Cônicas
Parábolas e Elipses
(Teoria)

Estrutura desta apresentação

- Parábolas
  - Recapitulação
  - Translação de eixos
  - Equações com vértice fora da origem
- Elipses
  - Definição geométrica
  - Elementos
  - Equações com centro na origem
  - Equações com centro fora da origem

A parábola

Recapitulando…

“Uma parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são **equidistantes** de F e d.”

1. **Parábola com vértice na origem**
    i. O eixo da parábola é o eixo dos y

Elementos: $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ e $d: y = -\frac{p}{2}$

Equação: $x^2 = 2py$

    ii. O eixo da parábola é o eixo dos x

Elementos: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ e $d: x = -\frac{p}{2}$

Equação: $y^2 = 2px$

A parábola

Retomando…

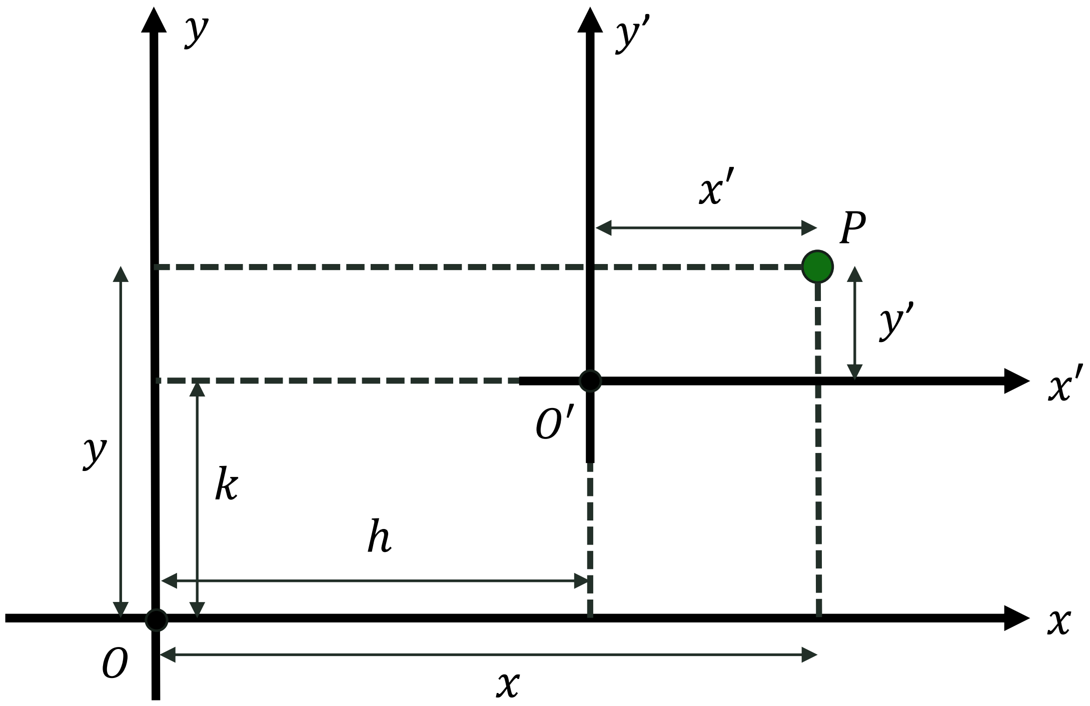
A parábola

Deseja-se agora estabelecer as equações da parábola com vértice fora da origem.

Ao invés de desenvolver as equações para estes casos do início, faz-se uso do processo de **translação de eixos**, adaptando as equações até então obtidas.

