Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral

Função Modular e Funções Polinomiais

Prof. Dani Prestini

UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Função Modular

Definição:

Chamamos de função modular a função $f(x) = |x|$ definida por:

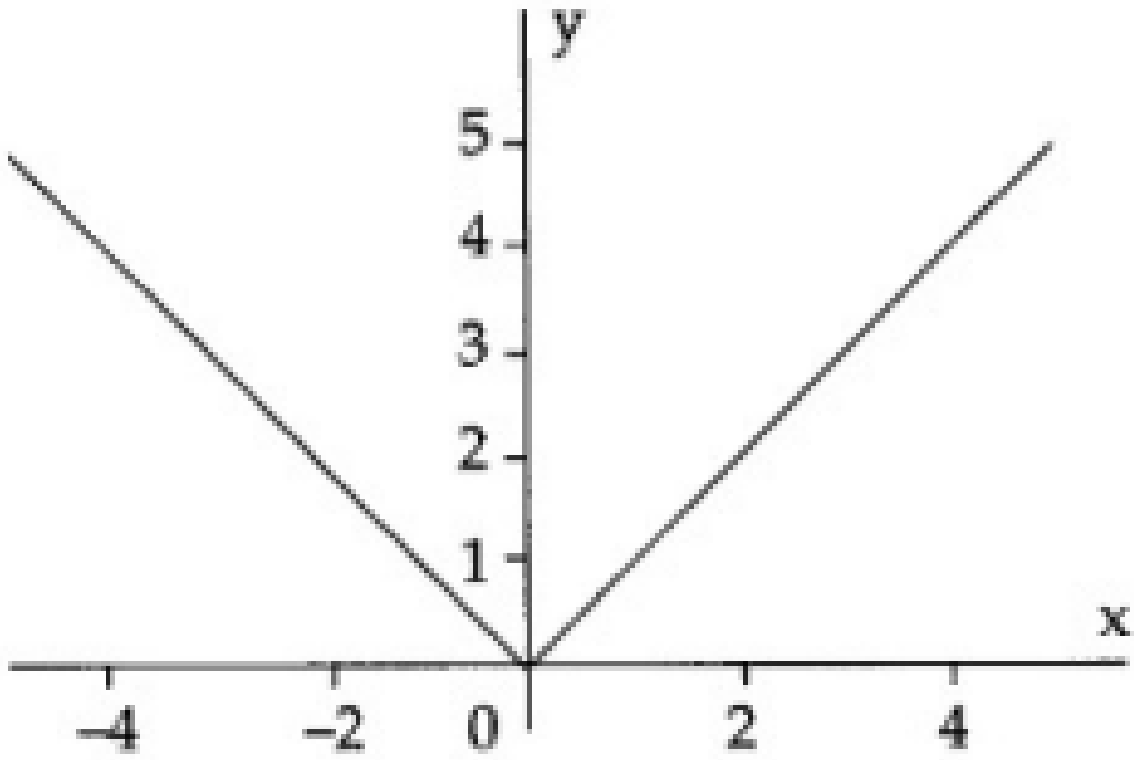
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Observe, então, que a função modular é uma função definida por duas sentenças.

Notemos que o domínio da função é o conjunto $\mathbb{R}$ e a imagem da função é o conjunto $\mathbb{R}_+$.

Função Modular

Gráfico:



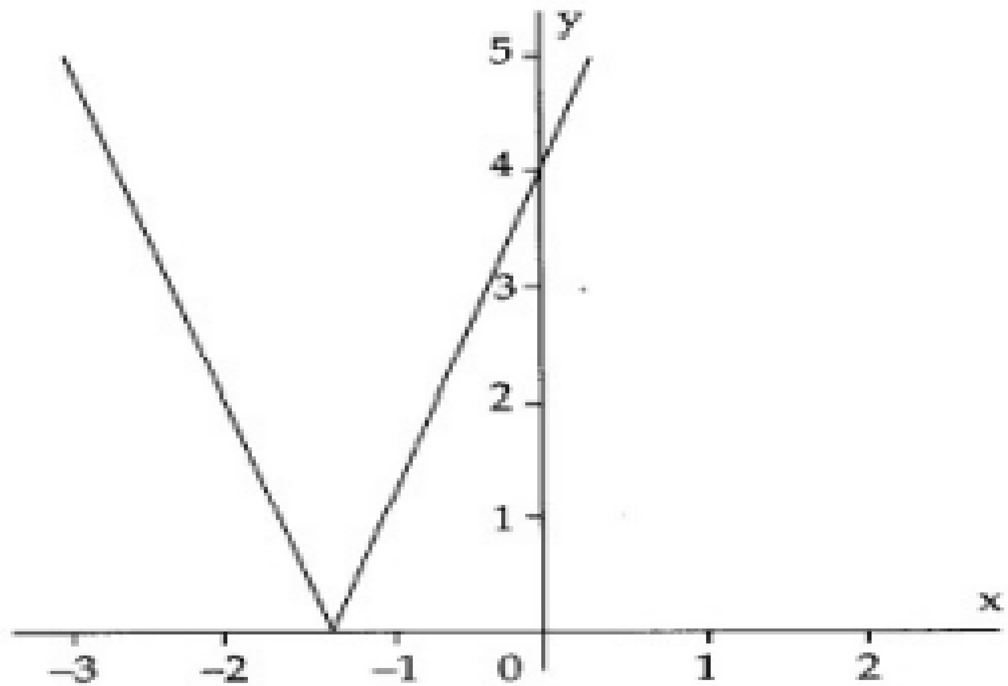
Função Modular

Exemplo 1 - $f(x) = |3x + 4|$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & \text{se } 3x + 4 \geq 0 \\ -(3x + 4) & \text{se } 3x + 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4 & se\ \ x \geq -\dfrac{4}{3} \\ -3x - 4 & se\ \ x < -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

D(x) = $\mathbb{R}$ e Im(f) = $\mathbb{R}_+$.

Gráfico:



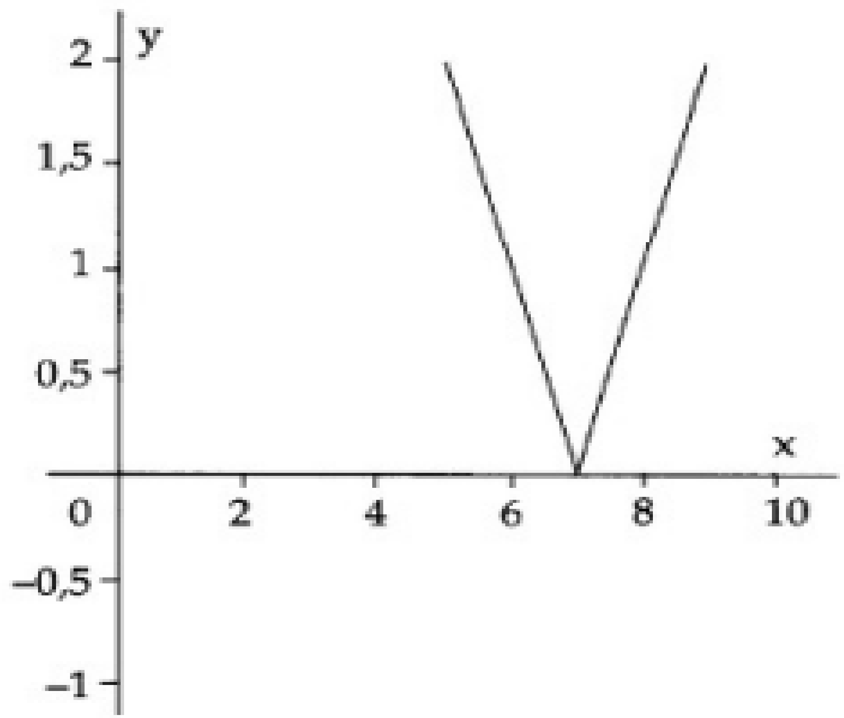
Função Modular

Exemplo 2 - $f(x) = |-x + 7|$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 7 & \text{se } -x + 7 \geq 0 \\ -(-x + 7) & \text{se } -x + 7 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 7 & se \;\; x \leq 7 \\ x - 7 & se \;\; x > 7 \end{cases}$$

D(x) = $\mathbb{R}$ e Im(f) = $\mathbb{R}_+$.

Gráfico:



Função Modular

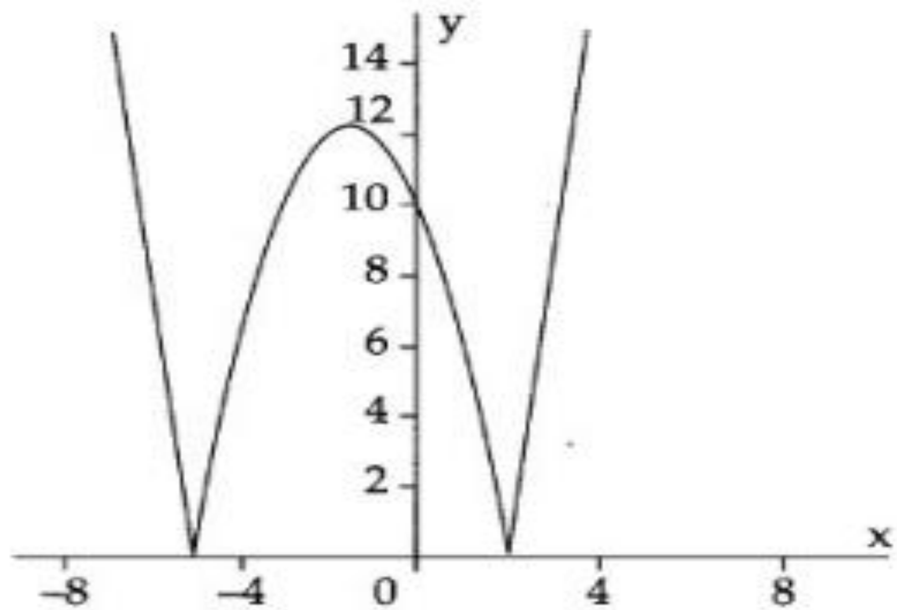
Exemplo 3 - $f(x) = |x^2 + 3x - 10|$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 10 & \text{se} \;\; x^2 + 3x - 10 \geq 0 \\ -(x^2 + 3x - 10) & \text{se} \;\; x^2 + 3x - 10 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 10 & se \;\; x \leq -5 \;\; ou \;\; x \geq 2 \\ -x^2 - 3x + 10 & se \;\; -5 < x < 2 \end{cases}$$

D(x) = $\mathbb{R}$ e Im(f) = $\mathbb{R}_+$.

Gráfico:



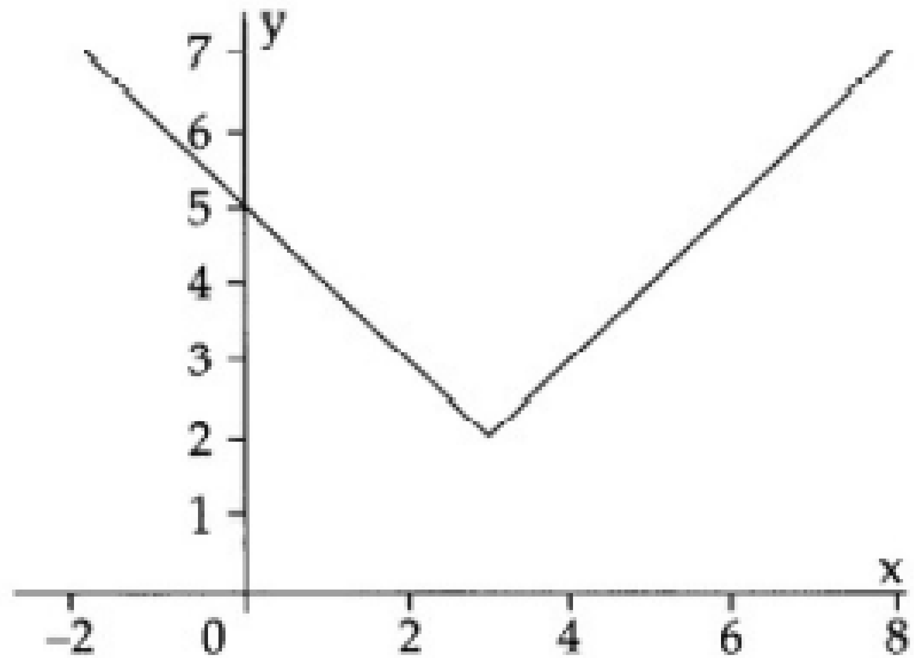
Função Modular

Exemplo 4 - $f(x) = |x - 3| + 2$

$$f(x) = \begin{cases} (x-3)+2 & \text{se } x-3 \geq 0 \\ -(x-3)+2 & \text{se } x-3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 & se \;\; x \geq 3 \\ -x+5 & se \;\; x < 3 \end{cases}$$

D(x) = $\mathbb{R}$ e Im(f) = [2, +∞[

Gráfico:



