Gráficos de equações em coordenadas polares (Teoria)

Introdução

Com a última videoaula, estabeleceu-se o **sistema de coordenadas polares**;

O que se deseja agora é fazer o gráfico de equações em coordenadas polares;

Assim como no caso de equações cartesianas, o gráfico de uma equação $F(r, \theta) = 0$ é formado por todos pontos cujas coordenadas polares satisfazem a equação;

Vale ressaltar que é comum que dada equação seja apresentada na forma explícita, ou seja, $r = f(\theta)$;

O uso de coordenadas polares simplifica determinadas equações de curvas. Apresentam-se alguns destes casos ao final desta videoaula.

Estrutura desta apresentação

- Gráficos de equações em coordenadas polares
  - Confecção do gráfico
  - Procedimentos para auxiliar na construção dos gráficos
  - Casos particulares

Confecção do gráfico

A representação gráfica de uma equação em coordenadas polares normalmente é obtida atribuindo-se valores para uma de suas variáveis (normalmente θ) e calculando-se os correspondentes valores para r. Os pontos obtidos são então marcados em um gráfico polar e conectados por meio de uma curva.

Na prática, alguns procedimentos podem auxiliar no esboço do gráfico.

Observação: Para os conceitos a seguir, assume-se que (não é necessário, entretanto):

- a equação foi dada na forma explícita, $r = f(\theta)$
- o polo esteja na origem do sistema cartesiano
- o eixo polar seja o eixo positivo dos x

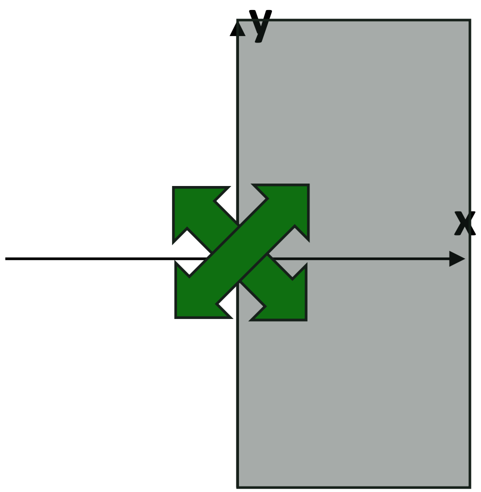
Procedimentos para auxiliar na construção dos gráficos

1. Determinar os pontos da curva variando θ a partir de $\theta = 0$

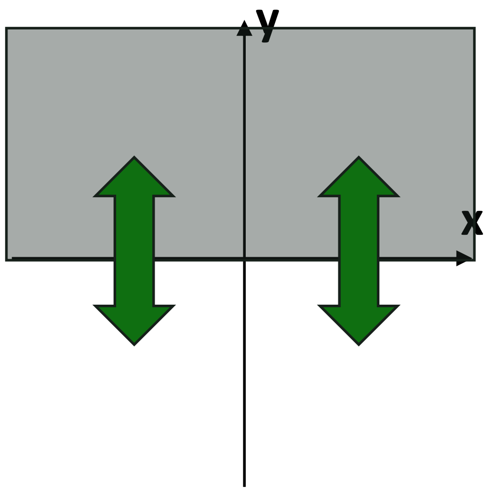
2. Verificar se r não se altera ao trocar θ por $\theta + 2\pi$. Caso não haja alteração, basta variar θ de 0 a 2π (isto pode ser alterado se o próximo passo produzir resultados).

3. Verificar se há **simetrias**:

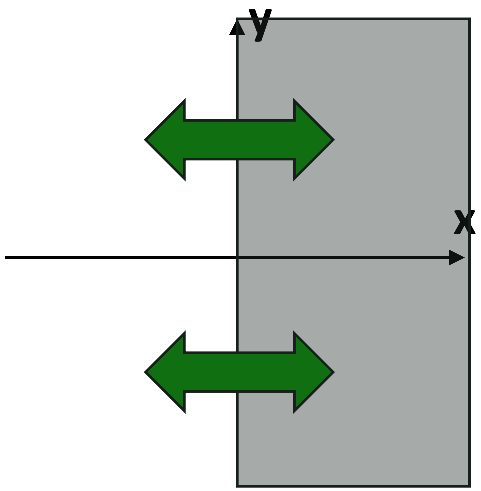
   a) Se a equação não se altera quando se substitui r por $-r$, existe simetria em relação ao polo (origem).



b) Se a equação não se altera quando se substitui θ por $-\theta$, existe simetria em relação ao eixo polar (eixo dos x).



c) Se a equação não se altera quando se substitui θ por $\pi - \theta$, existe simetria em relação ao eixo dos y.



