Parábola e Elipse
(Exemplos)

O primeiro passo é descobrir qual equação da parábola se aplica para esta situação.

Para isto, faz-se necessário conhecer informações sobre o vértice e o eixo.

O vértice é a origem, conforme enunciado.

Lembre-se que a diretriz é PERPENDICULAR ao eixo.

Como $y = 3$ é uma reta HORIZONTAL, tem-se que o eixo da parábola será VERTICAL. Devido ao vértice, será o eixo dos y.

A equação da parábola neste caso é

$$x^2 = 2py$$

A equação da reta diretriz neste caso é dada por

$$y = -\frac{p}{2}$$

Assim,

$$-\frac{p}{2} = 3 \Rightarrow p = -6$$

Com isso, a equação da parábola é

$$x^2 = -12y$$

Observação: esta parábola tem concavidade para baixo.

Exemplo 01: Estabelecer a equação de uma parábola que possui:

a) Vértice na origem e diretriz $d: y = 3$

O primeiro passo é descobrir qual equação da parábola se aplica para esta situação.

Para isto, faz-se necessário conhecer informações sobre o vértice e o eixo.

O vértice é a origem, conforme enunciado.

Lembre-se que o foco PERTENCE ao eixo.

Como o foco se encontra no eixo dos x, este será o eixo da parábola.

A equação da parábola neste caso é

$$y^2 = 2px$$

O foco, neste caso, possui coordenadas

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

Assim,

$$\frac{p}{2} = -3 \Rightarrow p = -6$$

Com isso, a equação da parábola é

$$y^2 = -12x$$

Observação: esta parábola tem concavidade para esquerda.

Exemplo 01: Estabelecer a equação de uma parábola que possui:

b) Vértice na origem e foco $F(-3,0)$

O primeiro passo é descobrir qual equação da parábola se aplica para esta situação.

Para isto, faz-se necessário conhecer informações sobre o vértice e o eixo.

O vértice é o ponto $V(3,-1)$, conforme enunciado.

Lembre-se que a diretriz é PERPENDICULAR ao eixo.

Como $x=1$ é uma reta VERTICAL, tem-se que o eixo da parábola será HORIZONTAL. Devido ao vértice, será PARALELO ao eixo dos x.

A equação da parábola neste caso é

$$(y-k)^2=2p(x-h)$$

Têm-se $h=3$ e $k=-1$ (dados do vértice).

A equação da reta diretriz neste caso é dada por

$$x=h-\frac{p}{2}$$

Assim,

$$3-\frac{p}{2}=1 \Rightarrow p=4$$

Com isso, a equação da parábola é

$$(y+1)^2=8(x-3)$$

Observação: esta parábola tem concavidade para direita.

Exemplo 01: Estabelecer a equação de uma parábola que possui:

c) $V(3,-1)$ e diretriz $d: x-1=0$

Existem duas possibilidades neste caso:

1. **Parábola com vértice na origem**
   i. O eixo da parábola é o eixo dos y
   ii. O eixo da parábola é o eixo dos x

i. A equação neste caso é

$$x^2 = 2py$$

Substituindo o ponto $P(-1,1)$ na equação (uma vez que ele pertence à parábola) tem-se

$$(-1)^2 = 2p \cdot 1$$

$$p = \frac{1}{2}$$

Assim, a equação se torna $x^2 = y$.

Neste caso,

$$F\left(0, \frac{p}{2}\right) \Rightarrow F\left(0, \frac{1}{4}\right)$$

$$d: y = -\frac{p}{2} \Rightarrow d: y = -\frac{1}{4}$$

Exemplo 02: Determine as equações das parábolas, no plano cartesiano, que passam pelo ponto $P(-1,1)$ e, além disso, possuem vértice na origem e um dos eixos coordenados como eixo. Determine também o foco e a equação da reta diretriz em cada caso.

ii. A equação neste caso é

$$y^2 = 2px$$

Substituindo o ponto $P(-1,1)$ na equação (uma vez que ele pertence à parábola) tem-se

$$1^2 = 2p \cdot (-1)$$

$$p = -\frac{1}{2}$$

Assim, a equação se torna $y^2 = -x$.

