# Distâncias e Parábola (Exemplos)

A primeira parte é analisar a posição relativa das retas. Para isso, deve-se extrair os dados de cada.

Reta $r$:

As equações NÃO estão exatamente no formato mais propício para extrair o vetor diretor e o ponto (pois $x$ e $y$ não estão multiplicados por 1). Reescrevendo:

$$r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = z$$

$$\overrightarrow{v_r} = \left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Como qualquer múltiplo do vetor diretor é um vetor diretor da reta, pode-se multiplicar este vetor por 2 para evitar trabalhar com frações. Assim, escolhe-se

$$\overrightarrow{v_r} = (-4,1,2)$$

$$A_r(1,0,0)$$

**Exemplo 01:** Determine a distância entre as retas $r: \frac{-x+1}{2} = 2y = z$ e $s: \begin{cases} x = 4y \\ z = 2 + 2y \end{cases}$

$$\boldsymbol{d(P_0, r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{v}|}} \qquad \boldsymbol{d(r_1, r_2) = \frac{|(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{P_1P_2})|}{|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|}} \qquad \boldsymbol{d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Reta $s$:

Revertendo para as equações paramétricas

$$s: \begin{cases} x = 4t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v_s} = (4,1,2)$$

$$A_s(0,0,2)$$

As retas são coplanares?

$$\left(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_r A_s}\right) = 0?$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_r A_s} &= A_s - A_r \\ &= (0,0,2) - (1,0,0) \\ &= (-1,0,2) \end{aligned}$$

$$\left(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_r A_s}\right) = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

**Exemplo 01:** Determine a distância entre as retas $r: \frac{-x+1}{2} = 2y = z$ e $s: \begin{cases} x = 4y \\ z = 2 + 2y \end{cases}$

$$\boldsymbol{d(P_0, r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1 P_0}\right|}{|\vec{v}|}} \qquad \boldsymbol{d(r_1, r_2) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{P_1 P_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\right|}} \qquad \boldsymbol{d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

$$\left(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}\right) = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\left(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}\right) = -8 - 2 + 0 + 2 - 0 - 8$$

$$\left(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}\right) = -16$$

As retas não são coplanares! Assim, serão REVERSAS (o que garante qual fórmula para a distância utilizar)

$$d(r,s) = \frac{\left|\left(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}\right)\right|}{|\vec{v_r} \times \vec{v_s}|}$$

$$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k} - 4\vec{k} - 2\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = 16\vec{j} - 8\vec{k}$$

$$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = (0,16,-8)$$

**Exemplo 01:** Determine a distância entre as retas $r: \frac{-x+1}{2} = 2y = z$ e $s: \begin{cases} x = 4y \\ z = 2 + 2y \end{cases}$

$$\boldsymbol{d(P_0,r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{v}|}} \qquad \boldsymbol{d(r_1,r_2) = \frac{\left|\left(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{P_1P_2}\right)\right|}{|\vec{v_1} \times \vec{v_2}|}} \qquad \boldsymbol{d(P_0,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

$$|\vec{v_r} \times \vec{v_s}| = \sqrt{0^2 + 16^2 + (-8)^2}$$

$$|\vec{v_r} \times \vec{v_s}| = \sqrt{8^2 \cdot 5} = 8\sqrt{5}$$

Assim,

$$d(r,s) = \frac{\left|\left(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{A_r A_s}\right)\right|}{|\vec{v_r} \times \vec{v_s}|}$$

$$d(r,s) = \frac{|-16|}{8\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$d(r,s) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

**Exemplo 01:** Determine a distância entre as retas $r: \frac{-x+1}{2} = 2y = z$ e $s: \begin{cases} x = 4y \\ z = 2 + 2y \end{cases}$

$$d(P_0, r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1 P_0}\right|}{|\vec{v}|} \qquad d(r_1, r_2) = \frac{\left|\left(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{P_1 P_2}\right)\right|}{|\vec{v_1} \times \vec{v_2}|} \qquad d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Deseja-se calcular a distância de um ponto a um plano.
Para isso, extrai-se da equação geral do plano $a, b, c$ e $d$. São eles:

- $a = 2$
- $b = 1$
- $c = 0$ (não há termo com a cota na equação)
- $d = -3$ (é necessário passar o valor 3 para o outro lado para que fique no formato da equação geral do plano $ax + by + cz + d = 0$)

Do ponto $P$, extrai-se $x_0, y_0$ e $z_0$, a saber

- $x_0 = 2$
- $y_0 = -1$
- $z_0 = 2$

Assim,

$$d(P,\pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}}$$

$$d(P,\pi) = 0$$

**Isso ocorreu porque o ponto $\boldsymbol{P}$ pertence ao plano! Se esta análise prévia tivesse sido feita, não seria necessário todo este cálculo!**

**Exemplo 02:** Determine a distância do ponto $P(2,-1,2)$ a cada um dos planos:
a) $\pi: 2x + y = 3$

$$\boldsymbol{d(P_0, r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{v}|}} \qquad \boldsymbol{d(r_1, r_2) = \frac{|(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{P_1P_2})|}{|\vec{v_1} \times \vec{v_2}|}} \qquad \boldsymbol{d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Deseja-se calcular a distância de um ponto a um plano.

**Agora a lição foi aprendida!**

O ponto $P$ pertence ao plano?

$$2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 2 + 3 \neq 0$$

Não pertence ao plano! Pode-se continuar com a formulação.

Da equação geral do plano, obtêm-se:

$$a = 2, b = -2, c = -1, d = 3$$

Do ponto $P$,

$$x_0 = 2, y_0 = -1, z_0 = 2$$

Assim,

$$d(P,\pi) = \frac{|2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 2 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}}$$

$$d(P,\pi) = \frac{|7|}{\sqrt{9}}$$

$$d(P,\pi) = \frac{7}{3}$$

**Exemplo 02:** Determine a distância do ponto $P(2,-1,2)$ a cada um dos planos:

b) $\pi: 2x - 2y - z + 3 = 0$

$$\boldsymbol{d(P_0,r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{v}|}} \qquad \boldsymbol{d(r_1,r_2) = \frac{|(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{P_1P_2})|}{|\vec{v_1} \times \vec{v_2}|}} \qquad \boldsymbol{d(P_0,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

A primeira parte é analisar a posição relativa das retas. Para isso, deve-se extrair os dados de cada.

Reta $r$:

$$\vec{v_r} = (0,0,1) = \vec{k}$$
$$A_r(3,4,0)$$

Reta $s$:

$$\vec{v_s} = (0,0,1) = \vec{k}$$
$$A_s(0,0,0)$$

Como os vetores diretores são os mesmos, as duas retas são paralelas!

A distância entre as retas se resume então à distância de um ponto a uma reta.

$$d(r,s) = d(A_s, r) = \frac{\left|\vec{v_r} \times \overrightarrow{A_rA_s}\right|}{|\vec{v_r}|}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_rA_s} &= A_s - A_r\\ &= (0,0,0) - (3,4,0)\\ &= (-3,-4,0)\end{aligned}$$

$$\vec{v_r} \times \overrightarrow{A_rA_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

**Exemplo 03:** Determine a distância da reta $r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ ao eixo dos $z$.

$$\boldsymbol{d(P_0, r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}\right|}{|\vec{v}|}} \qquad \boldsymbol{d(r_1, r_2) = \frac{\left|\left(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{P_1P_2}\right)\right|}{|\vec{v_1} \times \vec{v_2}|}} \qquad \boldsymbol{d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

$$\vec{v_r} \times \overrightarrow{A_rA_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v_r} \times \overrightarrow{A_rA_s} = -3\vec{j} + 4\vec{i}$$

$$\vec{v_r} \times \overrightarrow{A_rA_s} = (4, -3, 0)$$

$$\left|\vec{v_r} \times \overrightarrow{A_rA_s}\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 0^2}$$

