Lecture 13 Convection Term

汪 洋

wangyangstayfoolish@gmail.com

August 2022

对流项计算 TVD Scheme

- ► 总变差变小，Total Variation Diminish

- ► upwind scheme 无条件稳定，有界。但是会带来 false diffusion。

- ► High order scheme 当 Pe 数较大时，会带来奇怪 (spurious oscillation or wiggles)，当你计算一些物理量时，例如 k, omeage, epsilon 等，会出现奇怪的物理非真实的负值，还会诱发计算的不稳定。**TVD** 格式就是用来处理该问题的。

- ► 增加人工扩散或者增加上游的权重，基于此思考，统称为通量修正输运格式 flux corrected transport

- ► OpenFOAM TVD 参考: ▸ Jasak

对流项计算 TVD Scheme

▶ 基于偏向 *upwind* 格式

$$\phi_e = \phi_P$$

▶ linear upwind 格式

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}(\phi_P - \phi_W)$$

▶ QUICK 格式

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{8}[3\phi_E - 2\phi_P - \phi_W]$$

▶ CD 格式

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}(\phi_E - \phi_P)$$

对流项计算 TVD Scheme

▶ 广义高阶格式

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}\psi(\phi_E - \phi_P)$$

▶ LUD(linear upwind differencing)

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}(\phi_P - \phi_W)$$

$$= \phi_P + \frac{1}{2}\frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P}(\phi_E - \phi_P)$$

$$\psi = \frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P}$$

对流项计算 TVD Scheme

▶ 广义高阶格式

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}\psi(\phi_E - \phi_P)$$

▶ QUICK

$$\phi_e = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W$$

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}\left[(3 + \frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P})\frac{1}{4}\right](\phi_E - \phi_P)$$

$$\psi = 0.25\frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P} + 0.75$$

对流项计算 TVD Scheme

► 合理函数

$$\psi = \phi(r)$$

$$r = \frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P}$$

► 通用格式 (general form)

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}\psi(r)(\phi_E - \phi_P)$$

UD, $\psi(r) = 0$

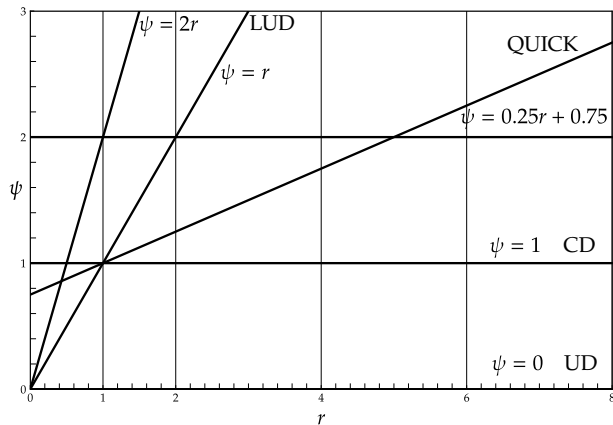CD, $\psi(r) = 1$

LUD, $\psi(r) = r$

QUICK, $\psi(r) = 0.25r + 0.75$

对流项计算 TVD Scheme

▶ $\psi - r$ 关系图

对流项计算 total variation and TVD Schemes

- ▶ 迎风格式更稳定，没有 wiggles 现象

- ▶ 中央差分和 QUICK 格式精度更高，但是在某些条件下会导致计算震荡甚至发散

- ▶ 找到精度高更稳定的格式

- ▶ 构造保证单调性格式

- ▶ total variation

对流项计算 total variation and TVD Schemes

▶ 保证单调性 TVD 基本假设

▶ 1. No new local extrema must be created

▶ 2. The value of an existing local minimum must be non-decreasing and that of a local maximum must be non-increasing

▶ total variation 是一系列离散点的数据

$$TV(\phi) = |\phi_2 - \phi_1| + |\phi_3 - \phi_2| + |\phi_4 - \phi_3| + |\phi_5 - \phi_4|$$
$$= |\phi_3 - \phi_1| + |\phi_5 - \phi_3|$$

▶ 最初是随着时间变化的，意味着 $TV(\phi^{n+1}) <= TV(\phi^n)$, ▶ Lien and Leschziner1993

对流项计算 Criteria for TVD schemes
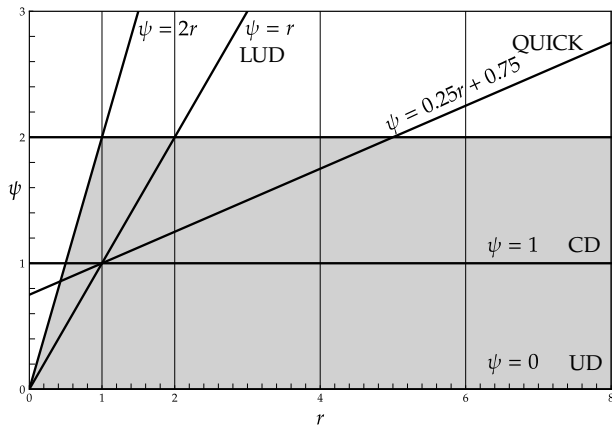
- Sweby ▸ Sweby 1984 给出了 TVD 格式的充要条件