Procedimentos para auxiliar na construção dos gráficos

4. Encontrar os valores de θ para os quais **a curva passa pelo polo** (ou seja, $r = 0$)

5. Verificar a existência de pontos críticos (**máximos e mínimos**)

   a) Máximo relativo: $f'(\theta) = 0$ e $f''(\theta) < 0$
   b) Mínimo relativo: $f'(\theta) = 0$ e $f''(\theta) > 0$

Observação: As seguintes relações trigonométricas serão úteis aqui:

- $\cos\theta = \cos(\theta + 2\pi)$ e $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta + 2\pi)$
- $\cos\theta = \cos(-\theta)$ e $\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}(-\theta)$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
- $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$

Procedimentos para auxiliar na construção dos gráficos

Exercício

Faça um esboço do gráfico das equações polares:

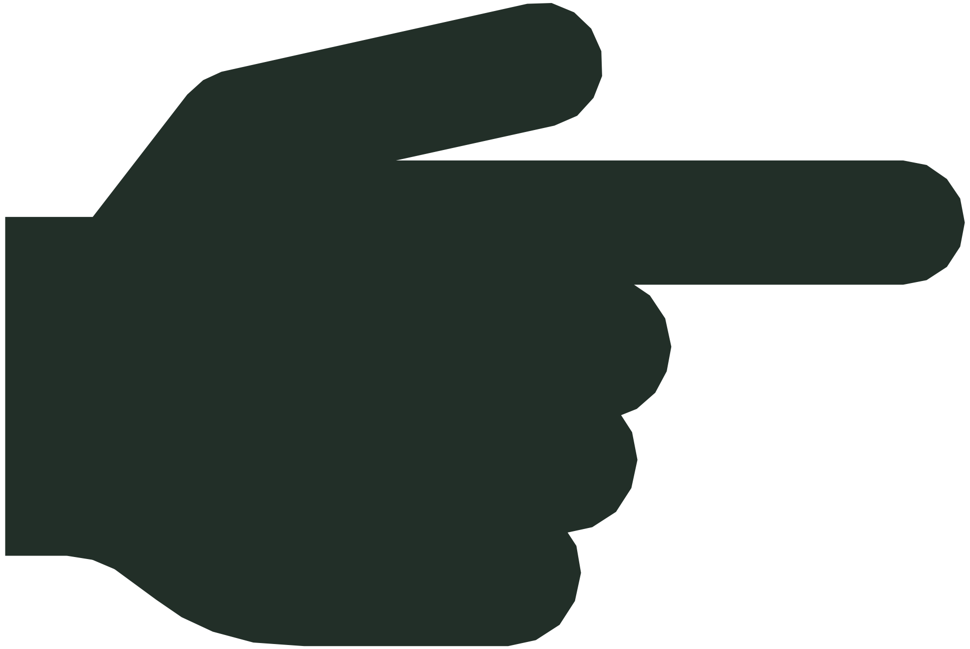
a) $r = 2(1 - \cos\theta)$

b) $r = 2\cos 2\theta$

Casos particulares

Nesta parte final, serão mostradas:

- **Versões em coordenadas polares de equações conhecidas** (os dois primeiros casos): aqui, almeja-se partir de equações conhecidas em coordenadas cartesianas e, fazendo as devidas substituições, reescrevê-las em coordenadas polares.
- **Equações em que não se conhece de imediato a representação em coordenadas cartesianas**: são apresentadas as equações polares que regem cada um desses casos, assim como , sempre que possível, exemplos de gráficos.



Mas por quê?

