Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral

Função Exponencial

Prof. Dani Prestini

UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Função Exponencial

DEFINIÇÃO Funções exponenciais

Sendo a e b constantes reais, uma **função exponencial** em x é a função que pode ser escrita na forma $\boxed{f(x) = a \cdot b^x,}$ onde a é diferente de zero, b é positivo e $b \neq 1$. A constante a é o *valor* de f quando $x = 0$ e b é a **base**.

EXEMPLO 1 Identificação de funções exponenciais

(a) $f(x) = 3^x$ é uma função exponencial, com um valor a igual a 1 e base igual a 3.

(b) $g(x) = 6x^{-4}$ *não* é uma função exponencial porque a base x é uma variável, e o expoente é uma constante; portanto, g é uma função potência.

(c) $h(x) = -2 \cdot 1{,}5^x$ é uma função exponencial, com um valor a igual a -2 e base igual a 1,5.

(d) $k(x) = 7 \cdot 2^{-x}$ é uma função exponencial, com um valor a igual a 7 e base igual a $\frac{1}{2}$, pois $2^{-x} = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

(e) $q(x) = 5 \cdot 6^\pi$ *não* é uma função exponencial porque o expoente π é uma constante; portanto, q é uma função constante.

Função Exponencial

EXEMPLO 2 **Cálculo dos valores de uma função exponencial para alguns números racionais**

Para $f(x) = 2^x$, temos:

(a) $f(4) = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

(b) $f(0) = 2^0 = 1$

(c) $f(-3) = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$

(d) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2^{1/2} = \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

(e) $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 2^{-3/2} = \dfrac{1}{2^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{8}} = 0{,}35355\ldots$

$f(x) = 16 \longrightarrow f(x) = 2^x$

$16 = 2^x$

$\cancel{2}^4 = \cancel{2}^x$

$x = 4$

$f(x) = 18$ X

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ \hline 1 & 2^4 \end{array}$$

Função Exponencial

EXEMPLO 3 **Identificação da lei de uma função exponencial a partir de alguns valores tabelados**

Determine fórmulas para as funções exponenciais g e h, cujos valores são dados na Tabela 11.2.

Tabela 11.2 **Alguns valores para duas funções exponenciais**

x	$g(x)$		$h(x)$	
-2	$\frac{4}{9}$		128	
		$\times 3$		$\times \frac{1}{4}$
-1	$\frac{4}{3}$		32	
		$\times 3$		$\times \frac{1}{4}$
0	4		8	
		$\times 3$		$\times \frac{1}{4}$
1	12		2	
		$\times 3$		$\times \frac{1}{4}$
2	36		$\frac{1}{2}$	

Função Exponencial

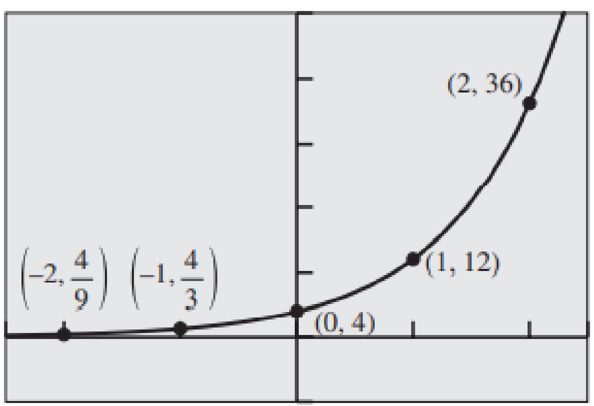
SOLUÇÃO

Como g é uma função exponencial, então $g(x) = a \cdot b^x$. Como $g(0) = 4$, então o valor de a é igual a 4. Como $g(1) = 4 \cdot b^1 = 12$, então a base b é igual a 3. Assim:

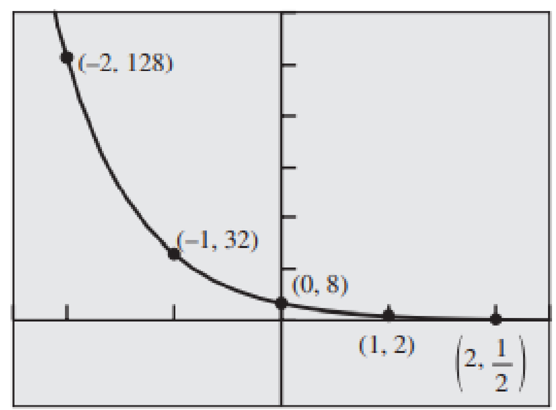
$$g(x) = 4 \cdot 3^x$$

Como h é uma função exponencial, então $h(x) = a \cdot b^x$. Como $h(0) = 8$, então o valor de a é igual a 8. Como $h(1) = 8 \cdot b^1 = 2$, então a base b é igual a $\frac{1}{4}$. Assim:

$$h(x) = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$$



[–2,5; 2,5] por [–10, 50]
(a)



