Álgebra Linear (ALI0001 – CCI-192-02U)

Teoremas sobre a Diagonalização de Operadores

Professor: Marnei Mandler

Aula de ALI do dia 26 de junho de 2023.

UDESC

Autovalores e autovetores

Uma breve revisão dos principais conceitos:

Definição: Seja $T: V \to V$ um operador linear.

Um vetor $v \in V$, com $v \neq \vec{0}_V$ é dito um autovetor de T se e somente se existir um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$T(v) = \lambda v.$$

Nesse caso, o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito autovalor de T, associado ao autovetor v.

Observações:

- Por definição, o vetor nulo $\vec{0}_V$ nunca é autovetor de $T: V \to V$.
- $\lambda = 0$ pode ser autovalor de $T: V \to V$.

Nesse caso, o autovetor associado é um vetor não nulo v tal que $v \in N(T)$.

- Para um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos o autoespaço associado a λ por

$$V_\lambda = \{v \in V;\ T(v) = \lambda v\}.$$

Definição: Um operador linear $T: V \to V$ é dito diagonalizável se existir uma base β para V formada por autovetores de T. Quando isso ocorre, $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonal, com os autovalores situados na diagonal principal.

Teorema

Teorema: Autovetores de um operador $T: V \to V$ que estão associados a autovalores distintos são linearmente independentes (LI).

Justificativa: Sejam v_1 e v_2 autovetores de $T: V \to V$ associados, respectivamente, aos autovalores λ_1 e λ_2, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Por absurdo, supondo que $\{v_1\ , v_2\}$ sejam linearmente dependentes (LD's), temos que existe $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$ tal que

$$v_1 = a v_2.$$

Aplicando T em ambos os lados:

$$T(v_1) = T(a v_2) \ = aT(v_2)$$

e como v_1 e v_2 são autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2, respectivamente, obtemos

$$\lambda_1 v_1 = a\ \lambda_2\ v_2.$$

Substituindo $v_1 = a v_2$, obtemos:

$$\lambda_1 a\ v_2 = a\ \lambda_2\ v_2.$$

Ou seja

$$\lambda_1 a v_2 - a\ \lambda_2\ v_2 = \overrightarrow{0_V}.$$

Teorema

De

$$\lambda_1 a v_2 - a\,\lambda_2\, v_2 = \overrightarrow{0_V}$$

obtemos que

$$(\lambda_1 - \lambda_2) a v_2 = \overrightarrow{0_V}.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $a \neq 0$ obtemos que $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ e, com isso, obrigatoriamente temos que

$$v_2 = \overrightarrow{0_V},$$

o que é uma contradição, pois $v_2 \neq \overrightarrow{0_V}$ uma vez que v_2 é um autovetor de T.

Portanto, $\{v_1, v_2\}$ não podem ser LD e, com isso, temos que $\{v_1, v_2\}$ é LI.

Uma consequência do teorema anterior é o próximo resultado, que facilita a comprovação da existência da base de autovetores para V:

Teorema: Se $\dim(V) = n$ e $T: V \to V$ possuir exatamente n autovalores distintos, então existe uma base para V formada por autovetores *de T e o operador é diagonalizável.*

Justificativa: Se $\dim(V) = n$ e $T: V \to V$ possuir n autovalores distintos, como sabemos que existe um autovetor não nulo associado a cada um desses autovalores, obtemos no total n autovetores não nulos, que são LI pelo Teorema anterior e, com isso, formam uma base para V. Logo, T é diagonalizável.

Exemplo

Exercício 1: Mostre que o operador $T: P_2 \to P_2$ dado por

$$T(a+bx+cx^2) = (4a+2b-2c) + (3a+5b-6c)x + (4a+4b-5c)x^2$$

é diagonalizável.

Solução: O exercício foi resolvido em aula.

Exercício 2: Verifique se o operador $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x,y,z) = (4x-2y+z, -2x+7y-2z, x-2y+4z).$$

é diagonalizável.

Caso positivo, obtenha:

a) A base de P_2 formada por autovetores de T.

b) A matriz de T na forma diagonal D.

c) Mostre que existe uma matriz P invertível tal que

$$P \cdot D = [T] \cdot P.$$

Solução: Todos os itens do exercício foram resolvidos em aula.

