Superfícies Quádricas
Parte 1
(Teoria)

Estrutura desta apresentação

- Motivação
- Superfícies quádricas
  - Definição
  - Quádricas degeneradas e não degeneradas
  - Traços
  - Quádricas centradas e não centradas
- Quádricas centradas
  - Forma padrão ou canônica
  - Elipsoide
  - Hiperboloide de uma folha
  - Hiperboloide de duas folhas

Motivação

No tópico de cônicas, particularmente em alguns exemplos, viu-se que as equações das mesmas, quando escritas na forma explícita, tornavam-se um polinômio de segundo grau de duas variáveis

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

em que a, b, c, d, e e f são constantes reais.

Observação: Como foi estabelecido nesta disciplina que não se trabalharia com eixos rotacionados, em todos exemplos ter-se-á $b = 0$, pois nesta fórmula a rotação é determinada pela presença da expressão xy.

Motivação

Deseja-se expandir estes conceitos de cônicas, vistos no plano, para o espaço. Estas novas estruturas são chamadas superfícies quádricas.

A primeira exposição em livro-texto de quádricas se deu por intermédio de Leonhard Euler (1707-1783), em seu livro Introdução à Análise Infinita, publicado em 1748. Neste livro, ele apresentou as equações dos cones, dos paraboloides, dos elipsoides e dos hiperboloides no espaço cartesiano.

Não é a intenção desta disciplina fazer um estudo detalhado de tais superfícies. Deseja-se apenas identificar e esboçar o gráfico de uma quádrica, conhecida sua equação. Por isso, adotam-se definições estritamente algébricas, ao contrário do que foi feito para cônicas.

Superfícies quádricas

Definição

Chama-se **superfície quádrica**, ou simplesmente **quádrica**, ao conjunto de pontos M no espaço cujas coordenadas x, y e z satisfazem a equação polinomial de segundo grau

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$$

em que $a, b, c, d, e, f, m, n, p$ e q são constantes reais. A condição sobre o grau da equação significa, naturalmente, que pelo menos um dos coeficientes a, b, c, d, e ou f é diferente de zero.

Superfície quádrica:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$$

São possíveis exemplos:

i. $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ (o conjunto vazio);

ii. $x^2 + 2xy + y^2 = 0$ (o plano $\pi: x + y = 0$, uma vez que a equação pode ser reescrita como $(x + y)^2 = 0$);

iii. $x^2 + y^2 + 3z^2 = 0$ (um ponto – neste caso, a origem);

iv. $x^2 + y^2 = 0$ (uma reta – eixo dos z)

v. $z^2 - 4 = 0$ (dois planos paralelos: $z = 2$ e $z = -2$)

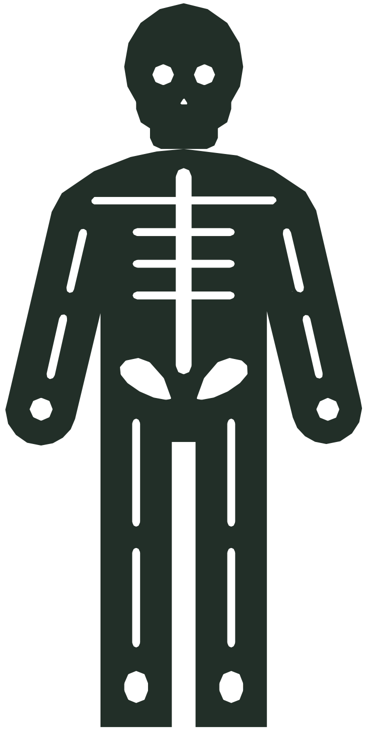
Análogo à classificação em cônicas, estes são todos casos particulares de **quádricas degeneradas**. Abrangem planos, retas, pontos e o conjunto vazio, em algumas situações aos pares.

Nesta disciplina, o enfoque neste momento será nas **quádricas não degeneradas**.

Quádricas degeneradas e não degeneradas

Superfície quádrica:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$$



Traços

Se a superfície quádrica for cortada pelos planos coordenados ou por planos paralelos a eles, a curva de interseção será uma cônica (vale lembrar que as equações de dados planos, conforme visto no respectivo tópico, são dadas por $x = x_0$, $y = y_0$ ou $z = z_0$). Essa interseção é chamada de **traço da superfície no plano**.

