Departamento de Ciência da Computação - DCC
Prof. Ricardo Martins
Site: https://ricardofm.com
Email: ricardo.martins@udesc.br
Ramal: 3481-7823
Sala: Bloco F – 2º piso (sala 8)

LINGUAGENS FORMAIS E AUTÔMATOS

LFA0001:
Ciência da Computação
3ª fase

CONJUNTO

- Um <u>conjunto</u> é uma coleção de elementos em que não são consideradas ocorrências múltiplas dos mesmos nem há relação de ordem entre eles.

Exemplo:

A inclusão do elemento ♦ no conjunto {♣,♦,♥,♠} resulta no próprio conjunto {♣,♦,♥,♠}, pois o mesmo já faz parte do conjunto e, portanto, não deve ser considerado novamente. Por outro lado, o conjunto {♣,♦,♥,♠} é igual ao conjunto {♦,♣,♠,♥}, uma vez que não existe relação de ordem entre os elementos que os compõem.

SÍMBOLO

- Um símbolo corresponde a uma representação gráfica única e indivisível. Se formado por caracteres, um símbolo pode ser compostopor um número arbitrário deles.

Exemplo:

São exemplos de símbolos: “a”, “abc”, “♠”, “1”, etc.

Símbolos podem ser agrupados na forma de um conjunto, caso em que o mesmo recebe o nome de alfabeto. Conjuntos, por outro lado, podem ser formados por elementos de outra natureza, e não apenas por símbolos. É o caso de conjuntos formados por cadeias (sequências finitas de símbolos) e conjuntos cujos elementos também são conjuntos.

ENUMERAÇÃO

- Alguns conjuntos podem ser especificados através da simples <u>enumeração</u> de todos os seus elementos, denotados entre chaves e separados por vírgulas.

Exemplo:

O conjunto formado pelos elementos 0,1,2,3 é representado por {0,1,2,3}.

O conjunto {a,b,c,d,e,f} é formado pelas seis primeiras letras do alfabeto romano.

O conjunto {01, 231, 33, 21323} contém os elementos 01,231,33 e 21323.

NOMES

Conjuntos podem ser referenciados através de nomes, arbitrariamente escolhidos.

Exemplo:

$X = \{0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d, e, f\}$

Assim, os nomes X e Y passam a denotar os conjuntos correspondentes.

NÚMERO DE ELEMENTOS

- O número de elementos contido em um conjunto A é denotado por:

$|A|$

Exemplo:

$X = \{0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d, e, f\}$

$|X|=4, |Y|=6$

PERTENCIMENTO

Os símbolos $\in$ e $\notin$ servem para denotar se um determinado elemento pertence ou não pertence a um conjunto, respectivamente.

Exemplo:

$X = \{0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d, e, f\}$

$0 \in X$, $5 \notin X$, $2 \notin Y$, $b \notin X$, $c \in Y$, $h \notin Y$

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Conjuntos podem conter um número finito ou infinito de elementos.

No primeiro caso, o conjunto pode ser denotado enumerando-se (relacionando-se explicitamente) todos os elementos que o compõem, que são <u>conjuntos finitos</u>.

CONJUNTOS INFINITOS

Conjuntos infinitos podem ser denotados através da especificação (formal ou informal) de regras ou propriedades que devem ser satisfeitas por todos os seus elementos, possibilitando assim a sua identificação precisa e completa a partir de uma especificação finita.

Exemplo:

$P = \{x \mid x \text{ é um número primo}\}$

$Q = \{y \mid \exists n \text{ inteiro tal que } y = n^2\}$

CONJUNTO VAZIO

O conjunto que não contém nenhum elemento recebe o nome de <u>conjunto vazio</u>.

Por definição, $|\emptyset| = 0$.

O conjunto vazio é denotado por $\emptyset$ ou ainda pelo símbolo $\{\}$.

Assim, $\{\} = \emptyset$.

