Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral

Teoria dos Conjuntos

Prof. Dani Prestini

UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Teoria dos Conjuntos

- **CONJUNTOS:** Coleções ou agrupamentos de objetos.

✓ Indica-se um conjunto por uma letra maiúscula de nosso alfabeto (A, B, C, D, E, ...)

- Elementos: é cada objeto de uma coleção.

✓ Indica-se um elemento por uma letra minúscula de nosso alfabeto (a, b, c, d, e, ...)

RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA:

Os símbolos ao lado, são usados para relacionar os elementos com os conjuntos.

$\in$ ***(Pertence)***

$\notin$ ***(Não pertence)***

Representação de Conjuntos

1. Forma Tabular ou Enumerativa:

Escrevemos os elementos entre chaves e separados por vírgulas.

Exemplos:

a) Conjunto V das vogais.

V = {a, e, i, o ,u} *(conjunto finito)*

b) Conjunto A dos números ímpares positivos.

A = {1, 3, 5, 7, 9, ...} *(conjunto infinito)*

c) Conjunto U dos números pares primos positivos.

U = {2}

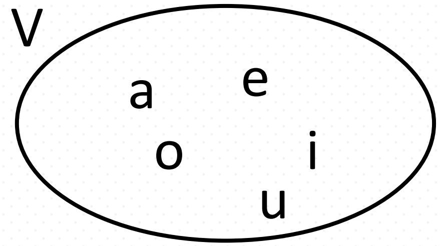
Representação de Conjuntos

2. Diagrama de Venn:

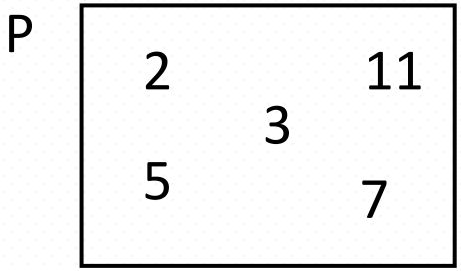
Escrevemos os elementos no interior de uma figura geométrica.

Exemplos:

a) Conjunto V das vogais.



b) Conjunto P dos números primos positivos.



Representação de Conjuntos

3. Propriedade Característica:

Representamos o conjunto através de uma propriedade característica de seus elementos.

Exemplos:

a) Conjunto V das vogais.

$$V = \{x | x \text{ é } vogal\} = \{a, e, i, o, u\}$$

b) Conjunto P dos números primos positivos.

$$P = \{x | x \text{ é } número\ primo\ positivo\} = \{2,3,5,7,11,\ldots\}$$

c) Conjunto U dos números pares primos positivos.

$$U = \{x | x \text{ é } número\ par\ primo\ positivo\} = \{2\}$$

Igualdade de Conjuntos

- ✓ Dois ou mais conjuntos são iguais se eles possuem os mesmos elementos.

- ✓ {1, 2, 3} = {3, 1, 2}

➢ A repetição de elementos não altera um conjunto.

{b, c, c, c, d, e, e} = {b, c, d, e}

➢ A ordem dos elementos não altera um conjunto.

{g, o, l} = {l, o, g, o} e {f, i, a, t} = {f, a, t, i, a}

Tipos de Conjuntos

Conjunto Unitário: apresenta um único elemento.

A = { Azul }

$$U = \{x | x \text{ é } número\ par\ positivo\ e\ primo\} = \{2\}$$

Conjunto Vazio: não apresenta elemento algum

Indicado por { } ou $\emptyset$

Conjunto Universo: limita os elementos que podem ser soluções de um estudo.

Cores da bandeira do Brasil U = {verde, amarelo, azul e branco}

Subconjuntos

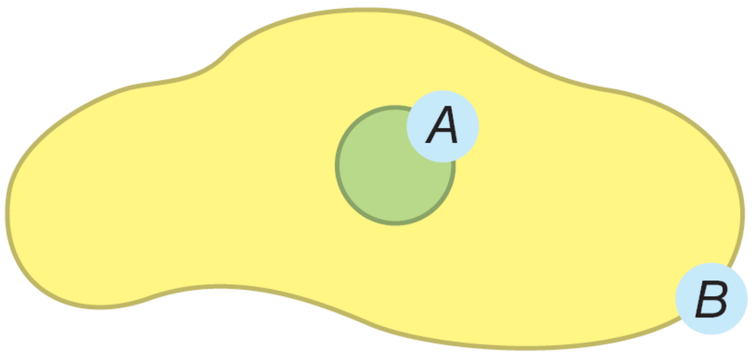
- *A* é subconjunto de *B* se, e somente se, todos os elementos de *A* pertencerem a *B*.
- Podemos dizer a mesma coisa de quatro formas diferentes:

A ***está contido*** em B. $A \subset B$

B ***contém*** A. $B \supset A$

A é ***subconjunto*** de B.

A é ***parte*** de B.



Exemplo

Escrever todos os subconjuntos do conjunto A = {0, 5, 7, 9}.

Subconjunto com nenhum elemento: Ø

Ø é subconjunto de qualquer conjunto.

Subconjuntos com um elemento: {0}; {5}; {7}; {9}

Subconjuntos com dois elementos: {0,5}; {0,7}; {0,9}; {5,7}; {5,9}; {7;9}

Subconjuntos com três elementos: {0,5,7}; {0,5,9}; {0,7,9}; {5,7,9}

Subconjuntos com quatro elementos: {0,5,7,9}

O número total de subconjuntos é igual a 16.

Então se A tem n elementos, A tem 2^n subconjuntos.

Exemplos

1) Dado o conjunto A = {1, {2, 3}, {4}}, julgue se os itens abaixo são verdadeiros ou falsos.

