Fluxo em Redes

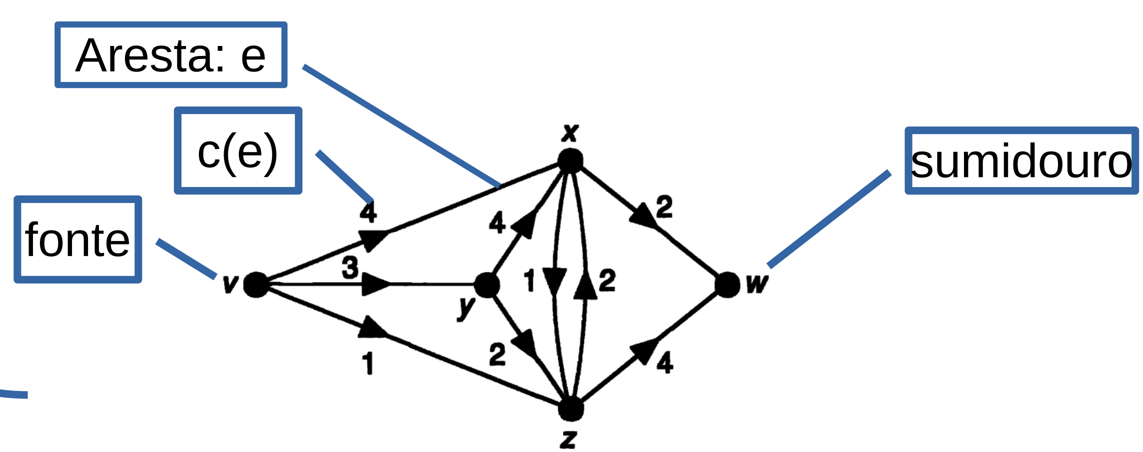
Fluxo em Redes

A sociedade moderna é dependente de redes (de transporte, comunicação etc), as quais podem ser adequadamente representadas por digrafos ponderados.

Essas redes usualmente apresentam algum tipo de fluxo de dados ou de mercadoria, por exemplo, sendo importante a determinação do fluxo máximo que permeia a rede.

Exemplo: um fabricante de computadores deseja enviar sua produção para um determinado mercado utilizando ao máximo os canais de distribuição.
Seja "*v*" o fabricante (origem/fonte), "*w*" o consumidor (destino/sumidouro), "c(e)" a capacidade do canal "e" (aresta) de distribuição, o fabricante deseja saber qual é o número máximo de caixas transportáveis através da rede sem exceder a capacidade permitida de qualquer canal.

Uma rede representada como um digrafo

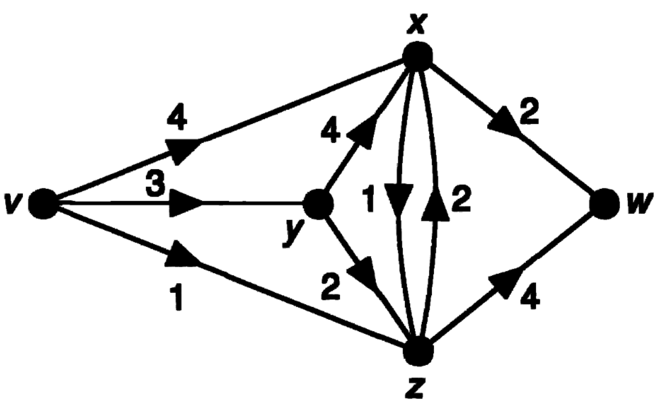


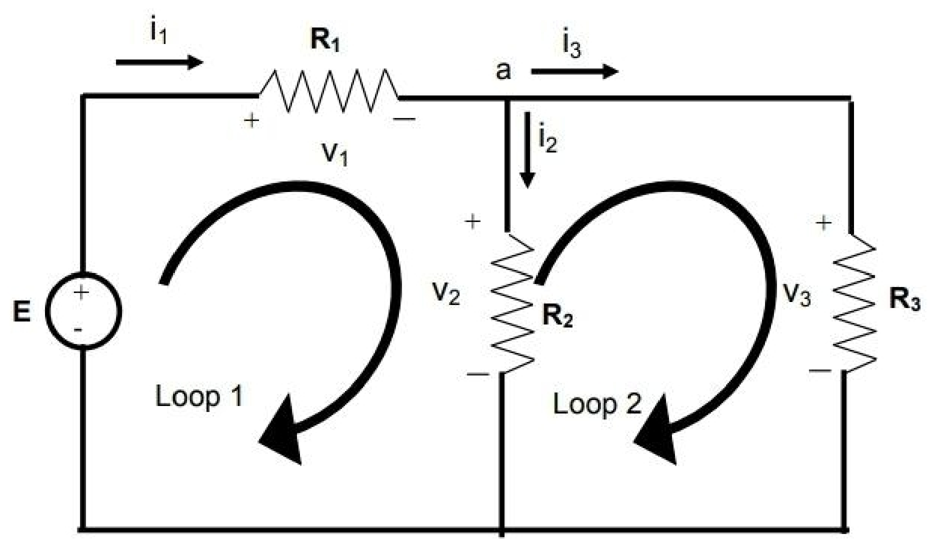
Fluxo em Redes

Outras situações similares:

- Se cada arco representa um rua de mão única e o peso de cada aresta representar o fluxo máximo possível de tráfego ao longo daquela rua, em veículos por hora, então podemos avaliar o maior número de veículos que podem viajar de *v* para *w* em uma hora.

- Se o diagrama retrata uma rede elétrica, podemos avaliar a corrente elétrica máxima que pode percorrer a rede com segurança, dados os limites máximos de corrente suportáveis pelos cabos da rede.





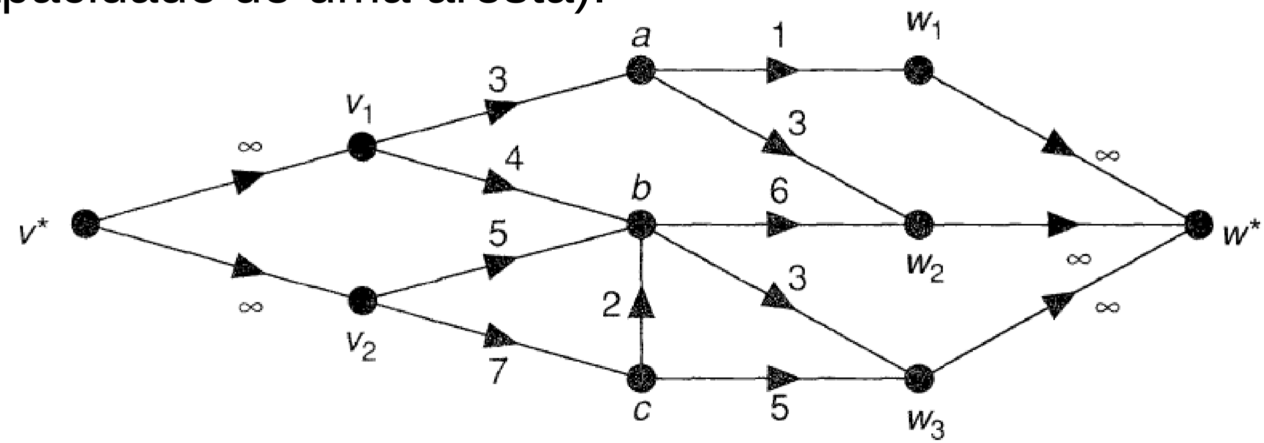
Fluxo em Redes

OBSERVAÇÃO:

Se problema envolver mais de uma fonte (ou mais de um sumidouro) será necessário criar fontes (ou sumidouros) fictícios e ligar todas as fontes (ou sumidouros) existentes por meio de arestas de saída (ou entrada).

As capacidades dessas arestas são habitualmente setadas com capacidade infinita evitando a introdução de gargalos no modelo. Como essas arestas são de fato virtuais, é possível o uso de uma capacidade infinita, o que não afeta a busca do fluxo máximo (limitado à menor capacidade de uma aresta).

