Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

DE REGRESO A UN MUNDO FELIZ A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Fulano de Tal

Asesorado por Mengano Pérez

Guatemala, septiembre de 2015

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DE REGRESO A UN MUNDO FELIZ A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
POR

FULANO DE TAL

ASESORADO POR MENGANO PÉREZ

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA APLICADA

GUATEMALA, SEPTIEMBRE DE 2015

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR	M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
SECRETARIO ACADÉMICO	M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

EXAMINADOR	Perengano
EXAMINADOR	Zutano
EXAMINADOR	Fulano 2

Este archivo pdf es una muestra

Fecha

datos

cuerpo

despedida

firma

nombre

AGRADECIMIENTOS

DEDICATORIA

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$:=$	es definido por
$\cong$	es isomorfo a
$\Leftrightarrow$	si y sólo si
$\varnothing$	conjunto vacío
E^c	complemento de E
$\subsetneq$	estrictamente contenido
$E \setminus F$	diferencia entre E y F
$E \Delta F$	diferencia simétrica entre E y F
$\mathcal{P}(X)$	conjunto potencia de X
χ_E	función característica de E
$E_n\uparrow$	E_n es una sucesión creciente
$\mathfrak{L}$	σ-álgebra de los conjuntos Lebesgue-medibles
$\mathscr{S}$	espacio muestral
$\mathfrak{A}$	σ-álgebra de eventos
$(\mathscr{S}, \mathfrak{A}, P)$	espacio de probabilidad
$\mathscr{D}$	espacio de las funciones de prueba
$\mathscr{D}'$	espacio de las distribuciones
δ_0	medida de Dirac, función δ de Dirac o δ-función
$\Phi^\times$	espacio antidual de Φ
$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times$	espacio de Hilbert equipado o tripleta de Gel'fand
$\lvert\psi\rangle$	vector *ket*
$\langle\psi\rvert$	funcional *bra*
$\langle\varphi\lvert\psi\rangle$	*braket*

OBJETIVOS

General

Escriba el objetivo general.

Específicos

Enumere los objetivos específicos.

1.
2.

INTRODUCCIÓN

1. CONCEPTOS PRELIMINARES

1.1. Conjuntos, funciones y sucesiones

En adición a los conjuntos de puntos que se trabajan con normalidad en Matemáticas —puras y aplicadas—, se tendrá que hacer uso frecuentemente de los conjuntos de conjuntos, si por ejemplo X es la recta real, como un intervalo es un conjunto de puntos, es decir un subconjunto de X, se tendrá que el conjunto de todos los intervalos es un conjunto de conjuntos.

En especial, cuando una clase hace referencia a subconjuntos del conjunto X, la llamaremos **familia**. En especial el **conjunto potencia** $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ es una familia de X. Asimismo, se definirá el **complemento** de A por

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}.$$

Definición 1.1. Una **función de selección** para un conjunto X es una función f la cual asocia a cada subconjunto no vacío E de X un elemento de E: $f(E) \in E$.

Axioma 1.1 (de selección)**.** Para cualquier conjunto existe una función de selección.

Nota 1.1. Con frecuencia el axioma 1.1 se presenta en la forma: para cada $E \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, elegimos un elemento $x \in E$. Asimismo, es equivalente al lema de Zorn, para más detalles consultar [8, p. 97], [9, p. 338] o [11, p. 14].

Una **clase disjunta** es una clase $\boldsymbol{A}$ de conjuntos tal que para cualquier par de conjuntos distintos de $\boldsymbol{A}$ son disjuntos, en este caso nos referiremos a la unión de conjuntos de $\boldsymbol{A}$ como **unión disjunta**.

Si E es un subconjunto de X, la función χ_E definida para $x \in X$ por la relación:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in E, \\ 0, & \text{si } x \notin E. \end{cases} \tag{1.1}$$

Es llamada **función característica** del conjunto E. La correspondencia entre los conjuntos y sus funciones características es inyectiva, y todas las propiedades de conjuntos y operaciones entre conjuntos pueden ser expresadas por medio de funciones características.

Tabla 1.1. Propiedades de los espacios L^p. Fuente: tomada de [2, Cap. 3].

