UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Prova II (ANN0001/ CCI122-03U)

Prof. Helder G. G. de Lima[1]

Nome do(a) aluno(a): ______________________________ Data: 22/05/2018

- Identifique-se em todas as folhas.
- Mantenha o celular e os demais equipamentos eletrônicos desligados durante a prova.
- Justifique cada resposta com cálculos ou argumentos baseados na teoria estudada.
- Sempre que calcular o valor de uma das funções consideradas em um ponto x, arredonde o resultado para o número de dígitos especificado, e só então use esse valor (arredondado) nas fórmulas dos métodos iterativos.
- Resolva apenas os itens de que precisar para somar 10,0 pontos.

1. **(2,0)** Dê evidências teóricas de que o método de Gauss-Seidel convergirá, se for aplicado a:

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 &= 2 \\ x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 - 8x_3 &= 2. \end{cases}$$

Obtenha uma solução aproximada, com erro percentual relativo de no máximo 1%, considerando $X^{(0)} = (-1{,}0000, 0{,}0000, 1{,}0000)$ e arredondando cada resultado com **4 dígitos** após a vírgula.

2. Considere o seguinte sistema não linear: $\begin{cases} 10x_1 - x_1^2 - x_2^2 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2^2 - 12x_2 = 0. \end{cases}$

(a) **(0,5)** Reescreva o sistema na forma de um problema de ponto fixo, $X = \varphi(X)$. (obs.: $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\varphi(X) = (\varphi_1(X), \varphi_2(X)) \in \mathbb{R}^2$).

(b) **(1,5)** Seja $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_i \leq 1\}$. Verifique se $\varphi(X) \in Q$ sempre que $X \in Q$. O que isso diz sobre a existência de um ponto fixo de φ em Q?

(c) **(2,0)** Obtenha uma solução aproximada $X^{(3)}$ do sistema, pelo método de iteração de ponto fixo, partindo da aproximação inicial $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (0{,}0000, 0{,}0000)$. (arredonde cada iteração com **4 dígitos** após a vírgula)

3. Ao baixar algumas ferramentas de desenvolvimento a partir da internet, um programador percebeu que a velocidade de download estava diminuindo com o passar do tempo. Uma hora após o início do download, só tinham sido baixados 450 MB. Depois de mais uma hora, o total baixado ainda era de 800 MB, e nas duas horas seguintes, finalmente chegou a 1050 MB e 1200 MB, respectivamente. Sabendo que a transferência de dados durou 5 horas, e considerando o quanto havia sido baixado após 0, 1, 2, 3 e 4 horas, estime o tamanho das ferramentas baixadas:

(a) **(2,0)** Usando o polinômio interpolador obtido por diferenças divididas (forma de Newton).

(b) **(2,0)** Utilizando a reta que melhor se ajusta, por mínimos quadrados.

4. **(2,0)** Obtenha, pelo método de Lagrange, o polinômio $p(x)$ que interpola $f(x) = x^4 + 2x - 1$ em $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$. Estime o erro absoluto máximo ao aproximar $f(x)$ por $p(x)$ no intervalo $[-1, 1]$.

BOA PROVA!

[1] Este é um material de acesso livre distribuído sob os termos da licença Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional

Respostas

1. (Solução) Considerando que $|8| > |-1| + |0|$, $|-8| > |1| + |2|$ e $|-8| > |0| + |1|$ a matriz de coeficientes do sistema é estritamente diagonalmente dominante, e portanto o método convergirá, qualquer que seja a aproximação inicial escolhida. As equações utilizadas no método de Gauss-Seidel são as seguintes:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = (2 + x_2^{(k-1)})/8 \\ x_2^{(k)} = (-2 + x_1^{(k)} + 2x_3^{(k-1)})/8 \\ x_3^{(k)} = (-2 + x_2^{(k)})/8 \end{cases}$$

Os valores obtidos a cada iteração são os seguintes:

$\boldsymbol{k}$	0	1	2	3	4
$\boldsymbol{x_1^{(k)}}$	-1,0000	0,2500	0,2539	0,2150	0,2132
$\boldsymbol{x_2^{(k)}}$	0,0000	0,0313	-0,2798	-0,2944	-0,2951
$\boldsymbol{x_3^{(k)}}$	1,0000	-0,2461	-0,2850	-0,2868	-0,2869
ε_{abs}	-	1,2500	0,3111	0,0389	0,0018
ε_{per}	-	500,00%	109,16%	13,21%	0,61%

2. (Solução) (a) O sistema é equivalente a

$$\begin{cases} x_1 = (x_1^2 + x_2^2 + 1)/10 \\ x_2 = \dfrac{4x_1}{3x_2 + 12}. \end{cases}$$

Assim, pode-se considerar $\varphi(x_1, x_2) = (\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)) = \left(\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + 1}{10}, \dfrac{4x_1}{3x_2 + 12}\right)$.

Alternativamente, a função φ_2 poderia ser definida por:

- $\varphi_2(x_1, x_2) = \frac{4x_1 - 3x_2^2}{12}$
- $\varphi_2(x_1, x_2) = \frac{4x_1 - 12x_2}{3x_2}$
- $\varphi_2(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{4x_1 - 12x_2}{3}}$

(b) Para quaisquer x_1 e x_2 tais que $0 \leq x_1 \leq 1$ e $0 \leq x_2 \leq 1$, tem-se:

- $\varphi_1(x_1, x_2) \in [0, 1]$, pois $\dfrac{1}{10} \leq \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + 1}{10} \leq \dfrac{3}{10}$ (verifique!)
- $\varphi_2(x_1, x_2) \in [0, 1]$, pois $0 \leq \dfrac{4x_1}{3x_2 + 12} \leq \dfrac{1}{3}$ (verifique!)

Assim, $\varphi(x_1, x_2) \in Q$ sempre que $(x_1, x_2) \in Q$.

Observação: se φ_2 fosse uma das outras escolhas mencionadas no item anterior, não seria verdade que $\varphi(x_1, x_2) \in Q$ sempre que $(x_1, x_2) \in Q$ (considere por exemplo quais seriam as imagens dos pontos (1,0) e (0,1)) e não haveria a garantida de que há um ponto fixo.

(c) Estas são as aproximações obtidas nas primeiras iterações do método do ponto fixo:

$\boldsymbol{k}$	0	1	2	3
$\boldsymbol{x_1^{(k)}}$	0,0000	0,1000	0,1010	0,1011
$\boldsymbol{x_2^{(k)}}$	0,0000	0,0000	0,0333	0,0334

3. (Solução) (a) A partir dos pontos dados, obtém-se:

x_i	$y_i = f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,\dots,x_{i+3}]$	$f[x_i,\dots,x_{i+4}]$
0	$\mathbf{0}$				
		$\mathbf{450}$			
1	450		$\mathbf{-50}$		
		350		$\mathbf{0}$	
2	800		-50		$\mathbf{0}$.
		250		0	
3	1050		-50		
		150			
4	1200				

Então:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 0 + 450x - 50x(x-1) + 0x(x-1)(x-1) + 0x(x-1)(x-1)(x-3) \\
&= -50x^2 + 500x.
\end{aligned}
$$

Usando este polinômio para estimar o valor pedido, resulta que:

$$p(5) = -50 \cdot 5^2 + 500 \cdot 5 = -50 \cdot 25 + 2500 = 1250.$$

(b) Sejam $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,450)$, $P_2 = (2,800)$, $P_3 = (3,1050)$ e $P_4 = (4,1200)$ e denote $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x$. Para encontrar uma função da forma $r(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x)$ que melhor se ajusta aos pontos $P_i = (x_i,y_i)$, para $0 \leq i \leq 4$, basta resolver o sistema $A^T AX = A^T B$, em que

$$A = \begin{bmatrix} g_0(x_1) & g_1(x_0) \\ \vdots & \vdots \\ g_0(x_5) & g_1(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_4 \end{bmatrix},$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & \sum_{i=1}^5 x_i \\ \sum_{i=1}^5 x_i & \sum_{i=1}^5 x_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix},$$

e

$$A^T B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^5 y_i \\ \sum_{i=1}^5 x_i y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 450 \\ 800 \\ 1050 \\ 1200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3500 \\ 10000 \end{bmatrix}.$$

Então, $A^T AX = A^T B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3500 \\ 10000 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \end{bmatrix}$.

Portanto, a reta é $r(x) = 100 + 300x$ e $r(5) = 100 + 300 \cdot 5 = 1600$.

4. (Solução) Considerando que $f(-1) = -2$, $f(0) = -1$ e $f(1) = 2$, o método de Lagrange permite que o polinômio que interpola f nestes pontos seja descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} p(x) &= -2L_0(x) - 1L_1(x) + 2L_2(x) \\ &= -2\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} - 1\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} + 2\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} \\ &= -2\left(\frac{x^2-x}{2}\right) - 1(1-x^2) + 2\left(\frac{x^2+x}{2}\right) \\ &= x^2 + 2x - 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x) = (x^2 + 2x - 1) + \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}(x+1)x(x-1).$$

Como $f'(x) = 4x^3 + 2$, $f''(x) = 12x^2$ e $f^{(3)}(x) = 24x$, tem-se em particular que

$$\varepsilon_{abs}(x) = \left|f(x) - (x^2 + 2x - 1)\right| \leq \frac{M}{3!}\left|(x+1)x(x-1)\right|,$$

em que $M = \max_{x\in[-1,1]}\left|f^{(3)}(x)\right| = \max_{x\in[-1,1]}|24x| = 24$. Além disso, se $q(x) = (x+1)x(x-1) = x^3 - x$ então $q'(x) = 3x^2 - 1 = 0$ se, e somente se, $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, o que significa que os valores máximo e mínimo de $q(x)$ em $[-1,1]$ ocorrem em um dos pontos $\{\pm 1, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\}$. Como $q(\pm 1) = 0$ e $q(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}) \approx \mp 0{,}3849$, e $q''(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}) \pm 2\sqrt{3}$, conclui-se que $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ é um ponto de máximo, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ é um ponto de mínimo, e o valor máximo de $|q(x)|$ é 0,3849. Portanto,

$$\varepsilon_{abs}(x) \leq \frac{24}{6}\left|x^3 - x\right| \leq 4 \cdot \max_{x\in[-1,1]}\left|x^3 - x\right| = 4 \cdot 0{,}3849 = 1{,}5396.$$