Neste caso,

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \Rightarrow F\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$$

$$d: x = -\frac{p}{2} \Rightarrow d: x = \frac{1}{4}$$

Exemplo 02: Determine as equações das parábolas, no plano cartesiano, que passam pelo ponto $P(-1,1)$ e, além disso, possuem vértice na origem e um dos eixos coordenados como eixo. Determine também o foco e a equação da reta diretriz em cada caso.

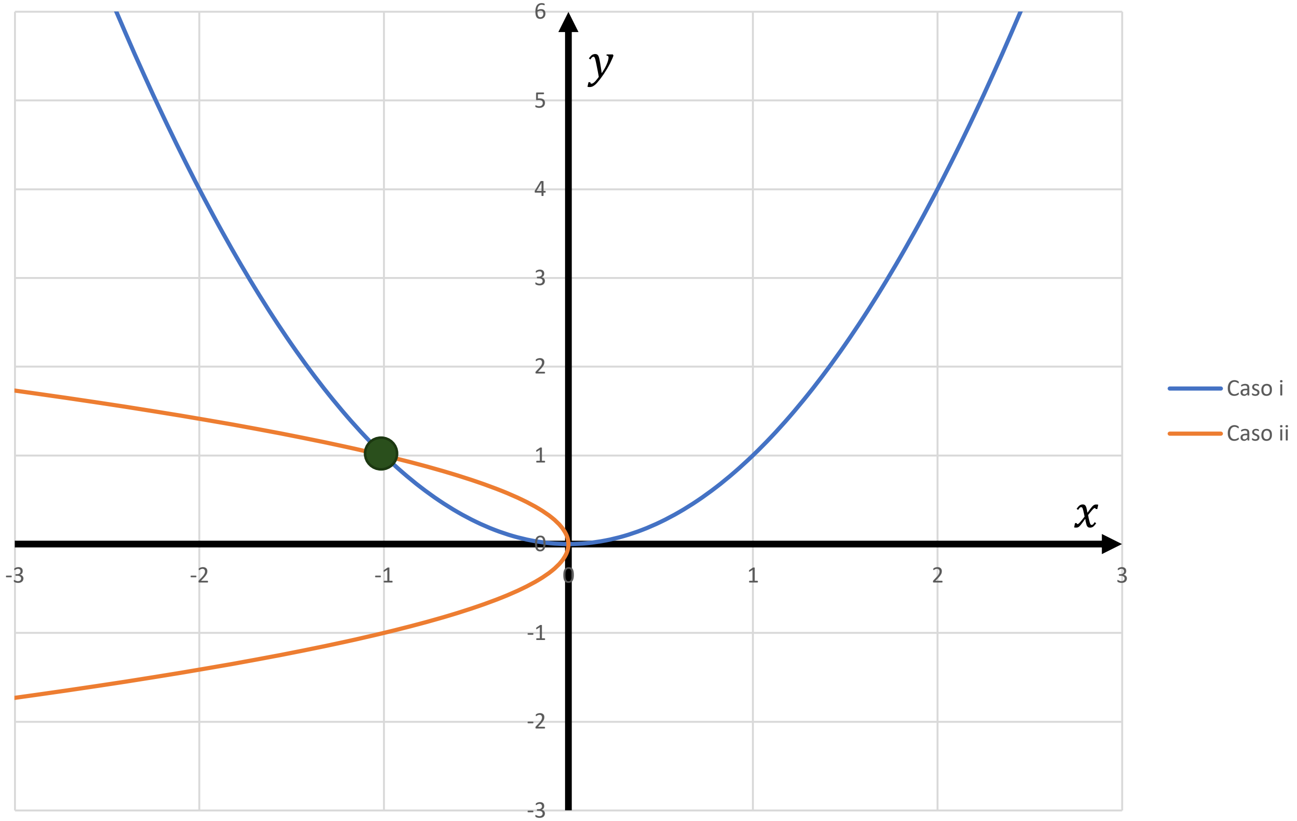
1. **Parábola com vértice na origem**

i. O eixo da parábola é o eixo dos y

$$x^2 = y, \qquad p = \frac{1}{2}$$

ii. O eixo da parábola é o eixo dos x

$$y^2 = -x, \qquad p = -\frac{1}{2}$$



Exemplo 02: Determine as equações das parábolas, no plano cartesiano, que passam pelo ponto $P(-1,1)$ e, além disso, possuem vértice na origem e um dos eixos coordenados como eixo. Determine também o foco e a equação da reta diretriz em cada caso.