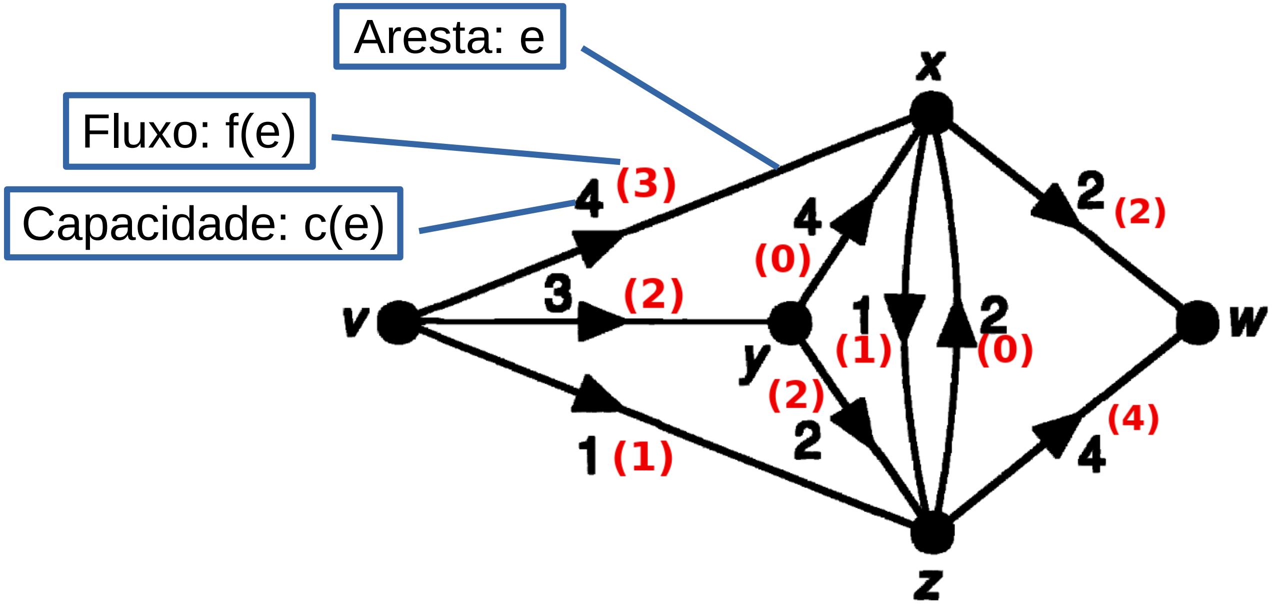
Exemplo:



Fluxo em Redes

Grau de saída e grau de entrada de um vértice:

- O grau de saída *outdeg(x)* de um vértice x é a soma das capacidades das arestas que saem de *x*, enquanto seu grau de entrada *indeg(x)* corresponde à soma das capacidades das arestas que chegam a *x*.
- Na figura, outdeg(v) = 8 and indeg(x) = 10.



Fluxo em Redes

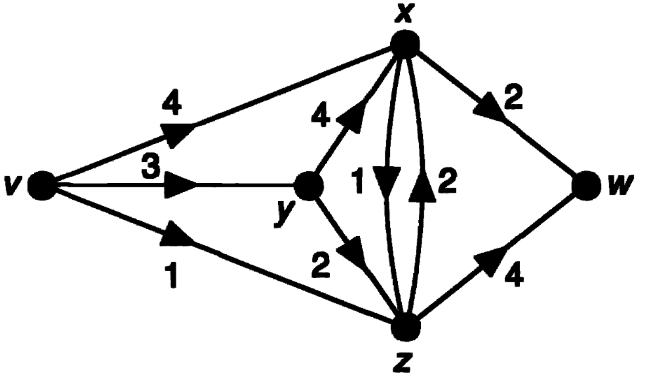
Grau de saída e grau de entrada de um vértice:

Seja G(V,E) uma rede representada pelo abaixo:

- A soma de todos os graus de saída dos vértices de uma rede é igual à soma de todos graus de entrada;
  - Há dois vértices especiais e distintos a fonte "*v*" e sumidouro "*w*", tais que *indeg(v)=0* e *outdeg(w)=0*

$$\sum_{i}^{V} outdeg(i) = (4+3+1)+(2+1)+(4+2)+(4+2)+0 = 23$$

$$= \sum_{i}^{V} indeg(i) = 0+(4+4+2)+3+(1+2+1)+(2+4) = 23$$



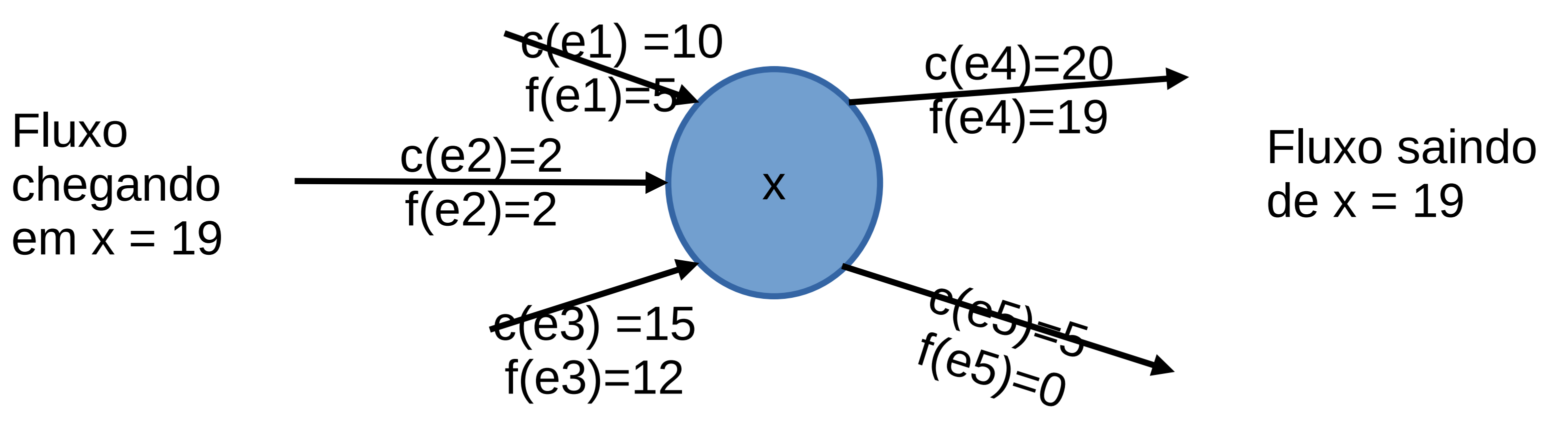
Fluxo em Redes

Fluxo na aresta, no vértice, na rede:

Um fluxo *f* de *v* a *w* em uma rede *N* é uma função que para cada aresta *e=(v,w)* associa um número real não negativo *f(e)*, satisfazendo às seguintes condições:

A) $0 \leq f(e) \leq c(e)$, para qualquer aresta *e*.

B) Fluxo no vértice: não há fluxo de entrada na fonte nem de saída no sumidouro, pois *indeg(fonte)=0* e *outdeg(sumidouro)=0. Portanto*, exceto para a fonte e o sumidouro, o *fluxo total que chega a um vértice "x" é igual ao fluxo total que sai do mesmo vértice "x"*

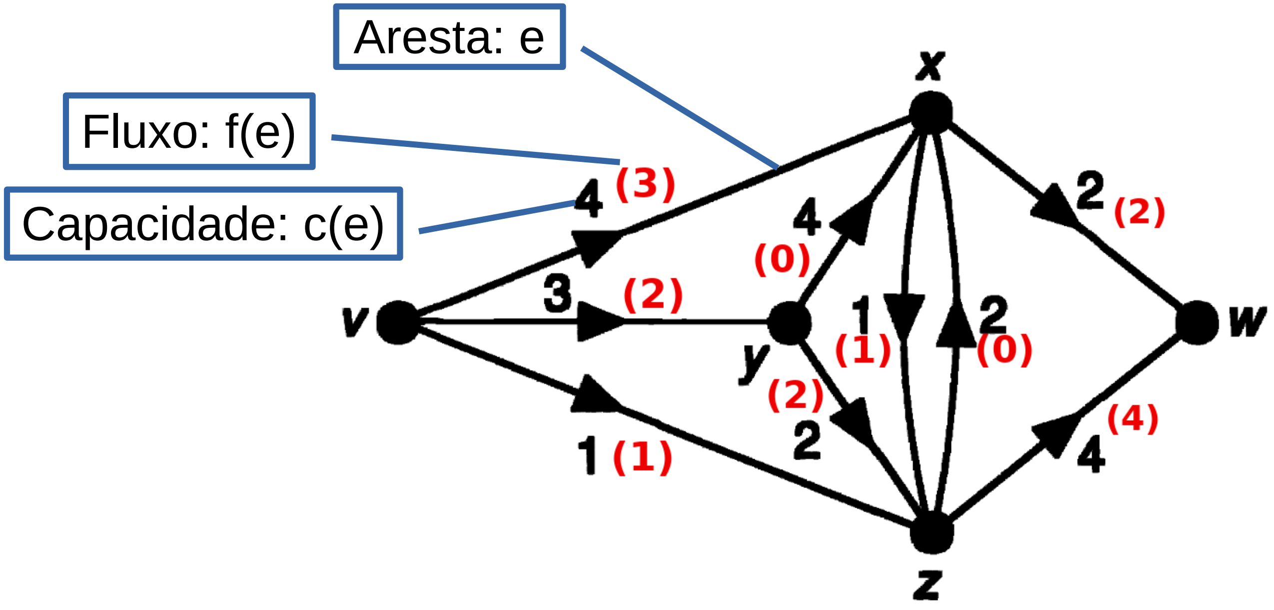


Fluxo em Redes

Fluxo na aresta, no vértice, na rede:

B) Fluxo no vértice:

O fluxo no vértice *x* é igual a 3.
O fluxo no vértice z é igual a 4.