$$\left|\vec{v_r} \times \overrightarrow{A_rA_s}\right| = 5$$

Como $\vec{v_r} = (0,0,1) = \vec{k}$,

$$|\vec{v_r}| = 1$$

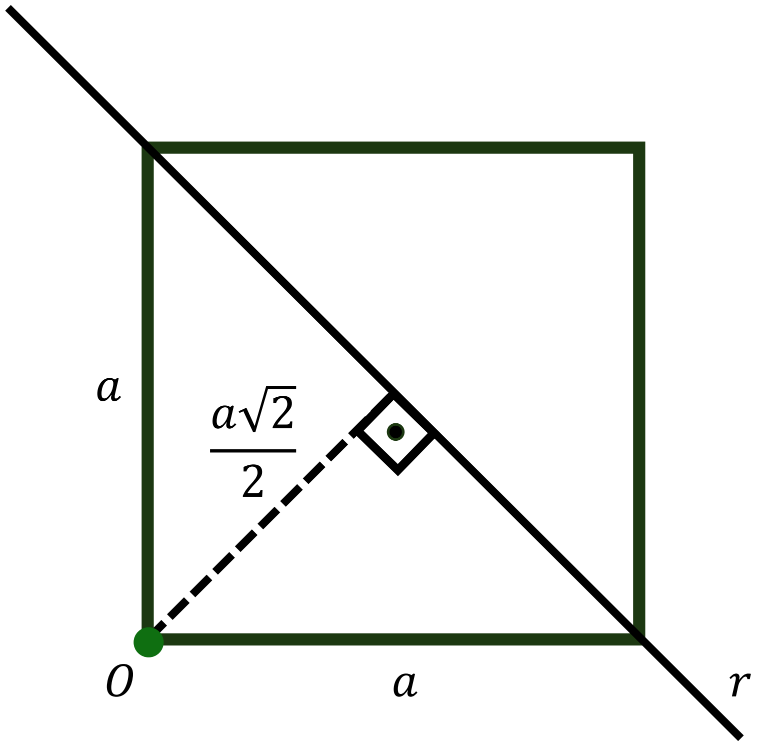
Assim,

$$d(r,s) = \frac{\left|\vec{v_r} \times \overrightarrow{A_rA_s}\right|}{|\vec{v_r}|}$$

$$d(r,s) = \frac{5}{1} = 5$$

**Exemplo 03:** Determine a distância da reta $r$: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ ao eixo dos $z$.

$$\boldsymbol{d(P_0, r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}\right|}{|\vec{v}|}} \qquad \boldsymbol{d(r_1, r_2) = \frac{\left|\left(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{P_1P_2}\right)\right|}{|\vec{v_1} \times \vec{v_2}|}} \qquad \boldsymbol{d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$




Sendo $a$ o lado do quadrado, tem-se que a distância da reta à origem será

$$d(O,r) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Informações da reta $r$:

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A(1,0,0) \\ \vec{v} = (0,1,1) \end{matrix}$$

**Exemplo 04:** A diagonal de um quadrado está contida em $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$. Sendo um dos vértices a origem, determine os outros três.

$$\boldsymbol{d(P_0,r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{v}|}} \qquad \boldsymbol{d(r_1,r_2) = \frac{|(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{P_1P_2})|}{|\vec{v_1} \times \vec{v_2}|}} \qquad \boldsymbol{d(P_0,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

A expressão para a distância será então

$$d(O,r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AO}|}{|\vec{v}|}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} &= O - A \\ &= (0,0,0) - (1,0,0) \\ &= (-1,0,0) \end{aligned}$$

$$\vec{v} \times \overrightarrow{AO} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} \times \overrightarrow{AO} = -\vec{j} + \vec{k} = (0,-1,1)$$

$$|\vec{v} \times \overrightarrow{AO}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}$$

$$|\vec{v} \times \overrightarrow{AO}| = \sqrt{2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2}$$

