Cônicas – Parábolas (Teoria)

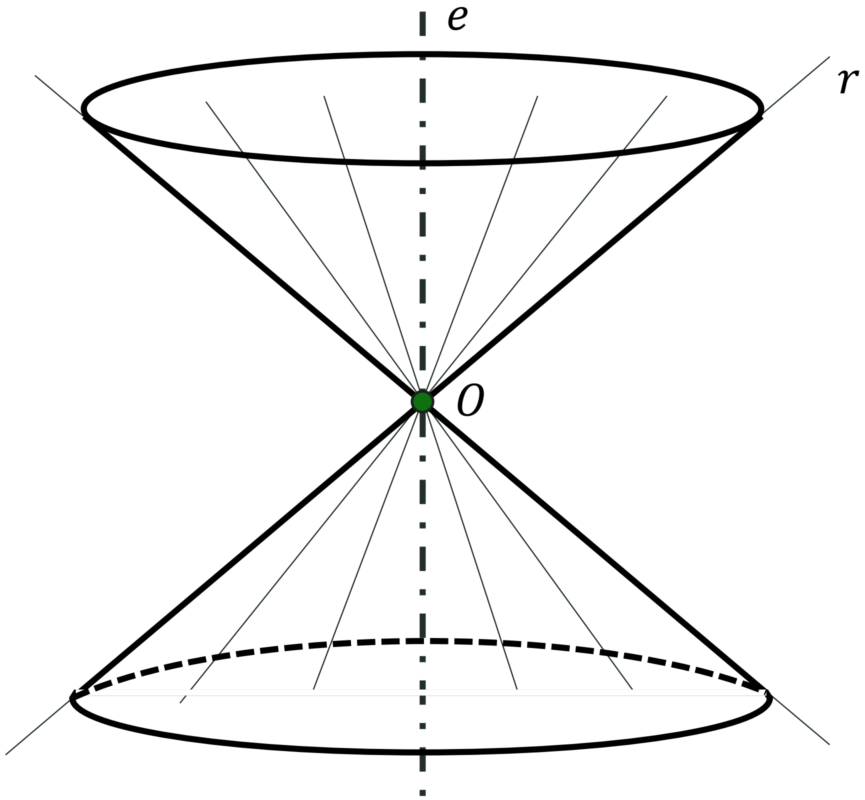
Estrutura desta apresentação

- Superfície cônica
- Seções cônicas
  - Degeneradas
  - Não degeneradas
- Parábolas
  - Definição geométrica
  - Elementos
  - Equações com vértice na origem

Superfície cônica

Sejam e e r duas retas concorrentes e não perpendiculares que se intersecionam num ponto O.

Com e fixado, gira-se r ao redor de e $360°$ (mantendo o ângulo entre as retas constante).



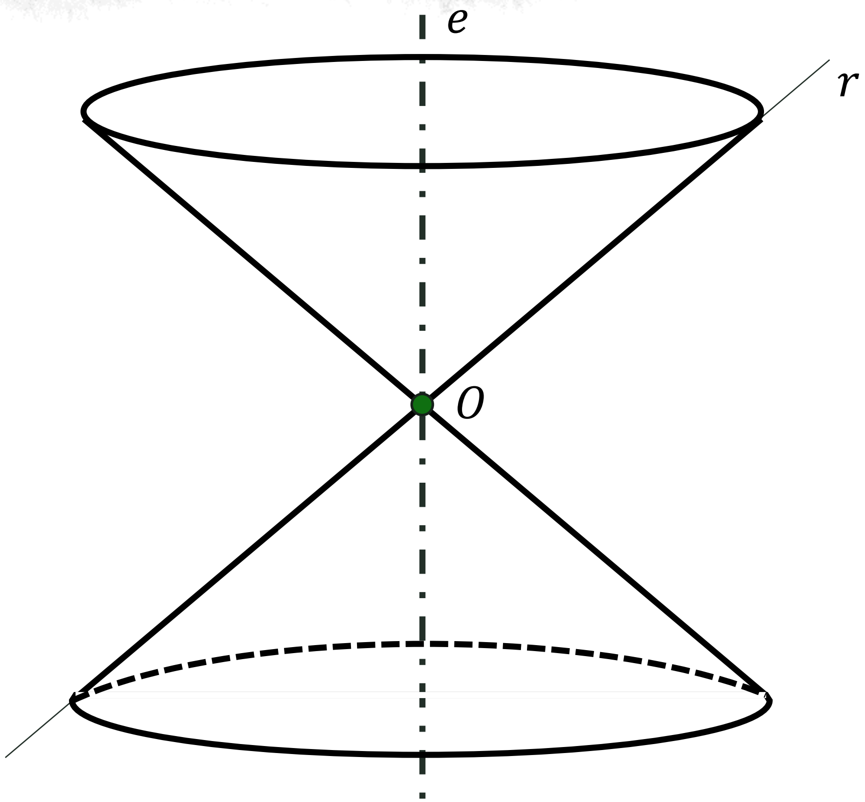
Esse processo garante a criação de uma **superfície cônica circular infinita formada por duas folhas separadas pelo vértice O**.

