Álgebra Linear (ALI0001 – CCI-192-02U)

Soma de Subespaços Vetoriais

Soma Direta

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula do dia 19 de abril de 2023.

UDESC

Revisão: Soma de Subespaços Vetoriais

Definição: Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial V.
A soma entre W_1 e W_2 é definida como o conjunto

$$W_1 + W_2 = \{v \in V;\ v = u + w, \text{com } u \in W_1 \text{ e } w \in W_2\}.$$

Teorema 1: Se W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V então a soma $W_1 + W_2$ também é um subespaço vetorial de V.

O subespaço soma $W_1 + W_2$ efetua o papel que a união $W_1 \cup W_2$ não consegue desempenhar, pois:

Teorema 2: Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de V dados por

$$W_1 = ger\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$$

e

$$W_2 = ger\{w_1, w_2, w_3 \dots, w_m\}.$$

Então o subespaço soma $W_1 + W_2$ é gerado pela união entre os geradores de W_1 e os geradores de W_2, ou seja:

$$W_1 + W_2 = ger\{W_1\} \cup ger\{W_2\} = ger\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, w_1, w_2, w_3, \dots, w_m\}.$$

Dimensão da Soma

O próximo teorema nos fornece um importante resultado para a dimensão do espaço soma. A partir dele, podemos ter alguma informação sobre a independência ou dependência linear dos geradores de $W_1 + W_2$.

Teorema 3: Se W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V então

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) .$$

Justificativa: Pelo Teorema 2, os geradores de $W_1 + W_2$ são formados pela junção dos geradores de W_1 com os geradores de W_2.

Ao fazermos essa junção, podemos criar um conjunto com alguns vetores "descartáveis".

Isso ocorre se um dos geradores de W_2 (por exemplo) for uma combinação linear dos geradores de W_1 (ou o contrário).

Mas então, esse gerador pertence tanto a W_1 quanto a W_2, ou seja, pertence a

$$W_1 \cap W_2 .$$

Portanto, para criar uma base para $W_1 + W_2$ a partir do conjunto gerador dado pelo Teorema 2, precisamos retirar do conjunto os elementos que pertencentes à $W_1 \cap W_2$.

A igualdade resulta da definição de dimensão (quantidade de vetores em uma base).

Exercícios resolvidos na aula

Exercício 1) Em $V = P_3$ considere os subespaços vetoriais dados por

$$W_1 = \{p(x) \in P_3;\ \ p(1) + p(-2) = 0\}$$

e $$W_2 = \{\, a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3\ ;\ 9a - 4b + 8c - d = 0\}.$$

Determine uma base e a dimensão para: a) W_1 b) W_2 c) $W_1 \cap W_2$ d) $W_1 + W_2$.

Exercício 2) Em $V = M(2,2)$ considere os subespaços vetoriais dados por

$$W_1 = \{A \in M(2,2);\ A^T = -A\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2);\ \ a = b + c \ \text{ e } \ d = 3b - c \right\}.$$

Determine uma base e a dimensão para a) $W_1 \cap W_2$ b) $W_1 + W_2$

Solução: Os dois exercícios foram resolvidos detalhadamente durante a aula.

Na sequência do material, seguem exemplos resolvidos.

Soma Direta

Definição:

Quando $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}_V\}$, dizemos que $W_1 + W_2$ é uma soma direta e denotamos esse fato por

$$W_1 \oplus W_2.$$

Quando todo o espaço vetorial V é uma soma direta dos subespaços W_1 e W_2, ou seja, quando

$$V = W_1 \oplus W_2,$$

então qualquer elemento $v \in V$ pode ser escrito, de modo único, na forma

$$v = u + w, \qquad \text{com } u \in W_1 \text{ e } w \in W_2.$$

Nos exercícios anteriores:

- No Exercício 1 da aula, vimos que $W_1 + W_2 = P_3$,

  No entanto, a soma não é direta, pois vimos que $W_1 \cap W_2 \neq \{\vec{0}_{P_3}\}$.

- No Exercício 2 da aula, vimos que $W_1 + W_2$ é uma soma direta, pois $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}_{M(2,2)}\}$.

  No entanto, nesse exemplo

$$W_1 \oplus W_2 \neq M(2,2),$$

pois $W_1 + W_2 \neq M(2,2)$, visto que a soma tem dimensão igual a 3.

