# Álgebra Linear
# (ALI0001 – CCI-192-02U)

## Método da Inversa para resolução de sistemas

## Introdução a Conjuntos Fechados

**Professor:** Marnei Luis Mandler

Aula do dia 20 de março de 2023.

UDESC

# Revisão: Método da inversa para resolver sistemas lineares

**Teorema:** Se $A$ é invertível, então o sistema de $n$ equações e $n$ variáveis $AX = B$ é sempre possível e determinado (SPD) e sua única solução é dada por $X = A^{-1}B$.

Justificativa: Se $A$ é invertível, então existe $A^{-1}$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ e com isso, a matriz $X = A^{-1}B$ é tal que

$$AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = I.B = B,$$

ou seja, $X = A^{-1}B$ é solução do sistema linear $AX = B$. Portanto, o sistema é possível.
Além disso, se $Y$ for qualquer outra solução desse sistema, temos que $AY = B$.
Como $AX = B$, obtemos que

$$AY = B = AX \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AY = A^{-1}AX \quad \Rightarrow \quad IY = IX \quad \Rightarrow \quad Y = X.$$

Portanto, existe uma única solução para o sistema, e ele é possível e determinado (SPD).

Observação: O método da inversa é útil para resolver vários sistemas cuja matriz dos coeficientes $A$ é sempre a mesma, e em que apenas a matriz $B$ é diferente em cada caso.

Exemplo 1: Resolva os sistemas abaixo, pelo método da inversa:

$a)\ \begin{cases} 2x + 3y + z = -1 \\ 3x + 3y + z = 1 \\ 2x + 4y + z = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 8 \\ 2x + 4y + z = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$

# Método da inversa para resolver sistemas lineares

Solução: Veja que os três sistemas dados possuem os mesmos coeficientes, com variações apenas nos seus termos independentes. Com isso, vamos aplicar o método da inversa para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para obter $A^{-1}$, escalonamos a matriz $A$ ao lado da matriz identidade $3 \times 3$:

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ L_2 \to L_2 - L_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} L_2 \to L_2 - L_3 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} L_2 \to -L_2 \\ L_3 \to L_3 + 4L_2 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & -3 \end{array}\right] = [\, I \mid A^{-1}].$$

# Método da inversa para resolver sistemas lineares

Portanto, obtemos que $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ e com isso, todos os sistemas são SPD.

Agora, vamos obter as soluções dos sistemas:

a) No primeiro sistema, temos que a matriz dos termos independentes é $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ e pelo método da inversa, a sua solução é

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1).(-1) + 1.1 + 0.2 \\ (-1).(-1) + 0.1 + 1.2 \\ 6.(-1) - 2.1 - 3.(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

b) No segundo sistema, temos que a matriz dos termos independentes é $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$ e pelo método da inversa, a sua solução é

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1).4 + 1.8 + 0.5 \\ (-1).4 + 0.8 + 1.5 \\ 6.4 - 2.8 - 3.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

# Propriedades da Inversa

c) O terceiro sistema é homogêneo, pois $B = 0$. Com isso, sua solução é a trivial, pois

$$X = A^{-1}.0 = 0.$$

Exemplo 2: Determine a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, supondo que $a \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$.

Solução: Escalonando a matriz $[A \mid I]$ obtemos que

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \; L_1 \to \frac{1}{a} L_1 \;\; \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \; L_2 \to L_2 - cL_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & \frac{-c}{a} & 1 \end{array}\right] \; L_2 \to \frac{a}{ad-bc} L_2 \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right] L_1 \to L_1 - \frac{b}{a} L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right] = [\, I \mid A^{-1}].$$

Portanto, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

# Conjuntos Fechados

**Definição:** Seja $H$ um conjunto qualquer não vazio, no qual estejam definidas as operações de adição e de multiplicação por escalar. Define-se que:

- $H$ é fechado para adição se, e somente se, dados quaisquer dois elementos $u$ e $v$ que pertencem a $H$, a soma $u + v$ também é um elemento que pertence a $H$.

Simbolicamente: $\forall\, u, v \in H,\ u + v \in H$.

- $H$ é fechado para a multiplicação por escalar se, e somente se, dado qualquer elemento $u$ que pertence a $H$ e qualquer escalar $k \in \mathbb{R}$, a multiplicação escalar $ku$ também é um elemento que pertence a $H$.