Superfície quádrica:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$$

Quádricas centradas e não centradas

Através de mudanças de coordenadas (rotação e/ou translação), a equação da quádrica pode ser reescrita como

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D,$$

representando uma **quádrica centrada**; ou

$$\begin{gathered} Ax^2 + By^2 + Rz = 0 \\ Ax^2 + Ry + Cz^2 = 0, \\ Rx + By^2 + Cz^2 = 0 \end{gathered}$$

representando uma **quádrica não centrada**.

Observação: Vale ressaltar novamente que nesta disciplina não se trabalhará com eixos rotacionados, logo em todos exemplos $d = e = f = 0$.

Quádricas centradas

Forma padrão ou canônica

- Conforme visto, uma quádrica centrada pode ser escrita no formato

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$$

Se os coeficientes A, B, C e D forem todos não nulos, a equação pode então ser reescrita no formato

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Esta é a **forma canônica ou padrão** de uma superfície quádrica centrada.

1. Elipsoide

O elipsoide é a superfície representada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

em que a, b e c são reais positivos e representam as medidas dos semieixos do elipsoide.

Para realizar o esboço do gráfico, o cálculo dos traços nos planos coordenados (e em alguns outros planos paralelos a eles, em alguns casos) é um ótimo guia.

Elipsoide

Elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Elipsoide

Cálculo dos traços:

- Plano xOy $(z=0)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ou seja, uma elipse centrada na origem.

- Plano xOz $(y=0)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Ou seja, uma elipse centrada na origem.

- Plano yOz $(x=0)$

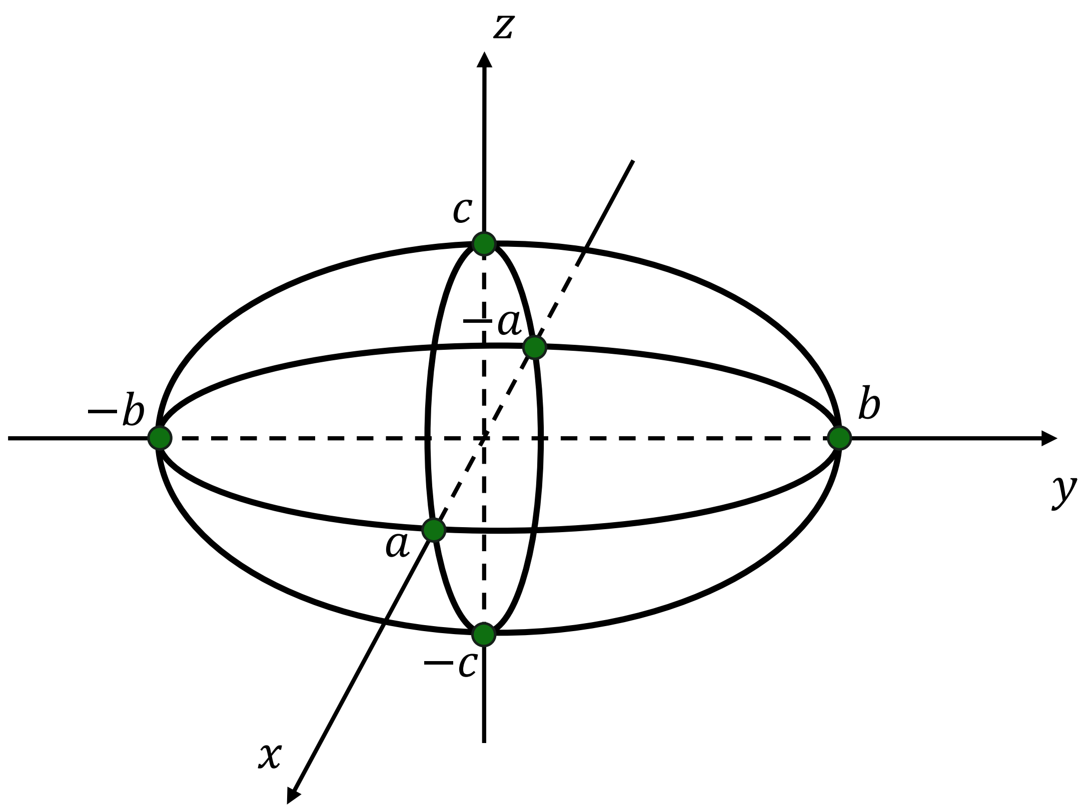
$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Ou seja, uma elipse centrada na origem.

Elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Esboço do gráfico:

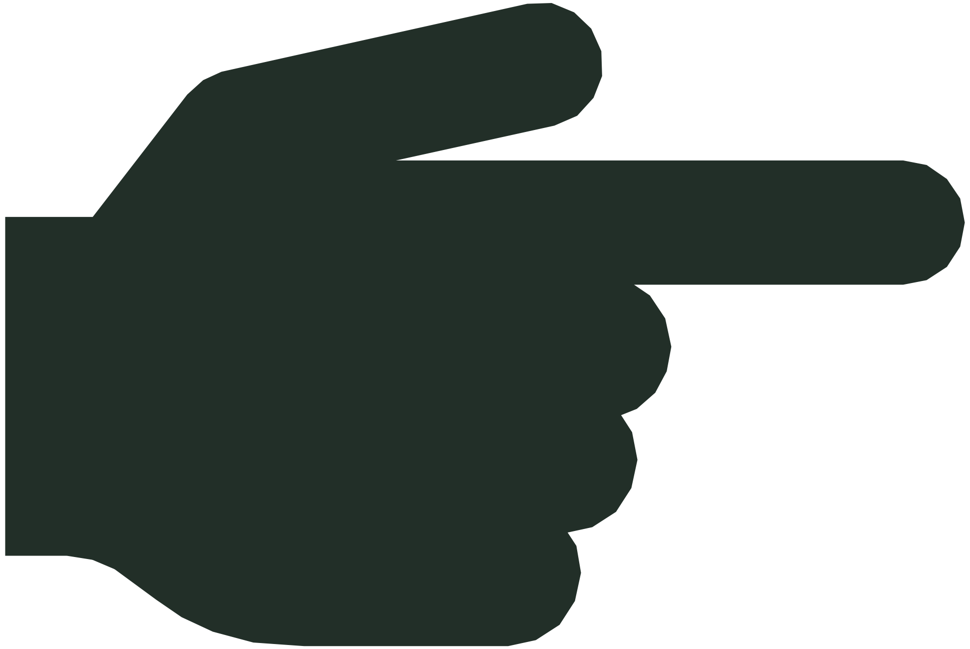


Elipsoide

Elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Observações



a) Se algum dos traços calculados for uma circunferência, tem-se um elipsoide de **revolução**, uma vez que a superfície poderá ser obtida com a rotação (ou revolução) de um dos outros dois traços (elipses, neste caso) em torno de um dos eixos. Este conceito pode ser estendido para todas quádricas não degeneradas que serão apresentadas nesta disciplina.

b) Se $a=b=c$, tem-se uma esfera de centro $C(0,0,0)$ e raio a.

c) Se o centro do elipsoide for o ponto $C(h,k,l)$, a equação do elipsoide será

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$$

2. Hiperboloide de uma folha

O hiperboloide de uma folha apresenta uma das seguintes equações

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ou seja, dois dos termos são positivos e um é negativo.

Para apresentar um exemplo de esboço do gráfico desta superfície, escolhe-se a primeira das equações apresentadas acima. Os demais casos são análogos.

Hiperboloide de uma folha

Hiperboloide de uma folha:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Cálculo dos traços:

- Plano xOy $(z=0)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ou seja, uma elipse centrada na origem.

- Plano xOz $(y=0)$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Ou seja, uma hipérbole com eixo real no eixo dos x.

