Verifica del Software - Esercizi parte 2

Università degli Studi di Padova

Mirko Bez

18 febbraio 2017

Indice

Esercizio 1

Consegna *Let (α, C, A, γ) be a Galois connection. Prove that:*

(A) γ *is injective,* $\iff$

(B) $\alpha \circ \gamma = id$ $\iff$

(C) α *is surjective.*

Svolgimento

Esercizio 2

Consegna *Let C and A be complete lattices and let (α, C, A, γ) be a Galois connection. Prove the following properties:*

1. $\gamma(\alpha(\top_C)) = \top_C$
2. *for any* $a \in A, \gamma(a) = \wedge\{c \in C \mid \alpha(c) \leq_A a\}$
3. *for any* $c_1, c_2 \in C, \alpha(c_1 \vee_C c_2) = \alpha(c_1) \vee_A \alpha(c_2)$
4. *for any* $c \in C, \gamma(\alpha(\gamma(\alpha(c)))) = \gamma(\alpha(c))$

Svolgimento

1. $\boxed{\gamma(\alpha(\top_C)) = \top_C}$

   Dimostrazione. Posso dimostrare le seguenti diseguaglianze per ottenere il risultato cercato:

   a) $\gamma(\alpha(\top_C)) \leq_C \top_C$: Segue direttamente dal fatto che $\gamma : A \to C$. Infatti γ restituisce un valore in C che è sicuramente minore o uguale a $\top_C$. Il tutto vale perchè α e γ sono funzioni totali.

   b) $\top_C \leq_C \gamma(\alpha(\top_C))$: Segue direttamente dalla proprietà numero (3) ($\forall c \in C.c \leq_C \gamma(\alpha(c))$) della Galois Connection.

   visto che valgono le diseguaglianze 1a e 1b, per l'antisimmetria del poset $(C, \leq_C)$ posso concludere $\gamma(\alpha(\top_C)) = \top_C$. □

2. $\boxed{\forall a \in A, \gamma(a) = \wedge\{c \in C \mid \alpha(c) \leq_A a\}}$

3. $\boxed{\forall c_1, c_2 \in C, \alpha(c_1 \vee_C c_2) = \alpha(c_1) \vee_A \alpha(c_2)}$

4. $\boxed{\forall c \in C, \gamma(\alpha(\gamma(\alpha(c)))) = \gamma(\alpha(c))}$ Dimostro le due diseguaglianze separatamente:

   a) $\boxed{\forall c \in C.\gamma(\alpha(c)) \leq_C \gamma(\alpha(\gamma(\alpha(c))))}$ segue direttamente dalla proprietà (4) e dalla totatilità di α e γ.

   b) $\boxed{\forall c \in C.\gamma(\alpha(\gamma(\alpha(c)))) \leq_C \gamma(\alpha(c))}$ Per la proprietà (5) della Galois Connection (e la totalità di α e γ)vale la seguente relazione

   $$\alpha(\gamma(\alpha(c))) \leq_A \alpha(c)$$

   vale per ogni c perchè ogni c viene mappato ad un a. Per via della monotonia di γ ottengo:

   $$\gamma(\alpha(\gamma(\alpha(c)))) \leq_C \gamma(\alpha(c))$$

   che era la relazione da dimostrare.

   Ora siccome valgono le due relazioni per l'antisimmetria vale anche l'uguaglianza.

Esercizio 3

Consegna *Let C and A be complete lattices, (α, C, A, γ) be a Galois insertion, $op : C^2 \to C$ be a monotone concrete operation and $op^a : A_2 \to A$ be a monotone abstract operation. Prove the following equivalence:*

$$\forall (a_1, a_2) \in A^2 \ . \ \alpha(op(\gamma(\alpha_1), \gamma(\alpha_2))) \leq_A op^a(a_1, a_2)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall (c_1, c_2) \in C^2 \ . \ op(c_1, c_2) \leq_C \gamma(op^a(\alpha(c_1), \alpha(c_2)))$$

Svolgimento

Esercizio 4

Consegna *Let $\langle C, \leq_C \rangle$ be a complete lattice and let $S \subseteq C$ be a subset of C which is meet-closed, that is:*

$$\forall Y \subseteq S. \wedge_C Y \in S$$

Prove that $\langle S, \leq_C \rangle$ can be viewed as an abstract domain of C where the concretization map $\gamma : S \to C$ is the identity.

Svolgimento

Esercizio 5

Consegna *Let C and A be complete lattices, (α, C, A, γ) be a Galois insertion, $f : C \to C$ be a monotone concrete operation and $f^\sharp : A \to A$ be a monotone abstract operation such that: $f \circ \gamma = \gamma \circ f^\sharp$. Prove that $\alpha(gfp(f)) = gfp(f^\sharp)$.*

Svolgimento

Esercizio 6

Consegna *Let C and A be complete lattices, (α, C, A, γ) be a Galois insertion, $f : C \to C$ be a monotone concrete operation and $f^\sharp : A \to A$ be a monotone abstract operation such that: $\alpha \circ f = f^\sharp \circ \alpha$.*

1. *Prove that $\alpha(lfp(f)) = lfp(f^\sharp)$.*
2. *Give a counterexample to the equality $lfp(f) = \gamma(lfp(f^\sharp))$.*

Svolgimento

Esercizio 7

Consegna *Let $(\alpha, \langle A, \leq_A \rangle, \langle \wp(Z), \subseteq \rangle, \gamma)$ be a Galois connection. Let Let $\mathbb{S}^A$, $Var \to A$ and consider the standard pointwise order $\sqsupseteq$ between functions: $s_1^\sharp \sqsubseteq s_2^\sharp$ when for any $x \in Var$, $s_1^\sharp(x) \leq_A s_2^\sharp(x)$. Prove that $(\alpha_s, wp(State), \mathbb{S}^A, \gamma_s)$ is a Galois connection, where:*

- $\alpha_s(T) \triangleq \lambda x.\alpha(\{s(x) | s \in T\})$
- $\gamma_s(s^\sharp) \triangleq \{s \in State | \forall x \in Var.\alpha(\{s(x)\}) \leq_A s^\sharp(x)\}$

Svolgimento

Esercizio 8

Consegna *Consider the following abstract domain of* $\langle \wp(\mathbb{Z}, \subseteq) \rangle$

Svolgimento

Esercizio 9

Svolgimento