Coordenadas Polares e Gráficos
(Exemplos)

$$A\left(6,\frac{2\pi}{3}\right)$$

Ou seja,

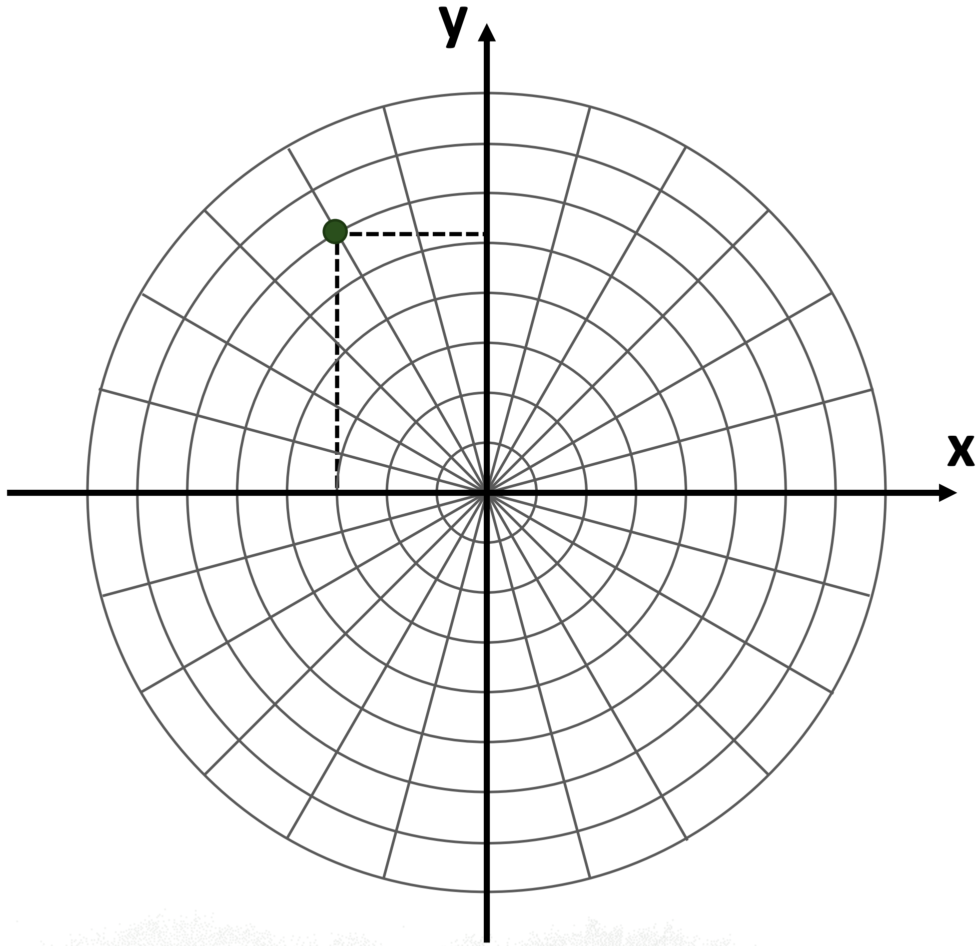
$$r = 6 \ \text{ e } \ \theta = \frac{2\pi}{3}$$

Assim,

$$x = r\cos\theta = 6\cos\frac{2\pi}{3} = 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 6\,\text{sen}\frac{2\pi}{3} = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Assim, o ponto em coordenadas cartesianas é $A\left(-3{,}3\sqrt{3}\right)$



Exemplo 01: Transforme os pontos, dados em coordenadas polares, para coordenadas cartesianas.