Superfície cônica

Superfície cônica

Nomenclatura:

- A reta r recebe o nome de **geratriz** da superfície cônica;
- A reta e recebe o nome de **eixo** da superfície;
- Conforme a classificação da superfície no slide anterior, o ponto O é chamado de **vértice.**



Seções Cônicas

Ao intersecionar a superfície cônica com um plano π, têm-se as chamadas **seções cônicas**.

Há dois tipos de seções cônicas:

1. **Degeneradas:** caso o plano π passe pelo vértice O. Podem ser:

   i. Um ponto;
   ii. Uma reta;
   iii. Duas retas.

2. **Não degeneradas:** caso o plano π **NÃO** passe pelo vértice O. Podem ser:

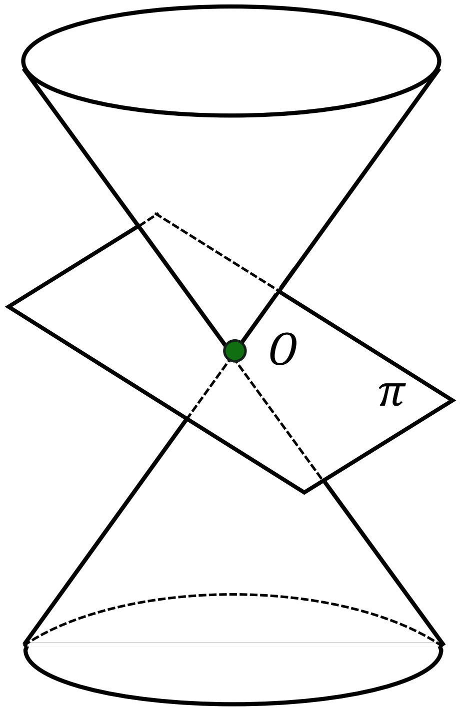
   i. Parábola;
   ii. Circunferência;
   iii. Elipse;
   iv. Hipérbole.

As seções cônicas

As seções cônicas degeneradas

1. **Cônicas degeneradas:**

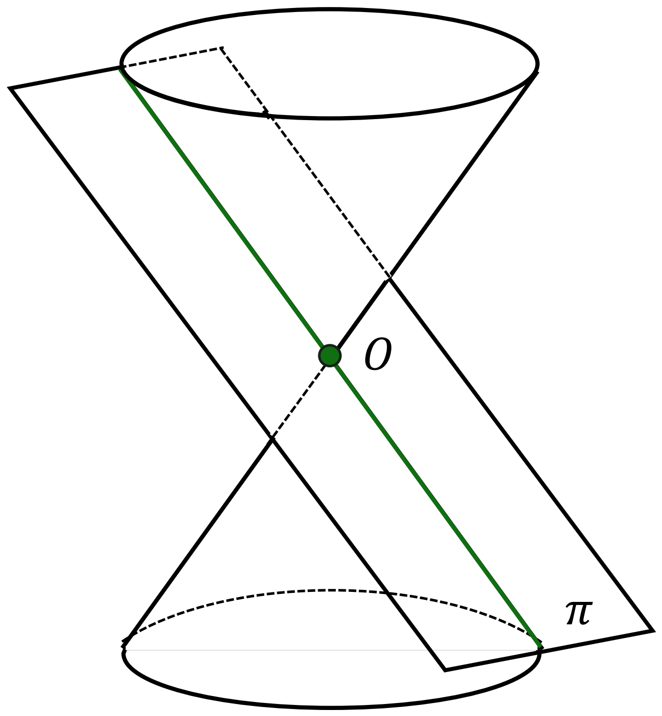
   i. **Um ponto**, se π só tem o ponto O em comum com a superfície cônica.