SUBCONJUNTO

Um conjunto A é dito "contido em um conjunto B", condição esta denotada através do símbolo "$\subseteq$", se todo elemento de A for também elemento de B. Neste caso diz-se, equivalentemente, que "A é umsubconjunto de B" ou, ainda, que "B contém A".

Os conjuntos $\emptyset$ e A são, por definição, subconjuntos de qualquer conjunto A.

Exemplo:

$A = \{b, c, d\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ e $C = \{e, a, d, b, c\}$

$A \subseteq B$ e $B \subseteq C$

UNIÃO, INTERSECÇÃO E CONJUNTOS DISJUNTOS

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ ... $\bigcup_{0,n} A_i = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$ ... $\bigcap_{0,n} A_i = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$

Dois conjuntos, A e B, são ditos disjuntos se $A \cap B = \emptyset$.

DIFERENÇA

Define-se a diferença entre dois conjuntos, A e B (nesta ordem), como sendo o conjunto formado por todos os elementos de A não pertencentes ao conjunto B.

Denota-se este conjunto como:

$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \}$

COMPLEMENTAÇÃO

Complementação:

Define-se a complementação de um conjunto A em relação ao conjunto B , $A \subseteq B$, como sendo o conjunto de todos os elementos de B que não pertencem a A.

Denota-se este conjunto como:

$\overline{A}_B = B - A$

PRODUTO CARTESIANO

O produto cartesiano de dois conjuntos é o conjunto formado por todos os pares ordenados (a,b), em que a é um elemento de A, e b um elemento de B, tal que, $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B \}$.

ALFABETOS, PALAVRAS, LINGUAGENS E GRAMÁTICAS

Definição: Símbolo, Caractere

- entidades abstratas básicas
- não definida formalmente

Exemplo: Símbolo

- letras
- dígitos

ALFABETOS, PALAVRAS, LINGUAGENS E GRAMÁTICAS

Definição: Alfabeto

- conjunto finito de símbolos

Exemplo: Alfabeto

- $\Sigma_1 = \{ a, b, c \}$
- $\Sigma_2 = \{ 0, 1, 2, ..., 9 \}$
- $\Sigma_3 = \{ \ \}$

ALFABETOS, PALAVRAS, LINGUAGENS E GRAMÁTICAS

Definição: Palavra, Cadeia de Caracteres, Sentença

- sobre um alfabeto
- sequência finita de símbolos justapostos

Exemplo: Palavra

- a, abcb são palavras sobre { a, b, c }
- ε
  - palavra vazia – sem símbolos
  - é palavra sobre qualquer alfabeto

ALFABETOS, PALAVRAS, LINGUAGENS E GRAMÁTICAS

Definição: Tamanho, Comprimento de uma palavra

- número de símbolos que compõem uma palavra
- representação
  - $|w|$
  - w denota uma palavra

Exemplo: Tamanho de uma palavra

- $|abcb| = 4$
- $|\varepsilon| = 0$

ALFABETOS, PALAVRAS, LINGUAGENS E GRAMÁTICAS

- Conjunto de palavras sobre Σ
  - Σ^*
    - Conjunto de todas as palavras sobre Σ
  - Σ^+
    - $\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\varepsilon\}$

  Exemplo: para $\Sigma = \{ a, b \}$
    - $\Sigma^+ = \{ a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \ldots \}$
    - $\Sigma^* = \{ \varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \ldots \}$

ALFABETOS, PALAVRAS, LINGUAGENS E GRAMÁTICAS

- Definição: Prefixo, Sufixo, Subpalavra
  - prefixo (sufixo)
    - qq sequência de símbolos inicial (final) de um palavra
  - subpalavra
    - qq sequência de símbolos contígua de uma palavra

Exemplo: para abcb

- prefixos: ε, a, ab, abc, abcb
- sufixos: ε, b, cb, bcb, abcb
- prefixos e sufixos são **subpalavras**

ALFABETOS, PALAVRAS, LINGUAGENS E GRAMÁTICAS

- Definição: Linguagem Formal
  - um conjunto de palavras sobre um alfabeto
- Exemplo: Ling. Formal sobre $\Sigma = \{ a, b \}$
  - conjunto vazio >> $\{ \}$
  - conjunto formado pela palavra vazia >> $\{ \varepsilon \}$
    - Obs.: $\{ \} \neq \{ \varepsilon \}$
  - conjunto dos palíndromos
    - palavras que tem a mesma leitura da esquerda p/ a direita (e vice-versa)
    - linguagem infinita
    - ε, a, b, aa, bb, aaa, aba, bab, bbb, aaaa, ... são palíndromos

ALFABETOS, PALAVRAS, LINGUAGENS E GRAMÁTICAS

- Definição: Concatenação
  - operação binária, definida sobre uma linguagem
  - palavra formada pela justaposição das palavras
  - notação
    - justaposição dos símbolos que representam as palavras componentes
  - satisfaz as seguintes propriedades:
    - associativa: $v(wt) = (vw)t$
    - elemento neutro (esq/dir): $\varepsilon w = w = w\varepsilon$
  - Exemplo: Concatenação
    - para $v = ab$ e $w = cd$ >> $vw = abcd$

ALFABETOS, PALAVRAS, LINGUAGENS E GRAMÁTICAS

- Definição: Concatenação Sucessiva
  - concatenação sucessiva de uma palavra com ela mesma
  - indefinida para ε^0
  - Exemplo: Concatenação Sucessiva
    - $w^3 = www$
    - $w^1 = w$
    - $a^5 = aaaaa$
    - $a^n = aaa...a$ (a repetido n vezes)
    - $w^0 = \varepsilon$, para $w \neq \varepsilon$

ALFABETOS, PALAVRAS, LINGUAGENS E GRAMÁTICAS

- Definição: Gramática

$$G = (V, T, P, S)$$

- V
  - conjunto finito de símbolos
  - variáveis / não-terminais
- T
  - conjunto finito de símbolos
  - terminais
  - disjunto de V
- P
  - conjunto finito de pares (α, β)
  - regra de produção
  - α é palavra de $(V \cup T)^+$
  - β é palavra de $(V \cup T)^*$
- S
  - elemento de V
  - variável inicial

ALFABETOS, PALAVRAS, LINGUAGENS E GRAMÁTICAS

- Definição: Gramática
  - Notação de (α, β)
    - $\alpha \rightarrow \beta$
  - Notação abreviada
    - $\alpha \rightarrow \beta_1$, $\alpha \rightarrow \beta_2$, ..., $\alpha \rightarrow \beta_n$
    - $\alpha \rightarrow \beta_1 \mid \beta_2 \mid ... \mid \beta_n$
- Definição: Derivação
  - G = (V, T, P, S) é uma gramática
  - Derivação é um par da relação denotada por "$\Rightarrow$"
    - com domínio em $(V \cup T)^+$
    - com contra-domínio em $(V \cup T)^*$
    - representado na forma infixa: $\alpha \Rightarrow \beta$

- $\Rightarrow$ é indutivamente definida
- para qq produção $S \rightarrow \beta$
  - S é o símbolo inicial
  - Sua derivação: $S \Rightarrow \beta$
  - para qq par $\alpha \Rightarrow \beta$
    - onde $\beta = \beta_u \beta_v \beta_w$
    - se $\beta_v \rightarrow \beta_t$ é regra de P, então

      $\beta \Rightarrow \beta_u \beta_t \beta_w$

Portanto... a derivação é a substituição de uma subpalavra de acordo com uma <u>regra de produção</u>