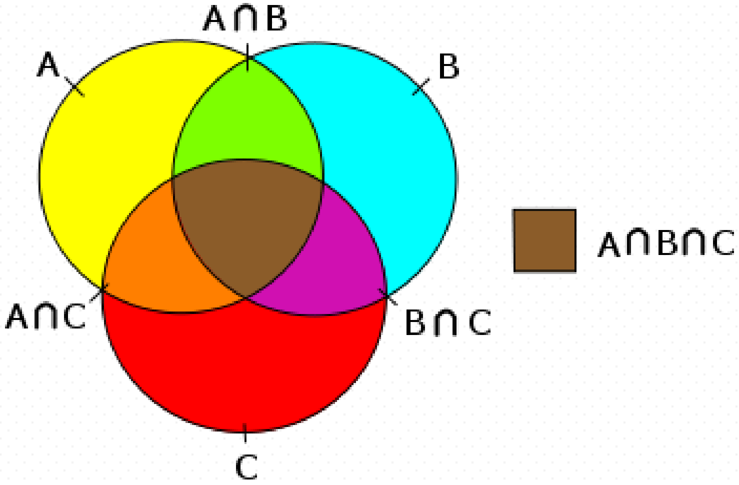
a) $1 \in A$
b) $\{1\} \in A$
c) $1 \subset A$
d) $\{1\} \subset A$
e) $\{2, 3\} \subset A$
f) $\emptyset \in A$

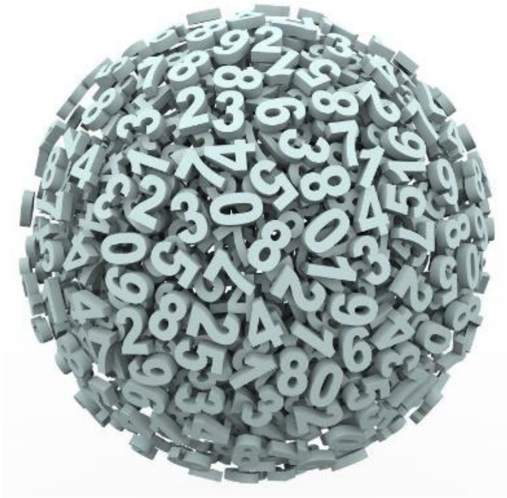
a) **V** pois 1 é elemento de A
b) **F**, pois {1} é subconjunto de A – símbolo $\subset$
c) **F**, pois 1 é elemento de A – símbolo $\in$
d) **V**, pois {1} é subconjunto de A
e) **F**, pois {2, 3} é elemento de A – símbolo $\in$
f) **F**, pois Φ é subconjunto de A – símbolo $\subset$

2) Dados os conjuntos A = {1, 2}, B = {1, 2, 3, 4, 5}, C = {3, 4, 5} e D = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

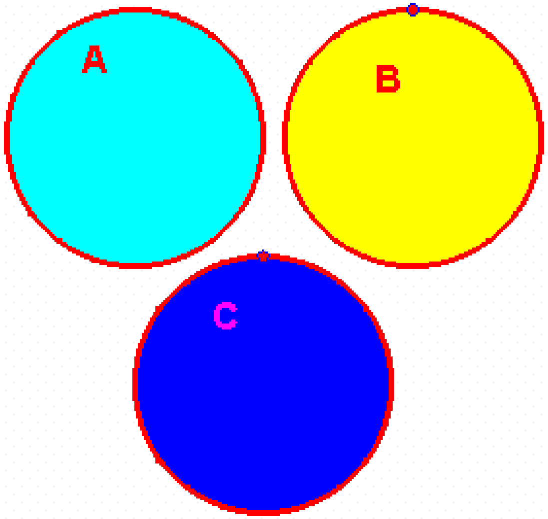
a) (   ) $A \subset B$
b) (   ) $D \subset B$
c) (   ) $A \not\subset D$
d) (   ) $B \subset C$
e) (   ) $B \subset D$
f) (   ) $C \not\subset A$

a) V b) F c) F d) F e) V f) V





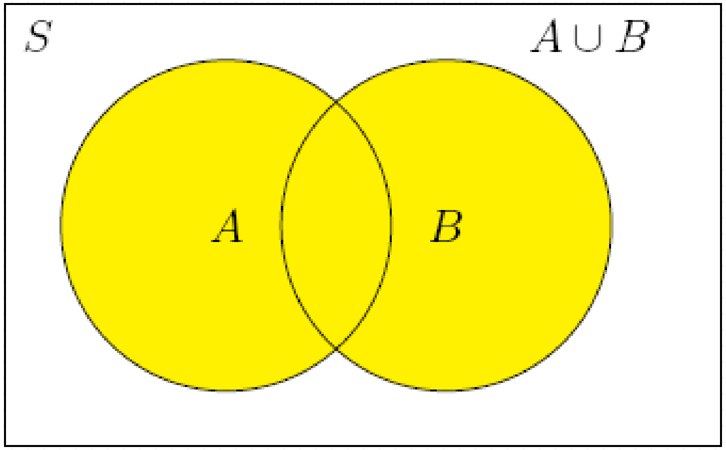
Operações com conjuntos

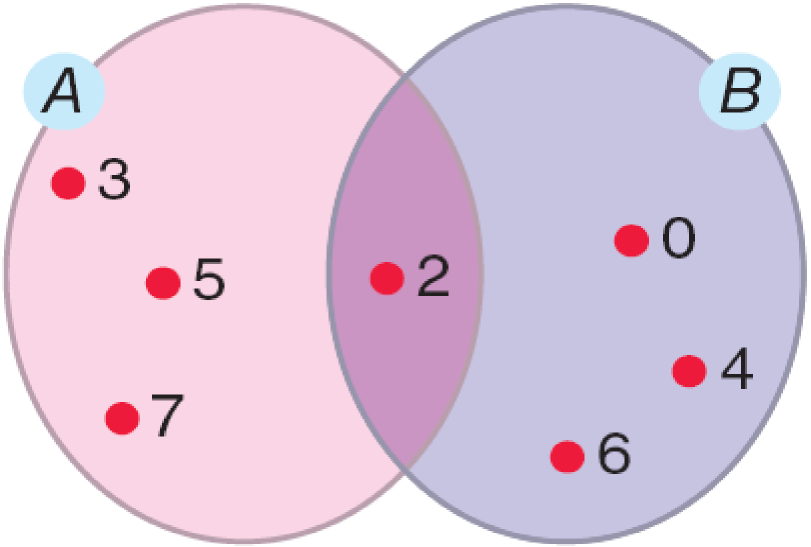


União de Conjuntos

Dados os conjuntos *A* e *B*, a união de *A* e *B* é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *A* **ou** a *B*.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

