Verifica del Software - Esercizi parte 2

Università degli Studi di Padova

Mirko Bez

18 febbraio 2017

Indice

Esercizio 1 **2**

Esercizio 1

Consegna *Let (α, C, A, γ) be a Galois connection. Prove that:*

(A) γ is injective, $\iff$

(B) $\alpha \circ \gamma = id$ $\iff$

(C) α is surjective.

Svolgimento Alcune definizioni utili:

Definizione 1. *(Galois Connection) (α, C, A, γ) è una Galois connection se:*

1. *A, C sono poset*
2. *$\alpha : C \longrightarrow A$ monotona*
3. *$\gamma : A \longrightarrow C$ monotona*
4. *$\forall c \in C.\ c \leq_C \gamma(\alpha(c))$*
5. *$\forall a \in A.\ \alpha(\gamma(a)) \leq_A a$*

Definizione 2. *(Funzione iniettiva) Una funzione $f : X \longrightarrow Y$ è iniettiva se:*

$$\forall a, b \in X.\ f(a) = f(b) \implies a = b$$

$\boxed{(B) \implies (A)}$ Assumo che valga l'ipotesi (B) ovvero che $\alpha \circ \gamma = id$. Assumo per assurdo che non valga l'ipotesi (A) ovvero che γ non sia iniettiva, quindi:

$$\exists a, b \in A.\ \gamma(a) = \gamma(b) \wedge a \neq b$$

Siano a, b due elementi diversi di A ($a \neq b$) che vengono mappati allo stesso elemento di C, ovvero $\gamma(a) = \gamma(b)$. Essendo $(C, \leq_C)$ un poset, per la riflessività della relazione $\leq_C$, valgono anche le relazioni:

I) $\gamma(a) \leq_C \gamma(b)$

II) $\gamma(b) \leq_C \gamma(a)$

Partendo dalla relazione I) ottengo:

$$\begin{array}{lcr}
\gamma(a) \leq_C \gamma(b) & \Longrightarrow & \text{per la monotonia di } \alpha \\
\alpha(\gamma(a)) \leq_A \alpha(\gamma(b)) & \Longrightarrow & \text{per l'ipotesi (B)} \\
a \leq_A b & &
\end{array}$$

Partendo dalla relazione II) ottengo:

$$\begin{array}{lcr}
\gamma(b) \leq_C \gamma(a) & \Longrightarrow & \text{per la monotonia di } \alpha \\
\alpha(\gamma(b)) \leq_A \alpha(\gamma(a)) & \Longrightarrow & \text{per l'ipotesi (B)} \\
b \leq_A a & &
\end{array}$$

Siccome valgono al contempo $a \leq_A b$ e $b \leq_A a$ allora per l'antisimmetria del poset $(A, \leq_A)$ $a = b$. Che è in contrasto con l'ipotesi iniziale che $a \neq b$.