Álgebra Linear (ALI0001 – CCI-192-02U)

Coordenadas e Mudança de Base

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de 26 de abril de 2023.

Introdução: Coordenadas

Para entender o conceito de coordenadas em relação a uma base qualquer de um espaço vetorial V, vamos começar com um exemplo em que a base é a canônica:

Exemplo 1: Considere a base canônica de $V = \mathbb{R}^3$, dada por

$$\beta = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}.$$

Pela definição de base, sabemos que β, além de ser um conjunto LI, também é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$. Assim, qualquer vetor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito (de forma única) como uma combinação linear dos vetores de β.

Como β é a base canônica, essa combinação linear é imediata:

$$v = (x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Veja que os escalares da combinação linear acima são as respectivas "coordenadas" do vetor $v = (x, y, z)$. Esse é um fato importante, que define o conceito de "coordenadas".

Em relação à base canônica podemos denotar simplesmente $v = (x, y, z)$, mas uma notação alternativa, que destaca a base β considerada, é dada pela forma matricial

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Coordenadas de um vetor em relação a uma base

Vamos generalizar essa ideia para uma base qualquer de um espaço vetorial genérico.

Definição: Seja $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ uma base qualquer de um espaço vetorial V. Para cada elemento $v \in V$ definimos as suas coordenadas em relação à base β como os escalares $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \cdots + a_n v_n.$$

Notação: Denota-se as coordenadas de $v \in V$ em relação à base $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ por

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Nomenclatura: $[v]_\beta$ é chamada de matriz de coordenadas de v na base β.

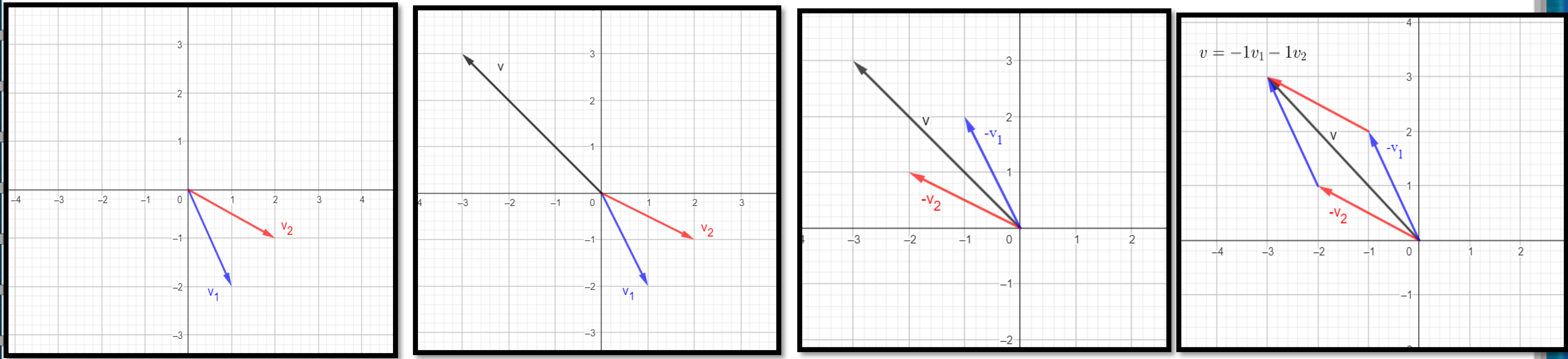
Observação: As coordenadas de um vetor dependem da base β considerada, bem como da ordem de seus elementos. Por isso, β é considerada como uma base ordenada.

Exercício 1: Em $V = \mathbb{R}^2$ considere a base $\beta = \{(1,-2),(2,-1)\}$. Determine a matriz de coordenadas de $v = (-3,3)$ em relação à base β.

Solução: Resolvido em aula, quando obtemos $[v]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, que significa que

$$v = -1v_1 + (-1v_2),$$

conforme interpretação geométrica abaixo:



Exercícios

Exercício 2: Em $V = P_2$ considere a base $\beta = \{1 - x^2, -3 + 1x + 2x^2,\ 1 - x + x^2\}$. Determine a matriz de coordenadas de $p(x) = -5 + 7x - 8x^2$ em relação à base β.

Solução: Resolvido em aula.

Exercício 3:Em $V = M(2,2)$ considere a base

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Determine as coordenadas de $A = \begin{bmatrix} 13 & -8 \\ -7 & 10 \end{bmatrix}$ em relação à base β.

Solução: Resolvido em aula.