A vantagem deste tópico encontra-se no fato que, caso sejam identificadas de antemão as equações, a confecção de seus gráficos se torna bem mais simples!

1. **Reta:**

a) **Que passa pela origem** (e que não é vertical ou horizontal):

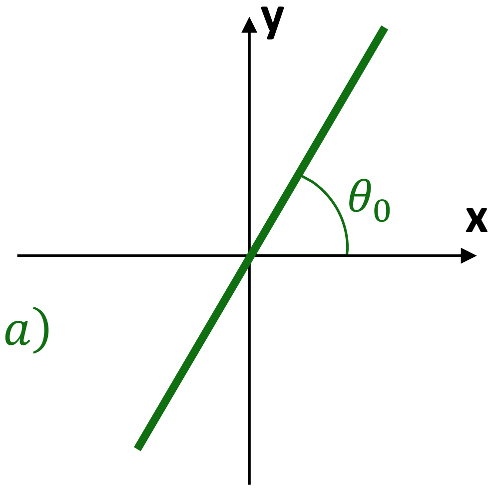
$$y = ax$$

Como $r = 0$ aceita qualquer θ

$$r \operatorname{sen}\theta = ar\cos\theta$$

$$\operatorname{tg}\theta = a$$

$$\theta = \theta_0 \quad (= \operatorname{arctg} a)$$



b) **Horizontal**:

$$y = b$$

$$r \operatorname{sen}\theta = b$$

c) **Vertical**:

$$x = c$$

$$r\cos\theta = c$$

Casos particulares

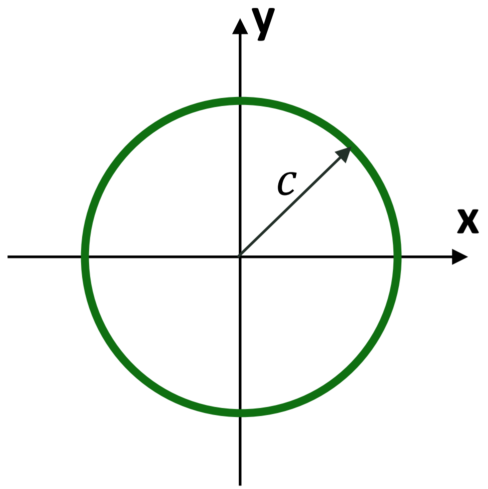
2. **Circunferência:**

a) **Com centro na origem e raio c:**

$$x^2 + y^2 = c^2$$

$$r^2 = c^2$$

$$r = \pm c$$



Casos particulares

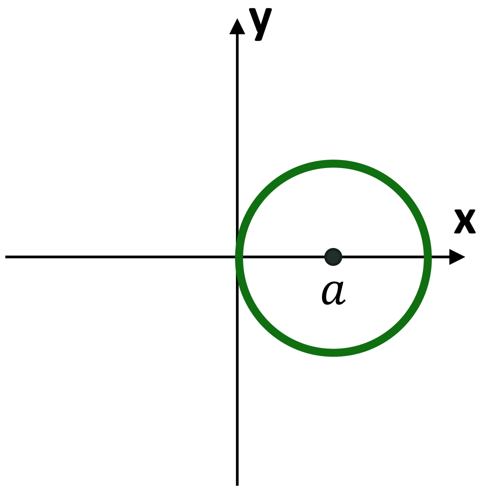
b) **Com centro $\boldsymbol{C(a,0)}$ e raio $\boldsymbol{r = |a|}$:**

$$(x-a)^2 + y^2 = |a|^2$$

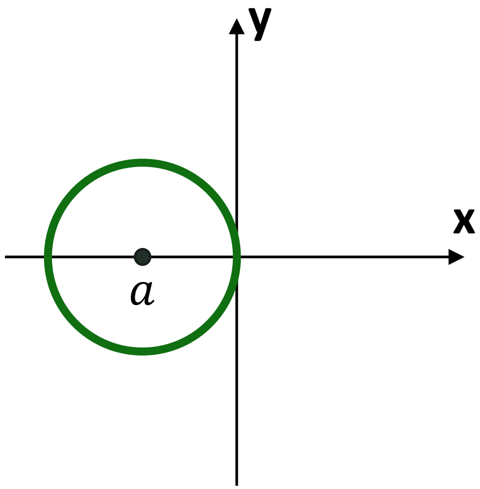
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2$$

