UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
JOINVILLE
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Disciplinas: ALGA001 e GAN0001
Prof. Bruno Terêncio do Vale

Segunda Lista de Exercícios
Tópico: Retas e Planos

1. Verificar se os pontos $P_1\,(5,-5,6)$ e $P_2\,(4,-1,12)$ pertencem à reta

$$r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$$

2. Estabelecer as equações reduzidas (variável independente x) da reta determinada pelos pares de pontos:

   (a) $A\,(1,-2,3)$ e $B\,(3,-1,-1)$
   (b) $A\,(-1,2,3)$ e $B\,(2,-1,3)$

3. Qual deve ser o valor de m para que os pontos $A\,(3,m,1)$, $B\,(1,1,-1)$ e $C\,(-2,10,-4)$ pertençam à mesma reta?

4. Citar um ponto e um vetor diretor de cada uma das seguintes retas:

   (a) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{z-3}{4} \\ y = 1 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x = 2y \\ z = 3 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = 2-t \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} y = -x \\ z = 3+x \end{cases}$

   (f) $x = y = z$

5. Determinar as equações das seguintes retas:

   (a) reta que passa por $A\,(1,-2,4)$ e é paralela ao eixo dos x;
   (b) reta que passa por $B\,(3,2,1)$ e é perpendicular ao plano xOz;
   (c) reta que passa por $A\,(2,3,4)$ e é ortogonal ao mesmo tempo aos eixos dos x e dos y;
   (d) reta que passa por $A\,(4,-1,2)$ e tem direção do vetor $\vec{i}-\vec{j}$;
   (e) reta que passa pelos pontos $M\,(2,-3,4)$ e $N\,(2,-1,3)$.

6. Determinar o ângulo entre as seguintes retas:

(a) $r: \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 2t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$ e $s: \dfrac{x}{4} = \dfrac{y+6}{2} = \dfrac{z-1}{2}$

(b) $r: \begin{cases} y = -2x - 1 \\ z = x + 2 \end{cases}$ e $s: \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{-3};\ x = 2$

(c) $r: \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}t \\ y = t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

(d) $r: \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{-2}$ e $s: \begin{cases} x = 1 \\ \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-2}{3} \end{cases}$

7. Determinar os valores de m para que as retas $r: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = mt \\ z = -2 + 5t \end{cases}$ e $s: \dfrac{x-2}{-1} = y + m = \dfrac{z+3}{m}$ sejam:

   (a) ortogonais;
   (b) paralelas;
   (c) coplanares.

8. Calcular o valor de m para que os seguintes pares de retas sejam paralelas:

   (a) $r: \begin{cases} x = -3t \\ y = 3 + t \\ z = 4 \end{cases}$ e $s: \dfrac{x+5}{6} = \dfrac{y-1}{m};\ z = 6$

   (b) $r: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 \\ z = mt \end{cases}$ e $s: \dfrac{x-4}{6} = \dfrac{z-1}{5};\ y = 7$

9. Determine as equações reduzidas da reta r que passa pelo ponto $P(3,5,2)$ e é simultaneamente ortogonal ao eixo x e à reta $s: \begin{cases} x = 1 \\ \dfrac{y-3}{-2} = z + 1 \end{cases}$.

10. A reta

$$r: \begin{cases} y = mx + 3 \\ z = x - 1 \end{cases}$$

    é ortogonal à reta determinada pelos pontos $A(1,0,m)$ e $B(-2,2m,2m)$. Calcular o valor de m.

11. Calcular as equações da reta r que contém o ponto $A(2,-1,1)$ e que interceptam a reta $s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$ segundo um ângulo de $\dfrac{\pi}{4}$ rad.

12. Calcular o valor de m para que sejam coplanares as seguintes retas:

    (a) $r: \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 3x - 1 \end{cases}$ e $s: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{m}$

(b) $r : \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} y = 4x - m \\ z = x \end{cases}$

(c) $r : \dfrac{x - m}{m} = \dfrac{y - 4}{-3}$; $z = 6$ e $s : \begin{cases} y = -3x + 4 \\ z = -2x \end{cases}$

13. Sejam as retas

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 5t \\ z = mt \end{cases} \quad \text{e } s : \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

(a) calcular o valor de m para que r e s sejam concorrentes;

(b) determinar, para o valor de m, o ponto de interseção de r e s.

