Superfícies Quádricas
Parte 2
(Teoria)

Estrutura desta apresentação

- Quádricas não centradas
  - Forma padrão ou canônica
  - Paraboloide elíptico
  - Paraboloide hiperbólico
  - Exemplo

Quádricas não centradas

Forma padrão ou canônica

Conforme visto, através de mudanças de coordenadas, uma quádrica não centrada pode ser representada por qualquer uma das equações

$$Ax^2 + By^2 + Rz = 0$$
$$Ax^2 + Ry + Cz^2 = 0$$
$$Rx + By^2 + Cz^2 = 0$$

Se nenhum dos coeficientes dos termos do primeiro membro dessas equações for nulo, elas podem ser reescritas, respectivamente, no formato

Forma padrão ou canônica

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=cz$$

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=by$$

$$\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=ax$$

Esta é a **forma canônica ou padrão** de uma superfície quádrica não centrada.

Existem duas possibilidades de quádricas não centradas, baseando-se nos sinais dos termos quadráticos.

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=cz$$

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=by$$

$$\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=ax$$

Paraboloide elíptico

1. Paraboloide elíptico

Se, na forma canônica de uma quádrica não centrada, os coeficientes dos termos de segundo grau tiverem mesmos sinais, dada equação estará representando um **paraboloide elíptico**.

Para apresentar um exemplo de esboço do gráfico desta superfície, escolhe-se uma equação da forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz,$$

com $c>0$. Os demais casos são análogos.

Paraboloide elíptico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz, c > 0$$

Cálculo dos traços:

- Plano xOz $(y = 0)$

$$\frac{x^2}{a^2} = cz \Rightarrow x^2 = a^2cz$$

Como $c > 0$, tem-se uma parábola com vértice na origem e concavidade para cima.

- Plano yOz $(x = 0)$

$$\frac{y^2}{b^2} = cz \Rightarrow y^2 = b^2cz$$

Como $c > 0$, tem-se uma parábola com vértice na origem e concavidade para cima.

Paraboloide elíptico

Paraboloide elíptico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz, c > 0$$

Cálculo dos traços:

- Plano $z = z_0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz_0, c > 0$$

Se

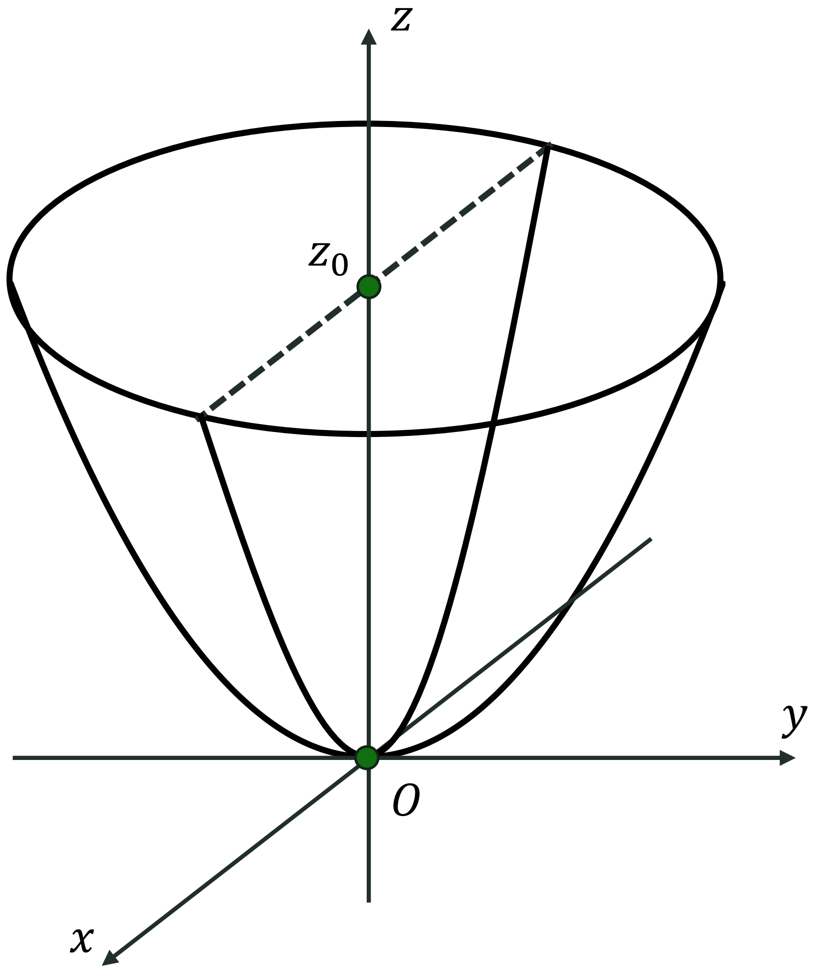
- $z_0 < 0$, tem-se o conjunto vazio.
- $z_0 = 0$ (plano xOy), tem-se um ponto (a origem).
- $z_0 > 0$, tem-se uma elipse que aumenta de tamanho à medida que o plano se afasta do plano xOy.