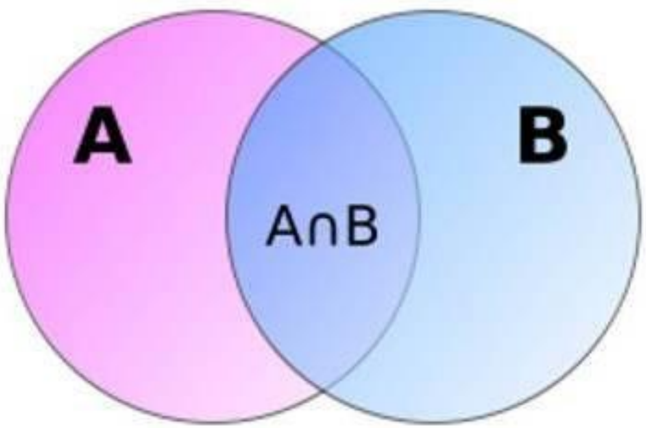


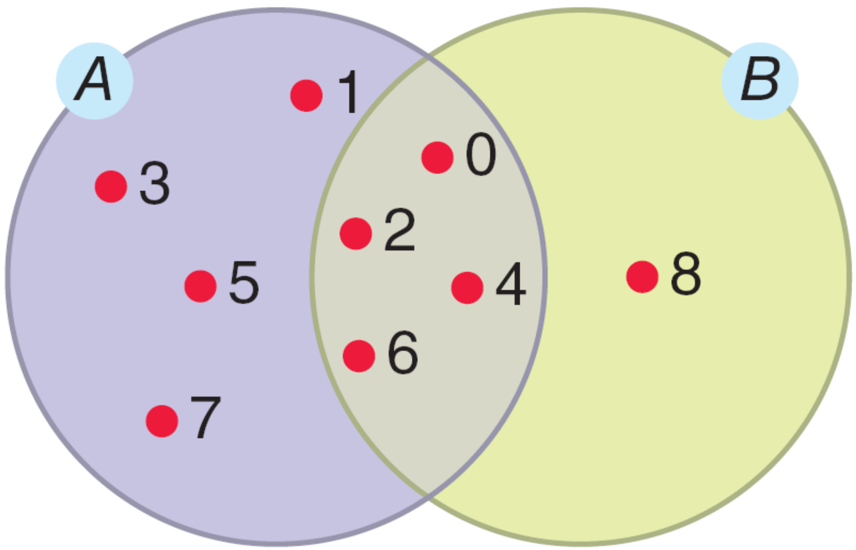


Intersecção de Conjuntos

Dados os conjuntos *A* e *B*, a intersecção de *A* e *B* é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *A* **e** a *B*.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

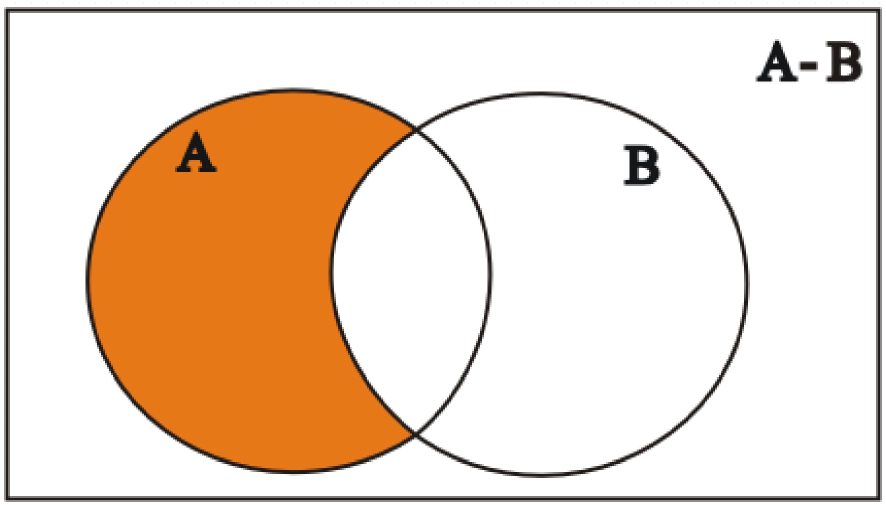


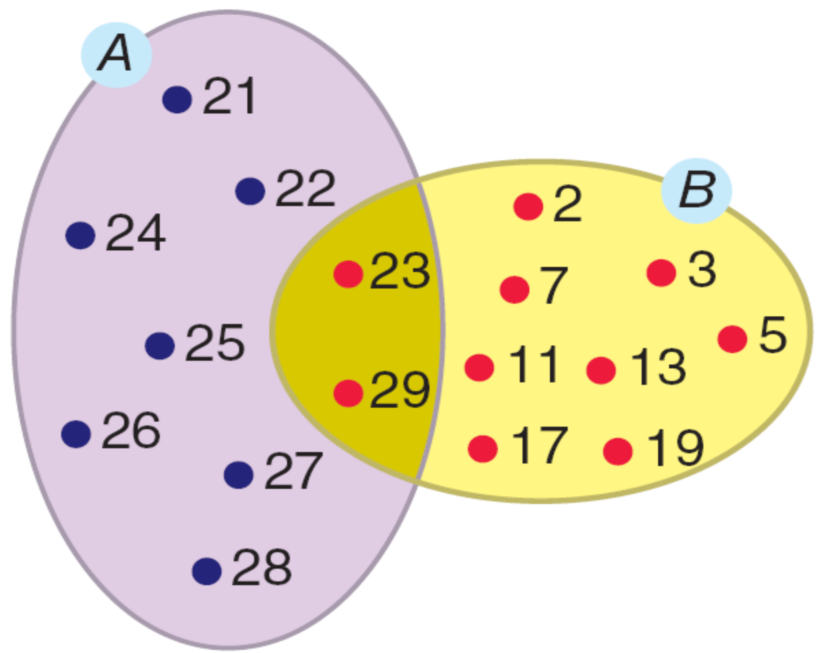


Diferença entre Conjuntos

Dados os conjuntos *A* e *B*, a diferença de *A* e *B* é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *A*, mas não a *B*.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

