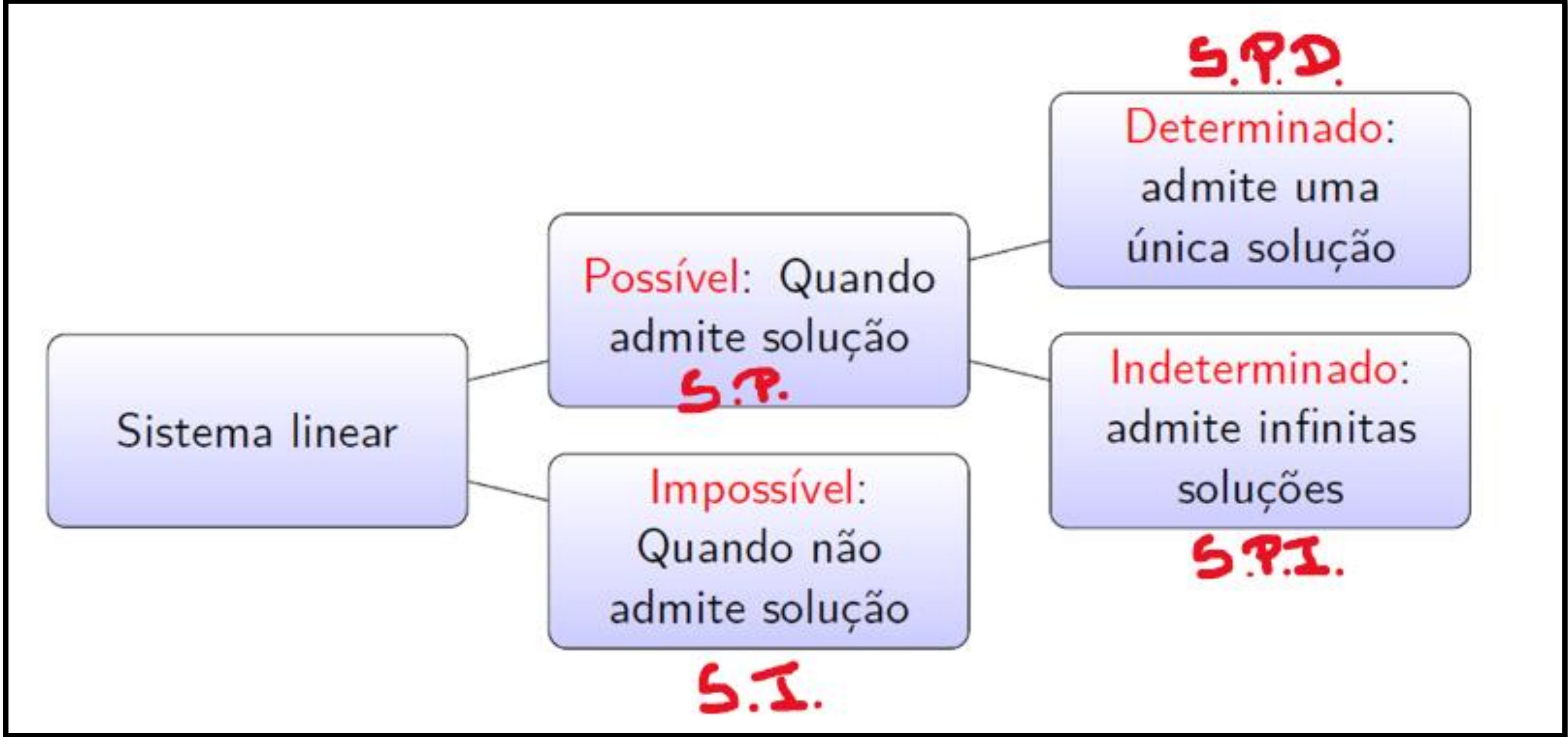
# Álgebra Linear
# (ALI0001 – CCI-192-02U)

## Classificação de sistemas lineares
## Posto e Nulidade de uma matriz

**Professor:** Marnei Luis Mandler

Aula do dia 08 de março de 2023.