$$r^2 = 2ar\cos\theta$$

$$r = 2a\cos\theta$$



$a > 0$



$a < 0$

Casos particulares

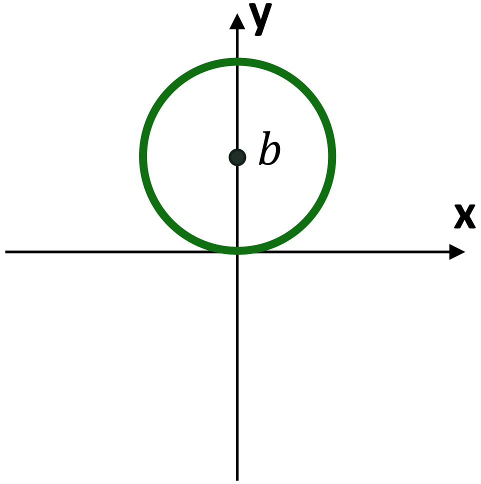
c) **Com centro $\boldsymbol{C(0, b)}$ e raio $\boldsymbol{r = |b|}$:**

$$x^2 + (y - b)^2 = |b|^2$$

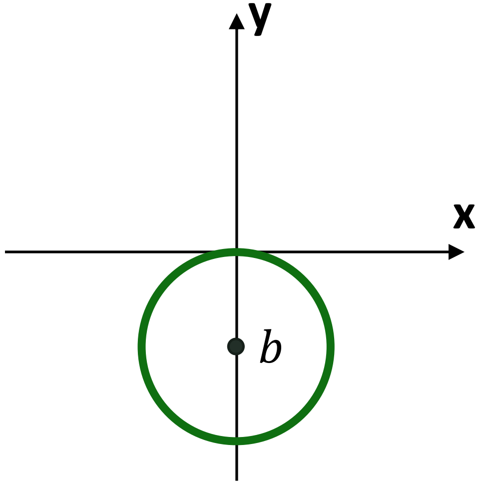
$$x^2 + y^2 - 2by + b^2 = b^2$$

$$r^2 = 2br \operatorname{sen} \theta$$

$$r = 2b \operatorname{sen} \theta$$



$b > 0$



$b < 0$

Casos particulares

Casos particulares

3. Limaçons:

$$r = a \pm b\cos\theta$$

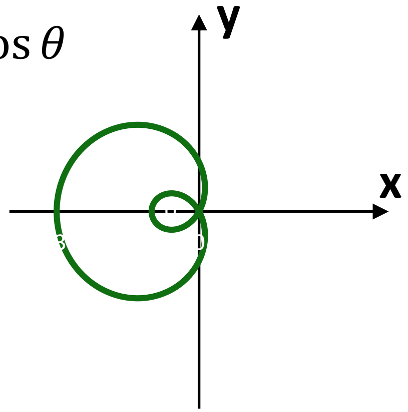
ou

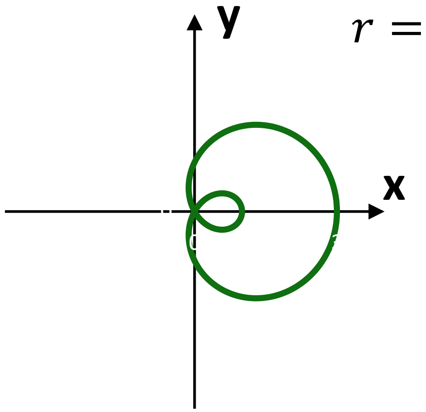
$$r = a \pm b\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Casos particulares

