Coordenadas Cilíndricas e Esféricas (Teoria)

Estrutura desta apresentação

- Introdução
- Sistema de coordenadas cilíndricas
  - Definição
  - Mudança de coordenadas
- Sistema de coordenadas esféricas
  - Definição
  - Mudança de coordenadas

Introdução

Nesta disciplina, viu-se que, além do sistema de coordenadas cartesianas, existem outros sistemas para representação de pontos. Para o plano, desenvolveu-se o sistema de coordenadas polares. Para o espaço, serão apresentados outros dois sistemas: o de coordenadas cilíndricas e o de coordenadas esféricas.

Nos problemas que envolvem a determinação de áreas e volumes pelo cálculo, o trabalho pode se simplificar muito com o emprego dessas coordenadas. As coordenadas cilíndricas mostram-se particularmente úteis quando a superfície limite é de revolução.

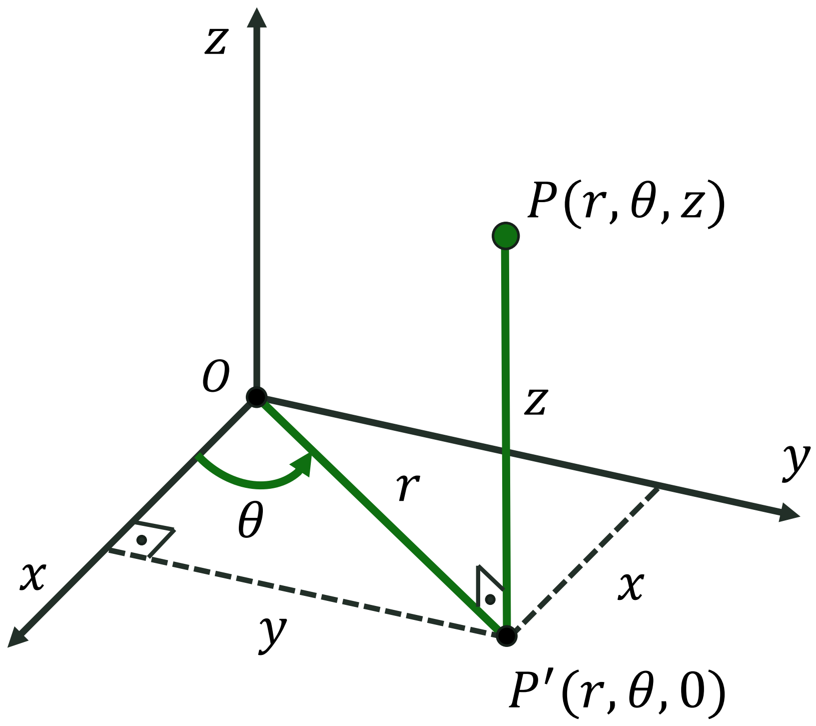
Sistema de coordenadas cilíndricas

O **sistema de coordenadas cilíndricas** é somente uma extensão do sistema de coordenadas polares. Em coordenadas polares, escrevia-se x e y em função de r e θ. Isto permanece.

