第一节 矩阵及其运算

一．数学概念

定义1.1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m\,;\,j=1,2,\cdots,n)$ 排成m行n列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为m行n列的矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

二．原理，公式和法则

1．矩阵的加法

(1) 公式

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) 运算律

$$A+B=B+A;$$

$$A+B+C=A+(B+C);$$

$$A+(-A)=0;$$

$$A+0=A;$$

2．数乘矩阵

(1) 公式

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) 运算律

$$\lambda A=A\lambda;$$

$$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A);$$

$$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A;$$

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B;$$

3．矩阵与矩阵相乘

(1) 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{s\times n}$，

则 $A\times B=C$ 其中 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，且

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$
。

(2) 运算符(假设运算都是可行的)：

1) $ABC=A(BC)$

2) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$ （其中λ是数）

3) $A(B+C)=AB+AC$

$(B+C)A=BA+CA$

4) 对于单位矩阵E，容易验证

$E_mA_{m\times n}=A_{m\times n},\quad A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$

或简写成 $EA=AE=A$

(3) 方阵的运算

1) $\underbrace{AA\cdots A}_{k}=A^k$

2) $A^k\cdot A^l=A^{k+l}$

3) $(A^k)^l=A^{kl}$

注意：①矩阵乘法一般不满足交换律。

②一般 $(AB)^k\neq A^kB^k$

4.矩阵的转置

(1) 公式

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

转置

这里 A^{T} 为A的转置矩阵。

(2) 运算律

1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A;$

2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}};$

3) $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}};$

4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}};$

5.方阵的行列式

(1) 公式

设A为n阶方阵，$|A|=\det A$ 为A的行列式。

(2) 运算律

1) $|A^{\mathrm{T}}|=|A|$

2) $|\lambda A|=\lambda^n|A|$

3) $|AB|=|A||B|$ （当A,B均为方阵时）

6.共轭矩阵

(1)公式 设 $A=(a_{ij})$ 为复矩阵，$\overline{a}_{ij}$ 表示为 a_{ij} 的共轭复数，则 $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})$ 为方阵的共轭矩阵。

(2)运算律(设A,B为复矩阵，λ 为复数，且运算都是可行的)：

(1) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$

(2) $\overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\ \overline{A}$

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\ \overline{B}$

三. 重点，难点分析

本节的重点就是矩阵的各运算及其运算律。它是矩阵运算的基础，其难点是矩阵的乘法，着重掌握矩阵的运算规律。

四. 典型例题

例1. 已知

$$B=\begin{pmatrix}0&1&2\\-3&4&0\\-1&3&-2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}4&-1&2\\-1&-4&0\\1&5&-2\end{pmatrix}$$

求x,y，使$\begin{cases}X+Y=B & (1)\\3X-Y=C & (2)\end{cases}$

解：将(1),(2)等式两边相加得 $4x=B+C$

所以

$$X=\frac{1}{4}(B+C)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&0&4\\-4&0&0\\0&8&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

由(1)得 $Y=B-X=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&4&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$

例2.设 $A=(1,2,3),B=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$,令$C=A^{T}B$,求$C^{n}$

解：由于

$$C=A^{T}B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})=\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\2&1&2/3\\3&3/2&1\end{pmatrix}$$

而

$$BA^{T}=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3$$

所以 $C^{n}=A^{T}BA^{T}BA^{T}B\cdots A^{T}B=3^{n-1}C$

返回目录 下一节