Álgebra Linear (ALI0001 – CCI-192-02U)

Transformação Linear induzida por uma matriz
Matriz de um Transformação Linear

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula do dia 22 de maio de 2023.

UDESC

Transformação Linear associada a uma matriz

Vimos que uma transformação linear $T: U \to V$ é uma função vetorial que preserva a soma e a multiplicação por escalar, ou seja, tal que

$$T(u+v) = T(u) + T(v) \qquad\qquad T(ku) = kT(u)$$

sejam válidas para todos $u, v \in U$ e para todo $k \in \mathbb{R}$.

Dentre todas as funções vetoriais existentes, o interesse da Álgebra Linear pelas transformações lineares deve-se à associação que pode ser estabelecida entre tais funções e matrizes, conforme veremos a seguir:

Teorema: Seja $A_{m \times n}$ uma matriz de m linhas e n colunas.

Considere U e V espaços vetoriais tais que $\dim(U) = n$ e $\dim(V) = m$.

Então $T: U \to V$ definida por

$$T(u) = A.[u]$$

em que $[u]$ representa a matriz de coordenadas, em relação à base canônica, do elemento $u \in U$, é uma transformação linear.

Justificativa: A linearidade de T é uma consequência das propriedades de multiplicação entre matrizes.

Vamos verificar que T preserva a soma e a multiplicação por escalar:

Transformação Linear associada a uma matriz

Sejam $u, v \in U$ e $k \in \mathbb{R}$. Temos que

$$T(u+v) = A \cdot [u+v] = A \cdot ([u]+[v]) = A \cdot [u] + A \cdot [v] = T(u) + T(v)$$

e

$$T(ku) = A \cdot [ku] = A \cdot (k \cdot [u]) = k \cdot (A \cdot [u]) = k \cdot T(u).$$

As igualdades acima garantem que T é uma transformação linear.

Observações:

- Lembre-se que a matriz de coordenadas de $u \in U$, em relação a uma base de U, é sempre uma matriz coluna (cujos elementos consistem nos escalares da combinação linear de u em termos da base).
- Como $\dim(U) = n$, o elemento $u \in U$ possui n coordenadas e, com isso, a matriz de coordenadas $[u]$ possui ordem $n \times 1$. Denotamos tal fato por $[u]_{n\times 1}$.
- Assim, a multiplicação matricial $A \cdot [u] = A_{m\times n} \cdot [u]_{n\times 1}$ está sempre bem definida, pois o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda matriz.
- Além disso, o resultado da multiplicação $A_{m\times n} \cdot [u]_{n\times 1}$ é uma matriz de ordem $m \times 1$, ou seja, também é uma matriz coluna, com m coordenadas.
- Com isso, o resultado da multiplicação $A_{m\times n} \cdot [u]_{n\times 1}$ pode ser visto como a matriz de coordenadas de $T(u)$ em relação à base canônica de V, uma vez que $\dim(V) = m$.

Exemplo resolvido

Exemplo 1) Considere $A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$.

Determine a lei da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(u) = A \cdot [u]$, onde $[u]$ é a matriz de coordenadas de $u = (x, y)$, em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Solução: Em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$, temos que

$$u = (x, y) = x(1,0) + y(0,1).$$

Portanto, a matriz de coordenadas de u (em relação à base canônica) é dada por $[u] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Com isso:

$$T(x, y) = T(u) = A \cdot [u] = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x - 5y \\ -2x + y \\ 7x - 3y \end{bmatrix}.$$

Interpretando a matriz resultante como a matriz de coordenadas de $T(u)$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$, obtemos que

$$\begin{aligned} T(x, y) &= (4x - 5y)(1,0,0) + (-2x + y)(0,1,0) + (7x - 3y)(0,0,1) \\ &= (4x - 5y, -2x + y, 7x - 3y). \end{aligned}$$

Exemplo resolvido

A transformação linear obtida pela multiplicação $T(u) = A \cdot [u]$ é chamada de transformação induzida pela matriz A.

