Álgebra Linear (ALI0001 – CCI-192-02U)

Operadores reflexão em torno de uma reta, cisalhamentos horizontal e vertical

Professor: Marnei Mandler

Aula de ALI do dia 31 de maio de 2023.

Operadores Lineares

Vimos que um operador linear é um caso particular de transformação linear, que ocorre quando o domínio e o contradomínio são iguais a um mesmo espaço vetorial V:

Definição: Um operador linear é uma transformação linear da forma $T: V \to V$.

Vimos o interesse em estudar operadores lineares definidos no plano e no espaço, que possuam interpretações geométricas específicas.

Definição: Um operador linear no plano é uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Já estudamos os seguintes operadores lineares no plano:

Operador Dilatação/Contração: É o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = k(x, y) = (kx, ky)$$

com $k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$ (fator de dilatação/ contração) e cuja matriz canônica é

$$[T] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}.$$

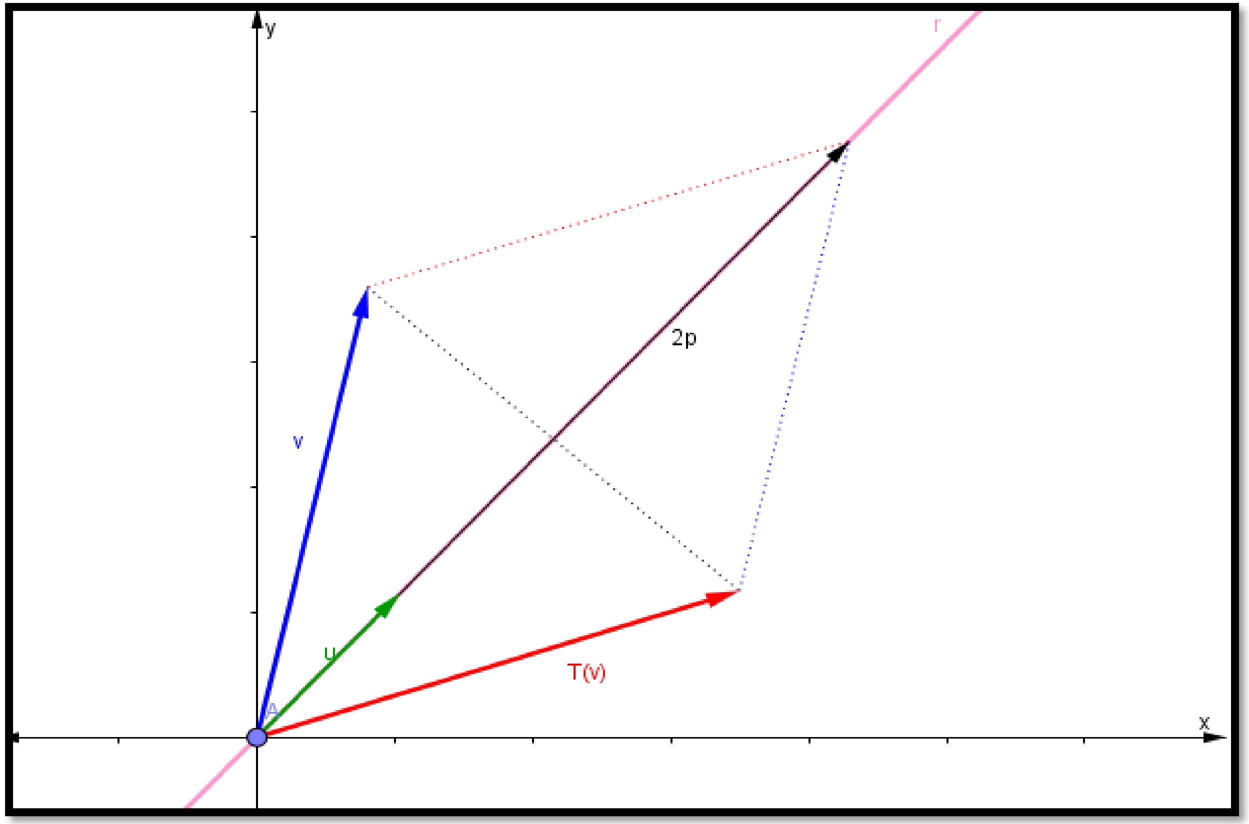
Projeção sobre uma Reta que passa pela origem: É o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(v) = proj_u(v) = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u$$

em que $u \in \mathbb{R}^2$ é o vetor gerador (ou diretor) da reta considerada.

