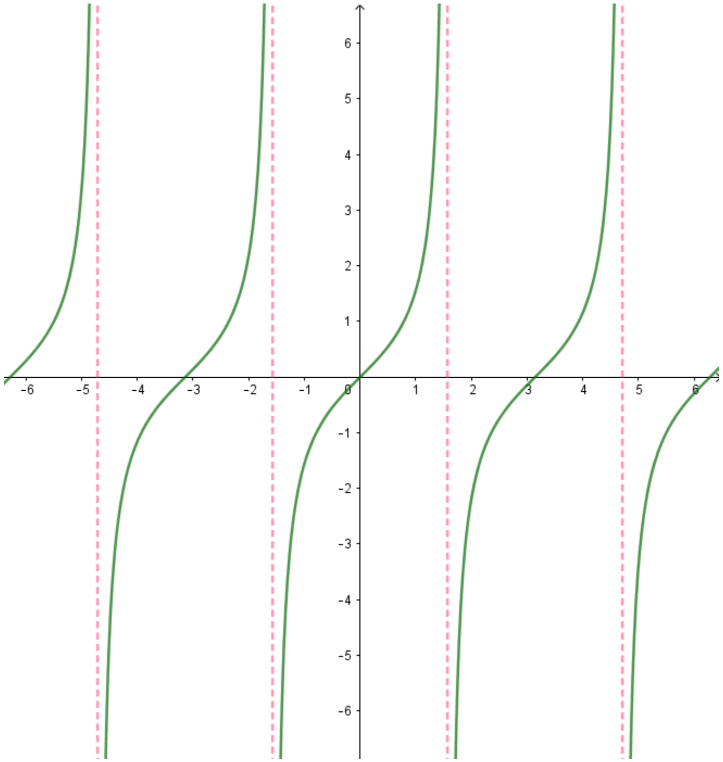
Roteiro para construir os gráficos de funções com a teoria de derivada

1) Encontrar o domínio da função;
2) Obter os pontos críticos;
3) Estudo do sinal de f' para:
   - ✓ Determinar os intervalos de (de)crescimento da função f;
   - ✓ Concluir se há pontos extremos relativos/locais, por meio do teste da 1ª derivada.
4) Determinar os possíveis pontos de inflexão;
5) Estudar os sinal de f'' para:
   - ✓ Obter os intervalos em que o gráfico da função tem concavidade voltada para cima/baixo;
   - ✓ Concluir se existe ponto(s) de inflexão(ões).
6) Investigar a existência de assíntotas verticais e oblíquas;
7) Esboçar o gráfico da função.

Exemplo:

Use a teoria de derivadas para construir o gráfico das funções dadas a seguir.

a) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$



Exemplo:

Use a teoria de derivadas para construir o gráfico das funções dadas a seguir.

a) $f(x) = \text{arctg}(x)$

1. Domínio: $Df = \mathbb{R}$

2. Ponto(s) crítico(s): $c \in Df$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c) \nexists$

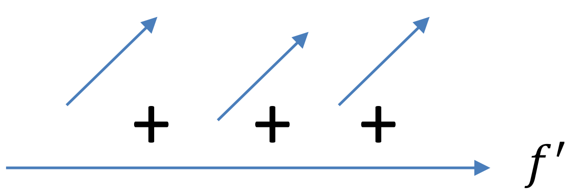
Primeira derivada: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} = 0 \Longrightarrow 1 = 0 \Longrightarrow \nexists x \in Df$ que satisfaça a igualdade

f' existe para todos $\forall x \in Df$

Logo, não há ponto crítico de f.

3. Análise do sinal de f'



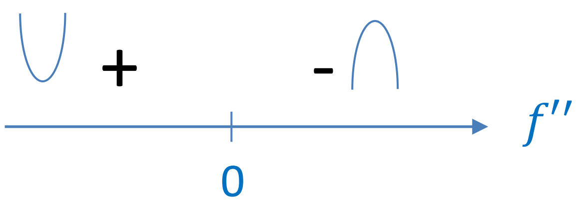
✓ f é crescente $\forall x \in Df$.