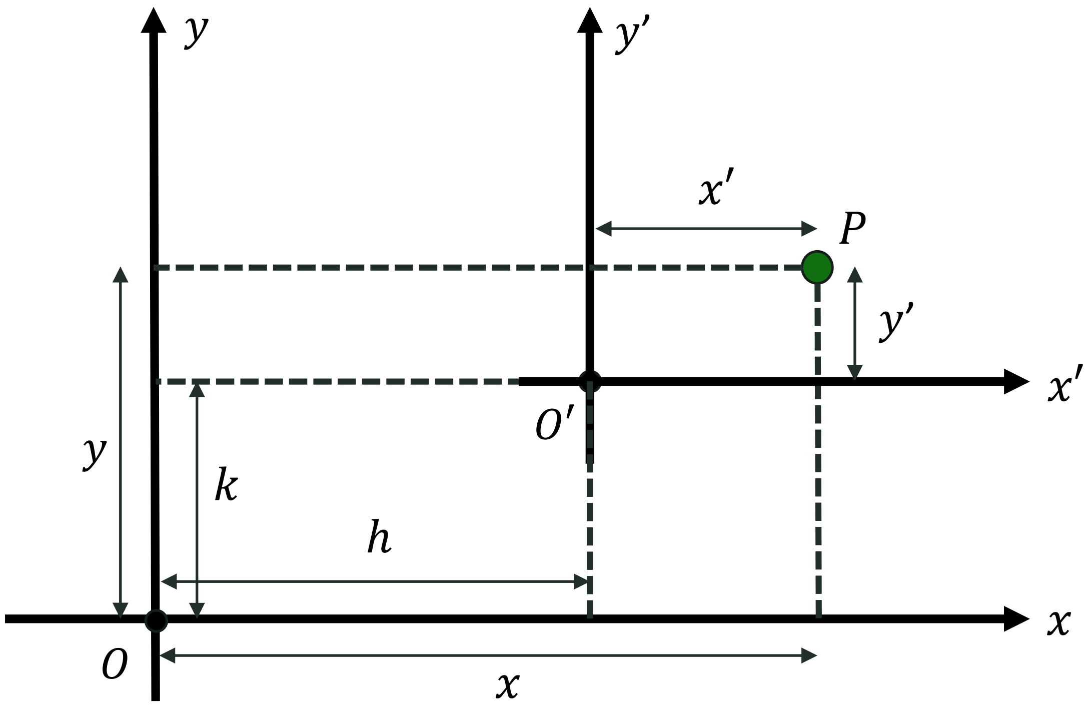
Considere, no plano cartesiano xOy, um ponto $O'(h, k)$ arbitrário. Introduz-se um novo sistema $x'O'y'$ tal que os eixos $O'x'$ e $O'y'$ tenham a mesma unidade de medida, a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos Ox e Oy. Neste caso, um sistema pode ser obtido a partir do outro.

A parábola



Seja um ponto P qualquer do plano tal que suas coordenadas são:

- x e y em relação ao sistema xOy;
- x' e y' em relação ao sistema $x'O'y'$.



Note que

$$x = x' + h \qquad \text{e} \qquad y = y' + k$$

ou

$$x' = x - h \qquad \text{e} \qquad y' = y - k$$

Estas são as **fórmulas de translação** que permitem transformar coordenadas de um sistema para outro.

A parábola

A parábola

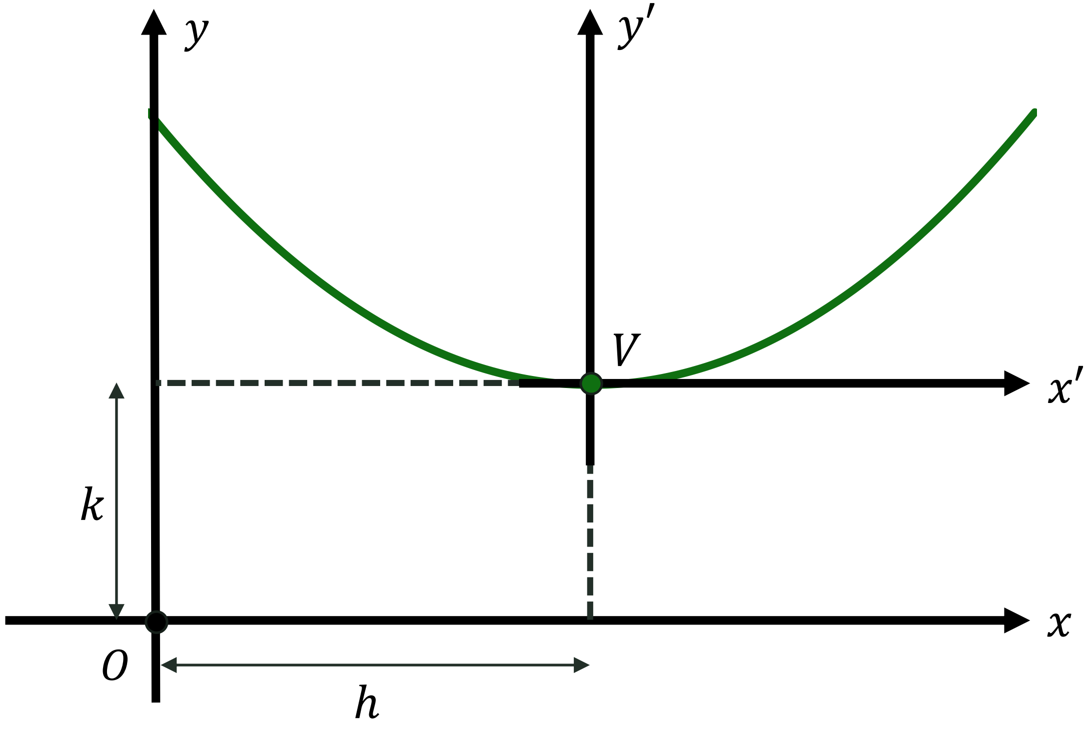
Com este conceito, pode-se agora obter as equações restantes para a parábola.

