Álgebra Linear **(ALI0001 – CCI-192-02U)**

Exemplos de Matriz Mudança de Base
Transformações Lineares

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula do dia 03 de maio de 2023.

Exemplo Matriz Mudança de Base

Definição: Sejam $\alpha = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ e $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ duas bases distintas de um mesmo espaço vetorial V. A matriz mudança de base de β para α, denotada por $[I]_\alpha^\beta$, é tal que

$$[v]_\alpha = [I]_\alpha^\beta \,.\, [v]_\beta$$

Além disso, as colunas de $[I]_\alpha^\beta$ correspondem às coordenadas dos elementos da base β em relação à base α.

Exercício 1: Em $V = \mathbb{R}^3$ considere as bases

$$\beta = \{(1,1,-1), (-3,-2,0), (0,1,-2)\}$$

e

$$\alpha = \{(1,-1,1), (0,1,-1), (-1,2,-1)\}.$$

a) Determine a matriz $[I]_\alpha^\beta$.

b) Se $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ determine $[v]_\alpha$.

c) Se $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ determine $[v]_\beta$.

Solução: Exercício inteiramente resolvido em aula.

Exemplos:

Definição: Sejam α e β duas bases distintas de um mesmo espaço vetorial V.
A matriz mudança de base de α para β é a inversa da matriz mudança de base de β para α, ou seja

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \left([I]_{\alpha}^{\beta}\right)^{-1}.$$

De forma análoga, temos que

$$[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha} . [v]_{\alpha}$$

Exercício 2: Em $V = \mathbb{R}^3$ considere a base $\alpha = \{(1,2,3),(0,-1,2),(-1,0,5)\}$.

a) Determine a base β sabendo que

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Determine $[I]_{\beta}^{\alpha}$.

Solução: Exercício inteiramente resolvido em aula.

Função Vetorial

Uma *função vetorial* é um tipo especial de função, em que tanto o domínio como o contradomínio são espaços vetoriais.

Notação: Se T é uma função do espaço vetorial U no espaço vetorial V, denotamos

$$T: U \rightarrow V.$$

Observações:

- Como T é uma função, cada elemento $u \in U$ admite uma única imagem por T, denotada por
$$T(u) \in V.$$
- Em ALI, vamos estudar uma classe especial de funções vetoriais, que serão chamadas de "Transformações Lineares".
- Nem toda função vetorial será uma transformação linear.
- Somente as funções vetoriais que satisfazerem certas condições, relacionadas às operações de adição e de multiplicação por escalar, serão denominadas "Transformações Lineares" entre os espaços U e V.

Exemplo

Exemplo 1) A função vetorial $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que associa cada elemento $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ao elemento $(xy, x + y + 2, x^2) \in \mathbb{R}^3$, denotada simplesmente por

$$T(x, y) = (xy, x + y + 2, x^2)$$

é tal que, para

$$u = (-1,2) \quad \text{temos} \quad T(u) = T(-1,2) = (-1.2, -1 + 2 + 2, (-1)^2) = (-2, 3, 1).$$

e para

$$v = (3, 1) \quad \text{temos} \quad T(v) = T(3,1) = (3.1, 3 + 1 + 2, 3^2) = (3, 6, 9).$$

Para

$$u + v = (2, 3) \quad \text{temos que} \quad T(u + v) = T(2,3) = (2.3, 2 + 3 + 2, 2^2) = (6, 7, 4).$$

enquanto que

$$T(u) + T(v) = (-2,3,1) + (3,6,9) = (1,9,10)$$

e podemos ver que

$$T(u + v) \neq T(u) + T(v).$$

Dizemos que T NÃO preserva a adição!

Além disso, para $2u = 2(-1,2) = (-2, 4)$ temos que

$$T(2u) = T(-2, 4) = (-8, 4, 4) \quad \text{e} \quad 2T(u) = 2(-2,3,1) = (-4, 6, 2)$$

Logo

$$T(2u) \neq 2T(u).$$

e T NÃO preserva a multiplicação por escalar.

Exemplo

Exemplo 2) A função vetorial $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (5x + 3y, -2y, x - y)$ é tal que, para

$$u = (-1,2) \quad \text{temos} \quad T(u) = T(-1,2) = (1, -4, -3)$$

e para

$$v = (3,1) \quad \text{temos} \quad T(v) = T(3,1) = (18, -2, 2).$$

Ainda, para

$$u + v = (2,3) \quad \text{temos que} \quad T(u + v) = T(2,3) = (19, -6, -1)$$

enquanto que

$$T(u) + T(v) = (1, -4, -3) + (18, -2,2) = (19, -6, -1).$$

Para esses vetores, temos que

$$T(u + v) = T(u) + T(v).$$

Logo, há chances de T preservar a adição!

Além disso, para $2u = 2(-1,2) = (-2,4)$ temos que

$$T(2u) = T(-2,4) = (2, -8 - 6) \quad \text{e} \quad 2T(u) = 2(1, -4, -3) = (2, -8, -6)$$

Logo

$$T(2u) = 2T(u).$$

Logo, há chances de T preservar a multiplicação por escalar!

Definição

Definição: Sejam U e V espaços vetoriais.