O primeiro passo é descobrir de qual cônica se trata.

O conjunto de pontos que são equidistantes de uma reta e de um ponto forma uma PARÁBOLA.

O vértice NÃO é a origem, pois o foco se encontra na origem.

Lembre-se que a diretriz é PERPENDICULAR ao eixo.

Como $y = 3$ é uma reta HORIZONTAL, tem-se que o eixo da parábola será VERTICAL. Devido ao foco, será o eixo dos y. A equação será então:

$$(x-h)^2 = 2p(y-k)$$

A equação da reta diretriz neste caso é dada por

$$y = k - \frac{p}{2}$$

Assim,

$$k - \frac{p}{2} = 3$$

O foco, nesta situação, tem formato

$$F\left(h, \frac{p}{2} + k\right)$$

Exemplo 03: Determine a equação do conjunto de pontos $P(x, y)$ que são equidistantes da reta $y = 3$ e do ponto $F(0,0)$. Represente geometricamente.

Assim, como $F(0,0)$,

$$h = 0$$

$$k + \frac{p}{2} = 0$$

Juntando as duas equações envolvendo p e k,

$$\begin{cases} k - \dfrac{p}{2} = 3 \\ k + \dfrac{p}{2} = 0 \end{cases}$$

Somando as duas equações,

$$2k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

Substituindo na segunda equação,

$$\frac{3}{2} + \frac{p}{2} = 0 \Longrightarrow p = -3$$

Assim, substituindo na equação específica do caso,

$$(x - h)^2 = 2p(y - k)$$

$$x^2 = -6\left(y - \frac{3}{2}\right)$$

Exemplo 03: Determine a equação do conjunto de pontos $P(x, y)$ que são equidistantes da reta $y = 3$ e do ponto $F(0,0)$. Represente geometricamente.