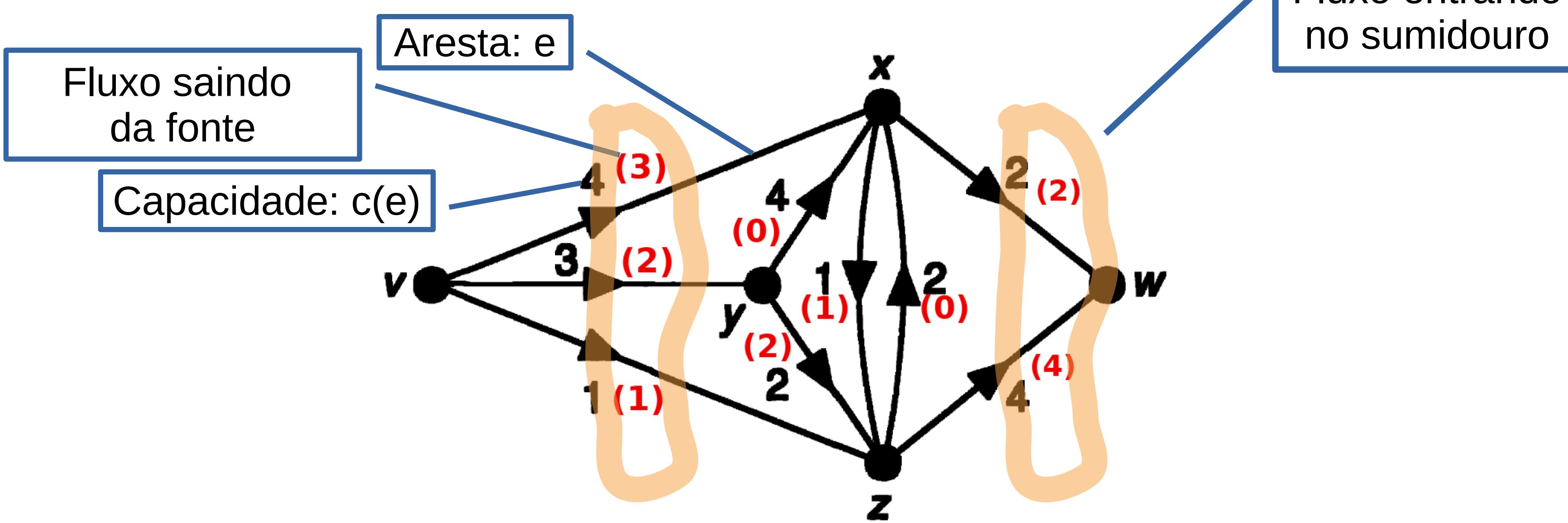
Fluxo em Redes

Fluxo na aresta, no vértice, na rede:

C) Fluxo total na rede:
A soma dos fluxos nas arestas que saem de "*v*" (fonte) é igual à soma dos fluxos nas arestas que entram em "*w*" (sumidouro) este montante é chamado de valor do fluxo na rede. Exemplo:

- O fluxo total saindo do vértice-origem *v é igual a 6*.
- O fluxo total entrante no vértice-destino (*w*) é igual a 6.

Portanto, o valor do fluxo abaixo (em vermelho) é igual a 6.



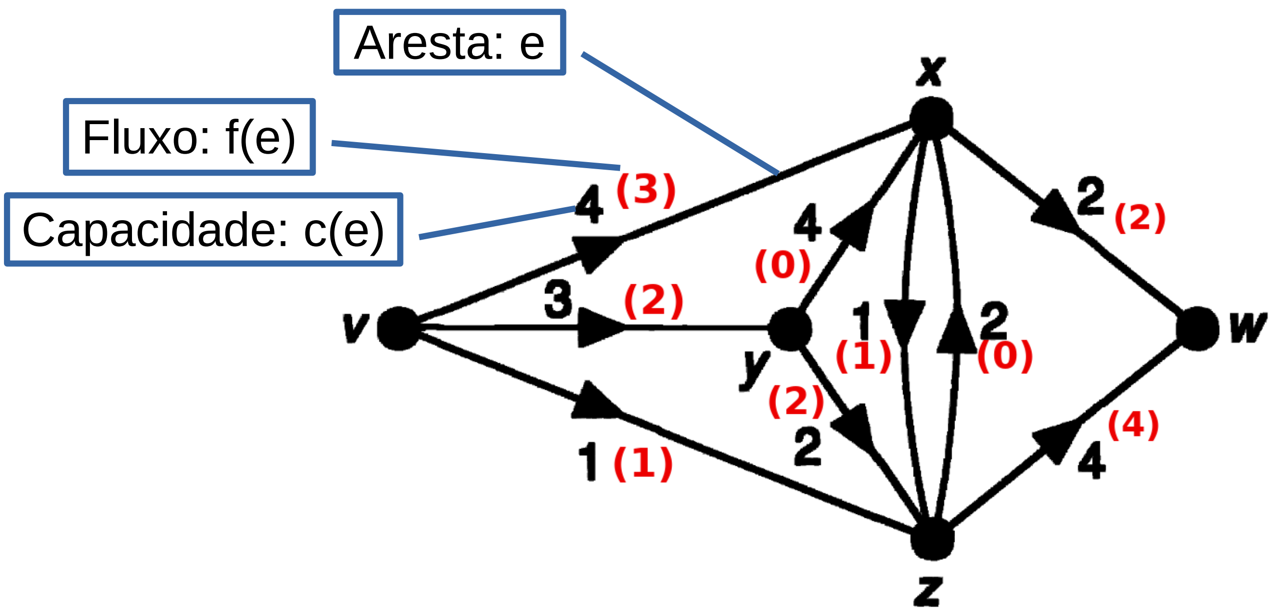
Fluxo em Redes

Fluxo na aresta, no vértice, na rede:

D) É ilegal qualquer fluxo f(e) que esteja fora do intervalo $0 \leq f(e) \leq c(e)$;

E) Uma aresta *e* está saturada se $f(e) = c(e)$.

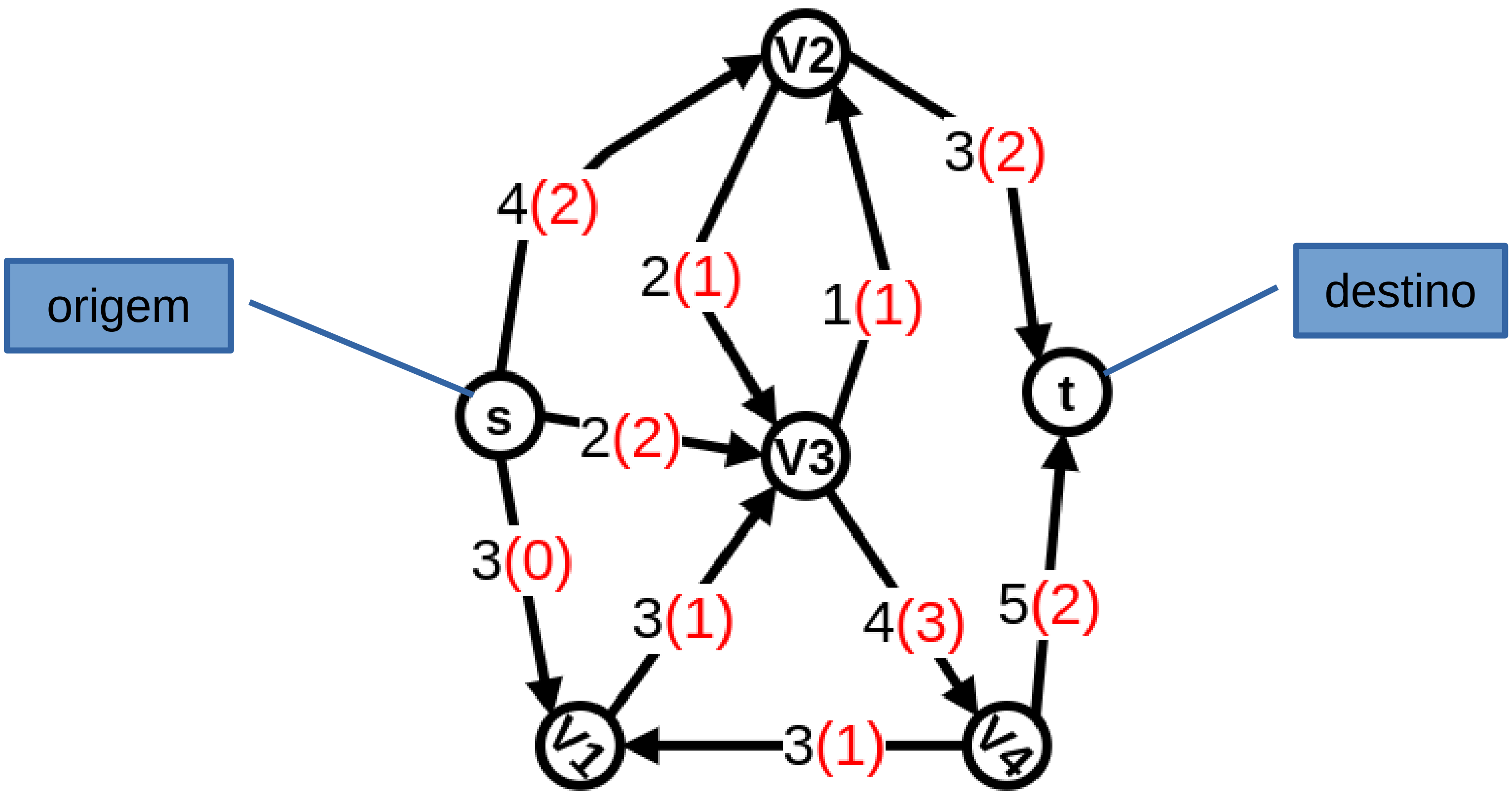
Abaixo: as arestas vz, xz, yz, xw e zw estão saturadas, as demais são arestas não-saturadas;



Fluxo em Redes

Exemplos:

A) Um fluxo (vermelho) para as capacidades (preto) da rede abaixo;

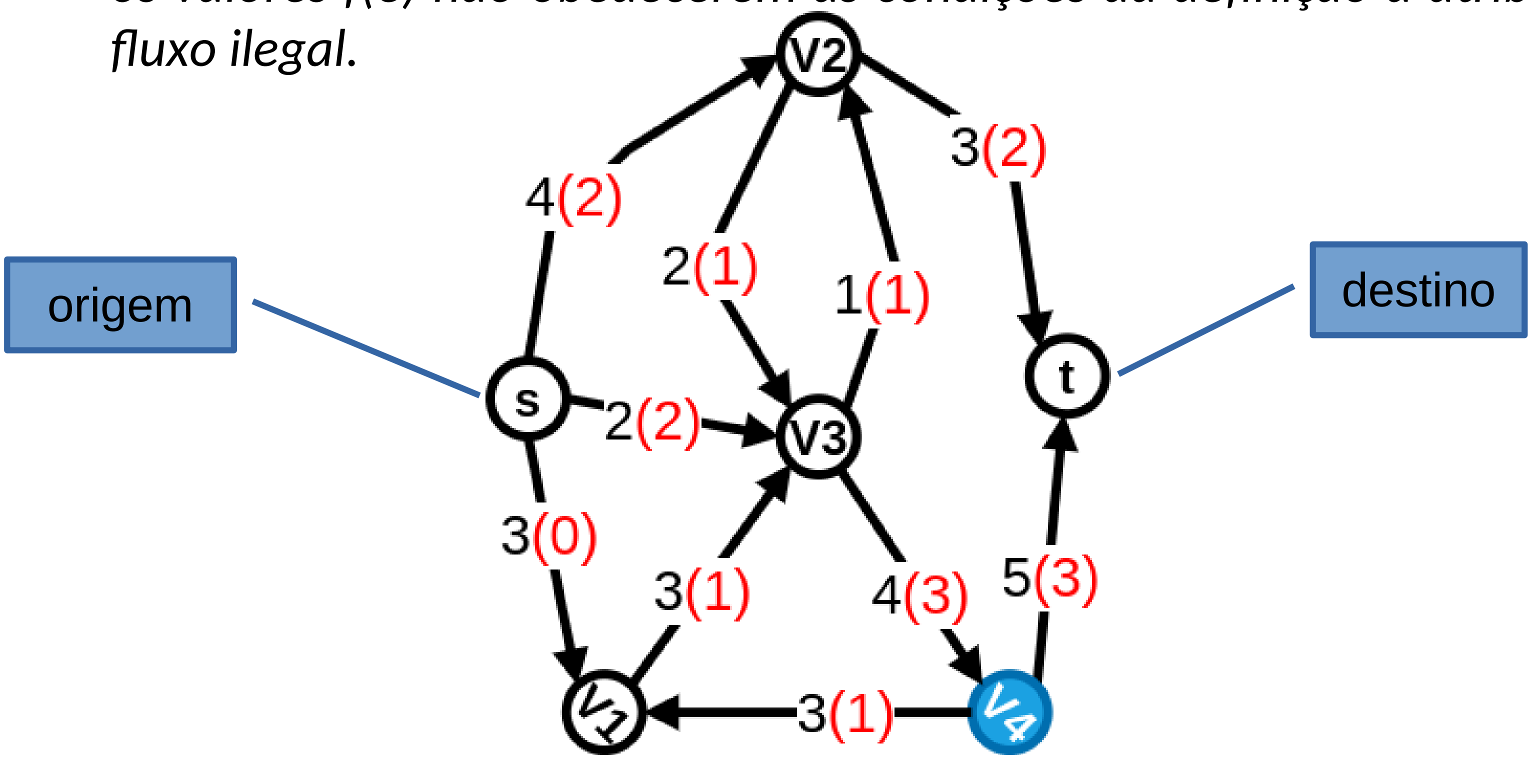


(A)

Fluxo em Redes

Outro exemplo:

B) A situação baixo não corresponde a um fluxo legal. Pois o vértice v4 não satisfaz à condição (ii) [fluxoTotalEntrada(v4) = 3] != [fluxoTotalSaida(v4) = 4]. Se os valores f(e) não obedecerem às condições da definição a atribuição f será um fluxo ilegal.



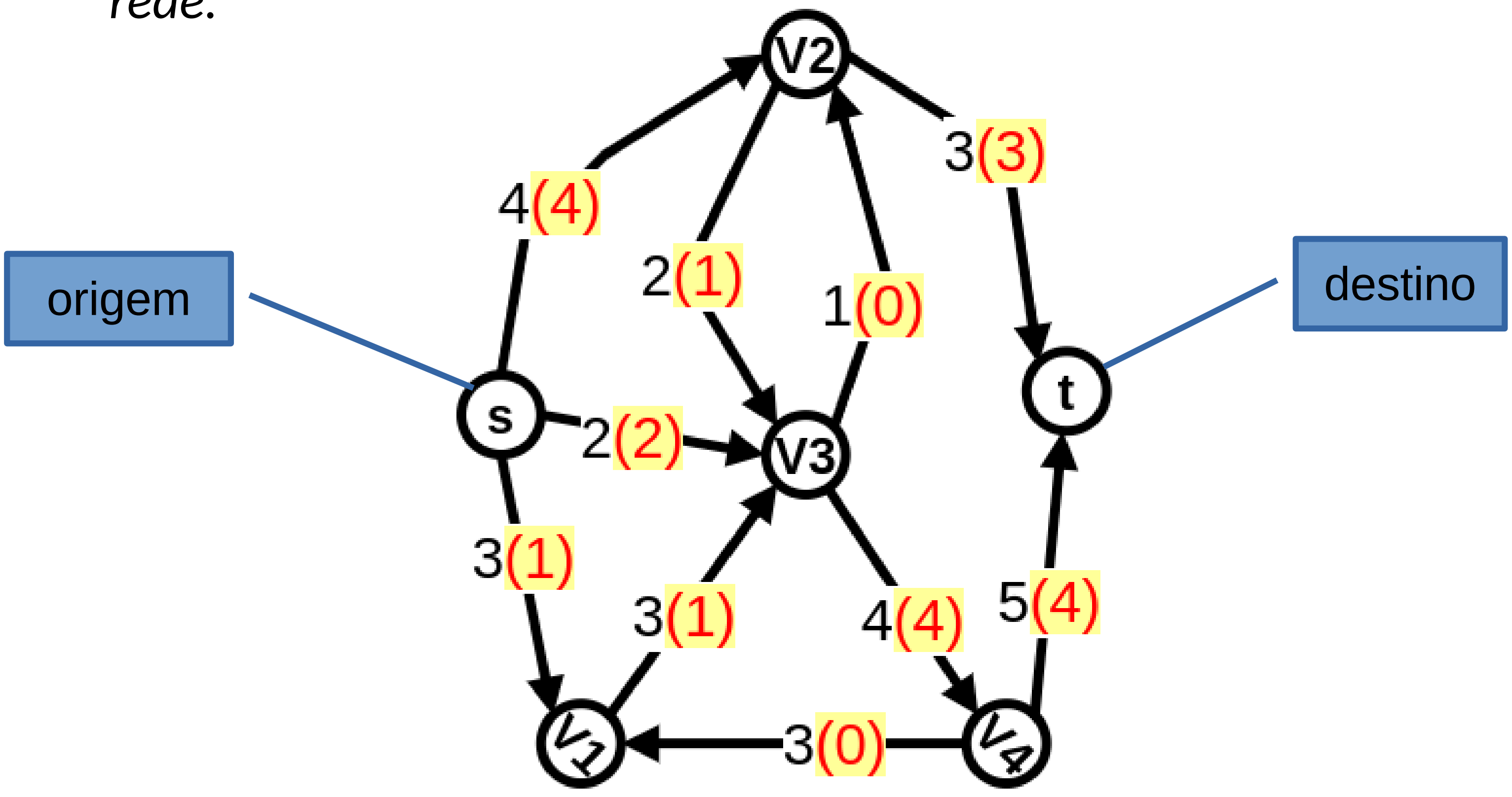
(B)

Fluxo em Redes

Outro exemplo:

C) O valor do fluxo em uma rede pode variar de um mínimo igual a zero até um certo máximo.