Multiplicidade Algébrica e Multiplicidade Geométrica de um Autovalor

Definição:

Seja λ um autovalor de um operador $T: V \to V$ e V_λ o seu autoespaço associado.

O número de vezes em que λ é raiz do polinômio característico $p(\lambda)$ é chamado de **multiplicidade algébrica de λ**.

A dimensão do autoespaço V_λ é chamada de **multiplicidade geométrica de λ**.

Note que no Exercício 2, obtivemos que

$$mult.algeb.(3) = 2 \qquad\qquad mult.algeb.(9) = 1$$

e

$$mult.geom.(3) = \dim(V_3) = 3 \qquad\qquad mult.geom.(9) = \dim(V_9) = 1.$$

Veja que, para todo autovalor λ obtivemos que

$$mult.geom.(\lambda) = mult.algeb.(\lambda)$$

e que o operador T era diagonalizável.

Esse é um fato geral, dado pelo Teorema a seguir:

Exemplo Resolvido

Exemplo 1: Mostre que o operador $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (3x - y + z,\ \ -x + 5y - z,\ x - y + 3z).$$

é diagonalizável.

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução: Vamos obter os autovalores de T e aplicar a teoria fornecida pelos Teoremas anteriores. O polinômio característico de T é dado por

$$p(\lambda) = \det([T - \lambda I]) = det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (3-\lambda).(5-\lambda).(3-\lambda) + 1 + 1 - (5-\lambda) - (3-\lambda) - (3-\lambda)$$

$$= (3-\lambda).(5-\lambda).(3-\lambda) + 2 - 5 + \lambda - 2(3-\lambda)$$

$$= (3-\lambda).(5-\lambda).(3-\lambda) - 3 + \lambda - 2(3-\lambda)$$

$$= (3-\lambda).(5-\lambda).(3-\lambda) - (3-\lambda) - 2(3-\lambda)$$

$$= (3-\lambda).(5-\lambda).(3-\lambda) - 3(3-\lambda)$$

$$= (3-\lambda)[(5-\lambda).(3-\lambda) - 3\,].$$

Aqui, evidenciar o termo comum $(3-\lambda)$ nos facilita a encontrar os autovalores!

Exemplo Resolvido

Continuando:

$$p(\lambda) = (3-\lambda)[(5-\lambda).(3-\lambda) - 3\,]$$
$$= (3-\lambda)[15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 3\,]$$
$$= (3-\lambda)[\lambda^2 - 8\lambda + 12\,].$$

Logo os autovalores são dados por:

$$p(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow (3-\lambda)[\lambda^2 - 8\lambda + 12\,] = 0 \quad \Rightarrow \; 3 - \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0.$$

E os autovalores são

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 6.$$

Como encontramos três autovalores distintos num espaço de dimensão três, pelo Teorema concluímos que T é diagonalizável, pois existe uma base β para $\mathbb{R}^3$ formada pelos autovetores de T, na qual

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Agora vamos obter os autovetores de T.

Exemplo Resolvido

Para $\lambda_1 = 3$:

Substituindo $\lambda = 3$ em $[T - \lambda I] = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$ e escalonando a matriz associada ao sistema homogêneo, obtemos:

$posto([T-3I]) = 2$
$null([T-3I]) = 3 - 2 = 1$

$$[T - 3I] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E os autovetores associados a $\lambda = 3$ são $v = (x, y, z)$ tais que

$$-y + z = 0 \quad \text{e} \quad x - 2y + z = 0.$$

Logo

$$z = y \quad \text{e} \quad x = 2y - z = 2y - y = y.$$

Substituindo em v e isolando a variável livre y, encontramos

$$v = (y, y, y) = y(1,1,1)$$

Assim, temos um único gerador para os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$, dado por $v_1 = (1, 1, 1)$ e o autoespaço associado a $\lambda_1 = 3$ é dado por

$$V_3 = ger\{(1, 1, 1)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = z\}.$$

Prova real:
$T(1,1,1) = (3,3,3)$
$= 3(1,1,1)$

Exemplo Resolvido

Para $\lambda_2 = 2$:

Substituindo $\lambda = 2$ em $[T - \lambda I] = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$ e escalonando a matriz associada ao sistema homogêneo, obtemos:

$$[T - 2I] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$posto([T - 2I]) = 2$
$null([T - 2I]) = 3 - 2 = 1$

