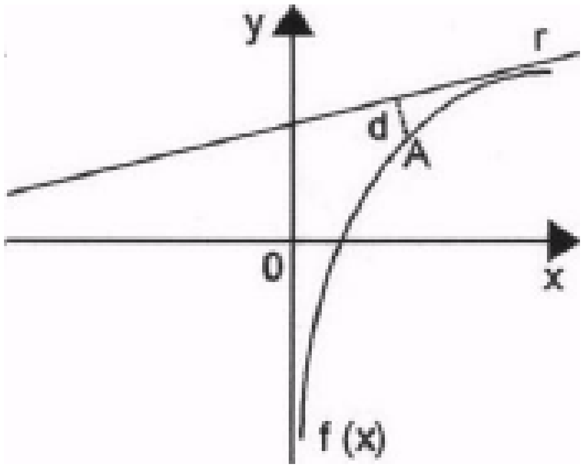
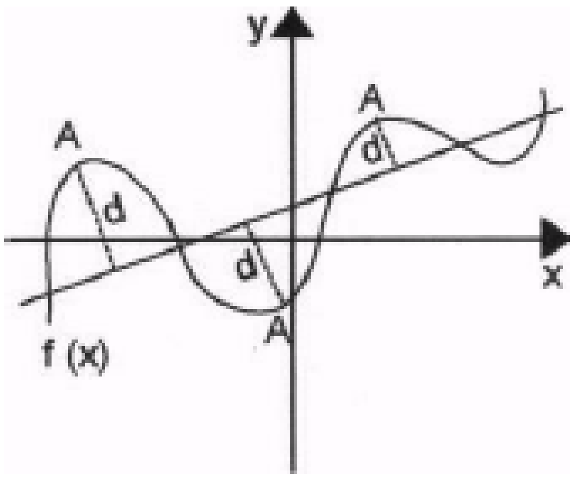
Assíntotas do gráfico de uma função

Definição : Seja $y = f(x)$ uma função, $A(x, f(x))$ um ponto do gráfico de $f(x)$ e r uma reta, quando a distância d entre a reta e o ponto A tende a zero enquanto o ponto A tende ao infinito, esta reta r é dita *assíntota da curva*.





Assíntotas Verticais

A reta $x = a$ é uma *assíntota vertical* do gráfico de $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

i. $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$;

ii. $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$;

iii. $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$;

iv. $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

Assíntota Oblíquas

A curva $f(x)$ tem uma *assíntota oblíqua*, cuja equação é da forma

$$y = kx + b,$$

onde os valores dos coeficientes k e b, se existirem os limites:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right).$$

Observações:

i. Se um dos limites acima não existir, então a curva não tem assíntota oblíqua.

ii. Se $k = 0$ e b existir, então a equação da assíntota será $y = b$ e é chamada de *assíntota horizontal*.

Exemplo:

Use a teoria de derivadas para construir o gráfico das funções dadas a seguir.

a) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$

1. Domínio: $Df = \mathbb{R}^*$

2. Ponto(s) crítico(s): $c \in Df$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c) \nexists$

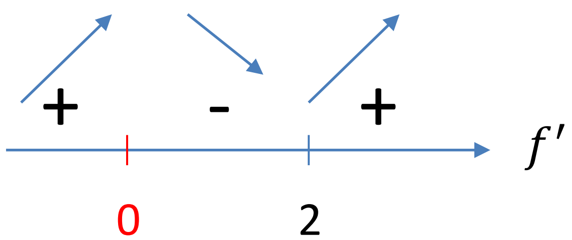
Primeira derivada: $f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{8}{x^3} = 0 \Longrightarrow \frac{x^3-8}{x^3} = 0 \Longrightarrow x^3 - 8 = 0 \Longrightarrow x = 2 \in Df$$

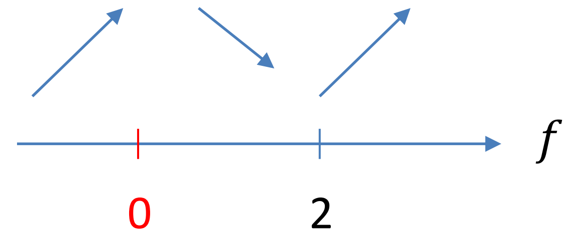
f' existe para todos $\forall x \in Df$

Logo, 2 é o único ponto crítico de f.