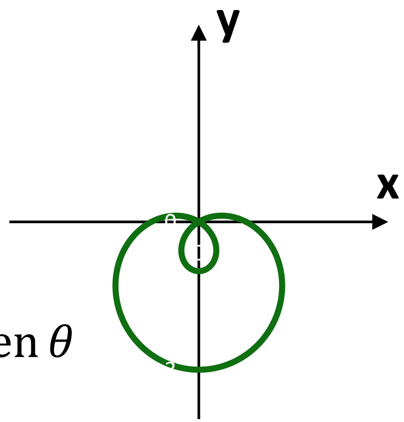
a) $|\boldsymbol{b}| > |\boldsymbol{a}|$**:** neste caso, ele apresenta um laço.

$$r = a - b\cos\theta$$
$$a, b > 0$$

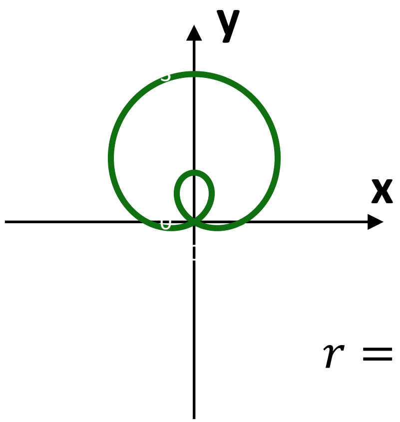




$$r = a + b\cos\theta$$
$$a, b > 0$$



$$r = a - b\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$a, b > 0$$

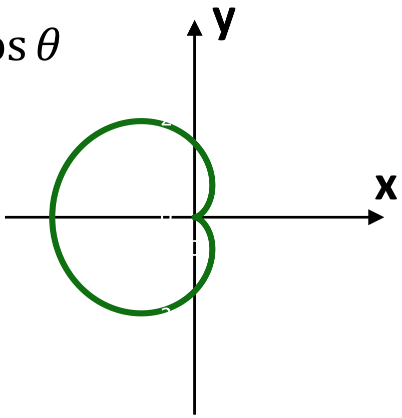


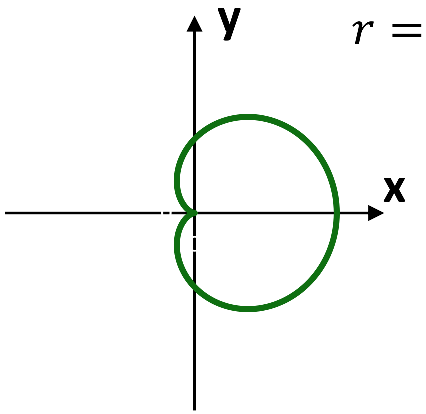
$$r = a + b\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$a, b > 0$$

Casos particulares

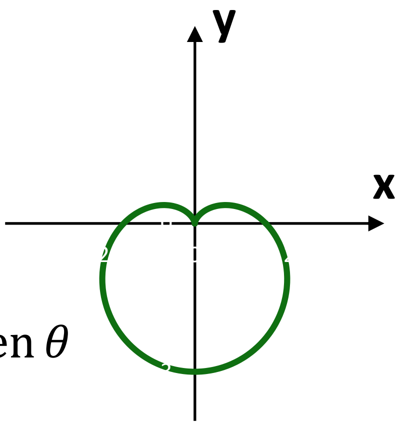
b) $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|$**:** neste caso, ele somente encosta no polo, ficando com um formato de coração. Por este motivo, recebe o nome **cardioide**.

$$r = a - b\cos\theta$$
$$a, b > 0$$

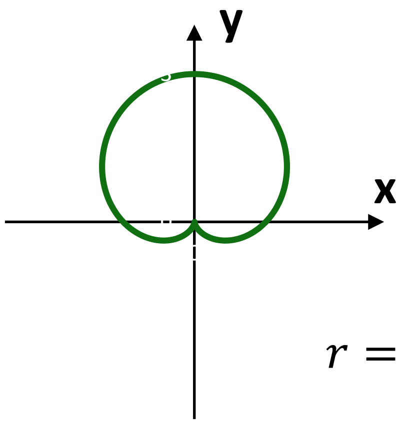




$$r = a + b\cos\theta$$
$$a, b > 0$$



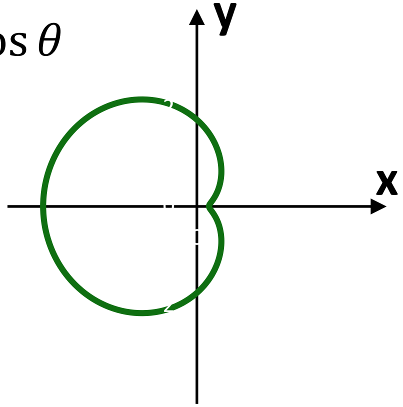
$$r = a - b\,\text{sen}\,\theta$$
$$a, b > 0$$

