CDI-II

Integrais impróprias - Propriedades

Exercícios

1. Calcule:

   (a) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$

   (b) $\int_{0^+}^{1} \frac{1}{x^3} dx$

   (c) $\int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

   (d) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

   (e) $\int_{2}^{+\infty} x^2 e^{-x^3} dx$

   (f) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \quad$ onde $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{8}{(x+1)^2} & \text{se} \quad x < -3 \\ 2 & \text{se} \quad -3 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{x\sqrt{3x}} & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$

2. Determine os valores de $p \in \mathbb{R}$ para que

   (a) $\int_{1}^{+\infty} x^p dx < \infty$ (isto é: para que $\int_{1}^{+\infty} x^p dx$ seja um número real)

   (b) $\int_{0^+}^{1} x^p dx < \infty$ (isto é: para que $\int_{0^+}^{1} x^p dx$ seja um número real)

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integravel e $a \in \mathbb{R}$. Mostre que se:

   (a) $f(x)$ é par então $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$

   (b) $f(x)$ é impar então $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$

4. Mostre que $\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq 1$ (Dica: $\frac{1}{e^{2^2}} < \frac{1}{x^2}$ para todo $x \geq 1$)