# Álgebra Linear
(ALI0001 – CCI-192-02U)

## Equações Lineares
## Sistemas de Equações Lineares

**Professor:** Marnei Luis Mandler

Aula do dia 01 de março de 2023.

UDESC

# Equação linear

Uma *equação linear* em $n$ variáveis (ou incógnitas) é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b,$$

**Nomenclatura:**

- $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ são chamados de coeficientes;
- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as variáveis (ou incógnitas);
- $b \in \mathbb{R}$ é dito termo independente.

Forma Matricial:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [b].$$

Exemplos e Contraexemplos:

- $4x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 5x_4 = 3$ é linear, com $a_1 = 4,\ a_2 = -7,\ a_3 = 9,\ a_4 = -5,\ b = 3.$
- $-x + \sqrt{5}\,y + 3z/2 = 0$ é linear, com $a_1 = -1,\ a_2 = \sqrt{5},\ a_3 = 3/2,\ b = 0.$
- $8x + 3y - 2xyz = 0$ não é linear, devido ao produto $xyz$.
- $x^5 + 2e^y - 5\cos(z) = 4$ não é linear, devido aos fatores $x^5, e^y, \cos(z)$.
- $2x + e^8y + \ln(3)z = 7$ é linear, com $a_1 = 2,\ a_2 = e^8,\ a_3 = \ln(3)$.

Em ALI vamos considerar somente equações lineares em todas as variáveis!

# Sistemas de equações lineares – Caracterização Geral

Um sistema de $m$ equações lineares a $n$ variáveis é da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Quando todos os termos independentes são nulos ($b_i = 0$) o sistema é dito homogêneo.

Uma solução para o sistema linear é uma sequência ordenada $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ que satisfaça simultaneamente todas as equações do sistema.

**Exemplo 1:** Verifique se a tripla ordenada $(5, 1, -1)$ é uma solução para o sistema linear

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -2x + 3y - z = -6 \\ 3x + 4y - 13z = 32 \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} 5 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) &= 0 \\ -2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 - (-1) &= -6 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 - 13(-1) &= 32 \end{aligned}$$

temos que $(5, 1, -1)$ é uma solução do sistema dado.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

# Sistemas de equações lineares – Representação Matricial

Todo sistema de $m$ equações lineares a $n$ variáveis

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

pode ser escrito sob a forma de um produto de matrizes:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz dos coeficientes}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{Matriz das incógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\text{Matriz dos termos independentes}}$$

Note que para o produto de matrizes $A \cdot X$ estar definido, é preciso que o número de colunas da matriz $A$ seja igual ao número de linhas da matriz $X$.

que denotaremos por $A.X = B.$

Note que as ordens das matrizes são tais que

$$A_{m\times n}.X_{n\times 1} = B_{m\times 1}.$$

# Sistemas de equações lineares – Matriz Ampliada

Podemos simplificar a representação matricial de um sistema de equações lineares tomando a matriz ampliada do sistema, dada por:

$$[A\,|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & |\, b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & |\, b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & |\, b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & |\, \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & |\, b_m \end{bmatrix}.$$

Isso só é possível pois $A$ e $B$ são matrizes com a mesma quantidade de linhas!

**Exemplo 2:** O sistema $\begin{cases} x - 3y = -9 \\ -6x + 7y = -1 \end{cases}$ pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -1 \end{bmatrix},$$

e a sua matriz ampliada é

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & |\,-9 \\ -6 & 7 & |\,-1 \end{bmatrix}.$$

# Sistemas de equações lineares – Matriz Ampliada

**Exemplo 3:** O sistema $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -2x + 3y - z = -6 \\ 3x + 4y - 13z = 32 \end{cases}$ pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -13 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 32 \end{bmatrix}.$$

A matriz ampliada do sistema é

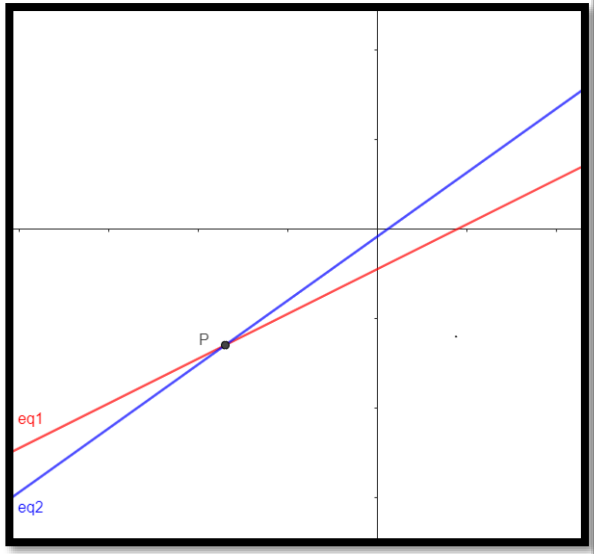
$$[A\,|B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 0 \\ -2 & 3 & -1 & | & -6 \\ 3 & 4 & -13 & | & 32 \end{bmatrix}.$$

A solução do sistema, dada por $x = 5$, $y = 1$ e $z = -1$ pode ser escrita matricialmente como

$$X = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

# Interpretação Geométrica de Sistemas 2 por 2

Geometricamente, uma equação linear com duas variáveis, da forma $a_1x + a_2y = b_1$ representa uma reta em $\mathbb{R}^2$. Dessa forma, um sistema com duas equações lineares a duas variáveis permite obter a interseção entre duas retas em $\mathbb{R}^2$




**Exemplo 4:** Qual a interseção entre as retas

$$x - 2y = 9 \quad \text{e} \quad -5x + 7y = -6?$$

Basta resolver (se possível) o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 9 \\ -5x + 7y = -6 \end{cases}$$

Somando a segunda equação com o quíntuplo da primeira, obtemos:

$$0x - 3y = 39.$$

Logo

$$y = -13.$$

Substituindo na primeira equação:

$$x - 2 \cdot (-13) = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 9 - 26 = -17.$$

Assim, a única solução do sistema é $(x, y) = (-17, -13)$.

Portanto, a interseção entre as retas é o ponto $P(-17, -13)$.

Como obtemos uma única solução, dizemos que o sistema é possível e determinado (SPD).

# Exercícios Propostos:

1. Verifique se $X = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ é solução do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 5x - y + 2z = 7 \\ -2x + 6y + 9z = 0 \\ -7x + 5y - 3z = -7 \end{cases}.$$

2. Indique as equações de um sistema linear não-homogêneo, em que $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes e $\begin{bmatrix} 9 \\ -11 \end{bmatrix}$ é uma solução do sistema.

3. Mostre que os sistemas abaixo admitem a mesma solução:

$$\begin{cases} 6x + 11y = 43 \\ -7x + 3y = 29 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + 14y = 72 \\ 4x - 2y = -18 \end{cases}$$