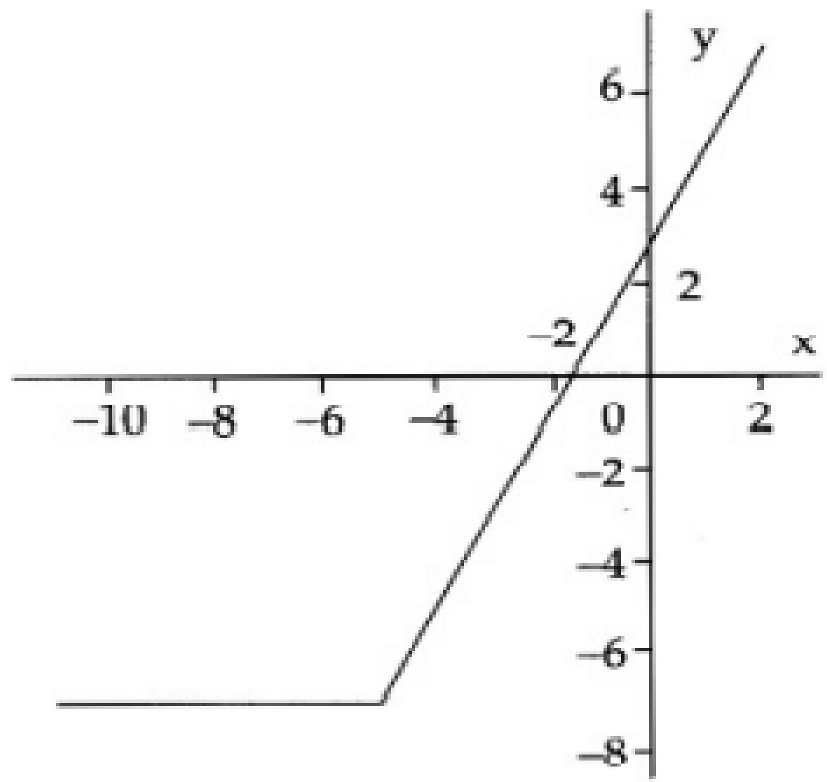
Função Modular

Exemplo 5 - $f(x) = |x+5| + x - 2$

$$f(x) = \begin{cases} (x+5) + x - 2 & \text{se } x + 5 \geq 0 \\ -(x+5) + x - 2 & \text{se } x + 5 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 & se \;\; x \geq -5 \\ -7 & se \;\; x < -5 \end{cases}$$

D(x) = $\mathbb{R}$ e Im(f) = $[-7, +\infty[$

Gráfico:



Função Modular

Exemplo 5 - $f(x) = |2x - 4| + |x - 1|$

1ª. Parte

$$f_1(x) = |2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4 & se \quad 2x - 4 \geq 0 \\ -(2x - 4) & se \quad 2x - 4 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 4 & se \ \ x \geq 2 \\ -2x + 4 & se \ \ x < 2 \end{cases}$$

2ª. Parte

$$f_2(x) = |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & se \quad x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & se \quad x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 & se \ \ x \geq 1 \\ -x + 1 & se \ \ x < 1 \end{cases}$$

Função Modular

Exemplo 5 - $f(x) = |2x - 4| + |x - 1|$

	$x<1$	$1 \le x < 2$	$x \ge 2$
$\|2x-4\|$	$-2x+4$	$-2x+4$	$2x-4$
$\|x-1\|$	$-x+1$	$x-1$	$x-1$
$\|2x-4\| + \|x-1\|$	$-3x+5$	$-x+3$	$3x-5$

$$f(x) = |2x - 4| + |x - 1| = \begin{cases} -3x + 5 & \text{se } x < 1 \\ -x + 3 & \text{se } 1 \le x < 2 \\ 3x - 5 & se\ x \ge 2 \end{cases}$$

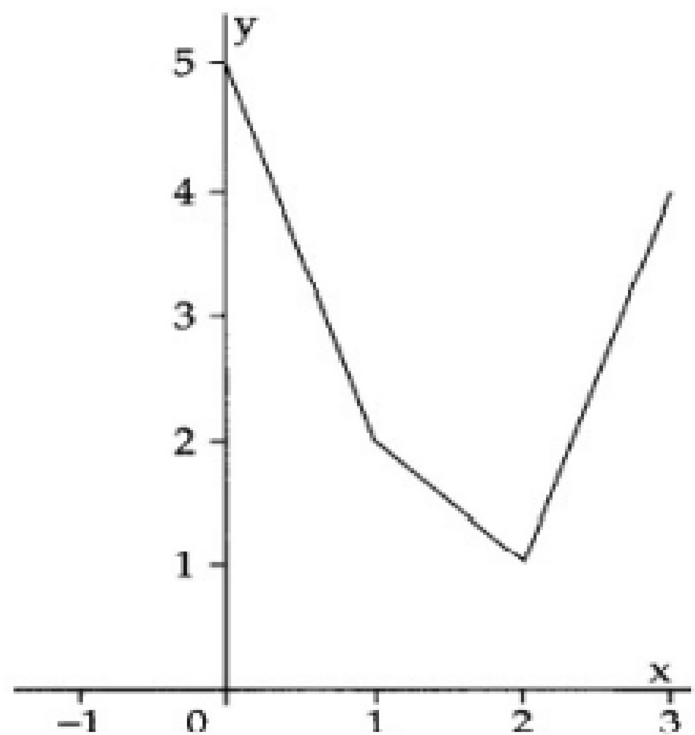
Função Modular

Exemplo 5 - $f(x) = |2x - 4| + |x - 1|$

$$f(x) = |2x - 4| + |x - 1| = \begin{cases} -3x + 5 & \text{se } x < 1 \\ -x + 3 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 3x - 5 & se\ x \geq 2 \end{cases}$$

D(x) = $\mathbb{R}$ e Im(f) = $[1, +\infty[$

Gráfico:



Função Polinomial

Definição:

DEFINIÇÃO Função polinomial

Seja n um número inteiro não negativo, e sejam $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots a_{n-1}, a_n$ números reais com $a_n \neq 0$. A função dada por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

é uma **função polinomial de grau *n***, em que $a_n, a_{n-1}, \ldots + a_2, a_1, a_0$ são os coeficientes. O **coeficiente principal** é a_n.

A função zero dada por $f(x) = 0$ é uma função polinomial que não tem grau nem coeficiente principal.

Função Polinomial

EXEMPLO 1 Transformações no gráfico das funções monomiais

Descreva como transformar o gráfico de uma função monomial $f(x) = a_n x^n$ em um gráfico das funções dadas abaixo. Esboce o gráfico transformado e verifique a resposta, se possível, em calculadora com esse recurso. Calcule a localização do intercepto, o valor por onde o gráfico passa no eixo vertical y, como forma de conferir o gráfico transformado.