ALFABETOS, PALAVRAS, LINGUAGENS E GRAMÁTICAS

- Sucessivos passos de derivações
  - Notação: $\Rightarrow^*$
    - fecho transitivo e reflexivo da relação $\Rightarrow$
    - **zero ou mais** passos de derivações sucessivas
  - Notação: $\Rightarrow^+$
    - fecho transitivo da relação $\Rightarrow$
    - **um ou mais** passos de derivações sucessivas
  - Notação: $\Rightarrow^i$
    - exatos i passos de derivações sucessivas
    - i é um número natural

ALFABETOS, PALAVRAS, LINGUAGENS E GRAMÁTICAS

- Gramática é um formalismo
  - Axiomático
  - de geração
    - permite derivar ("gerar") todas as palavras da linguagem que representa
- Definição: Linguagem Gerada
  - G = (V, T, P, S)
  - Linguagem gerada por G
    - **L(G)** ou **Gera(G)**
  - Todas as palavras de símbolos terminais deriváveis, a partir de S

$$L(G) = \{ w \in T^* \mid S \Rightarrow^+ w \}$$

ALFABETOS, PALAVRAS, LINGUAGENS E GRAMÁTICAS

- Exemplo: números naturais
  - $G = (V, T, P, S)$
    - $V = \{ S, D \}$
    - $T = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 \}$
    - $P = \{ S \rightarrow D, S \rightarrow DS, D \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \}$
  - uma derivação do número 243 (existe outra?)

$$S \Rightarrow DS \Rightarrow 2S \Rightarrow 2DS \Rightarrow 24S \Rightarrow 24D \Rightarrow 243$$

  - portanto

$S \Rightarrow^* 243$

$S \Rightarrow^+ 243$

$S \Rightarrow^6 243$

  - logo, GERA(G) representa o conjunto dos números naturais

ALFABETOS, PALAVRAS, LINGUAGENS E GRAMÁTICAS

- Definição: Equivalência de Gramáticas
  - G_1 e G_2 são equivalentes **sse**

    $GERA(G_1) = GERA(G_2)$

- Convenções:
  - A, B, C, ..., S, T — símbolos variáveis
  - a, b, c, ..., s, t — símbolos terminais
  - u, v, w, x, y, z — palavras de símbolos terminais
  - α, β, ... — palavras de símbolos variáveis e/ou terminais

ALFABETOS, PALAVRAS, LINGUAGENS E GRAMÁTICAS

- Exemplo: texto com aspas balanceadas
  - $G = (V, T, P, S)$

    $V = \{ S \}$

    $T = \{ x, \text{“} \}$

    $P = \{ S \rightarrow xS \mid \text{“}\, S \,\text{”} \mid \varepsilon \}$

ALFABETOS, PALAVRAS, LINGUAGENS E GRAMÁTICAS

- Exemplo: { ww | w é palavra de $\{ a, b \}^*$ }
  - $G = (V, T, P, S) = (\{ S, X, Y, A, B, F \}, \{ a, b \}, P, S)$

$$
\begin{aligned}
P = \{ \; S & \rightarrow XY, \\
X & \rightarrow XaA \mid XbB \mid F \\
Aa & \rightarrow aA,\; Ab \rightarrow bA,\; AY \rightarrow Ya, \\
Ba & \rightarrow aB,\; Bb \rightarrow bB,\; BY \rightarrow Yb, \\
Fa & \rightarrow aF,\; Fb \rightarrow bF,\; FY \rightarrow \varepsilon \; \}
\end{aligned}
$$

  - baba

$$
\begin{aligned}
S & \Rightarrow \underline{X}Y \Rightarrow Xa\underline{AY} \Rightarrow \underline{X}aYa \Rightarrow Xb\underline{Ba}Ya \Rightarrow Xba\underline{BY}a \Rightarrow \underline{X}baYba \\
& \Rightarrow \underline{Fb}aYba \Rightarrow b\underline{Fa}Yba \Rightarrow ba\underline{FY}ba \Rightarrow ba\varepsilon ba \Rightarrow baba
\end{aligned}
$$