Coordenadas Cilíndricas e Esféricas (Exemplos)

De cartesianas para cilíndricas $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{z})$:

- Cálculo de r:

$$r^2 = x^2 + y^2 = 0^2 + 3^2$$
$$r = \pm 3$$

1) Para $r = 3$

- Cálculo de θ:

Obs.: como $x = 0$, não usarei a fórmula da tangente (pois a abcissa se encontra no denominador).

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{3} = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \theta = -\frac{\pi}{2}$$

Conferindo com o seno:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{3} = 1$$

Como

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Assim,

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 01: Determinar as coordenadas cilíndricas e esféricas do ponto $A(0,3,4)$, que está dado em coordenadas cartesianas.

Obs.: Este é um dos poucos casos em que utilizar a função trigonométrica adequada – no caso, o seno – já forneceria o valor do ângulo direto. Isto ocorre pois há somente um ângulo (desconsiderando as rotações de $2k\pi$) em que o seno vale exatamente igual a 1.

- Cálculo de z:

Como o valor de z não varia de coordenadas cartesianas para cilíndricas, $z = 4$.

Resposta: Em coordenadas cilíndricas, tem-se

$$A\left(3, \frac{\pi}{2}, 4\right)$$

2) Para $r = -3$

- Cálculo de θ:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2}$$

- Cálculo de z: Novamente, $z = 4$.

Resposta: Em coordenadas cilíndricas, tem-se

$$A\left(-3, -\frac{\pi}{2}, 4\right)$$

Exemplo 01: Determinar as coordenadas cilíndricas e esféricas do ponto $A(0,3,4)$, que está dado em coordenadas cartesianas.

De cartesianas para esféricas $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})$:

- Cálculo de ρ:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 0^2 + 3^2 + 4^2$$
$$\rho = 5 \ (\rho \geq 0)$$

- Cálculo de ϕ:

$$\cos\phi = \frac{z}{\rho} = \frac{4}{5}$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{4}{5}\right), 0 \leq \phi \leq \pi$$

- Cálculo de θ:

Este valor é o mesmo obtido para coordenadas cilíndricas (considerando $r \geq 0$).

Como $x = 0$, não se utiliza a fórmula da tangente. Para fazer uso das outras funções trigonométricas, deve-se calcular o valor intermediário r ($r \geq 0$).

$$r^2 = x^2 + y^2 = 0^2 + 3^2$$
$$r = 3$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{3} = 1$$

Exemplo 01: Determinar as coordenadas cilíndricas e esféricas do ponto $A(0,3,4)$, que está dado em coordenadas cartesianas.

Assim,

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Resposta: Em coordenadas esféricas, tem-se

$$A\left(5, \frac{\pi}{2}, \arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right)$$

Exemplo 01: Determinar as coordenadas cilíndricas e esféricas do ponto $A(0,3,4)$, que está dado em coordenadas cartesianas.

De cilíndricas para cartesianas (x, y, z):

- Cálculo de x:

$$x = r\cos\theta$$
$$x = 1\cdot\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$
$$x = 1\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$x = 1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$x = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Cálculo de y:

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$y = 1\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$
$$y = 1\cdot\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$y = 1\cdot\left[-\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$y = 1\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Exemplo 02: Determine as coordenadas cartesianas do ponto $B\left(1, \frac{11\pi}{6}, \pi\right)$, que está dado em coordenadas cilíndricas.

- Cálculo de z:

Como o valor de z não varia de coordenadas cilíndricas para cartesianas, $z = \pi$.

Resposta: Em coordenadas cartesianas, tem-se

$$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \pi\right)$$

Exemplo 02: Determine as coordenadas cartesianas do ponto $B\left(1, \frac{11\pi}{6}, \pi\right)$, que está dado em coordenadas cilíndricas.

De esféricas para cartesianas $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$:

- Cálculo de x:

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$

$$x = 12 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$x = 12 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$x = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x = 3 \cdot 3$$

$$x = 9$$

- Cálculo de y:

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$$

$$y = 12 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$y = -12 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$y = -12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$y = -3\sqrt{3}$$

Exemplo 03: Determinar as coordenadas cartesianas do ponto $D\left(12, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$, que está dado em coordenadas esféricas.

- Cálculo de z:

$$z = \rho \cos \phi$$
$$z = 12 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$z = 12\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$z = 6$$

Resposta: Em coordenadas cartesianas, tem-se

$$D\left(9, -3\sqrt{3}, 6\right)$$

Exemplo 03: Determinar as coordenadas cartesianas do ponto $D\left(12, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$, que está dado em coordenadas esféricas.

Coordenadas cilíndricas $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{z})$:

$$5x^2 - 5y^2 = 8z$$

$$5(r\cos\theta)^2 - 5(r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = 8z$$

$$5r^2\cos^2\theta - 5r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta = 8z$$

$$5r^2(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta) = 8z$$

$$5r^2\cos 2\theta = 8z$$

Coordenadas esféricas $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})$:

$$5x^2 - 5y^2 = 8z$$

$$5(\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta)^2 - 5(\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = 8\rho\cos\phi$$

$$5\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi\cos^2\theta - 5\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi\,\mathrm{sen}^2\,\theta = 8\rho\cos\phi$$

$$5\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi\,(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta) = 8\rho\cos\phi$$

Para $\rho \neq 0$

$$5\rho\,\mathrm{sen}^2\,\phi\cos 2\theta = 8\cos\phi$$

Exemplo 04: Escreva a seguinte equação (dada em coordenadas cartesianas) em coordenadas cilíndricas e esféricas.

$$5x^2 - 5y^2 = 8z$$

Dúvidas?