a) $A\left(6,\frac{2\pi}{3}\right)$

$$B\left(-6,-\frac{\pi}{6}\right)$$

Ou seja,

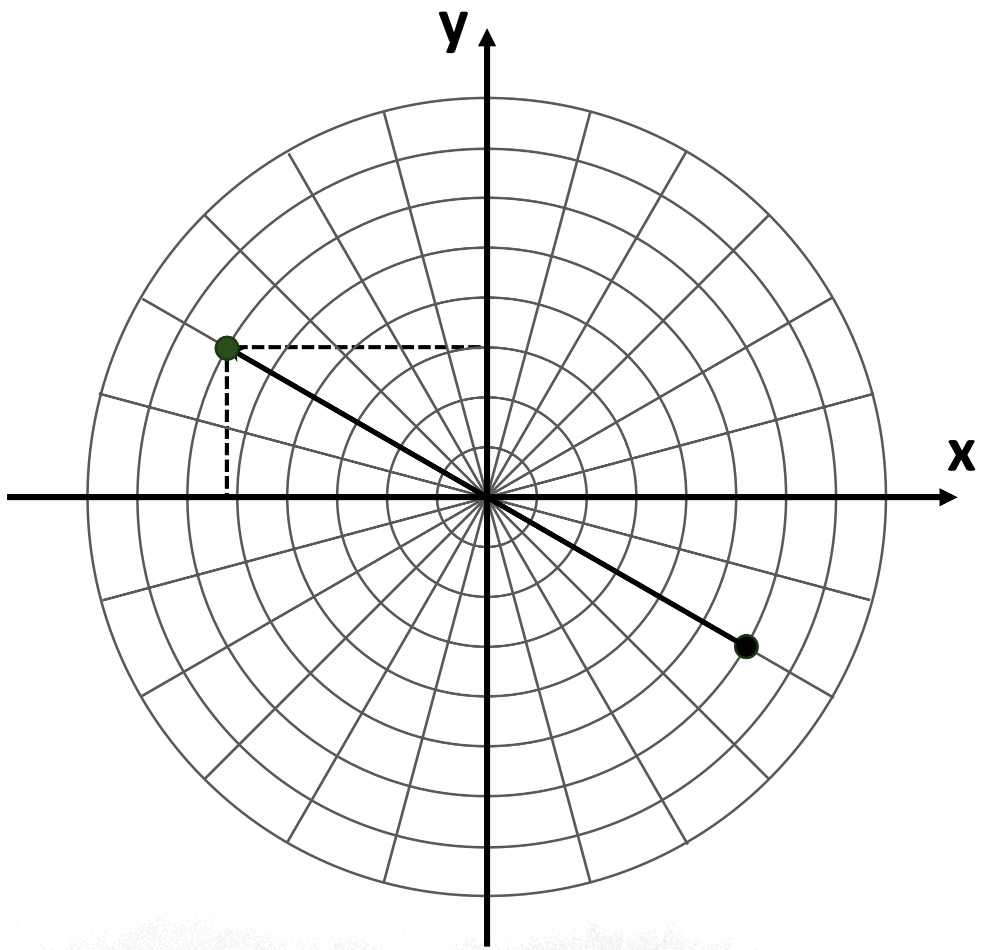
$$r=-6 \text{ e } \theta=-\frac{\pi}{6}$$

Assim,

$$x=r\cos\theta=-6\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-3\sqrt{3}$$

$$y=r\,\text{sen}\,\theta=-6\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=3$$

Assim, o ponto em coordenadas cartesianas é $B\left(-3\sqrt{3},3\right)$



Exemplo 01: Transforme os pontos, dados em coordenadas polares, para coordenadas cartesianas.

b) $B\left(-6,-\frac{\pi}{6}\right)$

O desejo, em exercícios como estes, é conseguir compartimentalizar a equação dada em expressões cuja representação cartesiana é conhecida, fazendo a substituição em seguida. São algumas dessas expressões:

$$r\cos\theta = x$$
$$r\,\mathrm{sen}\,\theta = y$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$

Desenvolvendo a expressão dada, e lembrando que

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b$$

tem-se

$$r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$r\cos\theta\cdot\frac{1}{2} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2$$

Fazendo a substituição e multiplicando os dois lados da equação por 2, tem-se

$$x + y\sqrt{3} = 4 \;\text{ ou }\; y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

o que é uma reta (pois estamos no plano!)

Exemplo 02: Determine as equações cartesianas das curvas (que estão em coordenadas polares) dadas a seguir.

a) $r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$

Sabe-se que

$$\cos\theta = \frac{x}{r}\ ,\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}\quad \text{e}\quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

Particularmente para este exercício, a tangente é mais interessante pois ela está totalmente escrita em função das coordenadas cartesianas. Assim,

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$$

Fazendo a substituição,

$$\frac{y}{x} = -1$$

$$y = -x$$

Ou seja, tem-se uma reta que passa pela origem. Não era esta a formulação vista na última videoaula? =)

1.a) Reta que passa pela origem:

$$\theta = \theta_0$$

Exemplo 02: Determine as equações cartesianas das curvas (que estão em coordenadas polares) dadas a seguir.

b) $\theta = \frac{3\pi}{4}$

$$A(-\sqrt{3}, -1)$$

Ou seja, $x = -\sqrt{3}$ e $y = -1$.

Cálculo de r:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$r^2 = \left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2$$

$$r^2 = 3 + 1$$

$$r = \pm 2$$

Se o exercício não especificar, fica a critério qual valor escolher. Opta-se neste exemplo por $r = 2$.

Cálculo de θ:

Há 3 equações possíveis: seno, cosseno ou tangente deste ângulo. Em algumas situações há algumas mais indicadas, porém normalmente elas têm o mesmo nível de dificuldade e carregam a mesma carga de informação.

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Exemplo 03: Transforme os pontos, dados em coordenadas cartesianas, para coordenadas polares.

a) $A\left(-\sqrt{3}, -1\right)$

Ao colocar na calculadora, ela indica

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} \ \ (30°)$$

Entretanto, lembre-se que existem dois valores de ângulo que funcionam neste caso. Para a TANGENTE, eles estão separados por π rad $(180°)$. Assim, são possíveis candidatos

$$\theta = \frac{\pi}{6} \ \ (30°) \ \text{ou} \ \ \theta = \frac{7\pi}{6} \ \ (210°)$$

Qual escolher?

Opção 1: Testam-se os candidatos em outra das equações para θ.

Tem-se

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \ \text{e} \ \ \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

O valor adequado é

$$\theta = \frac{7\pi}{6}$$

Exemplo 03: Transforme os pontos, dados em coordenadas cartesianas, para coordenadas polares.

a) $A\left(-\sqrt{3}, -1\right)$

Opção 2: Analisa-se o quadrante em que se encontra o ponto dado.

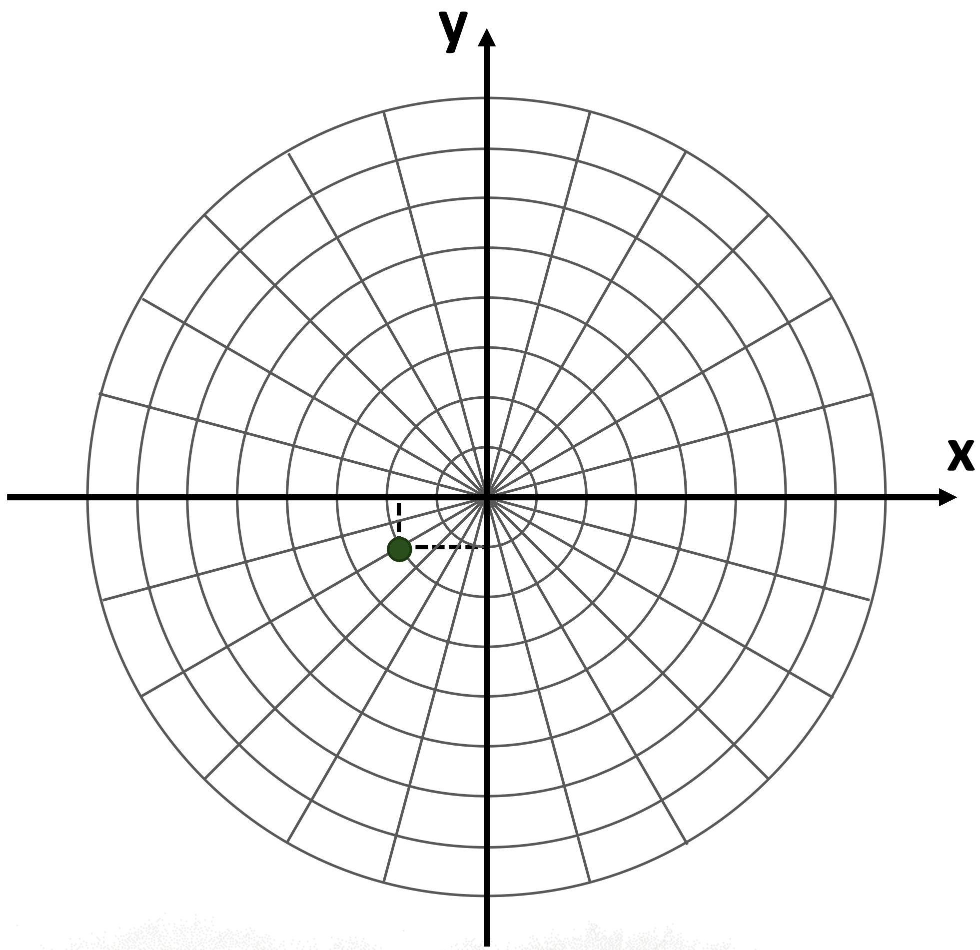
Note que o ponto A, dado em coordenadas CARTESIANAS, apresenta ambos x e y negativos. Ou seja, encontra-se no terceiro quadrante.