Espacio	Reflexivo[1]	Separable	Dual
L^p, $1 < p < \infty$	Si	Si	L^q, $1/p + 1/q = 1$
L^1	No	Si	L^∞
L^∞	No	No	$L^1 \subsetneq (L^\infty)'$

Definición 1.2. Si $\{E_n\}$ es una sucesión de conjuntos, definiremos los conjuntos $\overline{\lim} E_n$ y $\underline{\lim} E_n$ de la siguiente forma:

$$\overline{\lim} E_n = \limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i, \quad \underline{\lim} E_n = \liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} E_i$$

y los llamaremos **límite superior** y **límite inferior**, respectivamente, de la sucesión $\{E_n\}$. Si tenemos $\overline{\lim} E_n = \underline{\lim} E_n$, usaremos la notación $\lim_n E_n$ para este conjunto. Si la sucesión es tal que $E_n \subset E_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$ le llamaremos **creciente** y se denotará por $E_n\uparrow$ y su límite será $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$; si es tal que $E_n \supset E_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$ le llamaremos **decreciente** y se denotará por $E_n\downarrow$ y su límite será $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. En ambos casos nos referiremos a ella como **monótona**.

Definición 1.3. Sea f una aplicación definida del conjunto X al conjunto Y, es decir $f : X \longrightarrow Y$. Para cualquier subconjunto $T \subseteq Y$, definimos la **imagen inversa** de T, bajo f, denotada por $f^{-1}(T)$, como sigue:

$$f^{-1}(T) = \{s \in X \mid f(s) \in T\}.$$

Teorema 1.1.1. *Para la aplicación $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ se tienen las propiedades siguientes:*

1. $f^{-1}(\bigcup_j T_j) = \bigcup_j f^{-1}(T_j)$.
2. $f^{-1}(\bigcap_j T_j) = \bigcap_j f^{-1}(T_j)$.
3. *Si* $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, *entonces* $f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2) = \varnothing$.
4. $f^{-1}(T^c) = [f^{-1}(T)]^c$.
5. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

[1] En el sentido topológico.

6. $f^{-1}(Y) = X$.

Las propiedades (1) y (3) del teorema 1.1.1 establecen las condiciones para la unión disjunta en una familia en Y. Sea ahora $\mathfrak{D}$ una familia cualquiera de subconjuntos de Y, y definamos la familia $f^{-1}(\mathfrak{D})$ de subconjuntos de X como sigue:

$$f^{-1}(\mathfrak{D}) = \{A \subseteq X \mid A = f^{-1}(T) \text{ para algún } T \in \mathfrak{D}\} = \{f^{-1}(T) \mid T \in \mathfrak{D}\}. \quad (1.2)$$

El sistema de números reales extendido o **recta real extendida** es el conjunto definido por $[-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, con la siguiente relación de orden: para $a \in \mathbb{R}$ tenemos $-\infty < a < +\infty$. La topología para este conjunto se define por declarar como abiertos a los siguientes conjuntos: (a, b), $[-\infty, b)$, $(a, +\infty]$ y cualquier unión de conjuntos de este tipo. Cuando se haga referencia a los **números reales extendidos** o **valor real extendido**, se estará hablando de los números reales y de los símbolos $\pm\infty$. Cuando trabajamos con teoría de la integración, nos encontraremos con ∞, una razón es que algunas veces trataremos de integrar sobre conjuntos de medida infinita, este es caso de la recta real.

Por tal motivo, se hacen las siguientes definiciones para facilitar su manejo: $a + \infty = \infty + a := \infty$ si $0 \leq a \leq \infty$, y

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a := \begin{cases} \infty, & \text{si } 0 < a \leq \infty \\ 0, & \text{si } a = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

las leyes de cancelación se tratan así: $a + b = a + c \;\Rightarrow\; b = c$ y $a \cdot b = a \cdot c \;\Rightarrow\; b = c$ sólo cuando $0 < a < \infty$.

Definición 1.4. Sea $\{a_j\}$ una sucesión en la recta real extendida, y sean $b_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, y $\beta = \inf\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$. Entonces llamaremos a β el **límite superior** de $\{a_j\}$, y escribiremos $\beta = \limsup_{j\to\infty}(a_j)$. El **límite inferior** se define análogamente, al intercambiar sup e ínf en las anteriores definiciones; notemos que

$$\liminf_{j\to\infty}(a_j) = -\limsup_{j\to\infty}(-a_j).$$

Si $\{a_j\}$ converge, entonces tenemos $\liminf_{j\to\infty}(a_j) = \limsup_{j\to\infty}(a_j) = \lim_{j\to\infty}(a_j)$.

