MDI0002 – Matemática Discreta
Videoaula 10
Relação de Ordem

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2020

Relação de Ordem

- tipo especial e importante de relação
- reflete a noção intuitiva de ordem
- exemplos de relações de ordem já estudadas
  - “está contido” sobre conjuntos
  - implicação em proposições
  - menor ou igual em números

Definição (Relação de Ordem)

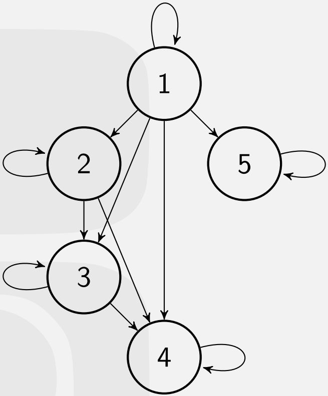
$R \subseteq A^2$ é uma Relação de Ordem Parcial se, e somente se, R é uma endorrelação reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Para $\langle A, R \rangle$ relação de ordem, o conjunto A é dito **conjunto parcialmente ordenado**.

Exemplos

- $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$
- $\langle 2^A, \subseteq \rangle$
- $\langle \mathbb{Q}, = \rangle$
- $\{\langle x, y \rangle \in (\mathbb{N} - \{0\})^2 \mid x \text{ divide } y\}$
- $\{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle d, e \rangle, \langle e, e \rangle\}$
  sobre o conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$

Relação de ordem pode ser representada como grafo



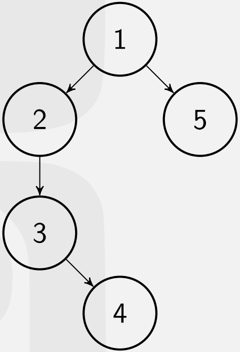
Jamais ocorrerá um ciclo (por quê?)

- excetuando-se endoarcos
- arcos com origem e destino em um mesmo nodo

Diagramas de Hasse

Para relação de ordem

- transitividade e reflexividade ocasiona "poluição visual"
- usual omitir as arestas que podem ser deduzidas



Esse tipo de representação é denominada **Diagrama de Hasse**

Conjuntos ordenados são usados para dar semântica para sistemas concorrentes

- geralmente usa-se ordem parcial *estrita*: relação transitiva, antissimétrica e **irreflexiva**
- importante exemplo
- clara e simples visão de concorrência
- concorrência verdadeira

Exemplo

Programa sequencial

- o símbolo ; representa dependência causal

$$\texttt{c}_1\,;\ \texttt{c}_2\,;\ \texttt{c}_3$$

- ordem parcial $\langle\{c_1, c_2, c_3\}, \leq_c\rangle$ como semântica, onde $c_1 \leq_c c_2$, $c_2 \leq_c c_3$ e portanto, $c_1 \leq_c c_3$
- mais precisamente, $\leq_c = \{\langle c_1, c_2\rangle, \langle c_1, c_3\rangle, \langle c_2, c_3\rangle\}$

Exemplo

De forma análoga, considere

$$\texttt{p}_1\texttt{; p}_2$$
$$\texttt{q}_1\texttt{; q}_2\texttt{; q}_3$$

Semânticas:

$\langle\{p_1, p_2\}, \leq_p\rangle$ onde $p_1 \leq_p p_2$

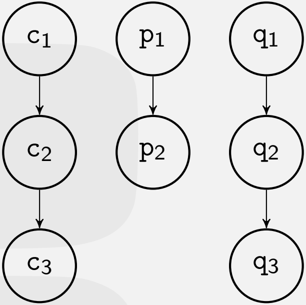
$\langle\{q_1, q_2, q_3\}, \leq_q\rangle$ onde $q_1 \leq_q q_2$ e $q_2 \leq_q q_3$

Suponha os 3 programas concorrentes sem qualquer sincronização

Semântica induzida pela união disjunta de conjuntos

$$\langle\{c_1, c_2, c_3\} \uplus \{p_1, p_2\} \uplus \{q_1, q_2, q_3\}, \leq_c \uplus \leq_p \uplus \leq_q\rangle$$

Exemplo



Todas as componentes são independentes (concorrentes)

- excetuando-se quando especificado o contrário
- quando definido um par da relação de ordem
- determinando uma restrição de sequencialidade

Exemplo

Suponha que

- ocorrência de $\mathtt{p}_2$ depende de $\mathtt{c}_2$
- ocorrência de $\mathtt{c}_3$ depende de $\mathtt{q}_3$

Sincronização: suficiente incluir os pares $c_2 \leq p_2$ e $q_3 \leq c_3$

Exemplo

Suponha que

- ocorrência de p_2 depende de c_2
- ocorrência de c_3 depende de q_3

Sincronização: suficiente incluir os pares $c_2 \leq p_2$ e $q_3 \leq c_3$

$$\langle \{c_1, c_2, c_3, p_1, p_2, q_1, q_2, q_3\}, \leq_c \uplus \leq_p \uplus \leq_q \uplus \{\langle c_2, p_2\rangle, \langle q_3, c_3\rangle\}\rangle$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{c}_1 \arrow[d] & \mathrm{p}_1 \arrow[d] & \mathrm{q}_1 \arrow[d] \\
\mathrm{c}_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{p}_2 & \mathrm{q}_2 \arrow[d] \\
\mathrm{c}_3 & & \mathrm{q}_3 \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Exemplo

Observe que

- união disjunta = composição paralela de sistemas
- inclusão de pares = sincronizações

operações simples e de fácil entendimento para especificar sistemas concorrentes e comunicantes