**Exemplo 04:** A diagonal de um quadrado está contida em $r$: $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$. Sendo um dos vértices a origem, determine os outros três.

$$\boldsymbol{d(P_0,r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{v}|}} \qquad \boldsymbol{d(r_1,r_2) = \frac{|(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{P_1P_2})|}{|\vec{v_1} \times \vec{v_2}|}} \qquad \boldsymbol{d(P_0,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

$$d(O,r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AO}|}{|\vec{v}|}$$

$$d(O,r) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

Como

$$d(O,r) = 1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Para calcular os dois vértices que se encontram na reta, basta calcular os dois pontos da reta que distam $a$ unidades da origem.

Como qualquer ponto da reta tem o formato $P(1, z, z)$, basta buscar os valores de $z$ para os quais

$$|\overrightarrow{OP}| = a$$

em que

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (1, z, z) - (0,0,0) = (1, z, z)$$

**Exemplo 04:** A diagonal de um quadrado está contida em $r$: $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$. Sendo um dos vértices a origem, determine os outros três.

$$\boldsymbol{d(P_0, r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{v}|}} \qquad \boldsymbol{d(r_1, r_2) = \frac{|(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{P_1P_2})|}{|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|}} \qquad \boldsymbol{d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

$$|\overrightarrow{OP}| = a$$

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = a^2$$

$$1^2 + z^2 + z^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$2z^2 = 2 - 1$$

$$z^2 = \frac{1}{2}$$

$$z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Descobrem-se com isso dois dos 3 vértices,

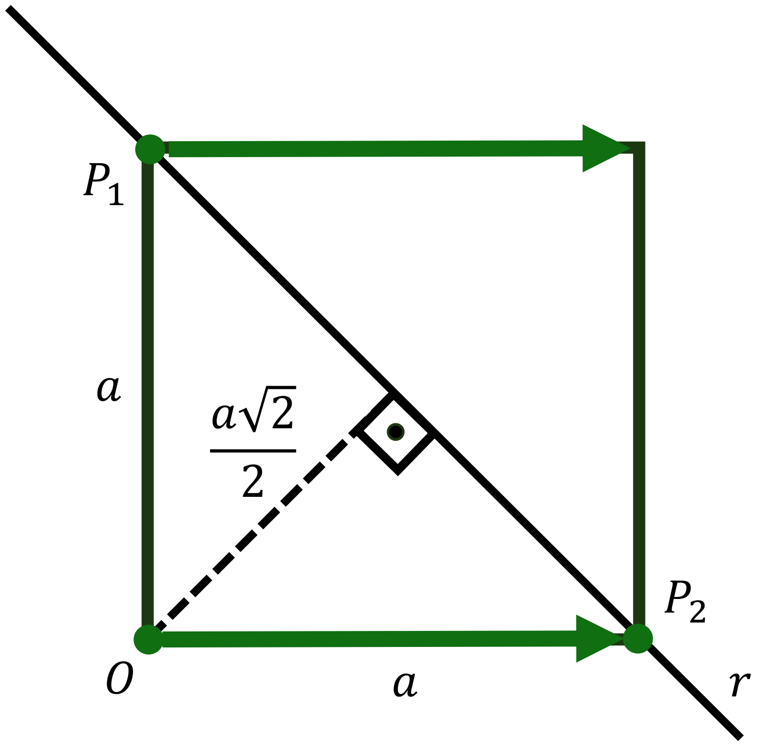
$$P_1\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$P_2\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Como obter o terceiro? Voltando ao gráfico…

**Exemplo 04:** A diagonal de um quadrado está contida em $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$. Sendo um dos vértices a origem, determine os outros três.

$$d(P_0, r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{v}|} \qquad d(r_1, r_2) = \frac{|(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{P_1P_2})|}{|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|} \qquad d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$




O vértice $P_3$ pode ser obtido com

$$P_3 = P_1 + \overrightarrow{OP_2}$$

$$P_3 = P_1 + P_2$$

$$P_3 = \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\therefore P_3(2,0,0)$$

**Exemplo 04:** A diagonal de um quadrado está contida em $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$. Sendo um dos vértices a origem, determine os outros três.

$$d(P_0, r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}\right|}{|\vec{v}|} \qquad d(r_1, r_2) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{P_1P_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\right|} \qquad d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

O primeiro passo é descobrir qual equação da parábola se aplica para esta situação.