Como $r > 0$, escolhe-se o ângulo que realmente está no terceiro quadrante, ou seja,

$$\theta = \frac{7\pi}{6}$$

Assim, o ponto em coordenadas polares é

$$A\left(2, \frac{7\pi}{6}\right)$$



Exemplo 03: Transforme os pontos, dados em coordenadas cartesianas, para coordenadas polares.

a) $A\left(-\sqrt{3}, -1\right)$

$$B(-3,3)$$

Ou seja, $x = -3$ e $y = 3$.

Cálculo de r:

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$r^2 = (-3)^2 + 3^2$$
$$r^2 = 9 + 9$$
$$r = \pm 3\sqrt{2}$$

Se o exercício não especificar, fica a critério qual valor escolher. Opta-se neste exemplo por $r = -3\sqrt{2}$.

Cálculo de θ:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{3}{-3} = -1$$

São possíveis candidatos

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \quad (135°) \text{ ou } \theta = \frac{7\pi}{4} \quad (315°)$$

Exemplo 03: Transforme os pontos, dados em coordenadas cartesianas, para coordenadas polares.

b) $B(-3,3)$

Opção 1: Testam-se os candidatos de θ.

Tem-se

$$\cos\theta = \frac{-3}{-3\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

O valor adequado é

$$\theta = \frac{7\pi}{4}$$

Opção 2: Analisa-se o quadrante.

Note que o ponto B, dado em coordenadas CARTESIANAS, apresenta x negativo e y positivo. Ou seja, encontra-se no segundo quadrante.

NÃO SE ESQUEÇA QUE, NESTE EXEMPLO, $r < 0$! Esta escolha afeta a análise pois, quando o raio é negativo,

$$(r, \theta) = (|r|, \theta + \pi)$$

Assim, deve-se optar pelo ângulo no quarto quadrante, ou seja,

$$\theta = \frac{7\pi}{4}$$

Exemplo 03: Transforme os pontos, dados em coordenadas cartesianas, para coordenadas polares.

b) $B(-3,3)$

Com isso, o ponto em coordenadas polares é

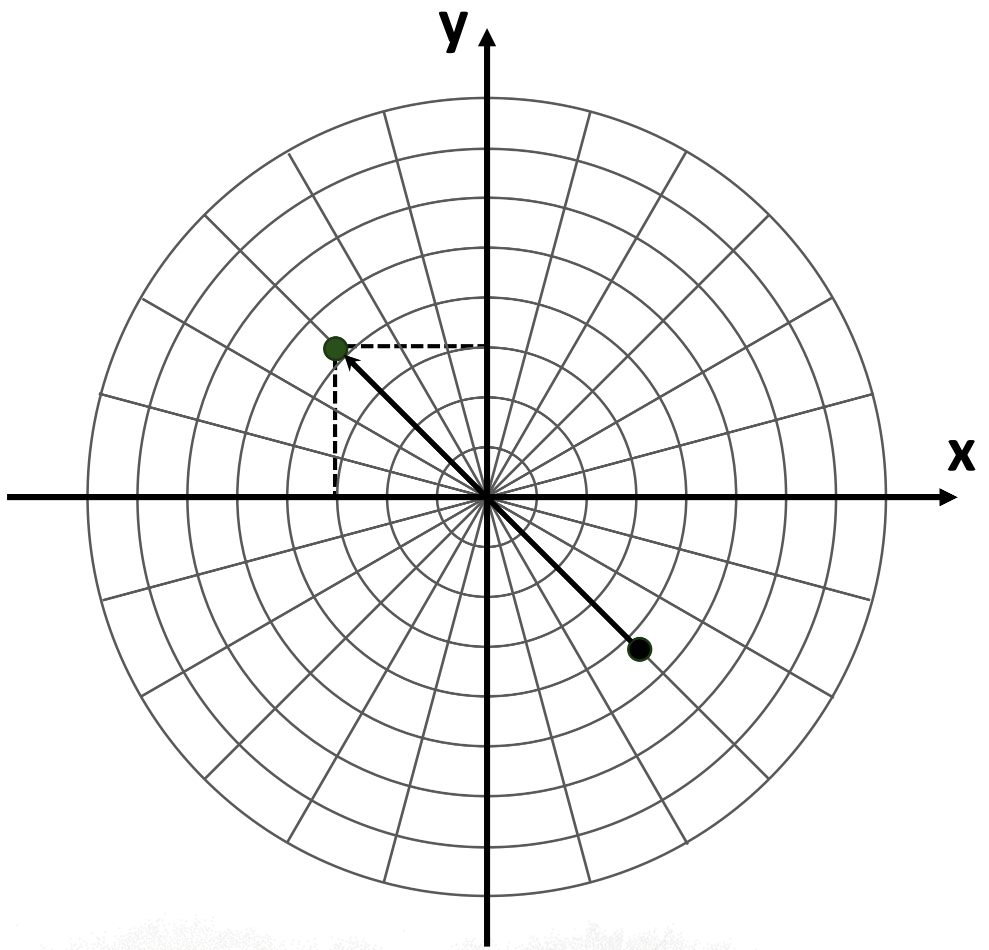
$$A\left(-3\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$$

