Estensione con più Zaini

4 aprile 2017

Lo scopo di questo documento è fornire un modello esteso con più zaini di quello descritto nel paper "The three-dimensional knapsack problem with balancing constraints".
Disclaimer: Non sono stati considerati i Balancing constraints del paper originale.

1 Variabili

In questa sezione vengono descritte le variabili contenute nel modello esteso.

1.1 Variabili mantenute identiche

- $\rho_{ir} = \begin{cases} 1 & \text{Se l'oggetto } i \text{ è rotato con la rotazione } r \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$

1.2 Variabili semplicemente estese

Vengono elencate le variabili che sono presenti nel modello originario e sono state estese per tenere in considerazione il fatto che vengano usate nello zaino k.

- $t_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{Se l'oggetto } i \text{ è inserito nello zaino } k \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$
- χ^{δ}_{ki} coordinata del punto più in basso a sinistra e più in fondo (bottom-left-back point) dell'oggetto i lungo la dimensione δ nello zaino k.
- $b_{kij} = \begin{cases} 1 & \text{Se l'oggetto } i \text{ viene prima dell'oggetto } j \text{ nel } k\text{-simo zaino nella dimensione } \delta \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$

1.3 Variabili nuove

- $z_k = \begin{cases} 1 & \text{Se lo zaino } k\text{−simo viene utilizzato} \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$

2 Funzione Obiettivo - Con spiegazioni

Vengono descritti i parametri che compaiono nella funzione obiettivo

- f_k è il costo associato all'utilizzo del $k-$simo zaino e viene letto dal file di input.
- L è un fattore per cui viene moltiplicato il primo componente della funzione obiettivo per contare di più rispetto alla minimizzazione dei valori delle coordinate. Siccome deve essere più grande di qualsiasi valore χ_{ki} si può prendere per questo valore
$$L = max(S_k^\delta : k \in K : \delta \in \Delta) + 1$$
se si rendono tutti i valori f_k e p_i maggiori o uguali a 1.
- Di default $\Delta' = \Delta$, ma per rendere il modello più veloce si può cercare di ottimizzare rispetto una sola delle dimensioni, per esempio y ($\Delta' = \{2\}$), o nessuna ($\Delta = \varnothing$). In quest'ultimo caso la seconda componente della funzione obiettivo viene ignorata.

$$L \cdot \left(\left(\sum_{k\in K} \sum_{j \in J} \bar{p_j} \cdot t_{kj} \right) - \left(\sum_{k \in K} \bar{f_k} \cdot z_k \right) \right) - \left(\sum_{k \in K} \sum_{i \in J} \sum_{\delta \in \Delta'} \chi_{ki}^\delta \right) \tag{1}$$

dove:

- $$\bar{p_j} = \frac{p_j}{g}$$
- $$\bar{f_k} = \frac{f_k}{g}$$
- dove
$$g = min(p_j \ : \ j \in J, f_k \ : \ k \in K)$$

In modo tale che tutti i valori $\bar{f_k}$ e $\bar{p_j}$ siano maggiori o uguali ad 1 e quindi se moltiplicati con L pesino più dell'ottimizzazione delle coordinate.

Naturalmente questo metodo assume che i profitti degli oggetti e i costi associati agli zaini siano positivi e *non nulli*. Questa condizione può essere forzata a run-time con un *assert*.

3 Vincoli

$$\sum_{j \in J} w_j d_j h_j t_{kj} \leq W_k D_k H_k \qquad \forall k \in K \tag{2}$$

$$\sum_{\delta \in \Delta} (b_{kij}^\delta + b_{kji}^\delta) \geq t_{ki} + t_{kj} - 1, \quad i < j,\ k \in K,\ i \in J,\ j \in J \tag{3}$$

$$\chi_{ki}^{\delta} + \sum_{r\in R} s_{ir}^{\delta}\rho_{ir} \leq S_k^{\delta} \qquad k \in K,\ i \in J,\ \delta \in \Delta \tag{4}$$

$$\chi_{ki}^{\delta} + \sum_{r\in R} s_{ir}^{\delta}\rho_{ir} \leq \chi_{kj}^{\delta} + M(1 - b_{kij}^{\delta}), \qquad i < j,\ k \in K, i \in J, j \in J, \delta \in \Delta \tag{5}$$

$$\chi_{kj}^{\delta} + \sum_{r\in R} s_{jr}^{\delta}\rho_{jr} \leq \chi_{ki}^{\delta} + M(1 - b_{kji}^{\delta}), \qquad i < j,\ k \in K, i \in J, j \in J, \delta \in \Delta \tag{6}$$

$$\chi_{ki}^{\delta} \leq M t_{ki} \qquad k \in K, i \in J, \delta \in \Delta \tag{7}$$

$$b_{kij}^{\delta} \leq t_{ki} \qquad k \in K, i \in J, j \in J, \delta \in \Delta \tag{8}$$

