Álgebra Linear
(ALI0001 – CCI-192-02U)

Exemplos clássicos de espaços vetoriais

Subespaços Vetoriais

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula do dia 29 de março de 2023.

Revisão: Definição de Espaços Vetoriais

Definição: Seja V um conjunto não vazio, de quaisquer elementos, no qual estão definidas duas operações, a **adição (+)** e a **multiplicação por escalar (.)**.

Dizemos que a estrutura $(V, +, .)$ é um **espaço vetorial** e que os elementos de V são vetores se, e somente se:

$i)$ V é um conjunto **fechado** para as operações de adição **e** de multiplicação por escalar.

$ii)$ Os seguintes **axiomas** são satisfeitos para quaisquer elementos $u, v, w \in V$ e quaisquer escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$A_1)$ A adição é comutativa: $u + v = v + u$.

$A_2)$ A adição é associativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$.

$A_3)$ A adição admite elemento neutro (nulo): Existe $\overrightarrow{0_V} \in V$ tal que $v + \overrightarrow{0_V} = v = \overrightarrow{0_V} + v$ para todo $v \in V$.

$A_4)$ A adição admite oposto: Para cada $v \in V$, existe $-v \in V$ tal que $-v + v = \overrightarrow{0_V}$.

$M_5)$ A multiplicação por escalar é associativa: $(\alpha\beta)v = \alpha.(\beta v)$.

$M_6)$ Distributividade sobre a adição de escalares: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.

$M_7)$ Distributividade sobre a adição de vetores: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

$M_8)$ A multiplicação por escalar admite elemento neutro: $1.v = v$ para todo $v \in V$.

Revisão: Exemplos Clássicos de Espaços Vetoriais

Exemplo 1) Para cada número natural n, considere o conjunto de todas as $n-uplas$ coordenadas de números reais, definido por

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \ / \ x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Em $\mathbb{R}^n$ definimos as operações usuais de adição e de multiplicação por escalar como

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n),$$

e

$$k.(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (kx_1, kx_2, kx_3, \dots, kx_n) \text{ para qualquer } k \in \mathbb{R}.$$

É possível verificar (sem dificuldades) que $\mathbb{R}^n$ é fechado para as operações usuais de adição e multiplicação por escalar e que as operações satisfazem os axiomas (de A_1 a M_8).

Portanto, $\mathbb{R}^n$, com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar, é um espaço vetorial, denominado espaço vetorial euclidiano $n - dimensional$.

Exemplos Clássicos de Espaços Vetoriais

Exemplo 2) Fixados os naturais m e n, definimos o conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$, denotado por

$$M(m,n) = \left\{ [a_{ij}]_{m\times n} \ / \ a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Em $M(m,n)$ definimos as operações usuais de adição de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar escalar como

$$[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n},$$
$$k[a_{ij}]_{m\times n} = [ka_{ij}]_{m\times n}.$$

É possível verificar (sem dificuldades) que $M(m,n)$ é fechado para as operações usuais de adição e multiplicação por escalar e que as operações satisfazem todos os axiomas (de A_1 a M_8). Inclusive, a maior parte dos axiomas foi demonstradas na aula de revisão de Matrizes.

Portanto, $M(m,n)$ com as operações usuais é um espaço vetorial e os elementos pertencentes a $M(m,n)$ (que são matrizes) podem ser denominados por vetores.

No caso particular em que $m = n$, o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem n pode ser denotado por

$$M_n = M(n,n).$$

Exemplos Clássicos de Espaços Vetoriais

Exemplo 3) Fixado o natural n, definimos o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a n, denotado por

$$P_n = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \ / \ a_i \in \mathbb{R} \ \}.$$

Em P_n definimos as operações usuais de adição de polinômios e de multiplicação de um polinômio por um escalar como

$$(a_0+a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) =$$
$$(a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \cdots + (a_n+b_n) + x^n$$

e

$$k(a_0+a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = (ka_0) + (ka_1)x + (ka_2)x^2 + \cdots + (ka_n)x^n.$$

É possível verificar (sem dificuldades) que P_n é fechado para as operações usuais de adição e multiplicação por escalar e que as operações satisfazem todos os axiomas (de A_1 a M_8).