Observação: Lembre-se que o argumento admite múltiplas determinações

$$\theta + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Assim, como não foi feita nenhuma restrição acerca de seu valor, está a seu critério a escolha. São possibilidades:

$$\frac{7\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{23\pi}{4}$$



Exemplo 03: Transforme os pontos, dados em coordenadas cartesianas, para coordenadas polares.

b) $B(-3,3)$

Serão utilizadas neste exemplo as seguintes substituições:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Antes, entretanto, desenvolve-se um pouco a equação.

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y = -11$$

Fazendo as substituições, obtém-se a equação na forma polar, a saber,

$$r^2 - 4r\cos\theta - 8r\,\mathrm{sen}\,\theta = -11$$

$$r(r - 4\cos\theta - 8\,\mathrm{sen}\,\theta) = -11$$

Exemplo 04: Passar, do sistema cartesiano para o sistema polar, a equação

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$$

$$r = 2 - 2\cos\theta$$

1) Trocando $\boldsymbol{\theta}$ por $\boldsymbol{\theta + 2\pi}$ para verificar se basta variar $\boldsymbol{\theta}$ de $\mathbf{0}$ a $\boldsymbol{2\pi}$:

$$r = 2 - 2\cos(\theta + 2\pi)$$

$$r = 2 - 2(\cos\theta\cos 2\pi - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 2\pi)$$

$$r = 2 - 2(\cos\theta \cdot 1 - \operatorname{sen}\theta \cdot 0)$$

$$r = 2 - 2\cos\theta$$

O valor de r não se alterou, logo sim, variar θ de 0 a 2π é suficiente para o esboço do gráfico.

2) Simetrias:

i) Em relação ao polo: trocando r por $-r$,

$$-r = 2 - 2\cos\theta$$

A equação se alterou, logo não possui essa simetria.

ii) Em relação ao eixo dos $\boldsymbol{x}$: trocando θ por $-\theta$,

$$r = 2 - 2\cos(-\theta)$$

Como cosseno é uma função par, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, logo

$$r = 2 - 2\cos\theta$$

Exemplo 05: Faça um esboço do gráfico das equações polares:

a) $r = 2(1 - \cos\theta)$

A equação não se alterou, logo o gráfico possui simetria em relação ao eixo dos x.

iii) Em relação ao eixo dos $\boldsymbol{y}$: trocando θ por $\pi - \theta$,

$$r = 2 - 2\cos(\pi - \theta)$$

$$r = 2 - 2(\cos\pi\cos\theta + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\theta)$$

$$r = 2 - 2(-1\cdot\cos\theta - 0\cdot\operatorname{sen}\theta)$$

$$r = 2 + 2\cos\theta$$

A equação se alterou, logo não possui essa simetria.

Conclusão: é suficiente variar θ de 0 a π.

3) Valores em que a curva passa pelo polo: faz-se $r = 0$

Observação: pode-se encontrar vários valores para θ. Serão indicados aqui, entretanto, só aqueles que estão no intervalo de 0 a π.

$$0 = 2 - 2\cos\theta$$

$$2\cos\theta = 2$$

$$\cos\theta = 1$$

$$\theta = 0$$

Exemplo 05: Faça um esboço do gráfico das equações polares:

a) $r = 2(1 - \cos\theta)$

4) Máximos e mínimos:

Observação: Novamente, analisa-se θ somente no intervalo de 0 a π.

Conhece derivada?

$$r = 2 - 2\cos\theta$$

$$r' = -2(-\operatorname{sen}\theta) = 2\operatorname{sen}\theta$$

$$r'' = 2\cos\theta$$

Pontos críticos: $r' = 0$

$$2\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\theta = 0 \quad \text{ou} \quad \theta = \pi$$

Como, para $\theta = 0$, $r'' = 2\cos 0 = 2 > 0$, tem-se um ponto de mínimo local, em que $r = 2 - 2\cos 0 = 0$.

Como, para $\theta = \pi$, $r'' = 2\cos\pi = -2 < 0$, tem-se um ponto de máximo local, em que $r = 2 - 2\cos\pi = 4$.