$$b_{kji}^{\delta} \leq t_{kj} \qquad k \in K, i \in J, j \in J, \delta \in \Delta \tag{9}$$

$$\sum_{r\in R} \rho_{ir} = \sum_{k\in K} t_{ki} \qquad i \in J \tag{10}$$

$$t_{kj} \leq z_k \qquad k \in K, j \in J \tag{11}$$

$$\sum_{k\in K} t_{kj} \leq 1 \qquad j \in J \tag{12}$$

$$\chi_{ki}^{\delta} \geq 0 \qquad k \in K, i \in J, \delta \in \Delta \tag{13}$$

$$t_{ki} \in \{0,1\} \qquad k \in K, i \in J \tag{14}$$

$$b_{kij}^{\delta} \in \{0,1\} \qquad k \in K, i \in J, j \in J, \delta \in \delta \tag{15}$$

$$\rho_{ir} \in \{0,1\} \qquad i \in J, r \in R \tag{16}$$

$$z_k \in \{0,1\} \qquad k \in K \tag{17}$$

3.1 Note

- Tutti i vincoli a parte 11, 12 e 17 sono stati ottenuti adattando i vincoli del modello di partenza.
- Il vincolo 11 fa sì che un oggetto possa essere inserito nel $k-$simo zaino soltanto se lo zaino viene effettivamente utilizzato nella soluzione.
- Il vincolo 12 fa sì che un oggetto possa essere inserito al più in uno zaino.
- Il vincolo 9 è ridondante rispetto ad 8. (Ogni vincolo creato con 9 ha il corrispettivo in 8).
- Per il vincolo 7 si può utilizzare invece di un generico M, l'L definito per la funzione obiettivo.

4 Dimensioni del problema

Assumendo verosimilmente che

- $|K| < |J|$

si ottiene che il numero di variabili è minore di $3|J|^3 + 4|J|^2 + 7|J|$, quindi nell'ordine di $O(|J|^3)$.

Il numero di vincoli può essere sovrapprossimato con le stesse assunzioni fatte per le variabili in circa:

$$\frac{19}{2}|J|^3 + \frac{15}{2}|J|^2 + 10|J|$$

che è sempre nell'ordine $O(|J|^3)$.

Variabili	# Variabili
z_k	$\|K\|$
ρ_{ir}	$\|J\| \cdot 6$
t_{ki}	$\|J\| \cdot \|K\|$
X^{δ}_{ki}	$\|J\| \cdot \|K\| \cdot \|\Delta\|$
b^{δ}_{kij}	$\|J\| \cdot \|J\| \cdot \|K\| \cdot \|\Delta\|$
	$3\|J\|\|J\|\|K\| + 4\|J\|\|K\| + 6\|J\| + K$

5 File di Input

- K, il numero di zaini
- Seguono K righe contenente nella riga k i dati per lo zaino k intervallati da uno spazio:
  - S^1_k
  - S^2_k
  - S^3_k
  - f_k
- N, il numero di oggetti ($|J|$)
  - s^1_i
  - s^2_i
  - s^3_i
  - m_i
  - p_i

Vincoli	# Vincoli (UPPER BOUND)
(2)	$\lvert K\rvert$
(3)	$\lvert K\rvert\lvert J\rvert(\lvert J\rvert-1)/2$
(4)	$3\cdot\lvert K\rvert\lvert J\rvert$
(5)	$3\cdot\lvert K\rvert\lvert J\rvert(\lvert J\rvert-1)/2$
(6)	$3\cdot\lvert K\rvert\lvert J\rvert(\lvert J\rvert-1)/2$
(7)	$3\cdot\lvert K\rvert\lvert J\rvert$
(8)	$3\cdot\lvert K\rvert\lvert J\rvert\lvert J\rvert$
(9) - È ridondante	0
(10)	$\lvert J\rvert$
(11)	$\lvert K\rvert\lvert J\rvert$
(12)	$\lvert J\rvert$
Totale senza bound	$3\cdot\lvert K\rvert\lvert J\rvert\lvert J\rvert+7\cdot\lvert K\rvert\lvert J\rvert(\lvert J\rvert-1)/2+7\lvert K\rvert\lvert J\rvert+2\lvert J\rvert+\lvert K\rvert$
Bound	
(13)	$3\cdot\lvert K\rvert\lvert J\rvert$
(14)	$\lvert K\rvert\lvert J\rvert$
(15)	$3\cdot\lvert K\rvert\lvert J\rvert\lvert J\rvert$
(16)	$6\lvert J\rvert$
(17)	$\lvert K\rvert$
Totale	$6\cdot\lvert K\rvert\lvert J\rvert\lvert J\rvert+7\cdot\lvert K\rvert\lvert J\rvert(\lvert J\rvert-1)/2+11\lvert K\rvert\lvert J\rvert+8\lvert J\rvert+2\lvert K\rvert$