Por exemplo, o valor do fluxo na figura é igual a 7, o qual é máximo para essa rede.



(C)

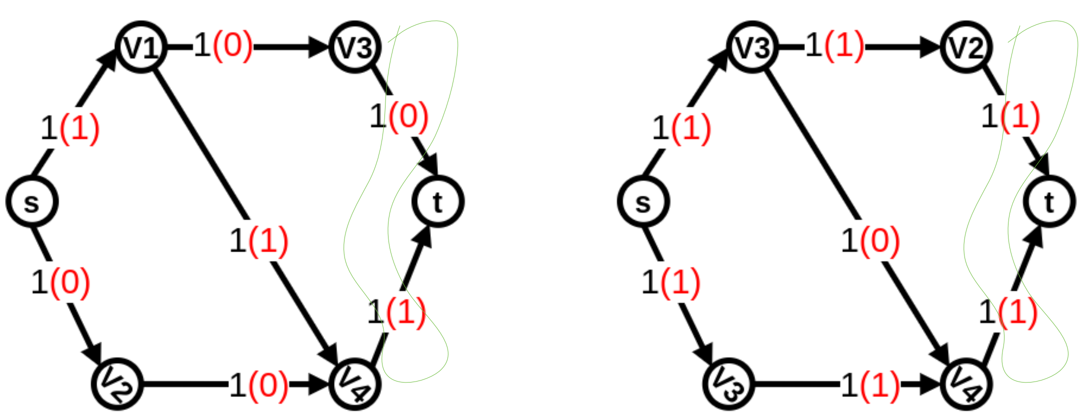
Fluxo em Redes

Fluxo maximal e fluxo máximo:

Um fluxo é maximal quando todo caminho da origem *s* ao destino *t* da rede contém alguma aresta saturada. O valor de um fluxo maximal não pode ser aumentado simplesmente por acréscimos de fluxos em algumas arestas.

Na figura-A (abaixo): as arestas (s,v1), (v1,v4) e (v4,t) estão saturadas, bem como os vértices v1 e v4. Este fluxo é maximal pois todo caminho de s a t contém uma dessas arestas (ou um desses vértices).

O valor do fluxo em A é igual a 1 (total de fluxo entrante no vértice de destino),



(A) (B)

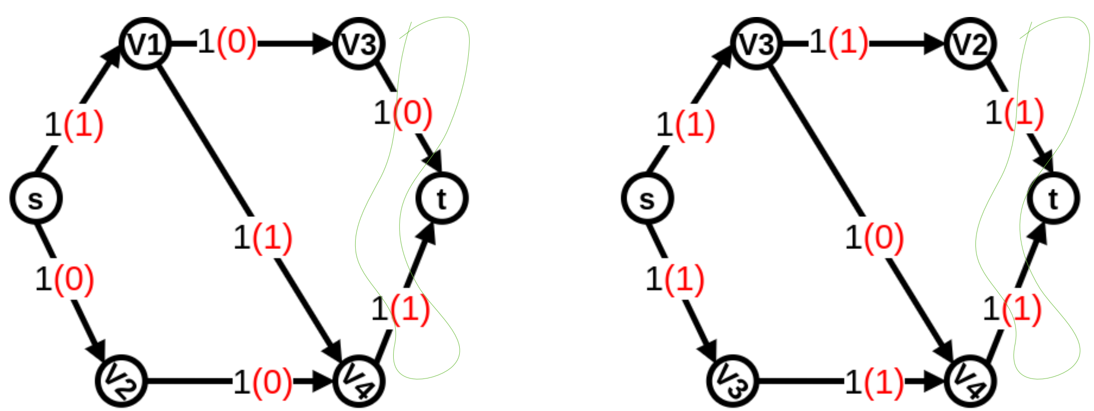
Fluxo em Redes

Fluxo maximal e fluxo máximo:

Naturalmente, todo fluxo máximo é maximal. Contudo, a recíproca não é necessariamente verdadeira:

- O valor do fluxo em A é igual a 1 (total de fluxo entrante no vértice de destino), porém, ele não é fluxo máximo.

- O fluxo exibido na figura B, na mesma rede, é que é máximo e possui valor 2.



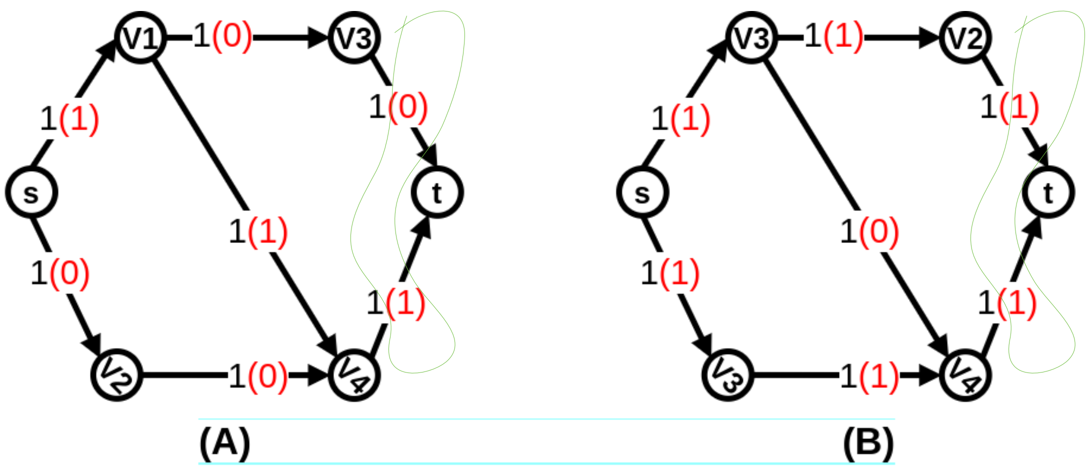
(A) (B)

Fluxo em Redes

O problema do fluxo em redes é, dentre todas as possibilidades, encontrar um fluxo legal máximo na rede!

A) fluxo = 1

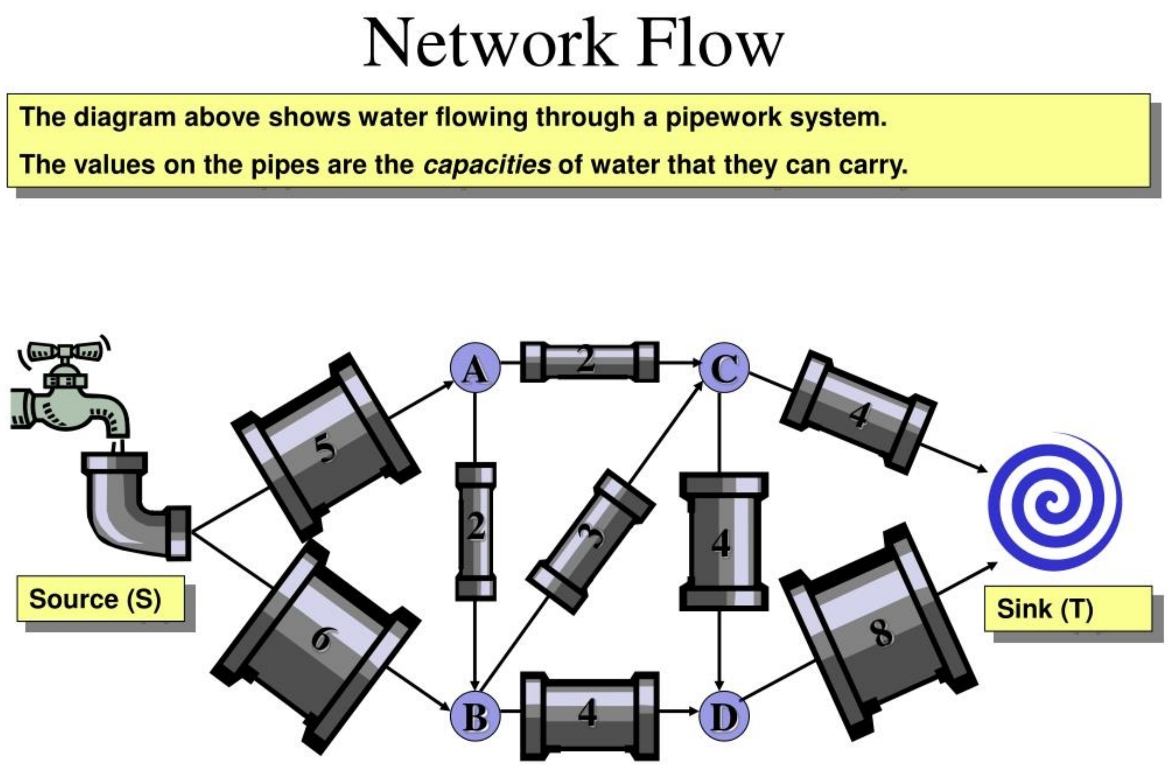
B) fluxo=2



Um algoritmo guloso clássico para determinar fluxo máximo é o Ford–Fulkerson.