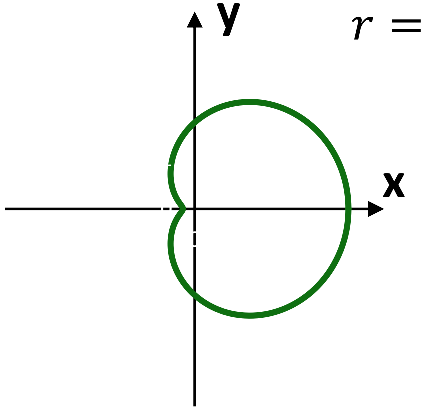


$$r = a + b\,\text{sen}\,\theta$$
$$a, b > 0$$

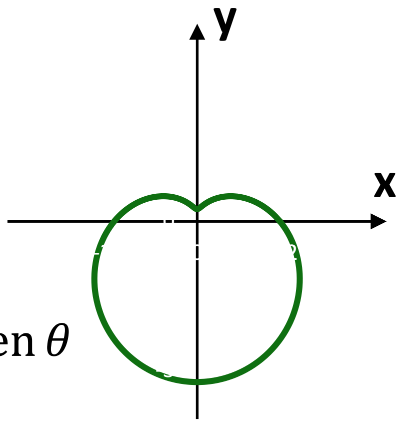
c) $|\boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{a}|$**:** neste caso, o gráfico não encosta no polo.

$$r = a - b\cos\theta$$
$$a, b > 0$$

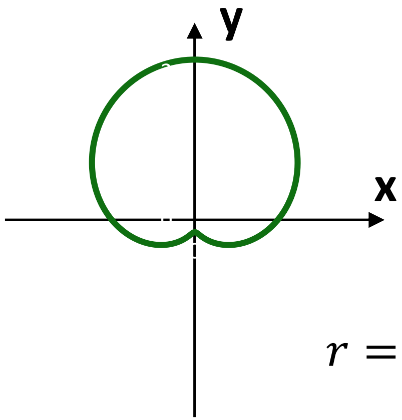




$$r = a + b\cos\theta$$
$$a, b > 0$$



$$r = a - b\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$a, b > 0$$



$$r = a + b\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$a, b > 0$$

Casos particulares

4. **Rosáceas:** Para $n \in \mathbb{N}$, é representada por

$$r = a \cos n\theta$$

ou

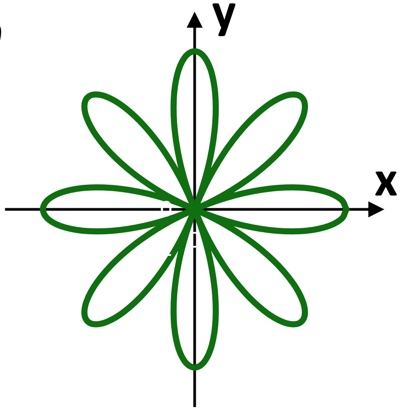
$$r = a \operatorname{sen} n\theta$$

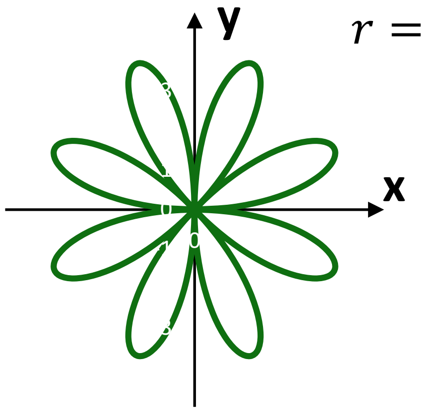
Casos particulares

Casos particulares

a) $\boldsymbol{n}$ **par:** neste caso, tem-se uma rosácea de $2n$ pétalas.