$$x^2 = -6\left(y - \frac{3}{2}\right)$$

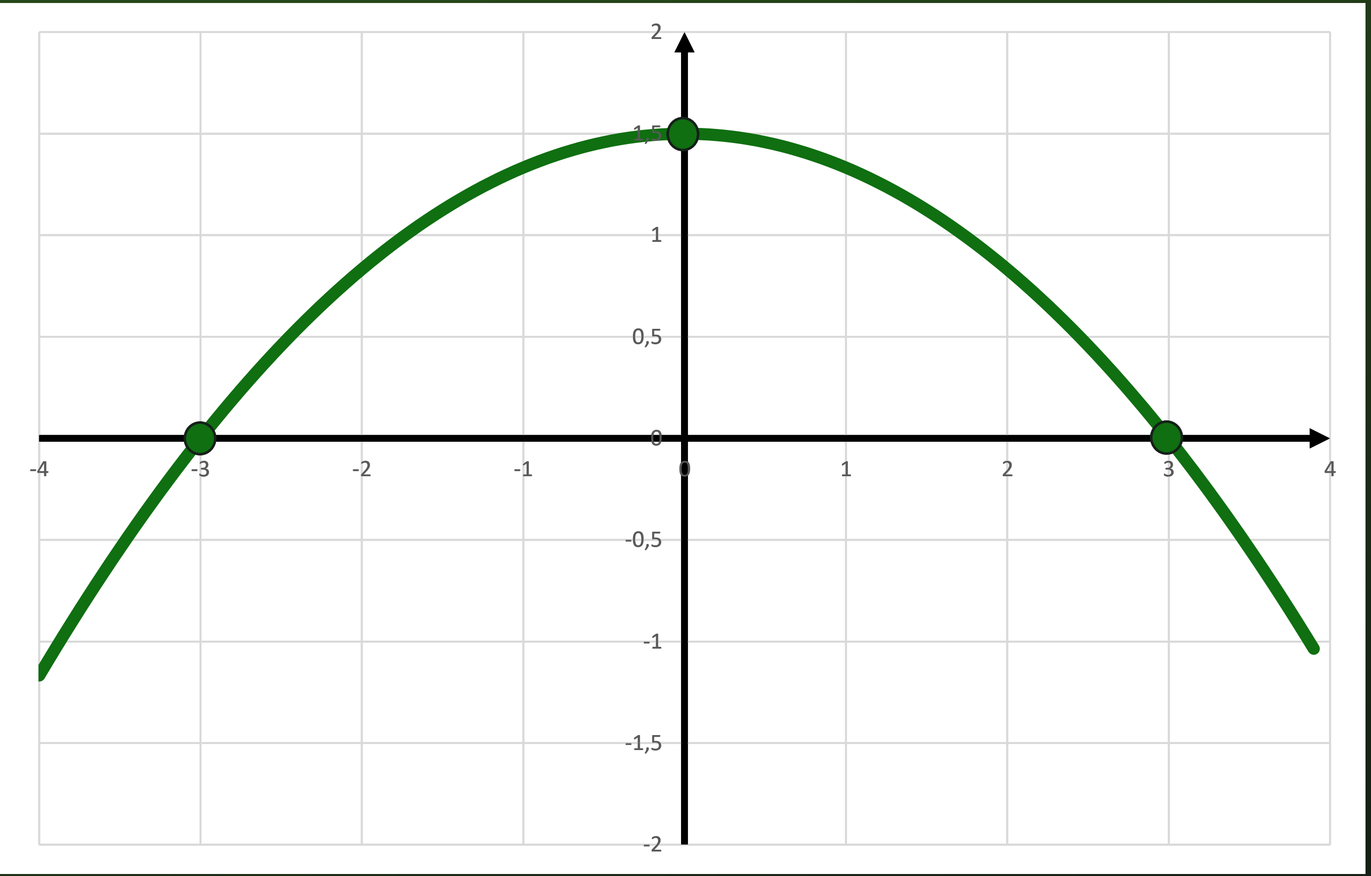
Para fazer o gráfico, sabe-se que

$$V\left(0, \frac{3}{2}\right)$$

Igualando y a zero, para obter mais dois pontos,

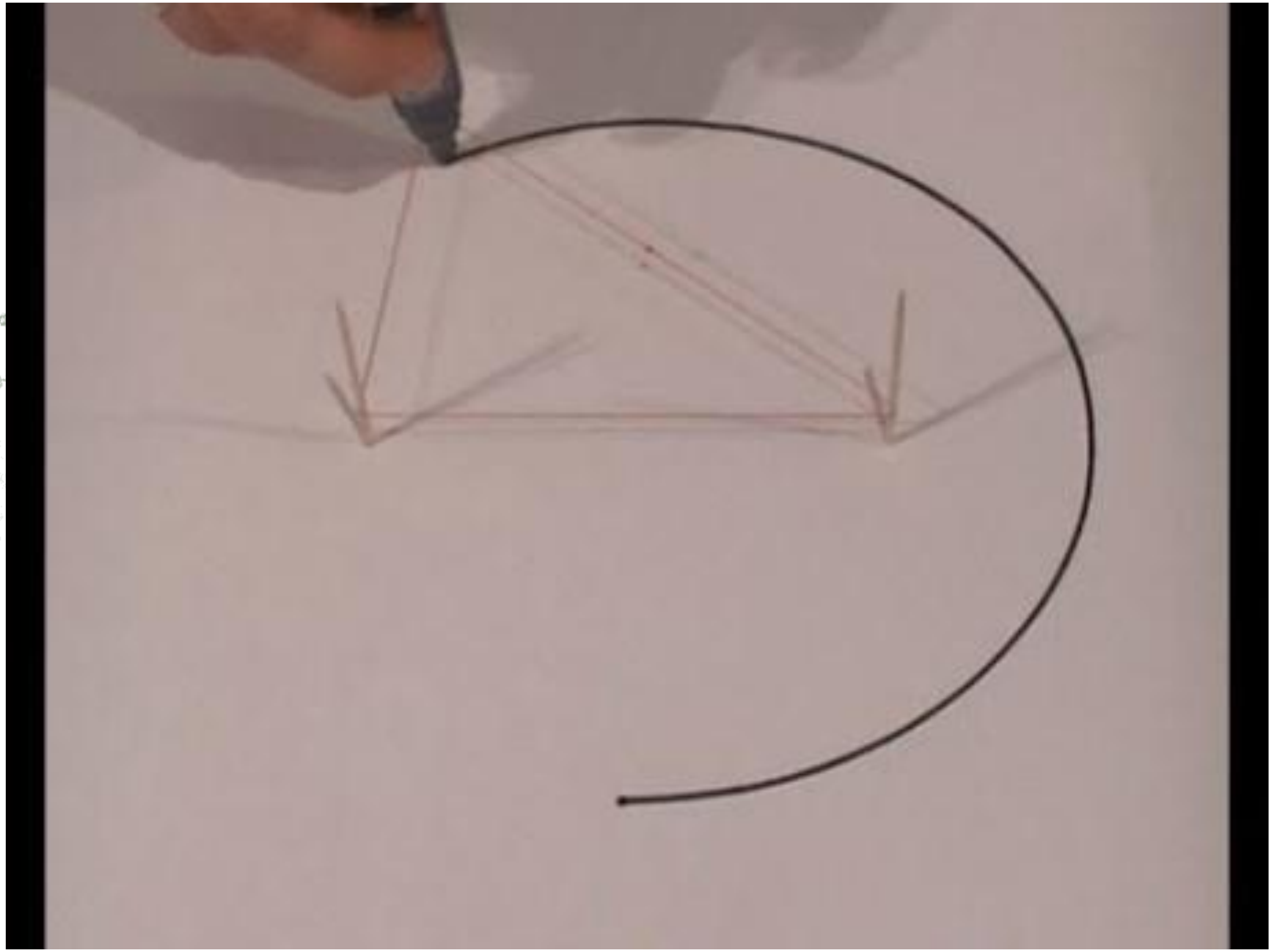
$$x^2 = -6\left(0 - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow x = \pm 3$$