Paraboloide elíptico

Paraboloide elíptico:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz, c>0$$

Esboço do gráfico:

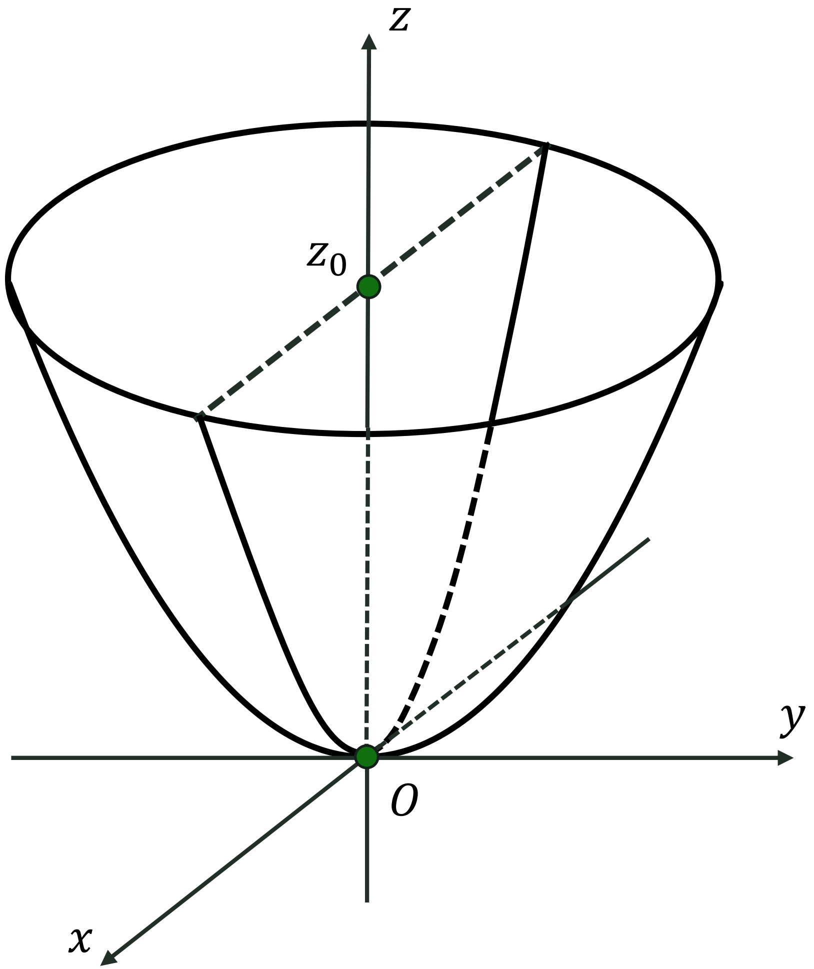


Paraboloide elíptico

Paraboloide elíptico:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz, c>0$$

Esboço do gráfico:

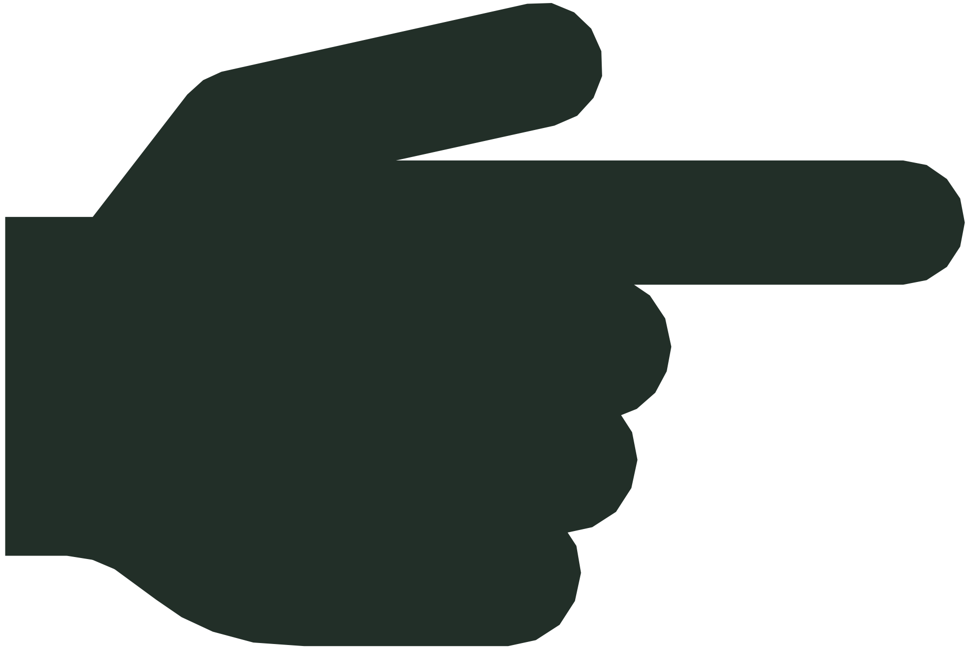


Paraboloide elíptico

Paraboloide elíptico:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz, c>0$$

Observação



Se o traço que representa uma elipse for no caso uma circunferência, tem-se um paraboloide elíptico de **revolução**.

No caso particular apresentado, isto ocorreria para $a=b$. Assim, ele poderia ser obtido pela rotação, em torno do eixo dos z, de qualquer uma das parábolas obtidas nos demais traços.

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=cz$$

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=cz$$

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=cz$$

2. Paraboloide hiperbólico

Se, na forma canônica de uma quádrica não centrada, os coeficientes dos termos de segundo grau tiverem sinais contrários, dada equação estará representando um **paraboloide hiperbólico**.

Para apresentar um exemplo de esboço do gráfico desta superfície, escolhe-se uma equação da forma

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz,$$

com $c > 0$. Os demais casos são análogos.

Paraboloide hiperbólico

Cálculo dos traços:

Paraboloide hiperbólico:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz, c>0$$

- Plano xOy $(z=0)$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \Rightarrow \frac{y}{b}=\pm\frac{x}{a}$$

Ou seja, tem-se duas retas que passam pela origem.

- Plano xOz $(y=0)$

$$-\frac{x^2}{a^2}=cz \Rightarrow x^2=-a^2cz$$

Como $c>0$, tem-se uma parábola com vértice na origem e concavidade para baixo.

- Plano yOz $(x=0)$

$$\frac{y^2}{b^2}=cz \Rightarrow y^2=b^2cz$$

Como $c>0$, tem-se uma parábola com vértice na origem e concavidade para cima.