Fluxo em Redes

O problema do fluxo máximo consiste apenas em maximizar o valor do fluxo em cada aresta, considerando-se as restrições de canalização nas arestas e a lei de conservação de fluxo nos vértices. A ideia é como distribuir pela rede um fluxo entrante pelo vértice-origem maximizando o uso das capacidades das arestas.

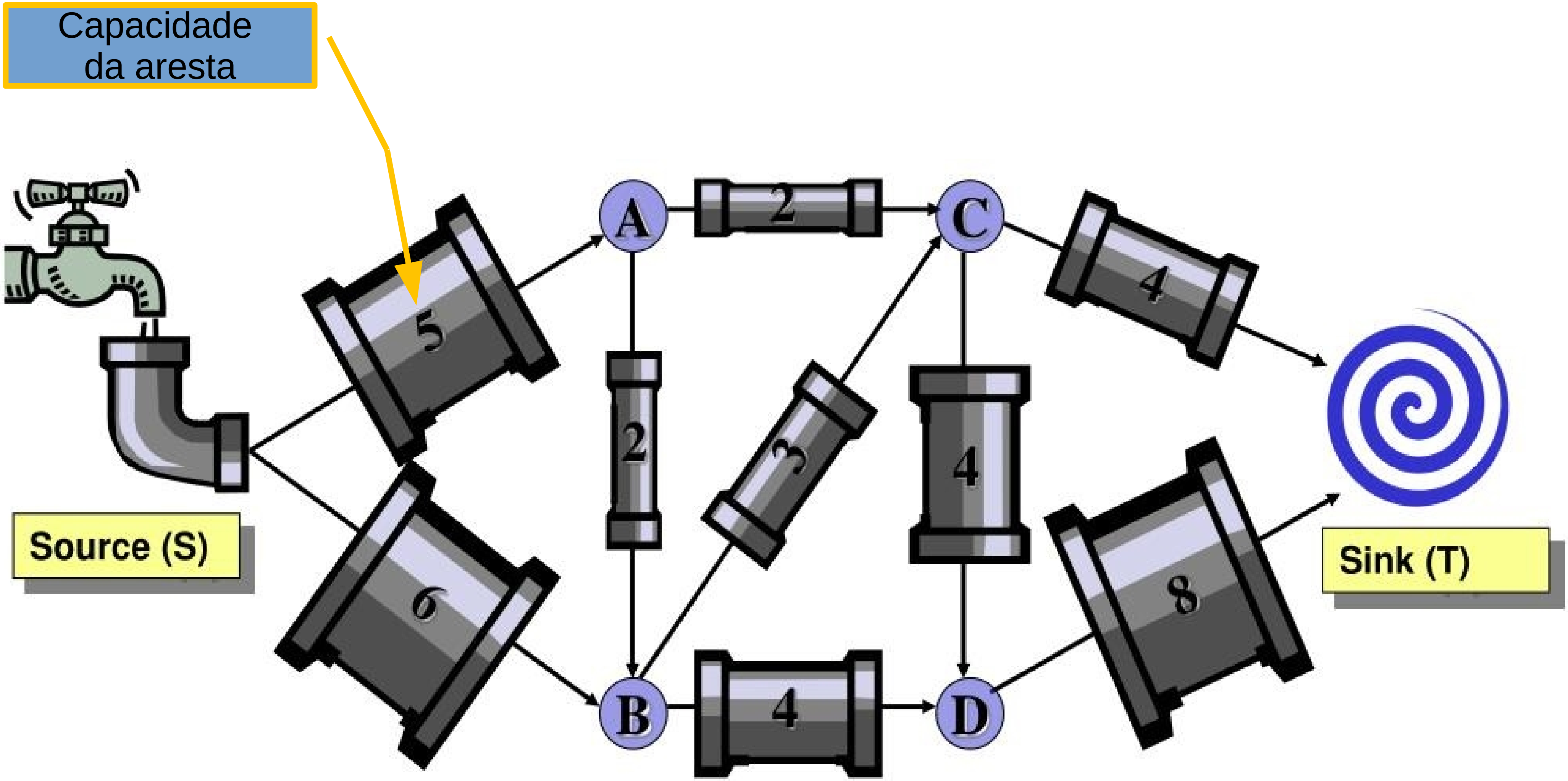


https://www.slideserve.com/vahe/network-flow

Network Flow

The diagram above shows water flowing through a pipework system.

The values on the pipes are the *capacities* of water that they can carry.



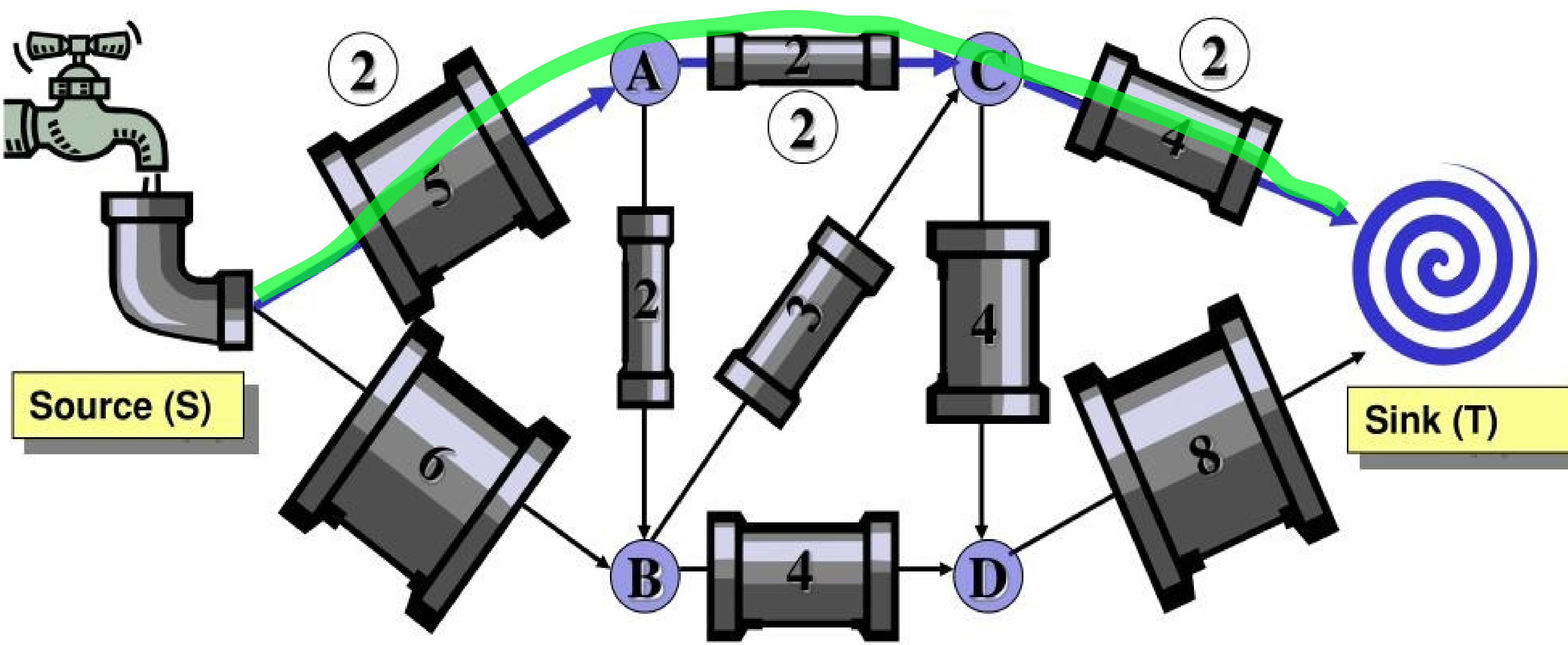
Fonte: https://www.slideserve.com/vahe/network-flow

Network Flow

Suppose we turn on the tap so that water flows along the path SACT.

What is the maximum flow along this path?

The maximum flow is governed by the minimum capacity along the path – in this case 2.