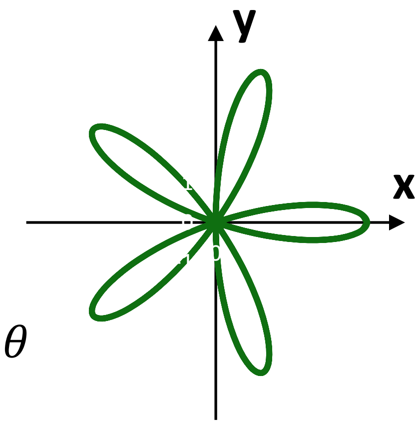
$r = a\cos 4\theta$

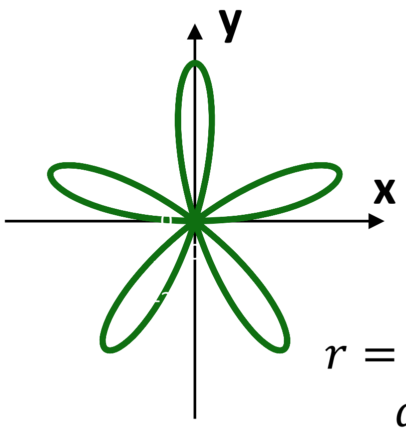




$r = a\,\mathrm{sen}\,4\theta$

b) $\boldsymbol{n}$ **ímpar:** neste caso, tem-se uma rosácea de n pétalas.





$r = a\cos 5\theta$
$a > 0$

$r = a\,\mathrm{sen}\,5\theta$
$a > 0$

Casos particulares

5. Lemniscatas:

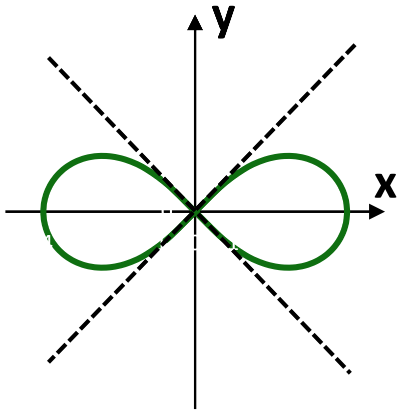
$$r^2 = \pm a^2 \cos 2\theta$$

ou

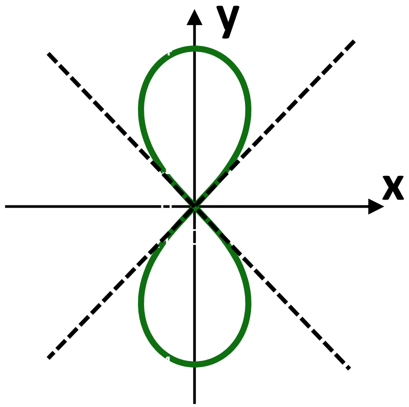
$$r^2 = \pm a^2 \operatorname{sen} 2\theta$$