Exemplo 2) Determine a lei de uma transformação linear induzida por

$$A_{4\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 7 & -5 & -1 \\ 9 & 0 & -6 \\ -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução: A matriz dada tem ordem 4×3. Por isso, o domínio U da transformação induzida deve ter dimensão igual ao número de colunas de A (dado por $n = 3$) e o contradomínio V deve ter dimensão igual ao número de linhas de A (dado por $m = 4$).

Assim, podemos tomar $U = \mathbb{R}^3$ e $V = \mathbb{R}^4$ e obter uma transformação $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.

Tomando as bases canônica de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^4$, para $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ temos que

$$u = (x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

e assim, a matriz de coordenadas de u (em relação à base canônica) é dada por

$$[u] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Exemplo resolvido

Com isso, a transformação induzida é dada por

$$T(x,y,z) = T(u) = A \cdot [u] = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 7 & -5 & -1 \\ 9 & 0 & -6 \\ -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x-2y-3z \\ 7x-5y-z \\ 9x-6z \\ -4x+3y \end{bmatrix}.$$

Interpretando a matriz resultante como a matriz de coordenadas de $T(u)$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$, obtemos que $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ é dada por

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= (5x-2y-3z)(1,0,0,0) + (7x-5y-z)(0,1,0,0) \\ &\quad + (9x-6z)(0,0,1,0) + (-4x+3y)(0,0,0,1) \\ &= (5x-2y-3z, 7x-5y-z, 9x-6z, -4x+3y). \end{aligned}$$

Observação:

- É muito simples obter a lei da transformação a partir do resultado da multiplicação matricial. Basta interpretar cada linha da matriz resultante como uma das coordenadas da transformação. Nos próximos exemplos faremos isso diretamente.
- Além disso, a multiplicação matricial é muito simples de ser calculada, basta interpretar a primeira coluna como os respectivos coeficientes de x, a segunda coluna como os coeficientes de y e assim sucessivamente. Passaremos a fazer isso diretamente.

Exercícios

Exercício 1) Considere $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 9 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Determine a lei da transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(u) = A \cdot [u]$, onde $[u]$ é a matriz de coordenadas de $u = (x, y, z)$, em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 2) Determine a lei de uma transformação linear induzida por

$$A_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 & 6 \\ 3 & -4 & 1 & 8 \\ 7 & -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Exercício 3) Determine a lei de uma transformação linear induzida por

$$A_{5\times 4} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -6 & 9 & 0 & -7 \\ 0 & -4 & -5 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Solução: todos os exercícios foram resolvidos durante a aula.

Exemplo resolvido

Exemplo 3) Determine a lei de uma transformação linear induzida por

$$A_{5\times 4} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -6 & 9 & 0 & -7 \\ 0 & -4 & -5 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Solução: Como a matriz tem ordem 5×4, o domínio U da transformação deve ter dimensão 4 e o contradomínio V deve ter dimensão 5.

Assim, tomamos $U = \mathbb{R}^4$ e $V = \mathbb{R}^5$ e obtemos a transformação $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ dada por

$$T(x, y, z, t) = (2x - y + 3z + 4t, -6x + 9y - 7t, -4y - 5z + 2t, -3x + z - t, 8y - 2z - 3t).$$

Observação: Da mesma forma com que uma matriz sempre induz uma transformação linear, toda transformação linear também é induzida por uma matriz.

Ou seja, conhecendo a lei de $T\colon U \to V$ sempre podemos obter uma matriz A que a induz.

Note que, pelo que vimos anteriormente, a ordem da matriz A deve ser dada por

$$\dim(V) \times \dim(U),$$

isto é, sempre é preciso "inverter" a dimensão dos espaços para obter a ordem da matriz que induz a transformação.

