UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Prova I (ANN0001/ CCI122-03U)

Prof. Helder G. G. de Lima[1]

Nome do(a) aluno(a): ______________________________ Data: 03/04/2018

- Identifique-se em todas as folhas.
- Mantenha o celular e os demais equipamentos eletrônicos desligados durante a prova.
- Justifique cada resposta com cálculos ou argumentos baseados na teoria estudada.
- Sempre que calcular o valor de uma das funções consideradas em um ponto x, arredonde o resultado para o número de dígitos especificado, e só então use esse valor (arredondado) nas fórmulas dos métodos iterativos.
- Resolva apenas os itens de que precisar para somar 10,0 pontos.

1. (2,5) Seja $\overline{x} = \dfrac{618}{50}$.

(a) Obtenha a representação de $\overline{x}$ em binário, com 8 algarismos corretos após a vírgula.

(b) Quantos desses algarismos (binários) são necessários após a vírgula para representar $\overline{x}$ com erro relativo percentual inferior a 5%?

2. (2,5) Considere $f(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{x}$ e $x_0 = 2$.

(a) Mostre que a função $\varphi_1(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$ é uma função de iteração para $f(x) = 0$.

(b) Discuta se é possível garantir que a sequência dada por $x_k = \varphi_1(x_{k-1})$, convergirá para algum $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = 0$. Em caso afirmativo, calcule o erro relativo percentual para x_5.

(c) Mostre que a função $\varphi_2(x) = x - x \cdot f(x)$ é uma função de iteração para $f(x) = 0$.

(d) Discuta se é possível garantir que a sequência dada por $x_k = \varphi_2(x_{k-1})$, convergirá para algum $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = 0$. Em caso afirmativo, calcule o erro relativo percentual para x_5.

(obs: nos itens (b) e (d), arredonde cada $\varphi_i(x)$ com 4 dígitos após a vírgula)

3. (2,5) Obtenha a única raiz do polinômio $p(x) = x^5 - x^3 + x + 2$ com um erro absoluto estimado menor do que 10^{-3}, utilizando o método de Newton (versão para polinômios).
(os resultados devem ser arredondados com 4 dígitos após a vírgula)

4. (2,5) Identifique um intervalo no qual a função $f(x) = \cos(\ln(x))$ tenha um zero $\overline{x} > 1/2$. Aplique o método da posição falsa para obter $x_k \approx \overline{x}$, de modo que $|f(x_k)| < 0,0001$.
(arredonde cada valor de $f(x)$ utilizado com 5 dígitos após a vírgula)

5. (2,5) Utilize o método da bisseção para obter uma raiz de $f(x) = \cos(x)$ no intervalo $[a_0, b_0] = [0, 3]$, com erro relativo percentual estimado inferior a $0,1\%$.
(arredonde cada valor com 5 dígitos após a vírgula)

BOA PROVA!

Respostas

1. (Solução) Observe que $\overline{x} = \dfrac{618}{50} = 12,36 = 12 + 0,36.$

(a) Tem-se $12 = 8 + 4 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (1100)_2$ e além disso,

x	0,36	0,72	0,44	0,88	0,76	0,52	0,04	0,08
2 · x	**0**,72	**1**,44	**0**,88	**1**,76	**1**,52	**1**,04	**0**,08	**0**,16

Logo,

$$\overline{x} = \frac{618}{50} = (12,36)_{10} \approx (1100,01011100)_2.$$

(b) Ao truncar $\overline{x} = 12,65$ para o inteiro $x = 12$, o erro relativo percentual é

$$\varepsilon_{per} = \frac{|12 - 12,65|}{|12,65|} \times 100\% = \frac{|-0,65|}{|12,65|} \times 100\% \approx 2,91\%.$$

Então, não são necessários dígitos após a vírgula para que o erro seja menor do que 5%.
Solução 2: Observando que

$$\varepsilon_{per} < 5\% \Leftrightarrow \frac{|x - 12,36|}{|12,36|} < 0,05 \Leftrightarrow 11,742 < x < 12,978$$

e que $12 \in (11,742, 12,978)$, conclui-se que não é preciso nenhum dígito após a vírgula.

2. (Solução) (a) Basta observar que $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) - \dfrac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\ln(x)}$.

(b) Como $\varphi_1'(x) = -\frac{1}{x(\ln(x))^2}$, tem-se $|\varphi_1'(x_0)| = -\frac{1}{2(\ln(2))^2} \approx |-1,0407| > 1$, e não é possível garantir que a sequência gerada a partir desta aproximação inicial convergirá.

(c) Basta observar que, para todo $x > 0$, tem-se

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow xf(x) = 0 \Leftrightarrow xf(x) + x = x \Leftrightarrow x = x - xf(x) = \varphi_2(x).$$

(d) Como $\varphi_2'(x) = x - xf(x) = x - x\left(\ln(x) - \dfrac{1}{x}\right) = x + 1 - x\ln(x)$, para todo $x > 0$, tem-se:

$$\varphi_2'(x) = (x + 1 - x\ln(x))' = 1 - 1\ln(x) - x\frac{1}{x} = -\ln(x).$$

Assim,

$$|\varphi_2'(x)| < 1 \Leftrightarrow |-\ln(x)| < 1 \Leftrightarrow -1 < \ln(x) < 1 \Leftrightarrow 0,3679 \approx e^{-1} < x < e^1 \approx 2,7183.$$

Considerando que f e φ_2 são contínuas em $I = (e^{-1}, e)$ e que $f(e^{-1}) \approx -3,7183 < 0 < 0,6321 \approx f(e)$, segue do teorema de Bolzano que f possui uma raiz em I. Como $2 \in I$, conclui-se que a sequência $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ definida por $x_0 = 2$ e $x_k = x_{k-1} + 1 - x_{k-1}\ln(x_{k-1})$ para $k \geq 1$, é convergente. Os primeiros termos dessa sequência são os seguintes (arredondados no quarto dígito decimal a cada iteração).

k	0	1	2	3	4	5
$x_k = \varphi_2(x_{k-1})$	2,0000	1,6137	1,8415	1,7171	1,7888	1,7486

Logo, o erro relativo percentual em x_5 é $\varepsilon_{per} \approx |1,7486 - 1,7888|/|1,7486| \approx 2,2990\%$.

