O plano
(Teoria)

Estrutura desta apresentação

- Informações iniciais do plano
- A equação geral do plano
- Determinação de um plano
- Alternativa para o cálculo da equação geral do plano
- Casos particulares de planos
- Equações paramétricas do plano

Informações iniciais do plano

Por se tratar de um espaço unidimensional, viu-se que uma reta fica totalmente representada ao se obter dela um ponto (para fixá-la no espaço) e um vetor (que recebe o nome de vetor diretor, indicando a direção da reta).

Seguindo esta linha de raciocínio, quais dados são necessários para representação de um plano?

1. Como também é necessário fixá-lo no espaço, precisa-se de **um ponto**.
2. Por se tratar de um espaço bidimensional, que vetores utilizar?

Informações iniciais do plano

Há duas possibilidades:

i. Por se tratar de um espaço bidimensional, é de se esperar que sejam necessários dois vetores não colineares do plano. Algumas formas de representação de plano se baseiam nestes vetores, que recebem o nome de **vetores base** do plano.

ii. Como se encontra no espaço (que é tridimensional), resta somente uma direção normal ao plano. Pode-se optar assim por utilizar somente um vetor não nulo com essa direção. Este vetor recebe o nome de **vetor normal** ao plano.

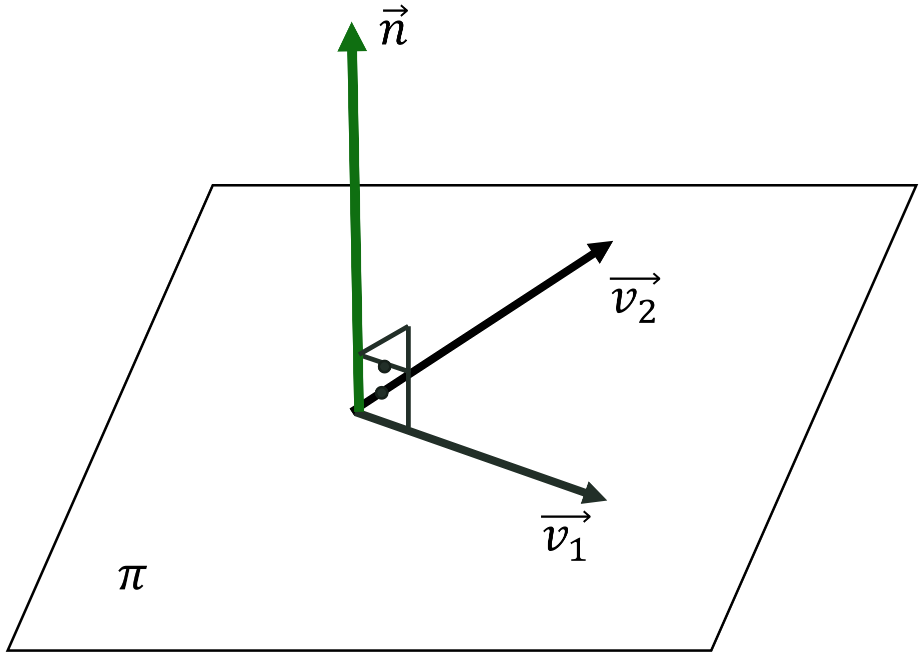
Há como relacionar os vetores base com o vetor normal?

Informações iniciais do plano

A resposta é sim!

Se $\vec{n}$ é normal ao plano, será ortogonal a qualquer vetor presente no plano. Assim, se não se conhece $\vec{n}$ de imediato mas se têm dois vetores base $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, pode-se definir $\vec{n}$ como

$$\vec{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$$



A equação geral do plano

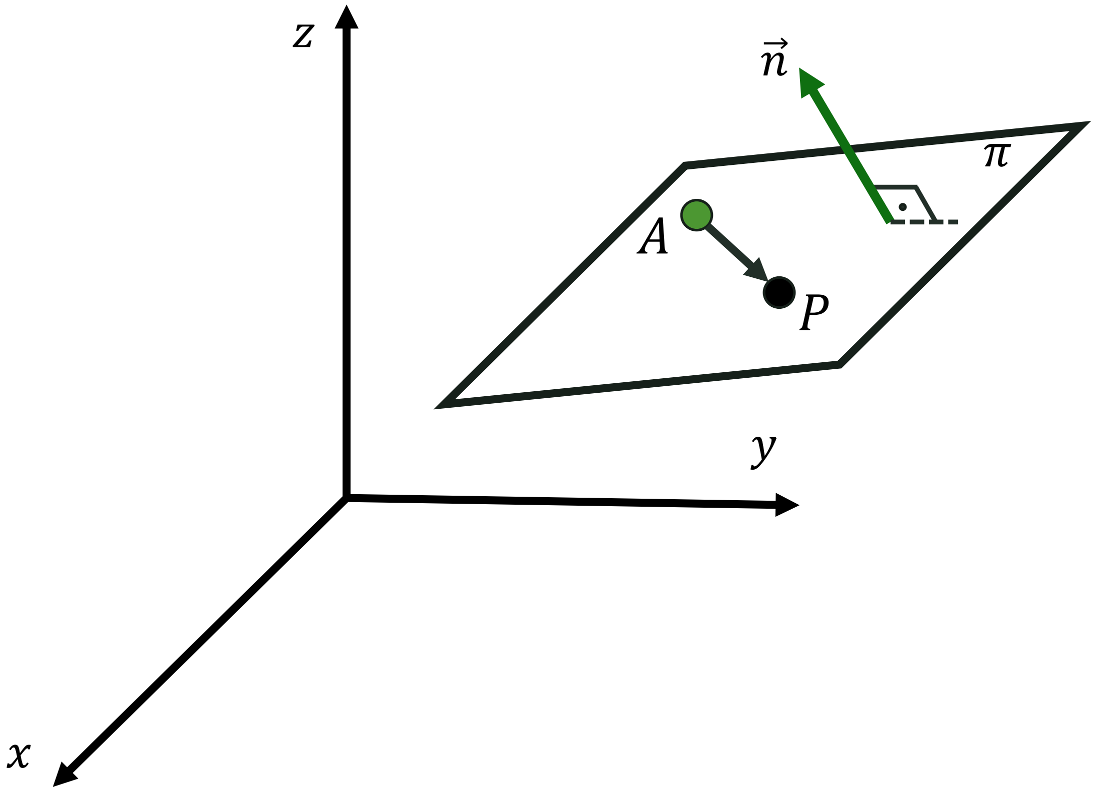
Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ pertencente a um plano π com vetor normal $\vec{n} = (a, b, c) \neq (0,0,0)$.