14. Calcular o ponto de interseção das retas:

(a) $r : \begin{cases} y = 3x - 1 \\ z = 2x + 1 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} y = 4x - 2 \\ z = 3x \end{cases}$

(b) $r : \dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z - 5}{4}$ e $s : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$

(c) $r : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = 4x - 10 \end{cases}$ e $s : x = \dfrac{y - 7}{-3} = \dfrac{z - 12}{-7}$

(d) $r : \begin{cases} y = -5 \\ z = 4x + 1 \end{cases}$ e $s : \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{z - 5}{-3}$; $y = -5$

15. Estabelecer as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto de interseção das retas

$$r : x - 2 = \frac{y + 1}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 2 + 2y \end{cases}$$

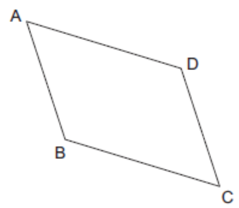
e é, ao mesmo tempo, ortogonal a r e s.

16. Dados os pontos $P_1\,(7, -1, 3)$ e $P_2\,(3, 0, -12)$, determinar:

(a) o ponto P, que divide o segmento P_1P_2 na razão $\dfrac{2}{3}$;

(b) o ponto Q, que divide o segmento P_1P_2 ao meio.

17. Considere o paralelogramo de vértices $A\,(1, -2, 3)$, $B\,(4, 3, -1)$, $C\,(5, 7, -3)$ e $D\,(2, 2, 1)$.



Determine:

(a) as equações paramétricas da reta que é simultaneamente ortogonal às duas diagonais deste paralelogramo e que contém o ponto de interseção destas diagonais.

(b) a equação geral do plano que contém este paralelogramo.

18. Seja o plano $\pi : 2x - y + 3z + 1 = 0$. Calcular
    (a) O ponto de π que tem abcissa 4 e ordenada 3;
    (b) O ponto de π que tem abcissa 1 e cota 2;
    (c) O valor de k para que o ponto $P\,(2, k+1, k)$ pertença a π;
    (d) O ponto de abcissa zero e cuja ordenada é o dobro da cota.

19. Determinar a equação geral do plano que satisfaça as seguintes condições:
    (a) É paralelo ao plano $\pi : 2x - 3y - z + 5 = 0$ e contém o ponto $A\,(4, -1, 2)$.
    (b) É perpendicular à reta $r : \begin{cases} x = 2y - 3 \\ z = -y + 1 \end{cases}$ e contém o ponto $A\,(1, 2, 3)$.
    (c) É paralelo ao eixo dos x e contém os pontos $A\,(-2, 0, 2)$ e $B\,(0, -2, 1)$.
    (d) É perpendicular ao eixo dos y e contém o ponto $A\,(3, 4, -1)$.
    (e) Contém os pontos $A\,(-1, 2, 0)$, $B\,(2, -1, 1)$ e $C\,(1, 1, -1)$.
    (f) Contém os pontos $A\,(2, 1, 3)$, $B\,(-3, 1, 3)$ e $C\,(4, 2, 3)$.
    (g) Passa pelos pontos $A\,(-3, 1, -2)$ e $B\,(-1, 2, 1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$.
    (h) Passa pelos pontos $A\,(1, -2, 2)$ e $B\,(-3, 1, -2)$ e é perpendicular ao plano $\pi : 2x + y - z + 8 = 0$.
    (i) Contém o ponto $A\,(4, 1, 0)$ e é perpendicular aos planos $\pi_1 : 2x - y - 4z - 6 = 0$ e $\pi_2 : x + y + 2z - 3 = 0$.
    (j) Contém as retas $r : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -t \\ z = 4 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{-2}; z = 0 \end{cases}$.
    (k) Contém o ponto $A\,(3, -2, -1)$ e a reta $r : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 7 = 0 \end{cases}$
    (l) Contém o ponto $A\,(-1, 2, 0)$ e a reta interseção dos planos $\pi_1 : 2x - y = 0$ e $\pi_2 : x + y - z - 4 = 0$.

20. Estabelecer as equações paramétricas dos seguintes planos:
    (a) Determinado pelos pontos $A\,(1, 1, 0)$, $B\,(2, 1, 3)$ e $C\,(-1, -2, 4)$.
    (b) Contém a reta $r : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e é perpendicular ao plano $\pi_1 : 2x + y - z + 5 = 0$.