As seções cônicas degeneradas

1. **Cônicas degeneradas:**

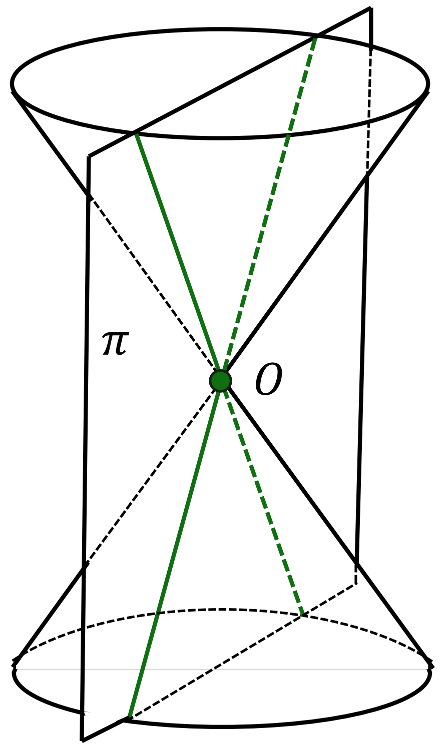
   ii. **Uma reta**, se o plano π tangencia a superfície cônica.



As seções cônicas degeneradas

1. **Cônicas degeneradas:**

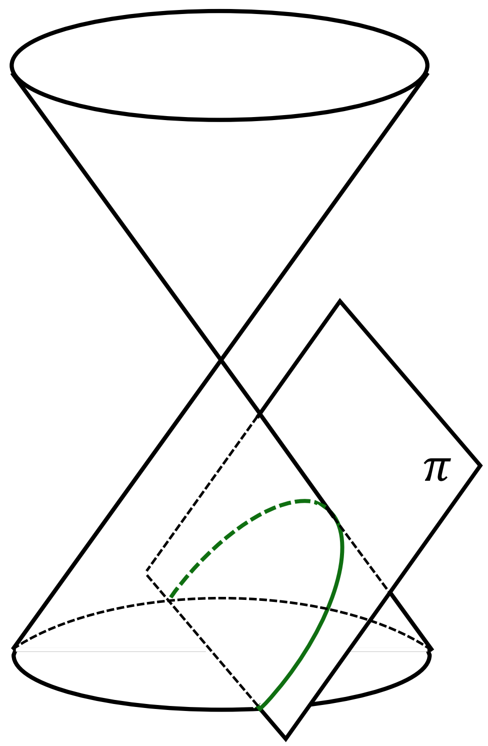
   iii. **Duas retas**, se o plano π formar com o eixo um ângulo menor do que este faz com a geratriz



