Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral

Funções

Prof. Dani Prestini

UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Funções e suas Propriedades

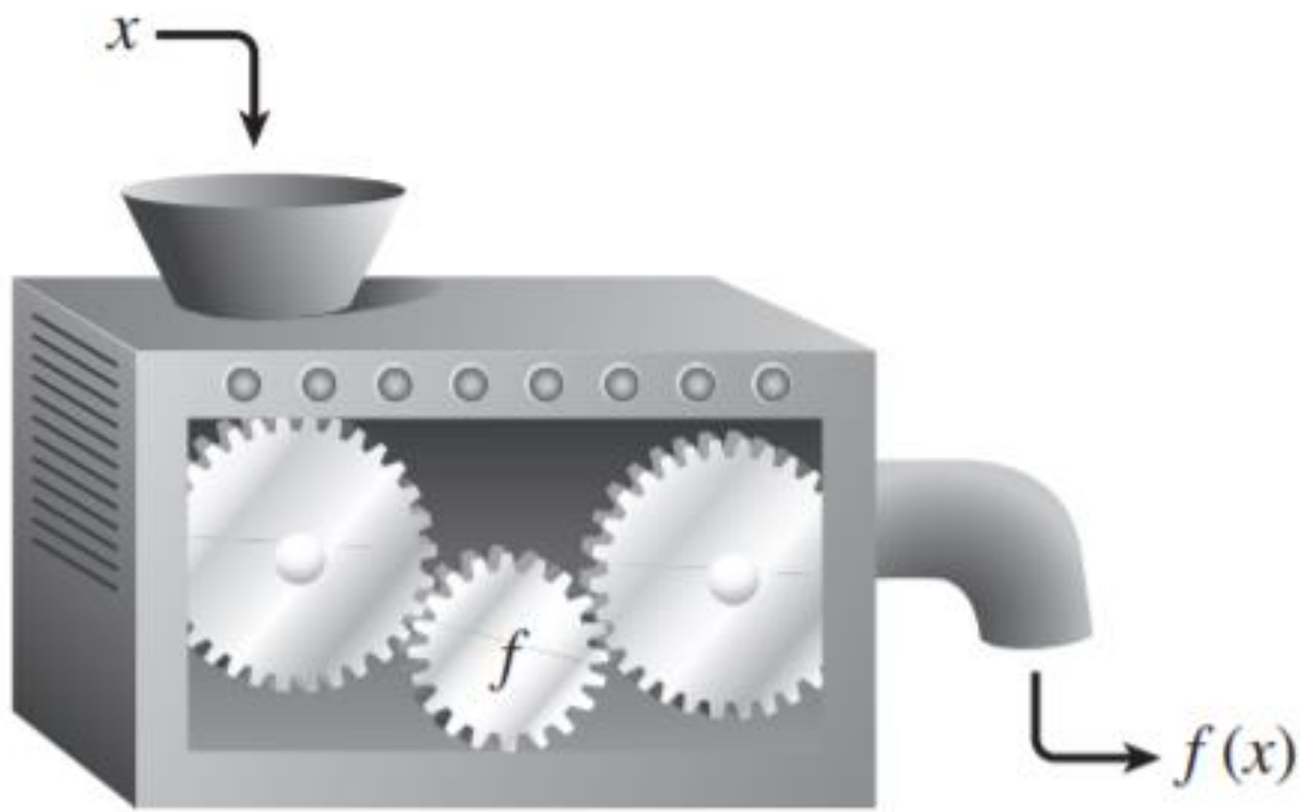
Definição de Função e Notação

DEFINIÇÃO Função, conjunto domínio (ou simplesmente domínio) e conjunto imagem (ou simplesmente imagem)

Uma função de um conjunto A em um conjunto B é uma lei, isto é, uma regra de formação que associa todo elemento em A a um único elemento em B. Sendo assim, o conjunto A é o **domínio** da função, e o conjunto B, formado por todos os valores produzidos por essa associação, é o conjunto **imagem**. Essa mesma função pode ser definida para um conjunto A em um conjunto C, de modo que esse conjunto C não seja o conjunto imagem, e sim um conjunto que contém os elementos do conjunto imagem. Esse conjunto C é então conhecido como **contradomínio**. Neste texto, falaremos da função definida por um conjunto em outro, sendo o segundo considerado o conjunto imagem.