Proposición 1.1. *Si* $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots$, $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots$, *tales que* $a_j \longrightarrow a$ *y* $b_j \longrightarrow b$. *Entonces* $a_j b_j \longrightarrow ab$.

Definición 1.5. Supongamos que $\{f_j\}$ es una sucesión de funciones de valor real extendido en un conjunto X. Entonces $\sup_j f_j$ y $\limsup_{j\to\infty} f_j$ son las funciones definidas en X por:

$$\left(\sup_j f_j\right)(x) := \sup_j(f_j(x)), \quad \left(\limsup_{j\to\infty} f_j\right)(x) := \limsup_{j\to\infty}(f_j(x)).$$

Si $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$, y asumimos que el límite existe para cualquier $x \in X$, entonces llamaremos a f el **límite puntual** de la sucesión $\{f_j\}$ y hablaremos de **convergencia puntual** en este contexto.

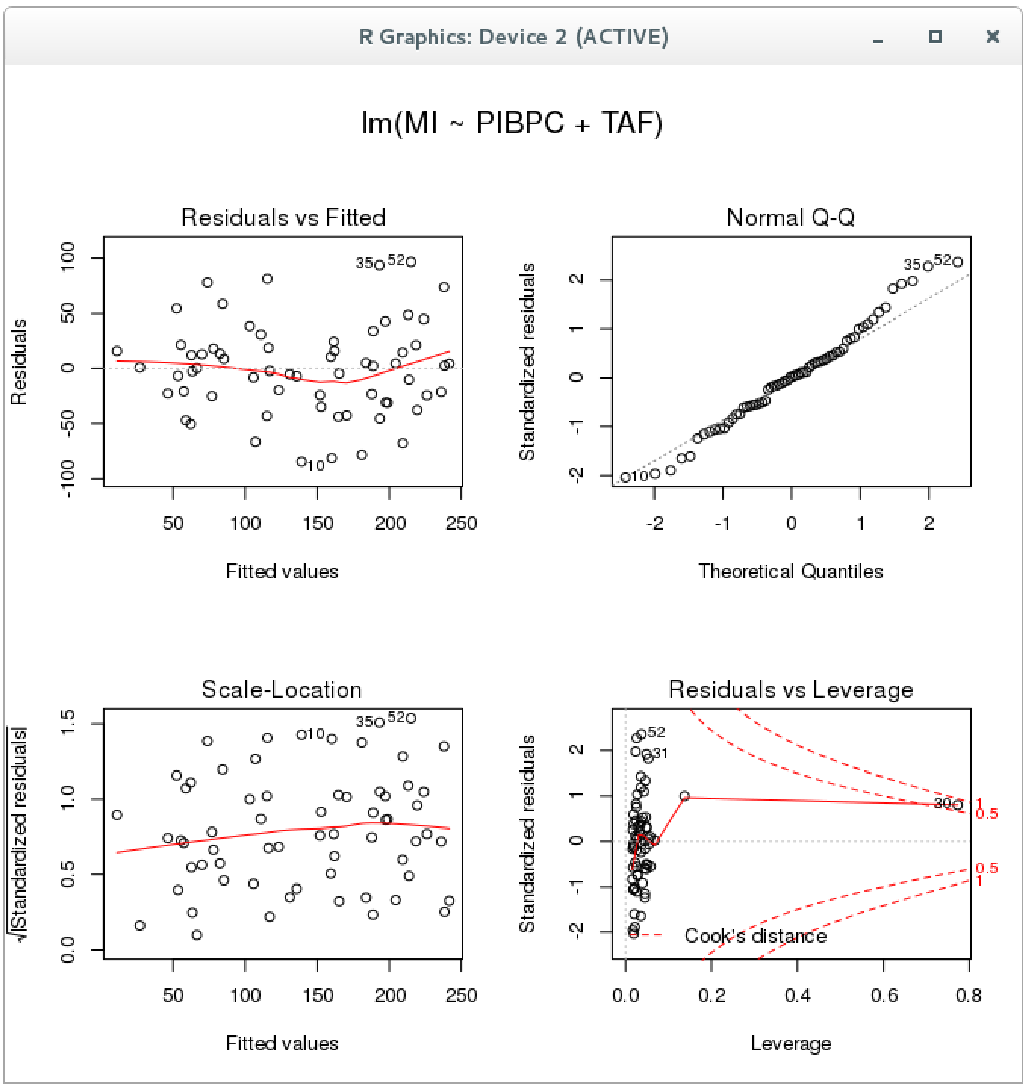

Figura 1.1. Título en el documento. Las imágenes pueden ser raster (de preferencia jpg, png con buena resolución para imprimir) o vectorial (convertir a pdf, en este caso la resolución no afecta) Fuente: imagen tomada de [14].

