UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Prova II (ANN0001/ CCI122-03U)
Prof. Helder G. G. de Lima[1]

Nome do(a) aluno(a): ______________________________ Data: 19/10/2017

- Identifique-se em todas as folhas.
- Mantenha o celular e os demais equipamentos eletrônicos desligados durante a prova.
- Justifique cada resposta com cálculos ou argumentos baseados na teoria estudada.
- Ao escrever números decimais, arredonde-os com 4 casas depois da vírgula.
- Resolva apenas os itens de que precisar para somar 10,0 pontos.

1. (2,5) Resolva os sistemas lineares a seguir utilizando a fatoração $A = LU$:

(a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -5 \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -6 \\ 2x_3 + x_4 = 9 \\ -x_2 - 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2 \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 6 \\ -x_2 - 2x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$

2. (5,0) Sabe-se que $X^{(0)} = (1, 1, 1)$ está “próximo” da solução de $\begin{cases} x_1 + 9x_2 + x_3 = 10 \\ -4x_2 + 8x_3 = 10 \\ 10x_1 + x_3 = 10. \end{cases}$

Mostre que a aproximação $X^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)})$ obtida pelo método de Jacobi tem um erro relativo que é cerca de 10 vezes o que é cometido ao usar o método de Gauss-Seidel. Permute as equações, caso isso torne mais fácil garantir que os métodos geram sequências convergentes.

3. (2,5) Seja $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Usando o método de Lagrange, qual dos seguintes polinômios fornece um valor $p(1/2) \approx f(1/2) = \sqrt{2}/2$ com o menor erro absoluto?

(a) O polinômio $p(x)$, que interpola f nos pontos $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$

(b) O polinômio $q(x)$, que interpola f nos pontos $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$

4. (2,5) A tabela a seguir mostra como o desempenho de um processador (fictício) varia conforme o tempo que ele fica superaquecido:

% de tempo superaquecido	**Frequência (MHz)**
0	3500
10	3400
60	2500
90	1500

Utilize diferenças divididas para encontrar um polinômio interpolador $p(x)$ e utilize-o para estimar qual seria a frequência do processador caso ele ficasse 50% do tempo superaquecido.

BOA PROVA!

Respostas

1. (Solução) Através das operações $L_2 \to L_2 + 3L_1$ e $L_4 \to L_4 - L_2$, obtém-se $A = LU$, sendo

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como A é a matriz de coeficientes de ambos os sistemas, pode-se usar a mesma fatoração nos dois casos. Para isso, resolve-se primeiramente um sistema $LY = B$ e com a solução Y obtida resolve-se $UX = Y$. Os resultados em cada caso serão os seguintes:

(a) $Y = \begin{bmatrix} -5 \\ 9 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ (b) $Y = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. (Solução) A matriz de coeficientes do sistema linear em questão não é estritamente diagonal dominante, pois na primeira linha tem-se $|1| < |9| + |1|$. Então, por este critério, não há garantia de que os métodos iterativos convergirão. No entanto, pode-se permutar as linhas para obter

$$\begin{cases} 10x_1 \qquad\quad + \ \ x_3 = 10 \\ \ \ x_1 + 9x_2 + \ \ x_3 = 10 \\ \qquad - 4x_2 + 8x_3 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Neste caso a matriz é estritamente diagonal dominante e há garantia de convergência. As equações utilizadas em cada um dos métodos iterativos são as seguintes:

Método de Jacobi

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = (10 - x_3^{(k-1)})/10 \\ x_2^{(k)} = (10 - x_1^{(\boldsymbol{k-1})} - x_3^{(k-1)})/9 \\ x_3^{(k)} = (10 + 4x_2^{(\boldsymbol{k-1})})/8, \end{cases}$$

Método de Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = (10 - x_3^{(k-1)})/10 \\ x_2^{(k)} = (10 - x_1^{(\boldsymbol{k})} - x_3^{(k-1)})/9 \\ x_3^{(k)} = (10 + 4x_2^{(\boldsymbol{k})})/8. \end{cases}$$

