Álgebra Linear (ALI0001 – CCI-192-02U)

Exercícios de Diagonalização
Produto Interno

Professor: Marnei Mandler

Aula de ALI do dia 03 de julho de 2023.

UDESC

Exercícios de Diagonalização

Exercício 1: Determine a lei do operador $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que admite os autovetores

$$v_1 = (1, -1) \text{ e } v_2 = (-2, 1)$$

associados, respectivamente, aos autovalores

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -4.$$

Solução: O exercício foi resolvido durante a aula, de duas formas diferentes.

Exercício 2: Para $A = \begin{bmatrix} -19 & -6 \\ 12 & 19 \end{bmatrix}$ determine A^{2025}.

Solução: O exercício foi resolvido durante a aula.

Produto Interno

O conceito de "produto interno" nos permitirá definir conceitos geométricos (como comprimentos, distâncias e ângulos) em um espaço vetorial V qualquer.

Para compreender o conceito, vamos primeiro considerar em $V = \mathbb{R}^2$ o produto escalar entre $u = (x, y)$ e $v = (a, b)$ definido por

$$u \cdot v = (x, y) \cdot (a, b) = xa + yb.$$

Sabemos que

$$v \cdot u = ax + by \ = u \cdot v$$

e o produto escalar é comutativo.

Além disso, considerando as operações usuais de adição e multiplicação por escalar, temos que, para todo $k \in \mathbb{R}$ vale que

$$(ku) \cdot v = (kx, ky) \cdot (a, b) \ = (kx)a + (ky)b \ = k(xa + yb) = k(u \cdot v)$$

e o produto escalar preserva a multiplicação. Ainda, para qualquer $w = (c, d) \in \mathbb{R}^2$ temos

$$(u + w) \cdot v = (x + c, y + d) \cdot (a, b) = (x + c)a + (y + d)b \ \ = xa + ca + yb + db$$
$$= (xa + yb) + (ca + db) = u \cdot v + w \cdot v$$

e o produto escalar é distributivo em relação à adição.

Também temos que

$$v \cdot v = (x, y) \cdot (x, y) \ = x^2 + y^2 \geq 0.$$

Produto Interno

Além disso, o módulo de $u = (x, y)$ é dado por

$$|u| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{u \cdot u}.$$

O ângulo $\theta \in [0, \pi]$ formado entre $u, v \in \mathbb{R}^2$ é tal que

$$u \cdot v = |u|.|v| \cdot \cos(\theta),$$

ou seja, é tal que

$$\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{|u|\,.\,|v|}.$$

Para expandir esses conceitos todos para elementos de um espaço vetorial qualquer, precisamos primeiro expandir o conceito de produto escalar. Nesse contexto, define-se:

Definição: Seja V um espaço vetorial qualquer. Um **produto interno em V** é uma função

$$< , >: V \times V \to \mathbb{R}$$

que associa a cada par de elementos $u, v \in V$ um único número real $< u, v >$ de forma a satisfazer as seguintes condições:

i) $< v, u > = < u, v >$

ii) $< ku, v > = k < u, v >$

iii) $< u + w, v > = < u, v > + < w, v >$

iv) $< u, u > \geq 0$ e $< u, u > = 0$ se, e somente se, $u = \vec{0}_V$.

Produto Interno

Exemplo 1: Em $V = \mathbb{R}^2$, verifique se

$$< (x, y), (a, b) > = 3xa - xb - ya + 2yb$$

é um produto interno.

Solução: Dados $u = (x, y), v = (a, b), w = (c, d)$ e $k \in \mathbb{R}$ têm-se que:

i) $< v, u > = < (a, b), (x, y) > \; = 3ax - ay - bx + 2by$

$$= 3xa - xb - ya + 2yb = \; < (x, y), (a, b) > = < u, v >.$$

ii) $< ku, v > = < (kx, ky), (a, b) > = 3(kx)a - (kx)b - (ky)a + 2(ky)b$

$$= k(3xa - xb - ya + 2yb) = k < u, v >.$$

iii) $< u + w, v > = < (x + c, y + d), (a, b) >$

$$= 3(x + c)a - (x + c)b - (y + d)a + 2(y + d)b$$

$$= 3xa + 3ca - xb - cb - ya - da + 2yb + 2db$$

$$= (3xa - xb - ya + 2yb) + (3ca - cb - da + 2db)$$

$$= < (x, y), (a, b) > + < (x, y), (c, d) >$$

$$=< u, v > + < w, v >.$$

Produto Interno

iv) $< u, u > =< (x, y), (x, y) > = 3x^2 - xy - yx + 2y^2$

$$= 2x^2 + x^2 - 2xy + y^2 + y^2$$

$$= 2x^2 + (x - y)^2 + y^2 \geq 0$$

e $< u, u > = 0$ se, e somente se, $2x^2 + (x - y)^2 + y^2 = 0$ isto é

$$x = 0, \quad x - y = 0 \quad \text{e} \quad y = 0,$$

ou seja, $u = (x, y) = (0,0)$.

Portanto, é um produto interno em $V = \mathbb{R}^2$.

Exemplo 2: Em $V = \mathbb{R}^3$, verifique se

$$< (x, y, z), (a, b, c) > \ = 7xa + 5yb + 9zc$$

é um produto interno.

Solução: Dados $u = (x, y, z), v = (a, b, c), w = (d, f, g)$ e $k \in \mathbb{R}$ têm-se que:

i) $< v, u > = < (a, b, c), (x, y, z) > = 7ax + 5by + 9cz$

$$= 7xa + 5yb + 9zc$$

$$= < (x, y, z), (a, b, c) > = < u, v >.$$

Produto Interno

ii) $< ku, v > = < (kx, ky, kz), (a, b, c) >$

$$= 7(kx)a + 5(ky)b + 9(kz)c$$

$$= k(7xa + 5yb + 9zc)$$

$$= k < u, v >.$$

iii) $< u + w, v > = < (x + d, y + f, z + g), (a, b, c) >$

$$= 7(x + d)a + 5(y + f)b + 9(z + g)c$$

$$= 7xa + 7da + 5yb + 5fb + 9zc + 9gc$$

$$= (7xa + 5yb + 9zc) + (7da + 5fb + 9gc)$$

$$= < (x, y, z), (a, b, c) > + < (d, f, g), (a, b, c) >$$

$$= < u, v > + < w, v >.$$

iv) $< u, u > = < (x, y, z), (x, y, z) > = 7x^2 + 5y^2 + 9z^2 \geq 0$

e $< u, u > = 0$ se, e somente se, $x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0,$ ou seja,

$$u = (x, y, z) = (0,0,0).$$

Portanto, é um produto interno em $V = \mathbb{R}^3$.

Os produtos internos dos Exemplos 1 e 2 são ditos produtos internos não usuais em $V = \mathbb{R}^2$ e $V = \mathbb{R}^3$, respectivamente.

Contraexemplo e Produto Interno Usuais

Exemplo 3: Em $V = \mathbb{R}^3$, verifique se

$$< (x, y, z), (a, b, c) > \; = 2xa + yb - zc$$

é um produto interno.

Solução: É possível mostrar que é válida a comutatividade, a distributividade e a preservação da multiplicação por escalar.

No entanto, para, por exemplo, $u = (1, \sqrt{2}, 2)$ temos que

$$\begin{aligned} < u, u > &= < \left(1, \sqrt{2}, 2\right), \left(1, \sqrt{2}, 2\right) > \\ &= 2 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot 2 \\ &= 2 + 2 - 4 = 0, \end{aligned}$$

com $u \neq (0,0,0)$.

Portanto, não é um produto interno.

OBS: Da mesma forma que tínhamos as operações usuais de adição e multiplicação por escalar em cada espaço vetorial clássico, temos um produto interno usual em cada espaço:

Exemplo 4: Em $V = \mathbb{R}^n$ o produto interno usual é dado por uma generalização do produto escalar:

$$< (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) > = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + \cdots + x_n \cdot y_n.$$

Produto Interno Usuais

Exemplo 5: Em $V = P_n$ o produto interno usual é definido, para

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$

como

$$< p(x), q(x) > = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Exemplo 6: Em $V = M(m,n)$ o produto interno usual é definido, por

$$< A, B > = traço(A^T \cdot B),$$

em o traço de uma matriz é a soma dos elementos situados na sua diagonal principal.

Por exemplo, em $V = M(2,3)$, para $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$, temos que

$$A^T \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{21}b_{23} \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{12}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{13}b_{11} + a_{23}b_{21} & a_{13}b_{12} + a_{23}b_{22} & a_{13}b_{13} + a_{23}b_{23} \end{bmatrix}$$

Produto Interno Usuais

Logo

$$< A, B > = traço\left(\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{21}b_{23} \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{12}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{13}b_{11} + a_{23}b_{21} & a_{13}b_{12} + a_{23}b_{22} & a_{13}b_{13} + a_{23}b_{23} \end{bmatrix}\right)$$

$$= a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{13}b_{13} + a_{23}b_{23}.$$

Exemplo 7: Em $V = M(2,2)$ calcule o produto interno usual entre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Solução: Como

$$A^T \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -27 & -13 \end{bmatrix}$$

temos que

$$< A, B > = traço(A^T \cdot B) = -2 - 13 = -15,$$

ou diretamente

$$< A, B > = 1 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 5 \cdot (-2) = 4 - 3 - 6 - 10 = -15.$$

Normas, distâncias e ângulos em um espaço vetorial

O conceito de norma generalizará a ideia de comprimento ou módulo de um vetor:

Definição: Seja V um espaço vetorial, munido de um produto interno $<\,,\ >$ qualquer.
A **norma** de um elemento $v \in V$ é definida como

$$||v|| = \sqrt{<v,v>}.$$

Exemplo 8: Em $V = \mathbb{R}^4$, munido do produto interno usual, a norma de $v = (1,-5,13,-1)$ é dada por

$$\begin{aligned} ||v|| &= \sqrt{<(1,-5,13,-1),(1,-5,13,-1)>} \\ &= \sqrt{1\cdot 1 + (-5)\cdot(-5) + 13\cdot 13 + (-1)\cdot(-1)} \\ &= \sqrt{1+25+169+1} = \sqrt{196} = 14. \end{aligned}$$

$$\boxed{||v||^2 = <v,v>.}$$

Observação: Quando $v \in V$ é tal que $||v|| = 1$, v é dito um **vetor unitário ou normalizado**.

Todo elemento $v \in V$, com $v \neq \vec{0}_V$ pode ser normalizado, tomando-se $u = \frac{v}{||v||}$, pois

$$||u|| = \sqrt{<\frac{v}{||v||},\frac{v}{||v||}>} = \sqrt{\frac{1}{||v||}\cdot <v,\frac{v}{||v||}>} = \sqrt{\frac{1}{||v||}\cdot <\frac{v}{||v||},v>} = \sqrt{\frac{1}{||v||^2}\cdot <v,v>}$$

$$= \frac{1}{||v||}\sqrt{<v,v>} = \frac{1}{||v||}\cdot ||v|| = 1.$$

Exemplo 9: Em $V = \mathbb{R}^4$, munido do produto interno usual, o elemento

$$u = \frac{1}{14}(1, -5, 13, -1)$$

está normalizado, pois $||u|| = 1$.

Definição: Seja V um espaço vetorial, munido de um produto interno $<\,,\;>$ qualquer. A distância entre dois elementos $u, v \in V$ é definida por

$$d(u, v) = ||u - v||.$$

Observação: Como $||u - v|| = \sqrt{< u - v, u - v >}$ e

$$\begin{aligned} < u - v, u - v > &= < u, u - v > \; + < -v, u - v > \\ &= < u - v, u > \; -1 < v, u - v > \\ &= < u, u > \; + < -v, u > \; -1 < u - v, v > \\ &= ||u||^2 - 1 < v, u > -1 < u, v > -1 < -v, v > \\ &= ||u||^2 - 1 < u, v > -1 < u, v > +1 < v, v > \\ &= ||u||^2 - 2 < u, v > + ||v||^2 \end{aligned}$$

temos que

$$||u - v||^2 = ||u||^2 - 2 < u, v > + ||v||^2.$$

Normas, distâncias e ângulos em um espaço vetorial

Exemplo 10: Em $V = M(2,2)$, munido do produto interno usual, calcule a distância entre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução: Como

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

temos que

$$d(A, B) = \left|\left|A - B\right|\right| = \sqrt{(-3)\cdot(-3) + (-4)\cdot(-4) + 5\cdot 5 + 4\cdot 4} = \sqrt{66}.$$

Exemplo 11: Em $V = P_2$, munido do produto interno usual, calcule a distância entre

$$p(x) = 1 - 5x + 4x^2 \quad \text{e} \quad q(x) = 3 - 8x + 10x^2.$$

Solução: Como

$$p(x) - q(x) = (1 - 5x + 4x^2) - (3 - 8x + 10x^2) = -2 + 3x - 6x^2$$

temos que

$$\begin{aligned} d(p(x), q(x)) &= \left|\left|p(x) - q(x)\right|\right| \\ &= \sqrt{(-2)\cdot(-2) + 3\cdot 3 + (-6)\cdot(-6)} \\ &= \sqrt{49} = 7. \end{aligned}$$

Normas, distâncias e ângulos em um espaço vetorial

Definição: Seja V um espaço vetorial, munido de um produto interno $< \, , \, >$ qualquer. O **ângulo** entre dois elementos $u, v \in V$ é definido como $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{< u, v >}{||u|| \cdot ||v||}.$$

Observação: A partir da definição, têm-se que

$$< u, v > = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos(\theta).$$

Exemplo 12: Em $V = M(2,2)$, munido do produto interno usual, calcule o ângulo entre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução: Como

$$||A|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{7}$$

$$||B|| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{35}$$

$$< A, B > = 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 3 = 0$$

temos que

$$\cos(\theta) = \frac{0}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{35}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

A, B são ortogonais.

Dois elementos $u, v \in V$ são ditos ortogonais quando $\theta = \pi/2$. Logo $\cos(\theta) = 0$ e então $< u, v > = 0$.

Normas, distâncias e ângulos em um espaço vetorial

Exemplo 13: Em $V = P_2$, munido do produto interno usual, calcule o ângulo entre

$$p(x) = 1 - x^2 \quad \text{e} \quad q(x) = -1 + x.$$

Solução: Como

$$||p(x)|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$||q(x)|| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$< p(x), q(x) > = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = -1$$

temos que

$$\cos(\theta) = \frac{< p(x), q(x) >}{||p(x)|| \cdot ||q(x)||} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{2}$$

e então

$$\theta = \frac{2\pi}{3}.$$

Observação: Como $< u, v > = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos(\theta)$ obtêm-se o seguinte resultado:

Desigualdade de Cauchy Schwarz: Seja V um espaço vetorial, munido de um produto interno $< \, , \, >$ qualquer. Se $u, v \in V$ então

$$|< u, v >| \leq ||u|| \cdot ||v||.$$

Conjunto Ortogonal e Base Ortogonal

Definição: Seja V um espaço vetorial, munido de um produto interno.
O conjunto $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \subset V$ é dito ortogonal se, e somente se, quaisquer dois de seus elementos são ortogonais, ou seja,

$$< v_i, v_j > = 0$$

sempre que $i \neq j$.

Exemplo 14: Em $V = P_2$, munido do produto interno usual, verifique se

$$\{-1 + 2x + 4x^2,\ 2 + 3x - x^2, -14 + 7x - 7x^2\}$$

é um conjunto ortogonal.

Solução: Como

$$< -1 + 2x + 4x^2, 2 + 3x - x^2 > = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = 0,$$
$$< -1 + 2x + 4x^2, -14 + 7x - 7x^2 > = (-1) \cdot (-14) + 2 \cdot 7 + 4 \cdot (-7) = 0,$$
$$< 2 + 3x - x^2, -14 + 7x - 7x^2 > = 2 \cdot (-14) + 3 \cdot 7 + (-1) \cdot (-7) = 0,$$

temos que o conjunto dado é ortogonal.

Teorema: Um conjunto ortogonal de elementos não nulos sempre é LI.

Teorema: Se $\dim(V) = n$, um conjunto ortogonal com n elementos não nulos é uma base para V, chamada de base ortogonal.

Base Ortonormal

Definição: Seja V um espaço vetorial, munido de um produto interno.
Uma base $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ de V é dita base ortonormal se, e somente se, todos os seus elementos estão normalizados e quaisquer dois de seus elementos são ortogonais, ou seja, se, e somente se,

$$||v_i|| = 1 \quad \text{e} \quad < v_i, v_j > = 0$$

sempre que $i \neq j$.

Observação: Como $||v_i|| = \sqrt{< v_i, v_i >}$ temos $||v_i|| = 1$ se, e somente se, $< v_i, v_i > = 1$.
Logo, $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ é base ortonormal se, e somente se,

$$< v_i, v_j > = \begin{cases} 1, \text{se } i = j \\ 0, \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Teorema: Sempre é possível obter uma base ortonormal a partir de uma base ortogonal.
Justificativa: Se $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ é uma base ortogonal para um espaço V, normalizando todos os seus elementos, obtém-se que

$$\alpha = \left\{\frac{v_1}{||v_1||}, \frac{v_2}{||v_2||}, \frac{v_3}{||v_3||}, \dots, \frac{v_n}{||v_n||}\right\}$$

é uma base ortonormal para V.

Coordenadas em relação a uma Base Ortogonal

Seja V um espaço vetorial, munido de um produto interno.

Considere $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ uma base ortogonal para V.

Dado qualquer $v \in V$ sabemos que existem $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \cdots + a_n v_n.$$

Questão: Como obter cada uma das coordenadas a_i?

Note que, como

$$\begin{aligned} < v, v_1 > &= < a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \cdots + a_n v_n, v_1 > \\ &= < a_1 v_1, v_1 > + < a_2 v_2, v_1 > + < a_3 v_3, v_1 > + \ \dots + < a_n v_n, v_1 > \\ &= a_1 < v_1, v_1 > + a_2 < v_2, v_1 > + a_3 < v_3, v_1 > + \ \dots + a_n < v_n, v_1 > \\ &= a_1 ||v_1||^2 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 + \ \dots + a_n \cdot 0 \\ &= a_1 ||v_1||^2, \end{aligned}$$

e $||v_1|| \neq 0$, pois v_1 é não nulo, obtemos que

$$a_1 = \frac{< v, v_1 >}{||v_1||^2}.$$

Analogamente, pode-se obter que, para cada i:

$$\boxed{a_i = \frac{< v, v_i >}{||v_i||^2}.}$$

Coordenadas em relação a uma Base Ortogonal

Portanto, se $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ é uma base ortogonal para V, dado qualquer $v \in V$ temos que

$$v = \frac{< v, v_1 >}{||v_1||^2} v_1 + \frac{< v, v_2 >}{||v_2||^2} v_2 + \frac{< v, v_3 >}{||v_3||^2} v_3 + \cdots + \frac{< v, v_n >}{||v_n||^2} v_n.$$

Dessa forma, a matriz de coordenadas de v em relação à base ortogonal β é dada por

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} \dfrac{< v, v_1 >}{||v_1||^2} \\ \\ \dfrac{< v, v_2 >}{||v_2||^2} \\ \\ \dfrac{< v, v_3 >}{||v_3||^2} \\ \vdots \\ \dfrac{< v, v_n >}{||v_n||^2} \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Exemplo 15: Em $V = \mathbb{R}^4$, munido do produto interno usual, verifique se

$$\beta = \{(1,-2,3,4),(2,1,-4,3),(-3,4,1,2),(4,3,2,-1)\}$$

é uma base ortogonal.

A seguir, encontre a matriz de coordenadas de $v = (26,1,8,3)$ em relação à base β.

Solução: Como

$$< (1,-2,3,4),(2,1,-4,3) > = 1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + 3\cdot(-4) + 4\cdot 3 = 0,$$
$$< (1,-2,3,4),(-3,4,1,2) > = 1\cdot(-3) + (-2)\cdot 4 + 3\cdot 1 + 4\cdot 2 = 0,$$
$$< (1,-2,3,4),(4,3,2,-1) > = 1\cdot 4 + (-2)\cdot 3 + 3\cdot 2 + 4\cdot(-1) = 0,$$
$$< (2,1,-4,3),(-3,4,1,2) > = 2\cdot(-3) + 1\cdot 4 + (-4)\cdot 1 + 3\cdot 2 = 0,$$
$$< (2,1,-4,3),(4,3,2,-1) > = 2\cdot 4 + 1\cdot 3 + (-4)\cdot 2 + 3\cdot(-1) = 0,$$
$$< (-3,4,1,2),(4,3,2,-1) > = (-3)\cdot 4 + 4\cdot 3 + 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) = 0,$$

os elementos de β são dois a dois ortogonais e, portanto, são LI.

Além disso, como é formada por quatro elementos, β é uma base ortogonal para $\mathbb{R}^4$.

Ainda, as normas dos elementos de β são dadas por

$$||(1,-2,3,4)|| = \sqrt{1+4+9+16} = \sqrt{30}, \qquad ||(2,1,-4,3)|| = \sqrt{4+1+16+9} = \sqrt{30}$$
$$||(-3,4,1,2)|| = \sqrt{9+16+1+4} = \sqrt{30} \qquad ||(4,3,2,-1)|| = \sqrt{16+9+4+1} = \sqrt{30}$$

Coordenadas em relação a uma Base Ortogonal

Para $v = (26, 1, 8, 3)$ temos que

$$< (26, 1, 8, 3), (1, -2, 3, 4) > = 26 - 2 + 24 + 12 = 60$$
$$< (26, 1, 8, 3), (2, 1, -4, 3) > = 52 + 1 - 32 + 9 = 30$$
$$< (26, 1, 8, 3), (-3, 4, 1, 2) > = -78 + 4 + 8 + 6 = -60$$
$$< (26, 1, 8, 3), (4, 3, 2, -1) > = 104 + 3 + 16 - 3 = 120$$

Logo, a matriz de coordenadas de v em relação à base ortogonal β é dada por

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} \dfrac{60}{\sqrt{30}^2} \\ \\ \dfrac{30}{\sqrt{30}^2} \\ \\ \dfrac{-60}{\sqrt{30}^2} \\ \\ \dfrac{120}{\sqrt{30}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{60}{30} \\ \\ \dfrac{30}{30} \\ \\ \dfrac{-60}{30} \\ \\ \dfrac{120}{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Coordenadas em relação a uma Base Ortonormal

Caso $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ seja uma base ortonormal para V, temos que $\left|\left|v_i\right|\right| = 1$ para todo $i \in \{1,2,3, \ldots n\}$. Logo, dado qualquer $v \in V$ temos que

$$v = \frac{< v, v_1 >}{\left|\left|v_1\right|\right|^2} v_1 + \frac{< v, v_2 >}{\left|\left|v_2\right|\right|^2} v_2 + \frac{< v, v_3 >}{\left|\left|v_3\right|\right|^2} v_3 + \cdots + \frac{< v, v_n >}{\left|\left|v_n\right|\right|^2} v_n$$

$$= \frac{< v, v_1 >}{1^2} v_1 + \frac{< v, v_2 >}{1^2} v_2 + \frac{< v, v_3 >}{1^2} v_3 + \cdots + \frac{< v, v_n >}{1^2} v_n$$

$$=< v, v_1 > v_1 +< v, v_2 > v_2 +< v, v_3 > v_3 + \cdots +< v, v_n > v_n.$$

Dessa forma, a matriz de coordenadas de v em relação à base ortonormal α é dada por

$$[v]_\alpha = \begin{bmatrix} < v, v_1 > \\ < v, v_2 > \\ < v, v_3 > \\ \vdots \\ < v, v_n > \end{bmatrix}.$$