2. Parábola com vértice fora da origem

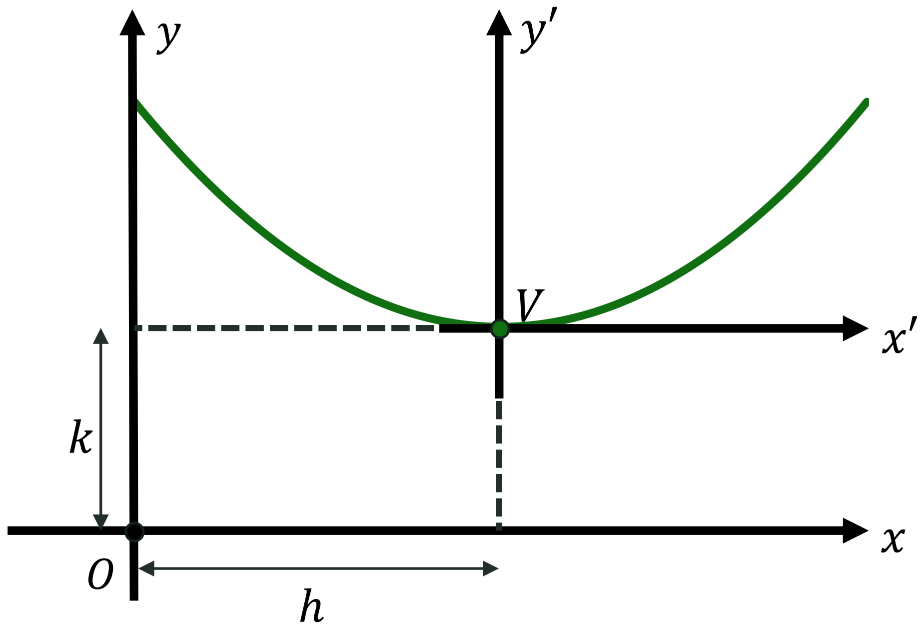
i. O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos y

Seja uma parábola de $V(h, k)$ e eixo paralelo ao eixo dos y, sendo h e k coordenadas de V em relação ao sistema xOy.

Considere agora um novo sistema $x'O'y'$ com a origem em V.



A parábola



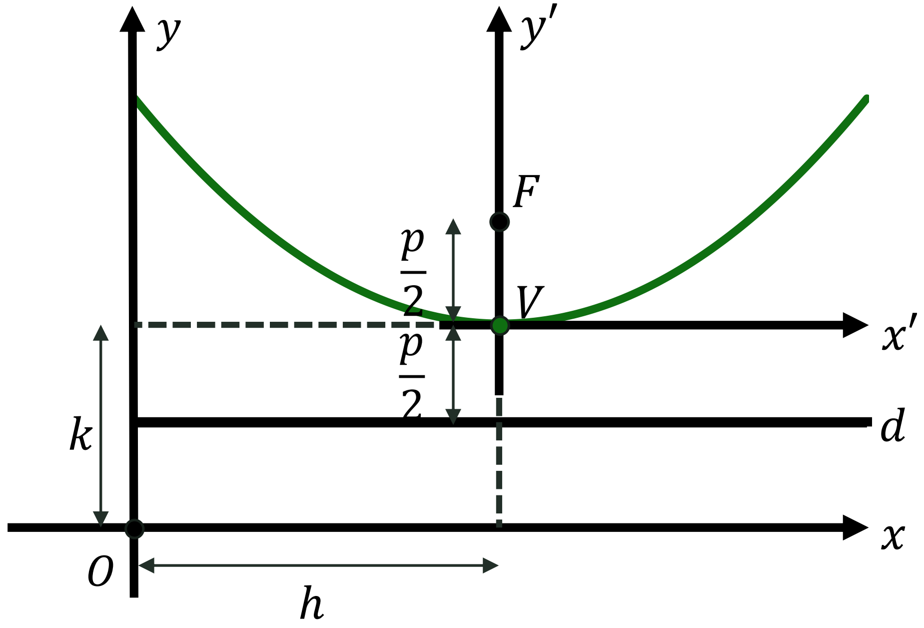
Sabe-se que a equação da parábola referida ao sistema $x'O'y'$ é

$$x'^2 = 2py'$$

Utilizando as fórmulas de translação, uma vez que se deseja o resultado no sistema xOy, tem-se

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2 = 2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})$$

que é a **forma padrão da parábola de vértice $V(h,k)$ e eixo paralelo ao eixo dos y.**