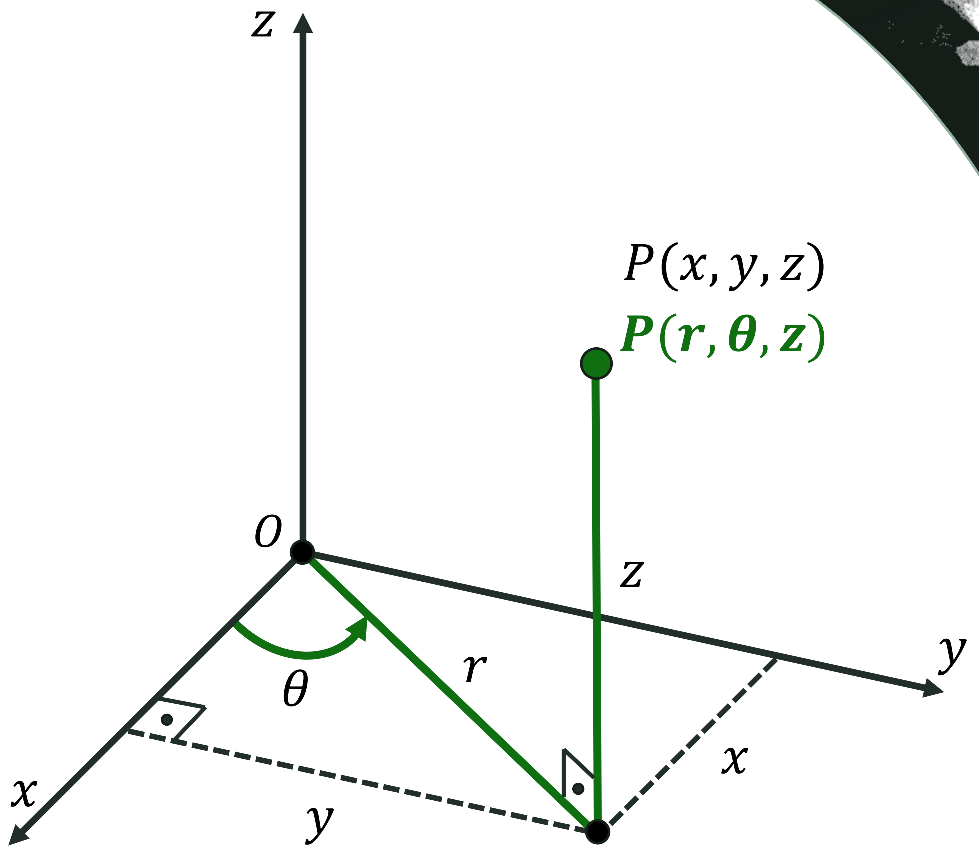
Como se trata do espaço agora, tem-se a coordenada z também. Não se faz nada com ela, permanecendo como z.

Ou seja, neste sistema de coordenadas um ponto P do espaço **é representado por** $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{z})$, em que:

- r e θ são as coordenadas polares da projeção P' que ocorre no plano xOy;
- z é a cota da representação em coordenadas cartesianas.



Mudança de coordenadas



Assim, estas são as substituições que devem ser feitas para transformar as coordenadas:

1. De cilíndricas - $P(r, \theta, z)$ - para cartesianas:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

2. De cartesianas - $P(x, y, z)$ - para cilíndricas:

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r}, \mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{y}{r} \text{ ou } \mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

Atenção!

Como os valores r e θ advêm de coordenadas polares, todas as particularidades vistas nesse sistema de coordenadas perduram:

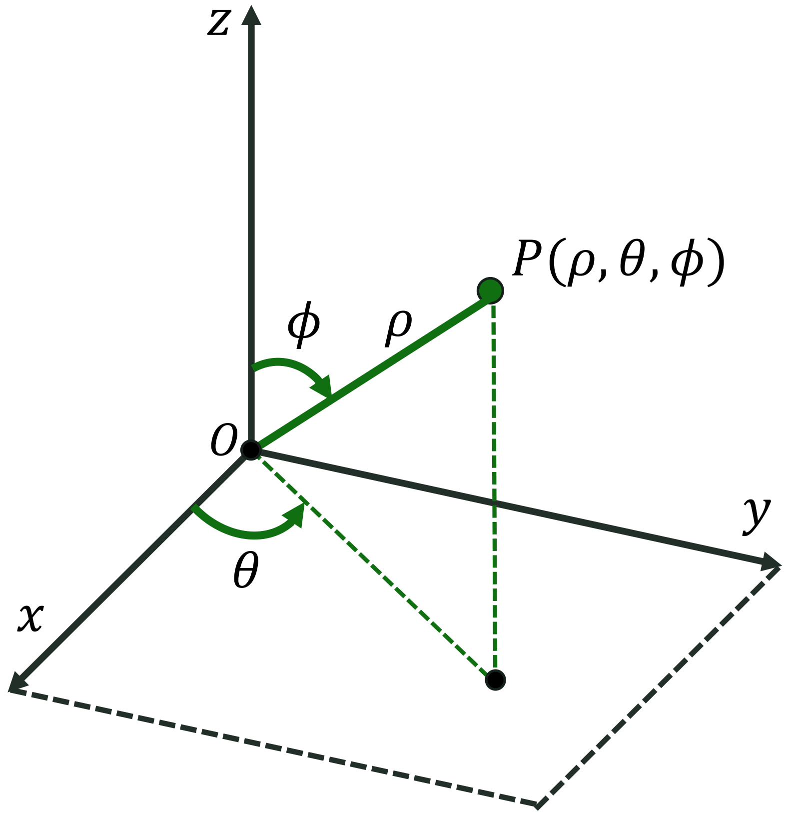
i. O valor r pode ser negativo;