[–2,5; 2,5] por [–25, 150]
(b)

Função Exponencial

Crescimento e decrescimento exponencial

Para qualquer função exponencial $f(x) = a \cdot b^x$ e qualquer número real x,

$$f(x + 1) = b \cdot f(x).$$

Se $a > 0$ e $b > 1$, então a função f é crescente, sendo uma **função de crescimento exponencial**. A base b é o seu **fator de crescimento**.

Se $a > 0$ e $b < 1$, então a função f é decrescente, sendo uma **função de decaimento exponencial**. A base b é o seu **fator de decaimento**.

Função Exponencial

Função exponencial $f(x) = b^x$

Domínio: conjunto de todos os números reais.

Imagem: $]0, +\infty[$.

É contínua.

Não é simétrica: não é função par, não é função ímpar.

Limitada inferiormente, mas não superiormente.

Não tem extremos locais.

Assíntota horizontal: $y = 0$.

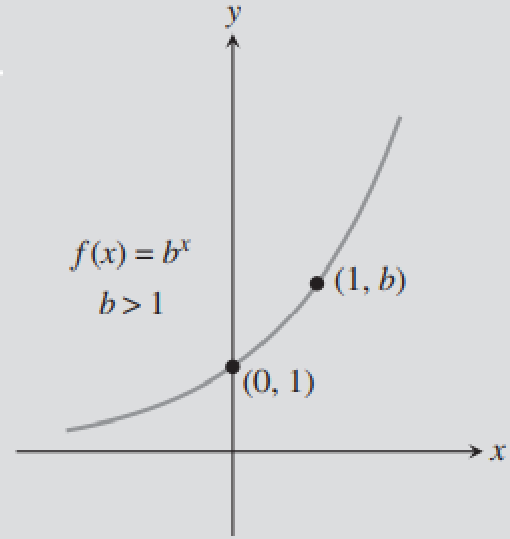
Não tem assíntotas verticais.

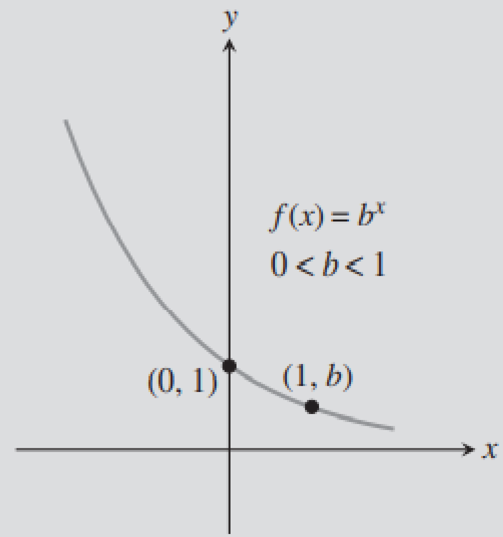
Se $b > 1$ (veja a Figura 11.3(a)), então:

- f é uma função crescente
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Se $0 < b < 1$ (veja a Figura 11.3(b)), então:

- f é uma função decrescente
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$





Função Exponencial

EXEMPLO 4 Transformação de funções exponenciais

Descreva como transformar o gráfico de $f(x) = 2^x$ no gráfico da função dada.

