser escrita como:
  - $\sim q$: Não é verdade que Carlos é mecânico
- ❑ Mas também como:
  - $\sim q$: É falso que Carlos é mecânico

Negação (~)

Exemplos

- ✘ Preste atenção especial aos seguintes casos, eles são um pouco diferentes.

✔ **Exemplo:**

- ❑ A negação da proposição:
  - ○ p: Todos os homens são elegantes
- ❑ Pode ser escrita como:
  - ○ $\sim p$: Nem todos os homens são elegantes

✔ **Exemplo:**

- ❑ A negação da proposição:
  - ○ q: Nenhum homem é elegante
- ❑ Pode ser escrita como:
  - ○ $\sim q$: Algum homem é elegante

Conjunção ($\wedge$)

Definição

- Chama-se conjunção de duas proposições p e q a proposição representada por "p e q", cujo valor lógico é a verdade (V) quando as proposições p e q são ambas verdades e a falsidade (F) nos demais casos.
- Simbolicamente, a conjunção de 2 proposições p e q indica-se como:

$p \wedge q$ (se lê: "p e q")

- O valor lógico da conjunção de duas proposições é definido pela seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

  - ou seja, pelas seguintes igualdades:

$$V \wedge V = V,\quad V \wedge F = F,\quad F \wedge V = F,\quad F \wedge F = F$$

  - Em geral temos:

$$v(p \wedge q) = v(p) \wedge v(q)$$

CONJUNÇÃO ($\wedge$)

EXEMPLOS

- **Exemplo 1**
  - p: A neve é branca (V)
  - q: $2 < 5$ (V)
  - $p \wedge q$: A neve é branca e 2<5
  - $v(p \wedge q) = v(p) \wedge v(q) = V \wedge V = V$ (V)

- **Exemplo 2**
  - p: O enxofre é verde (F)
  - q: 7 é um número primo (V)
  - $p \wedge q$: O enxofre é verde e 7 é um número primo
  - $v(p \wedge q) = v(p) \wedge v(q) = F \wedge V = F$ (F)

Conjunção ($\wedge$)

Exemplos

- **Exemplo 3**
  - p: CANTOR nasceu em Russia (V)
  - q: FERMAT era médico (F)
  - $p \wedge q$: CANTOR nasceu em Russia e FERMAT era médico
  - $v(p \wedge q) = v(p) \wedge v(q) = V \wedge F = F$ (F)

- **Exemplo 4**
  - p: $\pi > 4$ (F)
  - q: $sen\, \pi/2 = 0$ (F)
  - $p \wedge q$: $\pi > 4$ e $sen\, \pi/2 = 0$
  - $v(p \wedge q) = v(p) \wedge v(q) = F \wedge F = F$ (F)

Disjunção ($\vee$)

Definição

- Chama-se disjunção de duas proposições p e q a proposição representada por "p ou q", cujo valor lógico é a verdade (V) quando ao menos uma das proposições p e q é verdadeira; e a falsidade (F) quando ambas as proposições p e q são falsas.
- Simbolicamente, a disjunção de 2 proposições p e q indica-se como:

$p \vee q$ (se lê: "p ou q")

- O valor lógico da disjunção de duas proposições é definido pela seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- ou seja, pelas seguintes igualdades:

$$V \vee V = V,\quad V \vee F = V,\quad F \vee V = V,\quad F \vee F = F$$

- Em geral temos:

$$v(p \vee q) = v(p) \vee v(q)$$

Disjunção ($\vee$)

Definição

- **Exemplo 1**
  - p: Paris é a capital da França (V)
  - q: 9 – 4 = 5 (V)
  - $p \vee q$: Paris é a capital da França **ou** 9 – 4 = 5 (V)
  - $v(p \vee q) = v(p) \vee v(q) = V \vee V = V$

- **Exemplo 2**
  - p: CAMÕES escreveu os Lusíadas (V)
  - q: $\pi = 3$ (F)
  - $p \vee q$: CAMÕES escreveu os Lusíadas **ou** $\pi = 3$
  - $v(p \vee q) = v(p) \vee v(q) = V \vee F = V$ (V)

Disjunção ($\vee$)

Definição

✔ **Exemplo 3**

- p: Roma e a capital da Russia (F)
- q: 5/7 é uma fração própria (V)
- $p \vee q$: Roma e a capital da Russia **ou** 5/7 é uma fração própria (V)
- $v(p \vee q) = v(p) \vee v(q) = F \vee V = V$

✓ **Exemplo 4**

- p: CARLOS GOMES nasceu na Bahia (F)
- q: $\sqrt{-1} = 1$ (F)
- $p \vee q$: CARLOS GOMES nasceu na Bahia **ou** $\sqrt{-1} = 1$
- $v(p \vee q) = v(p) \vee v(q) = F \vee F = F$ (F)

Disjunção Exclusiva ($\underline{\vee}$)

Definição

- Na linguagem natural a palavra "ou" pode ter dois significados ou interpretações.
- Considere as duas proposições compostas:

✓ **Exemplos**

- P : Carlos é médico ou professor
- Q : Mario é alagoano ou gaúcho

- Na proposição P, indica-se que pelo menos uma das proposições "Carlos é médico" e "Carlos é professor" é verdadeira, podendo ser ambas verdadeiras. Já na proposição Q, se estabelece que uma e somente uma das proposições "Mario é alagoano" e "Mario é gaúcho" é verdadeira, pois não é possível ocorrer ambas.

