O plano
(Exemplos)

a) Determine a equação geral do plano

A equação geral do plano é dada por

$$ax + by + cz + d = 0$$

em que $\vec{n} = (a, b, c)$. Assim, tem-se

$$3x + 2y - 4z + d = 0$$

Substituindo o ponto A nesta equação,

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 3 + d = 0$$

$$-8 + d = 0$$

$$d = 8$$

Assim, a equação geral do plano é

$$3x + 2y - 4z + 8 = 0$$

Exemplo 01: Considere um plano π que passa pelo ponto $A(2, -1{,}3)$ e tem como um vetor normal o vetor $\vec{n} = (3{,}2, -4)$. Responda cada uma das alternativas a seguir.

b) Verifique se os pontos $P_1\left(-1, \frac{2}{3}, 4\right)$ e $P_2\left(1, -1, \frac{9}{4}\right)$ são pontos do plano.

Basta substituir os valores de cada ponto na equação geral do plano, verificando se a igualdade se mantém.

Ponto P_1:

$$3 \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{2}{3} - 4 \cdot 4 + 8 = 0\ ?$$

$$-\frac{29}{3} \neq 0$$

O ponto P_1 não pertence ao plano

Ponto P_2:

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 4 \cdot \frac{9}{4} + 8 = 0\ ?$$

$$1 - 9 + 8 = 0$$

O ponto P_2 pertence ao plano.

Exemplo 01: Considere um plano π que passa pelo ponto $A(2, -1,3)$ e tem como um vetor normal o vetor $\vec{n} = (3,2, -4)$. Responda cada uma das alternativas a seguir.

c) Apresente pontos do plano que sejam da forma $P(x,-1,2)$ e $M(1,y,2)$.

Basta substituir os pontos na equação geral do plano, obtendo assim a terceira variável.

Ponto P:

$$3x+2\cdot(-1)-4\cdot 2+8=0$$

$$3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

$$\therefore P\left(\frac{2}{3},-1,2\right)$$

Ponto M:

$$3\cdot 1+2y-4\cdot 2+8=0$$

$$2y+3=0 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore M\left(1,-\frac{3}{2},2\right)$$

Exemplo 01: Considere um plano π que passa pelo ponto $A(2,-1,3)$ e tem como um vetor normal o vetor $\vec{n}=(3,2,-4)$. Responda cada uma das alternativas a seguir.

d) Apresente dois pontos do plano que não sejam nenhum dos pontos mencionados anteriormente.

Neste caso, basta escolher valores arbitrários (diferentes dos que já foram apresentados, claro) para duas das três variáveis, calculando a terceira.

Ponto A_1: $x = y = 0$

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 4z + 8 = 0 \Rightarrow z = 2$$

$$\therefore A_1(0,0,2)$$

Ponto A_2: $x = z = 0$

$$3 \cdot 0 + 2y - 4 \cdot 0 + 8 = 0 \Rightarrow y = -4$$

$$\therefore A_2(0,-4,0)$$

Exemplo 01: Considere um plano π que passa pelo ponto $A(2,-1,3)$ e tem como um vetor normal o vetor $\vec{n} = (3,2,-4)$. Responda cada uma das alternativas a seguir.

e) Apresente outros dois vetores normais do plano.

Conhecendo um vetor normal (o que foi fornecido pelo exercício), qualquer múltiplo não nulo dele também será um vetor normal.

Vetor normal $\overrightarrow{n_1}$:

$$\overrightarrow{n_1} = -\vec{n}$$

$$\overrightarrow{n_1} = (-3, -2, 4)$$

Vetor normal $\overrightarrow{n_2}$:

$$\overrightarrow{n_2} = 2\vec{n}$$

$$\overrightarrow{n_2} = (6, 4, -8)$$

Exemplo 01: Considere um plano π que passa pelo ponto $A(2, -1, 3)$ e tem como um vetor normal o vetor $\vec{n} = (3, 2, -4)$. Responda cada uma das alternativas a seguir.

a) **Determine as equações paramétricas do plano**

$$\begin{cases} x = x_0 + ha_1 + ta_2 \\ y = y_0 + hb_1 + tb_2 \\ z = z_0 + hc_1 + tc_2 \end{cases}$$

com $A(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$

$$\begin{cases} x = 1 + 3h + t \\ y = -3 + h - t \\ z = 4 - 2h + t \end{cases}$$

Exemplo 02: Considere um plano π que passa pelo ponto $A(1, -3,4)$ e que contém representantes dos vetores $\vec{u} = (3,1, -2)$ e $\vec{v} = (1, -1,1)$. Responda as alternativas a seguir.

b) Apresente dois pontos do plano

Basta propor valores arbitrários para os parâmetros h e t, obtendo assim x, y e z.