ii. Ao calcular o ângulo θ (que deve ser dado em radianos na resposta final), lembre-se que dois valores distintos de ângulo fornecem o mesmo valor da função trigonométrica. É necessário usar uma segunda fórmula para conferência ou ver em qual quadrante se encontra a projeção no plano xOy.

Sistema de coordenadas esféricas

O **sistema de coordenadas esféricas** é um pouco mais complicado de se visualizar. Como o próprio nome indica, baseia-se em uma esfera.

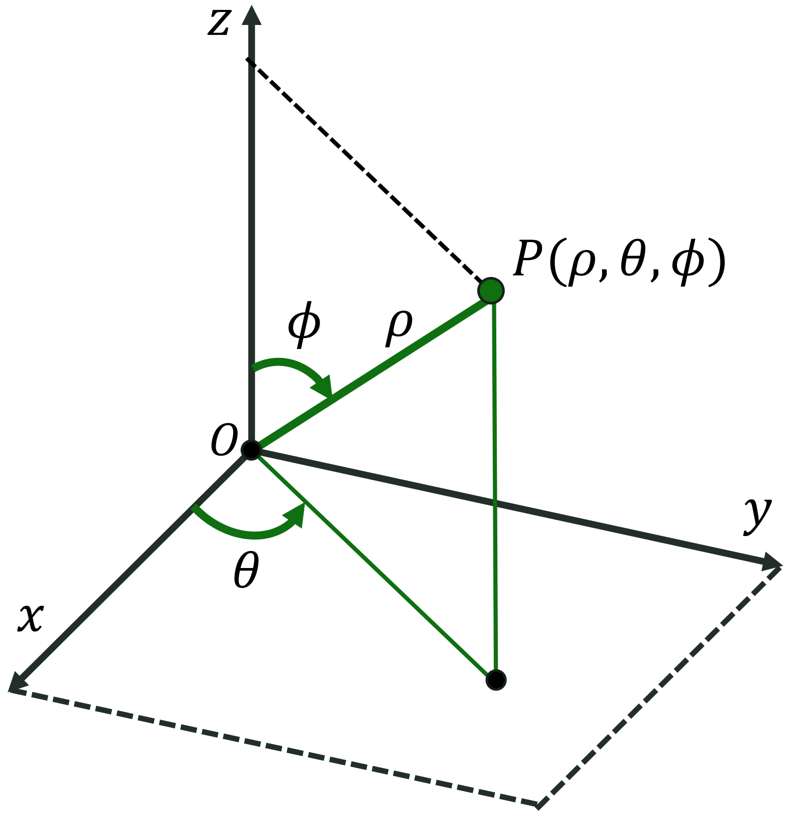
No plano xOy, ainda permanece a análise em coordenadas polares. A coordenada z, no entanto, passa a receber uma abordagem a partir de um ângulo novo. O esquema a seguir ilustra isso.