Para isto, faz-se necessário conhecer informações sobre o vértice e o eixo.

O vértice é a origem, conforme enunciado.

Lembre-se que a diretriz é PERPENDICULAR ao eixo.

Como $y = 3$ é uma reta HORIZONTAL, tem-se que o eixo da parábola será VERTICAL. Devido ao vértice, será o eixo dos $y$.

A equação da parábola neste caso é

$$x^2 = 2py$$

A equação da reta diretriz neste caso é dada por

$$y = -\frac{p}{2}$$

Assim,

$$-\frac{p}{2} = 3 \Rightarrow p = -6$$

Com isso, a equação da parábola é

$$x^2 = -12y$$

**Observação:** esta parábola tem concavidade para baixo.

**Exemplo 05:** Estabelecer a equação de uma parábola que possui vértice na origem e:

a) Diretriz $d: y = 3$

O primeiro passo é descobrir qual equação da parábola se aplica para esta situação.

Para isto, faz-se necessário conhecer informações sobre o vértice e o eixo.

O vértice é a origem, conforme enunciado.

Lembre-se que o foco PERTENCE ao eixo.

Como o foco se encontra no eixo dos $x$, este será o eixo da parábola.

A equação da parábola neste caso é

$$y^2 = 2px$$

O foco, neste caso, possui coordenadas

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

Assim,

$$\frac{p}{2} = -3 \Rightarrow p = -6$$

Com isso, a equação da parábola é

$$y^2 = -12x$$

**Observação:** esta parábola tem concavidade para esquerda.

**Exemplo 05:** Estabelecer a equação de uma parábola que possui vértice na origem e:
b) Foco $F(-3,0)$

Existem duas possibilidades neste caso:

1. **Parábola com vértice na origem**
   i. O eixo da parábola é o eixo dos $y$
   ii. O eixo da parábola é o eixo dos $x$

i. A equação neste caso é

$$x^2 = 2py$$

Substituindo o ponto $P(-1{,}1)$ na equação (uma vez que ele pertence à parábola) tem-se

$$(-1)^2 = 2p \cdot 1$$

$$p = \frac{1}{2}$$

Assim, a equação se torna $x^2 = y$.

Neste caso,

$$F\left(0, \frac{p}{2}\right) \Rightarrow F\left(0, \frac{1}{4}\right)$$

$$d\colon y = -\frac{p}{2} \Rightarrow d\colon y = -\frac{1}{4}$$

**Exemplo 06:** Determine as equações das parábolas, no plano cartesiano, que passam pelo ponto $P(-1{,}1)$ e, além disso, possuem vértice na origem e um dos eixos coordenados como eixo. Determine também o foco e a equação da reta diretriz em cada caso.

ii. A equação neste caso é

$$y^2 = 2px$$

Substituindo o ponto $P(-1,1)$ na equação (uma vez que ele pertence à parábola) tem-se

$$1^2 = 2p \cdot (-1)$$

$$p = -\frac{1}{2}$$

Assim, a equação se torna $y^2 = -x$.

Neste caso,

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \Rightarrow F\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$$

$$d: x = -\frac{p}{2} \Rightarrow d: x = \frac{1}{4}$$

**Exemplo 06:** Determine as equações das parábolas, no plano cartesiano, que passam pelo ponto $P(-1,1)$ e, além disso, possuem vértice na origem e um dos eixos coordenados como eixo. Determine também o foco e a equação da reta diretriz em cada caso.