- Plano yOz $(x=0)$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

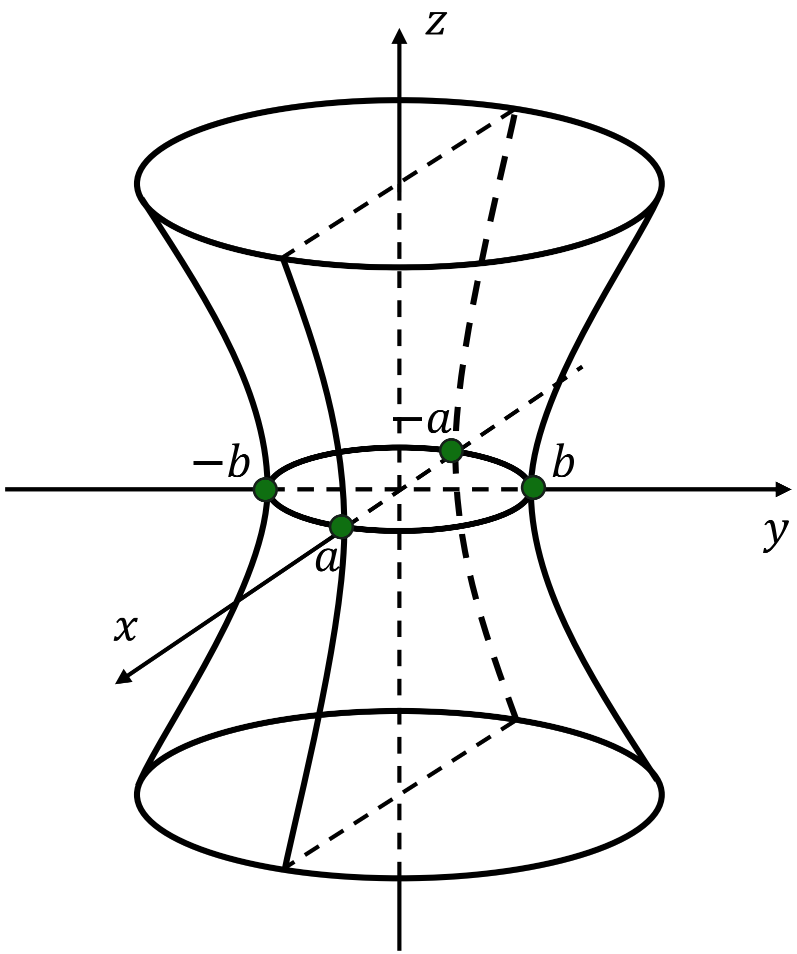
Ou seja, uma hipérbole com eixo real no eixo dos y.

Hiperboloide de uma folha

Hiperboloide de uma folha:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Esboço do gráfico:

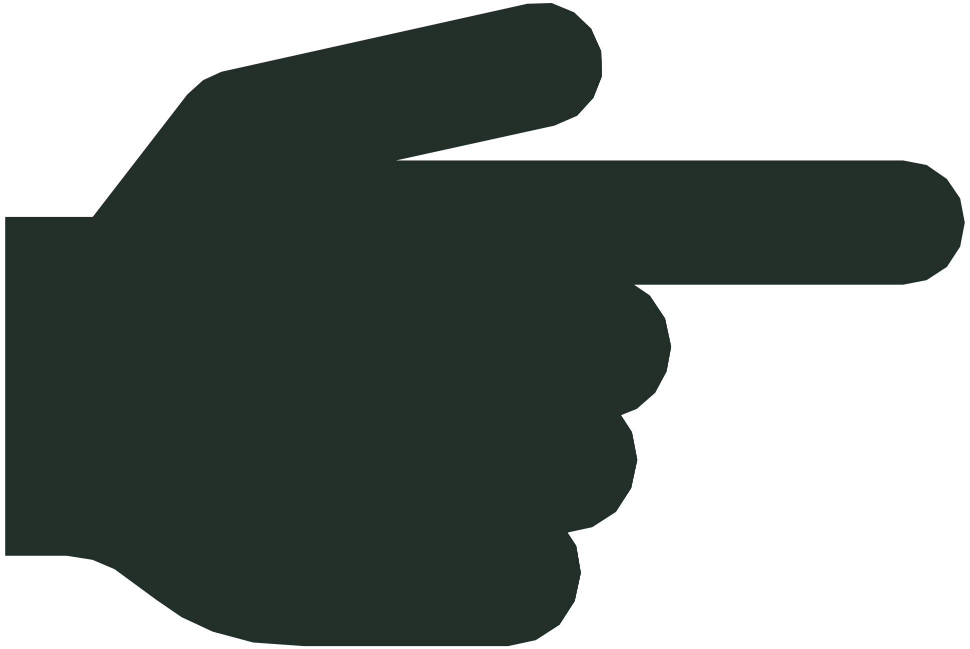


Hiperboloide de uma folha

Hiperboloide de uma folha:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Observações



a) Se o traço que representa uma elipse for no caso uma circunferência, tem-se um hiperboloide de uma folha de **revolução**.

b) Note que, para um plano $z = z_0 \neq 0$, tem-se uma elipse maior do que aquela em $z = 0$. Isso pode ser verificado algebricamente ao fazer a substituição, pois

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z_0^2}{c^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{z_0^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{z_0^2}{c^2}\right)}=1$$

o que aumenta, proporcionalmente, os eixos da elipse.

3. Hiperboloide de duas folhas

O hiperboloide de uma folha apresenta uma das seguintes equações

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ou seja, dois dos termos são negativos e um é positivo.

Para apresentar um exemplo de esboço desta superfície, escolhe-se a segunda das equações apresentadas acima. Os demais casos são análogos.

Hiperboloide de duas folhas

Cálculo dos traços:

Hiperboloide de duas folhas:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

- Plano xOy $(z=0)$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ou seja, uma hipérbole com eixo real no eixo dos y.

- Plano yOz $(x=0)$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Ou seja, uma hipérbole com eixo real no eixo dos y.

- Plano xOz $(y=0)$

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Ou seja, tem-se o conjunto vazio.

Hiperboloide de duas folhas

Hiperboloide de duas folhas:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Cálculo dos traços:

- Plano $y = y_0$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{y_0^2}{b^2}-1$$

Se

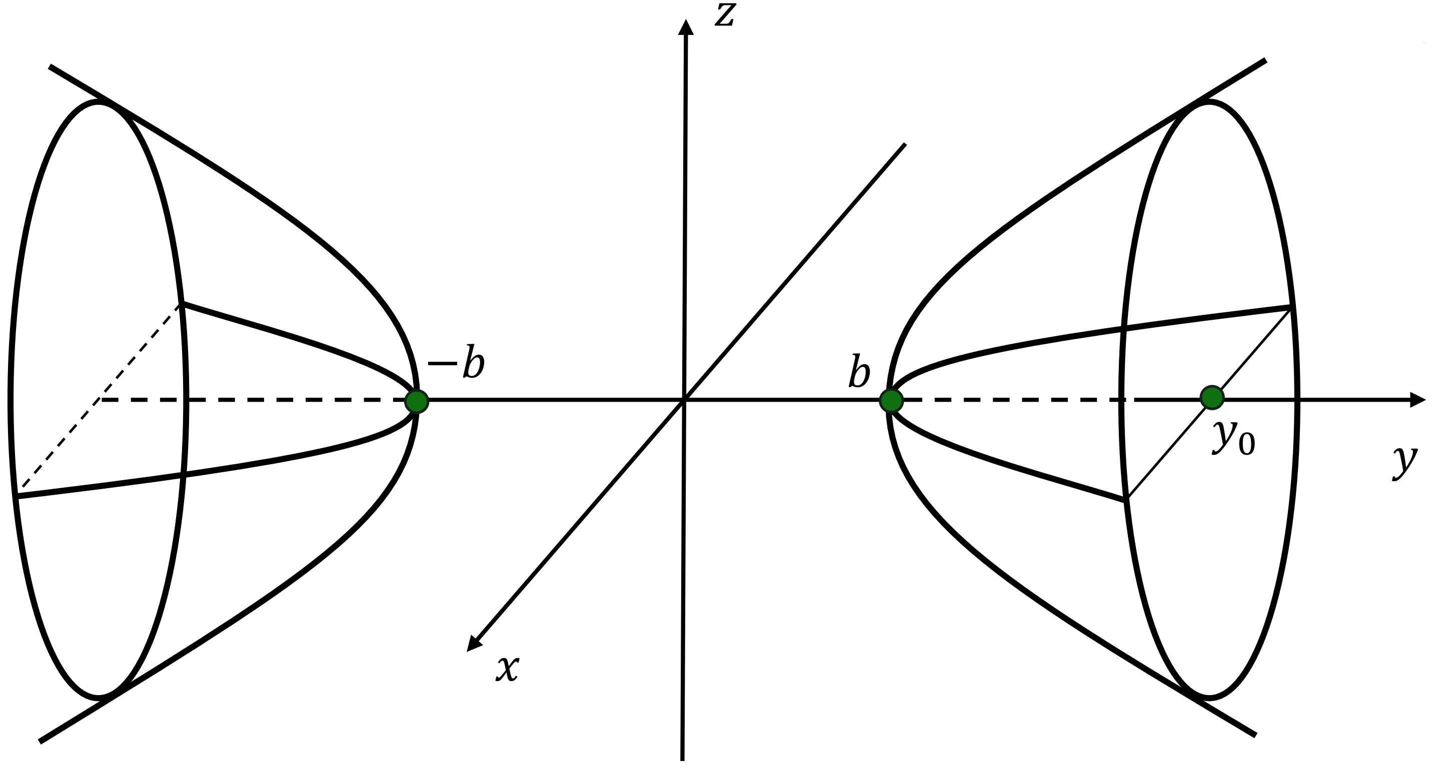
- $|y_0| < b$, tem-se o conjunto vazio.
- $|y_0| = b$, tem-se o ponto $P(0, y_0, 0)$.
- $|y_0| > b$, tem-se uma elipse.