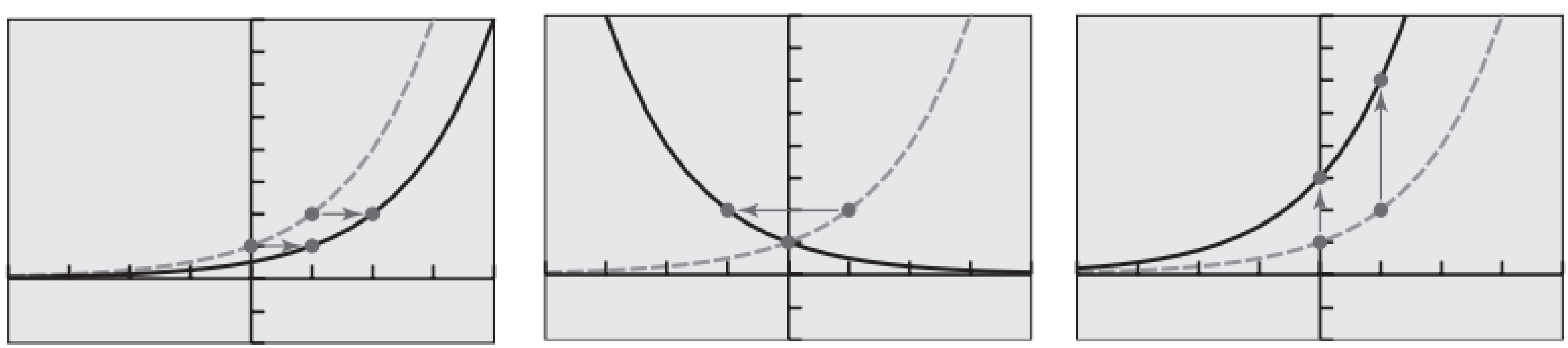
(a) $g(x) = 2^{x-1}$ **(b)** $h(x) = 2^{-x}$ **(c)** $k(x) = 3 \cdot 2^x$

SOLUÇÃO

(a) O gráfico de $g(x) = 2^{x-1}$ é obtido deslocando o gráfico de $f(x) = 2^x$ uma unidade para a direita (Figura 11.4(a)).

(b) Podemos obter o gráfico de $h(x) = 2^{-x}$ refletindo o gráfico de $f(x) = 2^x$ com relação ao eixo vertical y (Figura 11.4(b)). Como $2^{-x} = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, então podemos pensar em h como uma função exponencial com um valor de a igual a 1 e uma base igual a $\frac{1}{2}$.

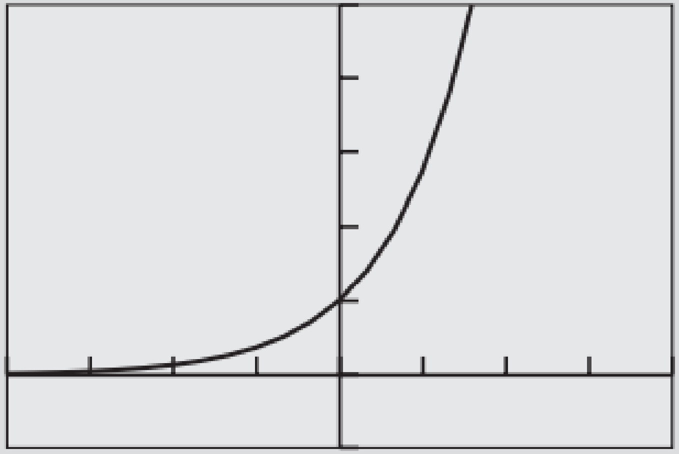
(c) Podemos obter o gráfico de $k(x) = 3 \cdot 2^x$ esticando verticalmente o gráfico de $f(x) = 2^x$ pelo fator 3 (Figura 11.4(c)).



Função Exponencial

Função exponencial $f(x) = e^x$

Domínio: conjunto de todos os números reais.
Imagem: $]0, +\infty[$.
É contínua.
É crescente para todo valor de x do domínio.
Não é simétrica.
Limitada inferiormente, mas não superiormente.
Não tem extremos locais.
Assíntota horizontal: $y = 0$.
Não tem assíntotas verticais.
Comportamento nos extremos do domínio: $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.