3. Análise do sinal de f



- ✓ f é crescente $\forall x \in (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$;
- ✓ f é decrescente $\forall x \in (0,2]$;



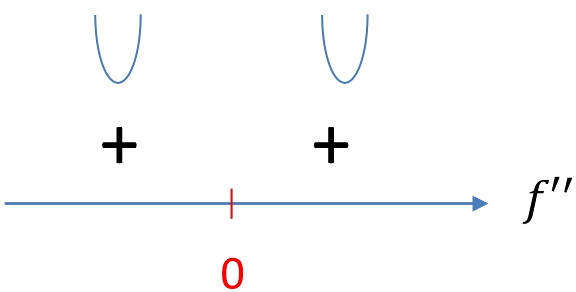
- ✓ Pelo teste da 1ª derivada, 2 é um mínimo local.

4. Estudo do sinal da segunda derivada: $f''(x) = \dfrac{24}{x^4}$

Candidatos a ponto de inflexão: c tal que $f''(c) = 0$ ou $f''(c) \nexists$

- ✓ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{24}{x^4} = 0 \Longrightarrow 24 = 0 \Longrightarrow \nexists c$ tal que $f''(c) = 0$

- ✓ f'' não existe em $x = 0$, mas $0 \notin Df$. Apesar disso, 0 pode ser um ponto de inflexão, pois f está definida na vizinhança de 0.



- ✓ O gráfico de f tem concavidade voltada para cima $\forall x \in Df$.

- ✓ Não há ponto de inflexão.

5. Assíntotas:

- ✓ **Vertical:** a reta $x = 0$ é a única candidata.

Verificando:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(x + \frac{4}{x^2} \right) = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{A reta } x = 0 \text{ é a única assíntota vertical.}$$

- ✓ **Oblíqua:** a reta $y = kx + b$ é a assíntota oblíqua se os limites

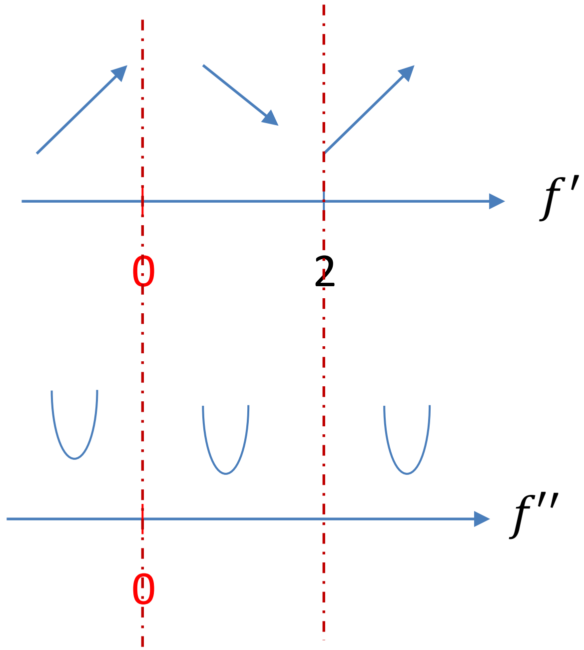
$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad e \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$$

existirem.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + \frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x + \frac{4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{4}{x^2} \right) = 0$$

6. Esboço do gráfico:



Assíntotas: $x = 0$ e $y = x$

b) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

1. Domínio: $Df = (0,1) \cup (1, +\infty)$

2. Ponto(s) crítico(s): c $\in Df$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c) \nexists$

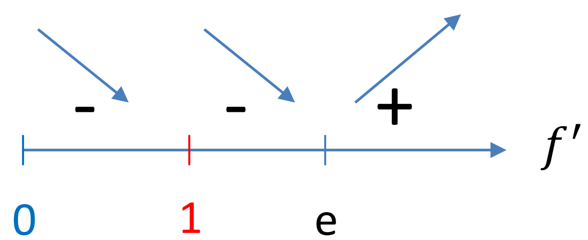
Primeira derivada: $f'(x) = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln(x)}\right)' = \frac{x'(\ln(x)) - x.(\ln(x))'}{(\ln(x))^2} = \frac{(\ln(x)) - x.\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} \Longrightarrow f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$$

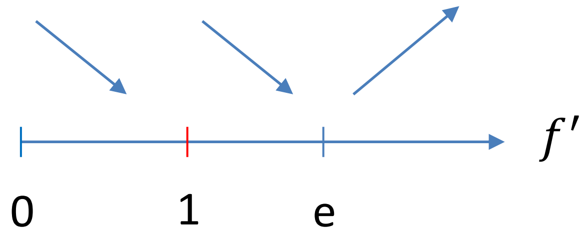
✓ f' existe para todos $\forall x \in Df$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} = 0 \Longrightarrow \ln(x) - 1 = 0 \Longrightarrow x = e \in Df$$

3. Análise do sinal de f



- ✓ f é decrescente $\forall x \in (0,1) \cup (1,e]$;
- ✓ f é crescente $\forall x \in [e,+\infty)$
- ✓ Pelo teste da 1ª derivada, e é um mínimo local.