Sabe-se também que a concavidade é para baixo ($p < 0$). Assim,



Exemplo 03: Determine a equação do conjunto de pontos $P(x, y)$ que são equidistantes da reta $y = 3$ e do ponto $F(0,0)$. Represente geometricamente.

Observação: desenhando uma elipse



Primeiro, deve-se escrever a equação na forma padrão,

$$25(x-4)^2+(y+3)^2=25\ \ (\div 25)$$

$$\frac{(x-4)^2}{1}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$$

Comparando com as equações da elipse disponíveis, trata-se de uma elipse com centro fora da origem e eixo maior paralelo ao eixo dos y, cuja equação é

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Da comparação direta,

$$b=1,\qquad a=5,\qquad h=4,\qquad k=-3$$

Seus elementos são

$$C(h,k)\Rightarrow C(4,-3)$$

$$A_1(h,-a+k) \text{ e } A_2(h,a+k)\Rightarrow A_1(4,-8) \text{ e } A_2(4,2)$$

$$B_1(-b+h,k) \text{ e } B_2(b+h,k)\Rightarrow B_1(3,-3) \text{ e } B_2(5,-3)$$

Exemplo 04: Determine o centro, os vértices, os focos e a excentricidade da elipse

$$25(x-4)^2+(y+3)^2=25$$

Para os focos e a excentricidade, será necessário o valor de c. Este pode ser obtido com a relação

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Substituindo,

$$5^2 = 1^2 + c^2$$

$$c^2 = 24$$

$$c = 2\sqrt{6}$$

Obtendo as informações faltantes,

$$F_1(h, -c + k) \Rightarrow F_1(4, -2\sqrt{6} - 3)$$

$$F_2(h, c + k) \Rightarrow F_2(4,2\sqrt{6} - 3)$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Exemplo 04: Determine o centro, so vértices, os focos e a excentricidade da elipse

$$25(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$$

Conhecendo os focos, é possível descobrir o centro da elipse!

$$C = \frac{F_1 + F_2}{2}$$

Assim, tem-se $C(0{,}0)$.

Note que os focos estão no eixo dos x, logo o eixo maior está no eixo dos x. Assim, a equação da elipse é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como os vértices dados também se encontram no eixo dos x, isso significa que foram fornecidos $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$. Assim, $a = 4$.