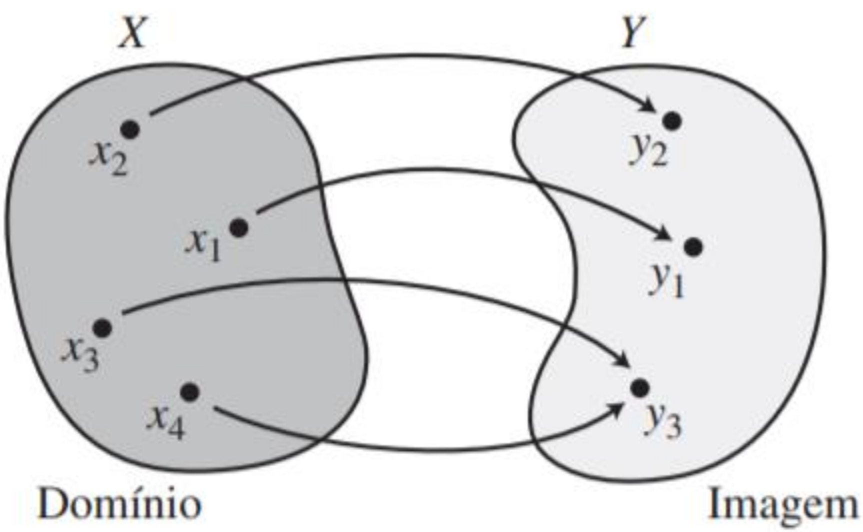
Funções e suas Propriedades

Definição de Função e Notação

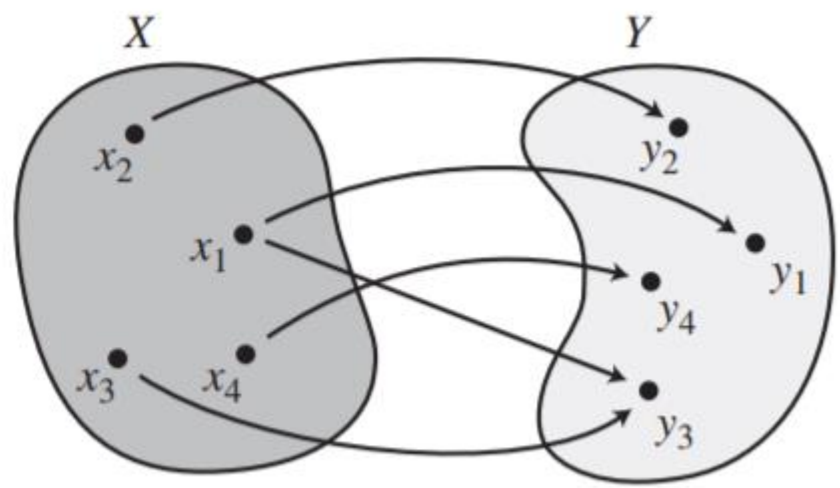


Funções e suas Propriedades

Definição de Função e Notação



Uma função

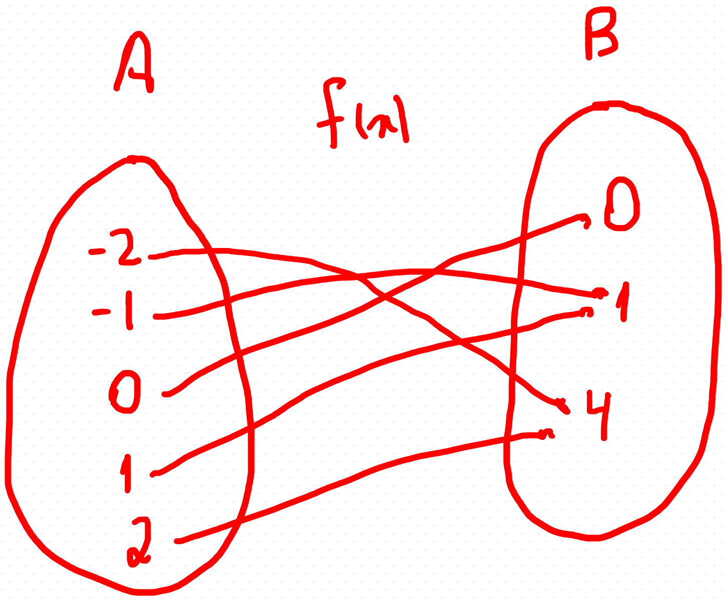


Não é uma função

Funções e suas Propriedades

Definição de Função e Notação

Exemplo 1 – A fórmula $y = x^2$ define y como uma função de x?

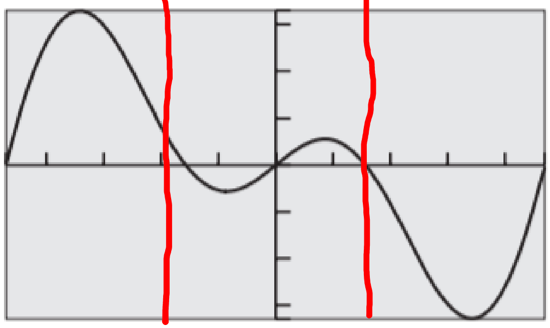


é função

Funções e suas Propriedades

Definição de Função e Notação

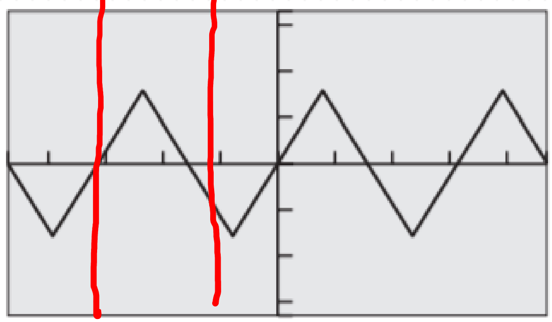
Exemplo 2 – Dos três gráficos mostrados na figura abaixo, qual deles não é gráfico de uma função? Como podemos explicar?



[−4,7; 4,7] por [−3,3; 3,3]

a)

$f(x)$



[−4,7; 4,7] por [−3,3; 3,3]

b)

$f(x)$

[−4,7; 4,7] por [−3,3; 3,3]

c) não é

Funções e suas Propriedades

Domínio e Imagem

Exemplo 3 – Encontre o domínio de cada função:

(a) $f(x) = \sqrt{x+3}$

(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-5}$

(c) $A(s) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}s^2$, onde $A(s)$ é a área de um triângulo equilátero com lados de comprimento s.

a) $x + 3 \geq 0$

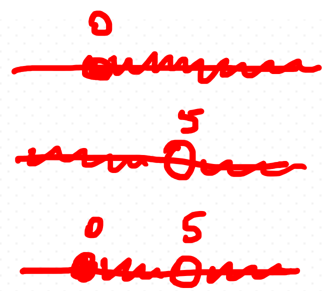
$x \geq -3$

$D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -3\}$

b) $x \geq 0$

$x - 5 \neq 0$

$x \neq 5$



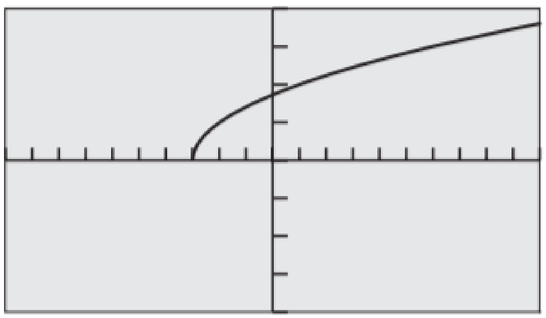
$D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ e } x \neq 5\}$

