O plano – Propriedades (Exemplos)

Para calcular o ângulo entre os dois planos, será necessário conhecer um vetor normal de cada um dos dois.

Plano π_1:

$$\overrightarrow{n_1} = (-1, -2, -1)$$

Plano π_2:

Não se tem de imediato o vetor normal, porém é possível determinar os vetores base do plano

$$\overrightarrow{v_1} = (-1,1,-1)$$

$$\overrightarrow{v_2} = (0,1,1)$$

Um vetor normal pode então ser obtido com

$$\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$$

$$\overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo 01: Determine o ângulo entre os planos $\pi_1: -x - 2y - z + 10 = 0$ e

$$\pi_2: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t + h \\ z = -t + h \end{cases}$$

$$\overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_2} = \vec{i} - \vec{k} + \vec{i} + \vec{j}$$

$$\overrightarrow{n_2} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\overrightarrow{n_2} = (2,1,-1)$$

De posse de ambos vetores normais, é possível calcular o ângulo entre os planos através de

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$

Resolvendo primeiro cada um de seus termos separadamente,

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = (-1,-2,-1) \cdot (2,1,-1)$$

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = -1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1(-1)$$

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = -3$$

Exemplo 01: Determine o ângulo entre os planos $\pi_1: -x - 2y - z + 10 = 0$ e

$$\pi_2: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t + h \\ z = -t + h \end{cases}$$

$$|\overrightarrow{n_1}| = \sqrt{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_1}}$$

$$|\overrightarrow{n_1}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}$$

$$|\overrightarrow{n_1}| = \sqrt{6}$$

$$|\overrightarrow{n_2}| = \sqrt{\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{n_2}}$$

$$|\overrightarrow{n_2}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}$$

$$|\overrightarrow{n_2}| = \sqrt{6}$$

Voltando para a fórmula do ângulo,

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$

$$\cos\theta = \frac{|-3|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Assim,

$$\theta = \frac{\pi}{3}\ \text{rad}$$

Exemplo 01: Determine o ângulo entre os planos $\pi_1: -x - 2y - z + 10 = 0$ e

$$\pi_2: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t + h \\ z = -t + h \end{cases}$$

Para que sejam paralelos, os vetores normais aos planos devem obedecer a condição de paralelismo.

Obtendo inicialmente os vetores normais:

Plano π_1:

$$\overrightarrow{n_1} = (a, b, 4)$$

Plano π_2:

$$\overrightarrow{n_2} = (3, -5, -2)$$

Como se assume que os planos são paralelos, pela condição de paralelismo tem-se

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{-5} = \frac{4}{-2}$$

Analisando termo a termo,

$$\frac{a}{3} = -2 \Rightarrow a = -6$$

$$\frac{b}{-5} = -2 \Rightarrow b = 10$$

Exemplo 02: Determinar a e b de modo que os planos $\pi_1: ax + by + 4z - 1 = 0$ e $\pi_2: 3x - 5y - 2z + 5 = 0$ sejam paralelos.

Para garantir que os planos se intersecionam, basta mostrar que eles não são paralelos!

Obtendo os vetores normais para esta análise:

Plano π_1:

$$\overrightarrow{n_1} = (5, -2, 1)$$

Plano π_2:

$$\overrightarrow{n_2} = (3, -3, 1)$$

Aplicando a condição de paralelismo,

$$\frac{5}{3} \neq \frac{-2}{-3} \neq \frac{1}{1}$$

Assim, pode-se afirmar que os planos não são paralelos e, por extensão, se intersecionam.

Para a interseção, apresentam-se as duas metodologias indicadas na videoaula. Lembrem-se que a interseção de dois planos não paralelos é uma **reta!**

Exemplo 03: Os planos $\pi_1: 5x - 2y + z + 7 = 0$ e $\pi_2: 3x - 3y + z + 4 = 0$ se intersecionam? Em caso positivo, calcule a interseção.

Método 1) Resolução do sistema linear diretamente

$$r: \begin{cases} 5x - 2y + z + 7 = 0 \\ 3x - 3y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 2y + z + 7 = 0 \\ 3x - 3y + z + 4 = 0 \quad \times (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 2y + z + 7 = 0 \\ -3x + 3y - z - 4 = 0 \end{cases} +$$

$$2x + y + 3 = 0$$

Escolhendo x como a variável livre, tem-se a primeira das equações reduzidas:

$$y = -2x - 3$$

Voltando em uma das equações gerais do plano e fazendo esta substituição,

$$5x - 2(-2x - 3) + z + 7 = 0$$

$$5x + 4x + 6 + z + 7 = 0$$

$$z = -9x - 13$$

Exemplo 03: Os planos $\pi_1: 5x - 2y + z + 7 = 0$ e $\pi_2: 3x - 3y + z + 4 = 0$ se intersecionam? Em caso positivo, calcule a interseção.

Assim, as equações reduzidas da reta interseção são

$$r: \begin{cases} y = -2x - 3 \\ z = -9x - 13 \end{cases}$$

Observação: Como a interseção de dois planos não paralelos é sempre uma reta, é muito comum apresentar uma reta através de um sistema cujas equações representam planos.
Neste exercício, foi o caso de

$$r: \begin{cases} 5x - 2y + z + 7 = 0 \\ 3x - 3y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

Método 2) Encontrar um ponto e um vetor diretor da reta interseção

Para o ponto, escolhe-se um valor arbitrário para uma das variáveis e calcula-se as outras duas com o sistema resultante.