Observe que no método de Gauss-Seidel, os valores de $x_j^{(k)}$ são utilizados em vez de $x_j^{(k-1)}$ assim que estão disponíveis. Consequentemente, os valores obtidos a cada iteração são os seguintes:

Método de Jacobi

$\boldsymbol{k}$	0	1	2	3
$\boldsymbol{x_1^{(k)}}$	1.0000	0.9000	0.8250	0.8306
$\boldsymbol{x_2^{(k)}}$	1.0000	0.8889	0.8167	0.8312
$\boldsymbol{x_3^{(k)}}$	1.0000	1.7500	1.6944	1.6583

Método de Gauss-Seidel

$\boldsymbol{k}$	0	1	2	3
$\boldsymbol{x_1^{(k)}}$	1.0000	0.9000	0.8300	0.8335
$\boldsymbol{x_2^{(k)}}$	1.0000	0.9000	0.8300	0.8335
$\boldsymbol{x_3^{(k)}}$	1.0000	1.7000	1.6650	1.6668

Na terceira iteração, obtêm-se as seguintes estimativas para os erros cometidos:

Erro	Método de Jacobi	Método de Gauss-Seidel
Absoluto	$\|\|X^{(3)} - X^{(2)}\|\|$ $= \max \ \{ \ \|0.8306 - 0.8250\|,$ $\|0.8312 - 0.8167\|,$ $\|1.6583 - 1.6944\| \ \}$ $= \max \ \{\|0.0056\|, \|0.0145\|, \|-0.0361\|\}$ $= 0.0361$	$\|\|X^{(3)} - X^{(2)}\|\|$ $= \max \ \{ \ \|0.8335 - 0.8300\|,$ $\|0.8335 - 0.8300\|,$ $\|1.6668 - 1.6650\| \ \}$ $= \max \ \{\|0.0035\|, \|0.0035\|, \|0.0018\|\}$ $= 0.0035$
Relativo	$0.0361/1.6583 = 0.0218$	$0.0035/1.6668 = 0.0021$

3. (Solução) (a) Considerando $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ e $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ e $y_3 = 0$, tem-se:

$$p(x) = 0L_1(x) + 1L_2(x) + 0L_3(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = 1 - x^2.$$

Logo, o erro absoluto em $x = 1/2$ é dado por

$$\varepsilon_{abs} = |f(1/2) - p(1/2)| \approx |0.7071 - 0.7500| = |-0.0429| = 0.0429.$$

(b) Considerando $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ e $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ e $y_3 = -1$, tem-se:

$$\begin{aligned} q(x) = 1L_1(x) + 0L_2(x) - 1L_3(x) &= \frac{(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)} - \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \\ &= \frac{1}{2}(x-1)(x-2) - \frac{1}{2}x(x-1) = 1 - x. \end{aligned}$$

Logo, o erro absoluto em $x = 3$ é dado por

$$\varepsilon_{abs} = |f(1/2) - q(1/2)| \approx |0.7071 - 0.5000| = 0.2071.$$

Portanto, o valor de $f(1/2)$ está mais próximo de $p(1/2)$ do que de $q(1/2)$.

4. (Solução) A partir dos pontos dados, obtém-se:

x_i	$y_i = f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	$\mathbf{3500}$			
		$\mathbf{-10}$		
10	3400		$-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{15}} \approx \mathbf{-0.1333}$	
		-18		$-\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10800}} \approx \mathbf{-0.0006}$.
60	2500		$-\frac{23}{120} \approx -0.1917$	
		$-\frac{100}{3} \approx -33.3333$		
90	1500			

Então:

$$\begin{aligned} p(x) &= 3500 - 10x - 0.1333x(x-10) - 0.0006x(x-10)(x-60) \\ &= -0.0006x^3 - 0.0913x^2 - 9.027x + 3500. \end{aligned}$$

Usando este polinômio para estimar o valor pedido, resulta que:

$$p(50) = 3500 - 10 \cdot 50 - 0.1333 \cdot 50 \cdot 40 - 0.0006 \cdot 50 \cdot 40 \cdot (-10) = 2745.4.$$