# Classificação de um Sistema Linear

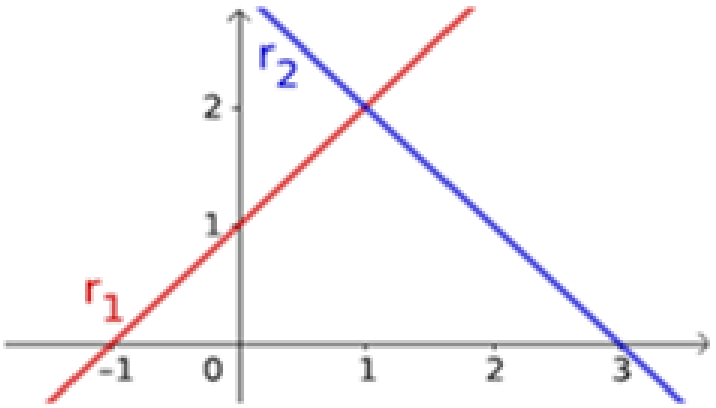


# Interpretação geométrica da classificação de sistemas lineares 2x2:

Em sistemas de duas equações a duas variáveis em que cada equação representa uma reta no plano:

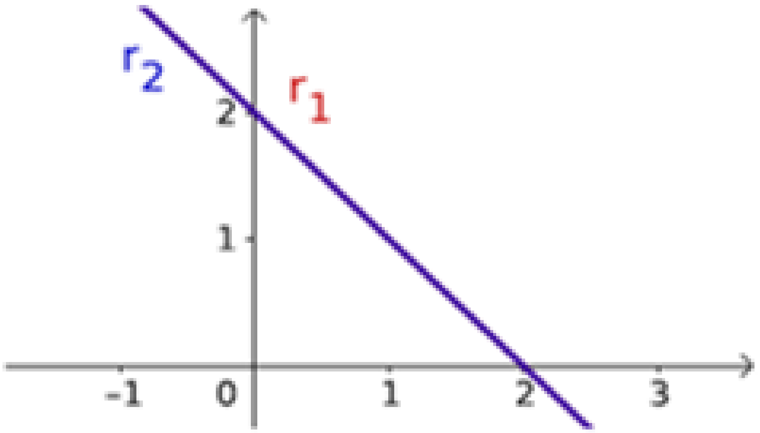
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

temos as seguintes possibilidades:



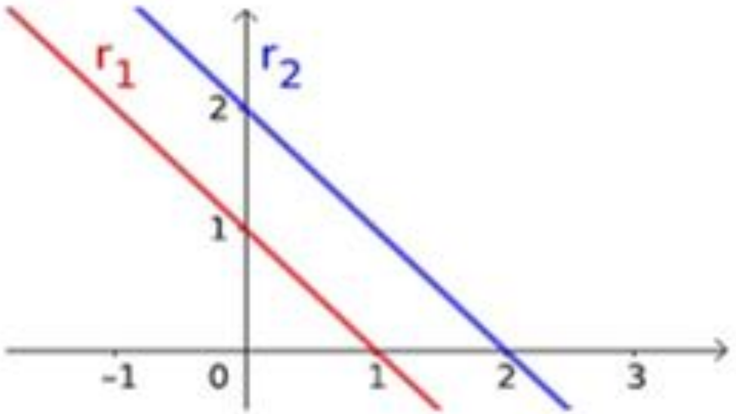

Retas concorrentes
Única solução

O sistema é possível e determinado (SPD).




Retas coincidentes
Infinitas soluções

O sistema é possível e indeterminado (SPI).




Retas paralelas
Nenhuma solução

O sistema é impossível (SI).