- Na proposição P diz-se que o "ou" é inclusivo, enquanto que, na proposição Q diz-se que o "ou" é exclusivo.

- Em lógica Matemática usa-se o símbolo "$\vee$" para o "ou" inclusivo e o símbolo "$\underline{\vee}$" para o "ou" exclusivo.

Disjunção Exclusiva ($\underline{\vee}$)
Definição

- Com isso temos, que a proposição P é uma disjunção inclusiva ou apenas uma disjunção das proposições simples "Carlos é médico" e "Carlos é professor" . Assim temos:

  P : Carlos é médico $\vee$ professor

- Enquanto a proposição Q é uma disjunção exclusiva das proposições simples "Mario é alagoano" e "Mario é gaúcho". Assim temos:

  Q : Mario é alagoano $\underline{\vee}$ gaúcho

Disjunção Exclusiva ($\underline{\vee}$)

Definição

- Chama-se disjunção exclusiva de duas proposições p e q, a proposição representada simbolicamente por:

$p \,\underline{\vee}\, q$ (se lê: "ou p ou q" ou "p ou q, mas não ambos")

- cujo valor lógico é a verdade (V) somente quando p é verdadeira ou q é verdadeira, mas não ambas; e a falsidade (F) quando ambas as proposições p e q são verdadeiras ou ambas falsas.

- O valor lógico da disjunção exclusiva de duas proposições é definido pela seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \,\underline{\vee}\, q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

  - ou seja, pelas seguintes igualdades:

$$V \,\underline{\vee}\, V = F, \quad V \,\underline{\vee}\, F = V, \quad F \,\underline{\vee}\, V = V, \quad F \,\underline{\vee}\, F = F$$

  - Em geral temos:

$$v(p \,\underline{\vee}\, q) = v(p) \,\underline{\vee}\, v(q)$$

Disjunção Exclusiva ($\underline{\vee}$)

Definição

- ✘ Vale observar que no latim tem duas palavras diferentes correspondentes aos dois sentidos da palavra "ou" no português.
- ✘ A palavra "vel" exprime a disjunção no sentido débil ou inclusivo, enquanto a palavra "aut" exprime a disjunção no sentido forte ou exclusiva.

Proposição Condicional ($\rightarrow$)

Definição

- Chama-se condicional de duas proposições p e q , a proposição representada por "se p então q", cujo valor lógico é a falsidade (F) no caso em que p é verdadeira e q é falsa; e a verdade (V) nos demais casos.
- Simbolicamente, a condicional de duas proposições p e q indica-se como:

$p \rightarrow q$ (se lê: "se p então q")

- A condicional estabelece a seguinte relação entre as proposições p e q:

  i. p é condição suficiente para q
  ii. q é condição necessária para p

- Na condicional "$p \rightarrow q$", diz-se que p é o antecedente e q é o consequente.

Proposição Condicional ($\rightarrow$)

Definição

- O valor lógico da condicional de duas proposições é definido pela seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

  - ou seja, pelas seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} V \rightarrow V &= V, \\ V \rightarrow F &= F, \\ F \rightarrow V &= V, \\ F \rightarrow F &= V \end{aligned}$$

  - Em geral temos:

$$v(p \rightarrow q) = v(p) \rightarrow v(q)$$

- Observe também que uma condicional é verdadeira sempre que o seu antecedente é falso.

Proposição Condicional ($\rightarrow$)

Exemplos

- ✓ **Exemplo 1**
  - p: GALOIS morreu em duelo (V)
  - q: π é um número real (V)
  - $p \rightarrow q$: Se GALOIS morreu em duelo, então π é um número real
  - $v(p \rightarrow q) = v(p) \rightarrow v(q) = V \rightarrow V = V$ (V)

- ✓ **Exemplo 2**
  - p: O mês de maio tem 31 dias (V)
  - q: A terra é plana (F)
  - $p \rightarrow q$: Se o mês de maio tem 31 dias, então a terra é plana
  - $v(p \rightarrow q) = v(p) \rightarrow v(q) = V \rightarrow F = F$ (F)

Proposição Condicional ($\rightarrow$)