Matriz de uma Transformação Linear

Exemplo 4) Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (8x - 3y + 4z, x - 7y + 5z)$. Determine uma matriz que induz T.

Solução: Como o domínio de T tem dimensão 3 e o contradomínio tem dimensão 2, a matriz que induz a transformação T deve ter ordem 2×3.

Para obter tal matriz, note que podemos escrever a matriz de coordenadas da lei de T:

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 8x - 3y + 4z \\ x - 7y + 5z \end{bmatrix}.$$

Como para $u = (x, y, z)$ temos que $[u] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, basta obter uma matriz $A_{2\times 3}$ tal que

$$T(x, y, z) = T(u) = A \cdot [u].$$

Como

$$\begin{bmatrix} 8x - 3y + 4z \\ x - 7y + 5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 1 & -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

temos que $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 1 & -7 & 5 \end{bmatrix}$ é a matriz que induz a transformação.

Observação: Para obter os elementos de A, note que bastou tomarmos os coeficientes de x na primeira coluna, os coeficientes de y na segunda coluna e os de z na terceira coluna.

Matriz de uma Transformação Linear

Exemplo 5) Seja $T: M(2,2) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (10a - 3b + 8c - 2d,\ 5a + b - d, 7b - 4c + 9d).$$

Determine uma matriz que induz T.

Solução: Como o domínio de T tem dimensão 4 e o contradomínio tem dimensão 3, a matriz que induz a transformação T deve ter ordem 3×4.

Para obter tal matriz, basta tomar, em cada coluna, os respectivos coeficientes das variáveis a, b, c, d (nessa ordem, pois a base canônica é ordenada) e obter que

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -3 & 8 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Também é possível verificar que, de fato, $T(u) = A \cdot [u]$, isto é, que

$$\begin{bmatrix} 10a - 3b + 8c - 2d \\ 5a + b - d \\ 7b - 4c + 9d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -3 & 8 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

Matriz de uma Transformação Linear

Outra forma de determinar as colunas da matriz que induz uma transformação linear é aplicando a sua lei nos elementos da base canônica do domínio, e escrevendo a imagem obtida como combinação linear da base canônica do contradomínio.

Fazendo isso no Exemplo 4, em que $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ era dada por

$$T(x, y, z) = (8x - 3y + 4z, x - 7y + 5z)$$

temos que

$$T(1,0,0) = (8, 1) = 8(1,0) + 1(0,1).$$

$$T(0,1,0) = (-3, -7) = -3(1,0) - 7(0,1).$$

$$T(0,0,1) = (4, 5) = 4(1,0) + 5(0,1),$$

e assim, a matriz que induz a transformação é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 1 & -7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Portanto, as colunas de A são formadas pelas imagens da base canônica do domínio, escritas como combinação linear da base do contradomínio.

O mesmo pode ser feito no Exemplo 5. Faça isso como exercício!

Exercícios

Exercício 4) Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por $T(x, y) = (5x - 2y, -x + 3y, 4x - 7y, 6x + 8y)$. Determine uma matriz que induz T.

Exercício 5) Seja $T: M(2,2) \to P_2$ dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - b + 2c) + (3a - 2b + c - d)x + (a - 3c + 7d)x^2$$

Determine uma matriz que induz T.

Solução: todos os exercícios foram resolvidos durante a aula.

Exemplo

Exercício 6) Seja $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear induzida pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

a) Encontre uma base e a dimensão para o núcleo e para a imagem de T.

b) Verifique se T é injetora e/ou sobrejetora.

c) Determine $Posto(A)$ e $nulidade(A)$. Qual a relação existente entre tais valores e a dimensão do núcleo e da imagem de T?

Solução: O exercício foi resolvido durante a aula e a sua resolução está no exemplo a seguir:

Exemplo

Exemplo 6) Seja $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear induzida pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

a) Encontre uma base e a dimensão para o núcleo e para a imagem de T.

b) Verifique se T é injetora e/ou sobrejetora.

c) Determine $Posto(A)$ e $nulidade(A)$. Qual a relação existente entre tais valores e a dimensão do núcleo e da imagem de T?

