MDI0002 – Matemática Discreta
Aula 01
Noções de Lógica e Técnicas de Demonstração

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2020

Por que **Discreta**?

- Limitações **finitas** de um computador
  - tamanho da memória
  - número de instruções que pode executar
  - número de símbolos que pode tratar
- Portanto é necessário o estudo de estruturas baseadas em conjuntos finitos
- Porém isto não implica pré-fixação de tamanhos máximos (por exemplo: armazenamento)

Conjuntos de recursos computacionais

- são contáveis ou **discretos** (em oposição ao termo *contínuo*)
- podem ser enumerados (não há elemento entre quaisquer outros dois)
- Exemplo: $\mathbb{N}$ *versus* $\mathbb{R}$

Estudo baseado em **Conjuntos Contáveis**, finitos ou infinitos

Matemática do Contínuo

- Cálculo Diferencial e Integral
- Análise Matemática

Conjuntos

- Conceito
- Denotação: por extensão e por compreensão
- Pertinência
- Contingência
- Conjuntos finitos e infinitos
- Conjunto vazio e conjunto universo

Teoremas

- Podem ser vistos como problemas a serem implementados
- A prova ou demonstração é a solução computacional (se não for por absurdo...)

Programação – Operadores lógicos

- Segue a lógica proposicional clássica

Proposição

- Sentença, frase ou construção que se pode atribuir juízo
- É o “átomo”da lógica
- Verdadeiro ou Falso

Conectivos

- Operam sobre as proposições
- Constroem fórmulas mais complexas

Conectivos

- e (conjunção) $\wedge$
- ou (disjunção) $\vee$
- não (negação) $\neg$
- se-então (condicional) $\rightarrow$

Tabelas-Verdade

Conjunção e Disjunção

p	q	p∧q	p∨q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Negação

p	¬p
V	F
F	V

Condicional

p	q	p→q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tautologia

- Fórmula que é **sempre** verdadeira
- Para **qualquer** combinação de valores das proposições

Contradição

- Fórmula que é **sempre** falsa
- Para **qualquer** combinação de valores das proposições

Passagem da Lógica Proposicional para a Lógica de Primeira Ordem

Seja uma proposição sobre um conjunto de valores, como

$$n > 1$$

de forma que, dependendo do valor de n, o valor-verdade possivelmente muda.

Para cada valor de n, uma proposição diferente é considerada.

$$p(n)$$

Quantificador Universal

- Para todo x
- $\forall x \in U, p(x)$

Quantificador Existencial

- Existe x
- $\exists x \in U, p(x)$

Existência $\neq$ Unicidade

- Existe somente um
- Existe e é único
- Simbolizado por $\exists!$

$$\exists! x\ p(x) \Leftrightarrow (\exists x\ p(x)) \wedge (\forall x \forall y\ p(x) \wedge p(y) \rightarrow x = y)$$

Sentença do tipo

$$p \rightarrow q$$

que deve ser **demonstrada**.

p – hipótese

q – tese

Demonstração: sequência de sentenças que seguem a partir da hipótese que devem ser justificadas com passos lógicos, definições ou teoremas anteriormente demonstrados.

Verdadeiro ou Falso?

A partir de uma afirmação qualquer, por exemplo,

$$\forall n \in \mathbb{N}\ n! \leq n^3$$

Como provar se é verdadeira ou falsa?

- Análise da afirmação
- Demonstração caso seja verdadeira
- Contra-exemplo caso seja falsa

- Um teorema da forma

$$p \leftrightarrow q$$

é usualmente provado em duas "partes".
"Indo": $p \rightarrow q$.
E "voltando": $q \rightarrow p$.

- Exemplo geralmente **não** é prova. Exceção: conjectura é a existência de um elemento que respeite alguma propriedade.

- No caso de um número **finito e pequeno** de elementos, pode-se mostrar o que se quer elemento a elemento. (Prova por exaustão)

Prova Direta

Pressupõe que a hipótese p é verdadeira e segue até deduzir a tese q também como verdadeira.
Ou seja, partindo-se de p, chega-se a q.

Exemplo:

a soma de dois números pares é par

Reescrita pela forma $p \to q$

se m e n são dois números pares quaisquer,
então $m + n$ é par

Baseia-se no resultado

$$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$$

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \to \neg p$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

Para provar $p \to q$, faz-se a **prova direta** de $\neg q \to \neg p$.

Exemplo:

$$n! > (n+1) \to n > 2$$

Redução ao Absurdo

Baseia-se no resultado

$$p \to q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \to F$$

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	**F**	**F**
F	V	V
F	F	V

Para provar $p \to q$, faz-se a **prova direta** de $(p \wedge \neg q) \to F$.

- supõe-se a hipótese: p
- supõe-se a negação da tese: $\neg q$
- chega-se a uma *contradição*, por exemplo, $s \wedge \neg s$

Exemplo:

$$0 \text{ é o único elemento neutro da adição em } \mathbb{N}$$

Reescrevendo na forma $p \rightarrow q$

se 0 é elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$
então 0 é o único elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$

Suponha

- 0 é um elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$
- 0 *não* é o único elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$

Seja

- e um *outro* elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$ tal que $e \neq 0$