Operador Reflexão em torno de reta

O operador $T(v)$ que realiza a reflexão de v em torno de uma reta que passa pela origem é definido de acordo com a interpretação geométrica a seguir:



A soma entre v e $T(v)$ (dada pela diagonal maior do paralelogramo) é igual ao dobro do vetor p, que corresponde à projeção de v sobre a reta:

$$v + T(v) = 2p.$$

Logo

$$T(v) = 2p - v.$$

Operador Reflexão em torno de uma reta que passa pela origem: É o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(v) = 2p - v,$$

em que $p = proj_u(v) = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u$ é a projeção de v sobre a reta considerada.

Exercício

Exercício 1) Encontre a lei do operador linear no plano que realiza a reflexão em torno da reta

$$r: \ -5x + y = 0.$$

A seguir, determine:

a) A matriz canônica do operador. Como ela pode ser classificada?

b) O operador é invertível? Se sim, encontre as lei da inversa. Interprete o resultado geometricamente

c) Uma base para o núcleo e para o conjunto imagem do operador. Interprete geometricamente a base do conjunto imagem.

Solução: Todos os itens foram resolvidos em aula.

Exercício 2) Encontre a lei e a matriz canônica do operador linear no plano que realiza a reflexão em torno:

a) Do eixo x.

b) Do eixo y.

c) Da bissetriz dos quadrantes ímpares.

Solução: Todos os itens foram resolvidos em aula.

Exemplo Resolvido

Exemplo 1: Encontre a lei do operador linear no plano que realiza a reflexão em torno da reta r: $4x + y = 0$. Qual a matriz canônica desse operador? Ele é invertível? Se sim, qual sua inversa?

Solução: Como $y = -4x$, o vetor diretor da reta dada é $u = (1, -4)$.

Além disso, a projeção p de um vetor $v = (x, y)$ sobre r é dada por

$$p = proj_u(v) = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u = \left(\frac{x - 4y}{17}, \frac{-4x + 16y}{17}\right).$$

Assim, aplicando na expressão que define uma reflexão em torno de r, obtemos que

$$T(x, y) = T(v) = 2p - v = 2\left(\frac{x - 4y}{17}, \frac{-4x + 16y}{17}\right) - (x, y)$$

$$= \left(\frac{2x - 8y}{17}, \frac{-8x + 32y}{17}\right) - \left(\frac{17x}{17}, \frac{17y}{17}\right)$$

$$= \left(\frac{-15x - 8y}{17}, \frac{-8x + 15y}{17}\right).$$

Exemplo Resolvido

Com isso, a matriz canônica dessa reflexão é dada por

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{-15}{17} & \frac{-8}{17} \\ \frac{-8}{17} & \frac{15}{17} \end{bmatrix} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} -15 & -8 \\ -8 & 15 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\det([T]) = \frac{-225}{17^2} - \frac{64}{17^2} = \frac{-289}{17^2} = -1 \neq 0$$

o operador é invertível. Ainda, invertendo a matriz canônica de T, obtemos que

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-15}{17} & \frac{-8}{17} \\ \frac{-8}{17} & \frac{15}{17} \end{bmatrix} = [T].$$

Note que $[T]$ é uma matriz ortogonal, pois $[T]^{-1} = [T] = [T]^{transp}$. Por isso, T é dito um operador ortogonal.

Ou seja, a inversa da reflexão é a própria reflexão e

$$T^{-1}(x, y) = \left(\frac{-15x - 8y}{17}, \frac{-8x + 15y}{17}\right) = T(x, y).$$