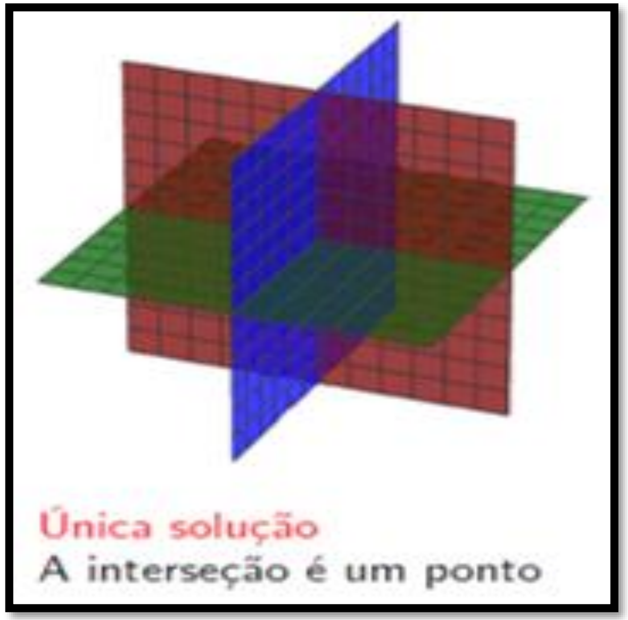
# Interpretação geométrica da classificação de sistemas lineares 3x3

Em sistemas de três equações a três variáveis, cada equação representa um plano no espaço:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

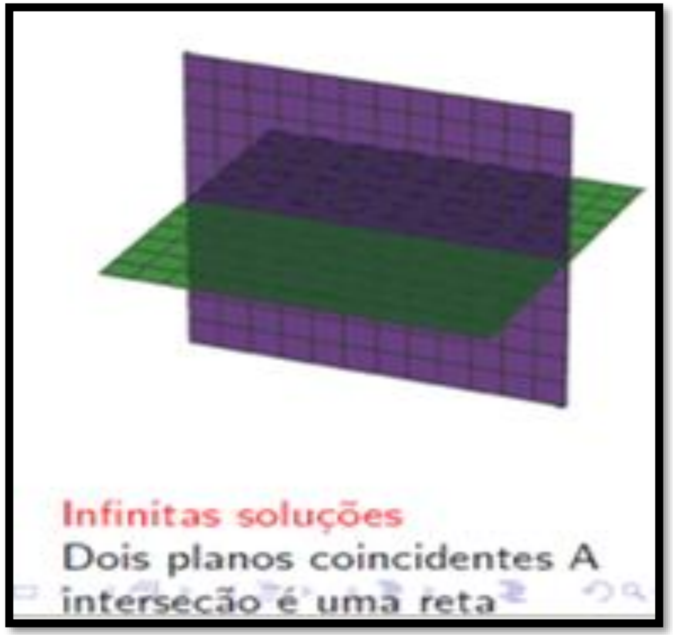
Encontrar as soluções para o sistema significa obter a interseção entre os três planos.

Temos diversas possibilidades, dadas pelas posições relativas entre os planos:



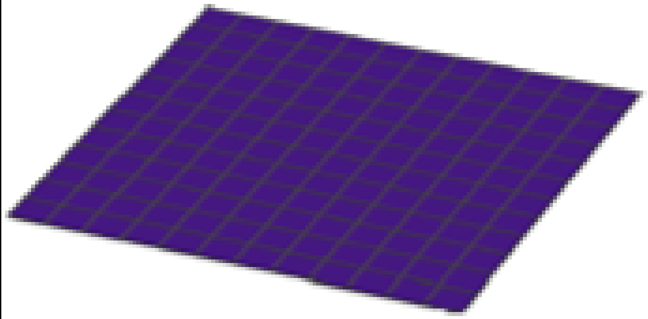

O sistema é possível e determinado (SPD)


O sistema é possível e indeterminado (SPI.)

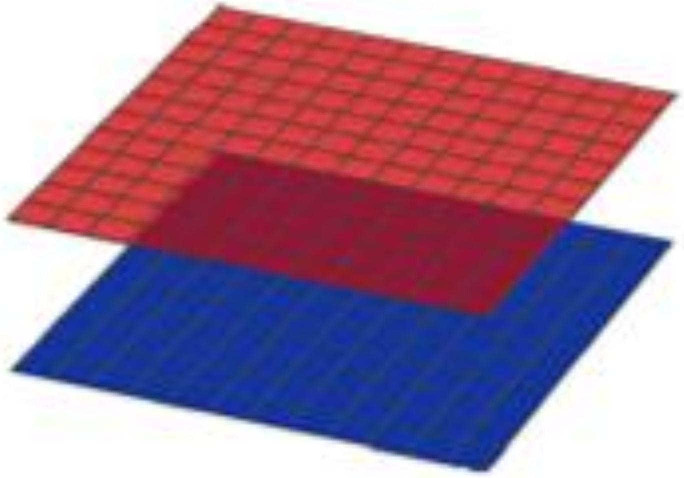



O sistema é possível e indeterminado (SPI)

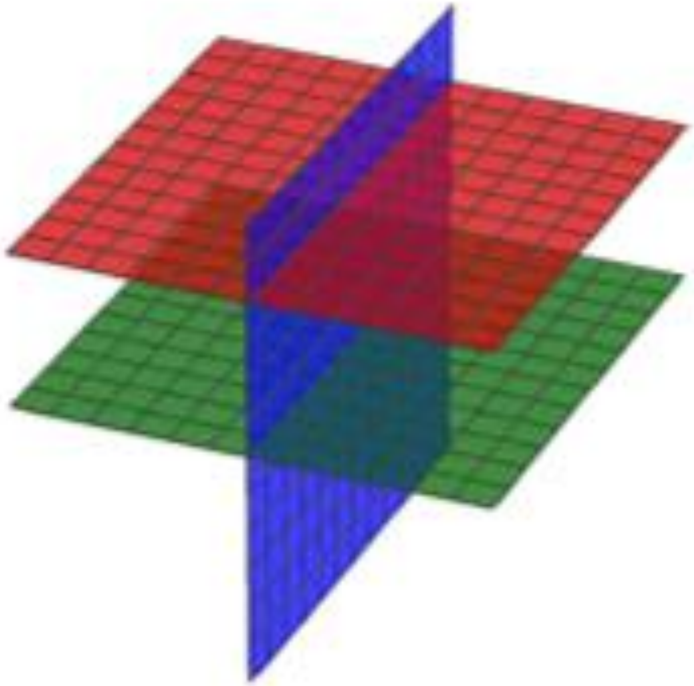
# Interpretação geométrica da solução de sistemas lineares:



Infinitas soluções
Três planos coincidentes A interseção é um plano



Nenhuma solução
Dois planos coincidentes paralelos ao terceiro, sem interseção comum



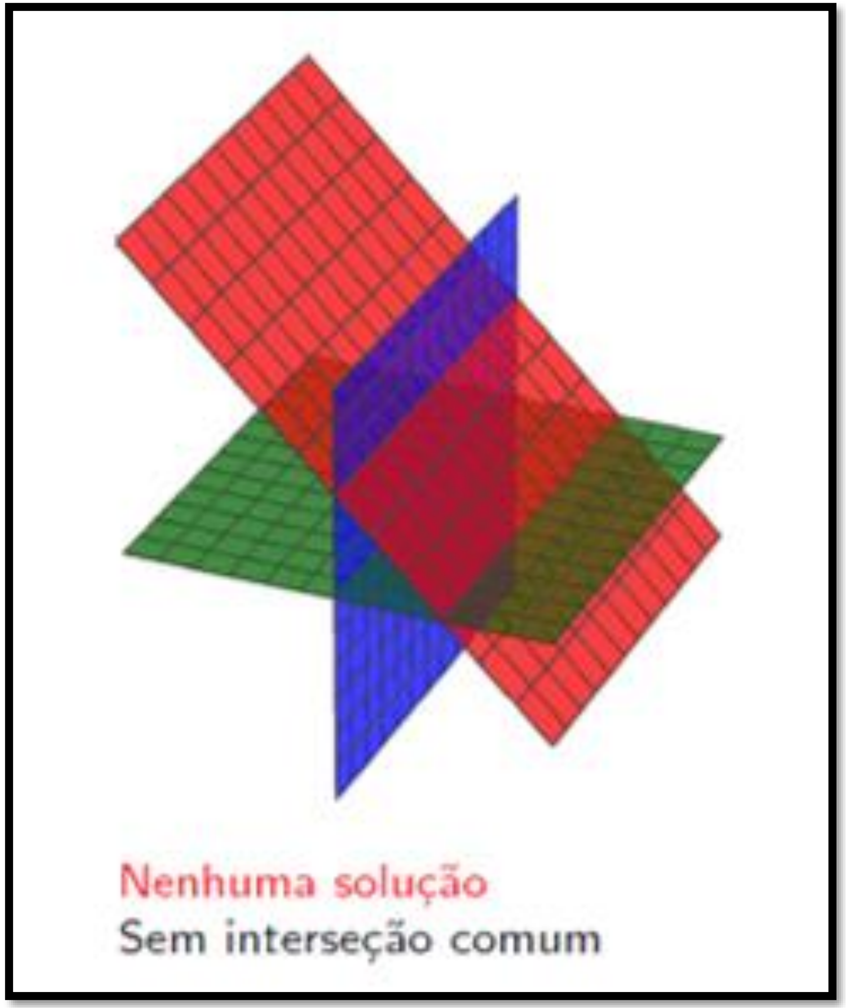
Nenhuma solução
Dois planos paralelos, sem interseção comum

O sistema é possível e indeterminado (SPI).

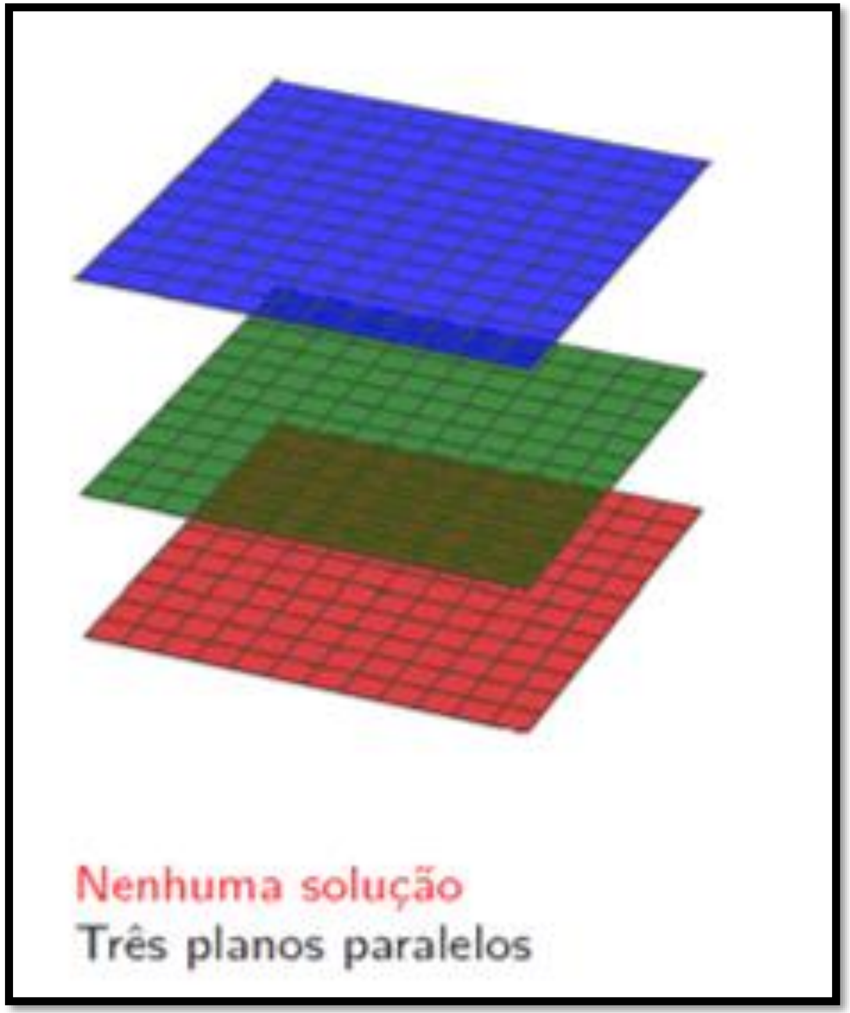
O sistema é impossível (SI).

O sistema é impossível (SI).

# Interpretação geométrica da solução de sistemas lineares:




O sistema é impossível (SI).




O sistema é impossível (SI).

# Posto e nulidade de uma matriz

**Definição 1:** Dada uma matriz $A$ de ordem $m \times n$, o **posto** da matriz $A$ é definido pelo número de linhas **não nulas** da sua matriz reduzida à forma **escalonada** por linhas.

**Notação:** $posto(A)$ ou $P(A)$.

Conforme veremos nos exemplos a seguir, os postos da matriz ampliada $[A\,|B]$ e da matriz dos coeficientes $A$ de um sistema linear $AX = B$ nos auxiliarão a classificar o sistema como possível ou impossível (SI).

**Definição 2:** Dada uma matriz $A$ de ordem $m \times n$, a **nulidade** da matriz é dada pela diferença entre o número de colunas e o seu posto.

**Notação:** $nulidade(A) = n - posto(A) = n - P(A)$.

Conforme veremos nos próximos exemplos, a nulidade da matriz dos coeficientes $A$ de um sistema linear $AX = B$ no auxiliará a classificar um sistema possível como determinado (SPD) ou indeterminado (SPI).

# Posto e nulidade de uma matriz

Quando resolvemos um sistema linear por meio do método da Eliminação de Gauss (ou escalonamento da matriz ampliada do sistema), a existência/inexistência de linhas nulas obtidas após o escalonamento pode nos auxiliar a:

- a classificar corretamente o sistema quanto ao número de soluções (SPD, SPI ou SI);
- a obter uma informação sobre o número de variáveis livres (caso existam).

Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 1:** Classifique e obtenha a(s) solução(ões), caso exista(m), para os sistemas lineares:

a) $\begin{cases} -3x+9y+z=5 \\ x+2y-2z=-7 \\ 5x-8y-4z=3 \end{cases}.$

Solução: Vamos escalonar a matriz ampliada do sistema, dada por

$$[A\,|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & -7 \\ 5 & -8 & -4 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -7 \\ -3 & 9 & 1 & 5 \\ 5 & -8 & -4 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 \longrightarrow L_2+3L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3-5L_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -7 \\ 0 & 15 & -5 & -16 \\ 0 & -18 & 6 & 38 \end{array}\right]$$

# Posto e nulidade de uma matriz

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -7 \\ 0 & 15 & -5 & -16 \\ 0 & -18 & 6 & 38 \end{array}\right] \; L_2 \longrightarrow \frac{1}{15} L_2 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -1/3 & -16/15 \\ 0 & -18 & 6 & 38 \end{array}\right] \; L_3 \longrightarrow L_3 + 18L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -1/3 & -16/15 \\ 0 & 0 & 0 & 94/5 \end{array}\right] \; L_3 \longrightarrow \frac{5}{94} L_3 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -1/3 & -16/15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Portanto, o sistema dado é equivalente ao sistema obtido por meio da matriz linha reduzida á forma escada:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -7 \\ y - \dfrac{1}{3} z = \dfrac{-16}{15} \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Note que não existe nenhum valor que satisfaça a terceira equação (que é uma contradição).

Portanto, não existe solução para o sistema original.

Ele é um sistema impossível (SI).

Denotaremos: $posto([A\,|B]) = 3$ e $posto(A) = 2$.

Note que, em um sistema impossível (SI), temos que

$$posto([A\,|B]) \neq posto(A).$$

Questão: Por que isso ocorreu?

Note que, após o escalonamento, a matriz ampliada $[A\,|B]$ possui três linhas não nulas, enquanto a matriz $A$ tem somente duas linhas não nulas.

# Posto e nulidade de uma matriz

b) $\begin{cases} 2x + 6y + 4z = 8 \\ -5x - 9y + 8z = 4 \\ 11x + 27y + 4z = 20 \\ -7x - 21y - 14z = -28 \end{cases}.$

Solução: Vamos escalonar a matriz ampliada do sistema, dada por

$$[A\,|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 4 & 8 \\ -5 & -9 & 8 & 4 \\ 11 & 27 & 4 & 20 \\ -7 & -21 & -14 & -28 \end{array}\right] \; L_1 \longrightarrow \frac{1}{2}L_1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -5 & -9 & 8 & 4 \\ 11 & 27 & 4 & 20 \\ -7 & -21 & -14 & -28 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 + 5L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 11L_1 \\ L_4 \longrightarrow L_4 + 7L_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 18 & 24 \\ 0 & -6 & -18 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow \frac{1}{6}L_2 \\ L_3 \longrightarrow L_3 + L_2 \end{array} \qquad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Portanto, o sistema dado é equivalente ao sistema dado pela última matriz:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ y + 3z = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} x = 4 - 3y - 2z \\ y = 4 - 3z \\ 0 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x = 4 - 3(4 - 3z) - 2z \\ y = 4 - 3z \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x = -8 + 7z \\ y = 4 - 3z \\ z \in \mathbb{R} \end{array}$$

# Exemplo

Portanto, o sistema é possível e indeterminado (SPI) com uma variável livre ($z$).

Questão: Por que isso ocorreu?

Note que obtivemos

$$[A\,|B] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

E que, após o escalonamento, tanto a matriz ampliada $[A\,|B]$ quanto a matriz dos coeficientes $A$ possuem duas linhas **não** nulas.

Como o número de linhas não nulas de uma matriz é o posto da matriz, temos que

$$posto([A\,|B]) = 2 = \ posto(A).$$

que indica que o sistema é possível.

Já a terceira e quarta linhas (totalmente nulas) da matriz escalonada indicam que $0 = 0$, que consiste em uma tautologia (é sempre verdadeira).

Além disso, veja que a diferença entre o número de colunas de $A$ e o posto de $A$ é igual a 1 e temos somente uma variável livre no sistema. (SPI).

Denotaremos

$$nulidade(A) = 3 - posto(A) = 1.$$

# Exemplos:

c) $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 10 \\ 2x - 5y - 3z = 8 \\ -5x + 3y + 6z = -4 \end{cases}$

Solução: Escalonando a matriz ampliada do sistema, dada por

$$[A\,|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & 10 \\ 2 & -5 & -3 & 8 \\ -5 & 3 & 6 & -4 \end{array}\right] \; L_1 \longrightarrow L_1 - L_2 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & 8 \\ -5 & 3 & 6 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 + 5L_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & -19 & -1 & 4 \\ 0 & 38 & 1 & 6 \end{array}\right] \; L_2 \longrightarrow -\frac{1}{19} L_2 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/19 & -4/19 \\ 0 & 38 & 1 & 6 \end{array}\right] \; L_3 \longrightarrow L_3 - 38L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/19 & -4/19 \\ 0 & 0 & -1 & 14 \end{array}\right] \; L_3 \longrightarrow -L_3 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/19 & -4/19 \\ 0 & 0 & 1 & -14 \end{array}\right]$$

Portanto, o sistema dado é equivalente ao sistema dado pela última matriz:

# Exemplos:

$$\begin{cases} x + 7y - 1z = 2 \\ y + \frac{1}{19}z = \frac{-4}{19} \\ z = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 2 - 7y + z \\ y &= \frac{-4}{19} - \frac{1}{19}z \\ z &= -14 \end{aligned}$$

$$x = 2 - 7.\frac{10}{19} + (-14) = \frac{-298}{19}$$

$$y = \frac{-4}{19} - \frac{1}{19}(-14) = \frac{10}{19}$$

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

E sua única solução é

$$x = \frac{-298}{19}, \qquad y = \frac{10}{19}, \qquad z = -14$$

Questão: Por que isso ocorreu?