Exemplo resolvido

Exemplo 1) Em $V = M(2,2)$ considere os subespaços vetoriais dados por

$$W_1 = \{A \in M(2,2);\ A^T = -A\}$$

e

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2);\ \ a = b + c \ \text{ e } \ d = 3b - c \right\}.$$

Determine uma base e a dimensão para a) $W_1 \cap W_2$ b) $W_1 + W_2$

Solução a): Achando geradores para $W_1 \cap W_2$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A \in W_1 \\ A \in W_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A^T = -A \\ a = b + c \\ d = 3b - c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ a = b + c \\ d = 3b - c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -a \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \\ a = b + c \\ d = 3b - c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2a = 0 \\ c = -b \\ b = b \\ 2d = 0 \\ a = b + (-b) = 0 \\ c = 3b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ 3b = -b \\ b = b \\ d = 0 \\ a = 0 \\ c = 3b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \\ a = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Exemplo resolvido

Portanto, obtemos que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \vec{0}_{M(2,2)}.$$

Assim, a interseção desejada é formada somente pela matriz nula, ou seja,

$$W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}_{M(2,2)}\}.$$

Quando isso ocorre, a base para $W_1 \cap W_2$ deve ser vazia, pois se colocarmos qualquer elemento não nulo na base, ele irá gerar mais elementos do que apenas a matriz nula. Se colocarmos somente a matriz nula na base, iremos contrariar o conceito de base, pois o nulo é LD. Portanto, a base para a intersecção é vazia $\beta_{W_1 \cap W_2} = \{\ \ \} = \emptyset.$

Como não existem elementos na base, temos que $\dim(W_1 \cap W_2) = 0.$

Solução b): Para achar os geradores para $W_1 + W_2$, vamos usar o Teorema que indica que os geradores para a soma são dados pela união entre os geradores de W_1 e de W_2.

Para W_1: Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W_1$. Logo, pela condição algébrica do subespaço:

$$A^T = -A \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -a \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ c = -b \\ b = b \\ d = 0 \end{cases} \quad \text{com } b \in \mathbb{R}.$$

Exemplo resolvido

Portanto $$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

gera W_1 e é LI.

Então

$$W_1 = ger\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Para W_2: Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W_2$. Logo, pela condição algébrica:

$$\begin{cases} a = b + c \\ d = 3b - c \end{cases} \text{ com } b, c \in \mathbb{R}.$$

Então

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b + c & b \\ c & 3b - c \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

geram W_2 e são LI. (verifique)

Assim

$$W_2 = ger\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Portanto, por Teorema:

$$W_1 + W_2 = ger\{W_1\} \cup ger\{W_2\} = ger\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Ainda precisamos verificar se o conjunto de geradores de $W_1 + W_2$ é LI ou LD.

Exemplo resolvido

Por Teorema, sabemos que

$$\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\cap W_2)=\ 1+2-0=3.$$

Portanto, qualquer base de W_1+W_2 deve ser formada por três elementos.

Como o conjunto gerador para W_1+W_2 é formado por exatamente três elementos, concluímos que os geradores são LI e, com isso, formam uma base para W_1+W_2.

Dessa forma, temos que uma base para W_1+W_2 é

$$\beta_{W_1+W_2}=\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\right\}.$$

Exemplo 2) Considere os subespaços de $V=P_3$ dados por

$$W_1=\{p(x)\in P_3;\ \ p(4)=2p(-1)\}$$

e $$W_2=\{\,a+bx+cx^2+dx^3\in P_3\,;\ \ -b+2c-11d=0\}.$$

a) Determine uma base e a dimensão para: $i)\ \ W_1\quad ii)\ \ W_2\quad ii)\ W_1\cap W_2\qquad iv)\ W_1+W_2.$

b) Determine se $W_1+W_2=P_3$. Essa soma é direta?

Solução: a) i) Seja $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3\in W_1$. Logo, $p(4)=2p(-1)$ implica que

$$a+b.4+c.4^2+d.4^3=2[a+b.(-1)+c.(-1)^2+d.(-1)^3\,]$$

ou seja $\quad a+4b+16c+64d=2a-2b+2c-2d\qquad\Rightarrow\qquad a=6b+14c+66d.$

Exemplo resolvido

Portanto

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 = (6b + 14c + 66d) + bx + cx^2 + dx^3$$
$$= b(6 + x) + c(14 + x^2) + d(66 + x^3).$$

Dessa forma, $W_1 = ger\{6 + x, 14 + x^2, 66 + x^3\}$.

Para verificar se os geradores obtidos são LI, analisamos a combinação linear nula

$$b(6 + x) + c(14 + x^2) + d(66 + x^3) = \vec{0}_{P_3}$$

que implica que

$$(6b + 14c + 66d) + bx + cx^2 + dx^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

e que, por sua vez, fornece que $b = 0, c = 0, d = 0$.