Hiperboloide de duas folhas

Hiperboloide de duas folhas:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Esboço do gráfico:

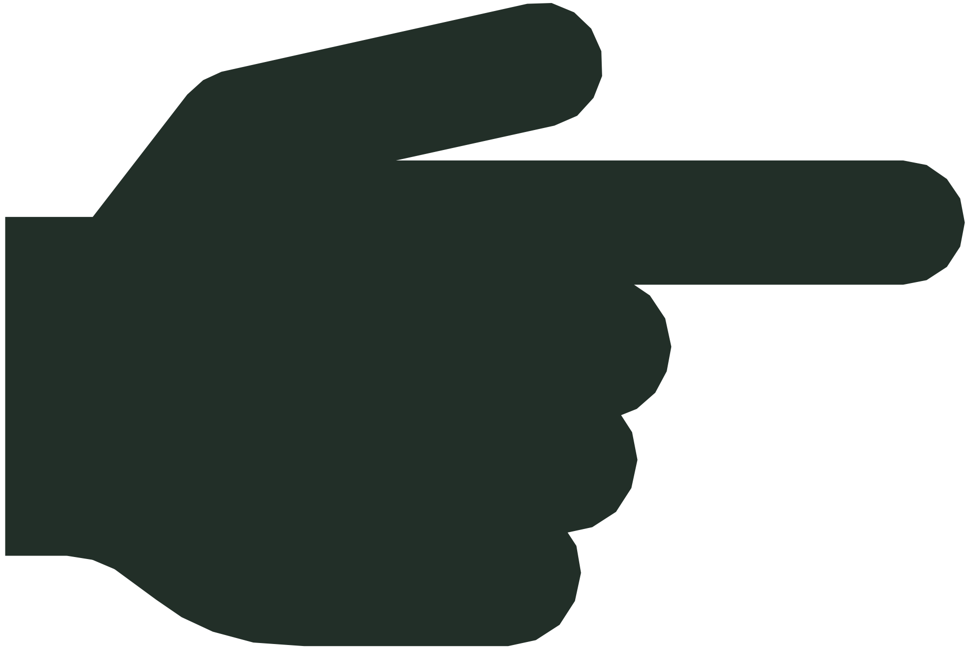


Hiperboloide de duas folhas

Hiperboloide de duas folhas:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Observação



Se o traço que representa uma elipse for no caso uma circunferência, tem-se um hiperboloide de duas folhas de **revolução**.