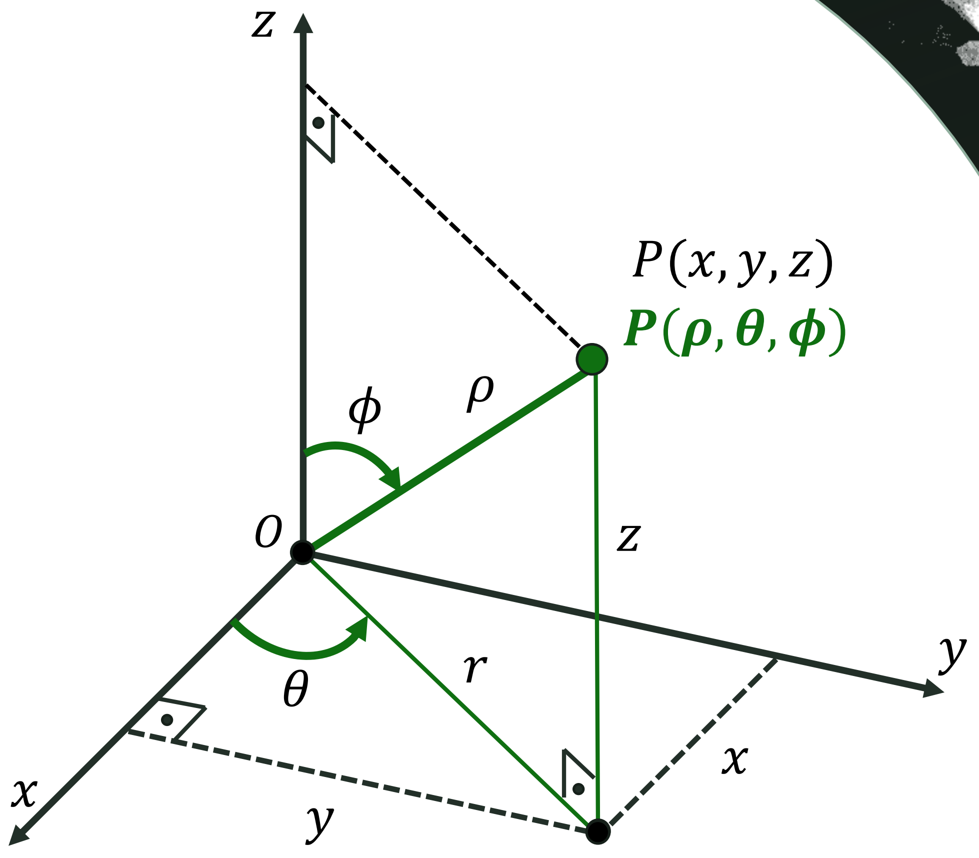
Sistema de coordenadas esféricas

Devido à maior complexidade deste sistema, algumas restrições serão estabelecidas sobre suas coordenadas. Assim, neste sistema de coordenadas um ponto P do espaço **é representado por** $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})$, em que:

- ρ é a distância da origem ao ponto P. Assume $\rho \geq 0$;
- θ tem o mesmo significado visto em coordenadas polares e cilíndricas. Não há restrições para seu valor;
- ϕ é o ângulo (também em radianos) formado entre o eixo z positivo e o segmento OP. Restringe-se seu valor para o intervalo $0 \leq \phi \leq \pi$



Mudança de coordenadas



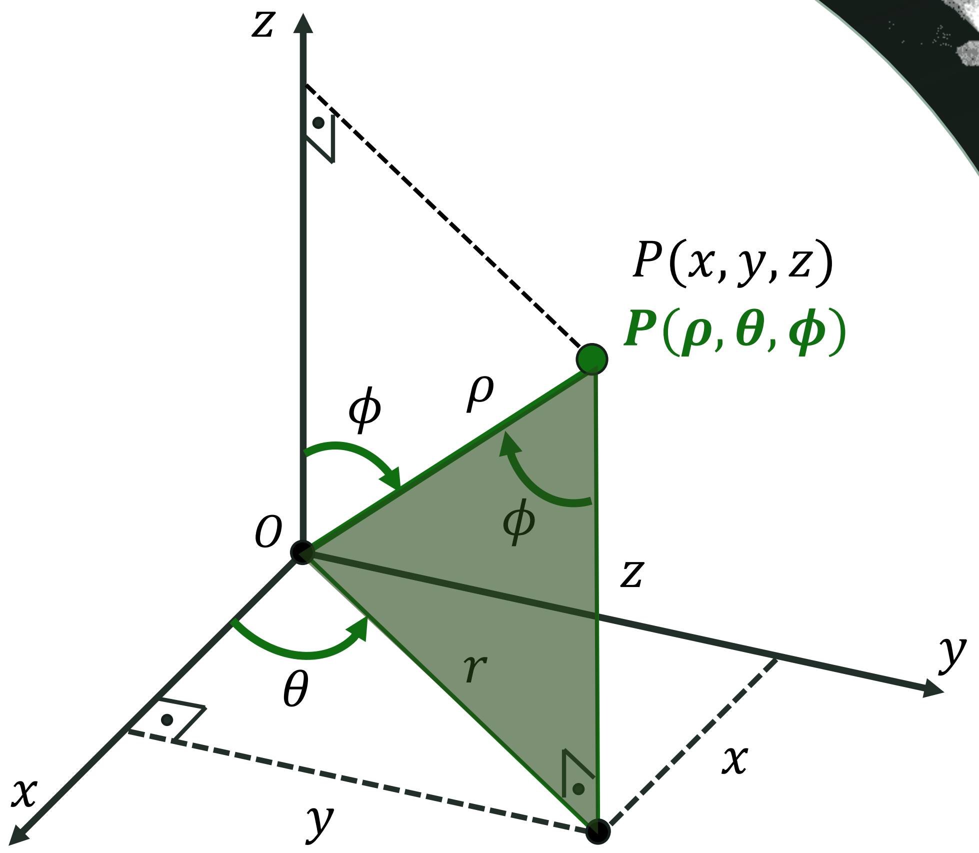
Em coordenadas polares, o raio era a distância de um ponto P à origem do sistema. Neste caso, o raio é representado por ρ e é calculado de forma similar, lembrando que se tem agora três variáveis, não duas. Assim