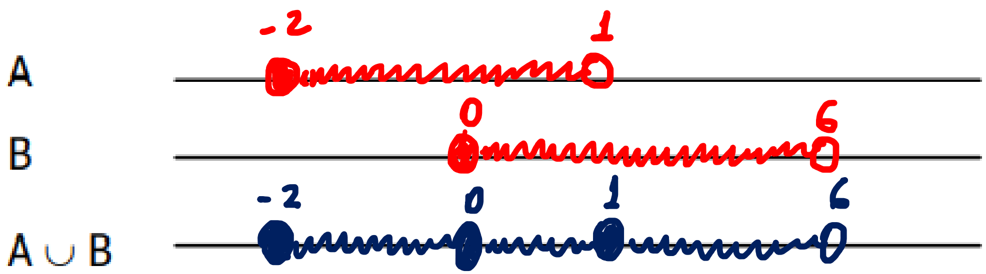




Exemplos

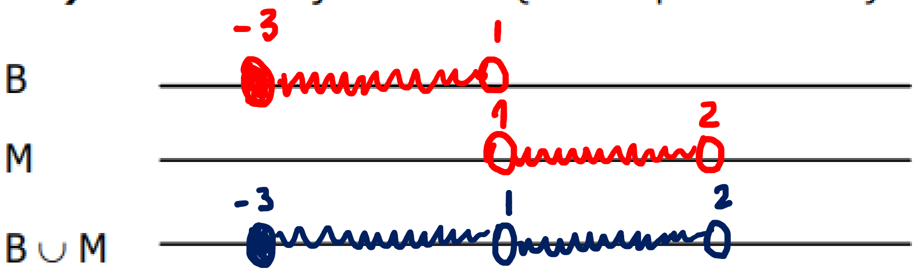
1) União (∪)

1.1) Considerando os conjuntos $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1 \}$ e $B = [\, 0 \,, 6 \,[$, determine $A \cup B$.



Logo: $\mathbf{A \cup B = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 6 \}}$

1.2) Dados os conjuntos $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 1 \}$ e $M = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \}$, calcule $B \cup M$.

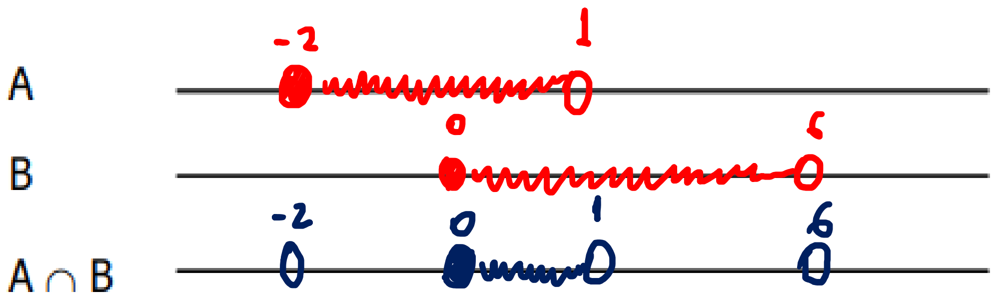


Logo: $\mathbf{B \cup M = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2 \ \text{e} \ x \neq 1 \}}$

Exemplos

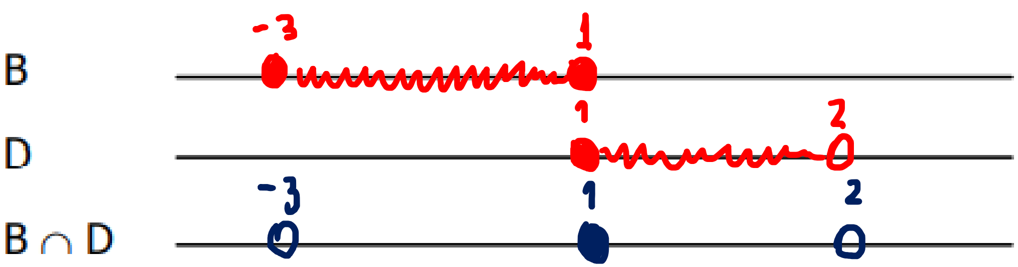
2) Intersecção (∩)

2.1) Considerando os conjuntos $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1 \}$ e $B = [\, 0 , 6 \,[$, determine $A \cap B$.



Logo: $\mathbf{A \cap B = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1 \}}$

2.2) Dados os conjuntos $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1 \}$ e $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2 \}$, calcule $B \cap D$.



Logo: $\mathbf{B \cap D = \{ 1 \}}$

Exemplos

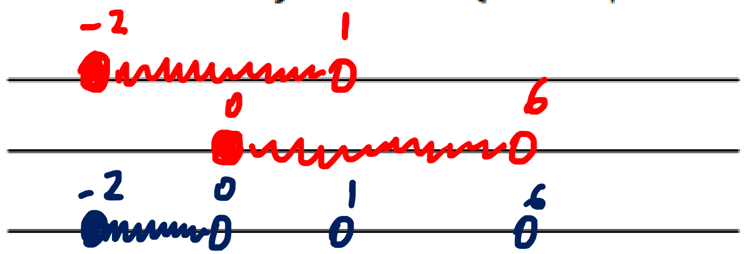
3) Diferença (−)

3.1) Considerando os conjuntos $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1 \}$ e $B = [\, 0 , 6 \,[$, determine $A - B$.

A

B

A − B



Logo: $\mathbf{A - B = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 0 \}}$

4) Misto

4.1) Dados os conjuntos: $A = \,]-\infty , -1\,]$, $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \}$, $C = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \}$ e $D = \,]-2 , 3\,]$, obtenha o conjunto $[(A \cap B) \cup C] - D$.