Exercício 4: Em $V = \mathbb{R}^3$ considere as bases

$$\beta = \{(1,0,-1),(2,1,-1),(0,-1,-2)\} \quad \text{e} \quad \alpha = \{(1,-3,1),(2,-7,0),(-1,1,-4)\}$$

Determine a matriz de coordenadas de $v = (-5,7,9)$ em relação:

a) a base β. Solução: Deixado como exercício.

b) a base α. Solução: Deixado como exercício.

c) É possível estabelecer alguma relação entre $[v]_\alpha$ e $[v]_\beta$?

Exemplo 2: Em $V = \mathbb{R}^2$ considere a base $\beta = \{(1,1), (-1,1)\}$. Determine a matriz de coordenadas de $v = (1,3)$ em relação à base β.

Solução: Devemos encontrar os escalares $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = a_1(1,1) + a_2(-1,1)$$

ou seja

$$(1,3) = (a_1 - a_2, a_1 + a_2)$$

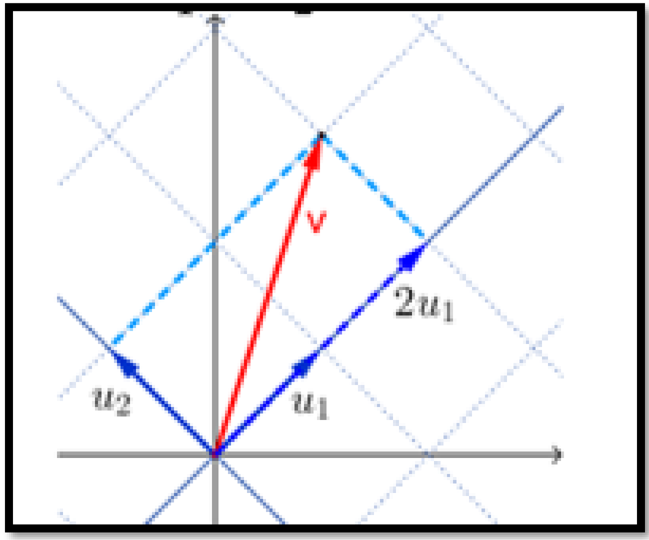
que fornece o sistema linear

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 1 \\ a_1 + a_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 = 4 \\ a_2 = 3 - a_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Portanto, a matriz de coordenadas de $v = (1,3)$ em relação à base β é

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Geometricamente, a matriz acima indica que para obter o vetor $v = (1,3)$, utilizando a base β como referencial, é necessário duplicar o vetor $u_1 = (1,1)$ e manter a identidade do vetor $u_2 = (-1,1)$ (veja a figura ao lado) e obter $v = 2u_1 + 1u_2$.



Exemplos Resolvidos

Exemplo 3: Considere as bases $\alpha = \{(-2,5),(4,-1)\}$ e $\gamma = \{(1,-3),(4,-9)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Determine as matrizes de coordenadas de $v = (8,7)$ em relação às bases α e γ.

Solução: Em relação à base α, queremos encontrar os escalares $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$(8,7) = v = a_1(-2,5) + a_2(4,-1) = (-2a_1 + 4a_2, 5a_1 - a_2).$$

Logo $\begin{cases} -2a_1 + 4a_2 = 8 \\ 5a_1 - a_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_1 + 4(5a_1 - 7) = 8 \\ a_2 = 5a_1 - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18a_1 = 8 + 28 \\ a_2 = 5a_1 - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{cases}$

Portanto, a matriz de coordenadas de $v = (1,3)$ em relação à base α é

$$[v]_\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Em relação à base γ, queremos encontrar os escalares $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$(8,7) = v = a_1(1,-3) + a_2(4,-9) = (a_1 + 4a_2, -3a_1 - 9a_2).$$