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Utilizando a variável r de coordenadas polares como uma etapa intermediária (nesta situação, trata-se da projeção de ρ no plano xOy), tem-se

$$\rho^2 = r^2 + z^2$$

Mudança de coordenadas

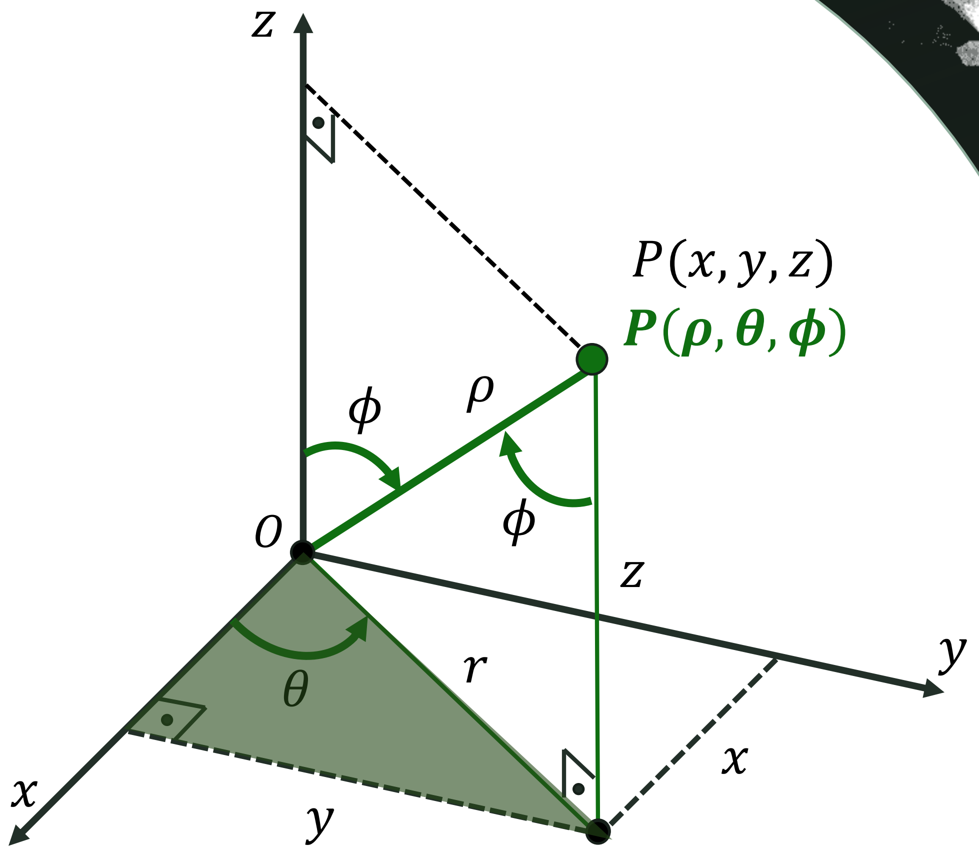


Note que, por semelhança de triângulos, é possível criar um triângulo retângulo em que a hipotenusa é ρ, os catetos são r e z e um dos ângulos agudos é ϕ. Assim, é possível estabelecer as seguintes relações:

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{r}{\rho} \;\Rightarrow\; r = \rho \operatorname{sen}\phi$$

$$\cos\phi = \frac{z}{\rho} \;\Rightarrow\; z = \rho\cos\phi$$

Mudança de coordenadas

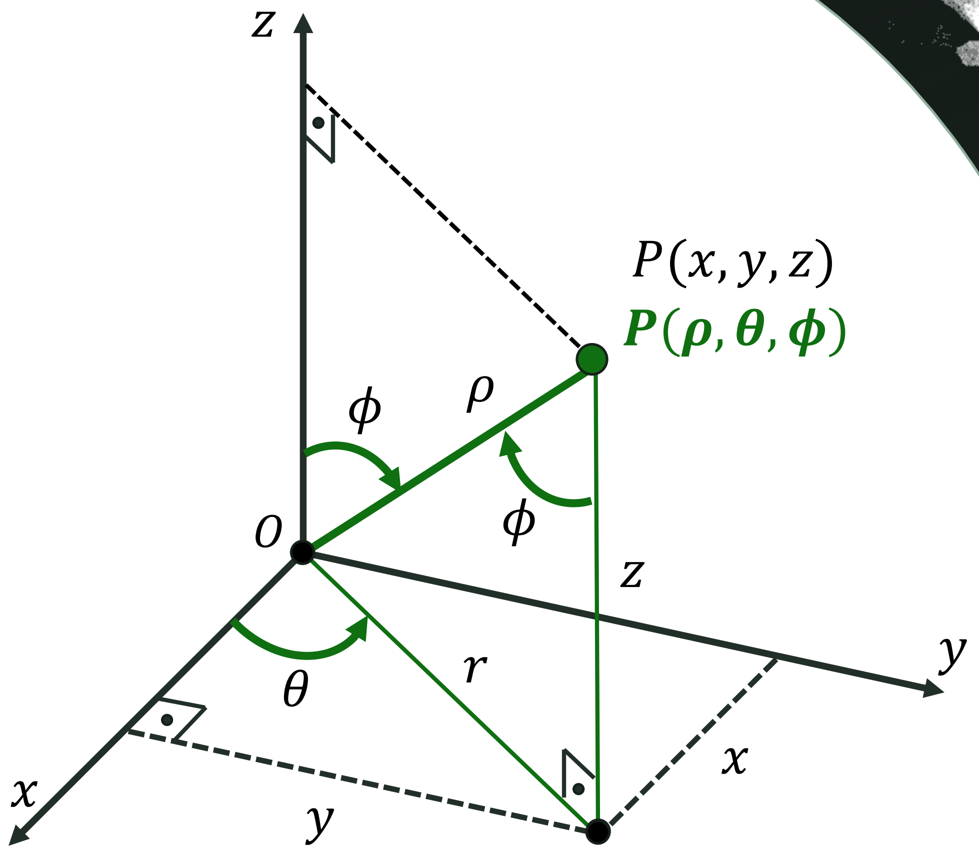


Analogamente, há o triângulo que pode ser formado no plano de xOy e do qual são extraídas as coordenadas polares. Nele,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad y = r \operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad x = r\cos\theta$$

Mudança de coordenadas



Juntando todas informações, estas são as substituições que devem ser feitas para transformar as coordenadas:

1. De esféricas - $P(\rho, \theta, \phi)$ - para cartesianas:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

2. De cartesianas - $P(x, y, z)$ - para esféricas:

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \operatorname{tg} \theta = \dfrac{y}{x} \\ \cos \phi = \dfrac{z}{\rho} \end{cases}$$

Aviso!

Novamente, é necessário ver em qual quadrante do plano xOy as variáveis x e y estão para saber exatamente qual o valor de θ. No slide anterior há somente a expressão para a tangente do ângulo θ pois as outras duas – seno e cosseno – envolvem o valor r e, em coordenadas esféricas (que é (ρ, θ, ϕ), nesta ordem) ele não está presente. Nada o impede de calcular este valor e utilizá-lo, no entanto.

Lembre-se sempre que $0 \leq \phi \leq \pi$. Isto apresenta uma vantagem, uma vez que não se tem este problema de duas possibilidades de ângulo. Por este motivo, normalmente se inicia pelo seu cálculo.