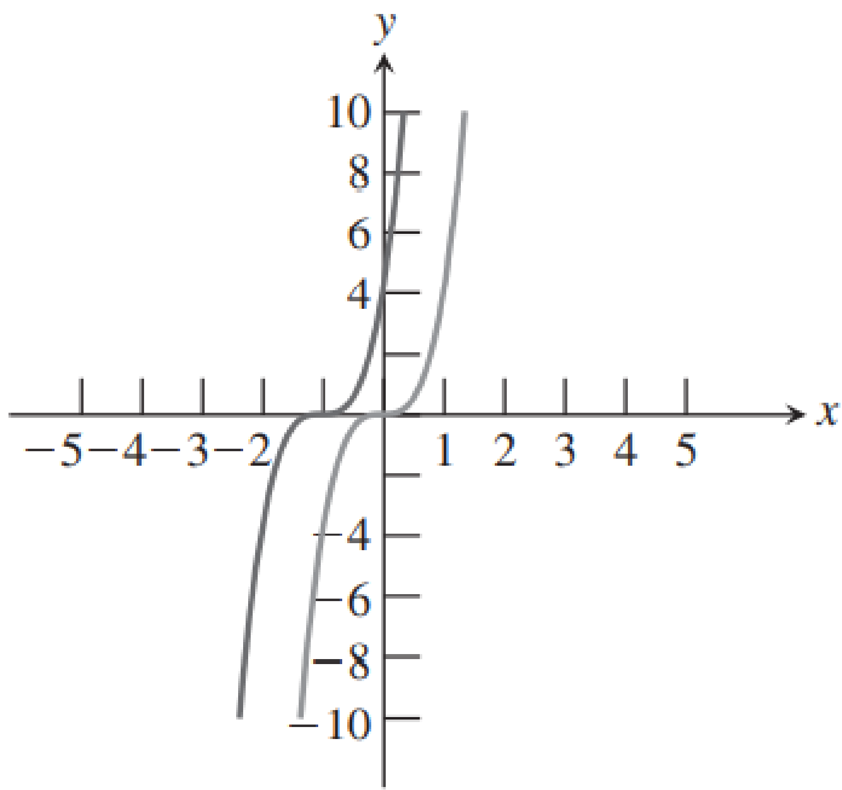
(a) $g(x) = 4(x + 1)^3$

(b) $h(x) = -(x - 2)^4 + 5$

Função Polinomial

SOLUÇÃO

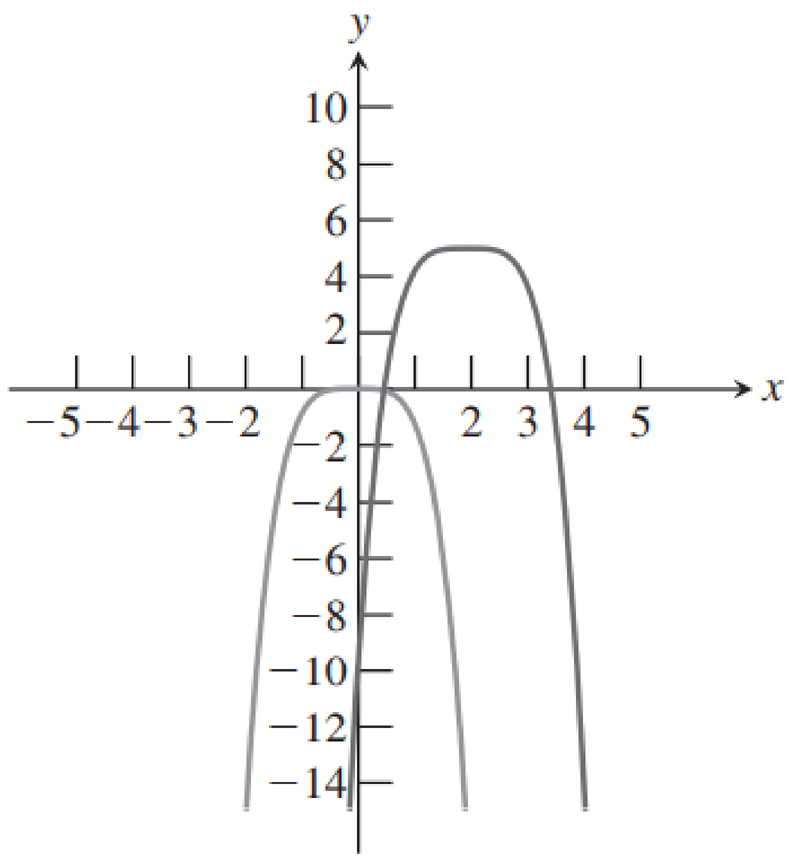
(a) Você pode obter o gráfico de $g(x) = 4(x + 1)^3$ deslocando o gráfico de $f(x) = 4x^3$ uma unidade para a esquerda, como mostrado na Figura 10.1(a). O intercepto do gráfico de g é $g(0) = 4(0 + 1)^3 = 4$, que coincide com o valor observado no gráfico transformado.



(a)

Função Polinomial

(b) Você pode obter o gráfico de $h(x) = -(x-2)^4 + 5$ deslocando o gráfico de $f(x) = -x^4$ duas unidades para a direita e cinco unidades para cima, como mostrado na Figura 10.1(b). O intercepto do gráfico de h é $h(0) = -(0-2)^4 + 5 = -16 + 5 = -11$, que coincide com o valor observado no gráfico transformado.

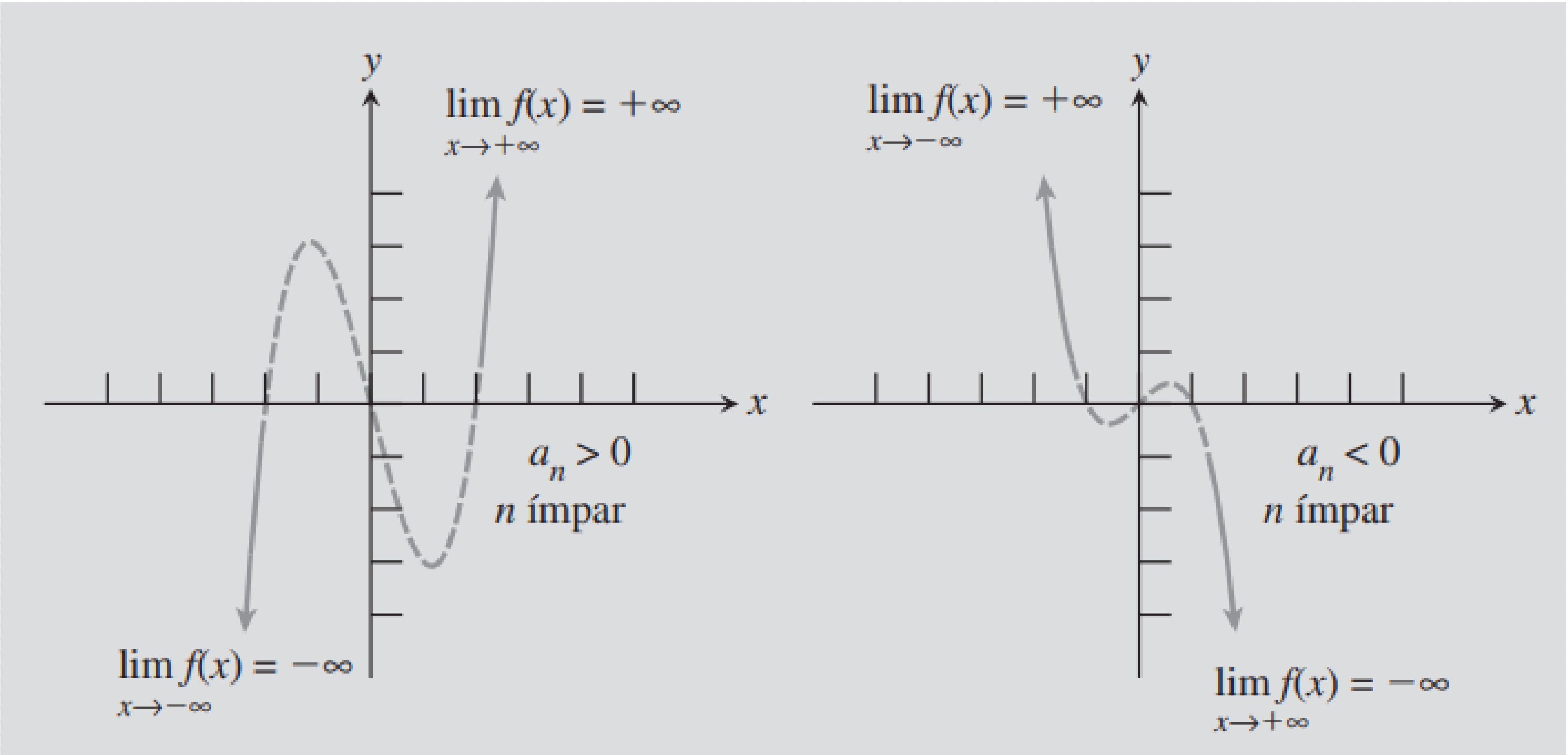


(b)