Paraboloide hiperbólico

Paraboloide hiperbólico:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz, c>0$$

Cálculo dos traços:

- Plano $z = z_0$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz_0, c>0$$

Se

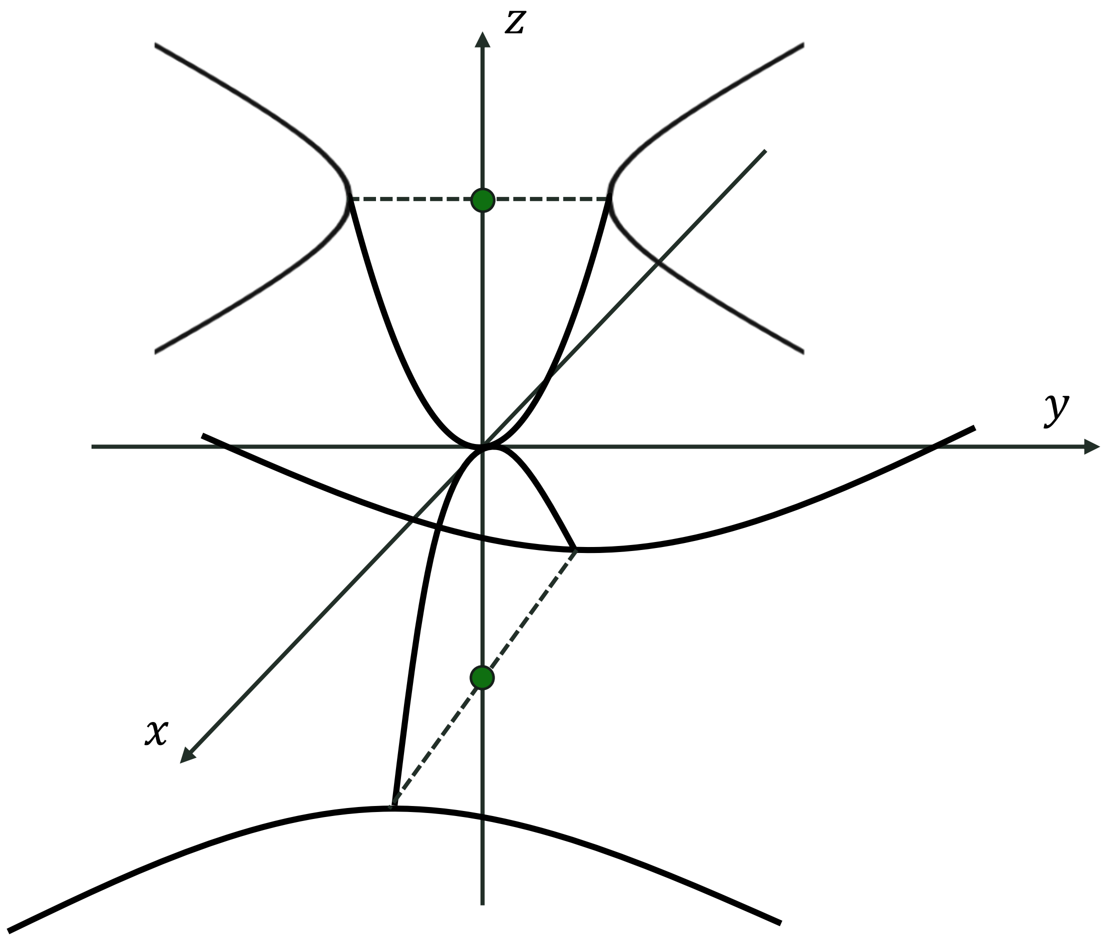
- $z_0 < 0$, tem-se uma hipérbole com eixo real no eixo dos x.
- $z_0 = 0$ (plano xOy), tem-se duas retas.
- $z_0 > 0$, tem-se uma hipérbole com eixo real no eixo dos y.