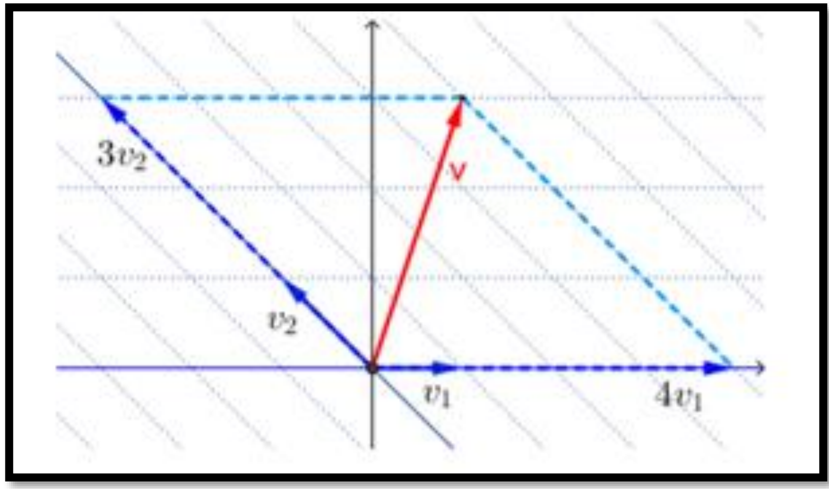
Logo $\begin{cases} a_1 + 4a_2 = 8 \\ -3a_1 - 9a_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 8 - 4a_2 \\ -3(8 - 4a_2) - 9a_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ 3a_2 = 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -100/3 \\ a_2 = 31/3 \end{cases}$

Portanto, a matriz de coordenadas de $v = (8,7)$ em relação à base γ é

$$[v]_\gamma = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100/3 \\ 31/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -100 \\ 31 \end{bmatrix}.$$

Exemplos Resolvidos

Exemplo 4: Na figura abaixo estão representados a base $\beta = \{v_1, v_2\}$ e um vetor $v \in \mathbb{R}^2$. Determine a matriz de coordenadas de v em relação à base β.



Solução: Interpretando a figura, temos que

$$v = 4v_1 + 3v_2$$

Logo a matriz das coordenadas de v em relação à base β é

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 5: Em $V = \mathbb{R}^3$ considere a base $\beta = \{(1,2,3), (0,-1,2), (-1,0,5)\}$. Determine as coordenadas de $v = (29, -7, -11)$ em relação à base β.

Solução: Devemos obter os escalares $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$(29, -7, -11) = a_1(1,2,3) + a_2(0,-1,2) + a_3(-1,0,5)$$
$$= (a_1 - a_3, 2a_1 - a_2, 3a_1 + 2a_2 + 5a_3),$$

ou seja $\begin{cases} a_1 - a_3 = 29 \\ 2a_1 - a_2 = -7 \\ 3a_1 + 2a_2 + 5a_3 = -11 \end{cases}$

$a_3 = a_1 - 29 = 10 - 29 = -19$

$a_2 = 2a_1 + 7 = 2.10 + 7 = 27$

$3a_1 + 2(2a_1 + 7) + 5(a_1 - 29) = -11$

$3a_1 + 4a_1 + 5a_1 = -11 - 14 + 145$

$12a_1 = 120 \quad a_1 = 10$

Exemplos Resolvidos

Portanto, as coordenadas de $v = (29, -7, -11)$ em relação à base β são $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 10 \\ 27 \\ -19 \end{bmatrix}$.

Exemplo 5: Em $V = P_3$ considere a base $\beta = \{2 - x^3, x - x^2,\ x + x^2,\ -2 + 2x^3\}$. Determine as coordenadas de $p(x) = 4 - 3x + 7x^2 - 5x^3$em relação à base β.

Solução: Devemos obter os escalares $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} 4 - 3x + 7x^2 - 5x^3 &= a_1(2 - x^3) + a_2(x - x^2) + a_3(x + x^2) + a_4(-2 + 2x^3) \\ &= (2a_1 - 2a_4) + (a_2 + a_3)x + (-a_2 + a_3)x^2 + (-a_1 + 2a_4)x^3 \end{aligned}$$

ou seja
$$\begin{cases} 2a_1 - 2a_4 = 4 \\ a_2 + a_3 = -3 \\ -a_2 + a_3 = 7 \\ -a_1 + 2a_4 = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 - 2a_4 = 4 \\ -a_1 + 2a_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ 2a_4 = -5 + (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_4 = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 + a_3 = -3 \\ -a_2 + a_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_3 = 4 \\ a_2 = -3 - a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 2 \\ a_2 = -5 \end{cases}$$

Portanto, as coordenadas de $p(x) = 4 - 3x + 7x^2 - 5x^3$em relação à base β é

$$[p]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = -5 \\ a_3 = 2 \\ a_4 = -3 \end{cases}$$

Exemplo 6: Em $V = M(2,2)$ considere a base

$$\beta = \left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right\}.$$

Determine as coordenadas de $A = \begin{bmatrix} -11 & 9 \\ -8 & -15 \end{bmatrix}$ em relação à base β.