21. Determinar um vetor unitário ortogonal ao plano $\pi : \sqrt{2}x + y - z + 5 = 0$.

22. Determinar o ângulo entre os seguintes planos:
    (a) $\pi_1 : x + 2y + z - 10 = 0$ e $\pi_2 : 2x + y - z + 1 = 0$
    (b) $\pi_1 : 2x - 2y + 1 = 0$ e $\pi_2 : 2x - y - z = 0$
    (c) $\pi_1 : 3x + 2y - 6 = 0$ e $\pi_2 :$ plano xOz
    (d) $\pi_1 : 3x + 2y - 6 = 0$ e $\pi_2 :$ plano yOz

23. Determinar o ângulo que a reta
$$r : \begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z+1}{5} \end{cases}$$
    forma com o plano $\pi : 2x - y + 7z - 1 = 0$.

24. Dados os planos $\pi_1 : -4x + 4y - 4 = 0$ e $\pi_2 : -2x + y + z = 0$, determine:
    (a) a interseção entre π_1 e π_2.

(b) o ângulo entre π_1 e π_2.

25. Determinar as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A(-1,0,0)$ e é paralela aos planos $\pi_1 : 2x - y - z + 1 = 0$ e $\pi_2 : x + 3y + z - 5 = 0$.

26. Calcular os valores de m e n para que a reta

$$r : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 4 \end{cases}$$

esteja contida no plano $\pi : nx + my - z - 2 = 0$.

27. Estabelecer as equações reduzidas, sendo x a variável independente, da reta interseção dos planos $\pi_1 : 3x - y + z - 3 = 0$ e $\pi_2 : x + 3y + 2z + 4 = 0$.

28. Determinar o ponto de interseção da reta $r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = -t \end{cases}$ com o plano $\pi : 2x + y - z - 4 = 0$.

29. O plano $\pi : x + y - z - 2 = 0$ intercepta os eixos cartesianos nos pontos A, B e C. Calcular a área do triângulo ABC.

30. Determine a posição relativa entre:

   (a) as retas $r : \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} y = 4x + 7 \\ z = x \end{cases}$

   (b) a reta $r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases}$ e o plano $\pi : x + 2y + z + 1 = 0$

   (c) os planos $\pi_1 : -2x + 3y + 4z = 9$ e $\pi_2 : 3x - 2y + 3z = 10$

   (d) a reta $r : \begin{cases} x - 1 = \dfrac{y+1}{-2} \\ z = 0 \end{cases}$ e o plano $\pi : 2x + y - 3z - 1 = 0$

   (e) a reta $s : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 4 \end{cases}$ e o plano $\pi : 3x - 2y - z - 2 = 0$

31. Considere as retas

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ z = 2y - 6 \end{cases} \quad ; \; s : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 6 - t \end{cases} \quad \text{e } t : \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z}{-2}$$

   (a) Determine a posição relativa das retas a seguir e, se houver, seu ponto de interseção:
      i. r e s;
      ii. r e t;
      iii. s e t.

   (b) Determine, se houver, a equação do plano que contém as retas:
      i. r e s;
      ii. r e t;
      iii. s e t.

   (c) Determine as equações simétricas de uma reta l que é ortogonal a r, forma uma ângulo de 60° com o eixo das ordenadas e intercepta o eixo das abcissas em $x = 2$.

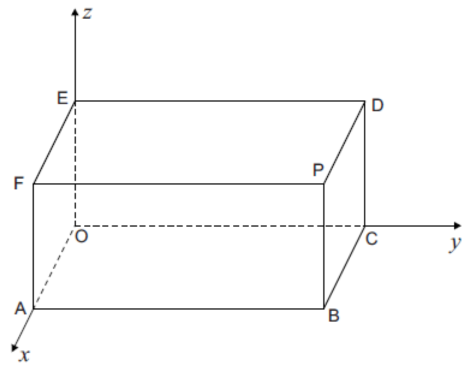
32. Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

(a) A reta que passa pelos pontos $A\,(2,1,3)$ e $B\,(2,4,3)$ é paralela ao plano coordenado xz.

(b) O plano que passa pelos pontos $C\,(1,0,0)$, $D\,(0,0,4)$ e $E\,(2,3,-4)$ é paralelo ao eixo y.

(c) O plano que contém a reta $\begin{cases} x = 2 \\ z = 4 \end{cases}$ e passa pelo ponto $F\,(1,3,4)$ é paralelo ao plano xy.

33. No paralelepípedo da figura abaixo tem-se $E\,(0,0,3)$ e $B\,(2,4,0)$.



(a) Determine a equação do plano que passa pelos pontos O, P e D.

(b) Determine a equação da reta que passa pelo ponto médio do segmento $\overline{OA}$ e é perpendicular ao plano $z = 3$.

(c) Determine a equação do plano que contém a face $BCDP$.

Respostas dos Exercícios

1. Apenas P_1
2. (a) $\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{2} \\ z = -2x + 5 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} y = -x + 1 \\ z = 3 \end{cases}$
3. $m = -5$
4. Uma possibilidade:
   (a) $A\,(-1, 1, 3)$ e $\vec{v} = (3, 0, 4)$
   (b) $A\,(0, 0, 3)$ e $\vec{v} = (2, 1, 0)$
   (c) $A\,(0, -1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 0, -1)$
   (d) $A\,(0, 3, -1)$ e $\vec{v} = (1, 0, 0)$
   (e) $A\,(0, 0, 3)$ e $\vec{v} = (1, -1, 1)$
   (f) $A\,(0, 0, 0)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$
5. (a) $\begin{cases} y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} z = 2 \\ x = -y + 3 \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} x = 2 \\ \dfrac{y + 1}{2} = \dfrac{z - 3}{-1} \end{cases}$
6. (a) 60°
   (b) 30°
   (c) 30°
   (d) $\theta = \arccos\left(\dfrac{2}{3}\right) \approx 48°11'$
7. (a) $m = \dfrac{1}{2}$
   (b) não existe m
   (c) $m = -1$
8. (a) $m = -2$
   (b) $m = -\dfrac{5}{2}$
9. $r : \begin{cases} x = 3 \\ z = 2y - 8 \end{cases}$
10. $m = 1$ ou $m = -\dfrac{3}{2}$

11. $r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 \\ z = 1 - t \end{cases}$ ou $r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

12. (a) $m = 4$
    (b) $m = -7$
    (c) $m = \dfrac{3}{2}$

13. (a) $m = 2$
    (b) $(-1, -1, -2)$

14. (a) $(1, 2, 3)$
    (b) $(4, 3, 9)$
    (c) $(2, 1, -2)$
    (d) $(1, -5, 5)$

15. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 5t \\ z = 3t \end{cases}$

16. (a) $P\,(15, -3, 33)$
    (b) $Q\left(5, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{9}{2}\right)$

17. (a) $\begin{cases} x = 3 + 12t \\ y = \dfrac{5}{2} + 4t \\ z = 14t \end{cases}$
    (b) $6x + 2y + 7z - 23 = 0$

18. (a) $(4, 3, -2)$
    (b) $(1, 9, 2)$
    (c) $k = -2$
    (d) $(0, -2, -1)$

19. (a) $2x - 3y - z - 9 = 0$
    (b) $2x + y - z - 1 = 0$
    (c) $y - 2z + 4 = 0$
    (d) $y = 4$
    (e) $4x + 5y + 3z - 6 = 0$
    (f) $z = 3$
    (g) $3x - 12y + 2z + 25 = 0$
    (h) $x - 12y - 10z - 5 = 0$
    (i) $2x - 8y + 3z = 0$
    (j) $2x + 2y + z + 2 = 0$
    (k) $2x + 3y + z + 1 = 0$
    (l) $2x - 7y + 4z + 16 = 0$

20. (a) $\pi: \begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 3h + 4t \end{cases}$

(b) $\pi : \begin{cases} x = t + 2h \\ y = -3 + 2t + h \\ z = 2 - t - h \end{cases}$

21. $\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}, 1, -1\right)$

22. (a) $60°$
    (b) $30°$
    (c) $\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$
    (d) $\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

23. $60^{\underline{o}}$

24. (a) $\begin{cases} x = z + 1 \\ y = z + 2 \end{cases}$
    (b) $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad

25. $r : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t \\ z = 7t \end{cases}$

26. $m = -2$ e $n = 3$

27. $r : \begin{cases} y = x - 2 \\ z = -2x + 1 \end{cases}$

28. $(3, -5, -3)$

29. $2\sqrt{3}$ u.a.

30. (a) Concorrentes
    (b) r está contida no plano
    (c) Perpendiculares
    (d) r está contida no plano
    (e) s está contida no plano

31. (a) i. concorrentes com $I\,(1, 5, 4)$
        ii. reversas
        iii. paralelas distintas
    (b) i. $-7x + 2y - z + 1 = 0$
        ii. não existe plano
        iii. $-16x + 7y + 5z - 39 = 0$
    (c) $l : \frac{x-2}{\sqrt{11}} = \frac{y}{-2} = z.$

32. (a) Falsa, a reta é ortogonal ao plano xz.
    (b) Verdadeira
    (c) Verdadeira

33. (a) $-3y + 4z = 0$
    (b) $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$
    (c) $y = 4$