Função Exponencial

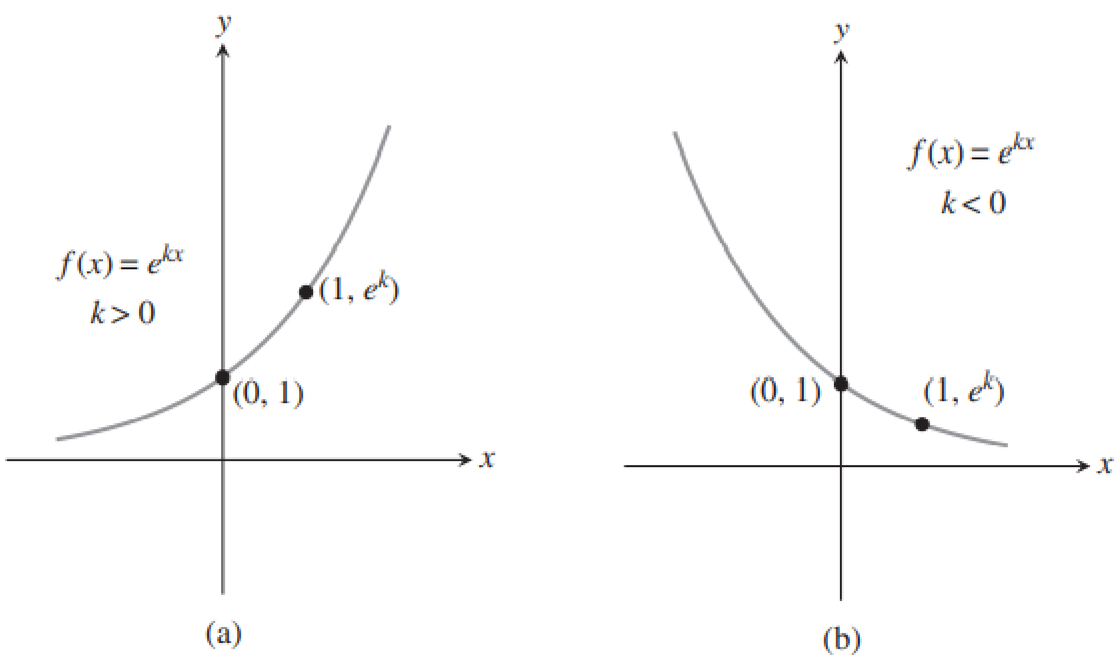
TEOREMA Funções exponenciais e a base *e*

Qualquer função exponencial $f(x) = a \cdot b^x$ pode ser reescrita como

$$f(x) = a \cdot e^{kx}$$

para uma constante k, sendo um número real apropriadamente escolhido.

Se $a > 0$ e $k > 0$, então $f(x) = a \cdot e^{kx}$ é uma função de crescimento exponencial (veja a Figura 11.6(a)). Se $a > 0$ e $k < 0$, então $f(x) = a \cdot e^{kx}$ é uma função de decaimento exponencial (veja a Figura 11.6(b)).



Função Exponencial

EXEMPLO 5 Transformação de funções exponenciais

Descreva como transformar o gráfico de $f(x) = e^x$ no gráfico da função dada.

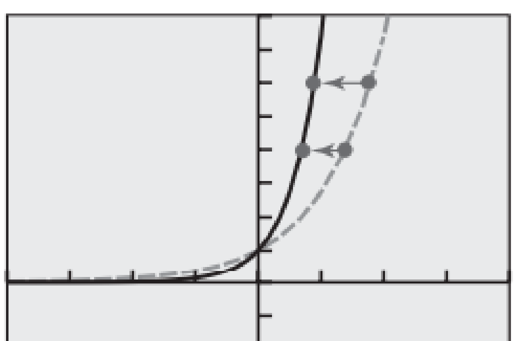
(a) $g(x) = e^{2x}$ **(b)** $h(x) = e^{-x}$ **(c)** $k(x) = 3e^x$

SOLUÇÃO

(a) O gráfico de $g(x) = e^{2x}$ é obtido encolhendo horizontalmente o gráfico de $f(x) = e^x$ por meio do fator 2 (Figura 11.7(a)).

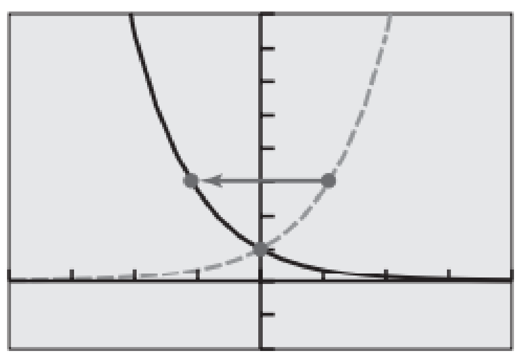
(b) Podemos obter o gráfico de $h(x) = e^{-x}$ refletindo o gráfico de $f(x) = e^x$ com relação ao eixo vertical y (Figura 11.7(b)).

(c) Podemos obter o gráfico de $k(x) = 3 \cdot e^x$ esticando verticalmente o gráfico de $f(x) = e^x$ pelo fator 3 (Figura 11.7(c)).