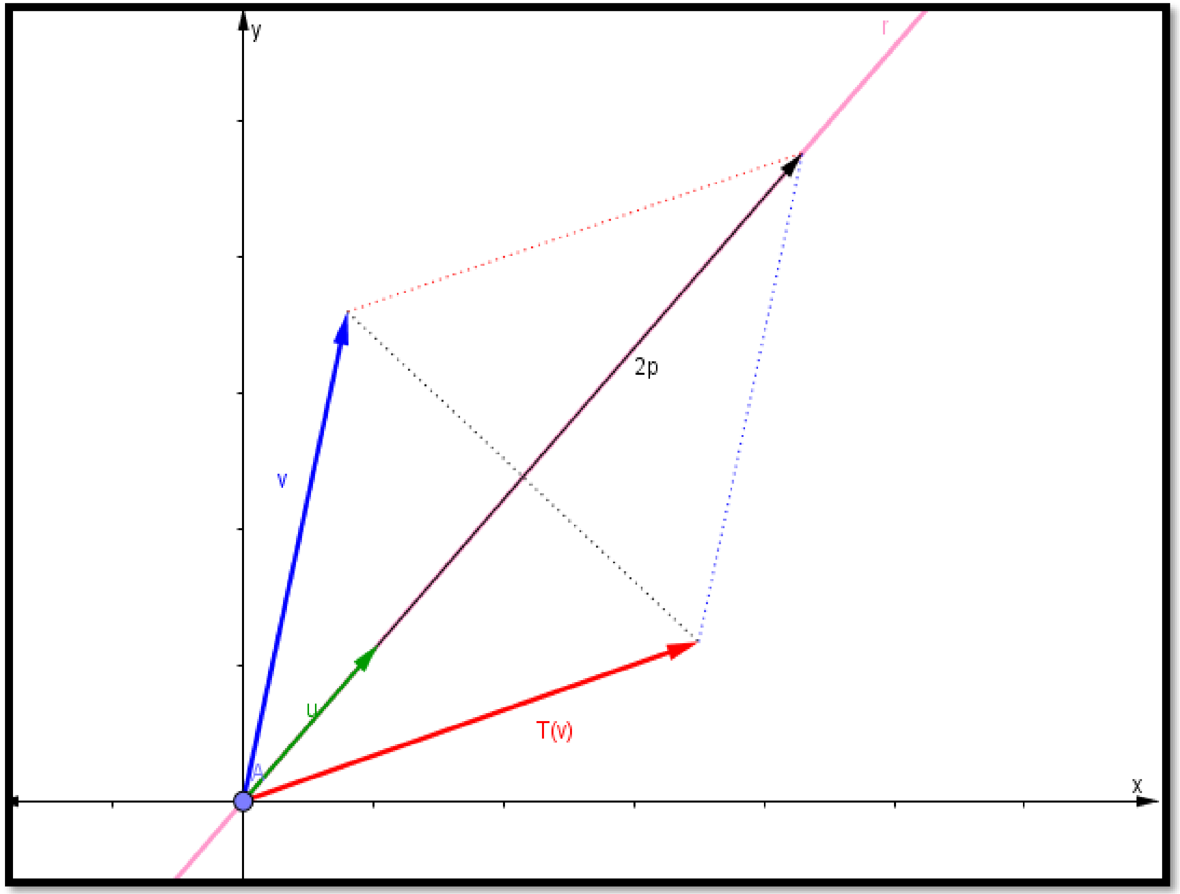
Operador Reflexão em torno de reta

De forma geral, o operador T que representa uma reflexão sobre uma reta que passa pela origem sempre é invertível e sua inversa sempre é tal que

$$T^{-1} = T,$$

ou seja, a inversa de uma reflexão é a própria reflexão.

Interprete geometricamente esse resultado na figura abaixo, aplicando a definição de inversa.



Dessa forma, uma reflexão $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sempre é bijetora (pois é invertível) e, com isso:

$$N(T) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^2}\}$$

e

$$Im(T) = \mathbb{R}^2.$$

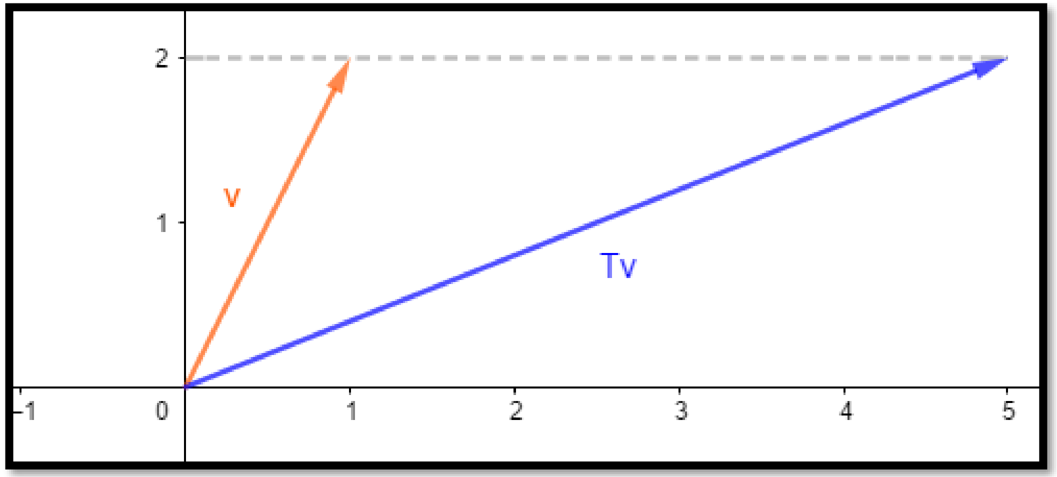
Operadores Cisalhamentos

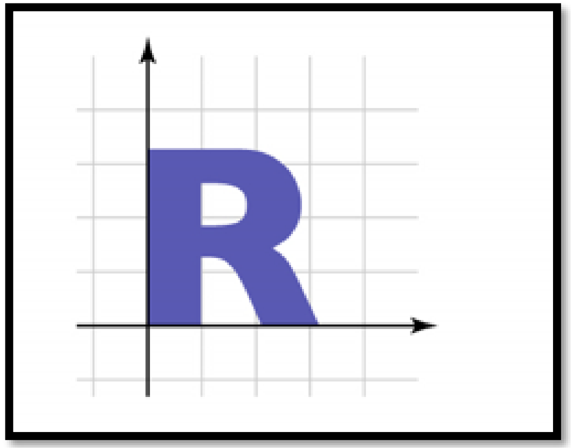
Operador Cisalhamento Horizontal: É o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

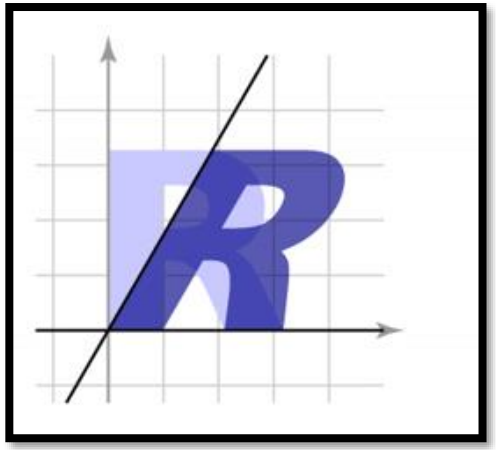
$$T(x, y) = (x + ky, y),$$

com $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$.

- Geometricamente:







- A matriz canônica de um cisalhamento horizontal T é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Um cisalhamento horizontal sempre mantém inalterada a coordenada vertical!

- Note que $[T]$ é uma matriz triangular superior, cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e cujo elemento situado acima da diagonal principal é igual a k.
- Dizemos que k é o "fator de cisalhamento horizontal".