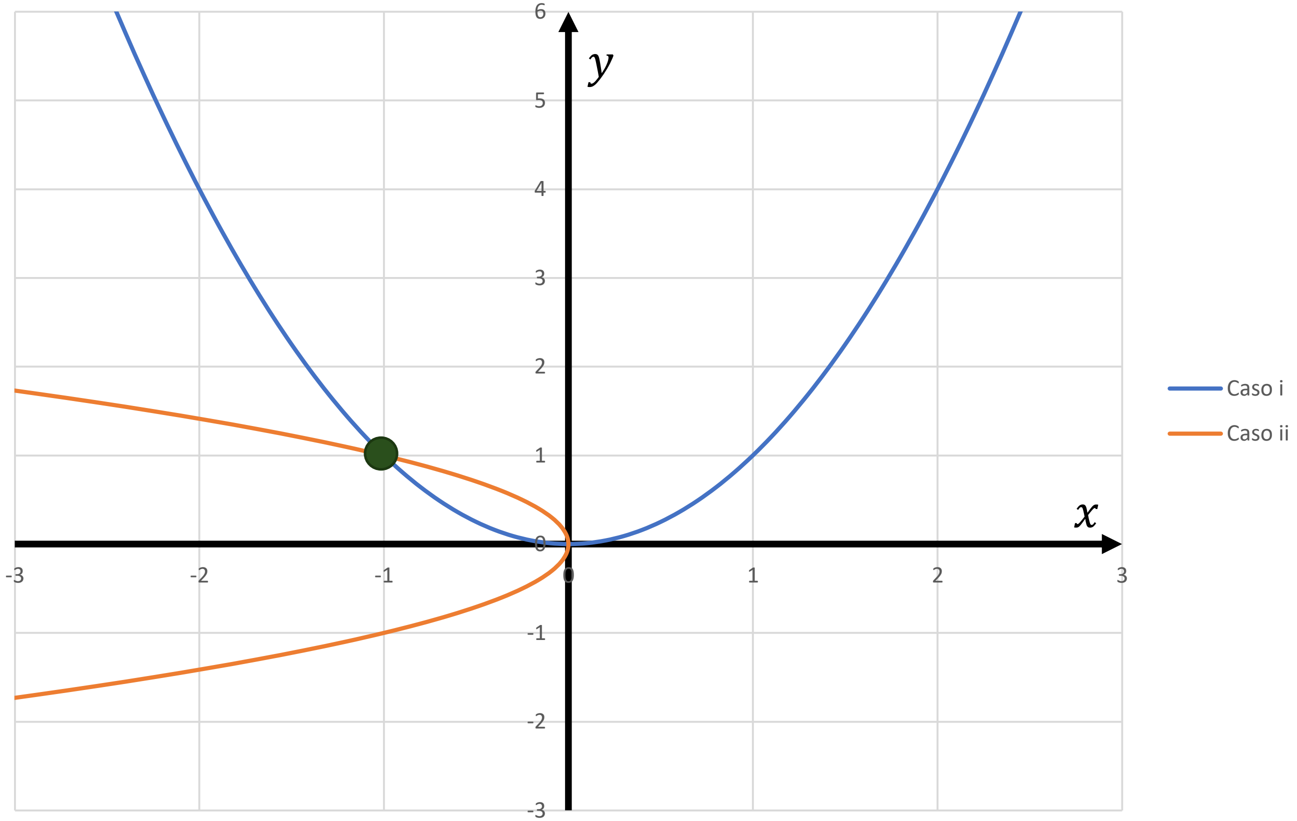
**1. Parábola com vértice na origem**

i. O eixo da parábola é o eixo dos $y$

$$x^2 = y, \qquad p = \frac{1}{2}$$

ii. O eixo da parábola é o eixo dos $x$

$$y^2 = -x, \qquad p = -\frac{1}{2}$$




**Exemplo 06:** Determine as equações das parábolas, no plano cartesiano, que passam pelo ponto $P(-1{,}1)$ e, além disso, possuem vértice na origem e um dos eixos coordenados como eixo. Determine também o foco e a equação da reta diretriz em cada caso.

Dúvidas?