Solução: Devemos obter os escalares $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = \begin{bmatrix} -11 & 9 \\ -8 & -15 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & -a_1 - a_3 + a_4 \\ a_1 - a_2 - a_4 & a_2 + a_3 + 2a_4 \end{bmatrix}$$

ou seja $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = -11 \\ -a_1 - a_3 + a_4 = 9 \\ a_1 - a_2 - a_4 = -8 \\ a_2 + a_3 + 2a_4 = -15 \end{cases}$

Vamos resolver o sistema pelo escalonamento da sua matriz ampliada

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | -11 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & | \ 9 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & | -8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & | -15 \end{bmatrix}$$

Exemplos Resolvidos

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -11 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -15 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -15 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_3 \to L_3 + 2L_2 \\ L_4 \to L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -13 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_3 \leftrightarrow -L_3 \\ L_4 \to L_4 + L_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -14 \end{array}\right]$$

Assim

$$2a_4 = -14 \qquad a_4 = -7$$

$$a_3 - a_4 = 1 \qquad a_3 = 1 + a_4 = -6$$

$$a_2 + a_4 = -2 \qquad a_2 = -2 - a_4 = -2 + 7 = 5$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = -11 \qquad a_1 = -11 - a_2 - a_3 = -11 - 5 + 6 = -10$$

Portanto, as coordenadas de A em relação à base β são

$$[A]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 5 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Exemplos Resolvidos

Exemplo 7: Em $V=\mathbb{R}^2$ considere as bases $\beta=\{(-2,3),(4,-5)\}$ e $\alpha=\{(1,1),(-1,1)\}$.

Sabendo que $[v]_\beta=\begin{bmatrix}6\\-7\end{bmatrix}$ determine $[v]_\alpha$.

Solução: Interpretando a matriz de coordenadas de v na base β temos que

$$v=6(-2,3)-7(4,-5)\;=(-40,53)$$

Assim, determinar $[v]_\alpha$ significa obter $a_1,a_2\in\mathbb{R}$ tais que

$$v=a_1(1,1)+a_2(-1,1)$$

ou seja

$$(-40,53)=(a_1-a_2,a_1+a_2)$$

logo

$$\begin{cases}a_1-a_2=-40\\ a_1+a_2=53\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}2a_1=13\\ a_2=53-a_1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a_1=13/2\\ a_2=93/2\end{cases}$$

Portanto, a matriz de coordenadas de v em relação à base α é

$$[v]_\alpha=\begin{bmatrix}13/2\\93/2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}13\\93\end{bmatrix}.$$

Questão: É possível estabelecer alguma relação entre as coordenadas de v em relação à diferentes base de $\mathbb{R}^2$, ou seja, entre $[v]_\alpha$ e $[v]_\beta$?

Mudança de Base

Questão: É possível estabelecer alguma relação entre as coordenadas de v em relação à diferentes bases α e β de um mesmo espaço vetorial, ou seja, entre $[v]_\alpha$ e $[v]_\beta$?

Para isso, vamos considerar um espaço vetorial V tal que $\dim(V) = 3$ e duas bases distintas para V, dadas por

$$\alpha = \{u_1, u_2, u_3\} \quad \text{e} \quad \beta = \{v_1, v_2, v_3\}.$$

Para um elemento qualquer $v \in V$ sabemos obter suas coordenadas em relação às bases α e β. Suponhamos que

$$[v]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [v]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

que significa que

$$v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$$

e

$$v = y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3.$$

Para estabelecer uma relação entre $[v]_\alpha$ e $[v]_\beta$ vamos escrever os elementos da base β como uma combinação linear da base α. Veja que isso é possível pois, por ser base, os elementos de α geram todos os vetores de V, inclusive os elementos de β.

Mudança de Base

Escrevendo cada um dos vetores de β como uma combinação linear da base α, obtemos

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 \\ v_2 &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 \\ v_3 &= a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3 \end{aligned}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Substituindo as igualdades acima em $v = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3$ e reorganizando os termos, obtemos que

$$\begin{aligned} v &= y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 \\ &= y_1(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3) + y_2(a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3) + y_3(a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3) \\ &= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3)u_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3)u_2 + (a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3)u_3 \end{aligned}$$

que consiste em uma combinação linear de v em relação à base $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$.

Como na base α tínhamos que $v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$, obtemos que os escalares nessas duas combinações lineares devem ser respectivamente iguais, ou seja,

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = x_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = x_2 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 = x_3 \end{cases}.$$

Mudança de Base

Podemos reescrever o sistema anterior na forma matricial e obter

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} . [v]_\beta = [v]_\alpha$$

A matriz quadrada acima é chamada de matriz da mudança de base de β para α e é denotada por

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Veja que a igualdade anterior significa que

$$[v]_\alpha = [I]_\alpha^\beta . [v]_\beta$$

ou seja, a relação existente entre as coordenadas de v nas bases β e α é dada por um produto de matrizes.