- 上界是 $\psi(r) = 2r, 0 < r < 1$，$\psi(r) < 2r$

- 上界是 $\psi(r) = 2, r > 1, \psi(r) < 2$

Scheme	r	TVD
UD	-	yes
LUD	$r < 2$	yes
CD	$r > 0.5$	yes
QUICK	$3/7 <= r <= 5$	yes

对流项计算 Criteria for TVD schemes

▶ 阴影区域为 TVD 区域

对流项计算 Criteria for TVD schemes

- ► 上面多种格式都有限制范围。

- ► 观察方程 $\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}\psi(r)(\phi_E - \phi_P)$, 方程右边第一项符合 *TVD* 标准，第二项就会带来一些影响

- ► $\psi(r)$ 是个**通量限制器函数** flux limiter function

- ► $\psi(r)$ 对于二阶精度格式，必须通过点 $(1, 1)$
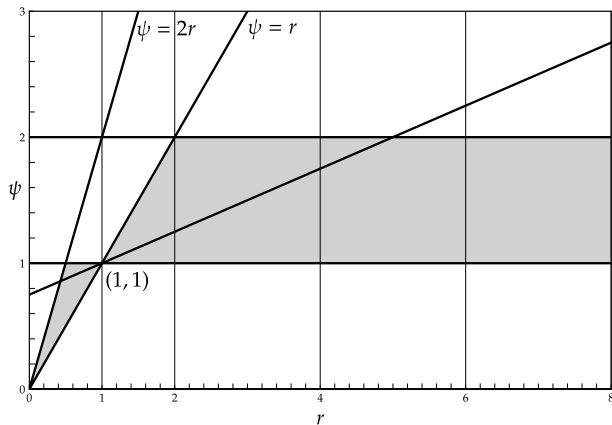
- ► 所以 UD 不是二阶精度，CD, LUD 和 QUICK 都是二阶级精度

对流项计算 TVD Scheme

- Sweby ▸ Sweby 1984 给出了**二阶格式可能范围**

- $r \in [0,1]$, 下界 $\psi(r) = r$, 上界 $\psi(r) = 1$, 所以 $r \leq \psi(r) \leq 1$

- $r \in [1,\infty)$, 下界 $\psi(r) = 1$, 上界 $\psi(r) = r$, 所以 $1 \leq \psi(r) \leq r$

- 由于限制器函数具有**对称**属性，所以在前后面上不需要特殊处理

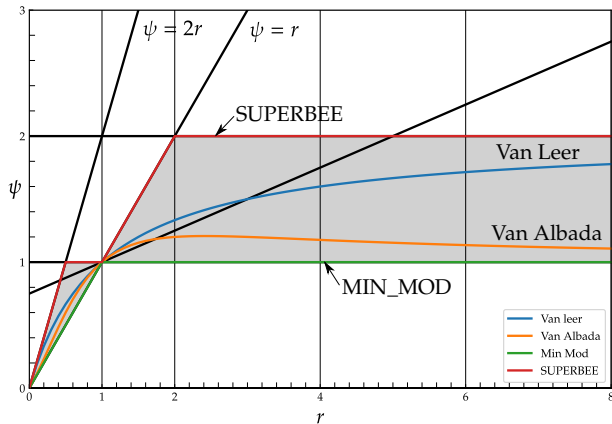$$\psi(r) = r\psi(\frac{1}{r})$$

对流项计算 TVD Scheme

► 二阶 *TVD* 格式范围

对流项计算 Flux limiter functions

Name	Limiter function $\phi(r)$	Source
Van Leer	$\frac{r+|r|}{1+r}$	▸ Van Leer 1974
Van Albada	$\frac{r+r^2}{1+r^2}$	▸ Van Albada 1982
Min-mode	$min(r,1)$ if $r > 0$, 0 if $r \leq 0$	▸ Roe 1985
SUPERBEE	$max[0, min(2r,1), min(r,2)]$	▸ Roe 1985
Sweby	$max[0, min(\beta r,1), min(r,\beta)]$	▸ Sweby 1984
QUICK	$max[0, min(2r, (3+r)/4, 2)]$	▸ Leonard 1988
UMIST	$max[0, min(2r, (0.75r+0.25), (0.25r+0.75), 2)]$	▸ Lien1993

对流项计算 TVD Scheme

▶ 各种格式 $\psi - r$ 图

对流项计算 Implementation TVD Scheme

▶ 一维定常对流扩散方程

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left[\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right]$$

▶ 有限体积法离散后

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

▶ 假设 $u > 0$(x 方向)

