Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral

Radiciação e Potenciação

Prof. Dani Prestini

UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Radiciação e Potenciação

Radicais

DEFINIÇÃO Raiz *n*-ésima de um número real

Dado um número n inteiro, maior do que 1, e a e b como números reais, temos:

1. Se $b^n = a$, então b é uma **raiz *n*-ésima** de a. Escrevemos:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \text{ e } b \geq 0$$

2. O símbolo $\sqrt{}$ é conhecido por **radical**, a é o **radicando** e n é o **índice**.

3. Se a tem uma raiz n-ésima, então sua **principal raiz *n*-ésima** terá o mesmo sinal de a.

Radiciação e Potenciação

Radicais

EXEMPLO 1 Verificação das raízes *n*-ésimas principais

(a) $\sqrt{36} = 6$, porque $6^2 = 36$.

(b) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}} = \dfrac{3}{2}$, porque $\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{27}{8}$.

(c) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{8}} = -\dfrac{3}{2}$, porque $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3 = -\dfrac{27}{8}$.

(d) $\sqrt[4]{-625}$ não é um número real porque o índice 4 é par, e o radicando -625 é negativo (*não* existe número real cuja quarta potência seja negativa).

Radiciação e Potenciação

Propriedades dos radicais

Considere u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas, e m e n números positivos inteiros maiores do que 1. Convencionamos que todas as raízes são números reais e todos os denominadores são diferentes de zero.

Propriedade	**Exemplo**
1. $\sqrt[n]{uv} = \sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v}$	$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}}$	$\dfrac{\sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[4]{\dfrac{96}{6}} = \sqrt[4]{16} = 2$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{u}} = \sqrt[m \cdot n]{u}$	$\sqrt{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[2 \cdot 3]{7} = \sqrt[6]{7}$
4. $(\sqrt[n]{u})^n = u$	$(\sqrt[4]{5})^4 = 5$
5. $\sqrt[n]{u^m} = (\sqrt[n]{u})^m$	$\sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$
6. $\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} \lvert u \rvert & \text{para } n \text{ par} \\ u & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases}$	$\sqrt{(-6)^2} = \lvert -6 \rvert = 6$ $\sqrt[3]{(-6)^3} = -6$

Radiciação e Potenciação

Simplificação de Expressões com Radicais

EXEMPLO 2 **Remoção de fatores dos radicandos**

(a) $\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{16 \cdot 5}$

$= \sqrt[4]{2^4 \cdot 5}$

$= \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{5}$

$= 2\sqrt[4]{5}$

(b) $\sqrt{18x^5} = \sqrt{9x^4 \cdot 2x}$

$= \sqrt{(3x^2)^2 \cdot 2x}$

$= 3x^2\sqrt{2x}$

(c) $\sqrt[4]{x^4y^4} = \sqrt[4]{(xy)^4}$

$= |xy|$

(d) $\sqrt[3]{-24y^6} = \sqrt[3]{(-2y^2)^3 \cdot 3}$

$= -2y^2\sqrt[3]{3}$

Radiciação e Potenciação

Racionalização

EXEMPLO 3 **Racionalização**

(a) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{|x|}$

(c) $\sqrt[5]{\dfrac{x^2}{y^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^3}} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{y^2}}{\sqrt[5]{y^2}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^2y^2}}{\sqrt[5]{y^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^2y^2}}{y}$

Radiciação e Potenciação

Potenciação com Expoentes Racionais

DEFINIÇÃO Expoentes racionais

Seja u um número real, variável ou expressão algébrica, e n um inteiro maior do que 1. Então:

$$u^{1/n} = \sqrt[n]{u}.$$

Se m é um inteiro positivo, m/n está na forma reduzida e todas as raízes são números reais. Assim:

$$u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m \qquad \text{e} \qquad u^{m/n} = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}.$$

EXEMPLO 4 Conversão de radicais para potências, e vice-versa

(a) $\sqrt{(x+y)^3} = (x+y)^{3/2}$

(b) $3x\sqrt[5]{x^2} = 3x \cdot x^{2/5} = 3x^{7/5}$

(c) $x^{2/3}y^{1/3} = (x^2y)^{1/3} = \sqrt[3]{x^2y}$

(d) $z^{-3/2} = \dfrac{1}{z^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{z^3}}$

Radiciação e Potenciação

Potenciação com Expoentes Racionais

EXEMPLO 5 Simplificação de expressões com potências

(a) $(x^2y^9)^{1/3}(xy^2) = (x^{2/3}y^3)(xy^2) = x^{5/3}y^5$

(b) $\left(\dfrac{3x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)\left(\dfrac{2x^{-1/2}}{y^{2/5}}\right) = \dfrac{6x^{1/6}}{y^{9/10}}$

EXEMPLO 6 Simplificação de expressões com radicais

(a)
$$\begin{aligned} 2\sqrt{80} - \sqrt{125} &= 2\sqrt{16 \cdot 5} - \sqrt{25 \cdot 5} \\ &= 8\sqrt{5} - 5\sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2y} - \sqrt{y^3} &= \sqrt{(2x)^2y} - \sqrt{y^2y} \\ &= 2|x|\sqrt{y} - |y|\sqrt{y} \\ &= (2|x| - |y|)\sqrt{y} \end{aligned}$$