Paraboloide hiperbólico

Paraboloide hiperbólico:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz, c>0$$

Esboço do gráfico:

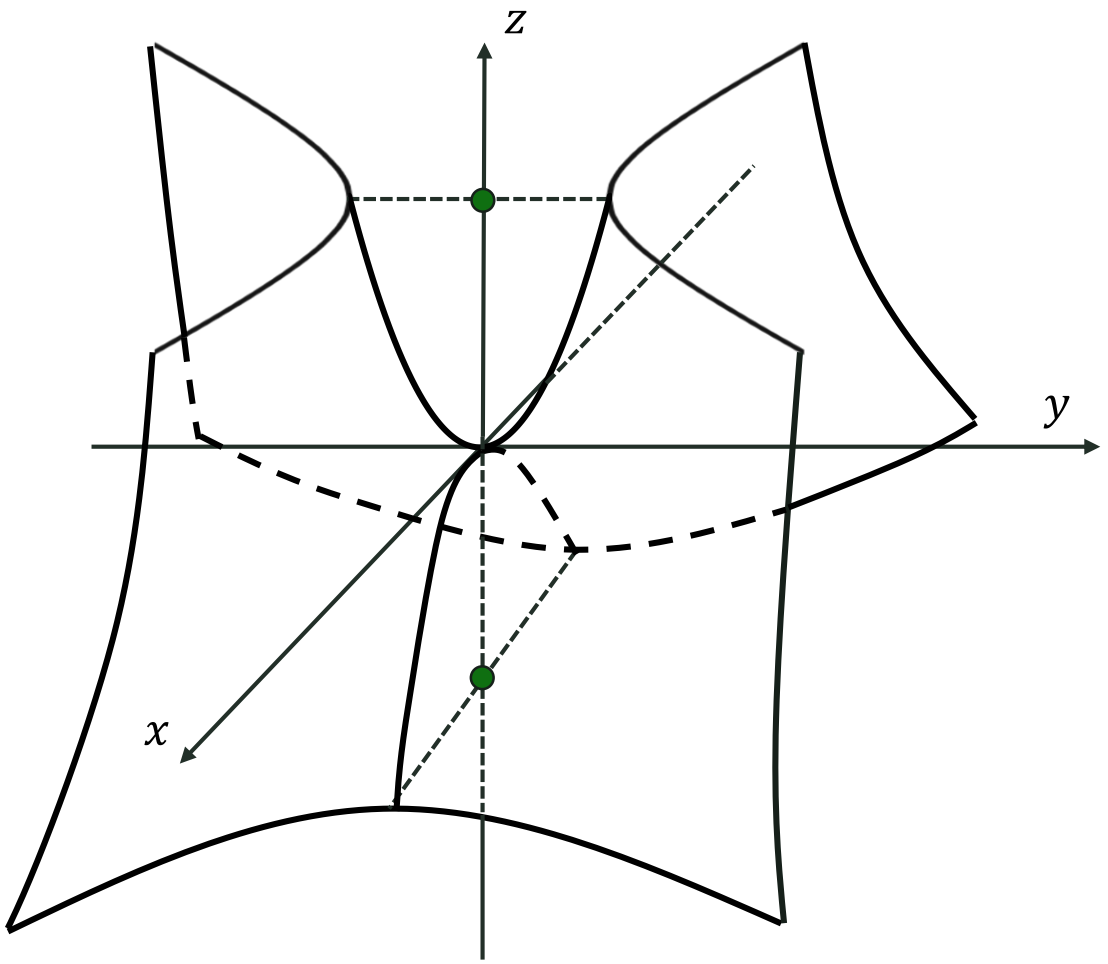


Paraboloide hiperbólico

Esboço do gráfico:

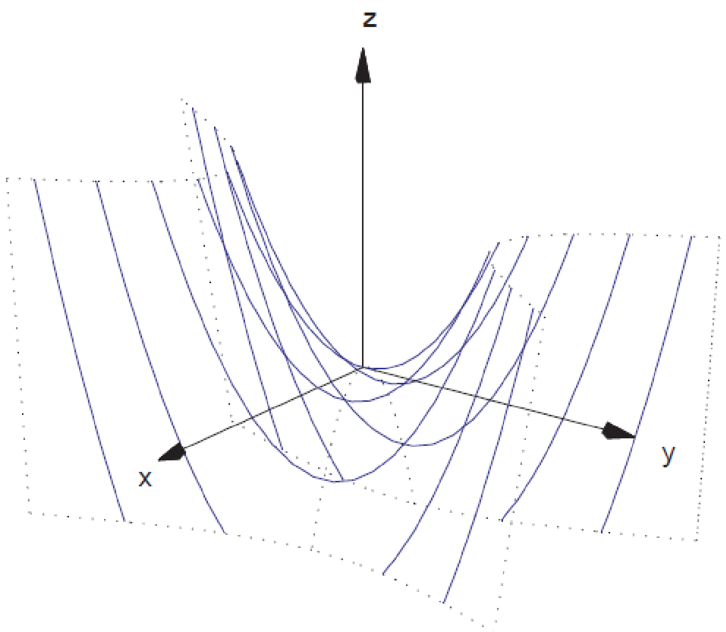
Paraboloide hiperbólico:

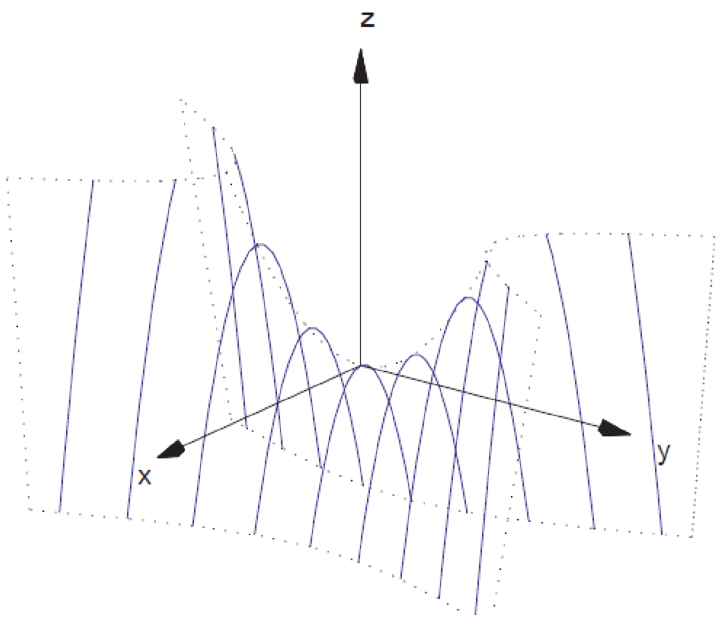
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz, c>0$$



Paraboloide hiperbólico

Esboço do gráfico:





Fonte: Santos, R. J. Matrizes, Vetores e Geometria Analítica. 2013

Paraboloide hiperbólico:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz, c>0$$

Paraboloide hiperbólico

Identifique e represente geometricamente a superfície dada pela equação a seguir, apresentando os traços adequados

$$9x^2 + 4z^2 - 12y - 8z + 28 = 0$$

Resposta:

Em primeiro lugar, busca-se a forma padrão da equação.

$$9x^2 + 4(z^2 - 2z) = 12y - 28$$

$$9x^2 + 4(z^2 - 2z + 1 - 1) = 12y - 28$$

$$9x^2 + 4[(z-1)^2 - 1] = 12y - 28$$

$$9x^2 + 4(z-1)^2 - 4 = 12y - 28$$

$$9x^2 + 4(z-1)^2 = 12y - 24$$

Exemplo

$$9x^2 + 4(z-1)^2 = 12y - 24 \qquad (\div 36)$$

$$\frac{9x^2}{36} + \frac{4(z-1)^2}{36} = \frac{12(y-2)}{36}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{9} = \frac{1}{3}(y-2)$$

Analisando a equação, deve-se concluir que este é um paraboloide elíptico com $V(0,2,1)$ ao longo do eixo dos y.

Cálculo dos traços:

- Plano yOz $(x = 0)$

$$\frac{(z-1)^2}{9} = \frac{1}{3}(y-2) \Rightarrow (z-1)^2 = 3(y-2)$$

Tem-se uma parábola com vértice em $V(0,2,1)$ e concavidade para direita.

Exemplo

$$\boxed{\frac{x^2}{4}+\frac{(z-1)^2}{9}=\frac{1}{3}(y-2)}$$

Cálculo dos traços:

- Plano $y = y_0$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{(z-1)^2}{9}=\frac{1}{3}(y_0-2)$$

Se

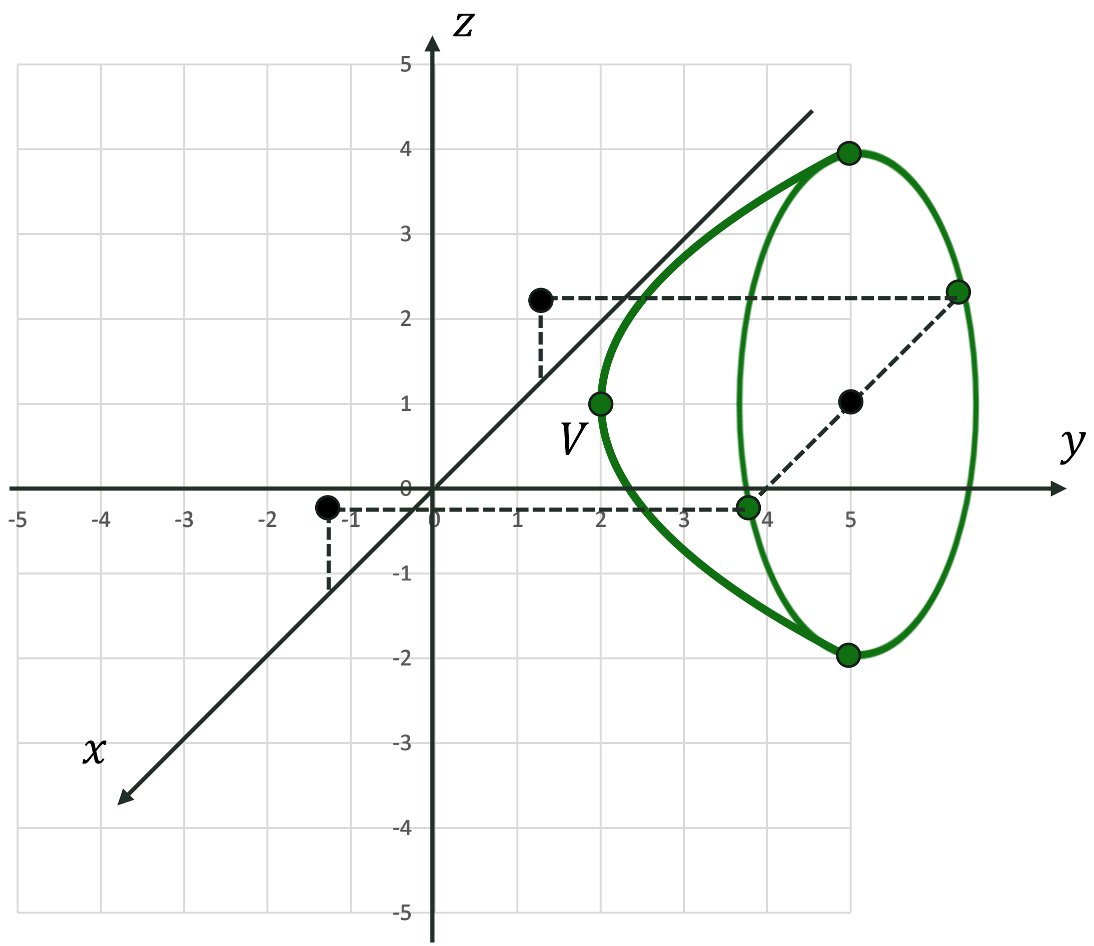
- $y_0 < 2$, tem-se o conjunto vazio.
- $y_0 = 2$, tem-se um ponto – o vértice $V(0{,}2{,}1)$.
- $y_0 > 2$, tem-se uma elipse que aumenta de tamanho à medida que o plano se afasta (pela direita) do plano $y = 2$.
- $y_0 = 5$,

