Revisão de matrizes

Tipos especiais de matrizes

Matriz Linha: É qualquer matriz que possua uma única linha m= 1 .

Matriz Coluna: É qualquer matriz que possua uma única coluna n = 1

Matriz Nula: É qualquer matriz cujos elementos são todos iguais a zero $aij = 0, \forall i, \forall j$.

- 0= [0] mxn

Matriz Retangular: É qualquer matriz cujo número de linhas é diferente do número de colunas, ou seja, em que m ≠ n.

Matriz Quadrada: É qualquer matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas, ou seja, em que m = n.

- A diagonal principal $i = j$.
- A diagonal secundária $i + j = n + 1$.

Matriz Diagonal: É uma matriz quadrada ($m = n$) em que $aij = 0$ sempre que $i \neq j$, ou seja, todos os elementos que não estão na diagonal principal são sempre nulos.

- obs: Em uma matriz diagonal é possível que algum (ou inclusive todos) elemento situado sobre a diagonal principal seja igual a zero.

Matriz Identidade: É uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1, isto é, $aij = 0$ sempre que $i \neq j$ e $aij = 1$ sempre que $i = j$.

Matriz Triangular Superior: É uma matriz quadrada ($m = n$) em que todos os elementos situados abaixo da diagonal principal são todos nulos, ou seja, $aij = 0$ sempre que $i > j$.

- obs: é possível que algum (ou inclusive todos) elemento situado sobre ou acima da diagonal principal seja igual a zero.

Matriz Triangular Inferior: É uma matriz quadrada $m = n$ em que todos os elementos situados acima da diagonal principal são todos nulos, ou seja, aij = 0, sempre que i<j.

- obs: é possível que algum (ou inclusive todos) elemento situado sobre ou abaixo da diagonal principal seja igual a zero.

Igualdade entre matrizes

Duas matrizes $A = aij\ m{\times}n$ e $B = bij\ r{\times}s$ são iguais se e somente se possuem o mesmo número de linhas e de colunas e se todos os seus elementos correspondentes forem respectivamente iguais.

Adição entre matrizes

A adição (ou soma) de duas matrizes A e B (ambas de mesma ordem $m \times n$), é outra matriz de ordem $m \times n$, denotada por $A + B$, cujos elementos são as somas dos elementos correspondentes (posição a posição) de A e B, isto é: $A + B = [aij]m{\times}n + [bij]m{\times}n = [aij + bij]m{\times}n$.

- obs: somente é possível somar matrizes que possuam a mesma ordem

propriedades da adição de matrizes

- Comutatividade: $A + B = B + A$.

- Associatividade: $A + B + C = A + B + C$
- Existência de Elemento Neutro Aditivo: A matriz nula de ordem $m \times n$, denotada por 0= $[0]m\times n$ é o elemento neutro da adição de matrizes, ou seja, é tal que A + 0 = A

Multiplicação por escalar

Se A é uma matriz de ordem $m \times n$ e k é um número real, definimos a multiplicação de A pelo escalar $k \in \mathbb{R}$ como a matriz dada por
$k \cdot A = k \cdot [aij]m\times n = [k \cdot aij]m\times n.$

- multiplicar os escalar por todos os elementos da matriz

propriedades da multiplicação por escalar

- Distributividade em relação à soma de matrizes: $k(A + B) = kA + kB.$
- Distributividade em relação à soma de escalares: $k + t\ A = kA + tA.$
- Associatividade: $k\ tA = kt\ A.$
- A multiplicação de qualquer matriz pelo escalar zero resulta na matriz nula: 0 . A = 0

Multiplicação de matrizes

Sejam $A = aij\ m\times n$ e $B = brs\ n\times p$ matrizes de ordem $m \times n$ e $n \times p$, respectivamente. Definimos a multiplicação de A por B como a matriz $A \cdot B = [cuv]m\times p$

- Só é possível efetuar o produto entre as matrizes se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz
- Em geral, para a multiplicação de matrizes, temos que $A \cdot B \neq B \cdot A.$

propriedades da multiplicação entre matrizes

- Se I é a matriz identidade de ordem $n \times n$ então $I \cdot A = A = A \cdot I$
- Se A é uma matriz de ordem $m \times n$ e O é uma matriz nula de ordem $n \times p$, então $A \cdot$ O = O$m\times p.$
  Se O é uma matriz nula de ordem $m \times n$ e A é uma matriz de ordem $n \times p$ então O $\cdot\ A$ = O$m\times p.$
- Distributividade: Se A é uma matriz de ordem $m \times n$ e B, C são ambas matrizes de ordem $n \times p$, então
- $A \cdot B + C = A \cdot B + A \cdot C.$
- Associatividade: Se A é uma matriz de ordem $m \times n$, B uma matriz de ordem $n \times p$ e C uma matriz de ordem $p \times q$ então
- $A \cdot B \cdot C = A \cdot B \cdot C.$