4. Estudo do sinal da segunda derivada: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$

$$f''(x) = -(1+x^2)^{-2}(1+x^2)' \Longrightarrow f''(x) = -2x(1+x^2)^{-2} \Longrightarrow f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

Candidatos a ponto de inflexão: c tal que $f''(c) = 0$ ou $f''(c)\ \nexists$

- ✓ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Longrightarrow -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$
- ✓ f'' existe para todo $x \in Df$.



Conclusões:

- ✓ O gráfico de f tem concavidade voltada para cima $\forall x \in (-\infty, 0)$.
- ✓ O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo $\forall x \in (0, +\infty)$.
- ✓ 0 é um ponto de inflexão.

5. Assíntotas:

- ✓ **Vertical:** não há candidatas.

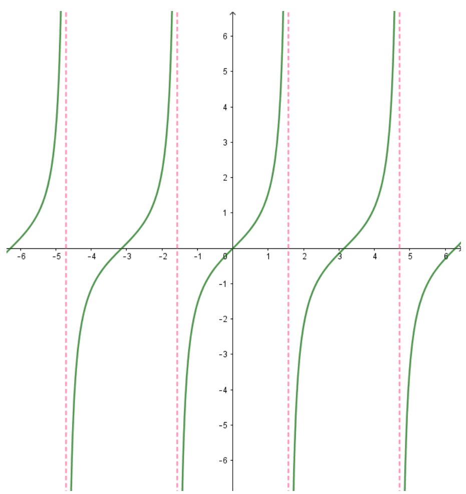
- ✓ **Oblíqua:** a reta $y = kx + b$ é a assíntota oblíqua se os limites

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad e \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$$

existirem.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\text{arctg}(x)}{x} = \frac{\pm\frac{\pi}{2}}{\infty} \Longrightarrow k = 0$$

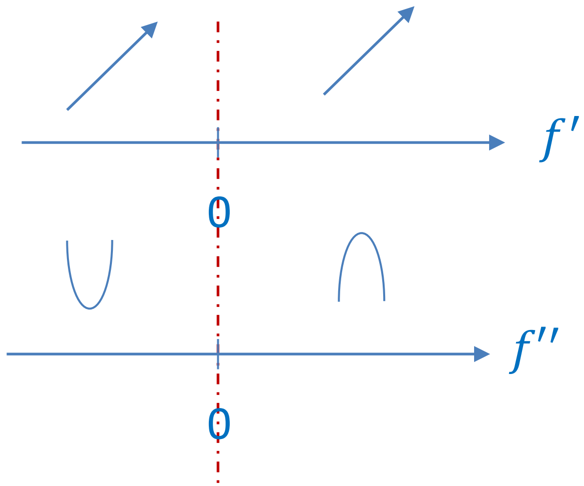
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 0x) = \lim_{x\to\pm\infty} (\text{arctg}(x)) \begin{cases} b_1 = \lim_{x\to+\infty} (\text{arctg}(x)) = \frac{\pi}{2} \\ b_2 = \lim_{x\to-\infty} (\text{arctg}(x)) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