Todos pontos $P(x, y, z)$ do plano vão obedecer a relação

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

Como

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} = P - A &= (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \\ &= (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \end{aligned}$$



A equação geral do plano

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

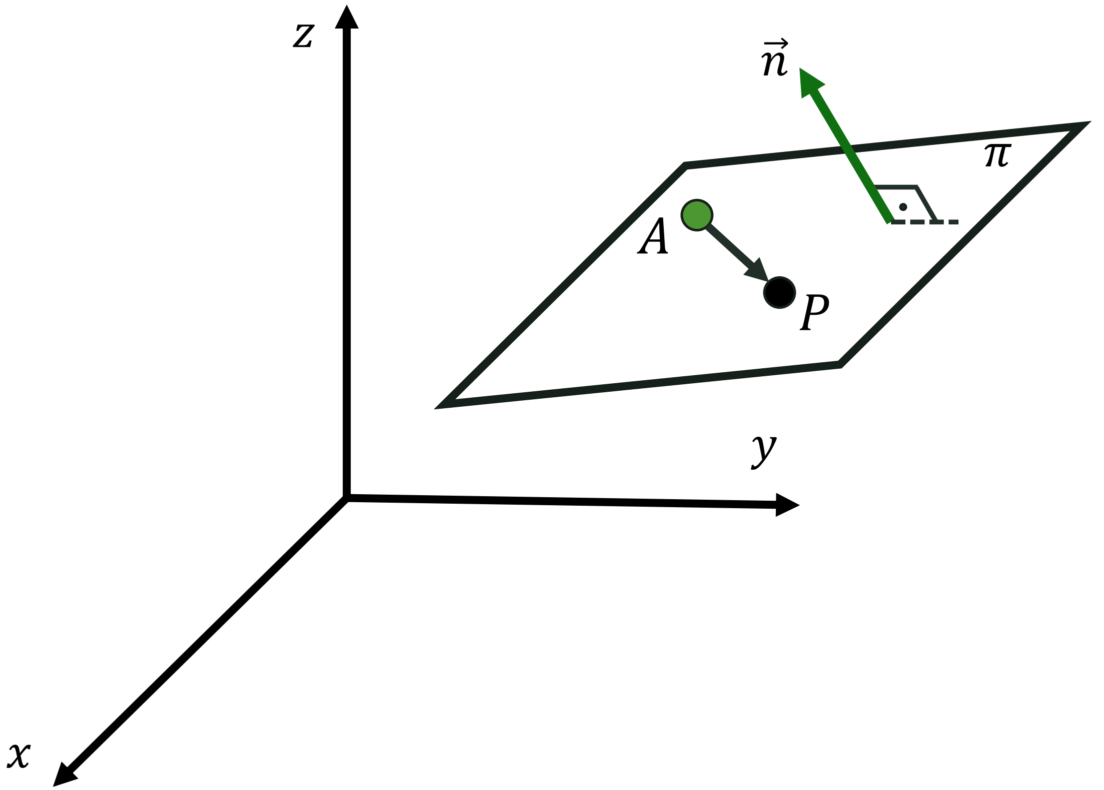
$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

Propondo $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$, obtém-se a **equação geral (ou cartesiana) do plano**, dada por

$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$$



A equação geral do plano

Equações geral do plano

$$ax + by + cz + d = 0$$

Observações:

a) Note que as constantes multiplicando x, y e z na equação geral do plano são as componentes do vetor normal;

b) A constante d é obtida substituindo o ponto conhecido do plano na equação preestabelecida com o vetor normal;

c) Se $\vec{n}$ é um vetor normal ao plano, o vetor $\alpha\vec{n}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, também será vetor normal ao plano.

