Coordenadas Polares
(Teoria)

Estrutura desta apresentação

- Sistema de coordenadas polares
  - Introdução
  - O sistema polar
  - Elementos
  - Convenções
  - Relação com o sistema de coordenadas cartesianas
  - O gráfico polar
  - Exemplo
  - Observações finais

Introdução

Até o momento, os pontos no plano foram representados a partir de duas retas fixas perpendiculares entre si – o chamado **sistema de coordenadas cartesianas**.

Define-se agora um outro sistema de coordenadas bidimensional, em que cada ponto é determinado por uma distância e um ângulo – o **sistema de coordenadas polares**.

Este sistema é amplamente utilizado em física e trigonometria, sendo empregado em navegação, aviação, entre outros setores.

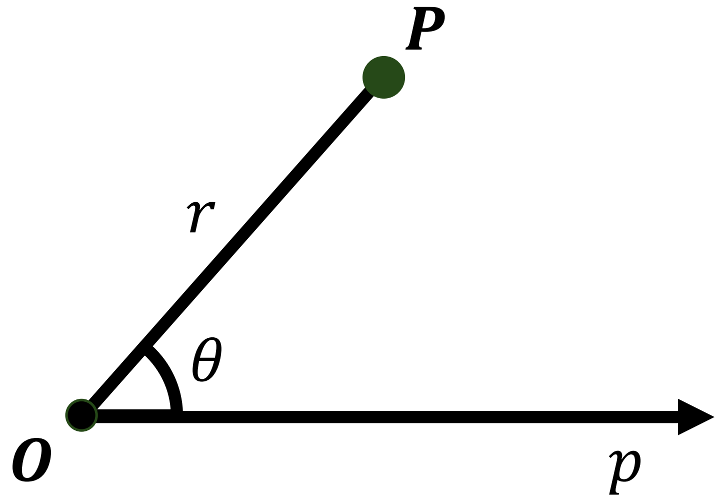
Surge, entre outras disciplinas, em Cálculo Diferencial e Integral, como uma forma de representação de curvas ou em problemas relativos a lugares geométricos.

O sistema polar

O **sistema polar** é caracterizado no espaço bidimensional por um ponto O e uma semirreta p, ambos fixos, em que a semirreta possui o próprio ponto O como sua extremidade.

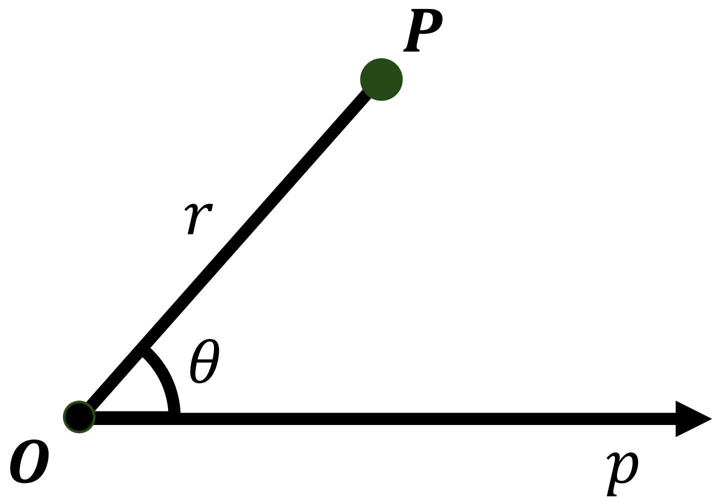
Com este sistema de referência e uma unidade métrica de medida, qualquer ponto P do plano pode ser determinado a partir de um par ordenado (r, θ), em que:

- $r = d(P, O)$, ou seja, a distância do ponto P ao ponto O fixo; e
- θ é o ângulo formado entre o vetor $\overrightarrow{OP}$ e um vetor na direção e sentido da semirreta fixa.