As seções cônicas não degeneradas

2. **Cônicas não degeneradas:**

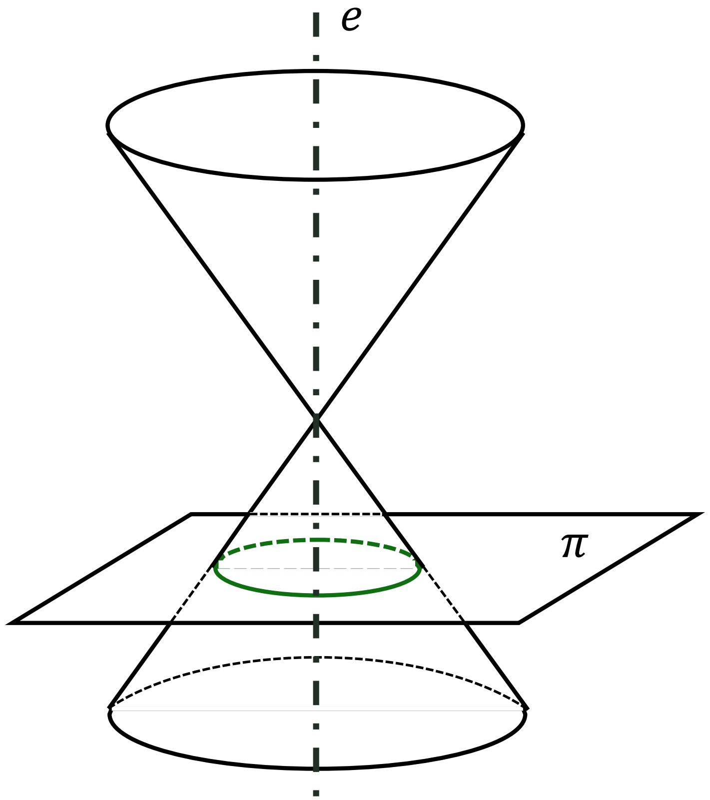
   i. Uma **parábola**, se π for paralelo a uma geratriz da superfície.



As seções cônicas não degeneradas

2. Cônicas não degeneradas:

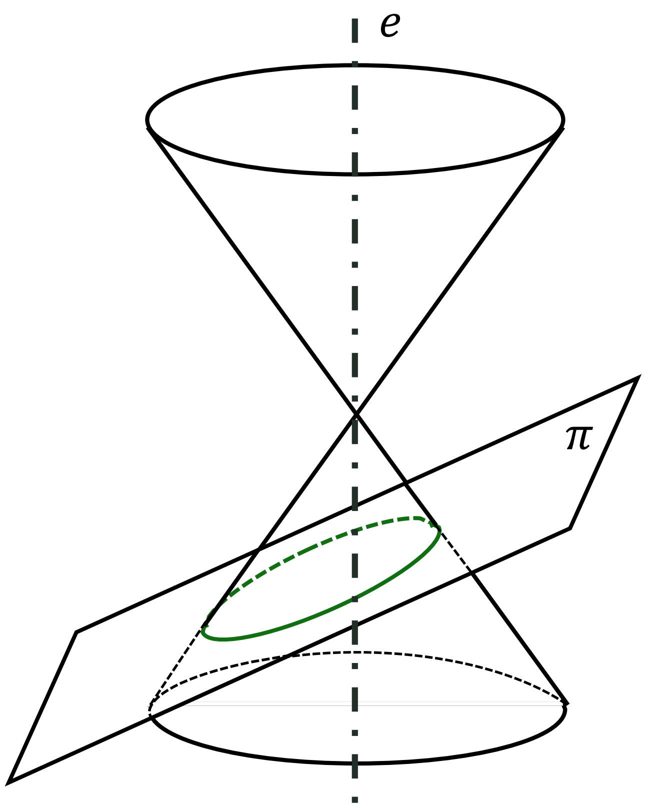
ii. Uma **circunferência**, se π for perpendicular ao eixo.



As seções cônicas não degeneradas

2. Cônicas não degeneradas:

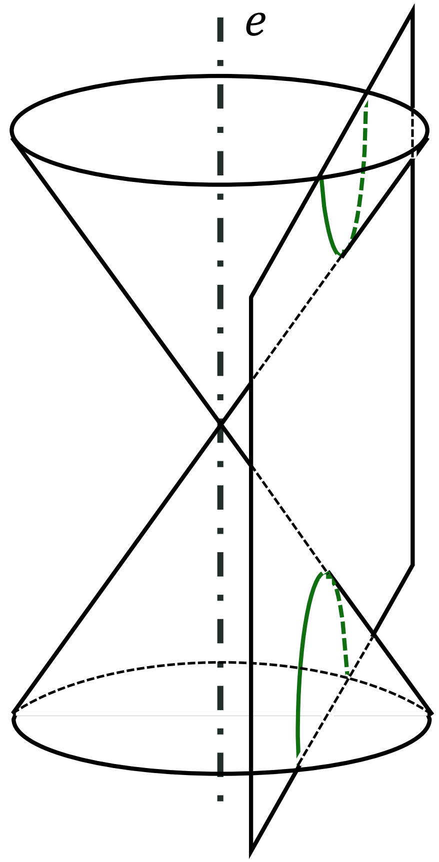
iii. Uma **elipse**, se π for oblíquo ao eixo e cortar apenas uma das folhas da superfície.