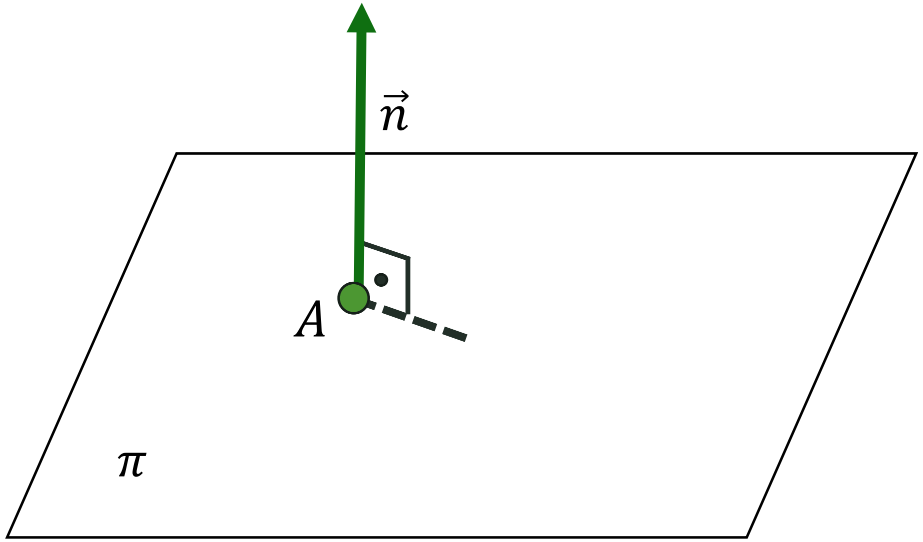
Determinação de um plano

(Nos próximos slides, mostrar-se-ão diferentes situações em que será possível obter um ponto e um vetor normal ao plano, o que garantirá a criação da equação geral do plano.)

Existe somente um plano que:

1. Passa por um ponto $\boldsymbol{A}$ e tem vetor normal $\vec{\boldsymbol{n}}$

- Neste caso, os dados foram fornecidos diretamente.