- ✓ A reta $y = \frac{\pi}{2}$ é a assíntota horizontal para $x \to +\infty$

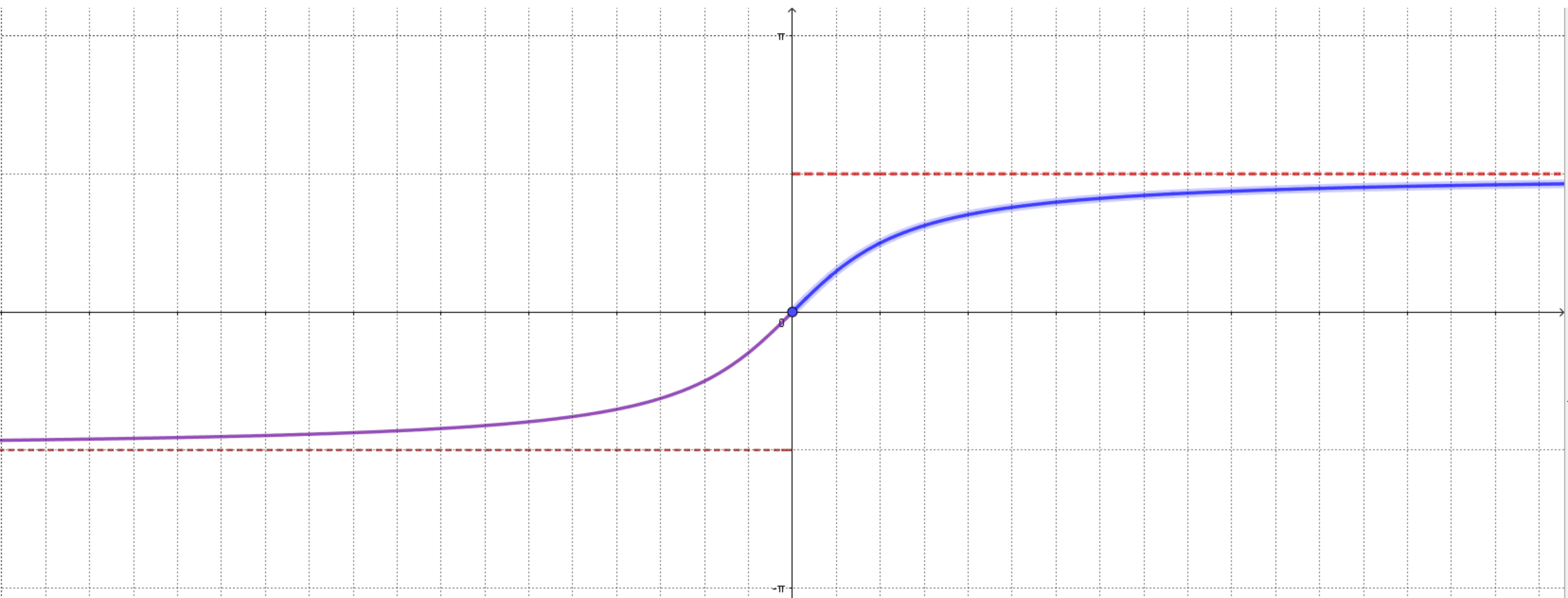
- ✓ A reta $y = -\frac{\pi}{2}$ é a assíntota horizontal para $x \to -\infty$

6. Esboço do gráfico:



Assíntotas: $x = 0$ e $y = x$

- ✓ $y = \frac{\pi}{2}$, para $x \to +\infty$
- ✓ $y = -\frac{\pi}{2}$, para $x \to -\infty$



b) $f(x) = -3 + e^{\frac{1}{5x-10}}$

1. Domínio: $Df = \{x \in \mathbb{R}: \ 5x - 10 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$

$$c \in Df \text{ tal que } f'(c) = 0 \text{ ou } f'(c) \nexists$$

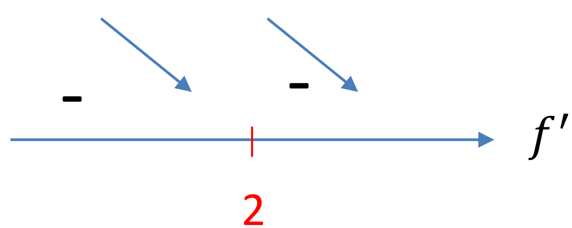
Primeira derivada: $f'(x) = \left(\frac{1}{5x-10}\right)' e^{\frac{1}{5x-10}} = \left((5x-10)^{-1}\right)' e^{\frac{1}{5x-10}}$

$$f'(x) = -(5x-10)^{-2}(5x-10)' e^{\frac{1}{5x-10}} = \frac{-5}{(5x-10)^2} \ e^{\frac{1}{5x-10}}$$