Lema 1.1. *Sean* $z, w \in \mathbb{C}$, $1 < p \leq 2$ *y* $1/p + 1/q = 1$. *Entonces tenemos*

$$|z + w|^q + |z - w|^q \leq 2(|z|^p + |w|^p)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Demostración. Consultar [11, p. 227]. □

Definición 1.6. Sea $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ una aplicación. Se definen las aplicaciones $f^+ := \text{máx}\{f, 0\}$, $f^- := -\text{mín}\{f, 0\}$, a f^+ y f^- se les llama la **parte positiva y negativa** de f, respectivamente.

Proposición 1.2. *Para cualquier aplicación* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *denotaremos su valor absoluto con* $|f|$, *entonces tenemos*

$$|f| = f^+ + f^-, \quad f = f^+ - f^-.$$

CONCLUSIONES

1. Conclusión 1.
2. Conclusión 2.
3. Conclusión 3.

RECOMENDACIONES

1. Recomendación 1.
2. Recomendación 2.
3. Recomendación 3.

BIBLIOGRAFÍA

[1] P. Albin, E. Leichtnam, R. Mazzeo y P. Piazza. The signature package on Witt spaces. *Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. (4)*, **45**(2):241–310, 2012.

[2] H. Brezis. *Analyse functionnelle, théorie et applications.* (Collection Mathématiques Appliquées pour la Maítrise) Masson, Paris, 1992.

[3] Y. Choquet-Bruhat y otros. *Analysis, manifolds and physics. (volumen 1)* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1996.

[4] R. Courant y D. Hilbert. *Methods of mathematical physics. (volumen 2)* Interscience Publishers, Nueva York, 1962.

[5] R. De la Madrid. The rigged Hilbert space of the free hamiltonian. Consultado en marzo de 2005 en `http://arxiv.org/abs/quant-ph/0210167`.

[6] J. Escamilla-Castillo. *Topología.* 2.ª ed. s.e., Guatemala, 1992.

[7] N. Haaser y J. Sullivan. *Análisis real.* Tr. Ricardo Vinós. Trillas, México, 1978.

[8] P. Halmos. *Teoría intuitiva de los conjuntos.* 8.ª ed. Tr. Antonio Martín. Compañía Editorial Continental, S.A., México, 1973.

[9] F. Hausdorff. *Set theory.* 2.ª ed. Chelsea Publishing Company, Nueva York, 1962.

[10] W. Heisenberg. *The physical principles of the quantum theory.* Dover Publications, Inc., Nueva York, 1949.

[11] E. Hewitt y K. Stromberg. *Real and abstract analysis.* Springer-Verlag, Nueva York, 1965.

[12] A. Kolmogorov y S. Fomin. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.* Tr. Carlos Vega. MIR, Moscú, 1975.

[13] F. Kronz. Quantum theory: von Neumann versus Dirac. Consultado en marzo de 2005 en `http://plato.stanford.edu/entries/qt-nvd/`.

[14] K. Liu, X. Sun, and S.-T. Yau. Goodness of canonical metrics on the moduli space of Riemann surfaces. *Pure Appl. Math. Q.*, **10**(2):223–243, 2014

[15] E. Leader and C. Lorcé, The angular momentum controversy: What's it all about and does it matter?, *Phys. Rept.* **541**, 163 (2014).

[16] Omnès, R. *The interpretation of quantum mechanics.* (Princeton Series in Physics) Princeton University Press, Princeton, 1994.

[17] R. Penrose. *La mente nueva del emperador.* Tr. José García. Fondo de Cultura Económica, México, 1996.

[18] S. Sternberg. Theory of functions of a real variable. Consultado en abril de 2005 en `http://www.math.harvard.edu/~shlomo`.

[19] G. Teschl. Mathematical methods in quantum mechanics with applications to Schrödinger operators. Consultado en abril de 2005 en `http://www.mat.univie.ac.at/~gerald`.