Assim, os autovetores associados a $\lambda = 2$ são $v = (x, y, z)$ tais que

$$x - y + z = 0 \quad \text{e} \quad 2y = 0.$$

Logo $\quad y = 0 \quad$ e $\quad x = 0 - z = -z.$

Substituindo em v e isolando a variável livre z, encontramos

$$v = (-z, 0, z) = z(-1, 0, 1)$$

Prova real:
$T(-1,0,1) = (-2, 0,2)$
$= 2(-1,0,1)$

E temos um único gerador para os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 2$, dado por $v_2 = (-1, 0, 1)$ e o autoespaço associado a $\lambda_2 = 2$ é dado por

$$V_2 = ger\{(-1, 0, 1)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\; x = -z \;\text{ e }\; y = 0\}.$$

Exemplo Resolvido

Para $\lambda_3 = 6$:

Substituindo $\lambda = 6$ em $[T - \lambda I] = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$ e escalonando a matriz associada ao sistema homogêneo, obtemos:

$posto([T-6I]) = 2$
$null([T-6I]) = 3-2 = 1$

$$[T - 6I] = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -4 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados a $\lambda = 6$ são $v = (x, y, z)$ tais que

$$x - y - 3z = 0 \quad \text{e} \quad 2y + 4z = 0.$$

Logo $\quad y = -2z \quad$ e $\quad x = y + 3z = -2z + 3z = z$

Substituindo em v e isolando a variável livre z, encontramos

$$v = (z, -2z, z) = z(1, -2, 1)$$

Prova real:
$T(1,-2,1) = (6,-12,6)$
$= 6(1,-2,1)$

Obtemos um único gerador para os autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 6$, dado por $v_3 = (1, -2,\ 1)$ e o autoespaço associado a $\lambda_3 = 6$ é dado por

$$V_6 = ger\{(1,-2,1)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y = -2z \ \text{ e } \ x = z\}.$$

Exemplo Resolvido

Dessa forma, a base para $\mathbb{R}^3$ composta por autovetores de T é dada por

$$\beta = \{(1,1,1), (-1,0,1), (1,-2,1)\}$$

e a matriz diagonal de T é

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Note que a diagonal principal de $[T]_\beta^\beta$ é formada pelos autovalores de T, ordenados conforme a disposição dos autovetores na base β.

Além disso, colocando ordenadamente as coordenadas dos autovetores como colunas de uma matriz, obtemos a matriz diagonalizadora de T, dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos obter a inversa da matriz P, escalonando a matriz $[P \mid I]$:

$$[P|\, I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{array}$$

Exemplo Resolvido

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 + 1/3L_3 \\ L_2 + 1/2L_3 \\ L_3/6 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{array}\right].$$

Portanto, obtemos que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Com isso, temos que

$$P^{-1} \cdot [T] \cdot P = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & -12 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = [T]_\beta^\beta.$$

Denotando $A = [T]$ e $D = [T]_\beta^\beta$ temos que P é uma matriz invertível tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$.

Multiplicando por P à esquerda em ambos os lados, e usando a definição de inversa, obtemos

$$P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P = P \cdot D \quad \Rightarrow \quad I \cdot A \cdot P = P \cdot D \quad \Rightarrow \quad A \cdot P = P \cdot D.$$

Exemplo Resolvido

Exemplo 2: Determine os autovalores, autovetores e autoespaços de $T: P_2 \to P_2$ dado

$$T(a + bx + cx^2) = (-2a + 6b + 6c) - 2bx + (6b + 4c)x^2.$$

A seguir, verifique se o operador é diagonalizável ou não. No caso positivo, determine a base de P_2 formada por autovetores de T e a matriz do operador na forma diagonal.

Solução: A matriz canônica de T é dada por

$$[T] = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de T é dado por

$$p(\lambda) = \det([T - \lambda I]) = det\left(\begin{bmatrix} -2-\lambda & 6 & 6 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 6 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-2-\lambda) \cdot (-2-\lambda) \cdot (4-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$$

$$= (-2-\lambda) \cdot (-2-\lambda) \cdot (4-\lambda).$$

Portanto, os autovalores de T, que são as raízes de $p(\lambda)$, são dados por

Exemplo Resolvido

$$p(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad (-2-\lambda).(-2-\lambda).(4-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2-\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad 4-\lambda = 0.$$

Assim, os autovalores de T são $\lambda_1 = -2$ (raiz dupla) e $\lambda_2 = 4$ (raiz simples).