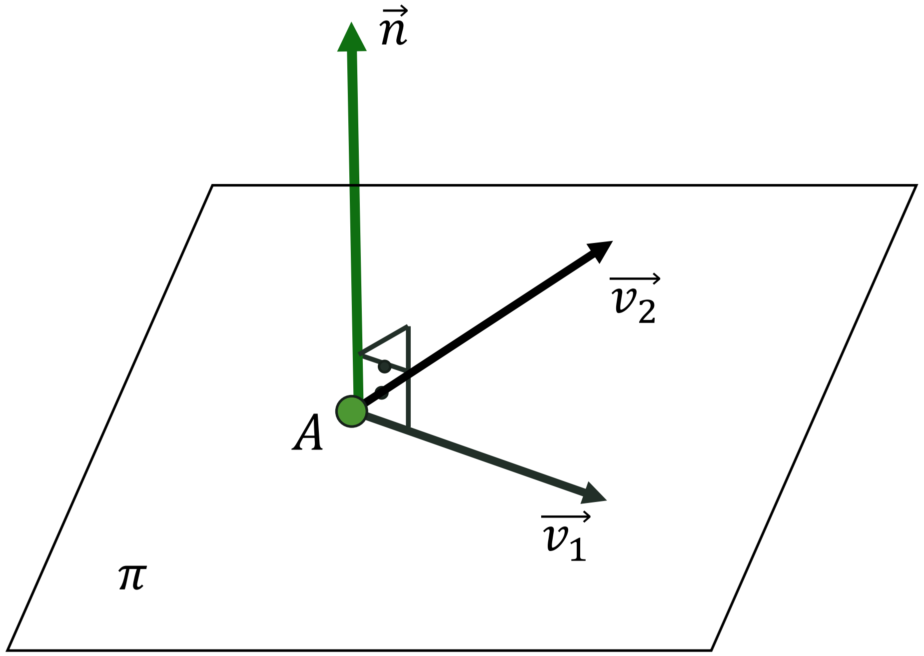


Determinação de um plano

2. Passa por um ponto A e é paralelo a dois vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ não colineares

- Ponto: ponto A.
- Vetor normal: pode ser obtido com

$$\vec{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$$

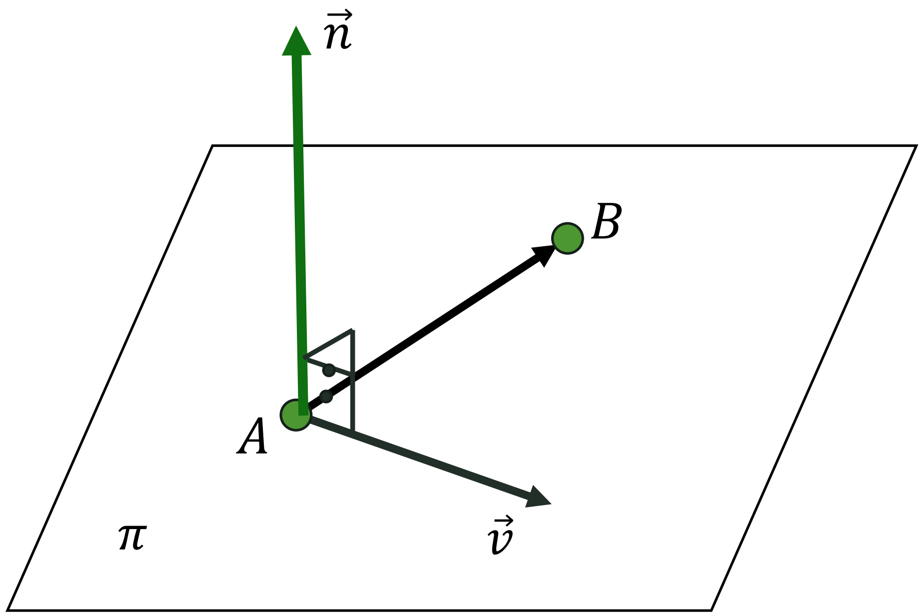


Determinação de um plano

3. Passa por dois pontos A e B e é paralelo a um vetor $\vec{v}$ (não colinear a $\overrightarrow{AB}$)

- Ponto: qualquer um dos dois pontos dados;
- Vetor normal: pode ser obtido com

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{AB}$$

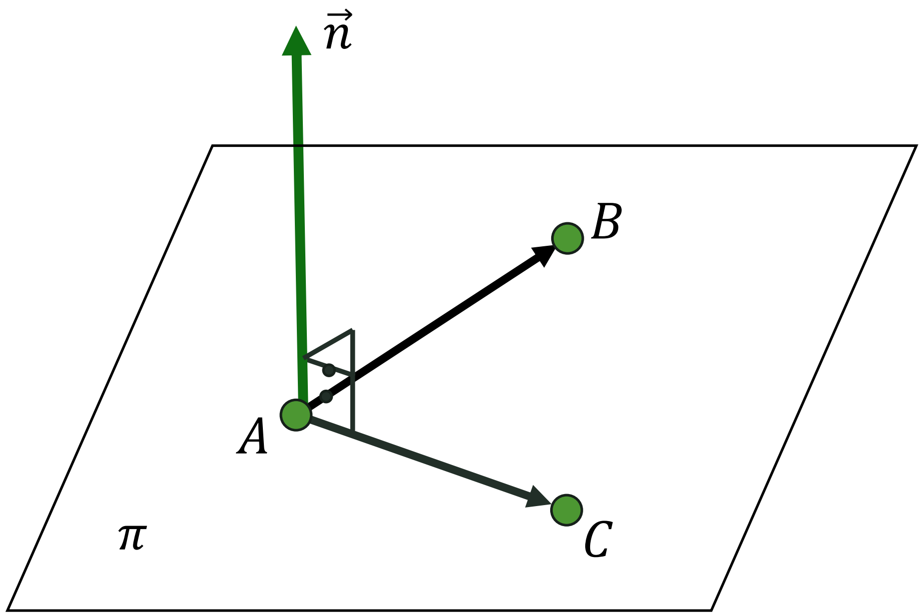


Determinação de um plano

4. **Passa por três pontos A, B e C que não estão em linha reta**

- Ponto: qualquer um dos três pontos dados;
- Vetor normal: pode ser obtido com

$$\vec{n} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}$$



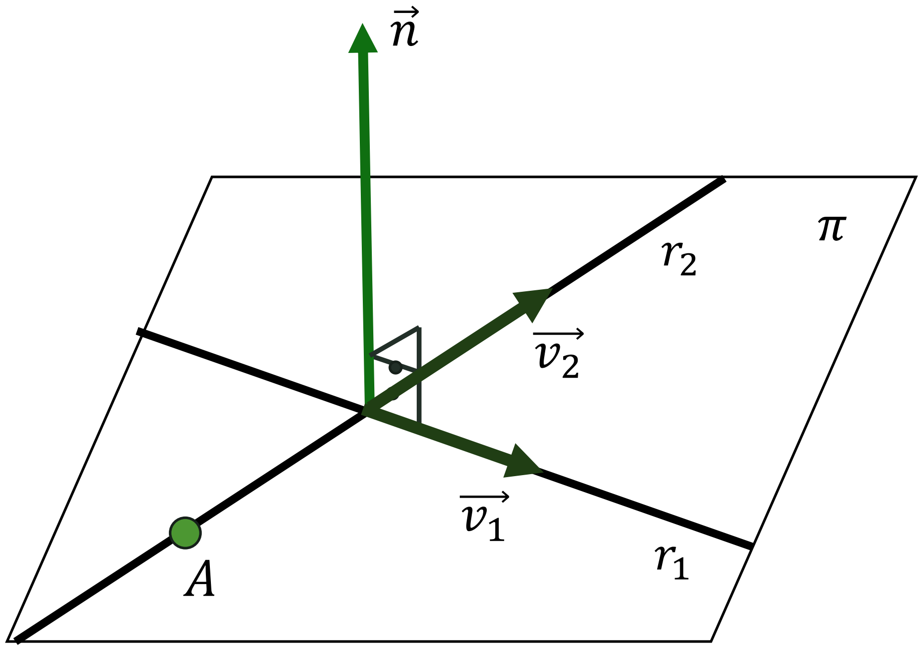
Determinação de um plano

5. Contém duas retas r_1 e r_2 concorrentes

- Ponto: pode escolher um ponto qualquer de uma das duas retas;
- Vetor normal:

$$\vec{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2},$$

em que $\overrightarrow{v_1}$ é vetor diretor de r_1 e $\overrightarrow{v_2}$ é vetor diretor de r_2



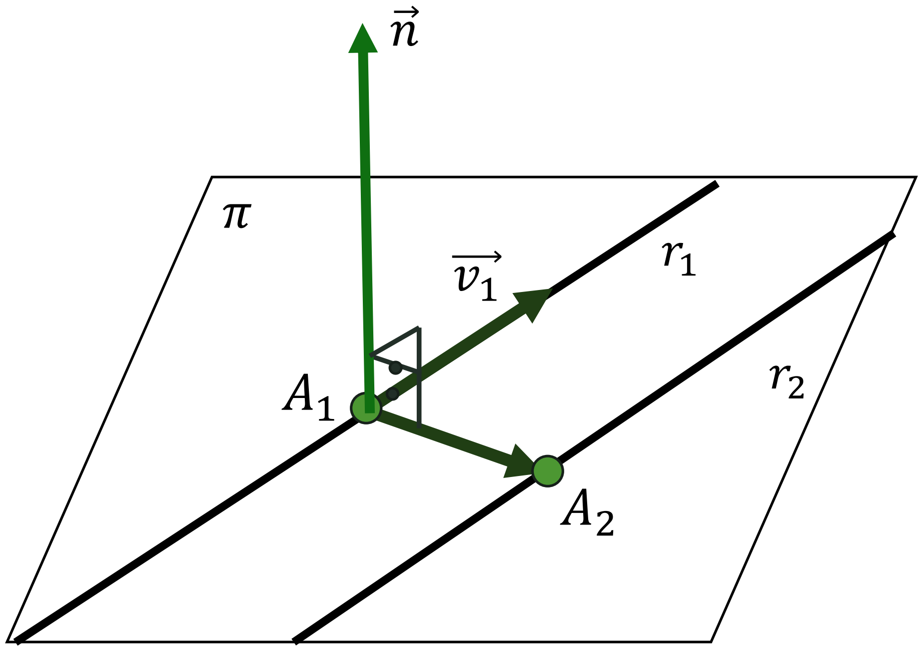
Determinação de um plano

6. Contém duas retas $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$ paralelas

- Ponto: pode escolher um ponto qualquer de uma das duas retas;
- Vetor normal:

$$\vec{n} = \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{v_1},$$

em que $\overrightarrow{v_1}$ é vetor diretor de r_1 (por extensão, de r_2 também), $A_1 \in r_1$ e $A_2 \in r_2$



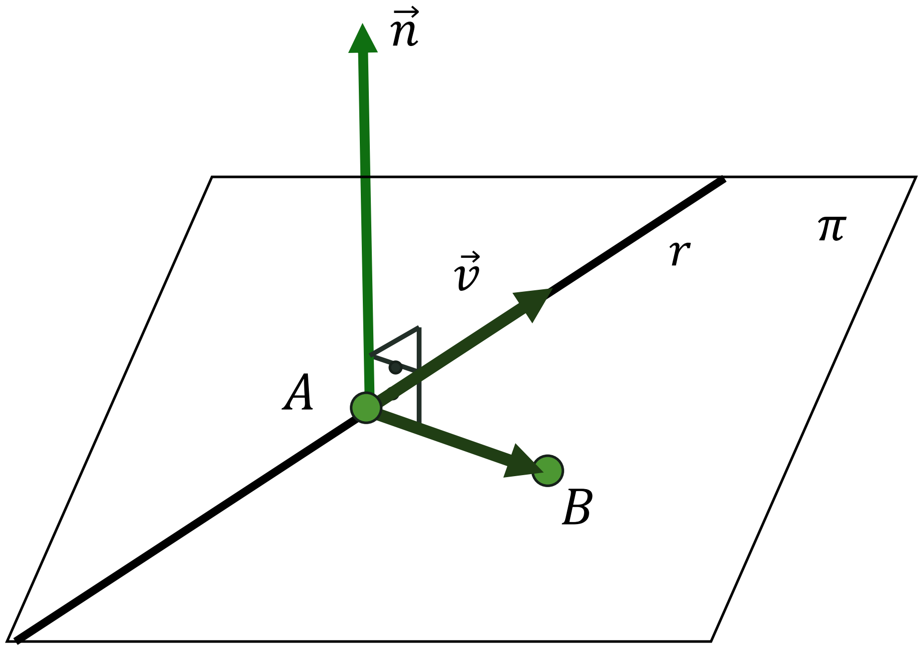
Determinação de um plano

7. Contém uma reta $\boldsymbol{r}$ e um ponto $\boldsymbol{B \notin r}$

- Ponto: pode escolher qualquer ponto da reta r ou o próprio ponto B;
- Vetor normal:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \vec{v},$$

em que $A \in r$ e $\vec{v}$ é vetor diretor de r



Alternativa para o cálculo da equação geral do plano

Observação:

Há uma alternativa para calcular a equação geral do plano a partir dos vetores base de um plano, sem ser necessário o cálculo explícito do vetor normal.

Sejam $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores base do plano e $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto do plano.

Note que, para qualquer ponto $P(x, y, z)$, o vetor $\overrightarrow{AP}$ também pertencerá ao plano. Assim, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{AP}$ serão coplanares.

Aplicar a condição de coplanaridade fornecerá a equação geral do plano, ou seja,

$$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AP}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Casos particulares de planos

Análogo ao que foi feito para a reta, apresentam-se casos particulares de planos. Assim como na sua contraparte, boa parte deles se deve a componentes nulas no vetor normal ao plano.