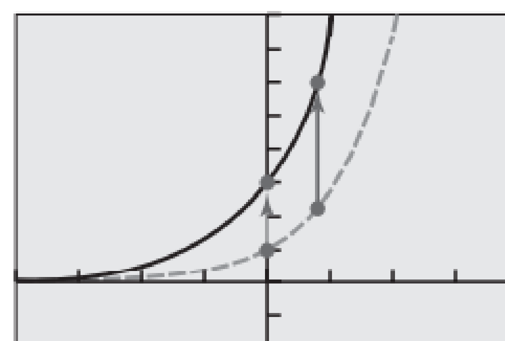
$[-4, 4]$ por $[-2, 8]$

(a)



$[-4, 4]$ por $[-2, 8]$

(b)



$[-4, 4]$ por $[-2, 8]$

(c)

Função Exponencial

DEFINIÇÃO Funções de crescimento logístico

Sejam a, b, c e k constantes positivas, com $b < 1$. Uma **função de crescimento logístico** em x é uma função que pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot b^x} \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot e^{-kx}},$$

onde a constante c é o **limite de crescimento**.

Se $b > 1$ ou $k < 0$, então as fórmulas serão de **funções de decaimento logístico**.

Função Exponencial

Modelo de crescimento exponencial de uma população

Se uma população P está se modificando a uma taxa percentual constante r a cada ano, então:

$$P(t) = P_0(1 + r)^t,$$

onde P_0 é a população inicial, r é expresso como um número decimal e t é o tempo em anos.

Por um lado, se $r > 0$, então $P(t)$ é uma função de crescimento exponencial, e seu *fator de crescimento* é a base da função exponencial, dada por $1 + r$.

Por outro lado, se $r < 0$, então a base $1 + r < 1$, $P(t)$ é uma função de decaimento exponencial, e $1 + r$ é o *fator de decaimento* para a população.

Função Exponencial

EXEMPLO 6 Verificação das taxas de crescimento e decaimento

Conclua se o modelo da população é uma função de crescimento ou decaimento exponencial e encontre a taxa percentual constante de crescimento ou decaimento.

(a) São José: $P(t) = 782.248 \cdot 1{,}0136^t$

(b) Detroit: $P(t) = 1.203.368 \cdot 0{,}9858^t$

SOLUÇÃO

(a) Como $1 + r = 1{,}0136$, então $r = 0{,}0136 > 0$. Assim, P é uma função de crescimento exponencial com a taxa de crescimento de 1,36%.

(b) Como $1 + r = 0{,}9858$, então $r = -0{,}0142 < 0$. Assim, P é uma função de decaimento exponencial com a taxa de decaimento de 1,42%.

EXEMPLO 7 Identificação da lei de função exponencial

Determine a função exponencial com valor inicial igual a 12 e taxa de crescimento de 8% ao ano.

SOLUÇÃO

Como $P_0 = 12$ e $r = 8\% = 0{,}08$, então $P(t) = 12(1 + 0{,}08)^t$ ou $P(t) = 12 \cdot 1{,}08^t$. Poderíamos escrever essa função como $f(x) = 12 \cdot 1{,}08^x$, onde x representa o tempo.

Função Exponencial

EXEMPLO 8 Modelagem do crescimento de bactérias

Suponha que há uma cultura de 100 bactérias localizadas em um objeto, de modo que o número de bactérias dobra a cada hora. Conclua quando esse número chegará em 350.000 unidades.

SOLUÇÃO

Modelo

$200 = 100 \cdot 2$	Total de bactérias após 1 hora
$400 = 100 \cdot 2^2$	Total de bactérias após 2 horas
$800 = 100 \cdot 2^3$	Total de bactérias após 3 horas
$\vdots$	
$P(t) = 100 \cdot 2^t$	Total de bactérias após t horas

Assim, a função $P(t) = 100 \cdot 2^t$ representa a população de bactérias t horas após a verificação inicial no objeto.

Função Exponencial

Solução gráfica

A Figura 11.8 mostra que a função da população intersecciona $y = 350.000$ quando $t \cong 11{,}77$.