As seções cônicas não degeneradas

2. Cônicas não degeneradas:

i. Uma **hipérbole**, se π for paralelo ao eixo e

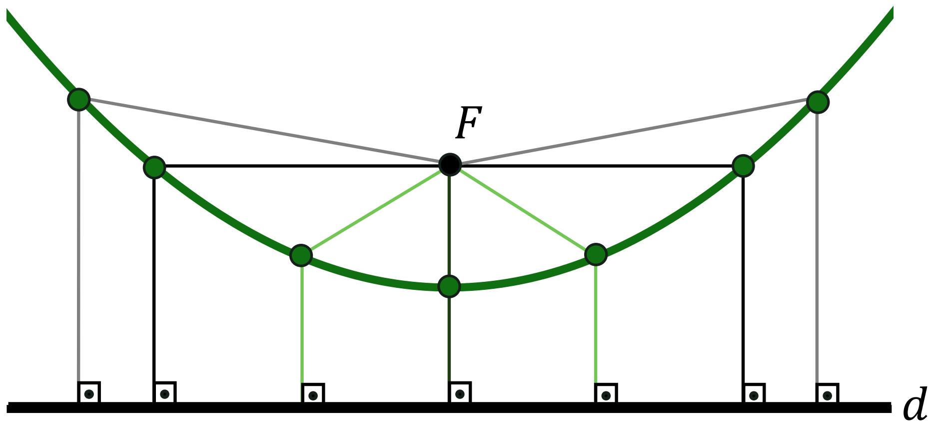


A parábola

A parábola

Sejam uma reta d e um ponto F não pertencente a d.

"Uma parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são **equidistantes** de F e d."



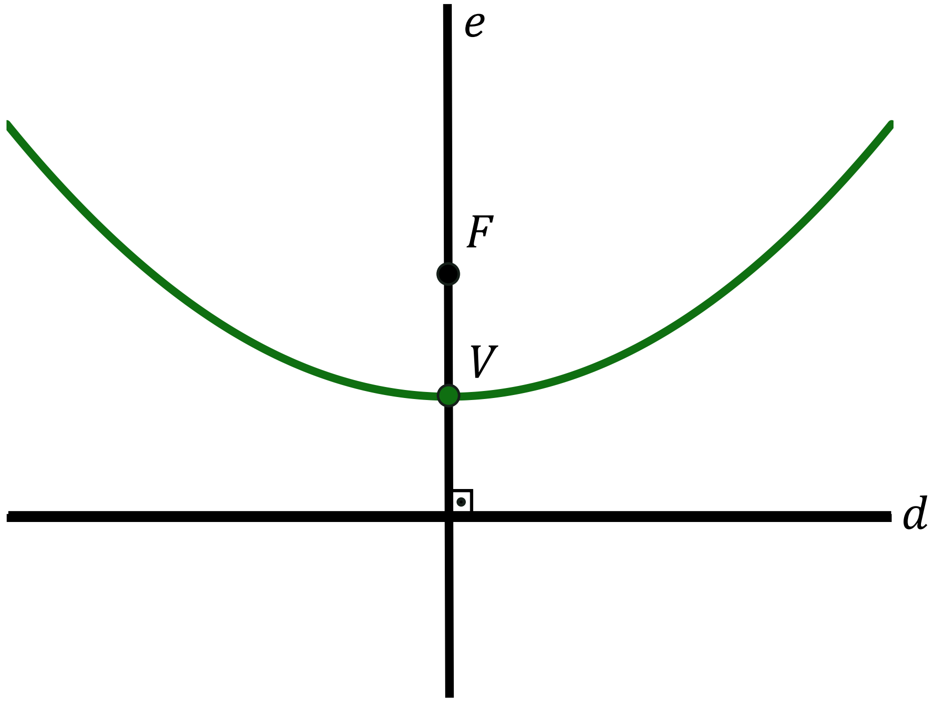
Ou seja, um ponto P pertence à parábola se

$$d(F, P) = d(P, d)$$

A parábola

Elementos:

- **Foco:** o ponto F
- **Diretriz:** a reta d
- **Eixo:** a reta e que passa por F e é perpendicular a d
- **Vértice:** o ponto V da parábola que está no eixo



A parábola

Definiu-se geometricamente o que seria a parábola. Qual seria o próximo passo?