Ponto P_1: $h = 0$ e $t = 1$

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot 0 + 1 = 2 \\ y = -3 + 0 - 1 = -4 \\ z = 4 - 2 \cdot 0 + 1 = 5 \end{cases}$$

$$\therefore P_1(2, -4, 5)$$

Ponto P_2: $h = 1$ e $t = 0$

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cdot 1 + 0 = 4 \\ y = -3 + 1 - 0 = -2 \\ z = 4 - 2 \cdot 1 + 0 = 2 \end{cases}$$

$$\therefore P_2(4, -2, 2)$$

Exemplo 02: Considere um plano π que passa pelo ponto $A(1, -3, 4)$ e que contém representantes dos vetores $\vec{u} = (3, 1, -2)$ e $\vec{v} = (1, -1, 1)$. Responda as alternativas a seguir.

c) Apresente um vetor normal ao plano

Conhecendo dois vetores base do plano, um vetor normal pode ser obtido com

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} - \vec{k} - 2\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\vec{n} = -\vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\vec{n} = (-1, -5, -4)$$

Exemplo 02: Considere um plano π que passa pelo ponto $A(1, -3, 4)$ e que contém representantes dos vetores $\vec{u} = (3, 1, -2)$ e $\vec{v} = (1, -1, 1)$. Responda as alternativas a seguir.

Sobre a primeira pergunta: três pontos sempre estão em um mesmo plano. A diferença é que, se eles não estiverem em uma mesma linha reta, existirá somente **um** plano contendo eles. Caso contrário (ou seja, se eles estiverem em uma linha reta), os três pontos estarão em uma reta e existirá infinitos planos contendo aquela reta.

Primeiramente, cria-se dois vetores a partir destes 3 pontos (escolhe-se a mesma origem para ambos, por praticidade).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (-3,-1,3) - (2,1,3) \\ &= (-5,-2,0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= C - A \\ &= (4,2,3) - (2,1,3) \\ &= (2,1,0)\end{aligned}$$

Como esses vetores não são múltiplos um do outro, haverá somente um plano contendo estes pontos.

Exemplo 03: Os pontos $A(2,1,3), B(-3,-1,3)$ e $C(4,2,3)$ determinam um plano? Se sim, exiba uma equação para ele.

Criação do plano:

1) Determinação do vetor normal

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = -5\vec{k} + 4\vec{k} = -\vec{k}$$

$$\vec{n} = (0,0,-1)$$

Duas componentes nulas! Plano paralelo a um plano coordenado!

Da videoaula,

" Se $a = b = 0,\ \vec{n} = (0,0,c) = c\vec{k} \Rightarrow \pi\ //\ x0y$

A equação geral do plano fica

$$\boldsymbol{cz + d = 0} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{z = z_0}\text{ "}$$

$\therefore$ Equação geral do plano: $z = 3$

Exemplo 03: Os pontos $A(2,1,3)$ e $B(-3,-1,3)$ e $C(4,2,3)$ determinam um plano? Se sim, exiba uma equação para ele.

Exemplo 04: Determinar a equação geral do plano que contém as retas

$$r: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = -3x - 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4t \\ z = 3 - 6t \end{cases}$$

Inicialmente, obtêm-se os dados de cada reta:

Reta r:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \\ z = -3t - 2 \end{cases}$$

Ponto: $A_r(0,1,-2)$

Vetor: $\overrightarrow{v_r} = (1,2,-3)$

Reta s:

Ponto: $A_s(-1,0,3)$

Vetor: $\overrightarrow{v_s} = (2,4,-6)$

São paralelas?

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \ ?$$

Sim! As retas são paralelas!