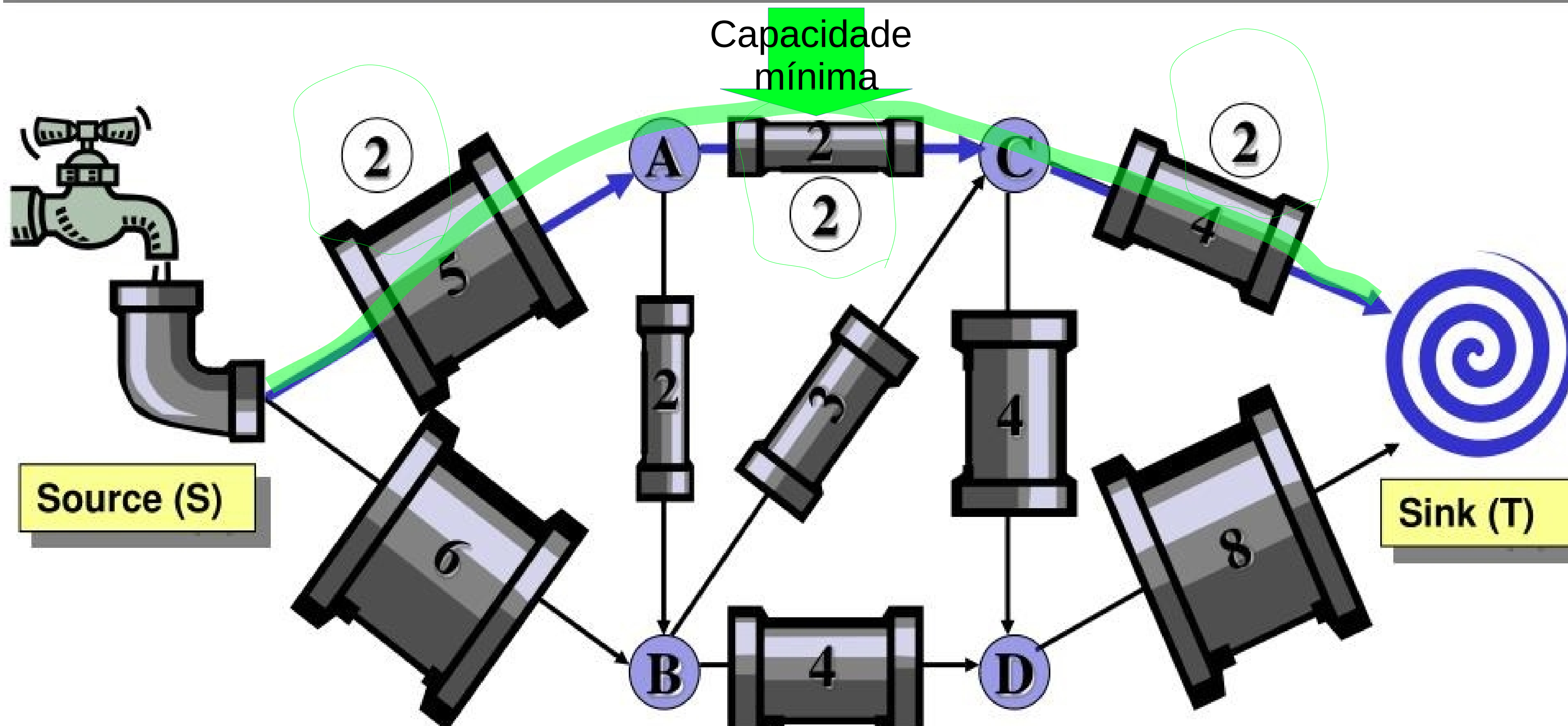


Network Flow

Suppose we turn on the tap so that water flows along the path SACT.

What is the maximum flow along this path?

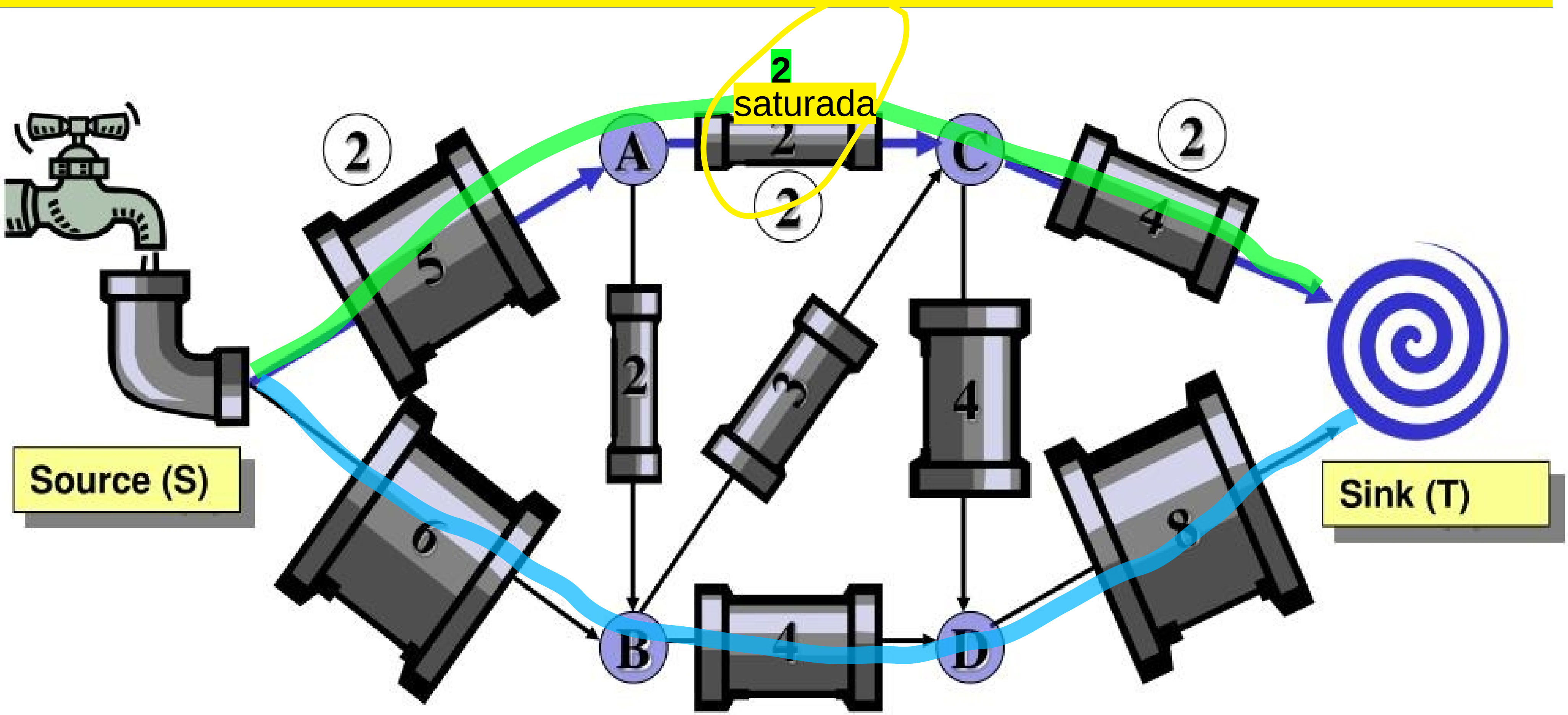
The maximum flow is governed by the minimum capacity along the path – in this case 2.



Capacidade mínima 2 determina o fluxo máximo em SACT

Network Flow

A ideia é procurar um novo caminho S até T ainda não saturado (com capacidade ociosa - *Excess capacity*) e ajustá-lo maximizando o uso das capacidades nas arestas.
No caso, Iremos optar pelo caminho SBDT

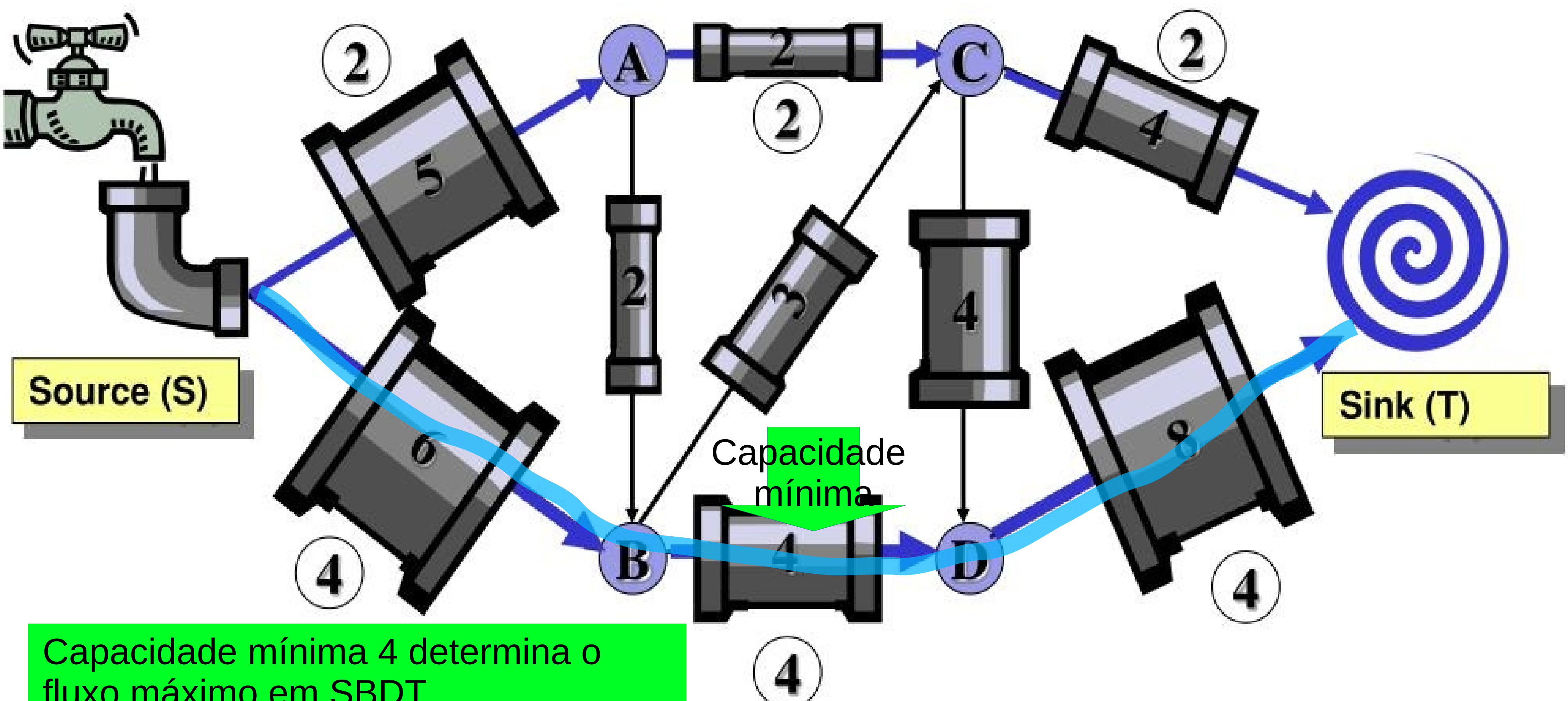


Network Flow

Now consider the path SBDT.