Defini-la **analiticamente**!

Serão apresentadas as equações de quatro casos de parábolas:

1. **Parábola com vértice na origem**
   i. O eixo da parábola é o eixo dos y
   ii. O eixo da parábola é o eixo dos x

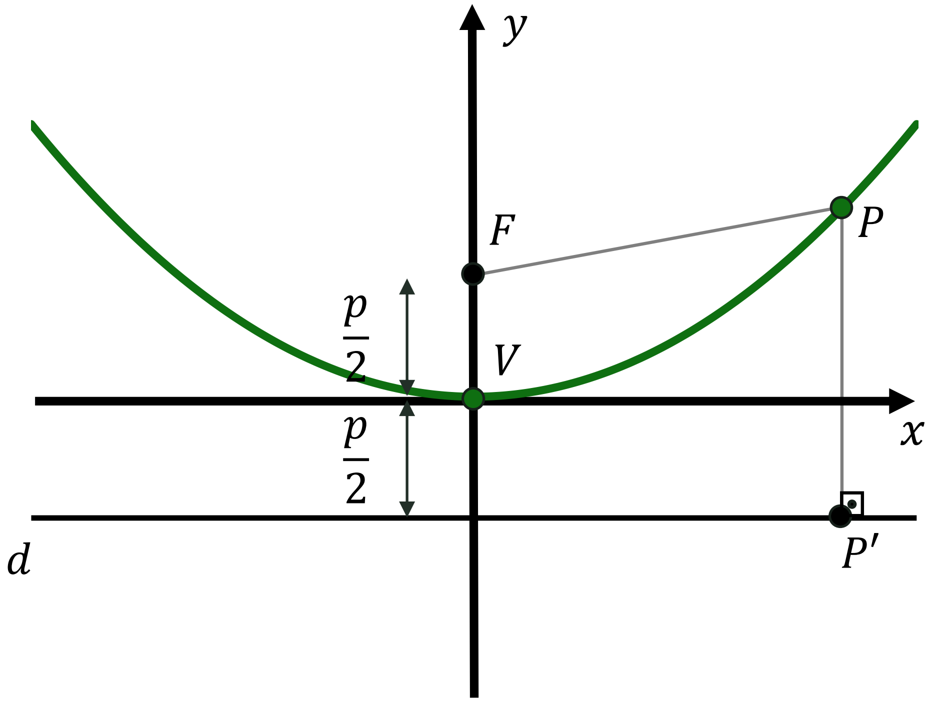
2. **Parábola com vértice fora da origem**
   i. O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos y
   ii. O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos x

Observação: Apesar de ser possível obter as equações da parábola para eixos inclinados, isto não será feito nesta disciplina.