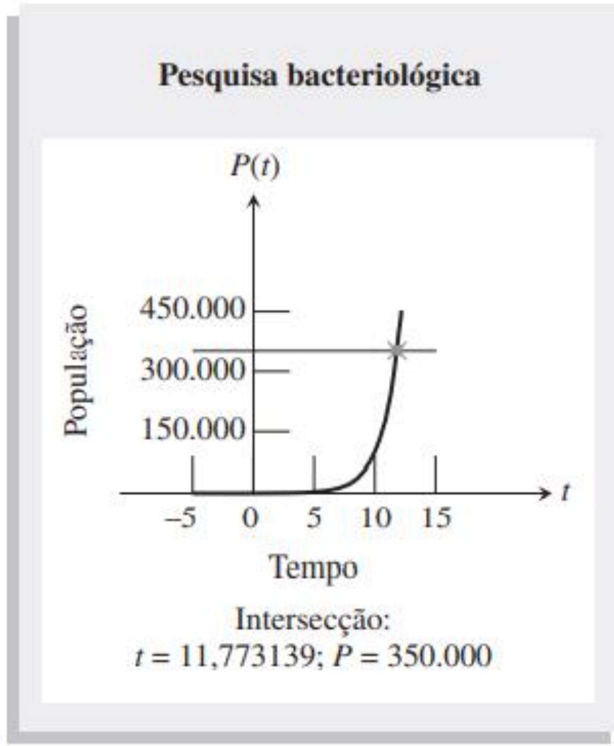


Figura 11.8 Crescimento exponencial de uma população de bactérias.

INTERPRETAÇÃO

A população de bactérias será de 350.000 em, aproximadamente, 11 horas e 46 minutos.

Função Exponencial

EXEMPLO 9 Modelagem do decaimento radioativo

Suponha que a meia-vida de certa substância radioativa é de 20 dias e que existem 5 gramas presentes inicialmente. Encontre o tempo até existir 1 grama da substância.

SOLUÇÃO

Modelo

Se t é o tempo em dias, o tempo de meias-vidas será $\dfrac{t}{20}$.

$$\frac{5}{2} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{20/20} \qquad \text{Gramas após 20 dias}$$

$$\frac{5}{4} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{40/20} \qquad \text{Gramas após } 2 \cdot 20 = 40 \text{ dias}$$

$$\vdots$$

$$f(t) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20} \qquad \text{Gramas após } t \text{ dias}$$

Assim, a função $f(t) = 5 \cdot 0{,}5^{t/20}$ modela a massa, em gramas, da substância radioativa no tempo t.

Função Exponencial

Solução gráfica

A Figura 11.9 mostra que o gráfico de $f(t) = 5 \cdot 0{,}5^{t/20}$ intersecciona $y = 1$ quando $t \cong 46{,}44$.

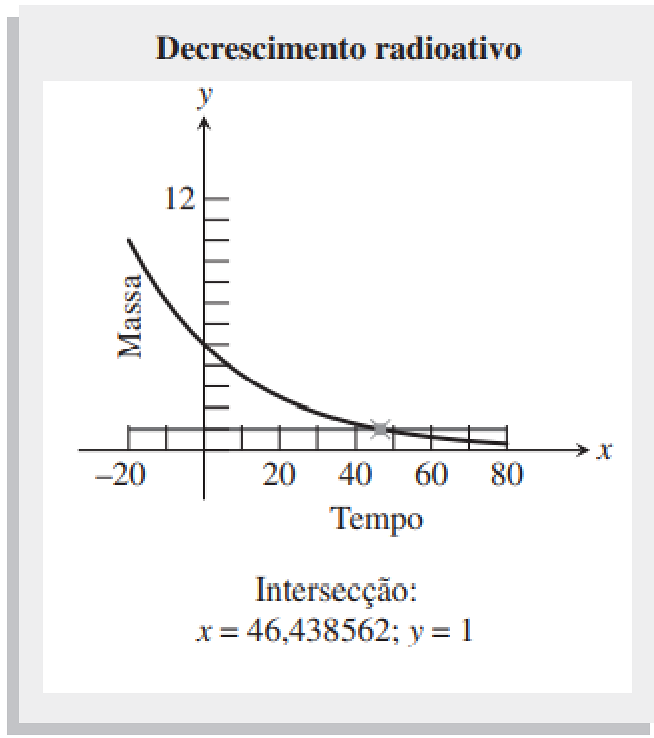


Figura 11.9 Decaimento radioativo.

INTERPRETAÇÃO

Existirá 1 grama da substância radioativa após, aproximadamente, 46,44 dias, ou seja, 46 dias e 11 horas.

Exercícios

1) Livro Texto: páginas 151 à 155 – Exercícios do 1 ao 34

Exercícios do 45 ao 97

Obrigado