Exemplo 05: Faça um esboço do gráfico das equações polares:

a) $r = 2(1 - \cos\theta)$

4) Máximos e mínimos:

Não conhece ou lembra de derivadas? Sem problemas, meu pequeno padawan! O que muda é que se deve analisar caso a caso.

Note que a única expressão envolvendo θ é o cosseno. Conhecendo os valores máximos e mínimos que esta função assume, descobrem-se os valores máximos e mínimos de r.

O cosseno assume valor máximo (igual a 1) NESTE EXEMPLO quando $\theta = 0$. Como ele está subtraindo na expressão de r, isso implica que o raio atinge um valor mínimo

$$r = 2 - 2 \cdot 1 = 0$$

O cosseno assume valor mínimo (igual a -1) NESTE EXEMPLO quando $\theta = \pi$. Como ele está subtraindo na expressão de r, isso implica que o raio atinge um valor máximo

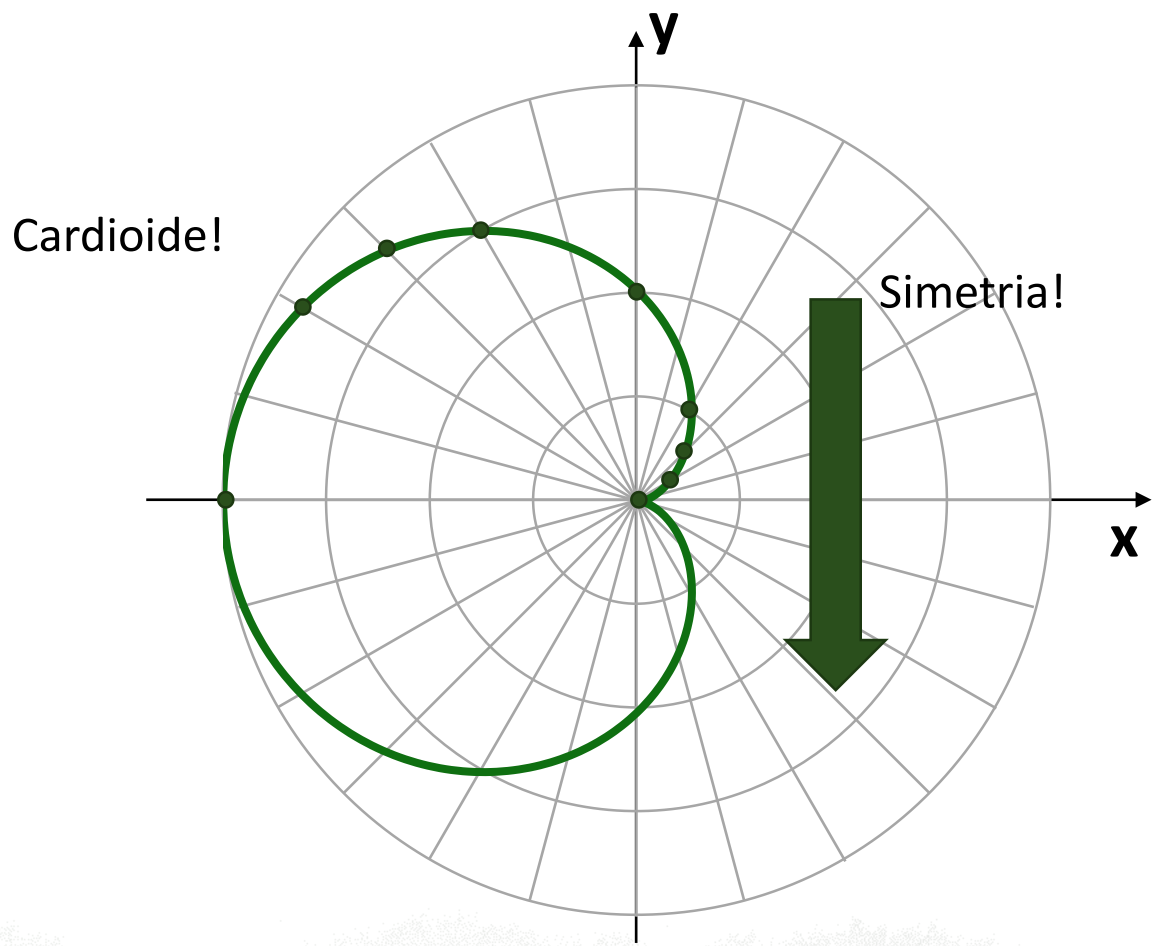
$$r = 2 - 2 \cdot (-1) = 4$$

Exemplo 05: Faça um esboço do gráfico das equações polares:

a) $r = 2(1 - \cos\theta)$

4) Esboço: $r = 2 - 2\cos\theta$

$\boldsymbol{\theta}$ (rad)	$\boldsymbol{\theta}$ (°)	$\boldsymbol{r}$
0	0	0
$\pi/6$	30	$2 - \sqrt{3} \approx 0{,}27$
$\pi/4$	45	$2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59$
$\pi/3$	60	$2 - 1 = 1$
$\pi/2$	90	$2 - 0 = 2$
$2\pi/3$	120	$2 + 1 = 3$
$3\pi/4$	135	$2 + \sqrt{2} \approx 3{,}41$
$5\pi/6$	150	$2 + \sqrt{3} \approx 3{,}73$
π	180	4



Exemplo 05: Faça um esboço do gráfico das equações polares:

a) $r = 2(1 - \cos\theta)$

$$r = 2\cos 2\theta$$

1) Trocando $\boldsymbol{\theta}$ por $\boldsymbol{\theta + 2\pi}$ para verificar se basta variar $\boldsymbol{\theta}$ de 0 a $\boldsymbol{2\pi}$:

$$r = 2\cos[2(\theta + 2\pi)]$$

$$r = 2\cos(2\theta + 4\pi)$$

$$r = 2(\cos 2\theta \cos 4\pi - \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 4\pi)$$

$$r = 2(\cos 2\theta \cdot 1 - \operatorname{sen} 2\theta \cdot 0)$$

$$r = 2\cos 2\theta$$

O valor de r não se alterou, logo sim, variar θ de 0 a 2π é suficiente para o esboço do gráfico.

2) Simetrias:

i) Em relação ao polo: trocando r por $-r$,

$$-r = 2\cos 2\theta$$

A equação se alterou, logo não possui essa simetria.

ii) Em relação ao eixo dos $\boldsymbol{x}$: trocando θ por $-\theta$,

$$r = 2\cos[2(-\theta)]$$

Como cosseno é uma função par, $\cos(-2\theta) = \cos 2\theta$, logo

$$r = 2\cos 2\theta$$

Exemplo 05: Faça um esboço do gráfico das equações polares:

b) $r = 2\cos 2\theta$

A equação não se alterou, logo o gráfico possui simetria em relação ao eixo dos x.

iii) Em relação ao eixo dos y: trocando θ por $\pi - \theta$,

$$r = 2\cos[2(\pi - \theta)]$$

$$r = 2\cos(2\pi - 2\theta)$$

$$r = 2(\cos 2\pi \cos 2\theta + \operatorname{sen} 2\pi \operatorname{sen} 2\theta)$$

$$r = 2(1 \cdot \cos 2\theta - 0 \cdot \operatorname{sen} 2\theta)$$

$$r = 2\cos 2\theta$$

A equação não se alterou, logo o gráfico possui simetria em relação ao eixo dos y.

Conclusão: é suficiente variar θ de 0 a $\pi/2$.

3) Valores em que a curva passa pelo polo: faz-se $r = 0$

$$0 = 2\cos 2\theta$$

$$\cos 2\theta = 0$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad 2\theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Devido ao intervalo em estudo, tem-se $\theta = \pi/4$.

Exemplo 05: Faça um esboço do gráfico das equações polares:

b) $r = 2\cos 2\theta$

4) Máximos e mínimos:

Conhece derivada?

$$r = 2\cos 2\theta$$

$$r' = 2(-2\,\mathrm{sen}\,2\theta) = -4\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

$$r'' = -4 \cdot 2\cos 2\theta = -8\cos 2\theta$$

Pontos críticos: $r' = 0$

$$-4\,\mathrm{sen}\,2\theta = 0$$

$$\mathrm{sen}\,2\theta = 0$$

$$2\theta = 0 \quad \text{ou} \quad 2\theta = \pi \quad \text{ou} \quad 2\theta = 2\pi$$

$$\theta = 0 \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \theta = \pi$$

Devido ao intervalo em estudo, tem-se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$.

Como, para $\theta = 0$, $r'' = -8\cos 0 = -8 < 0$, tem-se um ponto de máximo local, em que $r = 2\cos 0 = 2$.

Como, para $\theta = \pi/2$, $r'' = -8\cos\pi = 8 > 0$, tem-se um ponto de mínimo local, em que $r = 2\cos\pi = -2$.

Exemplo 05: Faça um esboço do gráfico das equações polares:

b) $r = 2\cos 2\theta$

4) Máximos e mínimos:

Não conhece ou lembra de derivadas?