Função Polinomial

Teste do termo principal para comportamento das funções polinomiais nos extremos do domínio

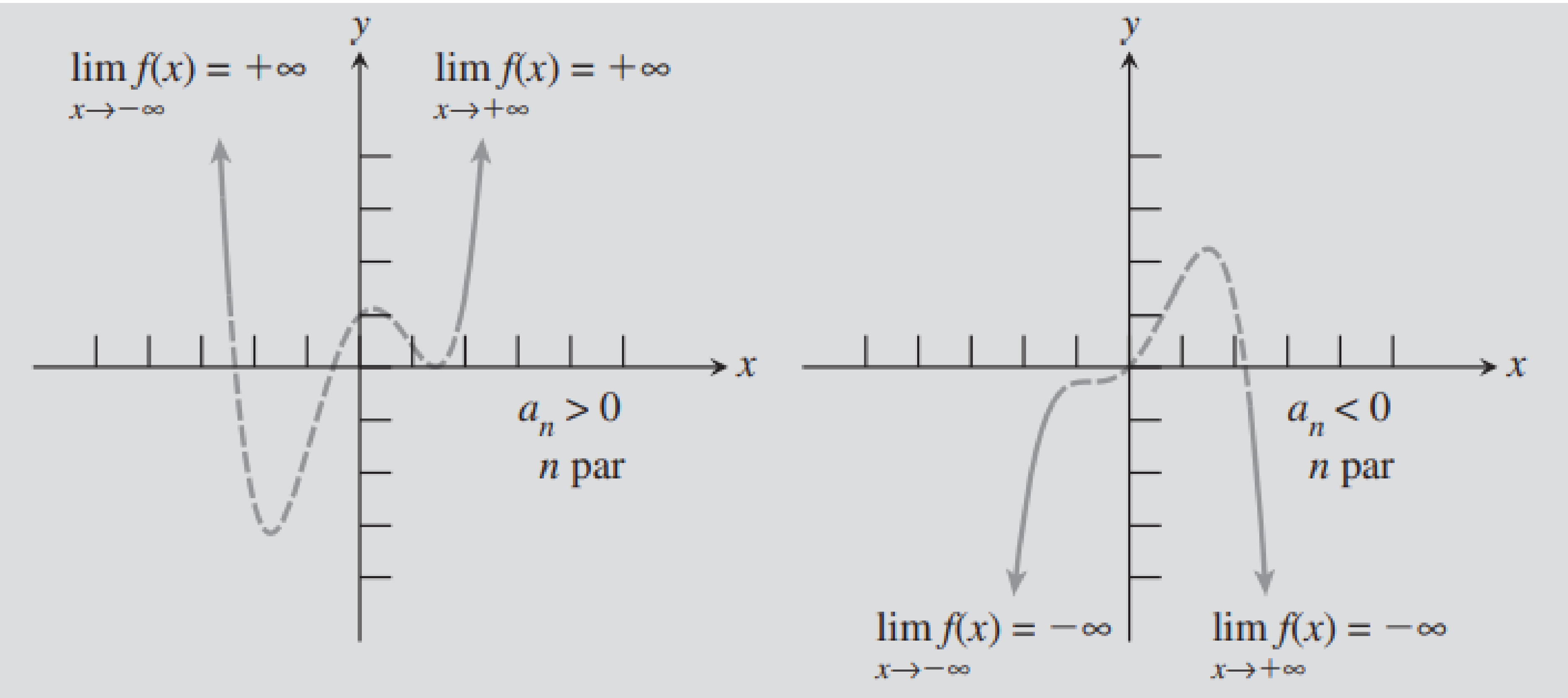
Para qualquer função polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ os limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ são determinados pelo grau n do polinômio e seu coeficiente principal a_n.



Função Polinomial

Teste do termo principal para comportamento das funções polinomiais nos extremos do domínio

Para qualquer função polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ os limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ são determinados pelo grau n do polinômio e seu coeficiente principal a_n.

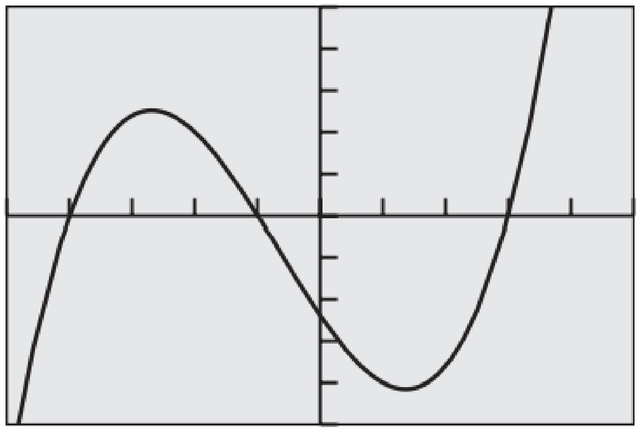


Função Polinomial

EXEMPLO 4 Análise das funções polinomiais nos extremos do domínio

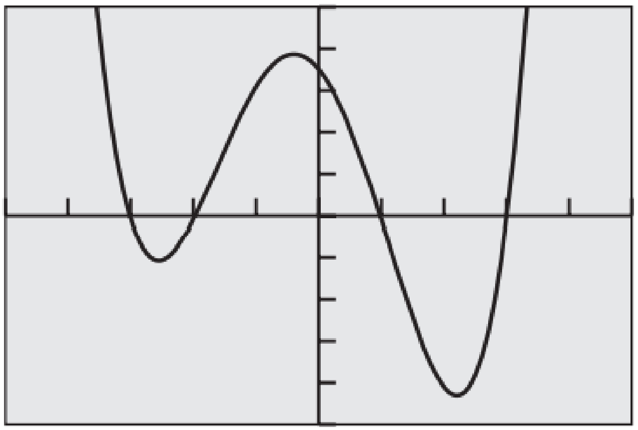
Descreva o comportamento das funções polinomiais nos extremos do domínio:

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$ **(b)** $g(x) = 2x^4 + 2x^3 - 22x^2 - 18x + 35$



[–5, 5] por [–25, 25]

(a)



[–5, 5] por [–50, 50]

(b)

(a) O gráfico de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$ é demonstrado na Figura 10.7(a). A função f tem dois extremos locais e três raízes, que é o número máximo possível para esse polinômio. Os limites são $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

(b) O gráfico de $g(x) = 2x^4 + 2x^3 - 22x^2 - 18x + 35$ é demonstrado na Figura 10.7(b). A função g tem três extremos locais e quatro raízes, que é o número máximo possível para esse polinômio. Os limites são $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^4 = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^4 = +\infty$.