Simbolicamente: $\forall\, u \in H, \forall k \in \mathbb{R},\ \ ku \in H$.

- Quando $H$ é simultaneamente fechado para as operações de adição e de multiplicação por escalar, $H$ é dito simplesmente um conjunto fechado.

**OBSERVAÇÕES:** A definição de conjunto fechado também pode ser aplicada quando $H$ é um subconjunto (não vazio) de outro conjunto.

A nomenclatura "fechado" é relativamente intuitiva: indica que, ao operarmos (pela adição ou multiplicação por escalar) com elementos de um conjunto fechado, o resultado sempre permanece "dentro" do conjunto, ou seja, nunca resulta em um elemento "fora" desse conjunto.

# Exemplos

Exemplo 1) Verifique se os conjuntos abaixo são ou não fechados para as operações usuais de adição e/ou de multiplicação por escalar:

a) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ y = -2x\}$.

b) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ y = 2x + 1\}$.

Solução: a) Se $u = (x, y) \in H$ e $v = (a, b) \in H$, temos que

$$y = -2x \quad \text{e} \quad b = -2a\,.$$

Logo

$$u + v = (x + a, y + b)$$

é tal que

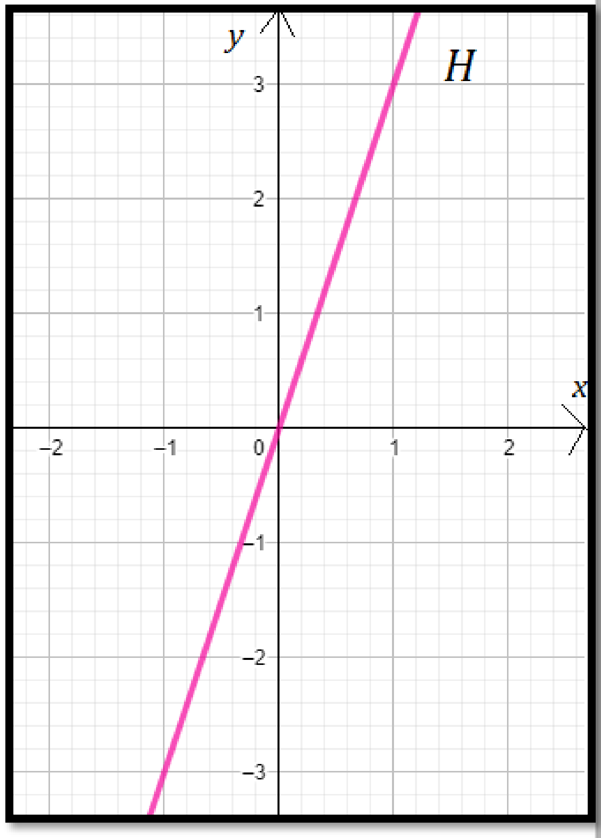
$$y + b = -2x - 2a = -2(x + a)$$

e $u + v \in H$, ou seja, $H$ é fechado para a adição.

Além disso, para todo $k$ real, $ku = (kx, ky)$ é tal que

$$ky = k(-2x) = -2(kx)$$

e $ku \in H$, ou seja, $H$ é fechado para a multiplicação por escalar.




Note que, geometricamente, $H$ consiste em uma reta que passa pela origem.

# Exemplos

Solução b) Sejam $u = (x, y) \in H$ e $v = (a, b) \in H$. Logo, pela condição algébrica de $H$, temos que

$$y = 2x + 1 \qquad \text{e} \qquad b = 2a + 1.$$

Como $u + v = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$ é tal que

$$y + b = (2x + 1) + (2a + 1) = 2(x + a) + 2 \neq 2(x + a) + 1,$$

concluímos que $u + v \notin H$ , pois a condição algébrica do conjunto não está satisfeita.

Portanto, $H$ NÃO é fechado para a adição.

Além disso, se $k \in \mathbb{R}$ é um escalar qualquer, temos que $ku = k(x, y) = (kx, ky)$ é tal que

$$ky = k.(2x + 1) = k(2x) + k = 2(kx) + k \neq 2.(kx) + 1$$

para $k \neq 1$. Como $k$ deve ser qualquer real, concluímos que $ku \notin H$, pois a condição algébrica do conjunto não está satisfeita.