c) $s \geq 0$

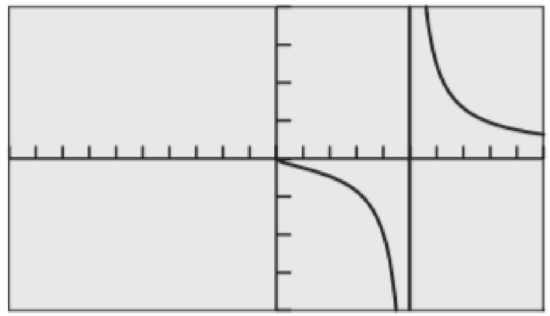
Funções e suas Propriedades

Domínio e Imagem

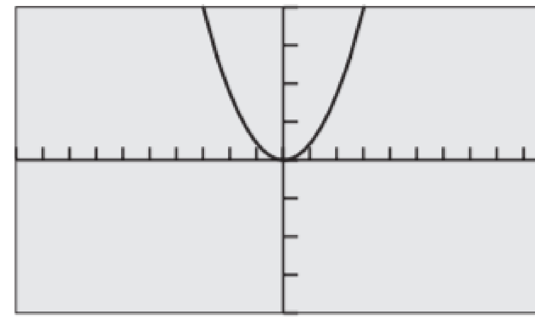
Exemplo 3 – Encontre o domínio de cada função:



[−10, 10] por [−4, 4]
(a)



[−10, 10] por [−4, 4]
(b)

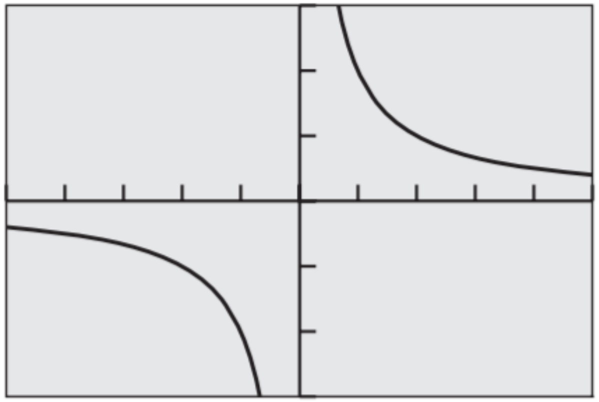


[−10, 10] por [−4, 4]
(c)

Funções e suas Propriedades

Domínio e Imagem

Exemplo 4 – Encontre a imagem da função $f(x) = \frac{2}{x}$



[−5, 5] por [−3, 3]

$\frac{2}{x} = k$

$x = \frac{2}{k}$

$k \neq 0$

$Im = \{y \in \mathbb{R} / y \neq 0\}$

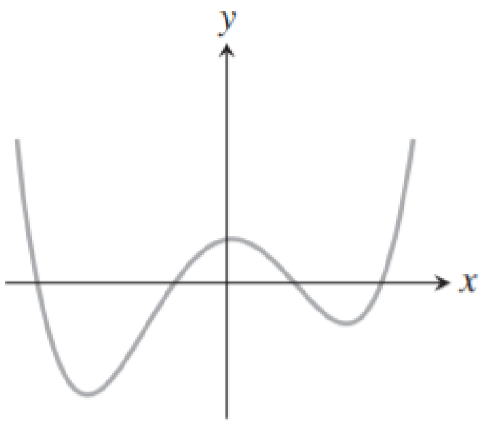
Funções e suas Propriedades

Continuidade de uma função

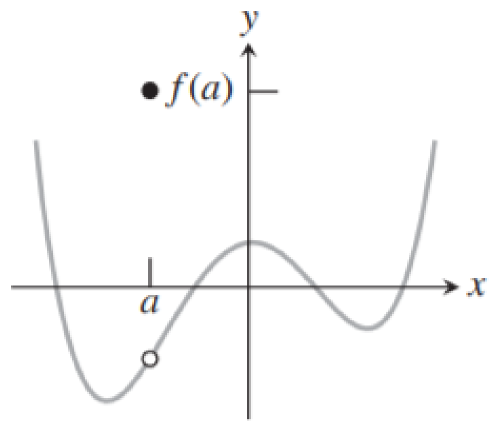
Graficamente falando, diz-se que uma função é contínua em um ponto se o gráfico não apresenta falha (do tipo “quebra”, “pulo” etc.). Essa é uma das mais importantes propriedades da maioria das funções. Podemos ilustrar o conceito com exemplos de gráficos.

Funções e suas Propriedades

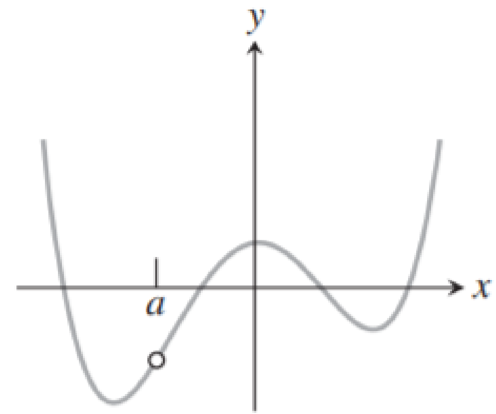
Continuidade de uma função



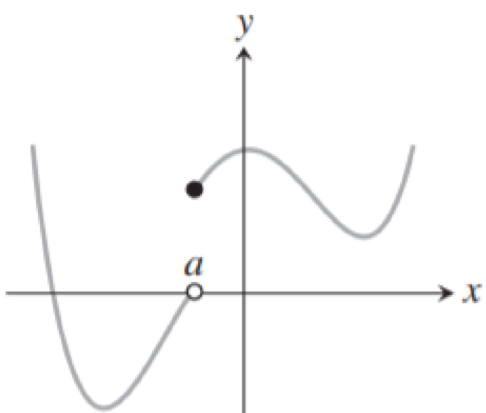
Continuidade em todos os valores x



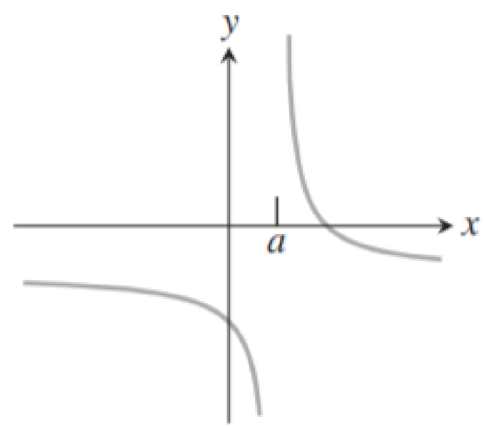
Descontinuidade removível



Descontinuidade removível



Descontinuidade de pulo (ou salto)