São vetores base do plano:

- Um dos vetores diretores

$$\vec{u} = (1,2,-3)$$

- Um vetor que une um ponto de cada reta

$$\vec{v} = \overrightarrow{A_r A_s} = A_s - A_r$$
$$= (-1,0,3) - (0,1,-2)$$
$$= (-1,-1,5)$$

Há duas maneiras de se obter a equação geral do plano.

Maneira 1) Utilizar a condição de coplanaridade.

$$(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{A_r P}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \\ x & y-1 & z+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-(z+2) + 10x + 3(y-1) - 3x - 5(y-1)$$
$$+ 2(z+2) = 0$$

$$-z - 2 + 7x + 3y - 3 - 5y + 5 + 2z + 4 = 0$$

$$\therefore 7x - 2y + z + 4 = 0$$

Exemplo 04: Determinar a equação geral do plano que contém as retas

$$r: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = -3x - 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4t \\ z = 3 - 6t \end{cases}$$

$$\vec{u} = (1,2,-3)$$
$$\vec{v} = (-1,-1,5)$$
$$A_r(0,1,-2)$$

Maneira 2) Cálculo do vetor normal.

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = 10\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} - 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{n} = 7\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{n} = (7,-2,1)$$

Equação geral do plano:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Substituindo o vetor normal

$$7x - 2y + z + d = 0$$

Substituindo o ponto A_r para calcular d,

$$7 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + (-2) + d = 0$$

Exemplo 04: Determinar a equação geral do plano que contém as retas

$$r: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = -3x - 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4t \\ z = 3 - 6t \end{cases}$$

$$7 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + (-2) + d = 0$$

$$-4 + d = 0$$

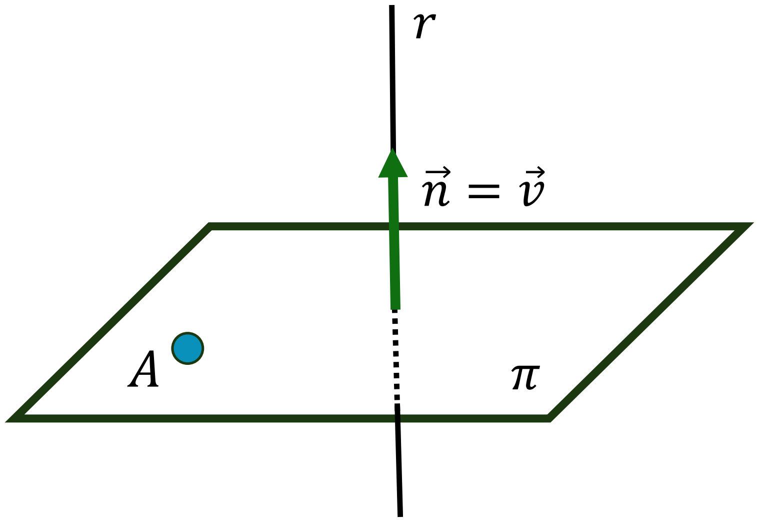
$$d = 4$$

Assim, a equação geral do plano é

$$7x - 2y + z + 4 = 0$$

Exemplo 04: Determinar a equação geral do plano que contém as retas

$$r: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = -3x - 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4t \\ z = 3 - 6t \end{cases}$$



Se a reta é perpendicular ao plano, seu vetor diretor pode ser utilizado como um vetor normal ao plano.

Vetor diretor da reta:

$$\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

$$\vec{v} = (3,2,1) = \vec{n}$$

Exemplo 05: Qual a equação do plano que passa pelo ponto $A(2,1,-2)$ e é perpendicular à reta r: $\begin{cases} x = -4 + 3z \\ y = 1 + 2z \end{cases}$

$\vec{n} = (3,2,1)$

Equação geral do plano:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Substituindo o vetor normal