Portanto, $H$ NÃO é fechado para a multiplicação por escalar.

Note que, do ponto de vista geométrico, $H$ consiste em uma reta crescente que passa pelo ponto $(0,1)$.

# Exemplos

- A Figura ao lado apresenta uma interpretação geométrica para o não fechamento da adição em $H$.
- Note que $H$ consiste na reta em vermelho e que os elementos

$$u = (-1,-1) \in H \quad \text{e} \quad v = (1,3) \in H,$$

pois satisfazem a condição algébrica do conjunto, visto que

$$-1 = 2.(-1) + 1 \quad \text{e} \quad 3 = 2.1 + 1.$$

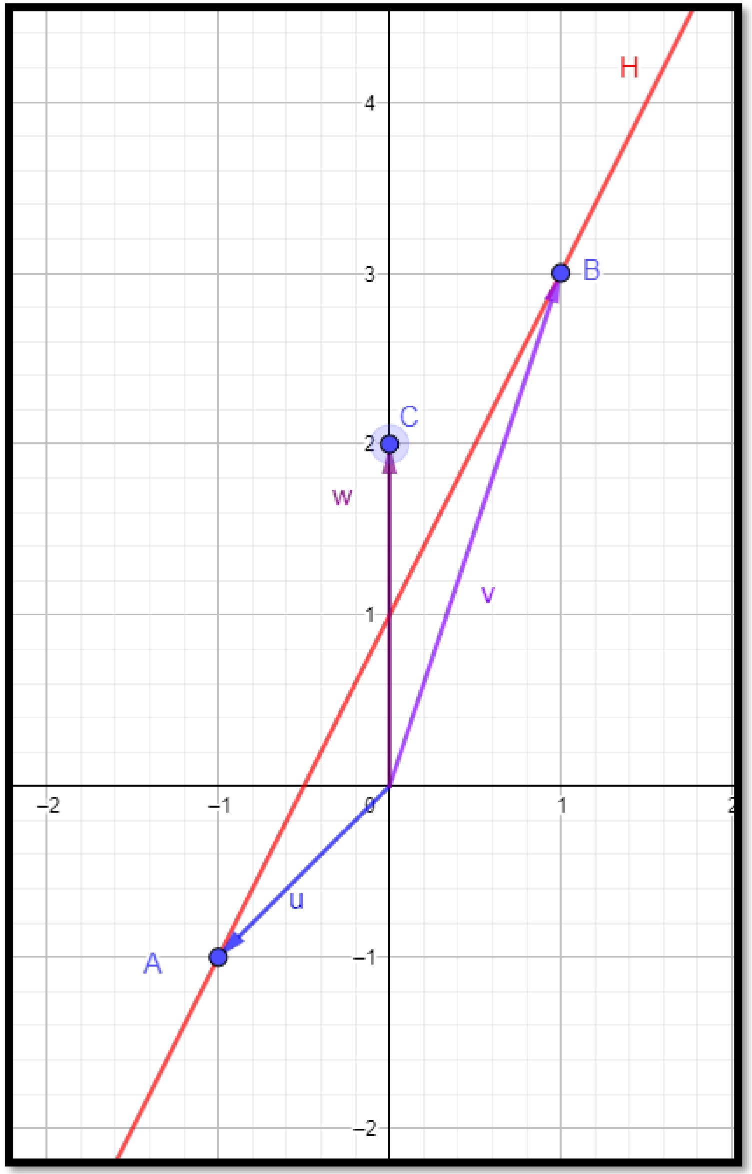
- Do ponto de vista geométrico, isso significa que as extremidades dos elementos $u$ e $v$ consistem em pontos que pertencem à $H$.
- Para a soma desses elementos, têm-se que

$$u + v = (-1,1) + (1,3) = (0,2) \notin H,$$

pois

$$2 \neq 2.0 + 1 = 1.$$

- Note que a extremidade do elemento soma $u + v$ é um ponto que não pertence à $H$.