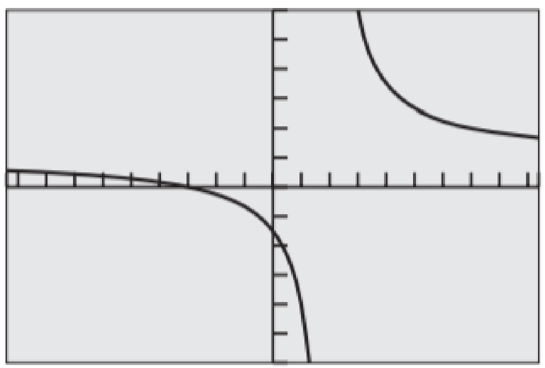


Descontinuidade infinita

Funções e suas Propriedades

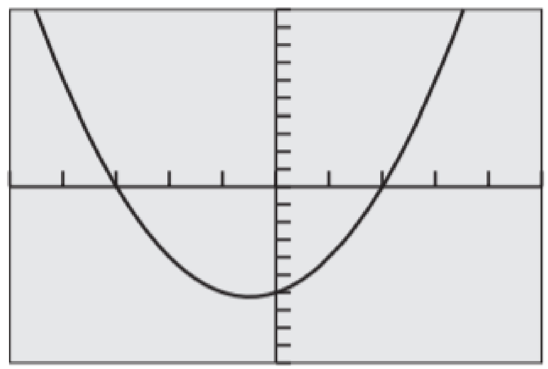
Continuidade de uma função

Exemplo 5 – Analise os gráficos e verifique qual das seguintes figuras mostra funções descontínuas em $x = 2$. Indique se a descontinuidade apresentada é do tipo removível.



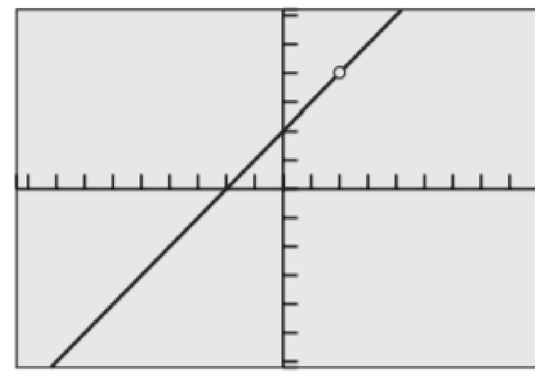
$[-9{,}4; 9{,}4]$ por $[-6, 6]$

Figura 7.7 $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$.



$[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

Figura 7.8 $g(x) = (x + 3)(x - 2)$.

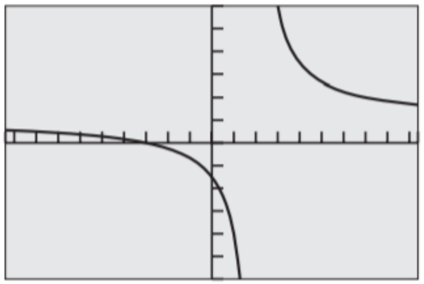


$[-9{,}4; 9{,}4]$ por $[-6{,}2; 6{,}2]$

Figura 7.9 $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

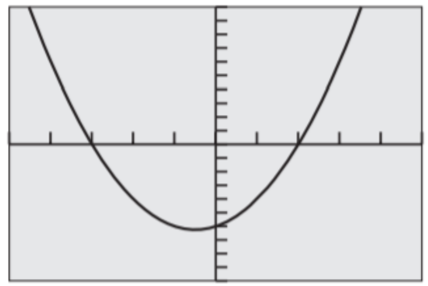
Funções e suas Propriedades

Continuidade de uma função



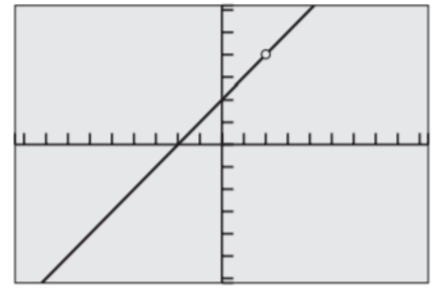
[−9,4; 9,4] por [−6, 6]

Figura 7.7 $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$.



[−5, 5] por [−10, 10]

Figura 7.8 $g(x) = (x+3)(x-2)$.



[−9,4; 9,4] por [−6,2; 6,2]

Figura 7.9 $h(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

A Figura 7.7 mostra uma função que não está definida em $x = 2$ e, portanto, não é contínua para esse valor. A descontinuidade em $x = 2$ não é removível, sendo do tipo descontinuidade infinita.

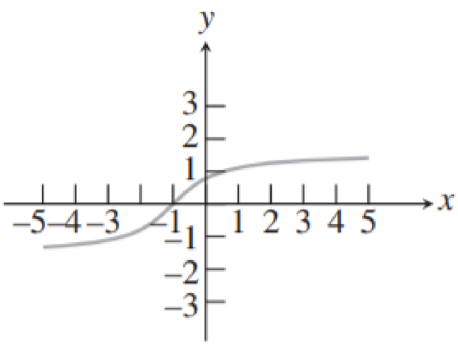
O gráfico da Figura 7.8 é de uma função do segundo grau cuja representação é uma parábola, ou seja, é um gráfico que não tem "quebra" porque seu domínio inclui todos os números reais. É contínua para todo x.

O gráfico da Figura 7.9 é de uma função que não está definida em $x = 2$ e, consequentemente, não é contínua para esse valor. O gráfico parece uma reta, que é a representação de uma função do primeiro grau, dada por $y = x + 2$, com exceção de um "buraco" no local do ponto (2, 4). Essa é uma descontinuidade removível.