Função Polinomial

Raízes das Funções Polinomiais

EXEMPLO 5 Raízes de uma função polinomial

Encontre as raízes da função $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$.

SOLUÇÃO

Solução algébrica

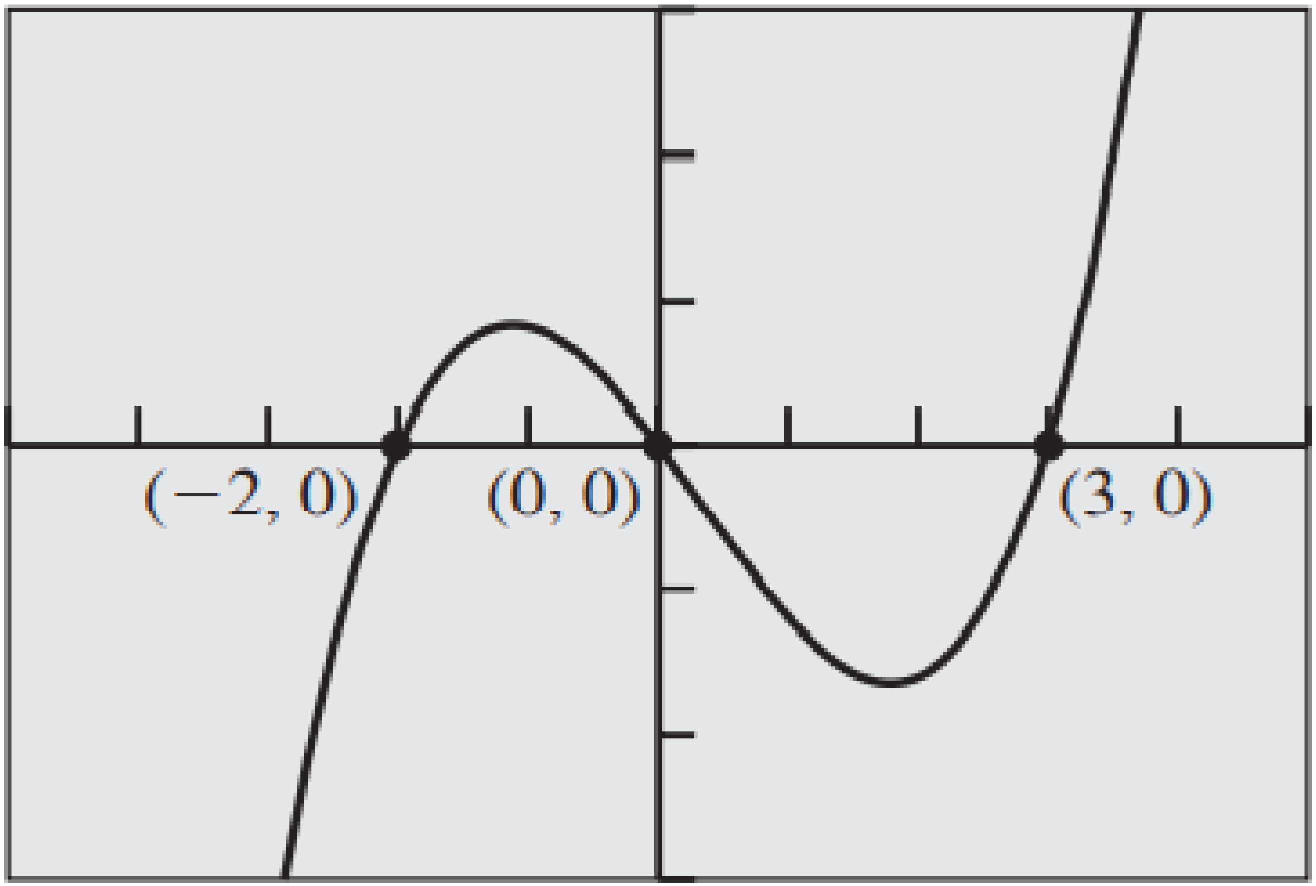
Resolvemos a equação $f(x) = 0$ fatorando:

$$
\begin{aligned}
x^3 - x^2 - 6x &= 0 \\
x(x^2 - x - 6) &= 0 \\
x(x - 3)(x + 2) &= 0 \\
x = 0 \text{ ou } x - 3 = 0 \text{ ou } x + 2 &= 0 \\
x = 0 \text{ ou } x = 3 \text{ ou } x &= -2
\end{aligned}
$$

As raízes de f são 0, 3 e -2.

Função Polinomial

Raízes das Funções Polinomiais

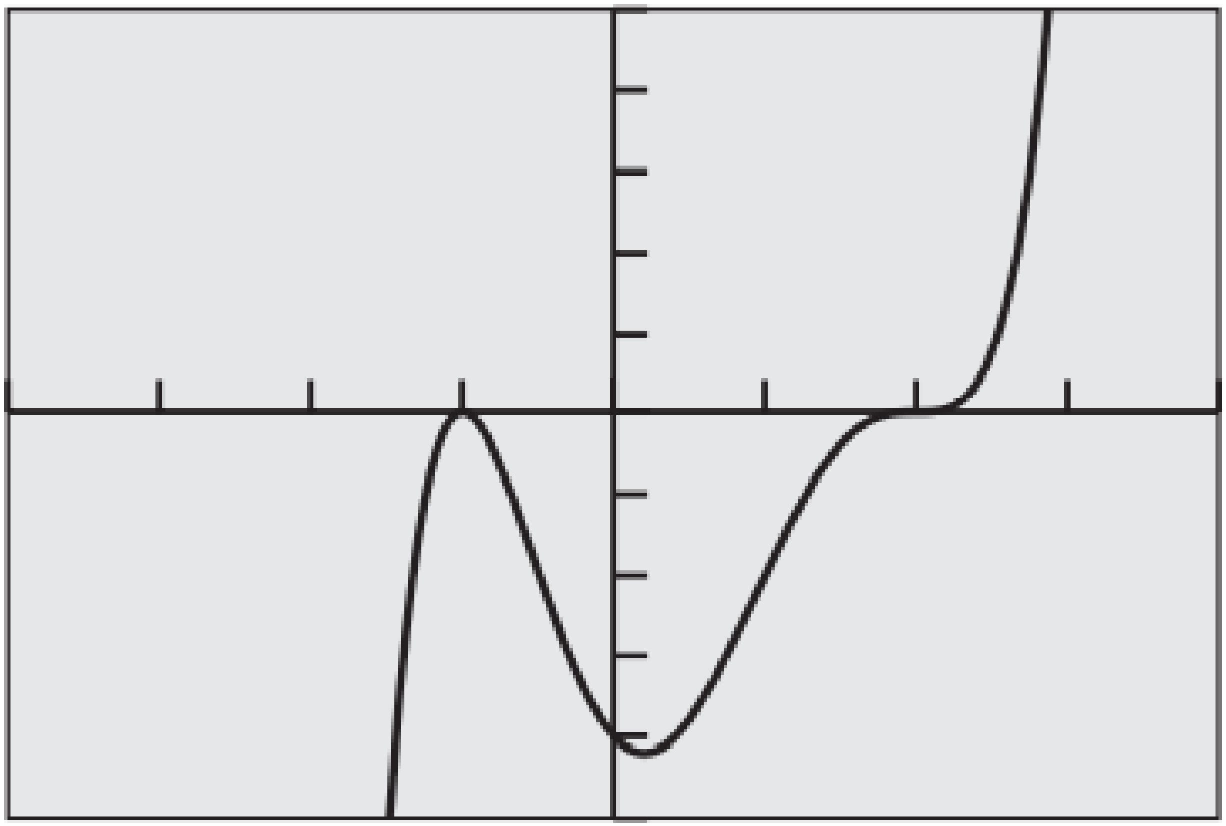


[−5, 5] por [−15, 15]

Função Polinomial

Raízes das Funções Polinomiais

EXEMPLO 6 – Encontre as raízes da função $f(x) = (x-2)^3.(x+1)^2$



[−4, 4] por [−10, 10]

Função Polinomial

Divisão de Polinômios

Ao fatorar um polinômio, descobrimos suas raízes e as características da representação gráfica.