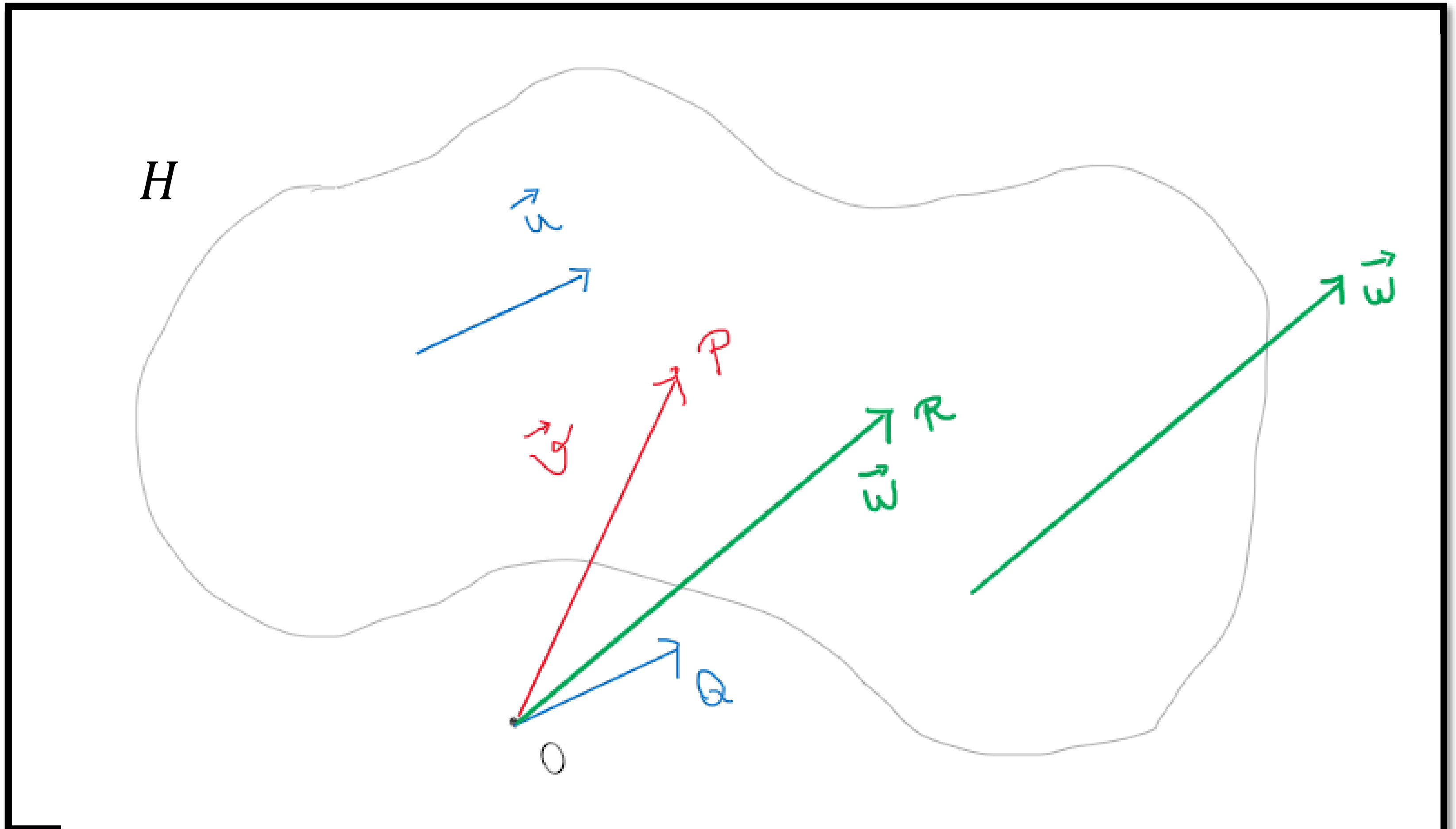


# Opcional: Interpretação geométrica em $\mathbb{R}^2$

Seja $H$ um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, denotado por $H \subseteq \mathbb{R}^2$.