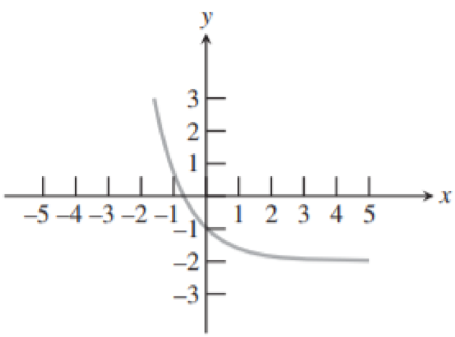
Funções e suas Propriedades

Funções Crescentes e Decrescentes

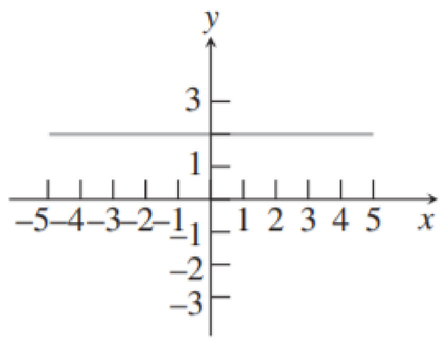
Outro conceito de função, fácil de entender graficamente, é a propriedade de ser crescente, decrescente ou constante sobre um intervalo. Ilustramos o conceito com alguns exemplos de gráficos:



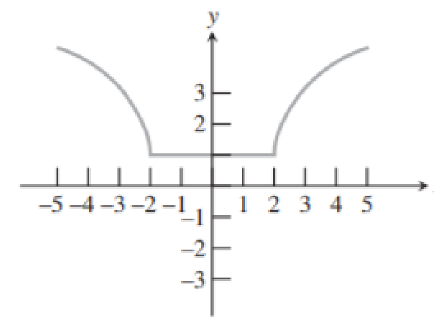
Crescente



Decrescente



Constante



Decrescente em $]-\infty, -2]$
Constante em $[-2, 2]$
Crescente em $[2, +\infty[$

Funções e suas Propriedades

Funções Crescentes e Decrescentes

Exemplo 6 – Das três tabelas de dados numéricos abaixo, qual poderia ser modelada por uma função que seja (a) crescente, (b) decrescente ou (c) constante?

x	$y1$
–2	12
–1	12
0	12
1	12
3	12
7	12

c

x	$y2$
–2	3
–1	1
0	0
1	–2
3	–6
7	–12

b

x	$y3$
–2	–5
–1	–3
0	–1
1	1
3	4
7	10

a

Funções e suas Propriedades

Funções Crescentes e Decrescentes

DEFINIÇÃO Funções crescente, decrescente e constante sobre um intervalo

Uma função f é **crescente** sobre um intervalo se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação positiva em $f(x)$. Isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (ou seja, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$). Quando isso ocorre para todos os valores x do domínio f, dizemos que a função é estritamente crescente.

Uma função f é **decrescente** sobre um intervalo se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação negativa em $f(x)$. Isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (ou seja, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$). Quando isso ocorre para todos os valores x do domínio f, dizemos que a função é estritamente decrescente.

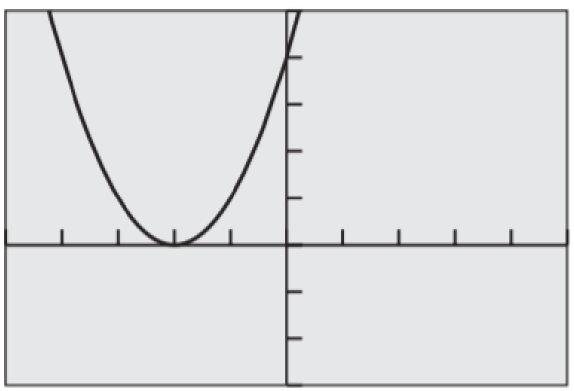
Uma função f é **constante** sobre um intervalo se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação nula em $f(x)$. Isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (ou seja, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$).

Funções e suas Propriedades

Funções Crescentes e Decrescentes

Exemplo 8 – Para cada caso, verifique se a função é crescente ou decrescente em cada um dos seus intervalos.

(a) $f(x) = (x + 2)^2$

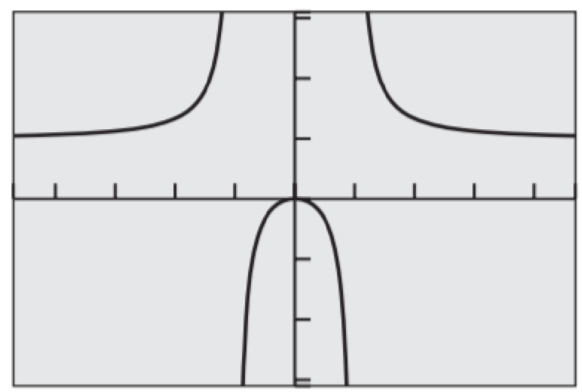


$[-5, 5]$ por $[-3, 5]$

$]-\infty, -2] \to$ Decrescente

$[-2, +\infty[\to$ Crescente

(b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$



$[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-3{,}1; 3{,}1]$

$]-\infty, -1[\to$ Crescente

$]-1, 0] \to$ "

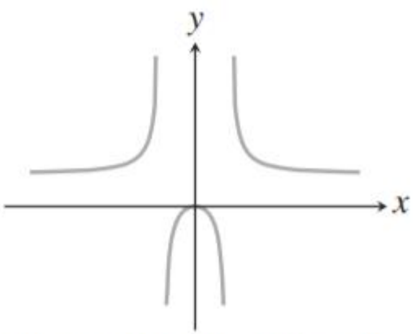
$[0, 1[\to$ Decrescente

$]1, +\infty[\to$ "

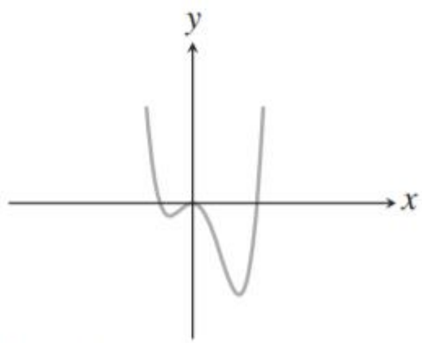
Funções e suas Propriedades

Funções Limitadas

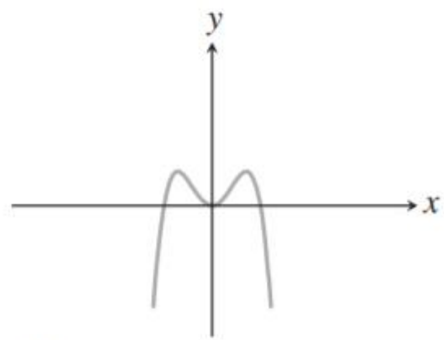
O conceito de função limitada é simples de entender, tanto gráfica como algebricamente. Veremos a definição algébrica após introduzirmos o conceito com alguns gráficos típicos.