Portanto:

$$mult.algeb.(-2) = 2 \qquad\qquad mult.algeb.(4) = 1$$

Agora vamos obter os respectivos autovetores:

Para $\lambda_1 = -2$:

Substituindo $\lambda = -2$ em $[T - \lambda I] = \begin{bmatrix} -2-\lambda & 6 & 6 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 6 & 4-\lambda \end{bmatrix}$ e escalonando a matriz associada ao sistema homogêneo, obtemos:

$$[T-(-2)I] = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$posto([T-(-2)I]) = 1$
e $null([T+2I]) = 3 - 1 = 2$

Logo, os autovetores associados a $\lambda = -2$ são $p(x) = a + bx + cx^2$ tais que

$$b + c = 0,$$

ou seja

$$c = -b, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}.$$

Exemplo Resolvido

Substituindo em p e isolando as variáveis livres, encontramos

$$p(x) = a + bx + cx^2 = a + bx - bx^2 = a.1 + b.(x - x^2).$$

Com isso, temos dois autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = -2$, dados por

$$p_1(x) = 1 \quad \text{e} \quad p_2(x) = x - x^2.$$

Assim, o autoespaço associado a $\lambda_1 = -2$ é dado por

$$V_{-2} = ger\{1;\ x - x^2\} = \{a + bx + cx^2 \in P_2;\ c = -b\}.$$

Além disso,

$$mult.geom.(-2) = \dim(V_{-2}) = 2\,,$$

Prova real:
$T(x - x^2) = -2(x - x^2)$
$T(1) = -2 = -2.1$

e o operador tem chances de ser diagonalizável, pois obtivemos dois autovetores associados ao autovalor duplo.

Agora para $\lambda_2 = 4$:

Substituindo $\lambda = 4$ em $[T - \lambda I] = \begin{bmatrix} -2-\lambda & 6 & 6 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 6 & 4-\lambda \end{bmatrix}$ e escalonando a matriz associada ao sistema homogêneo, obtemos:

$$[T - 4I] = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 6 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$posto([T - 4I]) = 2$
$null([T - 4I]) = 1$

Exemplo Resolvido

Com isso, os autovetores associados a $\lambda = 4$ são da forma $p(x) = a + bx + cx^2$ tais que

$$a - b - c = 0 \qquad \text{e} \qquad b = 0.$$

Logo

$$a = c, \qquad b = 0.$$

Substituindo em p e isolando a variável livre, encontramos

$$p(x) = a + 0x + ax^2 = a(1 + x^2).$$

Prova real:
$T(1 + x^2) = 4 + 4x^2 = 4(1 + x^2)$

Assim, temos um único autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 4$, dado por $p_3(x) = 1 + x^2$ e o autoespaço associado a $\lambda_2 = 4$ é dado por

$$V_4 = ger\{1 + x^2\} = \{a + bx + cx^2 \in P_2; a = c, b = 0\}.$$

Além disso,

$$mult.\,geom.\,(4) = \dim(V_4) = 1\,.$$

É possível mostrar que o conjunto de autovetores de T, dado por $\beta = \{1; x - x^2; 1 + x^2\}$ é LI e assim, forma uma base para P_2.

Com isso, T é diagonalizável e sua matriz diagonal é $[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Tomando

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

cujas colunas são as coordenadas dos autovetores, temos

$$P^{-1} \cdot [T] \cdot P = [T]_\beta^\beta.$$

Exemplo Resolvido

Exemplo 3: Verifique se $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} 13 & 12 & -8 \\ 12 & 20 & 6 \\ -8 & 6 & 25 \end{bmatrix}$ é diagonalizável ou não. No caso positivo, determine sua matriz diagonalizadora e sua forma diagonal.