Solução: Iniciamos determinando a expressão de T.

Note que para $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ temos que

$$T(x, y, z, t) = T(u) = A.[u] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y + z \\ y + 2z + 3t \\ z - 5t \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$T(x, y, z, t) = (x - 2y + z, y + 2z + 3t, z - 5t).$$

Exemplo

a) Seja $u = (x, y, z, t) \in N(T)$. Logo $T(x, y, z, t) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$ e então

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y + 2z + 3t = 0 \\ z - 5t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - z \\ y = -2z - 3t \\ z = 5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -31t \\ y = -13t \\ z = 5t \end{cases}$$

Logo

$$u = (-31t, -13t, 5t, t) = t(-31, -13,5,1)$$

com $t \in \mathbb{R}$. Temos então um único gerador para o núcleo, que é obviamente LI.

Portanto, uma base para $N(T)$ é dada por $\beta_{N(T)} = \{(-31, -13, 5,1)\}$ e $\dim\big(N(T)\big) = 1$.

Seja agora $v \in Im(T)$. Logo existe $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tal que

$$\begin{aligned} v = T(u) &= (x - 2y + z, y + 2z + 3t, z - 5t) \\ &= x(1,0,0) + y(-2,1,0) + z(1,2,1) + t(0, 3, -5). \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da dimensão do núcleo e da imagem:

$$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big),$$

obtemos que

$$4 = 1 + \dim(Im(T)) \qquad \text{e} \qquad \dim\big(Im(T)\big) = 3.$$

Exemplo

Assim, os quatro geradores da Imagem são necessariamente LD's.

Para descartar o gerador que os torna LI, consideramos a sua combinação linear nula, que coincide com o sistema resolvido para o núcleo de T, que já foi resolvido e indica que o último vetor (associado à variável livre t) deve ser descartado. Portanto, uma base para a imagem de T é

$$\beta_{Im(T)} = \{(1,0,0); (-2,1,0); (1,2,1)\}.$$

Observe que os geradores obtidos consistem nas colunas da matriz A. Por isso, é possível definir o espaço coluna de uma matriz como a imagem da transformação linear induzida por ela. E para obter uma base para o espaço coluna, basta tomar as colunas que são LI.

b) Obtemos que $N(T) \neq \left\{\vec{0}_{\mathbb{R}^4}\right\}$ e então T não é injetora.

Como obtemos $\dim\big(Im(T)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ temos $Im(T) = \mathbb{R}^3$ e T é sobrejetora.

c) Como o posto de uma matriz é dado pelo número de linhas não nulas depois de escaloná-la e a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ já está na forma reduzida por linhas temos que $\quad Posto(A) = 3.$

Exemplo

Além disso, a nulidade de uma matriz é dada pelo diferença entre seu número de colunas e o seu posto. Logo

$$nulidade(A) = 4 - Posto(A) = 4 - 3 = 1.$$

Agora, note que

$$Posto(A) = 3 = \dim(Im(T))$$

e

$$nulidade(A) = 1 = \dim\big(N(T)\big).$$

O Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem indica que

$$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim\big(N(T)\big) + \dim(Im(T) = Posto(A) + nulidade(A)$$

onde a dimensão do domínio ($\mathbb{R}^4$) corresponde ao número de colunas de A.

Observações:

- O fato do núcleo ser formado pelos elementos do domínio que são anulados pela transformação justifica a nomenclatura de "nulidade" para a dimensão do núcleo.
- O resultado obtido no item c é um fato geral, que será generalizado no próximo teorema.

Teorema

- Quando obtemos a matriz que induz uma transformação linear $T: U \to V$, devemos sempre levar em consideração as bases do domínio U e do contradomínio V.
- Em todos os exemplos anteriores consideramos sempre as bases canônicas de U e V.
- A matriz que induz T é chamada de *matriz canônica* da transformação T e será denotada por $A = [T]$.