Considerando $\vec{n} = (a, b, c)$:

1. **Plano que passa pela origem**

Neste caso, $P(0,0,0)$ faz parte do plano. Substituindo na equação geral do plano,

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$$

Ou seja, sua equação é

$$\boldsymbol{ax + by + cz = 0}$$

Casos particulares de planos

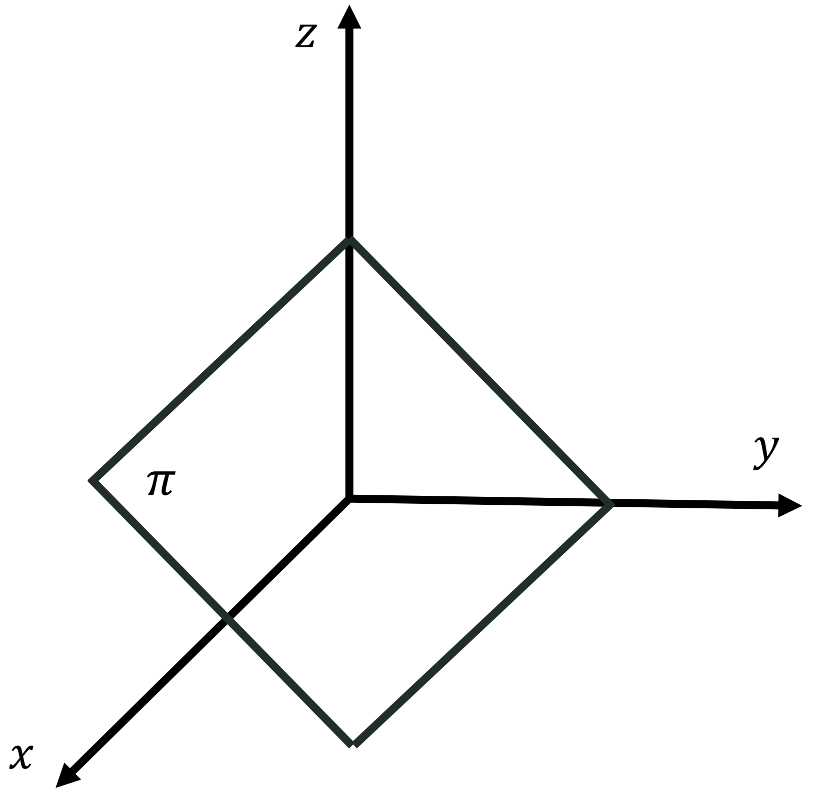
2. Planos paralelos aos eixos coordenados

Neste caso, uma das componentes do vetor normal é nula.

i. Se $a = 0,\ \vec{n} = (0, b, c) \perp Ox \Rightarrow \pi \mathbin{//} Ox$

A equação geral do plano fica

$$\boldsymbol{by + cz + d = 0}$$

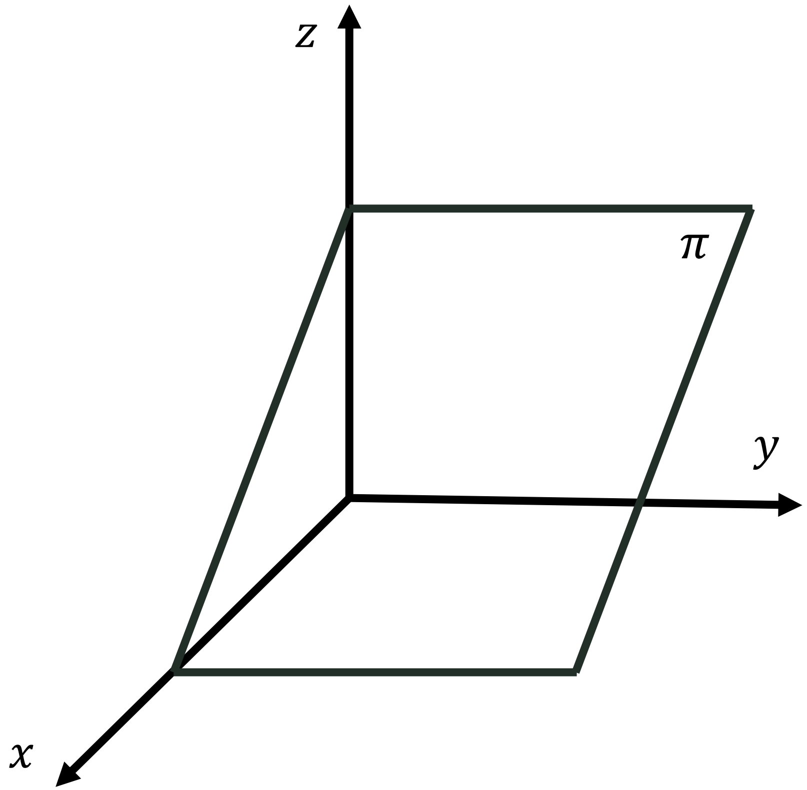


Casos particulares de planos

ii. Se $b = 0,\ \vec{n} = (a, 0, c) \perp Oy \Rightarrow \pi\ //\ Oy$

A equação geral do plano fica

$$\boldsymbol{ax + cz + d = 0}$$

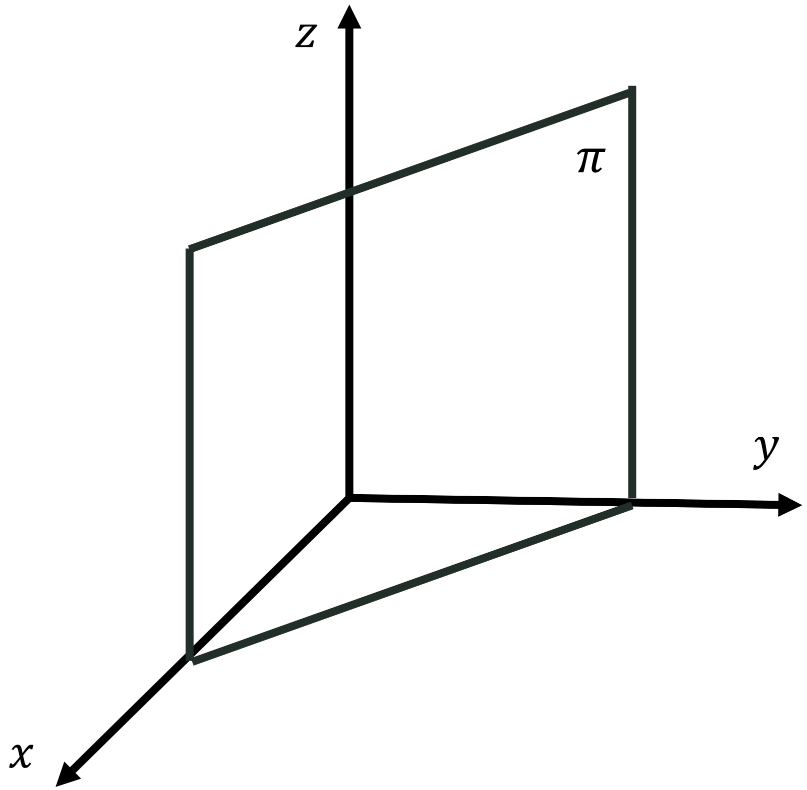


Casos particulares de planos

ii. Se $c = 0,\ \vec{n} = (a, b, 0) \perp Oz \Rightarrow \pi \,//\, Oz$

A equação geral do plano fica

$$\boldsymbol{ax + by + d = 0}$$



Casos particulares de planos

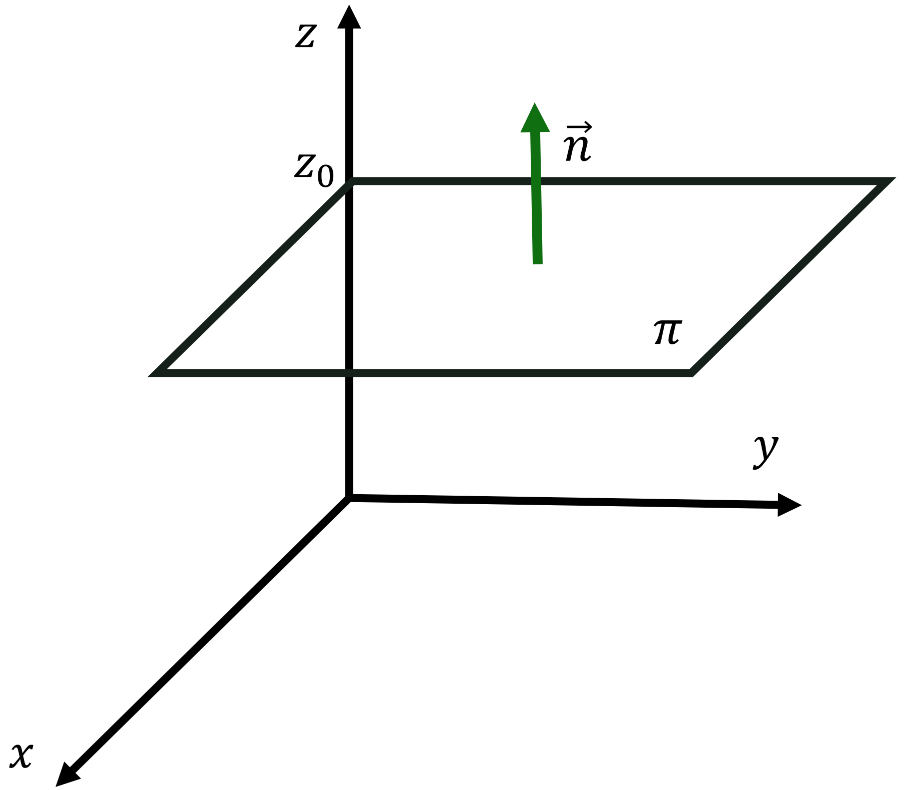
3. Planos paralelos aos planos coordenados

Neste caso, duas das componentes do vetor normal são nulas.

i. Se $a = b = 0,\ \vec{n} = (0,0,c) = c\vec{k} \Rightarrow \pi \,//\, x0y$

A equação geral do plano fica

$$\boldsymbol{cz + d = 0} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{z = z_0}$$