Como, nesta equação, têm-se $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, $c = 3$.

Como $a^2 = b^2 + c^2$, obtém-se $b^2 = 16 - 9 = 7$.

Assim, a equação da elipse é

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

Exemplo 05: Os vértices de uma elipse são os pontos $(4{,}0)$ e $(-4{,}0)$ e seus focos são os pontos $(3{,}0)$ e $(-3{,}0)$. Determine a equação dessa elipse.

Se a elipse possui $C(0,0)$ e focos no eixo dos x, seu eixo maior será no eixo dos x, de modo que sua equação será

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Pela excentricidade,

$$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}\Rightarrow c=\frac{2}{3}a$$

Além disso, sabe-se que

$$a^2=b^2+c^2$$

Ou seja,

$$b^2=a^2-c^2$$

$$b^2=a^2-\left(\frac{2}{3}a\right)^2=\frac{5}{9}a^2$$

Deste modo, a equação da elipse pode ser reescrita como

Exemplo 06: Determine a equação da elipse que possui $C(0,0)$, focos no eixo dos x, excentricidade $e=\frac{2}{3}$ e passa pelo ponto $P\left(2,-\frac{5}{3}\right)$.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\frac{5}{9}a^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{9y^2}{5a^2}=1$$

Substituindo o ponto P na equação vai fornecer o valor de a^2!

$$\frac{2^2}{a^2}+\frac{9\left(-\frac{5}{3}\right)^2}{5a^2}=1$$

$$\frac{4}{a^2}+\frac{9\cdot\frac{25}{9}}{5a^2}=1$$

$$\frac{4}{a^2}+\frac{5}{a^2}=1$$

$$\frac{9}{a^2}=1\Rightarrow a^2=9$$

Assim, a equação da elipse será

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

Exemplo 06: Determine a equação da elipse que possui $C(0,0)$, focos no eixo dos x, excentricidade $e=\frac{2}{3}$ e passa pelo ponto $P\left(2,-\frac{5}{3}\right)$.

Em situações em que a equação (neste caso, inequação) está dada de forma explícita, usa-se o método de **completar quadrados** para voltar para forma padrão.

Passo 1: Trabalhe separadamente com as variáveis x e y, colocando em evidência a constante associada à maior potência.

$$4(x^2 - 10x) + 9(y^2 - 6y) + 145 < 0$$

Passo 2: Para cada parênteses, vê-se qual constante é necessária para que se tenha um trinômio quadrado perfeito.

Soma-se e subtrai-se a respectiva constante em cada parênteses, para que não se afete a expressão.

$$4(x^2 - 10x + 25 - 25) + 9(y^2 - 6y + 9 - 9) + 145 < 0$$

Reescreve-se a expressão usando trinômios quadrados perfeitos.

$$4[(x - 5)^2 - 25] + 9[(y - 3)^2 - 9] + 145 < 0$$

Desenvolve-se a expressão de acordo com a cônica que ela representa (neste momento, deve ser evidente de qual se trata).

Exemplo 07: Esboce a região do plano dada pela inequação

$$4x^2 + 9y^2 - 40x - 54y + 145 < 0$$

$$4[(x-5)^2-25]+9[(y-3)^2-9]+145<0$$

Trata-se de uma elipse (dois termos quadráticos, ambos com mesmo sinal)

$$4(x-5)^2-100+9(y-3)^2-81+145<0$$

$$4(x-5)^2+9(y-3)^2-36<0$$

$$4(x-5)^2+9(y-3)^2<36 \ \ (\div 36)$$

$$\frac{4(x-5)^2}{36}+\frac{9(y-3)^2}{36}<\frac{36}{36}$$

$$\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}<1$$

Essa região é o **INTERIOR** de uma elipse de centro $C(5,3)$, eixo maior paralelo ao eixo dos x, $a=3$ e $b=2$.