Solução: Para obter os autovalores de A consideramos o seu polinômio característico, dado por

$$p(\lambda) = \det([T - \lambda I]) = det\left(\begin{bmatrix} 13-\lambda & 12 & -8 \\ 12 & 20-\lambda & 6 \\ -8 & 6 & 25-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (13-\lambda).(20-\lambda).(25-\lambda) - 576 - 576 - 64(20-\lambda) - 144(25-\lambda) - 36(13-\lambda)$$

$$= (260 - 20\lambda - 13\lambda + \lambda^2).(25-\lambda) - 1152 - 1280 + 64\lambda - 3600 + 144\lambda - 468 + 36\lambda$$

$$= (260 - 33\lambda + \lambda^2).(25-\lambda) - 6650 + 244\lambda$$

$$= 6500 - 825\lambda + 25\lambda^2 - 260\lambda + 33\lambda^2 - \lambda^3 - 6650 + 244\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 58\lambda^2 - 841\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 58\lambda - 841).$$

Portanto, os autovalores de T são dados por $\lambda(-\lambda^2 + 58\lambda - 841) = 0.$

Exemplo Resolvido

Logo

$$\lambda = 0 \qquad \text{ou} \qquad -\lambda^2 + 58\lambda - 841 = 0$$

Portanto

$$\lambda = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \frac{-58 \pm \sqrt{3364 - 4.841}}{-2} = \frac{-58 \pm 0}{-2} = 29.$$

Com

$$mult.alg.(0) = 1 \qquad \text{e} \qquad mult.alg.(29) = 2.$$

Autovetores associados a $\lambda = 29$:

Como $[T - \lambda I] = \begin{bmatrix} 13-\lambda & 12 & -8 \\ 12 & 20-\lambda & 6 \\ -8 & 6 & 25-\lambda \end{bmatrix}$, substituindo $\lambda = 29$ e escalonando a matriz associada ao sistema homogêneo, obtemos:

$$[T - 29I] = \begin{bmatrix} -16 & 12 & -8 \\ 12 & -9 & 6 \\ -8 & 6 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados a $\lambda = 29$ são $v = (x, y, z)$ tais que

$$4x - 3y + 2z = 0$$

Logo

$$z = -2x + 3y/2.$$

Exemplo Resolvido

Substituindo em v e isolando a variável livre z, encontramos

$$v = \left(x, y, -2x + \frac{3}{2}y\right) = x(1,0,-2) + y\left(0,1,\frac{3}{2}\right) = x(1,0,-2) + \frac{1}{2}y(0,2,3).$$

Com isso temos que

$$V_{29} = ger\{(1,0,-2),(0,2,3)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 4x - 3y + 2z = 0\}.$$

Com isso, vemos que

$$mult.geom.(29) = \dim(V_{29}) = 2 = mult.algeb.(29).$$

Autovetores associados a $\lambda = 0$:

Como $[T - 0I] = [T] = \begin{bmatrix} 13 & 12 & -8 \\ 12 & 20 & 6 \\ -8 & 6 & 25 \end{bmatrix}$, por escalonamento, obtemos:

$$[T - 0I] = [T] = \begin{bmatrix} 13 & 12 & -8 \\ 12 & 20 & 6 \\ -8 & 6 & 25 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -8 & -14 \\ 6 & 10 & 3 \\ -8 & 6 & 25 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -8 & -14 \\ 0 & 58 & 87 \\ 0 & -58 & -87 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -8 & -14 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados a $\lambda = 0$ são $v = (x,y,z)$ tais que

$$x - 8y - 14z = 0 \quad \text{e} \quad y + \frac{3}{2}z = 0.$$

Exemplo Resolvido

Logo $x = 8y + 14z = 8 \cdot \frac{-3}{2} z + 14z = 2z$ e $y = \frac{-3}{2} z.$

Assim

$$v = \left(2z, \frac{-3}{2} z, z\right) = z\left(2, \frac{-3}{2}, 1\right) = \frac{1}{2} z(4, -3, 2).$$

Com isso temos que

$$V_0 = ger\{(4, -3, 2)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 8y - 14z = 0 \ \text{ e } \ 2y + 3z = 0\}.$$

Com isso, temos

$$mult.\, geom.\,(0) = \dim(V_0) = 1 = mult.\, algeb.\,(0).$$

Portanto, T é diagonalizável, com sua matriz diagonal dada por

$$D = \begin{bmatrix} 29 & 0 & 0 \\ 0 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e sua matriz diagonalizadora (cujas colunas são os autovetores de T) dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Verifique, como exercício, que $[T] \cdot P = P \cdot D$, ou de forma análoga, que $P^{-1} \cdot [T] \cdot P = D$.