Potência de uma matriz

Se A é uma matriz quadrada e k é um número inteiro positivo, então a k-ésima potência de A é definida como o produto

- $Ak = A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$

Transposta de uma matriz

Dada uma matriz $A = aij\ m\times n$ podemos obter uma nova matriz permutando suas linhas por suas colunas de mesmo índice.
Tal matriz é denominada transposta de A e é denotada por $AT = aji\ n\times m.$

Propriedades da Transposta

- Para qualquer matriz A têm-se que $(AT)T = A$, ou seja, a transposta da transposta de uma matriz é igual à própria matriz.

- Se A e B são matrizes de mesma ordem tais que $A = B$ então $AT = BT$.
- Se A e B são matrizes de mesma ordem, então $(A + B)T= AT + BT$.
- Se A é uma matriz de qualquer ordem e $k \in \mathbb{R}$ então $(kA)T= kAT$.
- Se A é uma matriz de ordem $m \times n$ e B é uma matriz de ordem $n \times p$, então $(AB)T= BTAT$

Classificação quanto à transposta

Uma matriz quadrada A é simétrica se for igual à sua transposta, ou seja, se A= A^t

Uma matriz quadrada A é antissimétrica se $AT = -A$.

Uma matriz A de ordem $n \times n$ é invertível (ou não-singular) quando existir uma matriz B de ordem $n \times n$ tal que

- $A \cdot B = B \cdot A = In$, onde In é a matriz identidade de ordem $n \times n$.
- A matriz B é dita a inversa de A e é denotada por $B = A-1$.
- Se A não tem inversa, dizemos que A é não invertível (ou singular).

propriedades da inversa

- Se A é invertível, sua inversa $A-1$ também é invertível e a inversa de $A-1$ é A, ou seja, $A-1$ $-1 = A$.
- Se a matriz A é invertível, sua transposta AT também é invertível e sua inversa é AT $-1 = A-1\ T$.
- Se A e B são matrizes invertíveis de mesma ordem, então o produto AB é uma matriz invertível e a inversa de AB é o produto $B-1A-1$, ou seja $A \cdot B$ $-1 = B-1 \cdot A-1$.
- Se A é invertível e $k \in \mathbb{R}$, com $k \neq 0$, então kA também é invertível e sua inversa é $k \cdot A$ -1 = 1/k.A^-1
- Se A é invertível e $k \in \mathbb{R}$, então Ak $-1= A-1. = A-1 \cdot A-1\cdot \ldots \cdot A-1 = A-1\ k$.

determinante de uma matriz quadrada

Uma matriz A de ordem $n \times n$ é invertível (ou não-singular) quando

regra de sarrus

- consiste em reescrever a matriz A, repetindo suas duas primeiras colunas. A seguir, efetua-se as multiplicações ordenadas entre os elementos situados nas diagonais “paralelas” à diagonal principal (mantendo o sinal do produto) e entre os elementos situados nas diagonais “paralelas” à diagonal secundária (trocando o sinal do produto)

propriedade de determinantes

- Seja A uma matriz quadrada de ordem $n \times n$, com $n \geq 2$. São válidas as seguintes propriedades: i) Se $k \in \mathbb{R}$ então det $k \cdot A = kn \cdot$ det A . ii) Se AT é a matriz transposta de A, então det AT= det A .
- Se B é uma matriz quadrada de mesma ordem que A, então det $A \cdot B$ = det $A \cdot$ det(B).
- A é uma matriz invertível se, e somente se, det $A \neq 0$. Ainda, a inversa $A-1$ é tal que det $A-1$ =1 det(A) .
- Se A possui alguma linha (ou coluna) inteiramente nula, então det $A = 0$.

- Se A possuir duas linhas (ou duas colunas) idênticas, então det A = 0.
- Se A possuir duas linhas (ou duas colunas) múltiplas entre si, então det A = 0.