A parábola

1. **Parábola com vértice na origem**
   i. O eixo da parábola é o eixo dos y

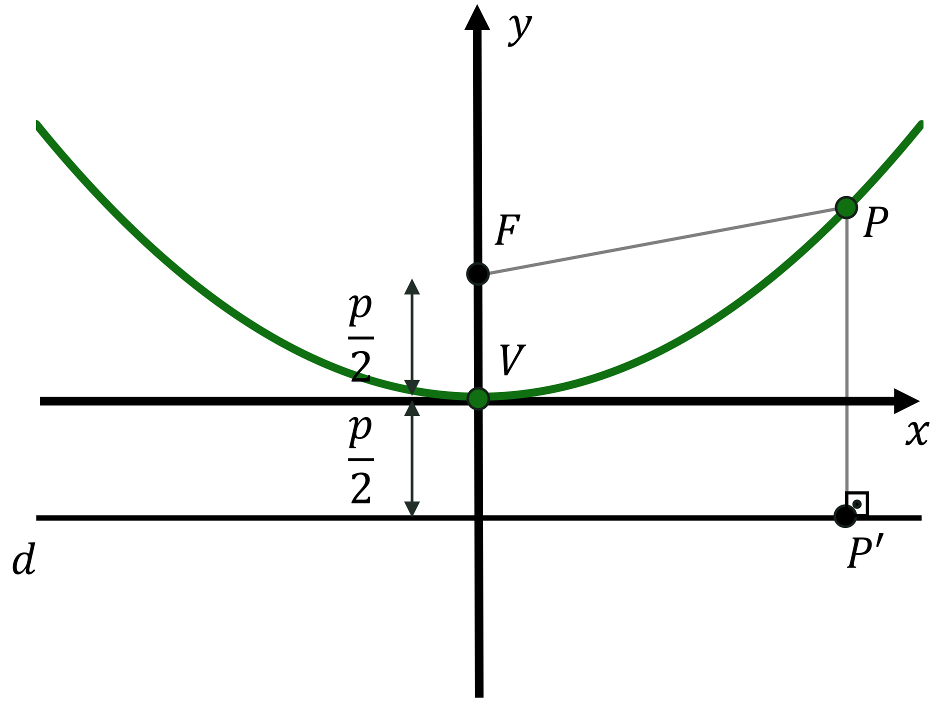
- Assume-se que a distância do eixo x até o foco é $\frac{p}{2}$.
- Esta será também, por extensão, a distância do eixo x até a reta d.
- Escolhe-se um ponto qualquer $P(x, y)$ da parábola.
- Note que há como encontrar um ponto P' tal que $d(P, d) = d(P', P)$.



A parábola

Com essas considerações, tem-se:

- $V(0,0)$ e $P(x,y)$
- $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$
- $d: y = -\frac{p}{2}$
- $P'\left(x,-\frac{p}{2}\right)$



Da definição de parábola,

$$V(0,0) \text{ e } P(x,y)$$
$$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$$
$$d: y = -\frac{p}{2}$$
$$P'\left(x,-\frac{p}{2}\right)$$

$$d(F,P) = d(P,d)$$

$$d(F,P) = d(P',P)$$

$$\left|\overrightarrow{FP}\right| = \left|\overrightarrow{P'P}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{FP}\right|^2 = \left|\overrightarrow{P'P}\right|^2$$

$$(x-0)^2 + \left(y-\frac{p}{2}\right)^2 = (x-x)^2 + \left[y-\left(-\frac{p}{2}\right)\right]^2$$

$$x^2 + \left(y-\frac{p}{2}\right)^2 = 0^2 + \left(y+\frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2\cdot y\cdot\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + 2\cdot y\cdot\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 - py = py$$

$$\boldsymbol{x^2 = 2py}$$

A parábola

$$x^2 = 2py$$

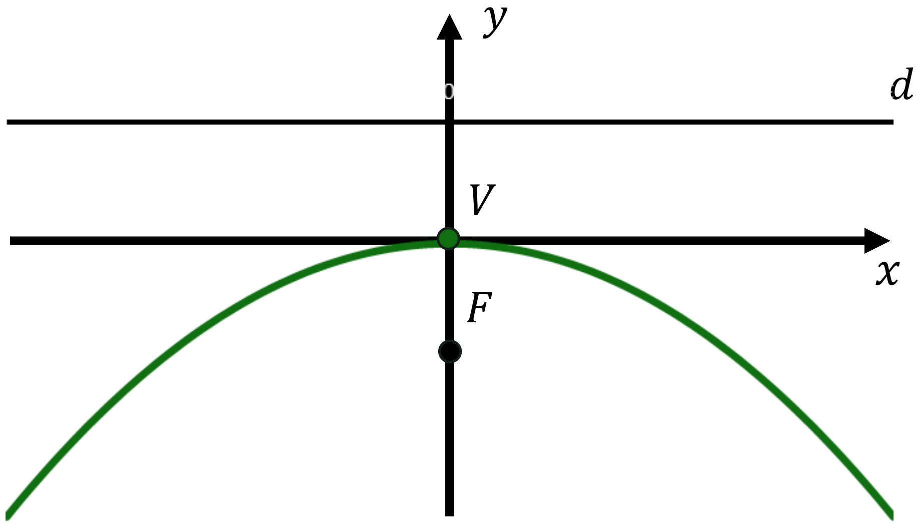
Esta é a **equação reduzida da parábola com vértice na origem tendo o eixo dos y como eixo.**

O valor p recebe o nome **parâmetro** da parábola ($p \neq 0$).