$$3x + 2y + z + d = 0$$

Substituindo o ponto do plano para calcular d,

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-2) + d = 0$$

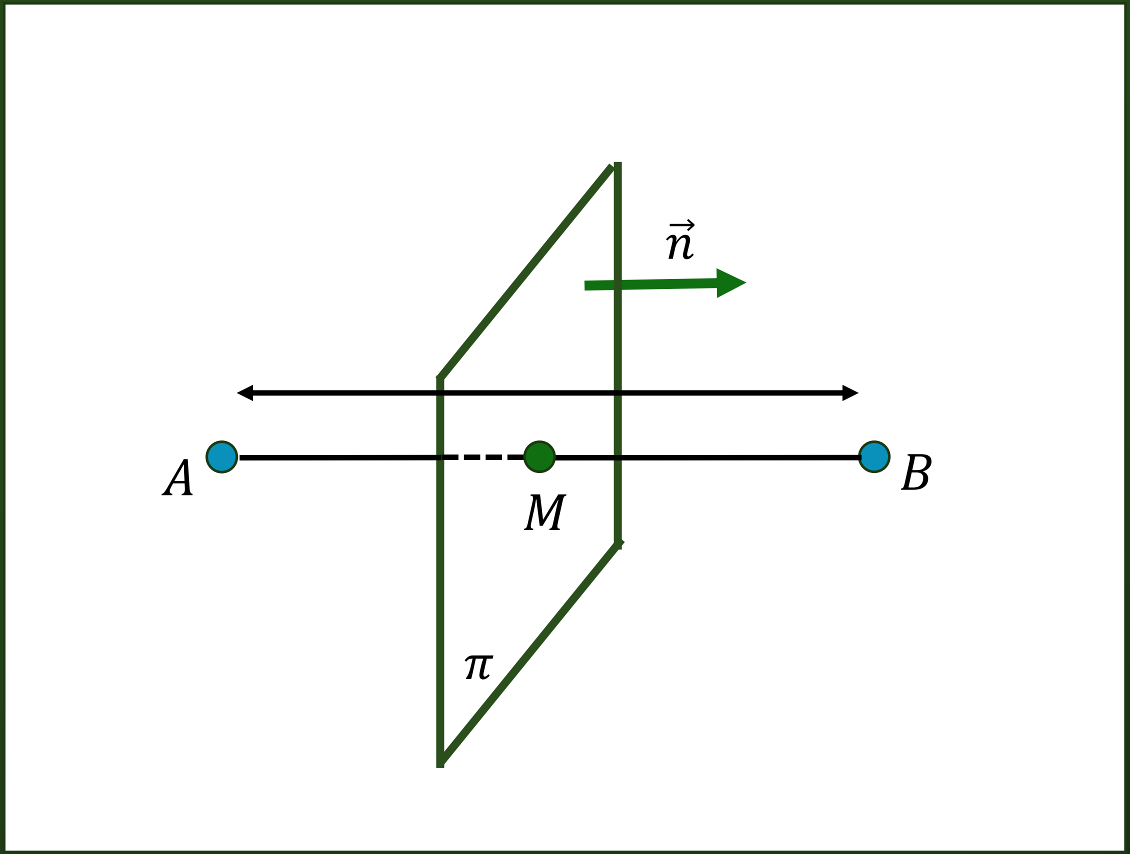
$$6 + d = 0$$

$$d = -6$$

Assim, a equação geral do plano é

$$3x + 2y + z - 6 = 0$$

Exemplo 05: Qual a equação do plano que passa pelo ponto $A(2,1,-2)$ e é perpendicular à reta r: $\begin{cases} x = -4 + 3z \\ y = 1 + 2z \end{cases}$



Uma opção de vetor normal:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = B - A$$
$$= (4,-3,-2) - (2,-1,4)$$
$$= (2,-2,-6)$$

Ponto do plano:

$$M = \frac{A+B}{2}$$
$$= \frac{(2,-1,4) + (4,-3,-2)}{2}$$
$$= (3,-2,1)$$

Exemplo 06: Qual a equação do plano mediador do segmento AB, sendo $A(2,-1,4)$ e $B(4,-3,-2)$

$$\vec{n} = (2,-2,-6)$$
$$M(3,-2,1)$$

Equação geral do plano:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Substituindo o vetor normal

$$2x - 2y - 6z + d = 0$$

Substituindo o ponto M do plano para calcular d,

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) - 6 \cdot 1 + d = 0$$

$$-4 + d = 0$$

$$d = 4$$

Assim, a equação geral do plano é

$$2x - 2y - 6z + 4 = 0$$

ou

$$x - y - 3z + 2 = 0$$

Exemplo 06: Qual a equação do plano mediador do segmento AB, sendo $A(2,-1,4)$ e $B(4,-3,-2)$

Dúvidas?