A

B

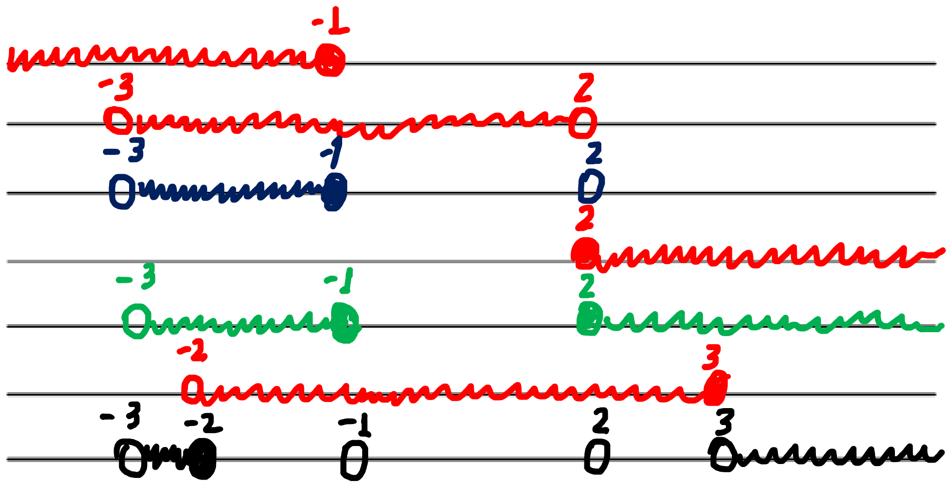
$A \cap B$

C

$(A \cap B) \cup C$

D

$[(A \cap B) \cup C] - D$



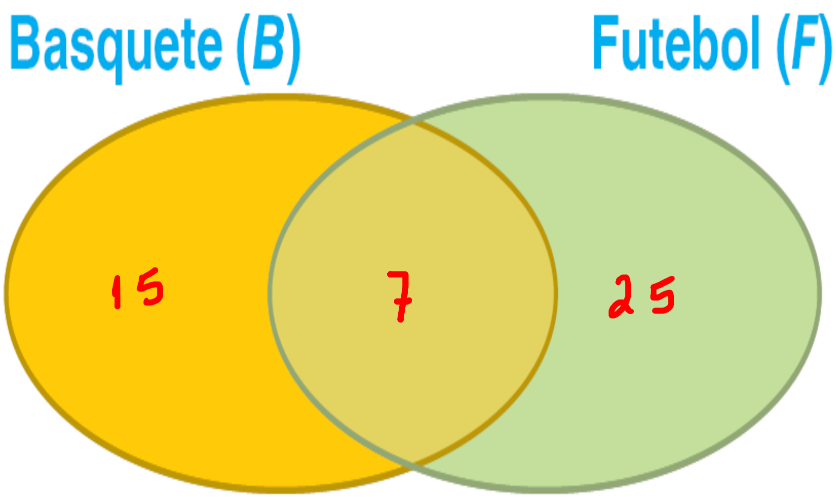
Então: $\mathbf{[(A \cap B) \cup C] - D = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq -2 \text{ ou } x > 3 \}}$

Aplicações

Numa sala de aula:

- ✓ **15** alunos jogam basquete como única atividade esportiva;
- ✓ **25** jogam futebol, também como única atividade esportiva;
- ✓ **7** praticam as duas atividades: basquete e futebol.

Quantos alunos foram pesquisados, sabendo-se que todos optaram pelo menos por um dos dois esportes?



$\Rightarrow 15 + 7 + 25 = \boxed{47}$

Aplicações

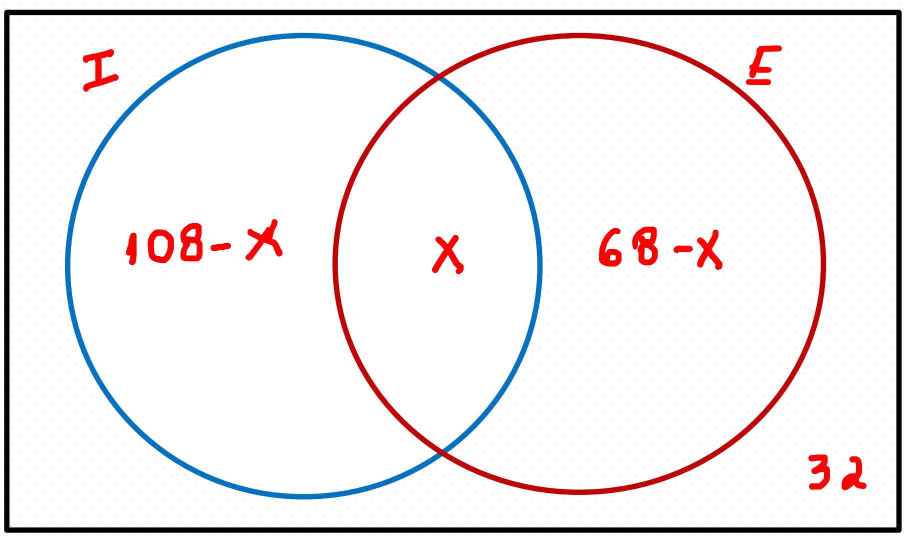
Dos 180 funcionários que trabalham no escritório de uma empresa, precisamente:

✓108 falam inglês;

✓68 falam espanhol;

✓32 não falam inglês nem espanhol.