4. Estudo do sinal da segunda derivada:

$$f''(x) = \left(\frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}\right)' = \frac{(\ln(x) - 1)'\left(\ln^2(x)\right) - (\ln(x) - 1).\left(\ln^2(x)\right)'}{\left(\ln^2(x)\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)\left(\ln^2(x)\right) - (\ln(x) - 1).2\ln(x)\left(\ln(x)\right)'}{\ln^4(x)}$$

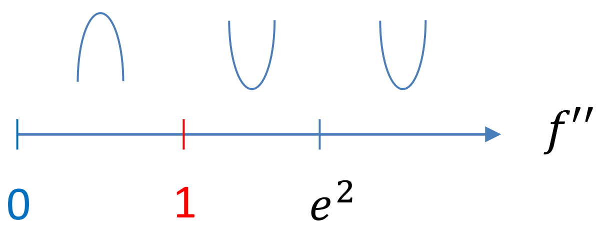
$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\ln^2(x) - (\ln(x) - 1).2\ln(x)\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln^4(x)}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\ln(x)\left(\ln(x) - 2(\ln(x) - 1)\right)}{\ln^4(x)} \Longrightarrow f''(x) = \frac{-\ln(x) + 2}{x\ln^3(x)}$$

Candidatos a ponto de inflexão: c tal que $f''(c) = 0$ ou $f''(c) \nexists$

✓ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\ln(x)+2}{x\ln^3(x)} = 0 \Longrightarrow -\ln(x) + 2 = 0 \Longrightarrow x = e^2 \in Df$

✓ f'' não existe em x =1, $x = 0$ e para todo $x < 0$, que não pertencem ao domínio de f. Destes, 1 pode ser um ponto de inflexão, pois f está definida na vizinhança de 1.



✓ O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo $\forall x \in (0,1)$.

✓ O gráfico de f tem concavidade voltada para cima $\forall x \in (1, +\infty)$.

✓ 1 é um ponto de inflexão.

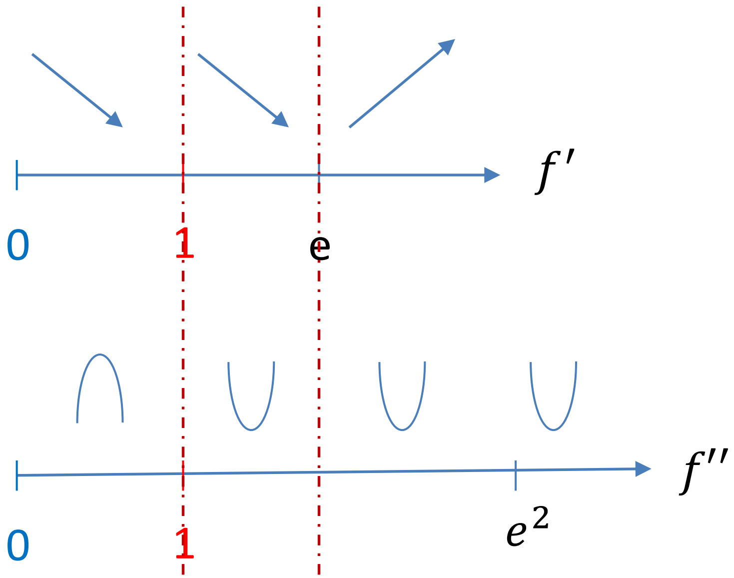
5. Assíntotas:

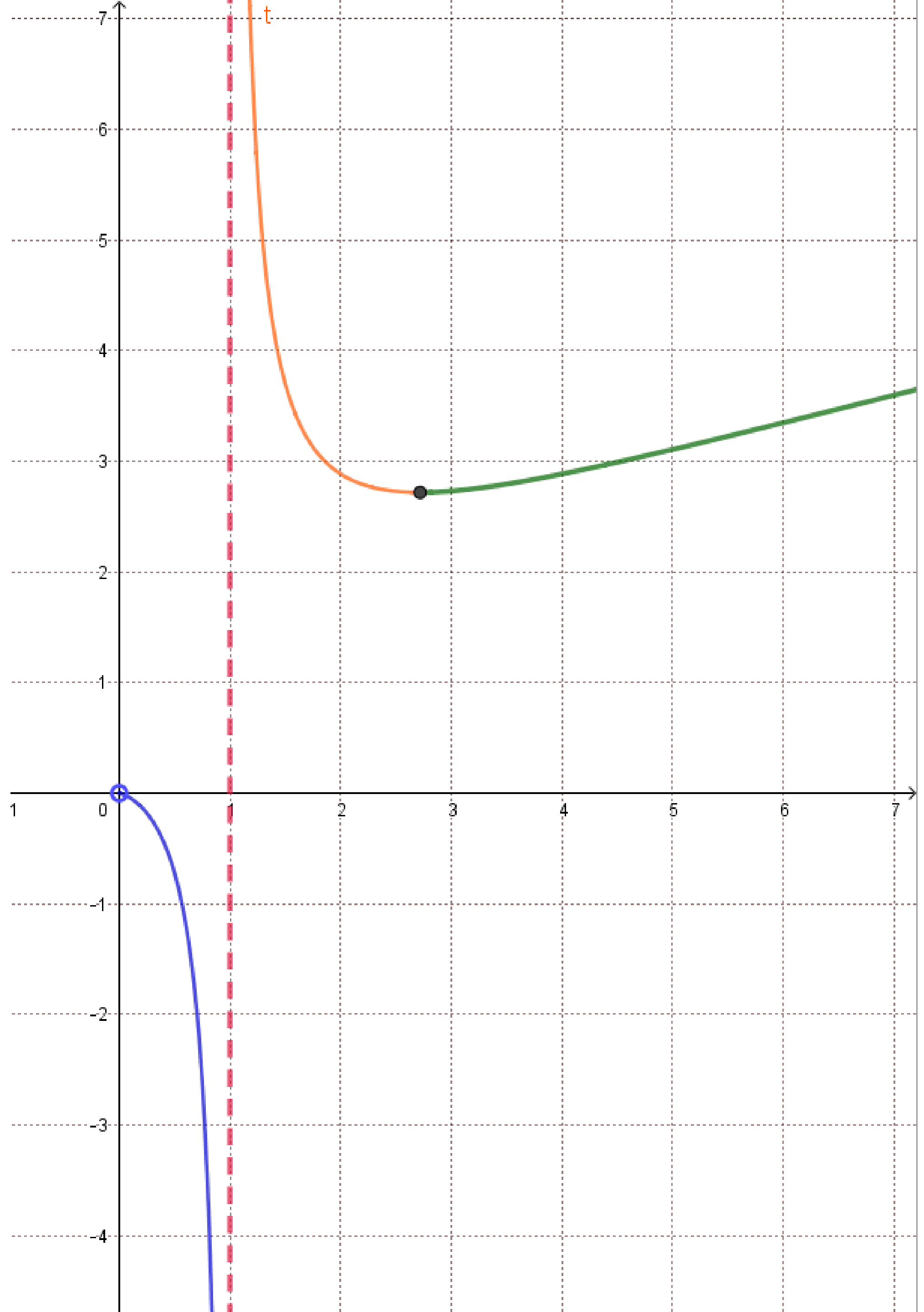
✓ **Vertical:** as retas $x = 0$ e $x = 1$ são candidatas.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x}{\ln(x)} = \infty \quad \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$

6. Esboço do gráfico:





Roteiro para construir os gráficos de funções com a teoria de derivada

1) Encontrar o domínio da função;
2) Obter os pontos críticos;
3) Estudo do sinal de f' para:
   - ✓ Determinar os intervalos de (de)crescimento da função f;
   - ✓ Concluir se há pontos extremos relativos/locais, por meio do teste da 1ª derivada.
4) Determinar os possíveis pontos de inflexão;
5) Estudar os sinal de f'' para:
   - ✓ Obter os intervalos em que o gráfico da função tem concavidade voltada para cima/baixo;
   - ✓ Concluir se existe ponto(s) de inflexão(ões).
6) Investigar a existência de assíntotas verticais e oblíquas;