Operadores Cisalhamentos

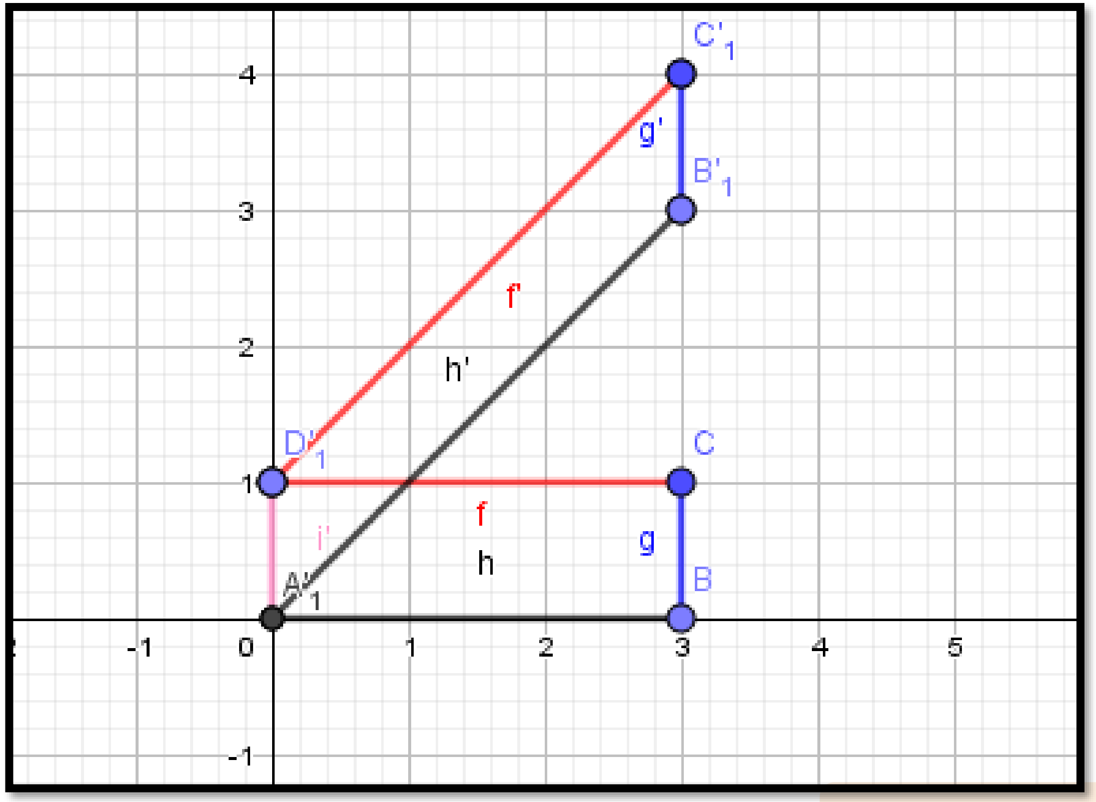
Operador Cisalhamento Vertical: É o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

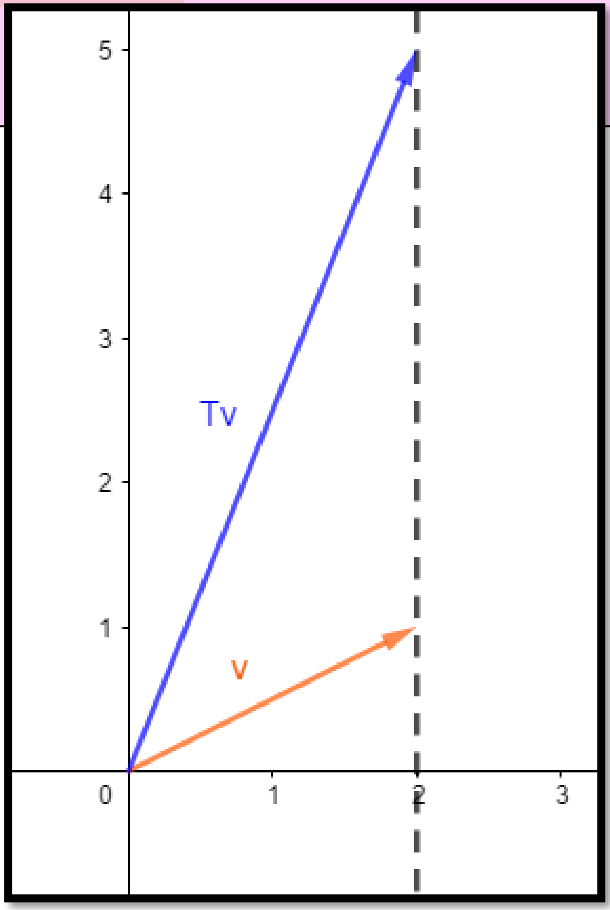
$$T(x, y) = (x, kx + y),$$

com $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$.

Geometricamente:

Um cisalhamento vertical mantém a componente horizontal inalterada!





- A matriz canônica de um cisalhamento vertical T é dada por $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$.
- Note que $[T]$ é uma matriz triangular inferior, cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e cujo elemento situado abaixo da diagonal principal é igual a k.

Operadores Cisalhamentos

- Para um cisalhamento (horizontal ou vertical) temos que:

Se $k > 0$, então o cisalhamento ocorre na direção positiva do eixo (horizontal ou vertical).