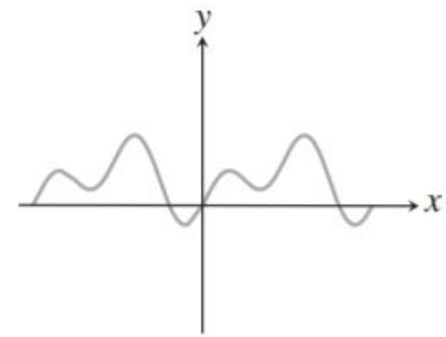
Não limitado superiormente
Não limitado inferiormente



Não limitado superiormente
Limitado inferiormente



Limitado superiormente
Não limitado inferiormente



Limitado

Funções e suas Propriedades

Funções Limitadas

DEFINIÇÃO Limite inferior e limite superior da função e da função limitada

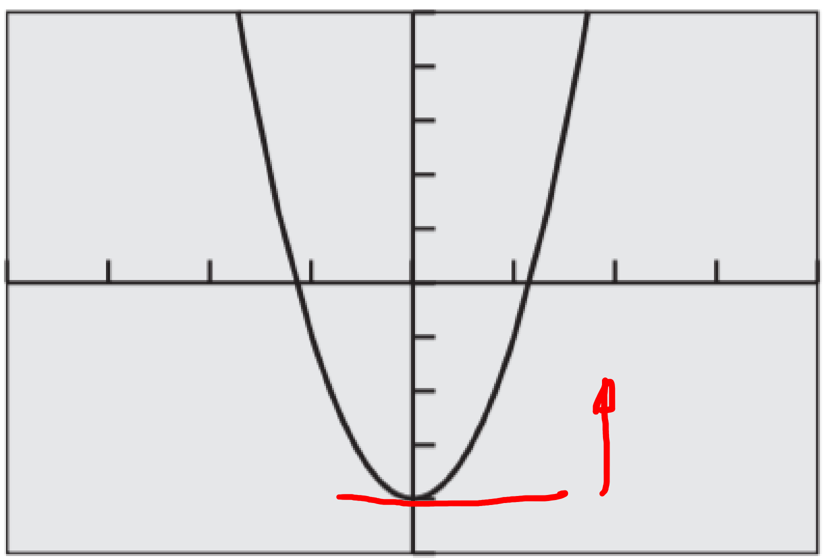
Uma função f é **limitada inferiormente** se existe algum número b que seja menor ou igual a todos os números da imagem de f. Qualquer que seja o número b, ele é chamado **limite inferior** de f.
Uma função f é **limitada superiormente** se existe algum número B que seja maior ou igual a todos os números da imagem de f. Qualquer que seja o número B, ele é chamado **limite superior** de f.
Uma função f é **limitada** quando ela é limitada das duas formas, superior e inferiormente.

Funções e suas Propriedades

Funções Limitadas

Exemplo 9 – Identifique se cada função é limitada inferiormente, limitada superiormente ou limitada.

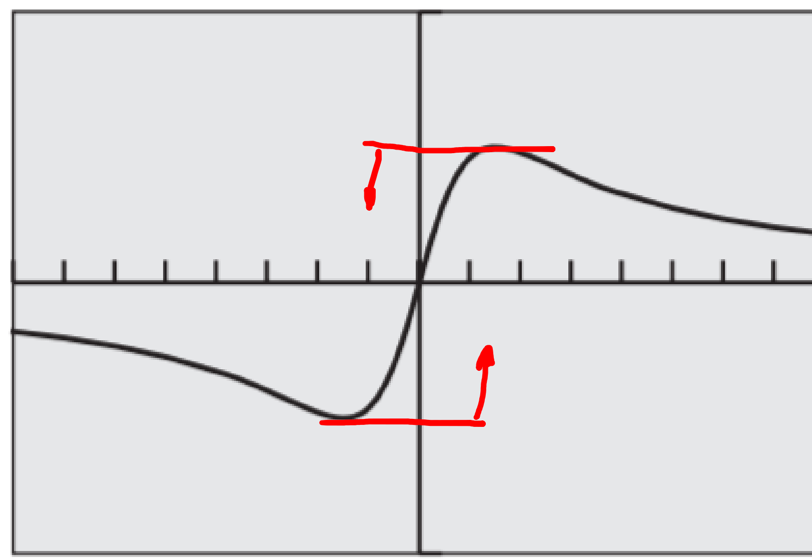
(a) $w(x) = 3x^2 - 4$ **(b)** $p(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$



$[-4, 4]$ por $[-5, 5]$

(a)