Portanto, P_n com as operações usuais é um espaço vetorial e os elementos pertencentes a P_n (que são funções polinomiais na variável x) podem ser denominados por vetores.

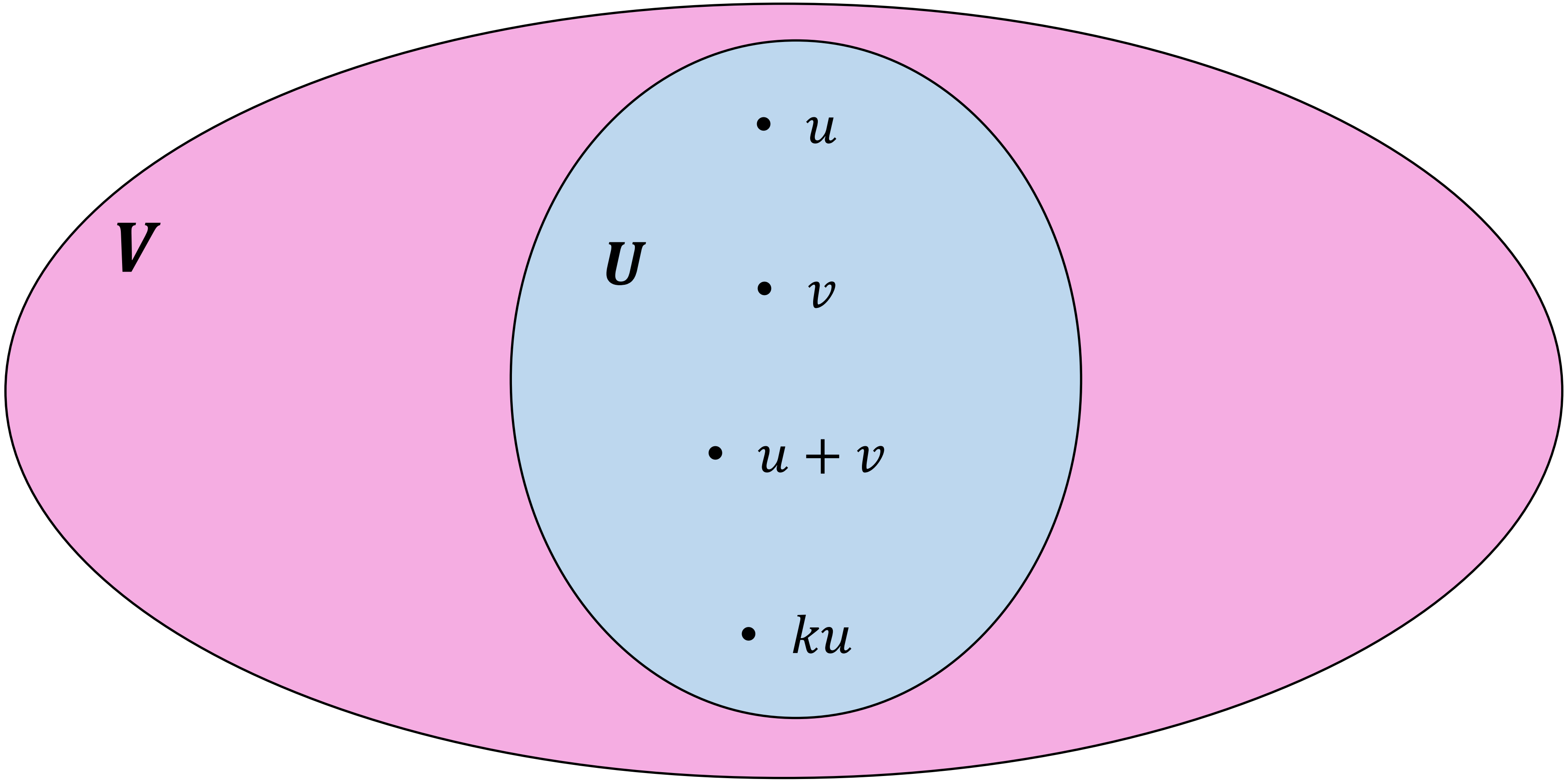
No caso particular em que $n = 3$, podemos denotar o espaço vetorial P_3 por