Como obtivemos um sistema SPD, os geradores para W_1 são LI e, com isso, formam uma base para W_1. Logo

$$\beta_{W_1} = \{6 + x, 14 + x^2, 66 + x^3\} \qquad \text{e} \qquad \dim(W_1) = 3.$$

$ii)$ Seja $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W_2$. Logo, pela condição dada, obtemos

$$-b + 2c - 11d = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = 2c - 11d.$$

Assim, substituindo em $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ obtemos que

$$p(x) = a + (2c - 11d)x + cx^2 + dx^3 = a.1 + c(2x + x^2) + d(-11x + x^3).$$

Exemplo resolvido

Dessa forma,

$$W_2 = ger\{1, 2x + x^2, -11x + x^3\}.$$

Para verificar se os geradores obtidos são LI, analisamos a combinação linear nula

$$a.1 + c(2x + x^2) + d(-11x + x^3) = \vec{0}_{P_3}$$

que implica que

$$a + (2c - 11d)x + cx^2 + dx^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

e que, por sua vez, fornece que $a = 0, c = 0, d = 0.$

Como obtivemos um sistema SPD, os geradores para W_2 são LI e, com isso, formam uma base para W_1. Logo

$$\beta_{W_2} = \{1, 2x + x^2, -11x + x^3\} \qquad \text{e} \qquad \dim(W_2) = 3.$$

iii) Seja $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W_1 \cap W_2$. Logo, $p(x) \in W_1$ e $p(x) \in W_2$ e assim

$$\begin{cases} a = 6b + 14c + 66d \\ b = 2c - 11d \end{cases} \Rightarrow \quad a = 6(2c - 11d) + 14c + 66d \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = 26c \\ b = 2c - 11d \end{matrix}$$

Substituindo em $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ obtemos que

$$p(x) = 26c + (2c - 11d)x + cx^2 + dx^3 = c(26 + 2x + x^2) + d(-11x + x^3).$$

Exemplo resolvido

Dessa forma,

$$W_1 \cap W_2 = ger\{26 + 2x + x^2, -11x + x^3\}.$$

Para verificar se os geradores obtidos são LI, analisamos a combinação linear nula

$$c(26 + 2x + x^2) + d(-11x + x^3) = \vec{0}_{P_3}$$

que implica que

$$26c + (2c - 11d)x + cx^2 + dx^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

e que, por sua vez, fornece que $c = 0, d = 0$.

Como obtivemos um sistema SPD, os geradores para $W_1 \cap W_2$ são LI e, com isso, formam uma base para $W_1 \cap W_2$. Logo

$$\beta_{W_1 \cap W_2} = \{26 + 2x + x^2, -11x + x^3\} \quad \text{e} \quad \dim(W_1 \cap W_2) = 2.$$

$iv)$ Por teorema, temos que

$$W_1 + W_2 = ger\{W_1\} \cup ger\{W_2\} = ger\{6 + x, 14 + x^2, 66 + x^3, 1, 2x + x^2, -11x + x^3\}.$$

Como temos seis geradores para o espaço soma e sabemos que

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 3 - 2 = 4$$

temos que os geradores do espaço soma são necessariamente LD. Além disso, precisamos descartar dois geradores para obter uma base. Para fazer isso, analisamos a combinação linear nula

Exemplo resolvido

$$a(6+x)+b(14+x^2)+c(66+x^3)+d.1+e(2x+x^2)+f(-11x+x^3)=0+0x+0x^2+0x^3$$

E obtemos um sistema homogêneo que, de antemão, sabemos que é SPI:

$$\begin{cases} 6a+14b+66c+d=0 \\ a+2e-11f=0 \\ b+e=0 \\ c+f=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a=-2e+11f \\ b=-e \\ c=-f \end{array}$$

Substituindo na primeira equação: $6(-2e+11f)+14(-e)+66(-f)+d=0$

ou seja, $-12e+66f-14e-66f+d=0,$

isto é, $-26e+d=0.$

Com isso, obtemos $a=-2e+11f$, $b=-e$, $c=-f$, $d=26e$, com $e,f\in\mathbb{R}$.

Portanto, descartando os elementos associados às variáveis livres (ou seja, o último e o penúltimo elementos), obtemos uma base para W_1+W_2, dada por

$$\beta_{W_1+W_2}=\{6+x,14+x^2,66+x^3,1\}.$$

b) Como $\dim(W_1+W_2)=4=\dim(P_3)$, temos que $W_1+W_2=P_3$.

Porém, como $W_1\cap W_2\neq\emptyset$, essa soma não é direta.

Exercícios Indicados

Exercício 3) Em $V = \mathbb{R}^3$, com as operações usuais, considere os subespaços vetoriais dados por

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 3x - y + 5z = 0\}$$
$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = -2x \text{ e } z = 7x\}$$

Verifique se $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3$.

Exercício 4) Em $V = M(2,2)$ com as operações usuais, considere os subespaços vetoriais dados por

$$W_1 = \{A \in M(2,2);\ A \text{ é simétrica}\}$$
$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); 5a - 4b + 2c + d = 0 \right\}$$

Determine se $W_1 + W_2 = M(2,2)$. Essa soma é direta?