Note que, novamente, a única expressão envolvendo θ é o cosseno.

O cosseno assume valor máximo (igual a 1) NESTE EXEMPLO quando $2\theta = 0$, ou seja, $\theta = 0$. Como ele está com sinal positivo na expressão de r, isso implica que o raio atinge um valor máximo

$$r = 2\cos 0 = 2$$

O cosseno assume valor mínimo (igual a -1) NESTE EXEMPLO quando $2\theta = \pi$, ou seja, $\theta = \pi/2$. Como ele está com sinal positivo na expressão de r, isso implica que o raio atinge um valor mínimo

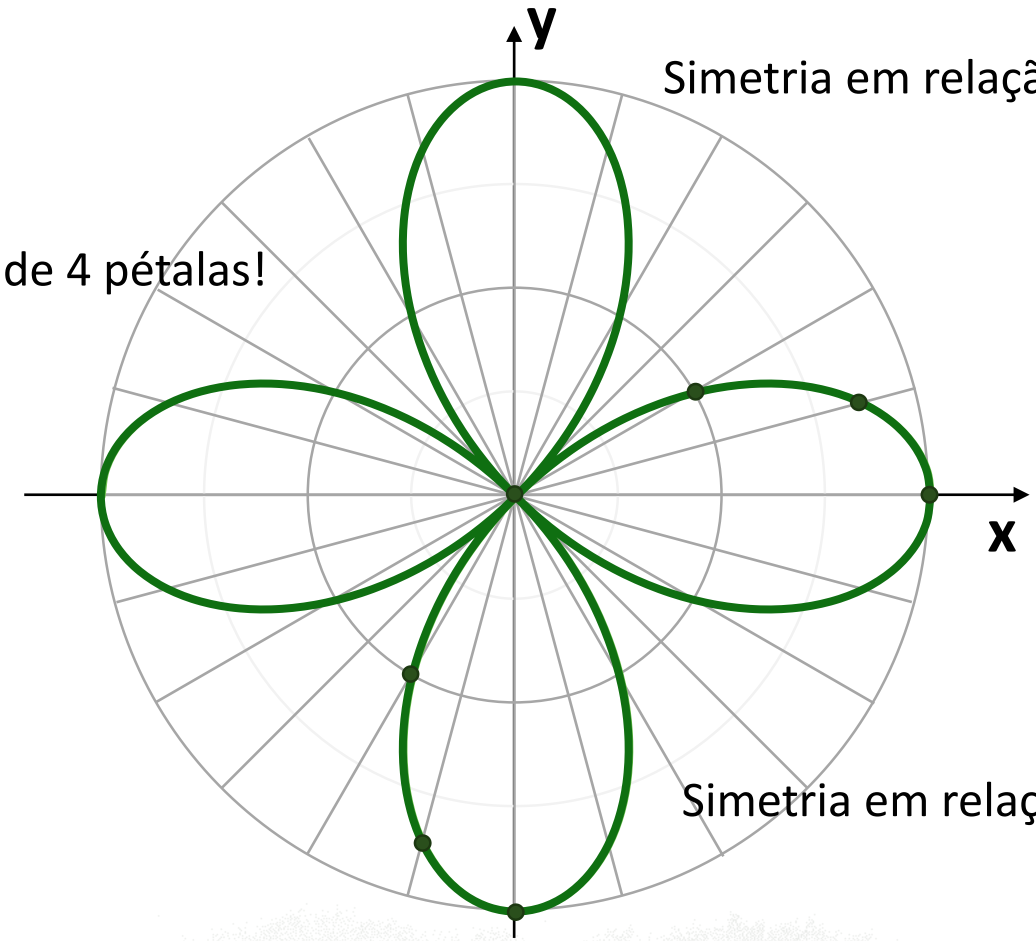
$$r = 2\cos \pi = -2$$

Exemplo 05: Faça um esboço do gráfico das equações polares:

b) $r = 2\cos 2\theta$

4) Esboço: $r = 2\cos 2\theta$

$\boldsymbol{\theta}$ **(rad)**	$\boldsymbol{\theta}$ **(°)**	$\boldsymbol{r}$
0	0	2
$\pi/12$	15	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$
$\pi/6$	30	1
$\pi/4$	45	0
$\pi/3$	60	-1
$5\pi/12$	75	$-\sqrt{3} \approx -1{,}73$
$\pi/2$	90	-2



Rosácea de 4 pétalas!

Simetria em relação a y!

Simetria em relação a x!

Exemplo 05: Faça um esboço do gráfico das equações polares:

b) $r = 2\cos 2\theta$

Dúvidas?