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}\psi(r_e)(\phi_E - \phi_P)$$

$$\phi_w = \phi_W + \frac{1}{2}\psi(r_w)(\phi_P - \phi_W)$$

$$r_e = \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P}\right), \; r_w = \left(\frac{\phi_W - \phi_{WW}}{\phi_P - \phi_W}\right)$$

对流项计算 Implementation TVD Scheme

- 带入离散方程

$$F_e \left[\phi_P + \frac{1}{2}\psi(r_e)(\phi_E - \phi_P) \right] - F_w \left[\phi_W + \frac{1}{2}\psi(r_w)(\phi_P - \phi_W) \right]$$

$$= D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

$$(D_e + F_e + D_w)\phi_P = (D_w + F_w)\phi_W + D_e\phi_E$$

$$- F_e \left[\frac{1}{2}\psi(r_e)(\phi_E - \phi_P) \right] + F_w \left[\frac{1}{2}\psi(r_w)(\phi_P - \phi_W) \right]$$

- 可以写成

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + S_u^{DC}$$

对流项计算 Implementation TVD Scheme

▶ 代数方程

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u^{DC}$$

▶ 其中

$$a_W = D_w + F_w$$
$$a_E = D_e$$
$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$
$$S_u^{DC} = -F_e \left[\frac{1}{2} \psi(r_e)(\phi_E - \phi_P) \right] + F_w \left[\frac{1}{2} \psi(r_w)(\phi_P - \phi_W) \right]$$

▶ 因为 $u > 0$ 为了区分, 将 $r_w^+ \ r_e^+$

$$S_u^{DC} = -F_e \left[\frac{1}{2} \psi(r_e^+)(\phi_E - \phi_P) \right] + F_w \left[\frac{1}{2} \psi(r_w^+)(\phi_P - \phi_W) \right]$$

对流项计算 Implementation TVD Scheme

▶ 如果 $u < 0$

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

$$\phi_e = \phi_P + \frac{1}{2}\psi(r_e^-)(\phi_E - \phi_P)$$

$$\phi_w = \phi_W + \frac{1}{2}\psi(r_w^-)(\phi_P - \phi_W)$$

$$r_e^- = \left(\frac{\phi_{EE} - \phi_E}{\phi_E - \phi_P}\right), \ r_w^- = \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\phi_P - \phi_W}\right)$$

▶ 代数方程

$$(D_e - F_w + D_w)\phi_P = D_w\phi_W + (D_e - F_e)\phi_E$$
$$- F_e\left[\frac{1}{2}\psi(r_e^-)(\phi_E - \phi_P)\right] + F_w\left[\frac{1}{2}\psi(r_w^-)(\phi_P - \phi_W)\right]$$

对流项计算 Implementation TVD Scheme

▶ 代数方程

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u^{DC}$$

▶ 其中

$$
\begin{aligned}
a_W &= D_w \\
a_E &= D_e - F_e \\
a_P &= a_W + a_E + (F_e - F_w) \\
S_u^{DC} &= F_e \left[\frac{1}{2} \psi(r_e^-)(\phi_E - \phi_P) \right] - F_w \left[\frac{1}{2} \psi(r_w^-)(\phi_P - \phi_W) \right]
\end{aligned}
$$

对流项计算 Implementation TVD Scheme

► *TVD* 格式相邻系数和延迟修正源项

Scheme	r
a_W	$D_w + max(F_w, 0)$
a_E	$D_e + max(-F_e, 0$
S_u^{DC}	$\frac{1}{2}F_e[(1 - \alpha_e)\psi(r_e^-) - \alpha_e\psi(r_e^+)](\phi_E - \phi_P)$ $+\frac{1}{2}F_w[\alpha_w\psi(r_w^+) - (1 - \alpha_w)\psi(r_w^-)](\phi_P - \phi_W)$

► 其中
$\alpha_w = 1$ for $F_w > 0$ $\alpha_e = 1$ for $F_e > 0$
$\alpha_w = 0$ for $F_w < 0$ $\alpha_e = 0$ for $F_e < 0$

对流项计算 Implementation TVD Scheme

▶ 边界条件处理，$\phi = \phi_A$

$$F_e \left[\phi_P + \frac{1}{2}\psi(r)(\phi_E - \phi_P) \right] - F_A\phi_A = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_A(\phi_P - \phi_A)$$

▶ 处理 A 边界处的 r_e, 外插

$$\phi_o = 2\phi_A - \phi_P$$
$$r_e = \frac{\phi_P - \phi_W}{\phi_E - \phi_P} = \frac{2(\phi_P - \phi_A)}{\phi_E - \phi_P}$$

对流项计算 Evaluation of TVD Schemes

► 守恒、有界、稳定

► ⟨▸ Lien and Leschziner1993⟩，使用 UMIST 格式比标准的 QUICK 格式要增加额外 15% 的开销

► 对于非结构化网格，可以参考 ⟨▸ Darwish and Moukalled 2003⟩