Note que, como se colocou o foco acima do eixo dos x, assumiu-se $p > 0$, pois $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$. Isso garantiu $y > 0$.

Portanto, se $p > 0$, tem-se uma parábola com **concavidade voltada para cima**!

Caso $p < 0$, tem-se uma parábola com **concavidade voltada para baixo.**



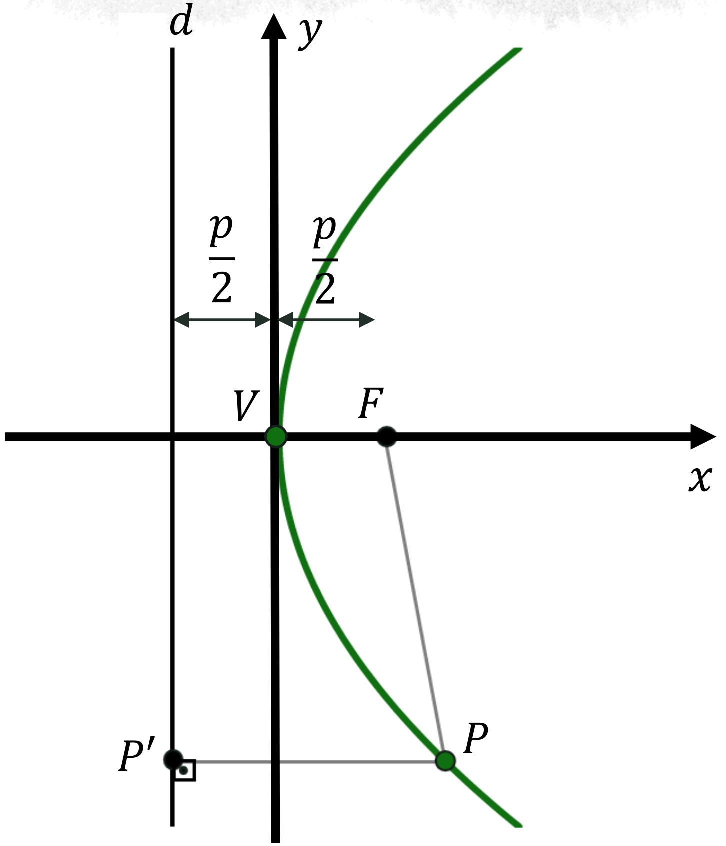
A parábola

A parábola

1. **Parábola com vértice na origem**
   ii. O eixo da parábola é o eixo dos x

Neste caso, tem-se:

- $V(0,0)$ e $P(x,y)$
- $F\left(\frac{p}{2},0\right)$
- $d: x = -\frac{p}{2}$
- $P'\left(-\frac{p}{2},y\right)$



Da definição de parábola,

$$d(F,P) = d(P,d)$$

$$d(F,P) = d(P',P)$$

$$\left|\overrightarrow{FP}\right| = \left|\overrightarrow{P'P}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{FP}\right|^2 = \left|\overrightarrow{P'P}\right|^2$$

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = \left[x - \left(-\frac{p}{2}\right)\right]^2 + (y-y)^2$$

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + 0^2$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$y^2 - px = px$$

$$\boldsymbol{y^2 = 2px}$$

$V(0,0)$ e $P(x,y)$

$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

$d: x = -\frac{p}{2}$

$P'\left(-\frac{p}{2}, y\right)$

A parábola

A parábola

$$\boldsymbol{y^2 = 2px}$$

Esta é a **equação reduzida da parábola com vértice na origem tendo o eixo dos x como eixo.**

Note que, como se colocou o foco à direita do eixo dos y, assumiu-se $p > 0$, pois $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Isso garantiu $x > 0$.

Portanto, se $p > 0$, tem-se uma parábola com **concavidade voltada para a direita**!

Caso $p < 0$, tem-se uma parábola com **concavidade voltada para a esquerda.**