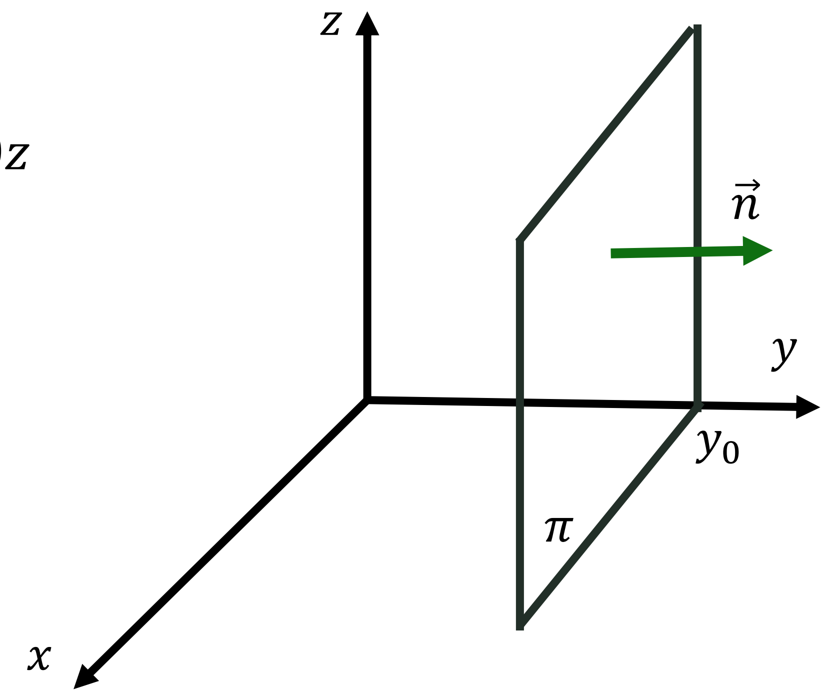


Casos particulares de planos

ii. Se $a = c = 0,\ \vec{n} = (0, b, 0) = b\vec{j} \Rightarrow \pi\ //\ x0z$

A equação geral do plano fica

$$\boldsymbol{by + d = 0} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{y = y_0}$$

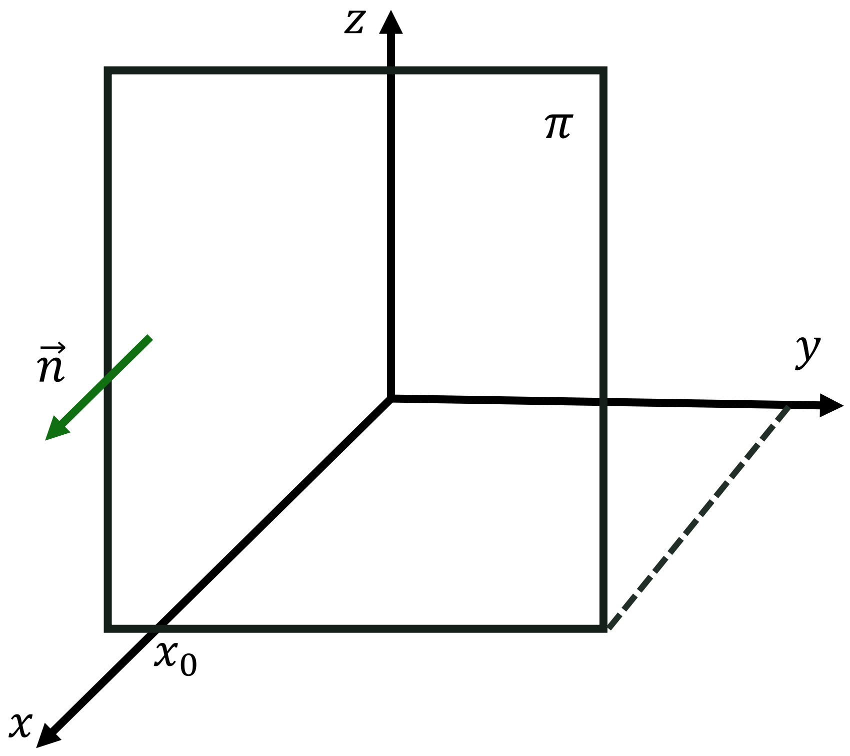


Casos particulares de planos

ii. Se $b = c = 0,\ \vec{n} = (a, 0,0) = a\vec{i} \Rightarrow \pi \ // \ y0z$

A equação geral do plano fica

$$\boldsymbol{ax + d = 0} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{x = x_0}$$



Casos particulares de planos

Os planos coordenados são planos particulares deste caso e suas equações são:

- $x = 0$ (plano $y0z$)
- $y = 0$ (plano $x0z$)
- $z = 0$ (plano $x0y$)

Equações paramétricas do plano

Sejam $A(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, respectivamente, um ponto e dois vetores base de plano um plano π.

Um ponto $P(x, y, z)$ pertence a este plano se, e somente se, existem números reais h e t tais que

$$\overrightarrow{AP} = h\vec{u} + t\vec{v}$$

Em coordenadas,

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2),$$

o que fornece

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + ha_1 + ta_2} \\ \boldsymbol{y = y_0 + hb_1 + tb_2} \\ \boldsymbol{z = z_0 + hc_1 + tc_2} \end{cases}$$

Estas são as **equações paramétricas** do plano.