Limitada inferiormente



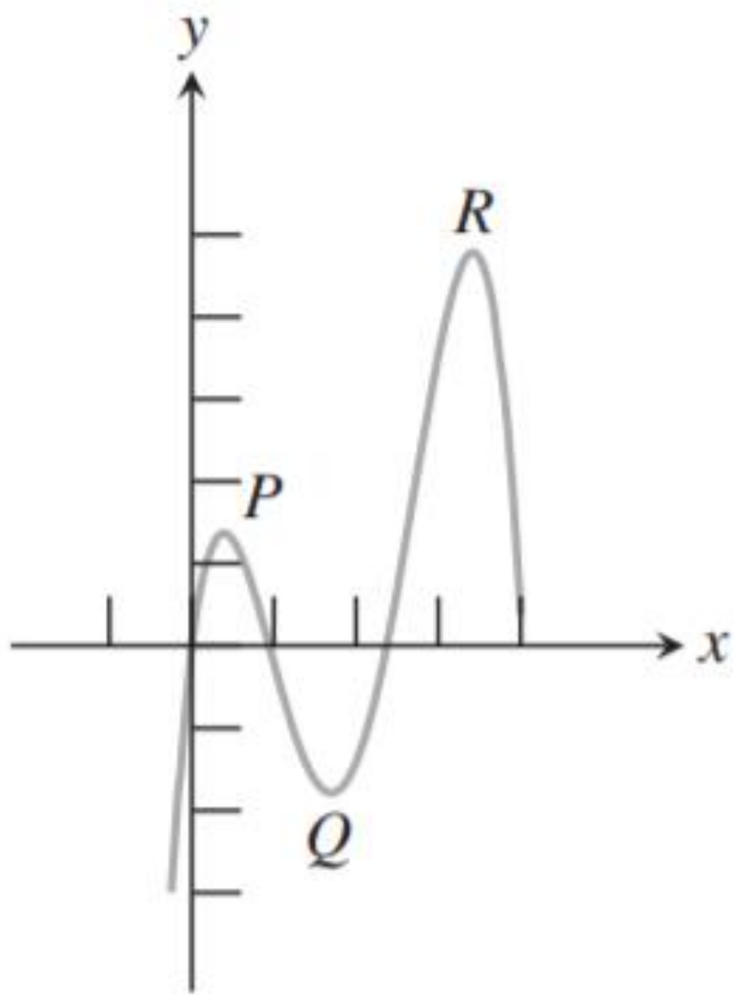
$[-8, 8]$ por $[-1, 1]$

(b)

Limitada

Funções e suas Propriedades

Extremo Local e Extremo Absoluto



Funções e suas Propriedades

Extremo Local e Extremo Absoluto

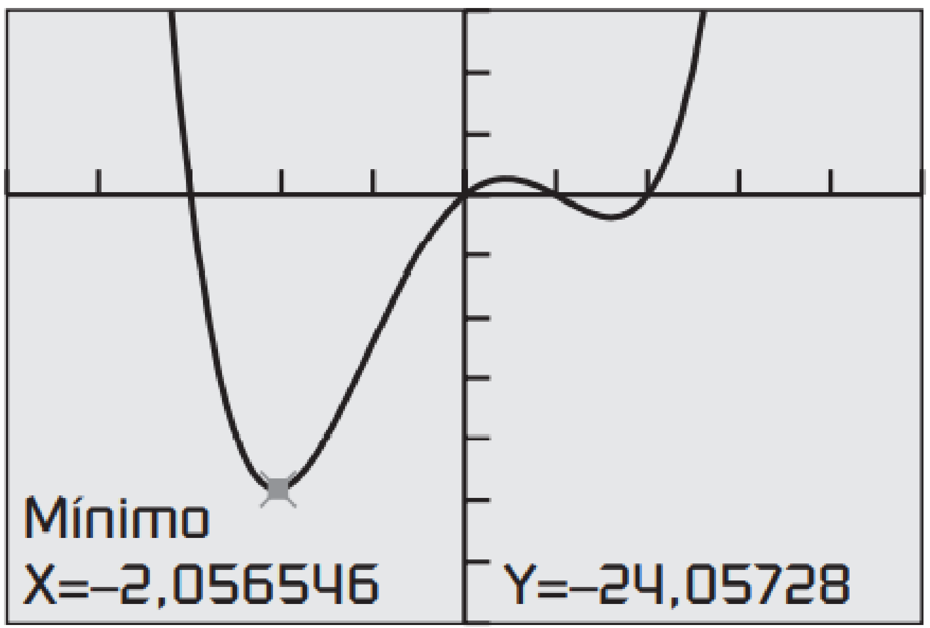
DEFINIÇÃO Extremo local e extremo absoluto

Um **máximo local** de uma função f é o valor $f(c)$ que é maior ou igual a todos os valores da imagem de f sobre algum intervalo aberto contendo c. Se $f(c)$ é maior ou igual a todos os valores da imagem de f, então $f(c)$ é o **valor máximo, também chamado máximo absoluto** de f.
Um **mínimo local** de uma função f é o valor $f(c)$ que é menor ou igual a todos os valores da imagem de f sobre algum intervalo aberto contendo c. Se $f(c)$ é menor ou igual a todos os valores da imagem de f, então $f(c)$ é o **valor mínimo** ou **mínimo absoluto** de f. Extremos locais são chamados também de **extremos relativos**.

Funções e suas Propriedades

Extremo Local e Extremo Absoluto

Exemplo 10 – Verifique se $f(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$ tem máximo local ou mínimo local. Caso isso se confirme, encontre cada valor máximo ou mínimo local, e o respectivo valor de x.