Veremos uma maneira de fatorar um polinômio utilizando a divisão de polinômios, bastante semelhante à divisão de números inteiros. Observe os exemplos a seguir:

$$
\begin{array}{r|l}
3587 & 32 \\ \cline{2-2}
-\ 32 & 112 \\ \cline{1-1}
387 & \\
-\ 32 & \\ \cline{1-1}
67 & \\
-\ 64 & \\ \cline{1-1}
3 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
3x^3 + 5x^2 + 8x + 7 & 3x + 2 \\ \cline{2-2}
-3x^3 - 2x^2 \phantom{{}+ 8x + 7} & x^2 + x + 2 \\ \cline{1-1}
3x^2 + 8x + 7 & \\
-3x^2 - 2x \phantom{{}+ 7} & \\ \cline{1-1}
6x + 7 & \\
-6x - 4 & \\ \cline{1-1}
3 &
\end{array}
$$

Função Polinomial

EXEMPLO 8 **Uso da divisão longa com polinômios**

Use a divisão longa para encontrar o quociente e o resto quando $2x^4 - x^3 - 2$ é dividido por $2x^2 + x + 1$. Escreva com a notação do algoritmo da divisão e na forma de fração.

SOLUÇÃO

Vamos considerar $2x^4 - x^3 - 2$ como $2x^4 - x^3 + 0x^2 + 0x - 2$.

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 - x^3 + 0x^2 + 0x - 2 & 2x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
-2x^4 - x^3 - x^2 \qquad\qquad & x^2 - x \\ \cline{1-1}
-2x^3 - x^2 + 0x - 2 & \\
+2x^3 + x^2 + x \quad\;\; & \\ \cline{1-1}
x - 2 &
\end{array}$$

O algoritmo da divisão produz a forma polinomial:

$$2x^4 - x^3 - 2 = (2x^2 + x + 1)(x^2 - x) + (x - 2).$$

Na forma de fração, temos:

$$\frac{2x^4 - x^3 - 2}{2x^2 + x + 1} = x^2 - x + \frac{x - 2}{2x^2 + x + 1}.$$

Função Polinomial

Teorema do Resto e Teorema de D'Alembert

TEOREMA Teorema do resto

Se um polinômio $f(x)$ é dividido por $x - k$, então o resto é $r = f(k)$.

TEOREMA Teorema de D'Alembert

O teorema de D'Alembert é uma consequência imediata do teorema do resto. Uma função polinomial $f(x)$ tem um fator $x - k$ se, e somente se, $f(k) = 0$, isto é, a divisão de $f(x)$ por $x - k$ é exata se, e somente se, $f(k) = 0$.

Função Polinomial

Teorema do Resto

EXEMPLO 9 **Uso do teorema do resto**

Encontre o resto quando $f(x) = 3x^2 + 7x - 20$ é dividido por:

(a) $x - 2$ **(b)** $x + 1$ **(c)** $x + 4$

SOLUÇÃO

(a) Podemos encontrar o resto sem usar a divisão longa, e sim o teorema do resto com k = 2:
$r = f(2) = 3 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 20 = 12 + 14 - 20 = 6$

(b) $r = f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) - 20 = 3 - 7 - 20 = -24$

(c) $r = f(-4) = 3 \cdot (-4)^2 + 7 \cdot (-4) - 20 = 48 - 28 - 20 = 0$

INTERPRETAÇÃO DO CASO QUANDO O RESTO É ZERO

Como em (c) o resto é 0, concluímos que $x + 4$ divide $f(x) = 3x^2 + 7x - 20$. Dessa forma, $x + 4$ é um fator de $f(x) = 3x^2 + 7x - 20$; logo -4 é uma solução de $3x^2 + 7x - 20 = 0$. Portanto, -4 é um valor do eixo horizontal x por onde o gráfico de $y = 3x^2 + 7x - 20$ passa. Podemos chegar a essa conclusão sem dividir, fatorar ou esboçar o gráfico.

Função Polinomial

Divisão de Polinômios pelo método de Briot-Ruffini

Continuamos com um caso especial de divisão de polinômio, com o divisor $x - k$. O teorema do resto nos dá uma maneira de encontrar o resto sem a técnica da divisão longa. Esse método mais curto para a divisão de um polinômio pelo divisor $x - k$ é chamado método de **Briot Ruffini.**

Divisão longa

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 - 3x^2 - 5x - 12 & x - 3 \\ \cline{2-2}
-2x^3 + 6x^2 & 2x^2 + 3x + 4 \\ \cline{1-1}
3x^2 - 5x - 12 & \\
-3x^2 + 9x & \\ \cline{1-1}
4x - 12 & \\
-4x + 12 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Briot Ruffini

3	2	–3	–5	–12
	2	3	4	0

Função Polinomial

Teorema das Raízes Racionais

TEOREMA Teorema das raízes racionais

Seja f uma função polinomial de grau $n \geq 1$ da forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$$

com todos os coeficientes como números inteiros e $a_0 \neq 0$. Se $x = \dfrac{p}{q}$ é uma raiz racional de f, onde p e q são primos entre si, então:

- p é um fator inteiro do termo independente a_0;
- q é um fator inteiro do coeficiente principal a_n.