Exemplo 07: Esboce a região do plano dada pela inequação

$$4x^2+9y^2-40x-54y+145<0$$

$$\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} < 1$$

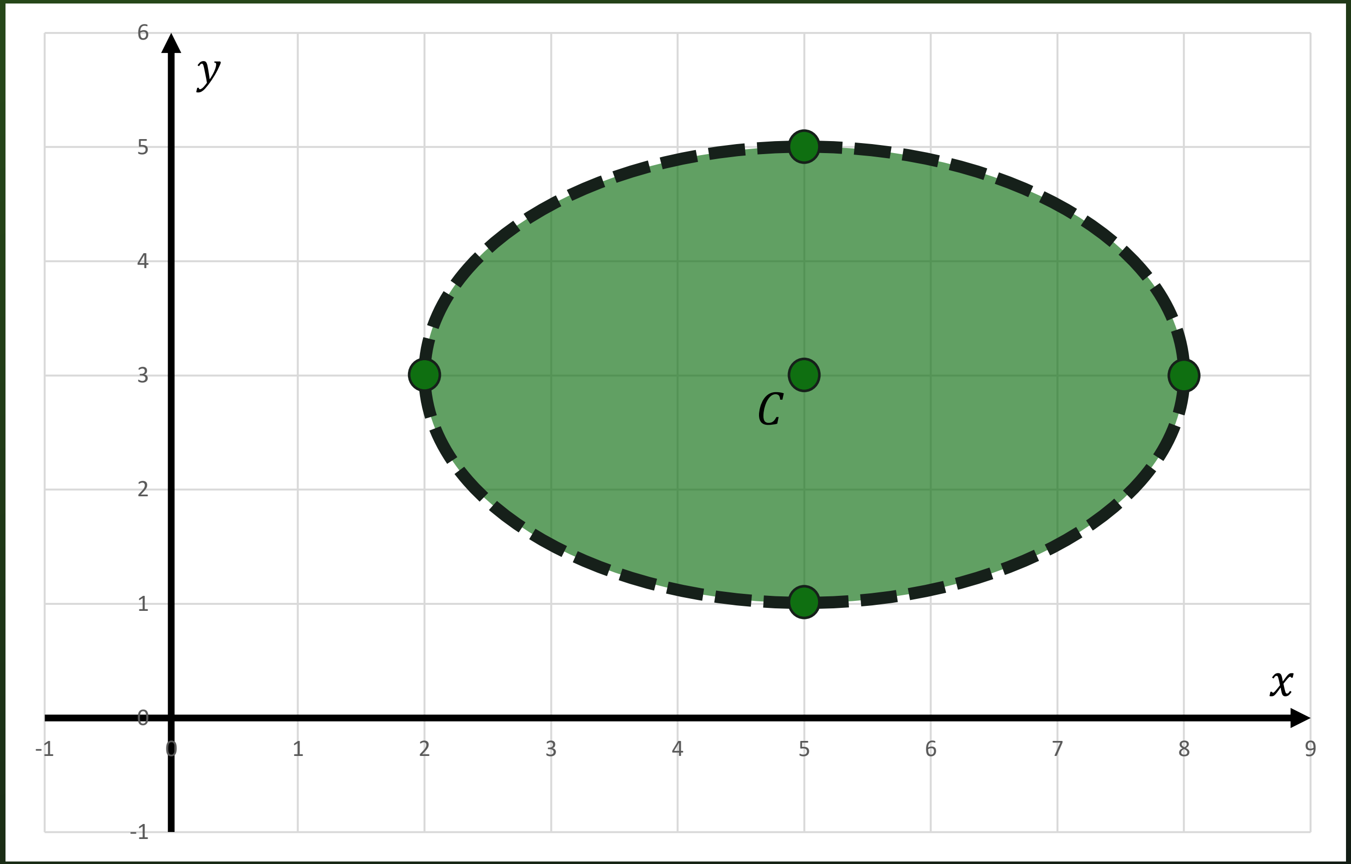
eixo maior paralelo ao eixo dos x

$$C(5,3)$$

$$A_1(2,3) \text{ e } A_2(8,3)$$

$$B_1(5,1) \text{ e } B_2(5,5)$$

INTERIOR da elipse (pois é uma desigualdade de MENOR). Só o INTERIOR, nada além do INTERIOR! USE PONTILHADO NO CONTORNO!



Exemplo 07: Esboce a região do plano dada pela inequação

$$4x^2 + 9y^2 - 40x - 54y + 145 < 0$$

Dúvidas?