Teorema: Sejam $T: U \to V$ uma transformação linear e $[T]$ a sua matriz canônica. Então

i) $\dim\big(N(T)\big) = nulidade([T])$.

ii) $\dim\big(Im(T)\big) = posto([T])$.

Justificativa: Supondo que $\dim(U) = n$ e $\dim(V) = m$ temos que $[T]$ tem ordem $m \times n$.
Pela definição de nulidade, temos que

$$nulidade([T]) = n - posto([T])$$

E com isso

$$\dim(N(T)) = n - \dim(Im(T))$$

ou seja

$$\dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = n = \dim(U).$$

Matriz de T em bases não canônicas

Considere $T: U \to V$ uma transformação linear e $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base qualquer de U e $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ uma base qualquer de V.

A matriz de T em relação às bases α e β será denotada por $[T]_\beta^\alpha$.

As colunas de $[T]_\beta^\alpha$ correspondem aos escalares obtidos quando as imagens por T dos vetores de α são escritos como uma combinação linear dos vetores de β.

Ou seja, fazemos

$$T(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 + \cdots + a_{m1}v_m$$
$$T(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 + \cdots + a_{m2}v_m$$
$$\vdots$$
$$T(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + a_{3n}v_3 + \cdots + a_{mn}v_m$$

Então

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Veja que o processo é análogo ao que fazíamos em relação às bases canônicas! Somente teremos mais trabalho para resolver a combinação linear.

Exemplo resolvido

Exemplo 7) Considere $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y) = (x - y, -5x + 3y,\ 3x + 2y)$ e $\alpha = \{(2,-1),(1,4)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1,0,-1),(-1,2,2),(0,1,2)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

Determine a matriz que induz T em relação às bases α e β, ou seja, encontre $[T]_\beta^\alpha$.

Solução: Para obter a matriz de T em relação às bases não canônicas α e β, devemos aplicar a transformação nos vetores da base do domínio (α) e escrever cada uma das imagens obtidas como combinação linear da base do contradomínio (β).
Os escalares de cada uma dessas combinações lineares devem formar cada uma das colunas de $[T]_\beta^\alpha$.

Fazendo isso para o primeiro vetor da base α:

$$T(2,-1) = (3,-13,4) = a(1,0,-1) + b(-1,2,2) + c(0,1,2)$$

e obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ 2b + c = -13 \\ -a + 2b + 2c = 4 \end{cases}.$$

Exemplo resolvido

cuja solução (resolva o sistema como exercício) é $a = -8$, $b = -11$ e $c = 9$.

Note que esses valores, nessa ordem, irão formar a primeira coluna de $[T]_\beta^\alpha$.

Agora, repetimos o procedimento para o segundo vetor da base α:

$$T(1,4) = (-3,7,11) = a(1,0,-1) + b(-1,2,2) + c(0,1,2)$$

e obtemos o sistema

$$\begin{cases} a - b = -3 \\ 2b + c = 7 \\ -a + 2b + 2c = 11 \end{cases}$$

cuja solução (resolva o sistema como exercício) é $a = -1$, $b = 2$ e $c = 3$.
Esses valores formam a segunda coluna da matriz $[T]_\beta^\alpha$.

Portanto, obtemos que $$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ -11 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Note que a ordem da matriz obtida é 3×2, o que está de acordo com $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Exercício

Exercício 7) Considere $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (x - y, -5x + 3y,\ 3x + 2y)$ e $\alpha = \{(1, -2), (-3, 5)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1, 1, 1), (2, 3, -1), (0, 1, -2)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

Determine a matriz que induz T em relação às bases α e β, ou seja, encontre $[T]_\beta^\alpha$.

Solução: O exercício foi resolvido durante a aula.