Exemplos

- **Exemplo 3**
  - p: DANTE escreveu os Lusíadas (F)
  - q: CANTOR criou a Teoria dos conjuntos (V)
  - $p \rightarrow q$: Se DANTE escreveu os Lusíadas, então CANTOR criou a Teoria dos conjuntos
  - $v(p \rightarrow q) = v(p) \rightarrow v(q) = F \rightarrow V = V$ (V)
- **Exemplo 4**
  - p: SANTOS DUMONT nasceu no Ceará (F)
  - q: O ano tem 9 meses (F)
  - $p \rightarrow q$: Se SANTOS DUMONT nasceu no Ceará, então o ano tem 9 meses
  - $v(p \rightarrow q) = v(p) \rightarrow v(q) = F \rightarrow F = V$ (V)

Proposição Condicional ($\rightarrow$)

Definição

- ✘ Vale observar que uma condicional "$p \rightarrow q$" não afirma que o consequente q se deduz ou é consequência do antecedente p.
- ✘ Considere as condicionais nos exemplos:

✔ **Exemplos**

- p: 7 é um número ímpar $\rightarrow$ Brasília é uma cidade
- q: 3+5 = 9 $\rightarrow$ SANTOS DUMONT nasceu no Ceará

- ✘ Não se afirma, de modo algum:
  - Que o fato de "Brasília ser uma cidade" se deduz do fato de "7 ser um número ímpar"
  - Que a proposição "SANTOS DUMONT nasceu no Ceará" é consequência da proposição "3+5 = 9"

- ✘ O que uma condicional afirma é unicamente uma relação entre os valores lógicos do antecedente e do consequente conforme a tabela da condicional.

Proposição Bicondicional ($\leftrightarrow$)

Definição

- Chama-se bicondicional de duas proposições p e q, a uma proposição representada por "p se e somente se q", cujo valor lógico é a verdade (V) quando p e q tem ambos o mesmo valor lógico; e a falsidade (F) caso contrário.
- Simbolicamente, a bicondicional de duas proposições p e q indica-se com a notação:

$p \leftrightarrow q$ (se lê: "p se e somente se q")

- A condicional estabelece a seguinte relação entre as proposições p e q:

  i. p é condição necessária e suficiente para q
  ii. q é condição necessária e suficiente para p

Proposição Bicondicional ($\leftrightarrow$)

Definição

- O valor lógico da bicondicional de duas proposições é definido pela seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

  - ou seja, pelas seguintes igualdades:

$$V \leftrightarrow V = V,$$
$$V \leftrightarrow F = F,$$
$$F \leftrightarrow V = F,$$
$$F \leftrightarrow F = V$$

  - Em geral temos:

$$v(p \leftrightarrow q) = v(p) \leftrightarrow v(q)$$

- Portanto, uma bicondicional é verdadeira somente quando as duas condicionais $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são verdadeiras.

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$$

Proposição Bicondicional ($\leftrightarrow$)

Exemplos

- **Exemplo 1**
  - p: Roma fica em Europa (V)
  - q: A neve é branca (V)
  - $p \leftrightarrow q$: Roma fica em Europa se e somente se a neve é branca
  - $v(p \leftrightarrow q) = v(p) \leftrightarrow v(q) = V \leftrightarrow V = V$ (V)

- **Exemplo 2**
  - p: Lisboa é a capital de Portugal (V)
  - q: $\tan \pi/4 = 3$ (F)
  - $p \leftrightarrow q$: Lisboa é a capital de Portugal se e somente se $\tan \pi/4 = 3$
  - $v(p \leftrightarrow q) = v(p) \leftrightarrow v(q) = V \leftrightarrow F = F$ (F)

Proposição Bicondicional ($\leftrightarrow$)

Exemplos

- **Exemplo 3**
  - p: VASCO DA GAMA descobriu o Brasil (F)
  - q: TIRADENTES foi enforcado (V)
  - $p \leftrightarrow q$: VASCO DA GAMA descobriu o Brasil se e somente se TIRADENTES foi enforcado
  - $v(p \leftrightarrow q) = v(p) \leftrightarrow v(q) = F \leftrightarrow V = F$ (F)
- **Exemplo 4**
  - p: A terra é plana (F)
  - q: $\sqrt{2}$ é um número racional (F)
  - $p \leftrightarrow q$: A terra é plana se e somente se $\sqrt{2}$ é um número racional
  - $v(p \leftrightarrow q) = v(p) \leftrightarrow v(q) = F \leftrightarrow F = V$ (V)

Operações Lógicas
Resumo

- Foram abordados as cinco operações lógicas fundamentais mais o ou exclusivo.

p	$\sim p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Referências

- De Alencar Filho, Edgar. Iniciação à Lógica Matemática. Capítulo 2. Editora Nobel. São Paulo. 1975. Reimpresso em 2015.