Escolhendo $x = 0$, o sistema fica

$$A: \begin{cases} -2y + z + 7 = 0 \\ -3y + z + 4 = 0 \times (-1) \end{cases}$$

Exemplo 03: Os planos $\pi_1: 5x - 2y + z + 7 = 0$ e $\pi_2: 3x - 3y + z + 4 = 0$ se intersecionam? Em caso positivo, calcule a interseção.

$$A: \begin{cases} -2y + z + 7 = 0 \\ \quad 3y - z - 4 = 0 \end{cases} \quad +$$

$$y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3$$

$$-2(-3) + z + 7 = 0 \Rightarrow z = -13$$

Assim, um ponto da reta é $A(0, -3, -13)$.

Para o vetor diretor da reta interseção, faz-se

$$\vec{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 15\vec{k} + 6\vec{k} + 3\vec{i} - 5\vec{j}$$

$$\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} - 9\vec{k} = (1, -2, -9)$$

As equações paramétricas, por exemplo, da reta interseção serão

$$\begin{cases} x = t \\ y = -3 - 2t \\ z = -13 - 9t \end{cases}$$

Exemplo 03: Os planos $\pi_1: 5x - 2y + z + 7 = 0$ e $\pi_2: 3x - 3y + z + 4 = 0$ se intersecionam? Em caso positivo, calcule a interseção.

Alternativa a)

Para calcular o ângulo, serão necessários um vetor diretor da reta e um vetor normal ao plano. Obtendo estes dados:

Reta r:

$$\vec{v} = (-2, -1, 1)$$

Plano π:

$$\vec{n} = (1, 1, 0)$$

O ângulo ϕ entre o plano e a reta é então dado por

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|}$$

Resolvendo primeiro cada um de seus termos separadamente,

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (-2, -1, 1) \cdot (1, 1, 0)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = -2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = -3$$

Exemplo 04: Dados a reta $r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -t \\ z = 3 + t \end{cases}$ e o plano $\pi: x + y - 7 = 0$, determinar:

a) o ângulo formado entre eles e b) a interseção entre eles.

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{6}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{\vec{n} \cdot \vec{n}}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{2}$$

Voltando para a fórmula do ângulo,

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|}$$

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{|-3|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim,

$$\phi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Exemplo 04: Dados a reta $r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -t \\ z = 3 + t \end{cases}$ e o plano $\pi: x + y - 7 = 0$, determinar:

a) o ângulo formado entre eles e b) a interseção entre eles.

Alternativa b)

Neste caso, basta montar e resolver um sistema linear com as equações da reta e do plano. Lembre-se que a interseção de uma reta com um plano não paralelo é um...

ponto!

$$I: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -t \\ z = 3 + t \\ x + y - 7 = 0 \end{cases}$$

Substituindo as equações paramétricas da reta na equação geral do plano, tem-se

$$(1 - 2t) + (-t) - 7 = 0$$

$$-3t = 6 \Rightarrow t = -2$$

Assim,

$$x = 1 - 2t = 1 - 2(-2) = 5$$
$$y = -t = 2$$
$$z = 3 + t = 3 - 2 = 1$$

Ou seja, a interseção é o ponto $I(5,2,1)$.

Exemplo 04: Dados a reta $r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -t \\ z = 3 + t \end{cases}$ e o plano $\pi: x + y - 7 = 0$, determinar:

a) o ângulo formado entre eles e b) a interseção entre eles.

De um slide extra acrescentado nos slides da videoaula de propriedades do plano...

Para que a reta r esteja **contida** no plano π,

i. r deve ser paralela a π;
ii. um ponto $\mathrm{A} \in r$ também deve pertencer ao plano.

Extraindo os dados:
Reta r:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = -2t - 1 \end{cases}$$

$$\vec{v} = (1,1 - 2)$$
$$A(1,0,-1)$$

Plano π:

$$\vec{n} = (m, n, 2)$$

Exemplo 05: Determinar os valores de m e n para que a reta r: $\begin{cases} x = y + 1 \\ z = -2y - 1 \end{cases}$ esteja contida no plano π: $mx + ny + 2z - 1 = 0$.

Para que a reta e o plano sejam paralelos, o vetor diretor e o vetor normal devem ser ortogonais. Assim,

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(1,1,-2) \cdot (m, n, 2) = 0$$

$$m + n - 4 = 0$$

Ao exigir que o ponto A pertença ao plano,

$$m \cdot 1 + n \cdot 0 + 2(-1) - 1 = 0$$

$$m - 3 = 0$$

$$m = 3$$

Como, do paralelismo, tem-se

$$m + n - 4 = 0$$

$$3 + n - 4 = 0 \Rightarrow n = 1$$

Exemplo 05: Determinar os valores de m e n para que a reta $r: \begin{cases} x = y + 1 \\ z = -2y - 1 \end{cases}$ esteja contida no plano $\pi: mx + ny + 2z - 1 = 0$.

Para que uma reta e um plano sejam ortogonais, o vetor diretor da reta deve ser PARALELO ao vetor normal do plano.
Obtendo estes dados:

Reta r:

$$\vec{v} = (3, -2, -1)$$

Plano π:

$$\vec{n} = (9, -6, -3)$$

Note que $\vec{n} = 3\vec{v}$. Ou seja, $\vec{n}$ e $\vec{v}$ são colineares.

Observação: Outra maneira de visualizar a colinearidade seria com

$$\frac{3}{9} = \frac{-2}{-6} = \frac{-1}{-3}$$

Como $\vec{n}$ e $\vec{v}$ são colineares, conclui-se que π e r são perpendiculares.

Exemplo 06: Verificar se o plano $\pi: 9x - 6y - 3z + 5 = 0$ é perpendicular à reta

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$$

Dúvidas?