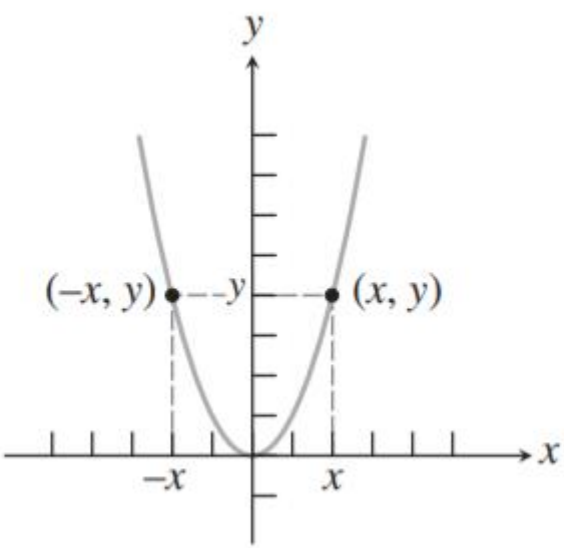


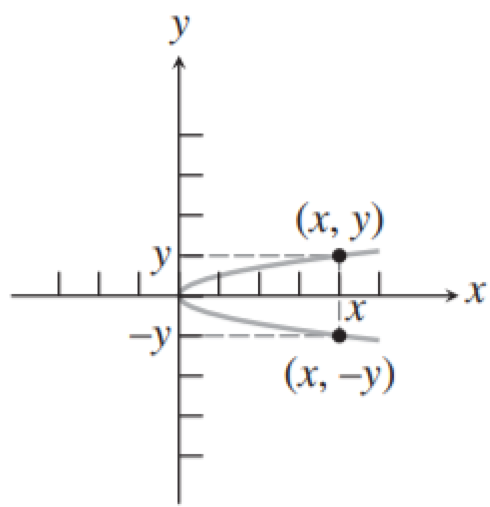
$[-5, 5]$ por $[-35, 15]$

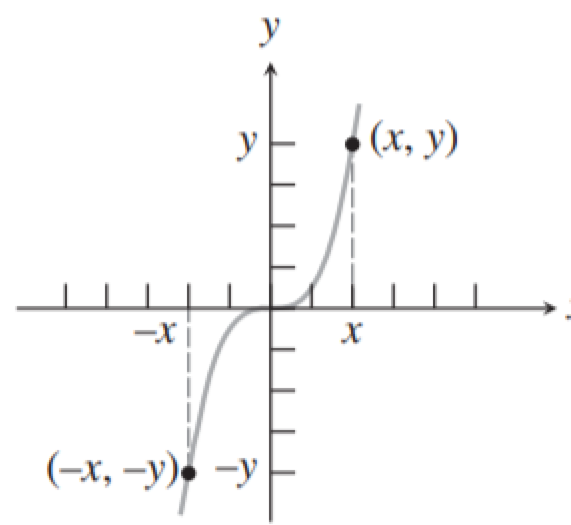
Funções e suas Propriedades

Simetria

Em matemática, a simetria pode ser caracterizada numérica e algebricamente. Veremos três tipos particulares de simetria e analisaremos cada tipo a partir de um gráfico, de uma tabela de valores e de uma fórmula algébrica, uma vez conhecido o que se deve observar.







Funções e suas Propriedades

Simetria com relação ao eixo vertical *y*

EXEMPLO: $f(x) = x^2$

Graficamente

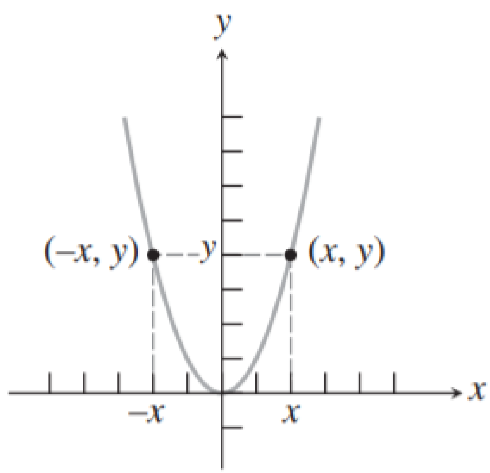


Figura 7.17 O gráfico parece o mesmo quando olhamos do lado esquerdo e do lado direito do eixo vertical y.

Numericamente

x	$f(x)$
-3	9
-2	4
-1	1
1	1
2	4
3	9

Algebricamente

Para todos os valores x do domínio de f temos $f(-x) = f(x)$. Funções com essa propriedade (por exemplo, x^n com n sendo um número par) são funções **pares**.

Funções e suas Propriedades

Simetria com relação ao eixo vertical *x*

EXEMPLO: $x = y^2$

Graficamente

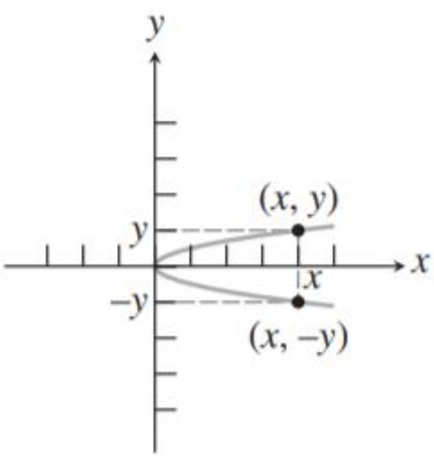


Figura 7.18 O gráfico parece o mesmo quando olhamos acima e abaixo do eixo horizontal x.

Numericamente

x	y
9	-3
4	-2
1	-1
1	1
4	2
9	3

Algebricamente

Gráficos com esse tipo de simetria não são de funções, mas podemos dizer que $(x, -y)$ está sobre o gráfico quando (x, y) também está.

Funções e suas Propriedades

Simetria com relação à origem

EXEMPLO: $f(x) = x^3$

Graficamente

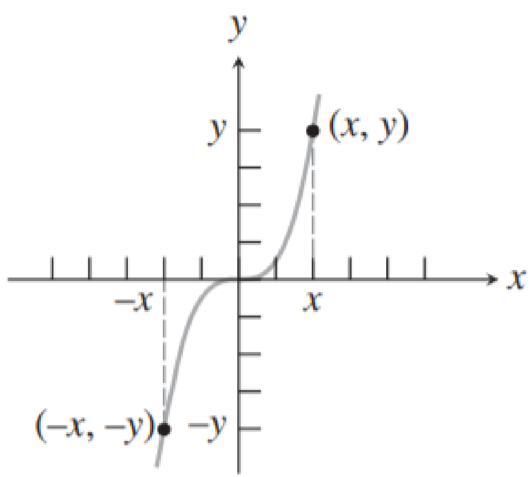


Figura 7.19 O gráfico parece o mesmo quando olhamos tanto seu lado esquerdo inferior, como seu lado direito superior.

Numericamente

x	y
-3	-27
-2	-8
-1	-1
1	1
2	8
3	27

Algebricamente

Para todos os valores x do domínio de f, temos $f(-x) = -f(x)$. Funções com essa propriedade (por exemplo, x^n com n sendo um número ímpar) são funções **ímpares**.

Exercícios

1) Livro Texto: páginas 88 à 92 – Exercícios do 1 ao 54

Exercícios do 73 ao 83

Obrigado