Quantos funcionários desse escritório falam as duas línguas, inglês e espanhol?



$$(108-x)+(x)+(68-x)+32=180$$

$$108-\cancel{x}+\cancel{x}+68-x+32=180$$

$$208-x=180$$

$$-x=180-208$$

$$\boxed{x=28}$$

Aplicações

Em uma enquete realizada via Internet, os telespectadores de certa emissora manifestaram sua preferência em relação ao programa que gostariam que fosse reprisado: A, B ou C. Os resultados obtidos foram:

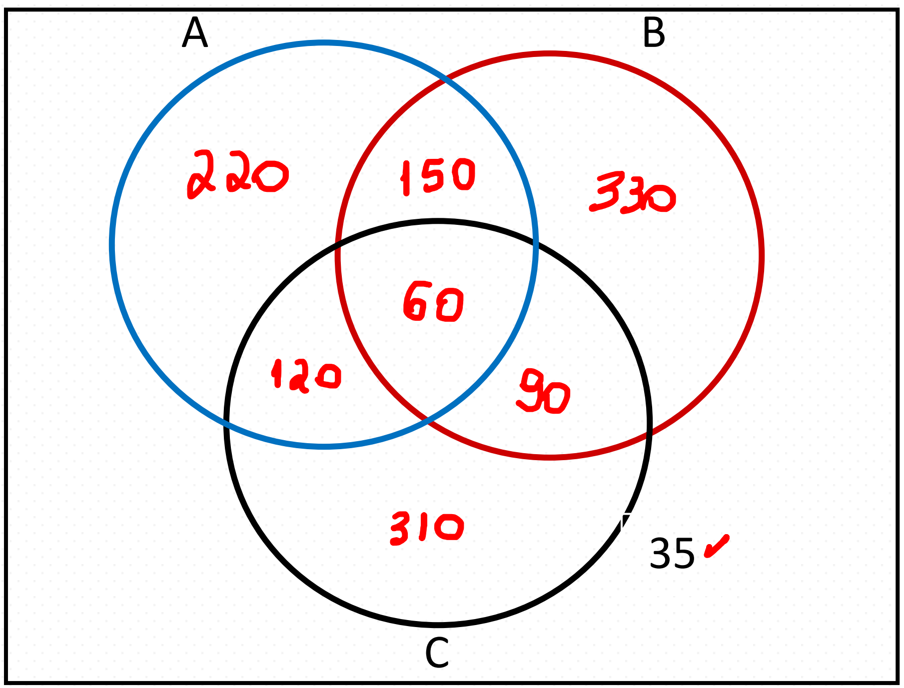
Programas	Quantidade de telespectadores
A	550
B	630
C	580
A e B	210
A e C	180
B e C	150
A , B e C	60
Nenhum	35

Quantos telespectadores participaram dessa enquete?

Aplicações

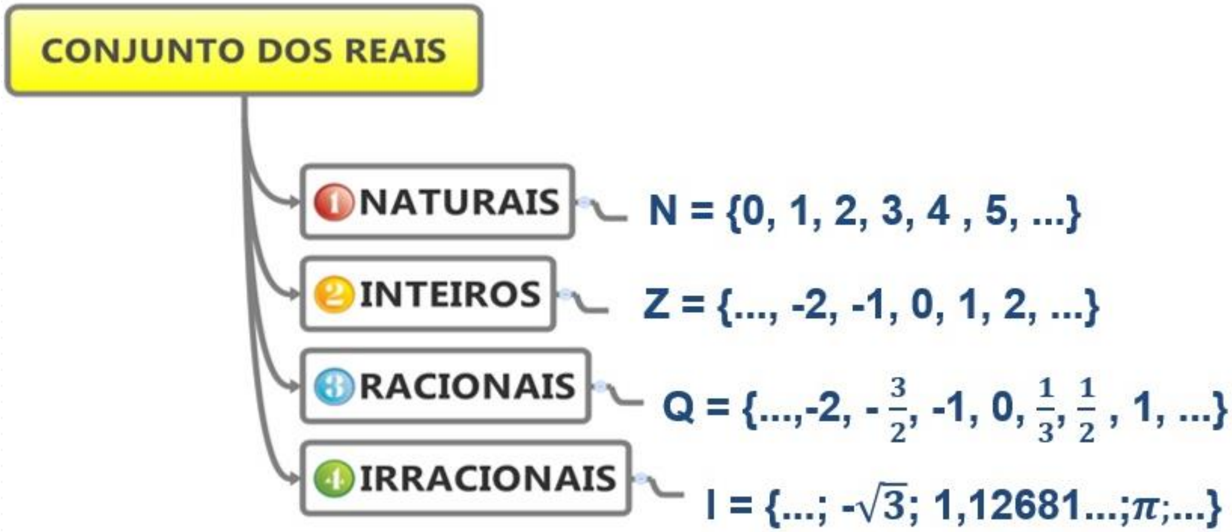
Quantos telespectadores participaram dessa enquete?

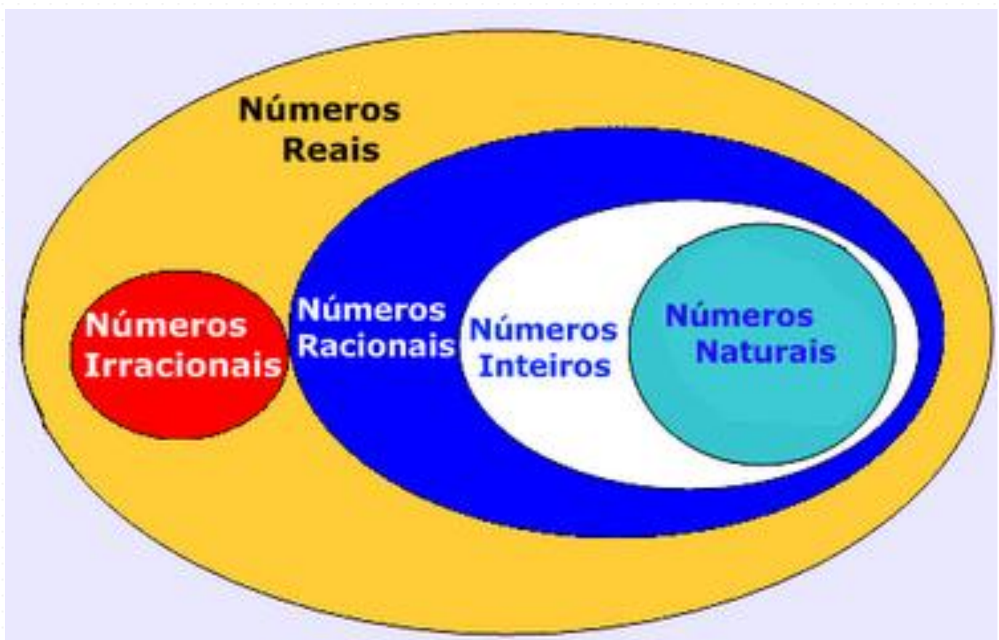
Programas	Qtde
A	550
B	630
C	580
A e B	210
A e C	180
B e C	150
A , B e C	60 ✓
Nenhum	35 ✓