$$(x-h)^2 = 2p(y-k)$$

Além disso, as coordenadas de seus elementos serão

$$F\left(h, k+\frac{p}{2}\right)$$

$$d: y = -\frac{p}{2} + k$$

A parábola

2. **Parábola com vértice fora da origem**

   ii. O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos x

Fazendo um processo análogo ao do caso anterior, tem-se

$$y'^2 = 2px'$$

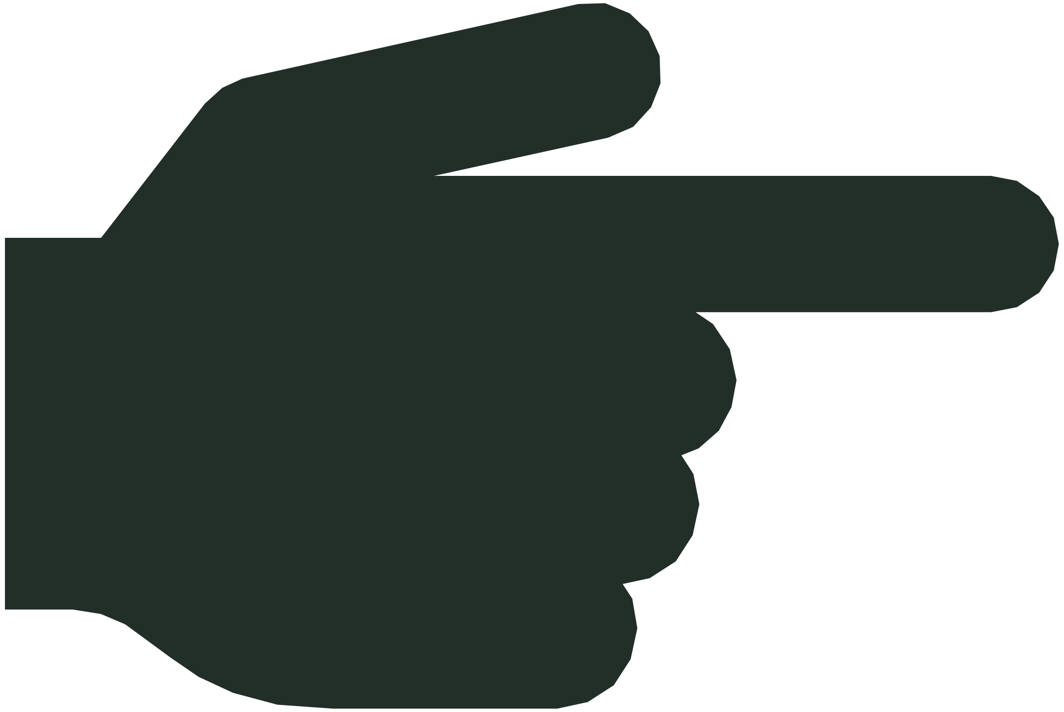
$$\boldsymbol{(y-k)^2 = 2p(x-h)}$$

Esta é a **forma padrão da parábola de vértice $\boldsymbol{V(h,k)}$ e eixo paralelo ao eixo dos $\boldsymbol{x}$.** Seus elementos serão então:

$$\boldsymbol{F\left(h+\frac{p}{2},k\right)}$$

$$\boldsymbol{d: x = -\frac{p}{2}+h}$$

A parábola



Observação!

Ao abrir as equações da parábola com vértice fora da origem, obtêm-se:

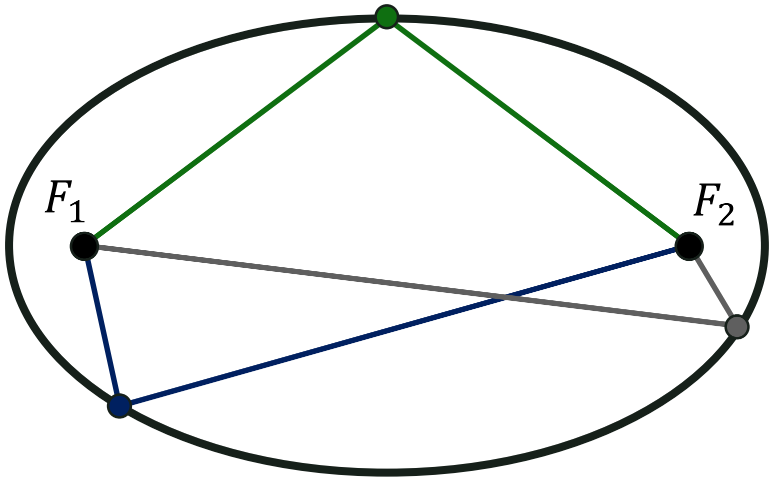
- $y = ax^2 + bx + c$, quando o eixo é paralelo ao eixo dos y; e
- $x = ay^2 + by + c$, quando o eixo é paralelo ao eixo dos x.

Essas são as chamadas **formas explícitas** da equação da parábola. Informações conhecidas de cálculo sobre esta estrutura podem ser utilizadas aqui.

A elipse

A elipse

"A elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos do plano é constante."



Sejam dois pontos distintos do plano, F_1 e F_2, tais que $d(F_1, F_2) = 2c$. Considere uma constante a tal que $a > c$.

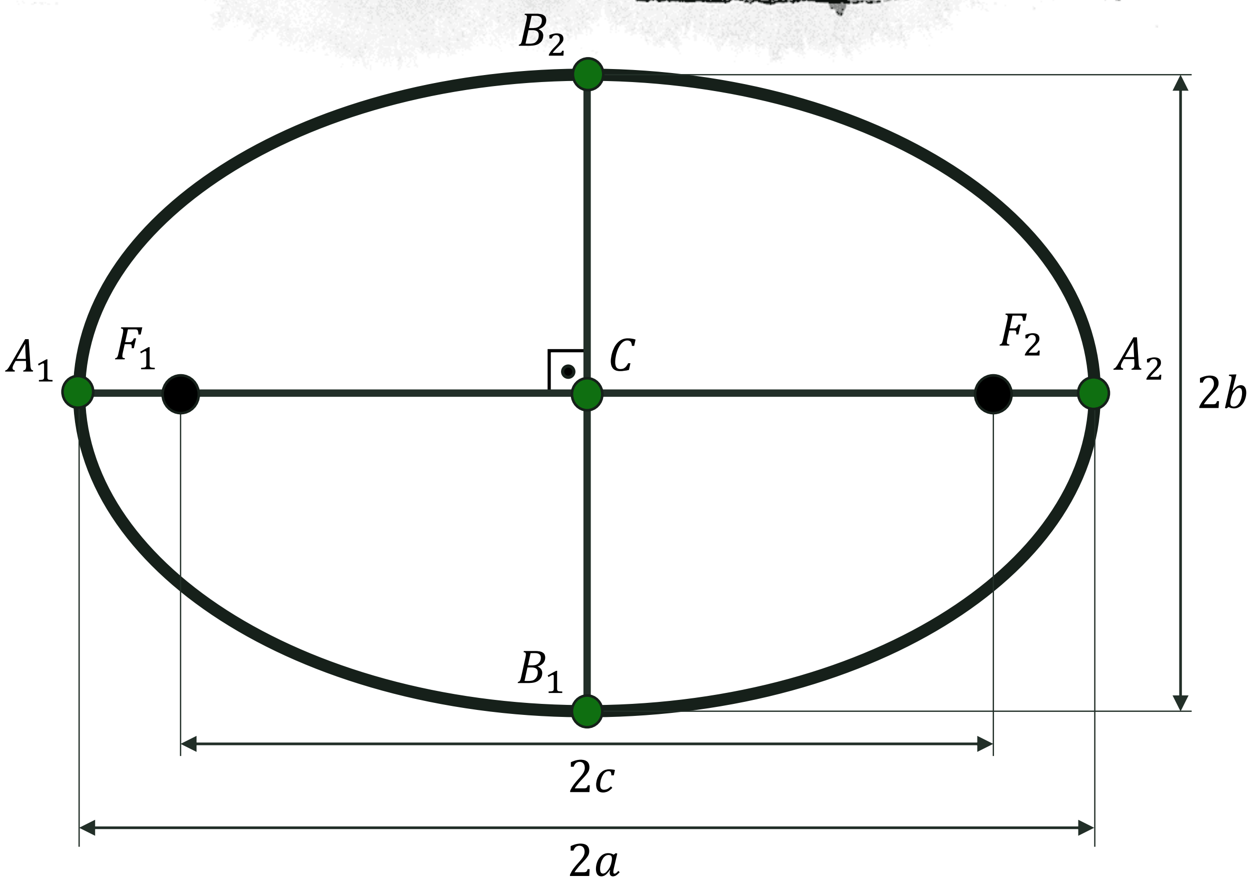
A elipse será dada então por todos pontos P tais que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

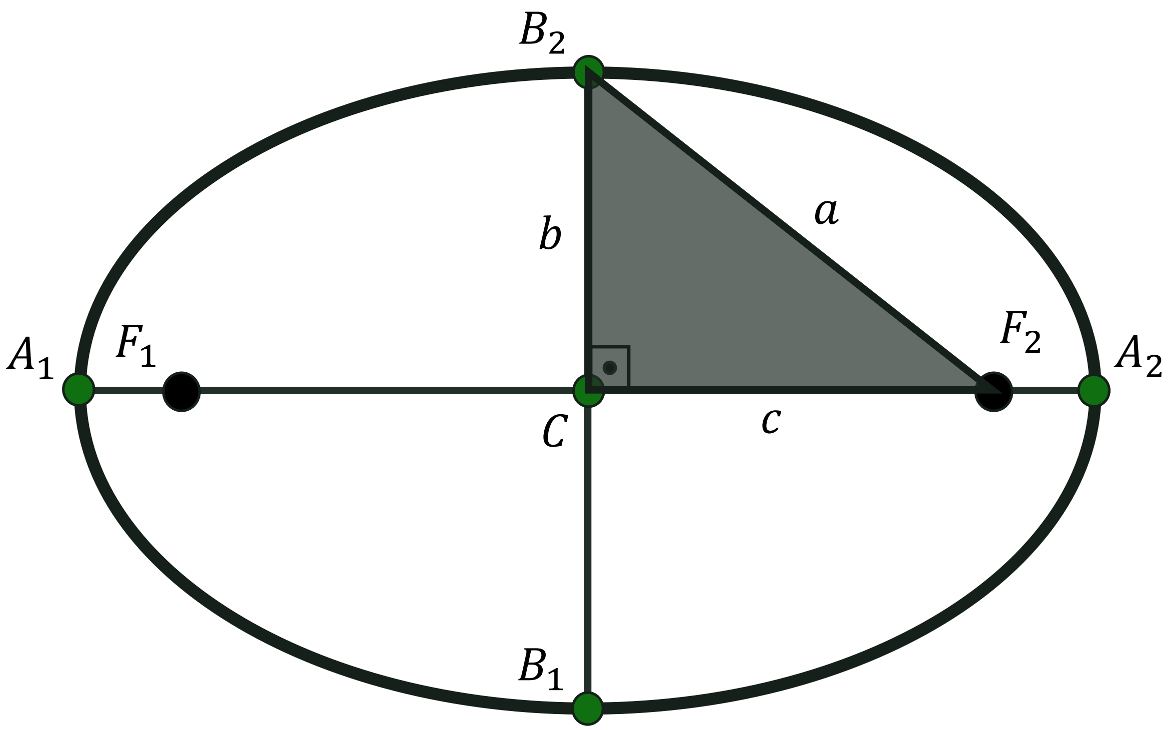
A elipse

Elementos:

- **Focos:** pontos F_1 e F_2;
- **Distância focal:** distância entre F_1 e F_2 (igual a $2c$);
- **Centro:** ponto médio do segmento F_1F_2;
- **Eixo maior:** segmento A_1A_2 de comprimento $2a$;
- **Eixo menor:** segmento B_1B_2 de comprimento $2b$;
- **Vértices:** pontos A_1, A_1, B_1 e B_2;
- **Excentricidade:** e, dado por $e = \frac{c}{a} < 1$.



Note que é possível criar o seguinte triângulo retângulo na elipse:



A partir dele, pode-se estabelecer a seguinte relação na elipse:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

A elipse

A elipse

Análogo ao que foi feito para a parábola, apresentam-se agora as equações de quatro casos de elipses:

1. **Elipse de centro na origem do sistema**
   1. O eixo maior está sobre o eixo dos x
   2. O eixo maior está sobre o eixo dos y
2. **Elipse de centro fora da origem do sistema**
   1. O eixo maior é paralelo ao eixo dos x
   2. O eixo maior é paralelo ao eixo dos y

Observação: Não serão considerados nesta disciplina os casos em que o eixo maior está inclinado.

A elipse

1. Elipse de centro na origem do sistema

i. O eixo maior está sobre o eixo dos x

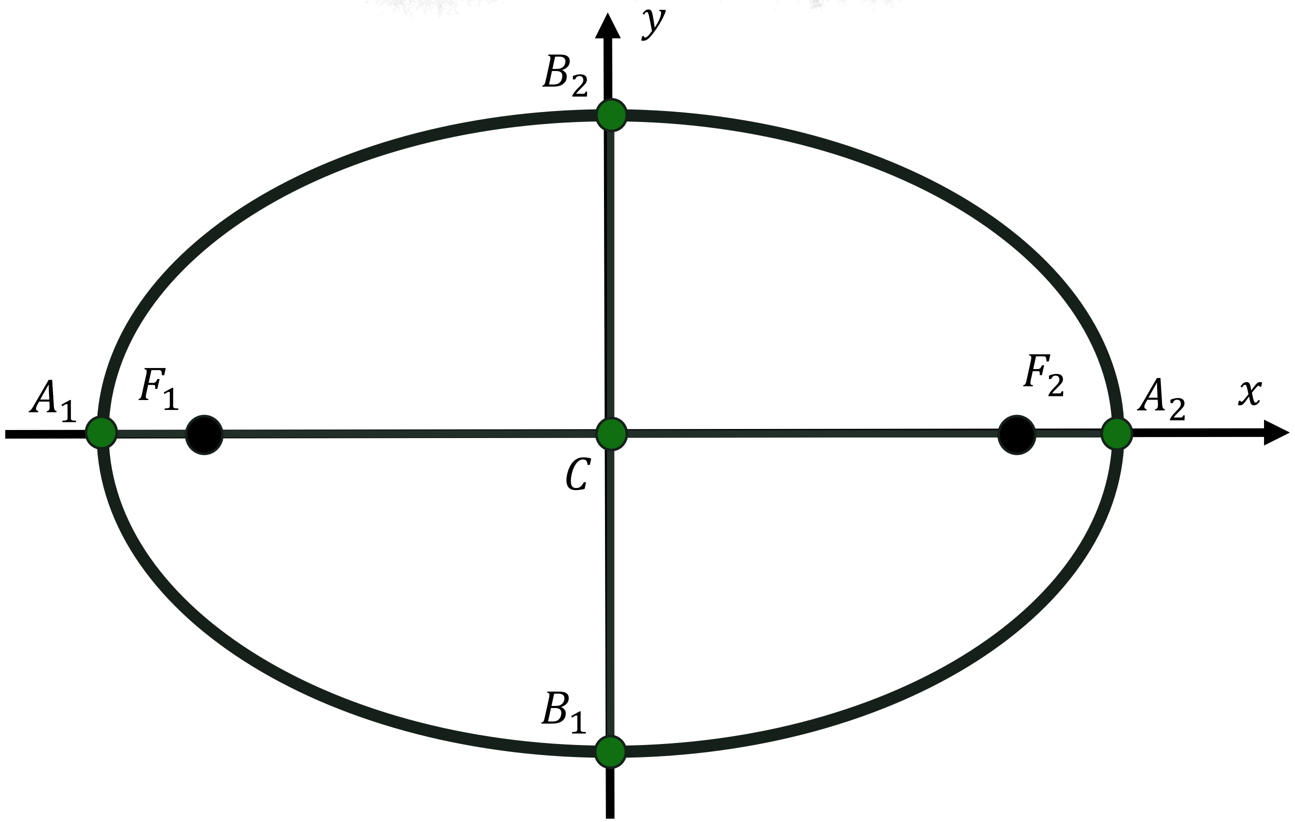
Os elementos da elipse terão como coordenadas:

$$C(0,0)$$

$$F_1(-c,0) \text{ e } F_2(c,0)$$

$$A_1(-a,0) \text{ e } A_2(a,0)$$

$$B_1(0,-b) \text{ e } B_2(0,b)$$



A elipse

$$C(0,0)$$

$$F_1(-c,0) \text{ e } F_2(c,0)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Da definição, um ponto $P(x, y)$ pertence à elipse se

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\left|\overrightarrow{F_1P}\right| + \left|\overrightarrow{F_2P}\right| = 2a$$

$$\sqrt{[x-(-c)]^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left[\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right]^2 = \left[2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right]^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$C(0,0)$$

$$F_1(-c,0) \text{ e } F_2(c,0)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2$$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$[cx - a^2]^2 = \left[-a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right]^2$$

$$[cx - a^2]^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2]$$

A elipse

$$C(0,0)$$

$F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2]$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$,

$$x^2(-b^2) - a^2y^2 = a^2(-b^2)$$

$$b^2\,x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

A elipse

$$C(0,0)$$

$$F_1(-c,0) \text{ e } F_2(c,0)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{b^2x^2 + a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

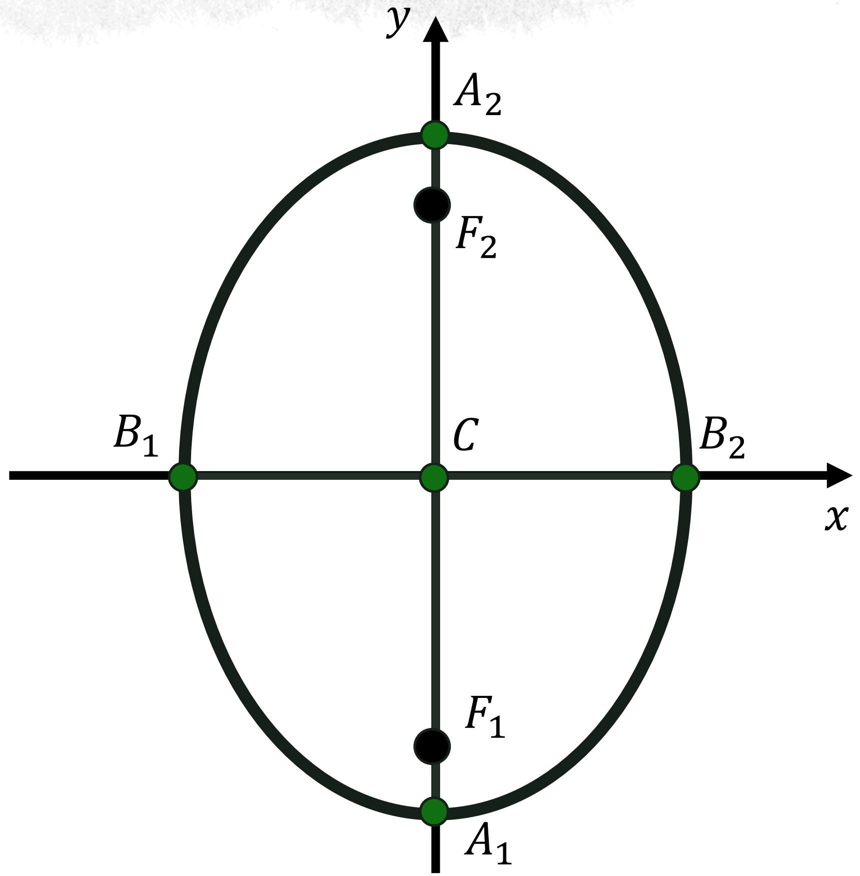
Esta é a **equação reduzida da elipse de centro na origem e eixo maior sobre o eixo dos x**.

A elipse

A elipse

1. Elipse de centro na origem do sistema

ii. O eixo maior está sobre o eixo dos y



Os elementos da elipse terão como coordenadas:

$$C(0,0)$$

$$F_1(0,-c) \text{ e } F_2(0,c)$$

$$A_1(0,-a) \text{ e } A_2(0,a)$$

$$B_1(-b,0) \text{ e } B_2(b,0)$$

$$C(0,0)$$

$$F_1(0,-c) \text{ e } F_2(0,c)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Um desenvolvimento análogo ao do caso anterior garante a equação

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

Esta é a **equação reduzida da elipse de centro na origem e eixo maior sobre o eixo dos y**.

E os casos em que o centro não está na origem?

Basta utilizar as fórmulas de translação!

A elipse

A elipse

1. Elipse de centro na origem do sistema

i. O eixo maior está sobre o eixo dos x

$$C(0,0)$$

$$F_1(-c,0) \text{ e } F_2(c,0)$$

$$A_1(-a,0) \text{ e } A_2(a,0)$$

$$B_1(0,-b) \text{ e } B_2(0,b)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

2. Elipse de centro fora da origem do sistema

i. O eixo maior é paralelo ao eixo dos x

$$C(h,k)$$

$$F_1(-c+h,k) \text{ e } F_2(c+h,k)$$

$$A_1(-a+h,k) \text{ e } A_2(a+h,k)$$

$$B_1(h,-b+k) \text{ e } B_2(h,b+k)$$

$$\boldsymbol{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

A elipse

1. **Elipse de centro na origem do sistema**
   ii. O eixo maior está sobre o eixo dos y

$$C(0,0)$$

$$F_1(0,-c) \text{ e } F_2(0,c)$$

$$A_1(0,-a) \text{ e } A_2(0,a)$$

$$B_1(-b,0) \text{ e } B_2(b,0)$$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

2. **Elipse de centro fora da origem do sistema**
   ii. O eixo maior é paralelo ao eixo dos y

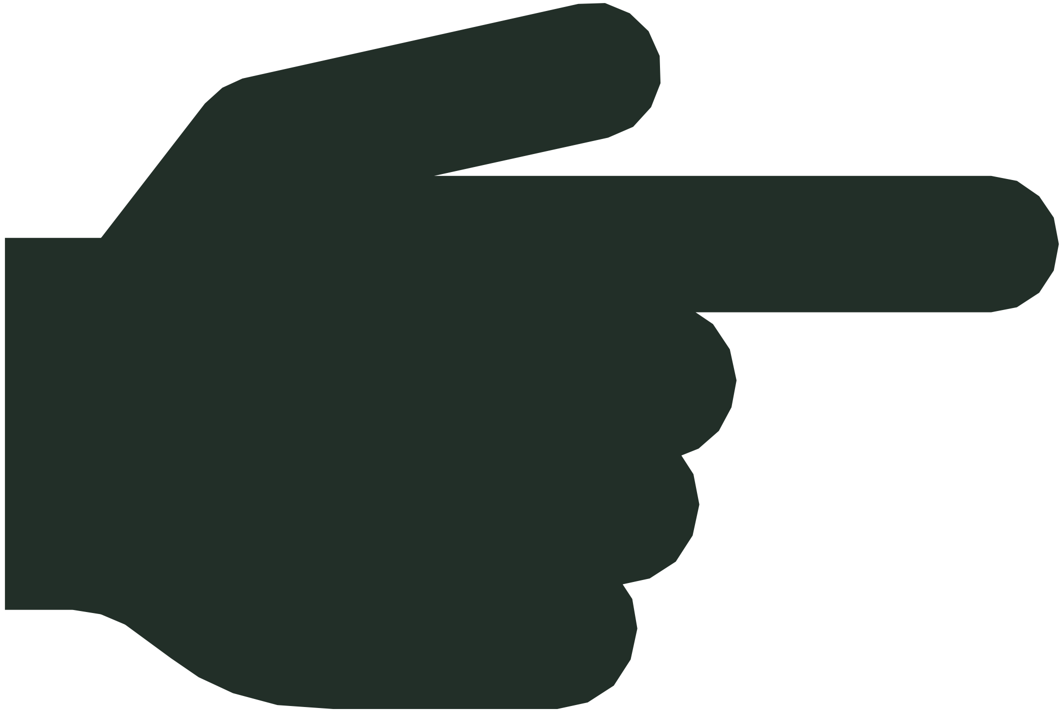
$$C(h,k)$$

$$F_1(h,-c+k) \text{ e } F_2(h,c+k)$$

$$A_1(h,-a+k) \text{ e } A_2(h,a+k)$$

$$B_1(-b+h,k) \text{ e } B_2(b+h,k)$$

$$\boldsymbol{\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1}$$



Observação!

A circunferência é um caso particular de elipse, em que o eixo maior e o eixo menor tem o mesmo comprimento!

Isso ocorre ao optar pelo mesmo ponto para ambos os focos.

Neste caso, as 4 equações vistas para as elipses se resumem a duas:

Circunferência de centro na origem do sistema

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{x^2 + y^2 = a^2}$$

Circunferência de centro $\boldsymbol{C(h,k)}$ fora da origem do sistema

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2}$$