$$P_3 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \ / \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \ \}.$$

Introdução – Subespaços Vetoriais

Como a definição de espaço vetorial exige a verificação de 10 condições (fechamento das operações + oito axiomas), vamos estudar um novo conceito, que permitirá simplificar um pouco tais condições.

Seja V um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por escalar e considere U um subconjunto não vazio de V tal que:



Subespaços Vetoriais

Definição:

Seja V um espaço vetorial munido de operações de adição e multiplicação por escalar (usuais ou não usuais). Considere $U \subseteq V$ um subconjunto não vazio de V.

Dizemos que U é um subespaço vetorial de V se, e somente se, U for fechado para a adição e para a multiplicação por escalar, ou seja, forem válidas as seguintes condições:

$$i)\ \forall\, u,\ v\ \in U \quad \Rightarrow \quad u + v \in U.$$
$$ii)\ \forall\, u \in U,\ \forall\, k \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad ku \in U.$$

Observações:

- As condições da definição de subespaço vetorial garantem que, quando operamos a adição e a multiplicação por escalar no subconjunto fechado U, jamais obteremos como resultado um elemento fora de U.
- Como $U \subseteq V$ os oito axiomas das operações são necessariamente válidos em U, pois do contrário, não seriam válidos em todo o V, contradizendo o fato de V ser um espaço vetorial.
- Isso significa que o subespaço U também é um espaço vetorial.

Exemplos - enunciados

Exemplo 1) Seja V, munido de operações usuais, um espaço vetorial. Verifique, em cada caso, se U é um subespaço vetorial de V:

a) $V = \mathbb{R}^4; \quad U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; 3x - 5y + 11z - t = 0\}.$

b) $V = M(2,2); \quad U = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); b = 3c - 2d \ \text{ e } \ a = -5d\right\}.$

c) $V = M(n, n); \quad U = \{A \in M(n, n); \ A^T - 3A = 5I\}.$

d) $V = M(n, n); \quad U = \{A \in M(n, n); A \cdot A^T = 0\}.$

e) $V = P_3; \quad U = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3; \quad c = -a + 9b - 7d\}.$

f) $V = P_3; \quad U = \{p \in P_3; \ p(1) - p(-2) = p(3)\}.$

g) $V = \mathbb{R}^2; \quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \cdot y \geq 0\}.$

Solução: os itens (a), (b), (c), (e) foram resolvidos durante a aula. Os demais foram deixados como exercício.

Exemplos - enunciados

Exemplo 2) Considere o espaço vetorial

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x > 0 \ \text{ e } \ y > 0\}.$$

munido das seguintes operações não usuais de adição e de multiplicação por escalar:

$$(x, y) + (a, b) = (x.a, y.b)$$
$$k(x, y) = (x^k, y^k).$$

Verifique, em cada caso, se U é um subespaço vetorial de V:

a) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \cdot y \geq 0\}$.

b) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = |2x|\}$.

c) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \cdot y = 1\}$.

d) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x^2\}$.

e) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = \ln(x)\}$.

Solução: Todos os itens foram deixados como exercício. No entanto, vários desses itens são resolvidos no Exemplo 8, situados nas últimas quatro paginas desse material.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 3) Seja $V = M(n,n)$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem $n \times n$, com as operações usuais. Verifique se $U = \{A \in M(n,n) \ / \ AA^T = -2A\}$ é um subespaço vetorial de V.

Solução: Sejam $A, B \in U$. Logo, pela condição algébrica do conjunto, temos que

$$AA^T = -2A \quad \text{e} \quad BB^T = -2B.$$

Assim:

$i)$ $A + B$ é tal que

$$\begin{aligned}(A+B).(A+B)^T = (A+B)(A^T+B^T) &= AA^T + BA^T + AB^T + BB^T \\ &= -2A + BA^T + AB^T - 2B \\ &= -2(A+B) + BA^T + AB^T \neq -2(A+B).\end{aligned}$$

Logo $A + B \notin U$, pois não satisfaz a condição algébrica do conjunto.

Portanto, U não é subespaço vetorial de $M(n,n)$. Note que a matriz nula pertence a U.

Ainda que não seja necessário verificar o fechamento da multiplicação por escalar, é fácil verificar que $kA \notin U$, pois

$$(kA)(kA)^T = kA.kA^T = k.k(A.A^T) = k^2(-2A) = -2k^2A \neq -2(kA).$$

Exemplos resolvidos

Exemplo 4) Verifique se $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2) \; / \; c = 3a - 5d \text{ e } b = -4a \right\}$ é um subespaço vetorial de $V = M(2,2)$, com as operações usuais.

Solução: Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$ e $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in U$.

Logo, pela condição algébrica do conjunto:

$$c = 3a - 5d, \quad b = -4a \qquad \text{e} \qquad z = 3x - 5w, \qquad y = -4x.$$

Assim, temos que:

$i)\ A + B = \begin{bmatrix} a + x & b + y \\ c + z & d + w \end{bmatrix}$ é tal que

$$c + z = (3a - 5d) + (3x - 5w) = 3(a + x) - 5(d + w)$$

$$b + y = -4a - 4x = -4(a + x).$$

Com isso, $A + B \in U$, pois satisfaz a condição algébrica do conjunto.

$ii)\ kA = k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$, é tal que

$$kc = k(3a - 5d) = 3(ka) - 5(kd) \qquad \text{e} \qquad kb = k(-4a) = -4(ka).$$

Com isso, $kA \in U$, pois satisfaz a condição algébrica do conjunto.

Portanto, U é um subespaço vetorial de $\mathrm{V} = M(2,2)$.

Exemplos resolvidos

Exemplo 5) Verifique se $U = \{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3 \,/\, 8a - 3b + c - 7d = 0 \}$ é um subespaço vetorial de $V = P_3$, com as operações usuais.

Solução: Sejam $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in U$ e $q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \in U$.

Logo, pela condição algébrica do conjunto, obtemos

$$8a - 3b + c - 7d = 0 \quad \text{e} \quad 8\alpha - 3\beta + \gamma - 7\delta = 0.$$

Assim, temos que:

$i)$ $p(x) + q(x) = (a+\alpha) + (b+\beta)x + (c+\gamma)x^2 + (d+\delta)x^3$ é tal que

$$\begin{aligned} 8(a+\alpha) - 3(b+\beta) + (c+\gamma) - 7(d+\delta) &= 8a + 8\alpha - 3b - 3\beta + c + \gamma - 7d - 7\delta \\ &= (8a - 3b + c - 7d) + (8\alpha - 3\beta + \gamma - 7\delta) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

E então $p(x) + q(x) \in U$, pois satisfaz a condição do conjunto.

$ii)$ $kp(x) = ka + (kb)x + (kc)x^2 + (kd)x^3$ é tal que

$$8(ka) - 3(kb) + (kc) - 7(kd) = k(8a - 3b + c - 7d) = k.0 = 0.$$

Assim, $kp(x) \in U$, pois satisfaz a condição algébrica do conjunto.

Portanto, U é um subespaço vetorial de $V = P_3$.

Exemplos resolvidos

Exemplo 6) Verifique se $U = \{\, p(x) \in P_n \,/\, p(-1) + 6p(1) = p(2)\}$ é um subespaço vetorial de $V = P_n$, com as operações usuais.

Solução: Sejam $p(x),\ q(x) \in U$. Logo, pela condição algébrica do conjunto:

$$p(-1) + 6p(1) = p(2) \qquad \text{e} \qquad q(-1) + 6q(1) = q(2).$$

Assim, temos que:

$i)$ $p(x) + q(x)$ é tal que

$$\begin{aligned}(p+q)(-1) + 6(p+q)(1) &= p(-1) + q(-1) + 6[p(1) + q(1)] \\ &= p(-1) + q(-1) + 6p(1) + 6q(1) \\ &= [p(-1) + 6p(1)] + [q(-1) + 6q(1)] \\ &= p(2) + q(2) = (p+q)(2).\end{aligned}$$

Portanto, $p(x) + q(x) \in U$, pois cumpre a condição algébrica do conjunto.

$ii)$ $kp(x)$ é tal que

$$(kp)(-1) + 2(kp)(1) = kp(-1) + 2kp(1) = k[p(-1) + 2p(1)] = kp(4) = (kp)(4).$$

Portanto, $kp(x) \in U$, pois cumpre a condição algébrica do conjunto.

Conclusão: U é um subespaço vetorial de $\mathrm{V} = P_n$.

Exemplos resolvidos

Exemplo 7) Verifique se $U = \{ A \in M(n,n) \ / \ 3A - 7A^T = 2I \}$ é ou não um subespaço vetorial de $V = M(n,n)$, com as operações usuais.

Solução: Sejam $A, B \in U$. Logo, pela condição algébrica do conjunto, obtemos

$$3A - 7A^T = 2I \qquad \text{e} \qquad 3B - 7B^T = 2I.$$

Assim, temos que:

$i)$ $A + B$ é tal que

$$\begin{aligned} 3(A+B) - 7(A+B)^T &= 3A + 3B - 7(A^T + B^T) \\ &= 3A + 3B - 7A^T - 7B^T \\ &= (3A - 7A^T) + (3B - 7B^T) \\ &= 2I + 2I \\ &= 4I \neq 2I. \end{aligned}$$

Com isso, obtemos que $A + B \notin U$, pois não cumpre a condição algébrica do conjunto.

Assim, U não é fechado para a adição.

Portanto, U não é um subespaço vetorial de $\mathrm{V} = M(n,n)$.

Note que a matriz nula não pertence a U, pois $3.O - 7.O^T = O \neq 2I$.

Exemplo resolvido - com operações não usuais

Exemplo 8) Considere o espaço vetorial $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ x > 0 \text{ e } y > 0\}$ com as operações não usuais de adição e multiplicação por escalar dadas por

$$(x, y) + (a, b) = (x.a, y.b) \quad \text{e} \quad k(x, y) = (x^k, y^k).$$

Verifique se os conjuntos abaixo são subespaços vetoriais de V.

a) $U = \{(x, y) \in V; y = |2x|\}$.

Solução: Sejam $u = (x, y), v = (a, b) \in U$. Logo, pela condição algébrica do conjunto, temos que

$$y = |2x| \quad \text{e} \quad b = |2a|.$$

Assim, temos que:

$i)\ u + v = (xa, yb)$ é tal que

$$yb = |2x|.|2a| = 2|x|.2|a| = 4|x||a| = 4|xa| \neq |2xa|.$$

Com isso, obtemos que $u + v \notin U$, pois não cumpre a condição algébrica do conjunto.

Assim, U não é fechado para a adição.

Portanto, U não é um subespaço vetorial de V.

Exemplo - com operações não usuais

b) $U = \{(x, y) \in V; y = |x|\}$.

Solução: Sejam $u = (x, y), v = (a, b) \in U$. Logo, pela condição algébrica do conjunto, sabemos que

$$y = |x| \quad \text{e} \quad b = |a|.$$

Assim, temos que:

$i)\ u + v = (xa, yb)$ é tal que

$$yb = |x|.|a| = |xa|.$$

Com isso, obtemos que $u + v \in U$, pois também cumpre a condição algébrica do conjunto.

Assim, U é fechado para a adição. Além disso,

$ii)\ ku = (x^k, y^k)$ é tal que

$$y^k = |x|^k = \left|x^k\right|.$$

Com isso, obtemos que, para todo $k \in \mathbb{R}$, $ku \in U$, pois também cumpre a condição algébrica do conjunto.

Assim, U é fechado para a multiplicação por escalar.

Portanto, U é um subespaço vetorial de V.

Exemplo - com operações não usuais

c) $U = \{(x,y) \in V; y = \ln(x)\}$.

Solução: Sejam $u = (x,y) \in U, v = (a,b) \in U$. Logo, pela condição algébrica do conjunto:

$$y = \ln(x) \quad \text{e} \quad b = \ln(a).$$

Assim, $u + v = (xa, yb)$ é tal que

$$yb = \ln(x)\,.\ln(a) \neq ln(x) + ln(a) = \ln(xa).$$

Com isso, obtemos que $u + v \notin U$, pois não cumpre a condição algébrica do conjunto.

Assim, U não é fechado para a adição.

Portanto, U não é um subespaço vetorial de V.

d) $U = \{(x,y) \in V; xy = 1\}$

Solução: Sejam $u = (x,y) \in U, v = (a,b) \in U$. Logo, pela condição algébrica do conjunto:

$$xy = 1 \quad \text{e} \quad a.b = 1.$$

Assim, temos que $u + v = (xa, yb)$ é tal que

$$(xa).(yb) = (xy).(ab) = 1.1 = 1.$$

Logo, $u + v \in U$, pois cumpre sua condição algébrica. Assim, U é fechado para a adição.

Além disso, $ku = (x^k, y^k)$ é tal que

$$x^k.y^k = (x.y)^k = 1^k = 1.$$

Com isso, para todo $k \in \mathbb{R}$, $ku \in U$, pois cumpre a condição algébrica do conjunto. Assim, U é fechado para a multiplicação por escalar. Portanto, U é um subespaço vetorial de V.

Exemplo - com operações não usuais

e) $U = \{(x, y) \in V; y = x^2\}$.

Solução: Sejam $u = (x, y) \in U, v = (a, b) \in U$. Logo, pela condição algébrica do conjunto:

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad b = a^2$$

Assim, $u + v = (xa, yb)$ é tal que

$$yb = x^2 \cdot a^2 = (x \cdot a)^2.$$

Com isso, obtemos que $u + v \in U$, pois cumpre a condição algébrica do conjunto.

Além disso, $ku = (x^k, y^k)$ é tal que

$$y^k = (x^2)^k = x^{2k} = (x^2)^k.$$

Com isso, para todo $k \in \mathbb{R}$, $ku \in U$, pois cumpre a condição algébrica do conjunto.

Portanto, U é um subespaço vetorial de V.

f) $U = \{(x, y) \in V; x \cdot y > 0\}$.

Solução: Sejam $u = (x, y) \in U, v = (a, b) \in U$. Logo, pela condição algébrica do conjunto:

$$x \cdot y > 0 \quad \text{e} \quad a \cdot b > 0.$$

Assim, temos que $u + v = (xa, yb)$ é tal que

$$(xa).(yb) = (xy).(ab) > 0 \cdot 0 = 0.$$

Logo, $u + v \in U$, pois cumpre a condição algébrica do conjunto.

Além disso, $ku = (x^k, y^k)$ é tal que $x^k.y^k = (x.y)^k > 0^k = 0$. Logo, para todo $k \in \mathbb{R}$, $ku \in U$, pois cumpre a condição algébrica do conjunto. Portanto, U é um subespaço vetorial de V.