Note que obtivemos

$$[A\,|B] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/19 & -4\,/19 \\ 0 & 0 & 1 & -14 \end{array}\right].$$

Ou seja, após o escalonamento, tanto a matriz ampliada $[A\,|B]$ quanto a matriz dos coeficientes $A$ possuem três linhas não nulas. Portanto $posto([A\,|B]) = 3 = posto(A)$. que indica que o sistema é possível (SP).

Além disso, a diferença entre o número de colunas de $A$ e o posto de $A$ é igual a $0$ e não temos nenhuma variável livre no sistema, ou seja, ele é determinado (SPD).

Note que

$$nulidade(A) = 3 - posto(A) = 3 - 3 = 0.$$

# Caracterização das soluções de um sistema linear do tipo AX=B

Considere o sistema linear de $m$ equações e $n$ incógnitas $AX = B$.

O sistema é classificado como:

**a. Impossível (SI):** se não admite solução. Neste caso, $posto([A|B]) \neq posto(A)$.

**b. Possível (SP)**: se admite solução. Neste caso, $posto([A|B]) = posto(A)$ e ainda, é:

- Determinado (SPD): quando a solução é única. Neste caso $posto(A) = n$ e, com isso,

$$nulidade(A) = n - posto(A) = n - n = 0.$$

- Indeterminado (SPI): quando há infinitas soluções. Neste caso $posto(A) < n$ e

$$nulidade(A) = n - posto(A) \neq 0.$$

**Definição 3**: Considere o sistema linear possível e indeterminado $AX = B$, com $A$ uma matriz de ordem $m \times n$. O **grau de liberdade** do sistema é definido por

$$g = nulidade(\mathrm{A}) = n - posto(A)$$

e corresponde ao **número de variáveis livres** da solução do sistema.

# Exemplo

**Exemplo 2.** Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -5 \\ 2 & -4 & k \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ k-1 \\ -4 \end{bmatrix},$$

onde $k \in \mathbb{R}$. Determine, se possível, o(s) valor(es) de $k$ para os quais o sistema $AX = B$ se torna:

i) impossível  ii) possível e indeterminado  iii) possível e determinado

**Solução:** Escalonando a matriz ampliada do sistema:

$$[A\,|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & -5 & k-1 \\ 2 & -4 & k & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to L_2 + 4L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & k+3 \\ 0 & 0 & k-2 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to -L_2 \\ L_3 \to L_3 + (k-2)L_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -k-3 \\ 0 & 0 & 0 & -6+(k-2)(k+3) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -k-3 \\ 0 & 0 & 0 & k^2+k-12 \end{array}\right].$$

# Exemplo

Com o escalonamento finalizado, podemos analisar o posto das matrizes $A$ e $[A\,|B]$.

Temos que

$$posto(A) = 2,$$

pois há somente duas linhas não nulas.

O posto da matriz ampliada depende do termo $k^2 + k - 12$:

$$posto([A|B]) = \begin{cases} 3, \text{se} \quad k^2 + k - 12 \neq 0 \\ 2, \text{se} \quad k^2 + k - 12 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 3, \text{se} \quad k \neq 3 \ \text{ e } \ k \neq -4 \\ 2, \text{se} \quad k = 3 \ \text{ ou } \ k = -4 \end{cases}.$$

Assim, temos que:

i) O sistema é impossível (SI) se e somente se $posto([A|B]) \neq posto(A)$.
   Nesse exemplo, esse caso ocorre se e somente se $posto([A|B]) = 3$, ou seja, quando

$$k \neq 3 \quad \text{e} \quad k \neq -4\,.$$

ii) O sistema é possível e indeterminado (SPI) se e somente se $P([A|B]) = P(A) = 2$ e $nul(A) = 3 - posto(A) = 3 - 2 = 1 \neq 0$. Nesse exemplo, esse caso ocorre quando

$$k = 3 \quad \text{ou} \quad k = -4\,.$$

iii) O sistema é possível e determinado (SPD) se e somente se $P([A|B]) = P(A) = 3 = n$ e e $nul(A) = 3 - posto(A) = 3 - 3 = 0$. Como, nesse exemplo, temos $posto(A) = 2$, não existe $k \in \mathbb{R}$ que satisfaça essa condição.