Função Polinomial

Teorema das Raízes Racionais

EXEMPLO 10 Análise das raízes da função

Encontre as raízes racionais de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

SOLUÇÃO

Como o coeficiente principal e o termo independente são ambos iguais a 1, de acordo com o teorema das raízes racionais, as raízes que f pode ter são 1 e -1. Verificando se são raízes de f, obtemos:

$$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 1 = -1 \neq 0$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 1 = -3 \neq 0$$

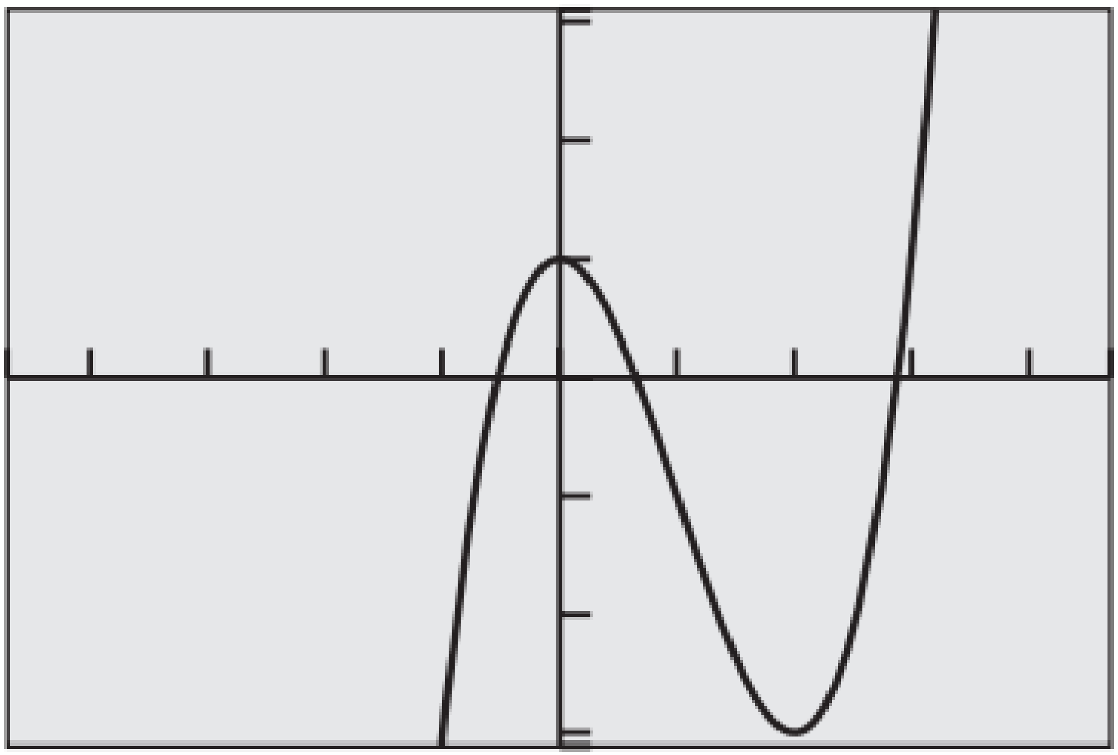
Logo, conclui-se que f não tem raízes racionais. Portanto, suas raízes, caso existam, são irracionais. A Figura mostra que existem três raízes, e a nossa conclusão é que elas são irracionais.

Função Polinomial

Teorema das Raízes Racionais

EXEMPLO 10 Análise das raízes da função

Encontre as raízes racionais de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.



$[-4{,}7;\ 4{,}7]$ por $[-3{,}1;\ 3{,}1]$

Função Polinomial

Teorema das Raízes Racionais

EXEMPLO 11 Análise das raízes da função

Encontre as raízes racionais de $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$.

SOLUÇÃO

Como o coeficiente principal é 3 e o termo independente é -2, pelo teorema das raízes racionais temos vários candidatos para serem essas raízes.

As possibilidades são:

$$\frac{\text{Fatores de } -2}{\text{Fatores de } 3} : \frac{\pm 1, \pm 2}{\pm 1, \pm 3} : \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$$

Testando os valores na função verifica-se que 1 é uma de suas raízes racionais.

Função Polinomial

Teorema das Raízes Racionais

Vejamos pelo método de Briot Ruffini se 1 é raiz de f.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & 4 & -5 & -2 \\ \hline & 3 & 7 & 2 & 0 \end{array}$$

Como o último número na segunda linha é 0, então $x - 1$ é um fator de $f(x)$, e 1 é uma raiz de f. Calculando as outras raízes pelo algoritmo da divisão e usando fatoração, temos:

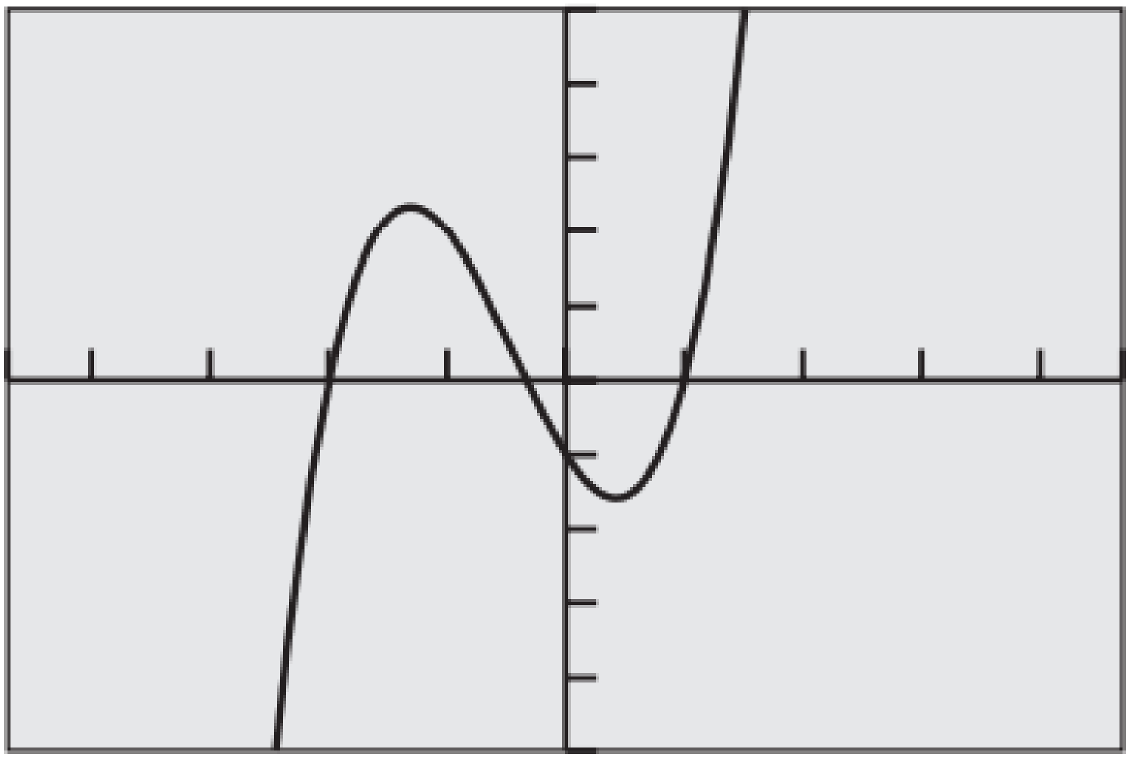
$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2 \\ &= (x - 1)(3x^2 + 7x + 2) \\ &= (x - 1)(3x + 1)(x + 2) \end{aligned}$$

Assim, as raízes racionais de f são 1, $-\dfrac{1}{3}$ e -2.

Função Polinomial

Teorema das Raízes Racionais

Gráfico:



$[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-10, 10]$

Exercícios

1) Livro Texto: página 133 – Exercícios do 9 ao 12

página 134 – Exercícios do 25 ao 38

página 135 – Exercícios do 50 ao 58

página 136 – Exercícios do 61 ao 86

página 137 – Exercícios do 93 ao 104

página 138 – Exercícios do 109 ao 118

Obrigado