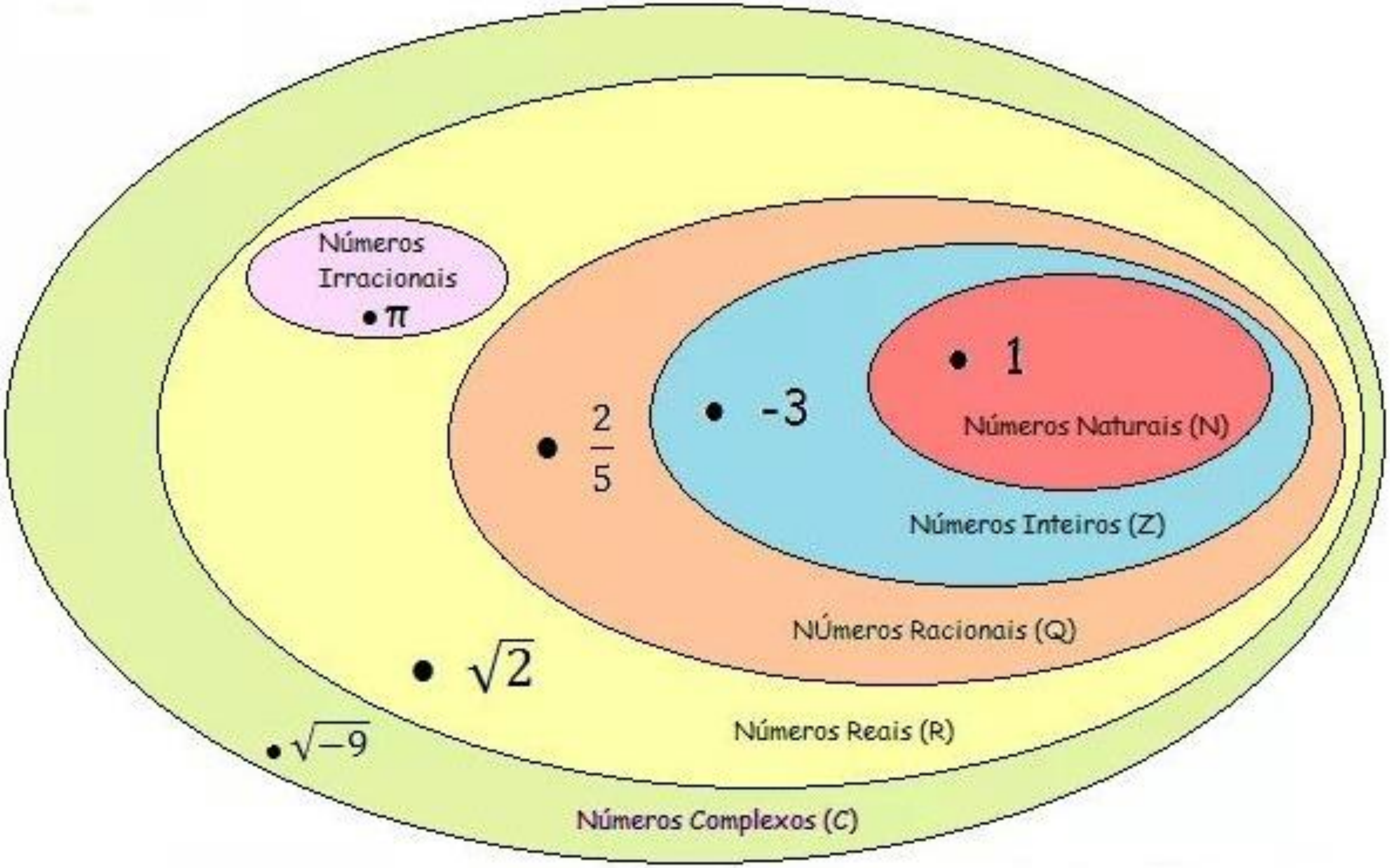
$220 + 330 + 310 + 150 + 90 + 120 + 60 + 35 = \boxed{1315}$

Conjuntos Numéricos





Conjuntos Numéricos



Fonte: Esquema extraído do site Virtual Escola

Conjuntos Numéricos

Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$):

$$\mathbb{Z} = \{..., -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 ,...\} \quad \text{ou} \quad \mathbb{Z} = \{ 0 , \pm1 , \pm2 , \pm3 ,...\}$$

Obs.:

i) Conjunto dos números inteiros não nulos: $\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2 , -1 , 1 , 2 , 3 ,...\}$

ii) Conjunto dos números inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 ,...\}$

iii) Conjunto dos números inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2 , -1 , 0 \}$

iv) Conjunto dos números inteiros positivos: $\mathbb{Z}_+^* = \{ 1 , 2 , 3 , 4 ,...\}$

v) Conjunto dos números inteiros negativos: $\mathbb{Z}_-^* = \{..., -3, -2 , -1 \}$

Intervalos

Intervalos são subconjuntos do $\mathbb{R}$, e podem ser representados através da notação de conjunto, de colchetes ou na reta Real

TIPOS DE INTERVALOS:

1) Intervalos aberto:

Notação de gráfica:

Notação de conjunto: $\{ x \in \mathbb{R} \,/\, 2 < x < 10 \}$

Notação de colchete: $]\,2 , 10\,[$

2) Intervalos fechado:

Notação de gráfica:

Notação de conjunto: $\{ x \in \mathbb{R} \,/\, 2 \leq x \leq 10 \}$

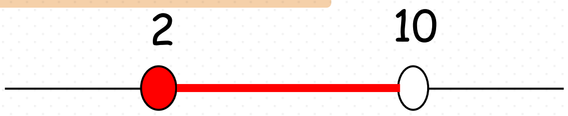
Notação de colchete: $[\,2 , 10\,]$

Intervalos

TIPOS DE INTERVALOS:

3) Intervalos semi-aberto ou semi-fechado:

Notação de gráfica:



Notação de conjunto: $\{ x \in \mathbb{R} \ / \ 2 \leq x < 10 \}$

Notação de colchete: [2 , 10 [

Notação de gráfica:

Notação de conjunto: $\{ x \in \mathbb{R} \ / \ 2 < x \leq 10 \}$

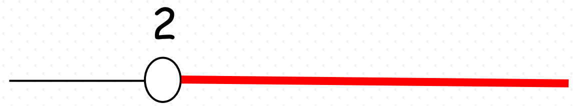
Notação de colchete:] 2 , 10]

Intervalos

TIPOS DE INTERVALOS:

4) Intervalos infinitos:

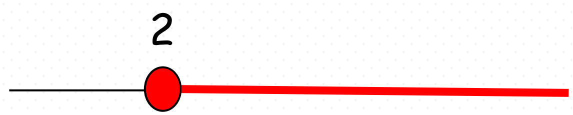
Notação de gráfica:



Notação de conjunto: $\{ x \in \mathbb{R} / \ x > 2 \}$

Notação de colchete: $] 2 , +\infty [$

Notação de gráfica:



Notação de conjunto: $\{ x \in \mathbb{R} / \ x \geq 2 \}$

Notação de colchete: $[2 , +\infty [$

Intervalos

TIPOS DE INTERVALOS:

4) Intervalos infinitos:

Notação de gráfica:

Notação de conjunto: $\{ x \in \mathbb{R} /\ x < 2 \}$

Notação de colchete: $] -\infty , 2 [$

Notação de gráfica:

Notação de conjunto: $\{ x \in \mathbb{R} /\ x \leq 2 \}$

Notação de colchete: $] -\infty , 2]$

Exemplos

1) Represente em cada reta real os intervalos correspondentes:

a) $]-\infty, -1]$ →

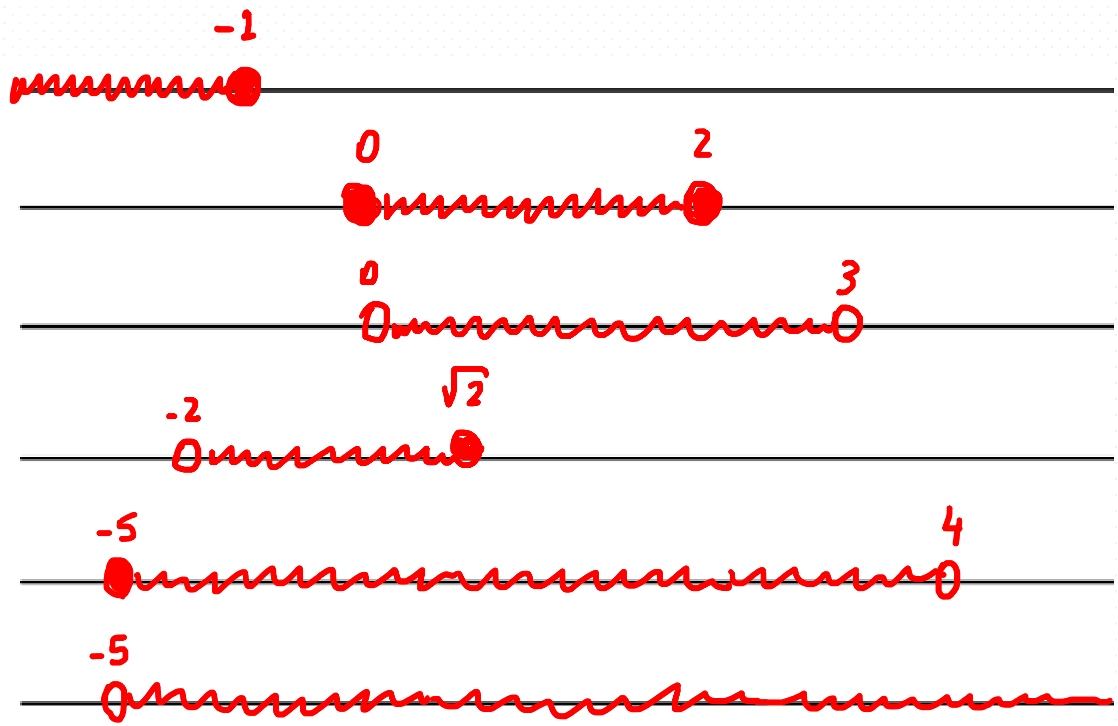
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$ →

c) $]0, 3[$ →

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq \sqrt{2}\}$ →

e) $[-5, 4[$ →

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$ →



Exemplos

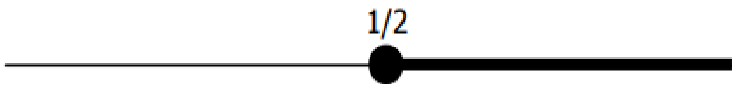
2) Dados os intervalos abaixo, escreva-os em notação de conjunto:

a) 

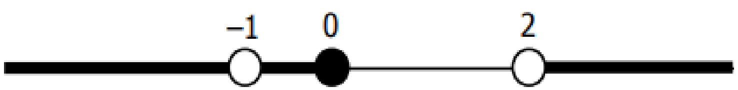
→ $\{ x \in \mathbb{R} / -3 < x < 3 \}$

b) 

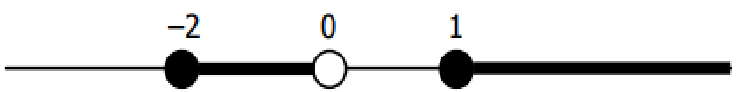
→ $\{ x \in \mathbb{R} / x < 1 \}$

c) 

→ $\{ x \in \mathbb{R} / x \geq 1/2 \}$

d) 

→ $\{ x \in \mathbb{R} / x \leq 0$ ou $x > 2$ e $x \neq -1 \}$

e) 

→ $\{ x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 0$ ou $x \geq 1 \}$