✓ f' existe para todos $\forall x \in Df$

✓ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-5}{(5x-10)^2} \ e^{\frac{1}{5x-10}} = 0 \implies -\frac{-5}{(5x-10)^2} = 0 \implies \nexists x \in Df$

3. Análise do sinal de f':



✓ f é crescente $\forall x \in Df$.

4. Estudo do sinal da segunda derivada: $f'(x) = -5(5x-10)^{-2}e^{\frac{1}{5x-10}}$

$$f''(x) = -5(-2)(5x-10)^{-3}(5x-10)'e^{\frac{1}{5x-10}} - 5(5x-10)^{-2}\left(e^{\frac{1}{5x-10}}\right)'$$

$$f''(x) = \frac{50}{(5x-10)^3}\, e^{\frac{1}{5x-10}} + \frac{25}{(5x-10)^4} e^{\frac{1}{5x-10}}$$

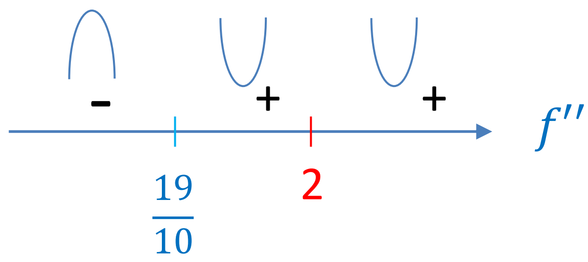
$$f''(x) = \frac{25}{(5x-10)^3}\, e^{\frac{1}{5x-10}}\left(2 + \frac{1}{5x-10}\right)$$

$$f''(x) = \frac{25}{(5x-10)^3}\, e^{\frac{1}{5x-10}}\left(\frac{10x-19}{5x-10}\right) \Longrightarrow \boxed{f''(x) = \frac{25(10x-19)}{(5x-10)^4}\, e^{\frac{1}{5x-10}}}$$

- ✓ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{25(10x-19)}{(5x-10)^4} e^{\frac{1}{5x-10}} = 0 \Longrightarrow 10x - 19 = 0 \Longrightarrow x = \frac{19}{10} \in Df$

- ✓ f'' não existe em $x = 2 \notin Df$. Apesar disto, 2 pode ser um ponto de inflexão, pois f está definida na vizinhança de 2.

4. Estudo do sinal da segunda derivada: $f''(x) = \dfrac{25(10x-19)}{(5x-10)^4}\; e^{\frac{1}{5x-10}}$



✓ O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo $\forall x \in \left(-\infty, \frac{19}{10}\right)$.

✓ O gráfico de f tem concavidade voltada para cima $\forall x \in \left(\frac{19}{10}, 2\right) \cup (2, +\infty)$.

✓ $x = \frac{19}{10}$ é um ponto de inflexão.

5. Assíntotas:

✓ **Vertical:** a reta $x = 2$ é candidatas.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(-3 + e^{\frac{1}{5x-10}}\right) \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -3 \end{cases}$$

Conclusão: A reta $x = 2$ é assíntota vertical para $x \to 2^+$.

✓ **Oblíqua:** a reta $y = kx + b$ é a assíntota oblíqua se os limites

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad e \quad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx)$$

existirem.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{-3 + e^{\frac{1}{5x-10}}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-5}{(5x-10)^2} \; e^{\frac{1}{5x-10}}}{1}$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-5e^{\frac{1}{5x-10}}}{(5x-10)^2} \right) = 0$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(-3 + e^{\frac{1}{5x-10}} \right) = -2$$

➡ A reta $y = -2$ é assíntota horizontal.

6. Esboço do gráfico: