DEFINIÇÕES

Definição 1 (Primeiro Princípio da Indução Matemática). *Seja* $p(n)$ *uma proposição sobre* $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m \ \wedge \ m \in \mathbb{N}\}$. *Se*

(Base) $p(m)$ *é verdadeira*

(Passo) Para qualquer k, *vale* $p(k) \rightarrow p(k+1)$

então $p(n)$ *é verdadeira para todo* $n \in M$.

Definição 2 (Segundo Princípio da Indução Matemática). *Seja* $p(n)$ *uma proposição sobre* $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m \ \wedge \ m \in \mathbb{N}\}$. *Se*

(Base) $p(m)$ *é verdadeira*

(Passo) Para qualquer k, *vale* $p(m) \wedge p(m+1) \wedge \ldots \wedge p(k) \rightarrow p(k+1)$

então $p(n)$ *é verdadeira para todo* $n \in M$.

Definição 3 (Contingência). *Sejam* X *e* Y *conjuntos.* $X \subseteq Y$ *se e somente se* $\forall x \in X, x \in X \Rightarrow x \in Y$

Definição 4 (União de Conjuntos). *Dados* A *e* B *conjuntos, a união destes,* $A \cup B$, *é tal que* $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

Definição 5 (Intersecção de Conjuntos). *Dados* A *e* B *conjuntos, a intersecção destes,* $A \cap B$, *é tal que* $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

Definição 6 (Complemento de um Conjunto). *Dado* A *um conjunto qualquer, o seu complemento,* $\overline{A}$, *é tal que* $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$.

Definição 7 (Conjunto das Partes). *Dado* A *um conjunto qualquer, o seu conjunto das partes,* 2^A *ou* $\mathcal{P}(A)$, *é tal que* $\{X \mid X \subseteq A\}$

Definição 8 (Produto Cartesiano). *Sejam* A *e* B *conjuntos, o produto cartesiano* $A \times B$ *é o conjunto* $A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Definição 9 (União Disjunta). *Dados* A *e* B *conjuntos, sua união disjunta,* $A \uplus B$, *é o conjunto* $A \uplus B = \{a_A \mid a \in A\} \cup \{b_B \mid b \in B\}$.

Definição 10 (Diferença). *Dados* A *e* B *conjuntos, o primeiro conjunto menos o segundo, ou seja, a diferença de* A *e* B *é o conjunto* $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \overline{B}$

Definição 11 (Relação). *Seja* A *e* B *conjuntos.* $R \subseteq A \times B$ *é uma relação de* A *para* B.

Definição 12 (Relação Inversa). *Seja* $R \subseteq A \times B$ *uma relação. A relação* $R^{-1} \subseteq B \times A$ *definida como* $R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$. *é a relação inversa de* R.

Definição 13 (Relação Identidade). *Seja* A *um conjunto. A relação identidade de* A, *denotada* $\iota_A \subseteq A^2$ *é* $\iota_A\{(a, a) \mid a \in A\}$

Definição 14 (Propriedades de Endorelações). *Seja* $R \subseteq A^2$ *uma endorelação sobre o conjunto* A. *Diz-se que* R *é:*

Reflexiva *quando* $\forall a \in A((a, a) \in R)$.

Simétrica *quando* $\forall a, b \in A((a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R)$

Anti-simétrica *quando* $\forall a, b \in A((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b)$

Transitiva *quando* $\forall a, b, c \in A((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R)$

Definição 15 (Relação de Ordem). $R \subseteq A^2$ *é uma relação de ordem se* R *for reflexiva, transitiva e anti-simétrica.*

Definição 16 (Relação de Equivalência). $R \subseteq A^2$ *é uma relação de equivalência se* R *for reflexiva, transitiva e simétrica.*

Definição 17 (Propriedades de Relações). *Seja* $R \subseteq A \times B$ *uma relação de* A *para* B. *Diz-se que* R *é:*

Funcional *quando* $\forall a \in A \forall b_1, b_2 \in B((a, b_1) \in R \wedge (a, b_2) \in R \Rightarrow b_1 = b_2)$

Total *quando* $\forall a \in A \exists b \in B((a, b) \in R)$

Injetora *quando* $\forall a_1, a_2 \in A \forall b \in B((a_1, b) \in R \wedge (a_2, b) \in R \Rightarrow a_1 = a_2)$

Sobrejetora *quando* $\forall b \in B \exists a \in A((a, b) \in R)$

Definição 18 (Função). *Uma função* $f : A \rightarrow B$ *é uma relação funcional* $f \subseteq A \times B$.

Definição 19 (Composição de Funções). *Dadas* $f : A \rightarrow B$ *e* $g : B \rightarrow C$ *funções. A função de composição de* f *com* g, *denotada por* $g \circ f : A \rightarrow C$ *é tal que, dado* $x \in A$, $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Definição 20 (Princípio da Inclusão e Exclusão). *Dados conjuntos finitos $A_1, \ldots, A_n$, onde $n \geq 2$, temos:*

$$\{|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \begin{array}{l} \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n| \end{array}$$

Definição 21 (Princípio das Casas de Pombos). *Se mais de k itens são colocados em k caixas, então pelo menos uma caixa contém mais de um item.*

Definição 22 (Operação). *Sejam A, B, C conjuntos. Então*

Operação Binária *função parcial do tipo $\oslash : A \times B \to C$,*

Operação Interna *é uma operação cujo domínio e contradomínio são definidos sobre o mesmo conjunto,*

Operação Fechada *é uma operação total.*

Definição 23 (Propriedades de Operações). *Seja $\oslash : A^2 \to A$ uma operação binária interna e fechada. Então $\oslash$ satisfaz a propriedade:*

Comutativa *quando $\forall a, b \in A (a \oslash b = b \oslash a)$*

Associativa *quando $\forall a, b, c \in A (a \oslash (b \oslash c) = (a \oslash b) \oslash c)$*

Elemento Neutro *quando $\exists e \in A \forall a \in A (a \oslash e = a = e \oslash a)$*

Elemento Inverso *quando $\forall a \in A \exists \overline{a} \in A (a \oslash \overline{a} = e = \overline{a} \oslash a)$*

Definição 24 (Álgebras Internas). *Tabela de tipos de álgebras*

Tipo de Álgebra	*Propriedades*
Grupóide	*Fechada*
Semigrupo	*Fechada e associativa*
Monóide	*Fechada, associativa e elemento neutro*
Grupo	*Fechada, associativa, elemento neutro e elemento inverso*

Definição 25 (Homomorfismo). *Uma função $h : \langle A, \oplus \rangle \to \langle B, \otimes \rangle$ é um homomorfismo de grupóides se $f : A \to B$ é uma função tal que $\forall a_1, a_2 \in A (h(a_1 \oplus a_2) = h(a_1) \otimes h(a_2))$. Tal função será um homomorfismo de monóides se for um homomorfismo de grupóides e $h(e_A) = e_B$ sendo e_A, e_B os elementos neutros de $\oplus$ e $\otimes$ respectivamente.*

Definição 26 (Ínfimo e Supremo). *Seja $\langle P, R \rangle$ uma relação de ordem parcial, $a, b \in P$ então $p \in P$ é chamado de:*

Ínfimo *se $pRa \wedge pRb$ e $\forall q \in P ((qRa \wedge qRb) \Rightarrow qRp)$ – Notação: $p = a \downarrow b$*

Supremo *se $aRp \wedge bRp$ e $\forall q \in P ((aRq \wedge bRq) \Rightarrow pRq)$ – Notação: $p = a \uparrow b$*

Elemento Inicial *se $\forall x \in P (pRx)$ – Notação: $p = 0$*

Elemento Terminal *se $\forall x \in P (xRp)$ – Notação: $p = 1$*

Definição 27 (Reticulado). *Seja $\langle P, R \rangle$ uma relação de ordem parcial. Então $\langle P, R \rangle$ é um reticulado se qualquer par de elementos de P possuir ínfimo e supremo.*

Definição 28 (Tipos de Reticulados). *Um reticulado $\langle P, R \rangle$ é dito:*

Distributivo *se $\forall a, b, c \in P (a \downarrow (b \uparrow c) = (a \downarrow b) \uparrow (a \downarrow c) \wedge a \uparrow (b \downarrow c) = (a \uparrow b) \downarrow (a \uparrow c)$.*

Limitado *se for um reticulado que possua elemento inicial e elemento terminal.*

Complementado *se for um reticulado limitado e $\forall a \in P \, \exists \overline{a} \in P \, (a \downarrow \overline{a} = 0 \wedge a \uparrow \overline{a} = 1)$*

Definição 29 (Álgebra Booleana). *Uma Álgebra Booleana é um reticulado distributivo e complementado.*