$$\frac{x^2}{4}+\frac{(z-1)^2}{9}=1$$

Exemplo

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{9} = \frac{1}{3}(y-2)$$

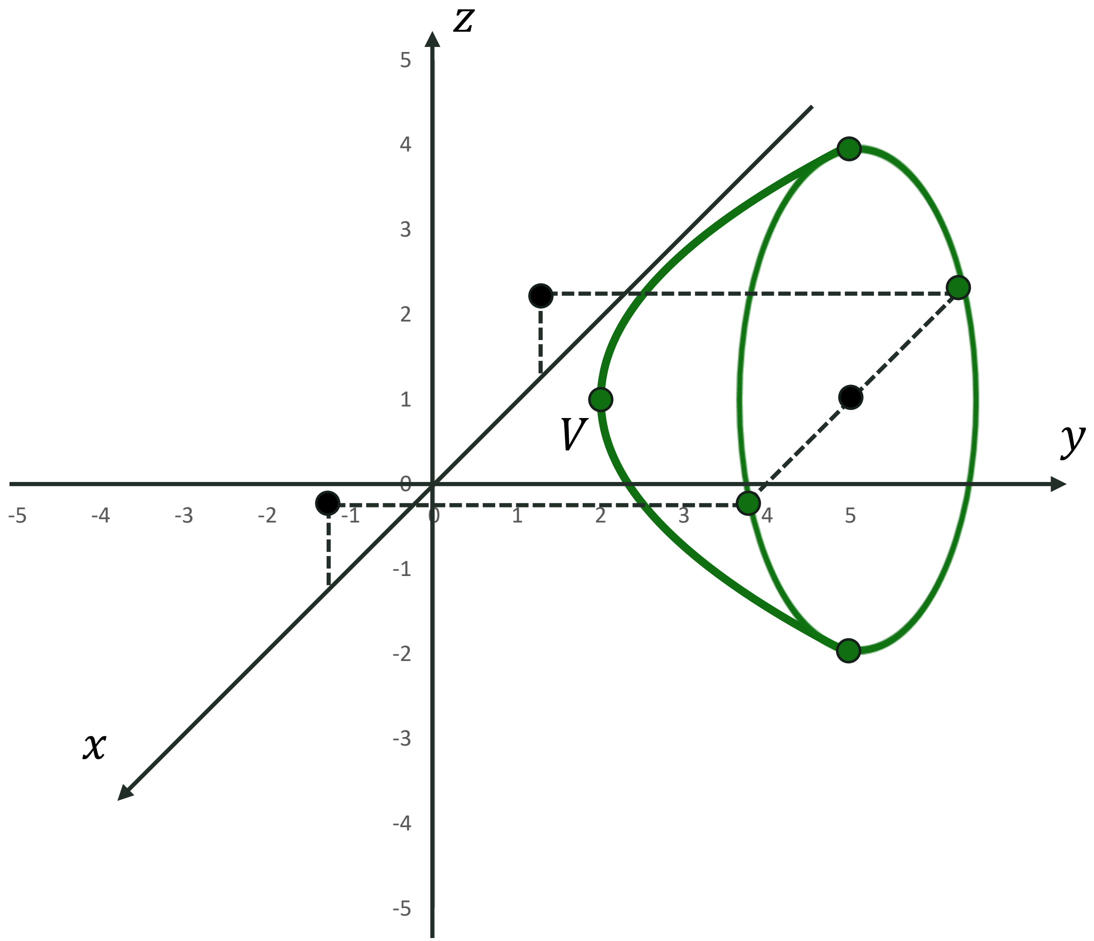
Esboço do gráfico:



Exemplo

$$\boxed{\frac{x^2}{4}+\frac{(z-1)^2}{9}=\frac{1}{3}(y-2)}$$

Esboço do gráfico:



Exemplo