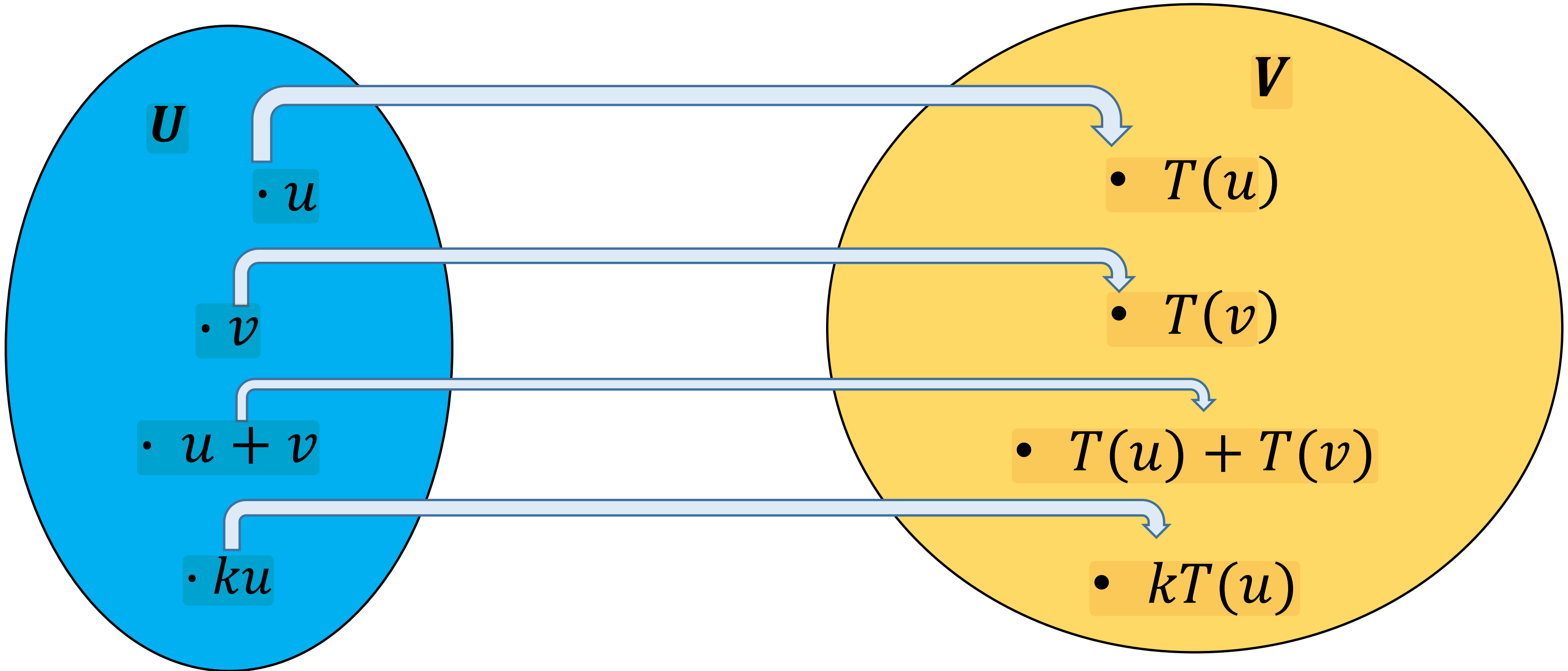
Uma função vetorial $T: U \to V$ é chamada de uma transformação linear entre U e V se e somente se

T preservar a adição e a multiplicação por escalar,

isto é, se e somente se:

i) Para todos $u, v \in U$ tivermos que $T(u+v) = T(u) + T(v)$;

ii) Para todo $k \in \mathbb{R}$ e para todo $u \in U$ tivermos que $T(ku) = kT(u)$.



Exemplos

No Exemplo 1) A função $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y) = (xy, x+y+2, x^2)$ não é uma transformação linear, pois para $u = (-1,2)$ e $v = (3,1)$ vimos que

$$T(u+v) = T(2,3) = (6,7,4) \neq (1,9,10) = (-2,3,1) + (3,6,9) = T(u) + T(v).$$

ou seja, T não preserva sequer a adição de elementos específicos.

No Exemplo 2) A função $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (5x+3y, -2y, x-y)$ tinha chances de ser uma transformação linear entre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, pois preservou a adição e a multiplicação por escalar dos elementos exemplificados.

Para verificar se de fato T é uma transformação linear, devemos analisar as condições da definição para elementos genéricos:

Para verificar tal fato, sejam $u = (x,y)$ e $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Temos que

$$T(u+v) = T(x+a, y+b) = (5(x+a) + 3(y+b), -2(y+b), (x+a) - (y+b))$$

$$= (5x + 5a + 3y + 3b, -2y - 2b, x + a - y - b)$$

$$= (5x+3y, -2y, x-y) + (5a+3b, -2b, a-b)$$

$$= T(x,y) + T(a,b) \quad = T(u) + T(v).$$

Exemplos e Exercícios

Portanto, T preserva a adição de quaisquer elementos. Além disso, para qualquer $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T(ku) = T(kx, ky) &= (5(kx) + 3(ky), -2(ky), kx - ky) \\ &= (5kx + 3ky, -2ky, k(x - y)) \\ &= (k(5x + 3y), k(-2y), k(x - y)) \\ &= k(5x + 3y, -2y, x - y) = kT(x, y) = kT(u) \end{aligned}$$

e T preserva também a multiplicação por escalar.

Portanto, concluímos que $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (5x + 3y, -2y, x - y)$ é, de fato, uma transformação linear.

Exercício 3) Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x^3, e^y)$. Verifique se T é linear.

Solução: Exercício inteiramente resolvido em aula.

Exercício 4) Seja $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$ munido das operações não usuais dadas por

$$(x, y) + (a, b) = (xa, yb) \quad \text{e} \quad k(x, y) = \left(x^k, y^k\right).$$

Verifique se $T: V \to V$ é uma transformação linear nos casos:

a) $T(x, y) = (x^3, e^y)$ Solução: Exercício inteiramente resolvido em aula.