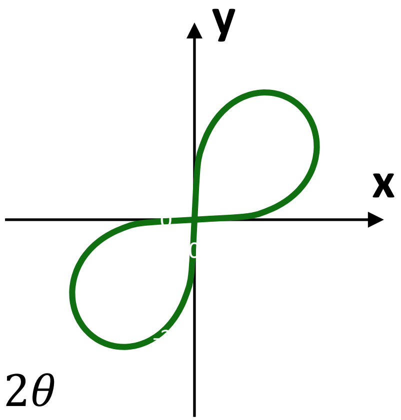
Casos particulares

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$

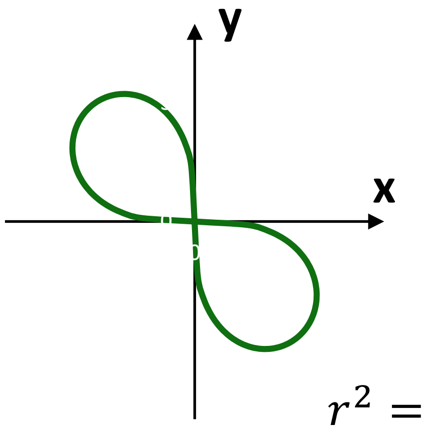


$r^2 = -a^2 \cos 2\theta$





$r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$



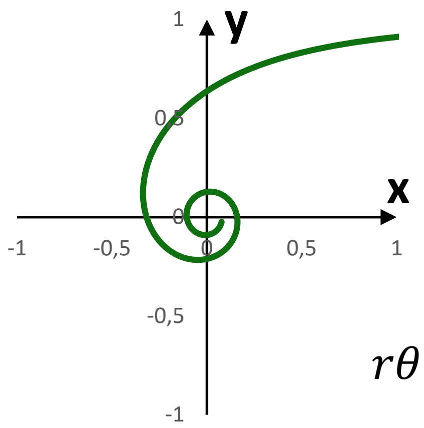
$r^2 = -a^2 \operatorname{sen} 2\theta$

6. **Espirais:** Este caso não apresenta uma formulação explícita. Em suma, envolvem expressões em que r é uma função estritamente crescente ou decrescente de θ. São exemplos:

Casos particulares

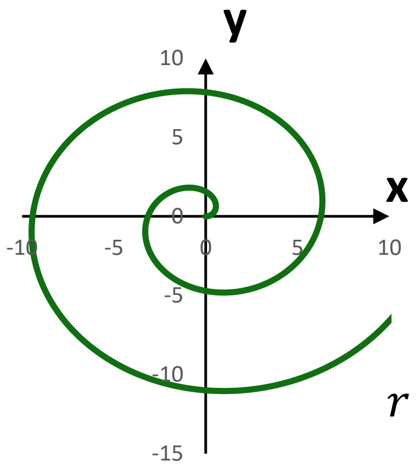
Exemplos:

a) **Espiral hiperbólica:** $r\theta = a, a > 0$



$r\theta = 1, \theta > 0$

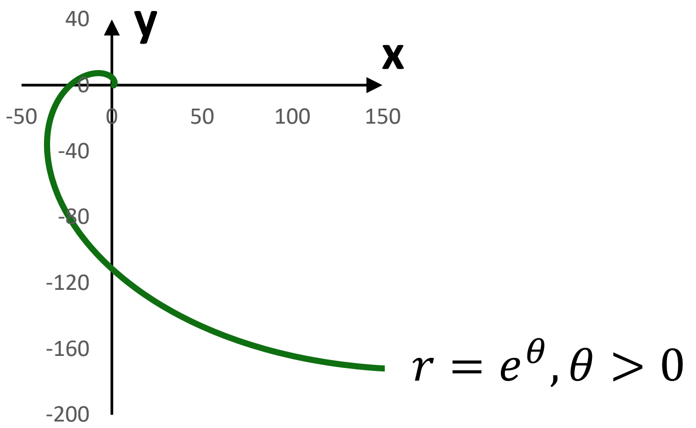
b) **Espiral de Arquimedes:** $r = a\theta, a > 0$



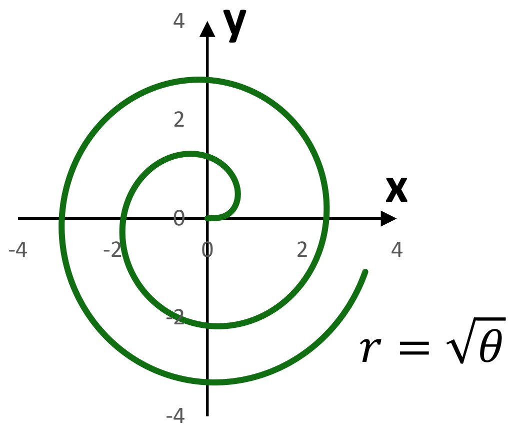
$r = \theta, \theta > 0$

Casos particulares

c) **Espiral logarítmica:** $r = e^{a\theta}, a > 0$



d) **Espiral parabólica:** $r^2 = \theta$



Casos particulares