Mudança de Base

Observação: Note que a dedução anterior nos ensina a obter sempre as colunas da matriz mudança de base $[I]_\alpha^\beta$. As colunas dessa matriz são definidas pelos escalares obtidos quando os elementos da base β (base de saída) são escritos como uma combinação linear da base α (base de chegada).

A dedução anterior pode ser generalizada para um espaço vetorial de qualquer dimensão:

Definição: Sejam $\alpha = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ e $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ duas bases distintas de um mesmo espaço vetorial V. A matriz mudança de base de β para α, denotada por $[I]_\alpha^\beta$, é tal que

$$[v]_\alpha = [I]_\alpha^\beta . [v]_\beta$$

Além disso, as colunas de $[I]_\alpha^\beta$ correspondem às coordenadas dos elementos da base β em relação à base α.

Exemplo 8: Em $V = \mathbb{R}^2$ considere as bases $\beta = \{(-2,3),(4,-5)\}$ e $\alpha = \{(1,1),(-1,1)\}$.

a) Determine a matriz $[I]_\alpha^\beta$.

b) Se $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix}$ determine $[v]_\alpha$.

Exemplo Resolvido

Solução: a) Vamos obter as colunas de $[I]_{\alpha}^{\beta}$. Para isso, escrevemos os elementos de β como uma combinação linear de α.

Para $(-2,3)$ temos que

$$(-2,3) = a(1,1) + b(-1,1) = (a-b, a+b)$$

logo

$$\begin{cases} a - b = -2 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ b = 3 - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 5/2 \end{cases}.$$

Os valores obtidos acima formam a primeira coluna de $[I]_{\alpha}^{\beta}$.

Para $(4,-5)$ temos que

$$(4,-5) = c(1,1) + d(-1,1) = (c-d, c+d)$$

logo

$$\begin{cases} c - d = 4 \\ c + d = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c = -1 \\ d = -5 - c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -1/2 \\ d = -9/2 \end{cases}.$$

Os valores obtidos acima formam a segunda coluna de $[I]_{\alpha}^{\beta}$.

Portanto, a matriz mudança de base é

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 5/2 & -9/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}.$$

Exemplo Resolvido

Solução: b) Como $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix}$, usando a relação $[v]_\alpha = [I]_\alpha^\beta \, . [v]_\beta$ obtemos que

$$[v]_\alpha = [I]_\alpha^\beta \, . [v]_\beta = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 \\ 93 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 93/2 \end{bmatrix}.$$

- Questão: E se quisermos obter a matriz de mudança de base α para β?

Basta aplicar a definição abaixo:

Definição: Sejam α e β duas bases distintas de um mesmo espaço vetorial V.
A matriz mudança de base de α para β é a inversa da matriz mudança de base de β para α, ou seja

$$[I]_\beta^\alpha = \left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} .$$

De forma análoga, temos que

$$[v]_\beta = [I]_\beta^\alpha \, . [v]_\alpha$$

No Exemplo anterior, a matriz de mudança de α para β é dada por

$$[I]_\beta^\alpha = \left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 5/2 & -9/2 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 9/2 & -1/2 \\ 5/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Exercícios:

Veja que para obter $[I]_{\beta}^{\alpha}$ também é possível escrever os elementos da base α (base de saída) como uma combinação linear da base β (base de chegada). Faça isso como exercício.

c) No exemplo anterior, se $[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} -14 \\ 58 \end{bmatrix}$ determine $[v]_{\beta}$.

Solução: Temos que

$$[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha} \,.\, [v]_{\alpha} = \left([I]_{\alpha}^{\beta}\right)^{-1} . \,[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 9/2 & -1/2 \\ 5/2 & -1/2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -14 \\ 58 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -92 \\ -39 \end{bmatrix}.$$

Exercício 5: Em $V = \mathbb{R}^3$ considere as bases $\beta = \{(1,0,-1),(2,1,-1),(0,-1,-2)\}$ e

$$\alpha = \{(1,-3,1),(2,-7,0),(-1,1,-4)\}.$$

a) Determine a matriz $[I]_{\alpha}^{\beta}$.

b) Se $[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix}$ determine $[v]_{\alpha}$.

Solução: Exercício resolvido parcialmente durante a aula.