3. (Solução) Considerando que $p(-2) = -24 < 0 < 1 = f(-1)$, há uma raiz $\overline{x} \in (-2,-1)$. Escolhendo a aproximação inicial $x_0 = -1$, tem-se:

x_0	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
-1	1	0	-1	0	1	2
		-1	1	0	0	-1
b_k	1	-1	0	0	1	**1**
		-1	2	-2	2	
	1	-2	2	-2	**3**	

Logo, $p(x_0) = 1$ e $p'(x_0) = 3$. Assim, $x_1 = -1 - 1/3 \approx -1,3333$.

x_0	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
-1,3333	1	0	-1	0	1	2
		-1,3333	1,7777	-1,0369	1,3825	-3,1766
b_k	1	-1,3333	0,7777	-1,0369	2,3825	**-1,1766**
		-1,3333	3,5554	-5,7773	9,0854	
c_k	1	-2,6666	4,3331	-6,8142	**11,4679**	

Logo, $p(x_1) = -1,1766$ e $p'(x_1) = 11,4679$. Assim, $x_2 = -1,3333 + 1,1766/11,4679 \approx -1,2307$.

x_0	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
-1,2307	1	0	-1	0	1	2
		-1,2307	1,5146	-0,6333	0,7794	-2,1899
b_k	1	-1,2307	0,5146	-0,6333	1,7794	**-0,1899**
		-1,2307	3,0292	-4,3614	6,147	
c_k	1	-2,4614	3,5438	-4,9947	**7,9264**	

Logo, $p(x_2) = -0,1899$ e $p'(x_2) = 7,9264$. Assim, $x_3 = -1,2307 + 0,1899/7,9264 \approx -1,2067$.

x_0	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
-1,2067	1	0	-1	0	1	2
		-1,2067	1,4561	-0,5504	0,6642	-2,0082
b_k	1	-1,2067	0,4561	-0,5504	1,6642	**-0,0082**
		-1,2067	2,9122	-4,0645	5,5688	
c_k	1	-2,4134	3,3683	-4,6149	**7,233**	

Logo, $p(x_3) = -0,1899$ e $p'(x_3) = 7,9264$. Assim, $x_4 = -1,2307 + 0,1899/7,9264 \approx -1,2067$.
Como $\varepsilon_{abs} \approx |x_4 - x_3| = 0 < 10^{-3}$, $x_4 = -1,2067$ é a aproximação procurada.

4. (Solução) Atribuindo alguns valores para x, obtém-se:

x	2	3	4	5
$f(x)$	0,76924	0,45483	0,18346	-0,03863

Assim, pelo teorema de Bolzano, deve existir uma raiz de f no intervalo $I = (4,5)$.
Estas são as primeiras iterações do método da posição falsa partindo do intervalo inicial $a_0 = 4$ e $b_0 = 5$, com arredondamento no quinto dígito decimal a cada iteração:

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$	$f(b_k)$	$f(a_k) \cdot f(x_k)$
0	4	4,82606	5	0,18346	-0,00323	-0,03863	< 0
1	4	4,81177	4,82606	0,18346	-0,00027	-0,00323	< 0
2	4	4,81058	4,81177	0,18346	-0,00002	-0,00027	< 0

Nesta etapa, obtém-se a aproximação $x_2 = 4,81058$, com $|f(x_2)| \approx 0,00002 < 0,0001$.

5. (Solução) Estas são as primeiras iterações do método da bisseção partindo do intervalo inicial $a_0 = 0$ e $b_0 = 3$, com arredondamento no quinto dígito decimal a cada iteração:

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$	$f(b_k)$	$f(a_k) \cdot f(x_k)$	ε_{per}
0	0	1,5	3	1	0,07074	-0,98999	-	-
1	1,5	2,25	3	0,07074	-0,62817	-0,98999	< 0	33,33333%
2	1,5	1,875	2,25	0,07074	-0,29953	-0,62817	< 0	20,00000%
3	1,5	1,6875	1,875	0,07074	-0,11644	-0,29953	< 0	11,11111%
4	1,5	1,59375	1,6875	0,07074	-0,02295	-0,11644	< 0	5,88235%
5	1,5	1,54688	1,59375	0,07074	0,02391	-0,02295	> 0	3,02997%
6	1,54688	1,57032	1,59375	0,02391	0,00048	-0,02295	> 0	1,49269%
7	1,57032	1,58204	1,59375	0,00048	-0,01124	-0,02295	< 0	0,74082%
8	1,57032	1,57618	1,58204	0,00048	-0,00538	-0,01124	< 0	0,37178%
9	1,57032	1,57325	1,57618	0,00048	-0,00245	-0,00538	< 0	0,18624%
10	1,57032	1,57179	1,57325	0,00048	-0,00099	-0,00245	< 0	0,09289%

Nesta etapa, obtém-se a aproximação $x_{10} = 1,57179$, com $|x_{10} - x_9|/|x_{10}| \approx 0,09289\% < 0,1$.