Elementos

- **Polo ou origem:** ponto fixo O;
- **Eixo polar:** semirreta fixa p;
- **Raio:** segmento OP;
- **Distância polar:** comprimento do segmento OP, dado por r;
- **Argumento, anomalia ou ângulo polar**: valor do ângulo θ, dado em **radianos.**



Convenções:

i. O argumento θ respeita a mesma convenção da trigonometria. Ou seja, será considerado positivo se sua orientação for a do sentido anti-horário e negativo se no sentido horário;

ii. No caso do polo O, o valor de r é zero, porém o valor de θ é indefinido. Ou seja, $(0, \theta)$ representa o polo, para qualquer θ;

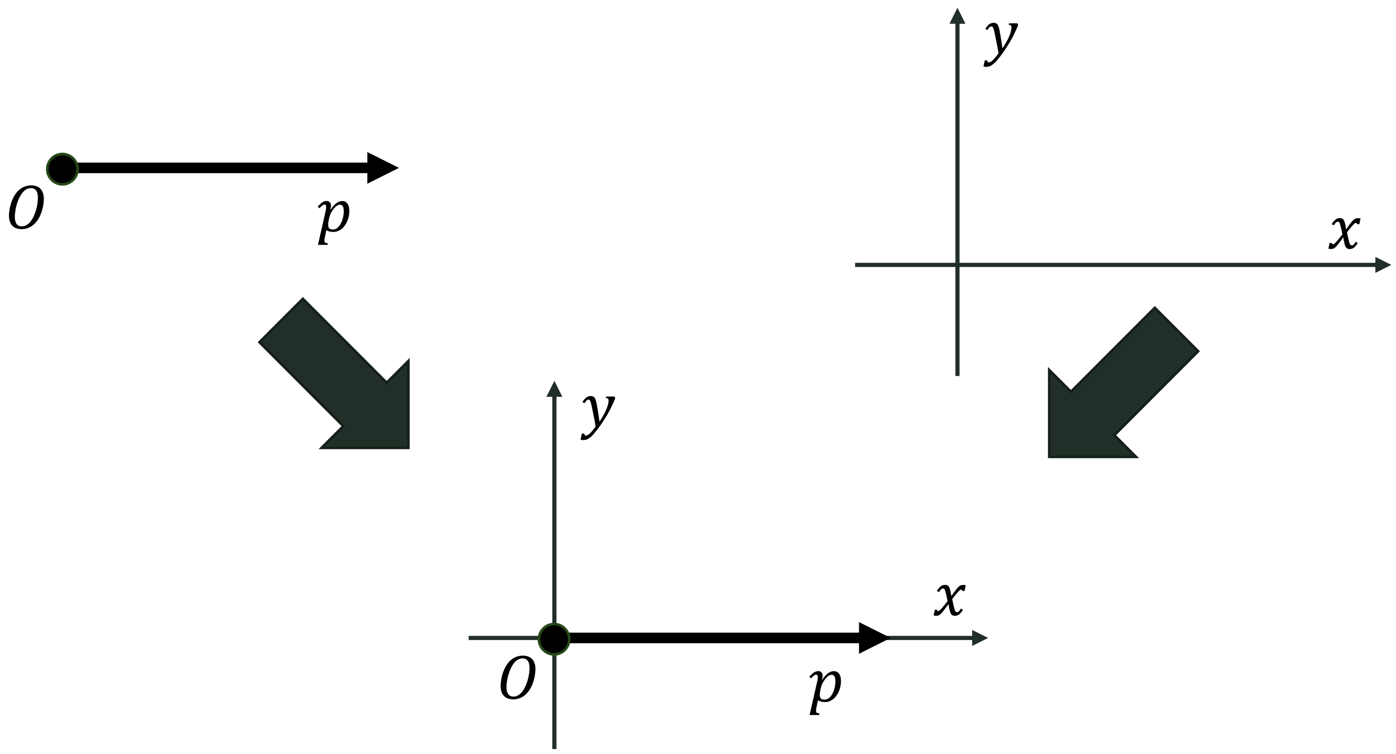
iii. Se $r < 0$, o ponto é aquele obtido através da reflexão, em relação ao polo, do ponto obtido com $|r|$. Ou seja,