Dizemos que um elemento $\vec{v} \in H$ se e somente se

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} \text{ para algum } P \in H.$$




No esquema ao lado, temos que:

$\vec{v} = \overrightarrow{OP} \in H$ pois $P \in H$,

$\vec{u} = \overrightarrow{OQ} \notin H$ pois $Q \notin H$,

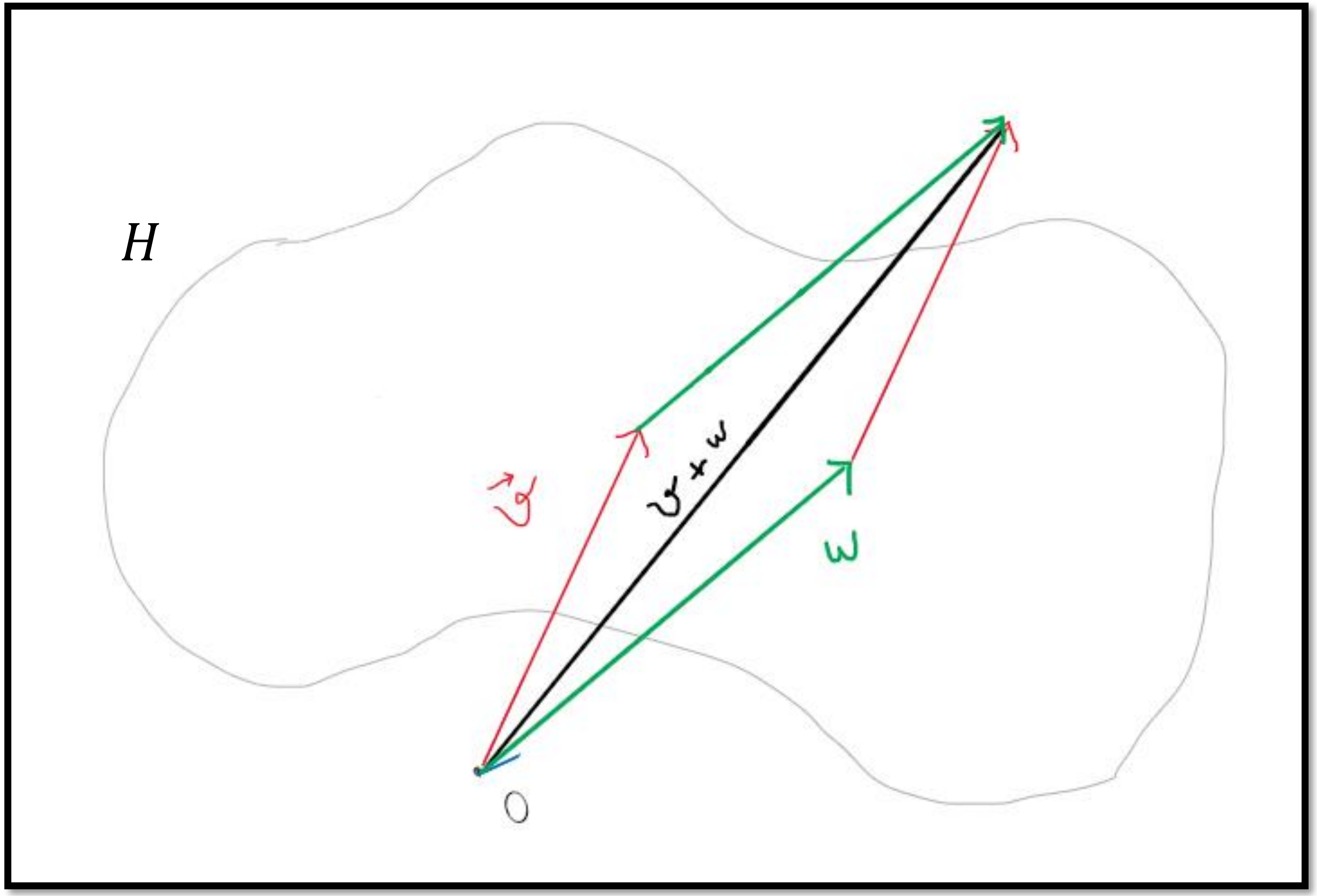
$\vec{w} = \overrightarrow{OR} \in H$ pois $R \in H$.

Veja que é necessário analisar o vetor equipolente que tem origem em $O = (0,0)$.

# Opcional: Interpretação geométrica em $\mathbb{R}^2$

Seja $H \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto de vetores.

Dados $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w} \in H$, será que $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \in H$?




No esquema ao lado, temos que

$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{OS}$,

com $S \notin H$.

Portanto

$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \notin H$,