Se $k < 0$, então o cisalhamento ocorre na direção negativa do eixo (horizontal ou vertical).

Caso $k = 0$, o cisalhamento se reduz ao operador identidade.

- Para o cisalhamento horizontal, como $[T] = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, temos que $\det([T]) = 1 \neq 0$ e ele é invertível, com

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja, a inversa de um cisalhamento horizontal de fator k é um cisalhamento horizontal de fator $-k$.

- Da mesma forma, para um cisalhamento vertical, temos $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$, $\det([T]) = 1 \neq 0$ e ele é invertível, com

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix},$$

e a inversa de cisalhamento vertical de fator k é um cisalhamento vertical de fator $-k$.

Exercício

Exercício 3) Determine a lei do operador linear no plano que representa um cisalhamento vertical de fator 5, seguido de uma dilatação de fator 3, seguido de um cisalhamento horizontal de fator -2. Esse operador é invertível? Se sim, qual a sua inversa?

Solução: O exercício foi resolvido em aula.

Exemplo Resolvido

Exemplo 2: Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que realiza a projeção ortogonal sobre a reta $y = 2x$ seguido de um cisalhamento horizontal de fator 4.

a) Qual a lei de T?

b) Que objeto geométrico é o núcleo de T?

c) Que objeto geométrico é a imagem de T?

Solução: a) Denotando a projeção por P e o cisalhamento horizontal por C, temos que T é dado por

$$T = C \circ P.$$

Já sabemos que a representação matricial de um cisalhamento horizontal de fator 4 é dada por

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mas não conhecemos a matriz de P. Para obtê-la, vamos primeiro encontrar a lei da projeção ortogonal, usando a expressão

$$P(v) = proj_u(v) = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u,$$

em que $u = (1,2)$ é o vetor diretor (gerador) da reta $y = 2x$. Assim, para $v = (x, y)$ temos que

Exemplo

$$P(x,y)=\frac{(1,2)\cdot(x,y)}{(1,2)\cdot(1,2)}(1,2)=\frac{x+2y}{5}(1,2)=\left(\frac{x+2y}{5},\frac{2x+4y}{5}\right).$$

Assim, obtemos que
$$[P]=\begin{bmatrix} {}^{1}/_{5} & {}^{2}/_{5} \\ {}^{2}/_{5} & {}^{4}/_{5} \end{bmatrix}.$$

Como $[P]$ é uma matriz simétrica, P é dito um operador simétrico ou auto adjunto.

Dessa forma, encontramos que $T=C\circ P$ é tal que

$$[T]=[C\circ P]=[C].[P]=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} {}^{1}/_{5} & {}^{2}/_{5} \\ {}^{2}/_{5} & {}^{4}/_{5} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} {}^{9}/_{5} & {}^{18}/_{5} \\ {}^{2}/_{5} & {}^{4}/_{5} \end{bmatrix}.$$

Portanto obtemos que

$$T(x,y)=\left(\frac{9x+18y}{5},\frac{2x+4y}{5}\right).$$

b) Para obter o Núcleo de T, basta fazer $T(x,y)=(0,0)$, ou seja, resolver o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 9x+18y=0 \\ 2x+4y=0 \end{cases}$$

cuja solução é dada por $x=-2y$ ou, de outra forma, $y=\frac{-x}{2}$.

Exemplo

Portanto, vemos que

$$N(T) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = \frac{-1}{2}x\right\}$$

é uma reta, que inclusive é a reta perpendicular à reta $y = 2x$ sobre a qual projetamos.

c) Para obter a imagem de T, note que

$$w \in Im(T) \quad \Rightarrow \quad w = \ T(v) = \left(\frac{9x + 18y}{5}, \frac{2x + 4y}{5}\right) = \ \frac{x}{5}(9,2) + \frac{y}{2}(18,4).$$

Portanto, a imagem de T é gerada pelos vetores $(9,2)$ e $(18,4)$.

Como esses vetores são claramente LD (veja que o segundo é o dobro do primeiro), podemos descartar o segundo vetor e obter que

$$Im(T) = ger\{(9,2)\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = \frac{2}{9}x\right\}.$$

Portanto, a imagem de T também é uma reta.

Exercício: Represente geometricamente o núcleo e a imagem de T!!