$$(r, \theta) = (|r|, \theta + \pi)$$

Relação com o sistema de coordenadas cartesianas

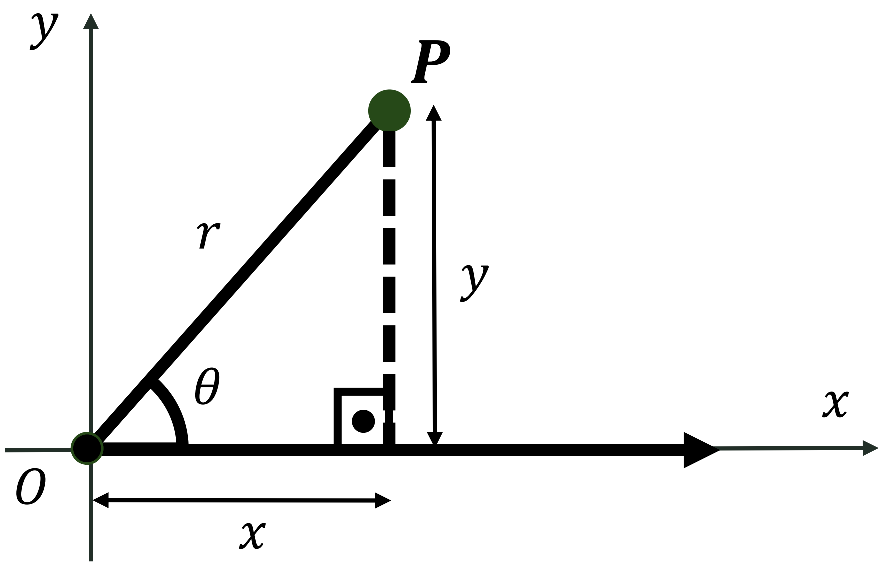
Muitas vezes, é oportuno passar de um referencial cartesiano para um polar, ou de um polar para um cartesiano.

Para esta finalidade, é comum escolher o polo na origem do sistema cartesiano e o eixo polar como o eixo positivo dos x.



Relação com o sistema de coordenadas cartesianas

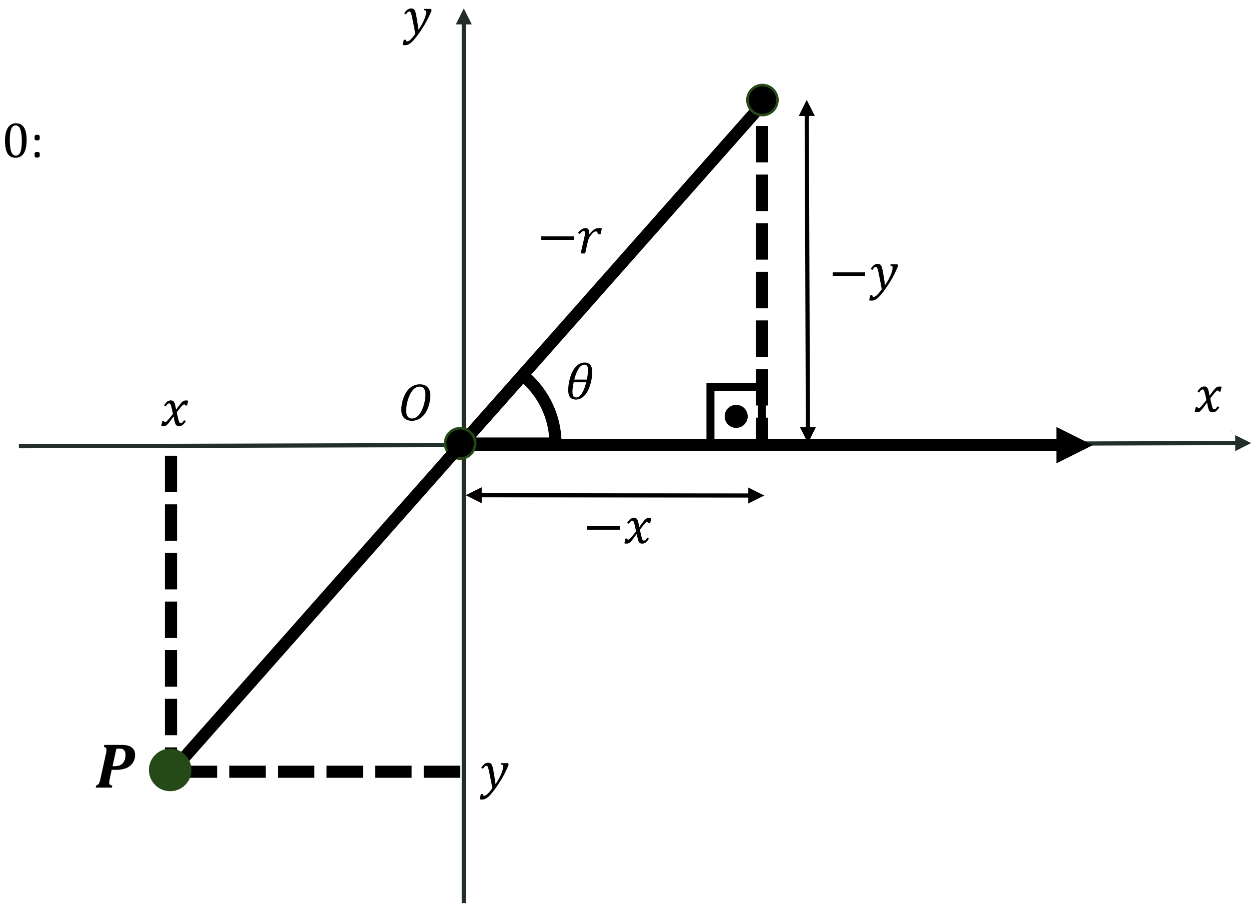
Assim, considerando um ponto P que possui coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ) (assume-se de imediato $r \geq 0$) tem-se:



$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow x = r\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow y = r\operatorname{sen}\theta$$

Caso $r < 0$:



$$\cos\theta = \frac{-x}{-r} \Rightarrow x = r\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-y}{-r} \Rightarrow y = r\operatorname{sen}\theta$$

Relação com o sistema de coordenadas cartesianas

Relação com o sistema de coordenadas cartesianas

Assim, conhecendo o ponto P em coordenadas polares, é possível obter suas coordenadas cartesianas com

$$\boldsymbol{x = r\cos\theta} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{y = r\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Note que

$$x^2 + y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2$$
$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta$$
$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta)$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Com isso, conhecendo o ponto P em coordenadas cartesianas, é possível obter suas coordenadas polares com

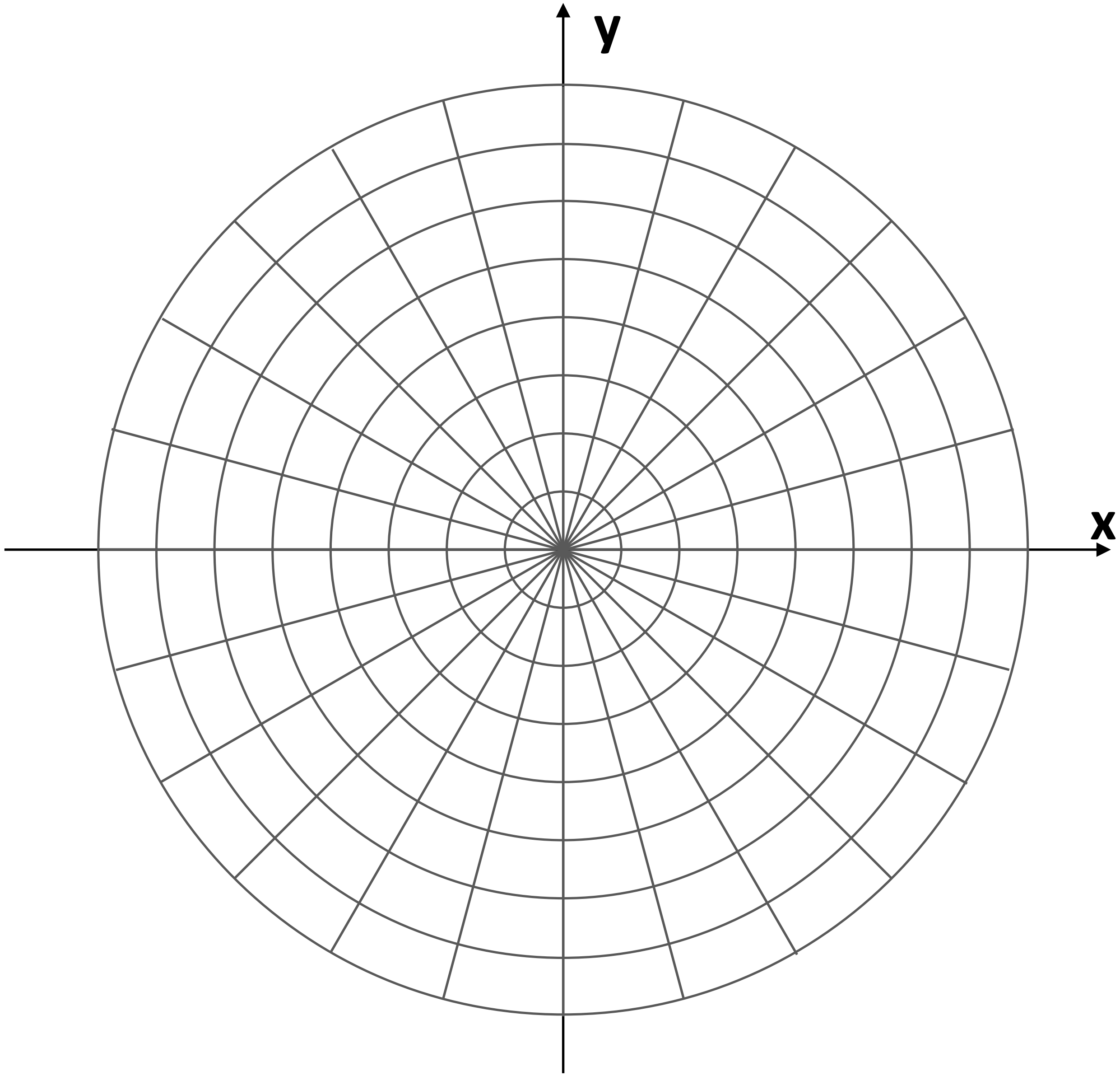
$$\boldsymbol{r^2 = x^2 + y^2}$$

e

$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{x}{r}}, \qquad \boldsymbol{\mathrm{sen}\,\theta = \frac{y}{r}} \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{\mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x}}$$

O gráfico polar

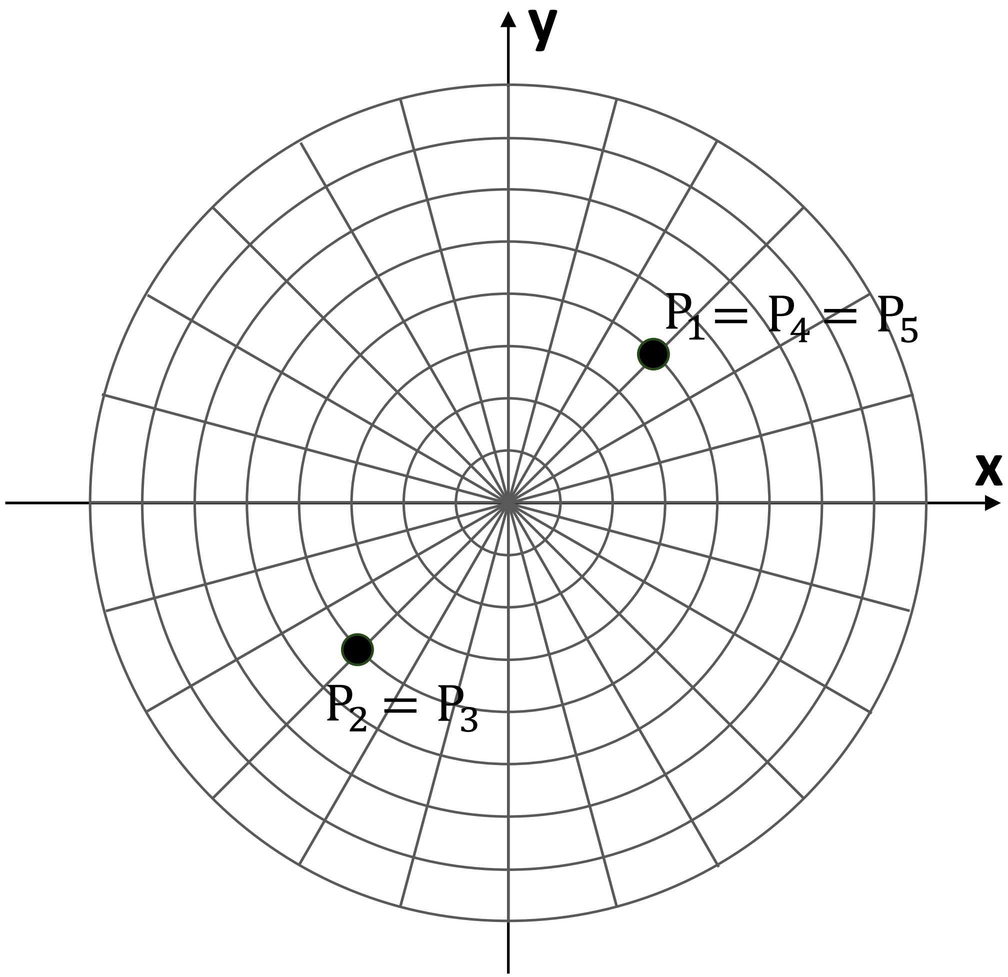
Observação: Normalmente, para fazer a representação em coordenadas polares, utiliza-se o gráfico polar dado abaixo:

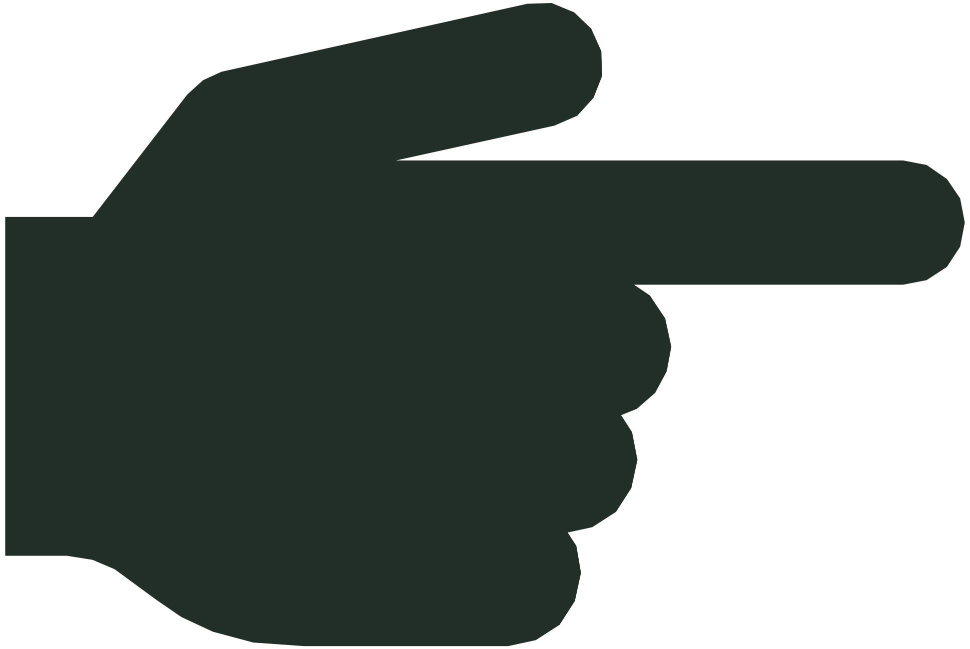


Exemplo

Marque no gráfico polar os pontos:

$$\mathrm{P}_1\left(4,\frac{\pi}{4}\right), P_2\left(-4,\frac{\pi}{4}\right), P_3\left(4,\frac{5\pi}{4}\right), P_4\left(4,\frac{9\pi}{4}\right), P_4\left(4,\frac{-15\pi}{4}\right)$$





Observações finais!

i. Diferentes representações em coordenadas polares levam para um mesmo ponto em coordenadas cartesianas. Isso ocorre pois, além da possibilidade de uma representação com raio positivo e com raio negativo, o argumento admite múltiplas determinações

$$\theta + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

ii. Ao calcular o argumento a partir da calculadora, ela fornece um valor de ângulo. Para um dado valor de seno, cosseno ou tangente, no entanto, há dois possíveis valores de ângulo entre 0 e 2π rad que fornecem o mesmo resultado, cada um deles em quadrantes distintos. Assim, para garantir qual o valor adequado, aconselha-se usar ou duas das fórmulas obtidas para o cálculo do ângulo, ou então o plano cartesiano, uma vez que

Observações finais

y

$$\cos\theta < 0$$
$$\operatorname{sen}\theta > 0$$
$$\operatorname{tg}\theta < 0$$

$$\cos\theta > 0$$
$$\operatorname{sen}\theta > 0$$
$$\operatorname{tg}\theta > 0$$

x

$$\cos\theta < 0$$
$$\operatorname{sen}\theta < 0$$
$$\operatorname{tg}\theta > 0$$

$$\cos\theta > 0$$
$$\operatorname{sen}\theta < 0$$
$$\operatorname{tg}\theta < 0$$