What is the maximum flow along this path?

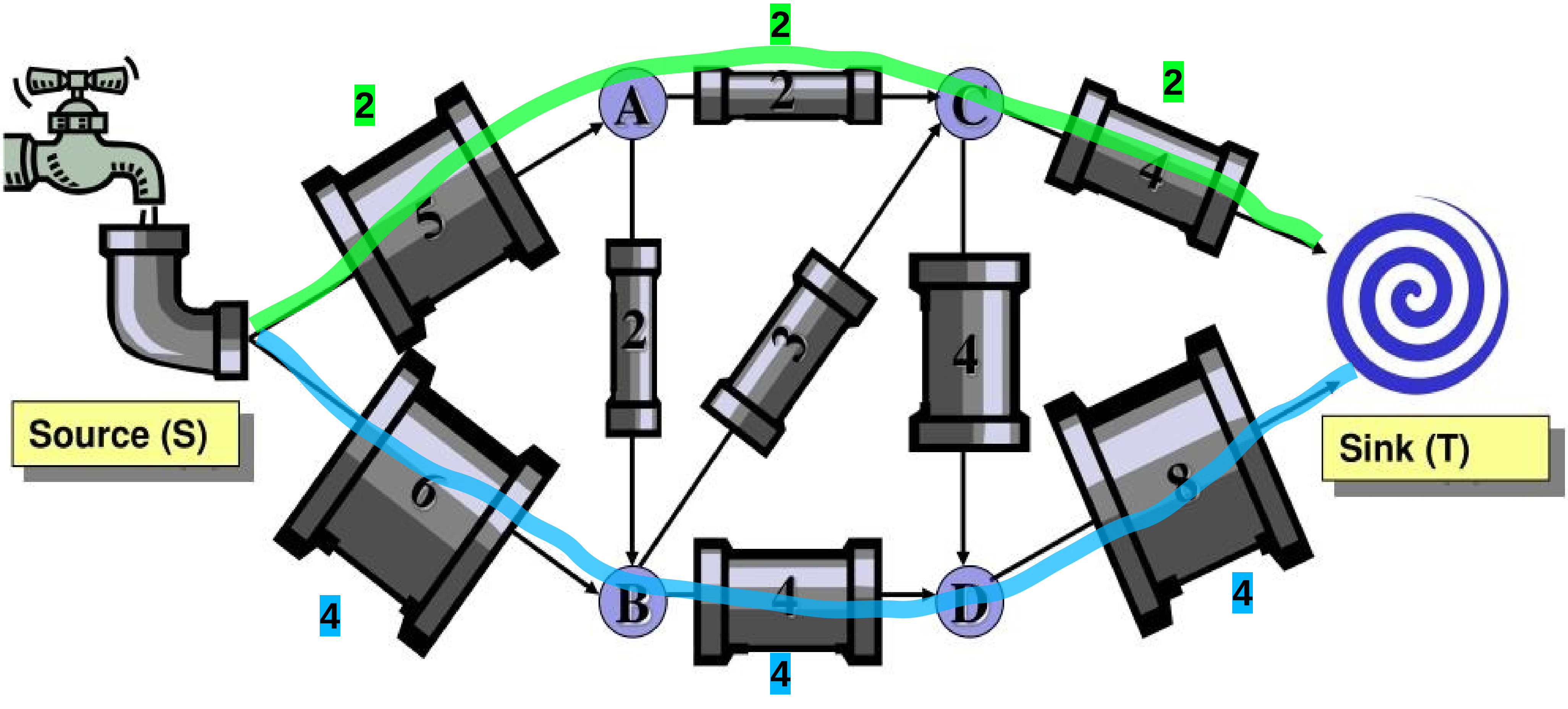
The minimum capacity along this path, and hence the maximum flow, is 4.



Capacidade mínima 4 determina o fluxo máximo em SBDT

Network Flow

O que temos até aqui:



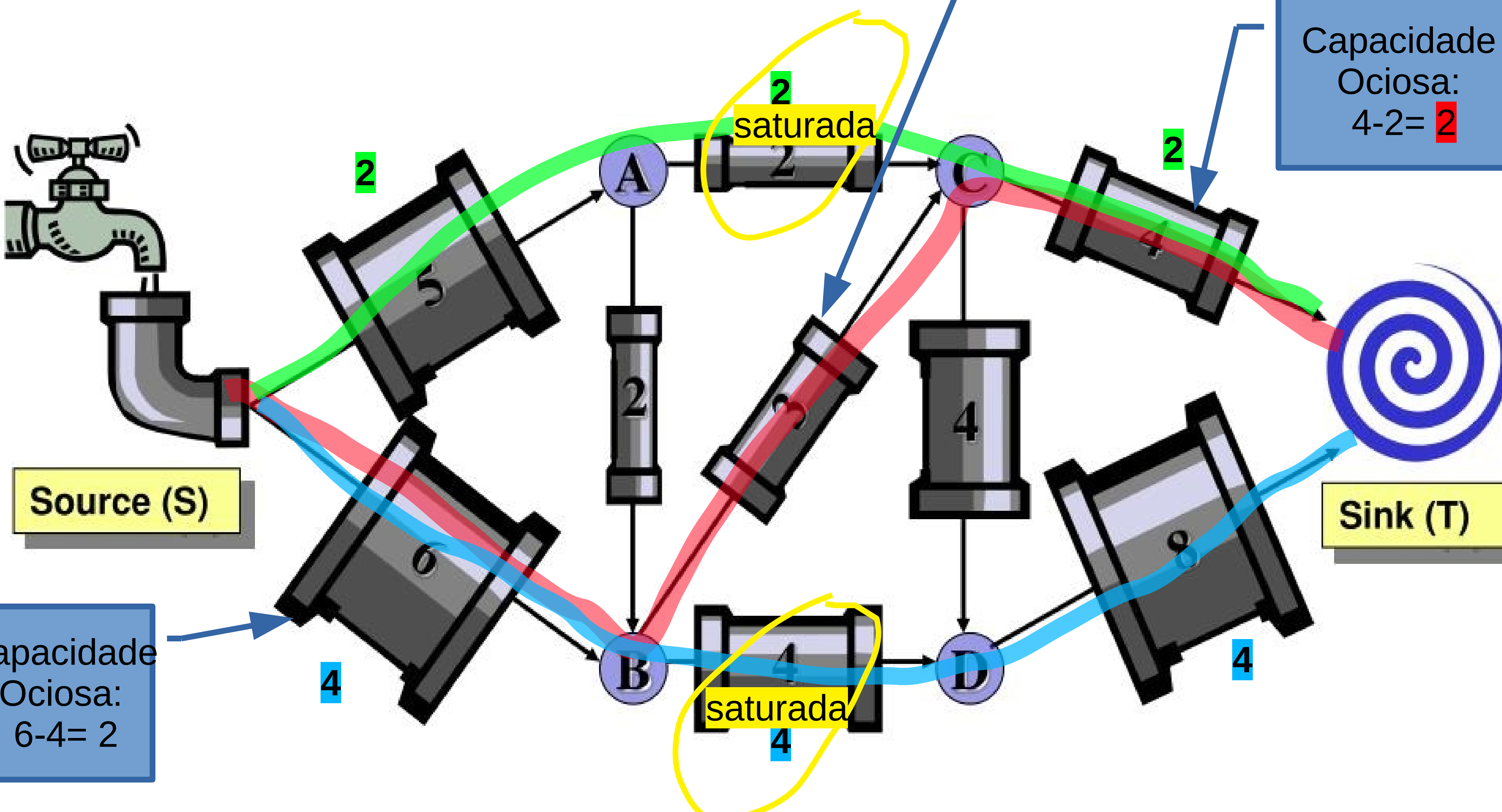
Network Flow

Busco um caminho não saturado: SBCT

Capacidade Ociosa: 3-0= 3

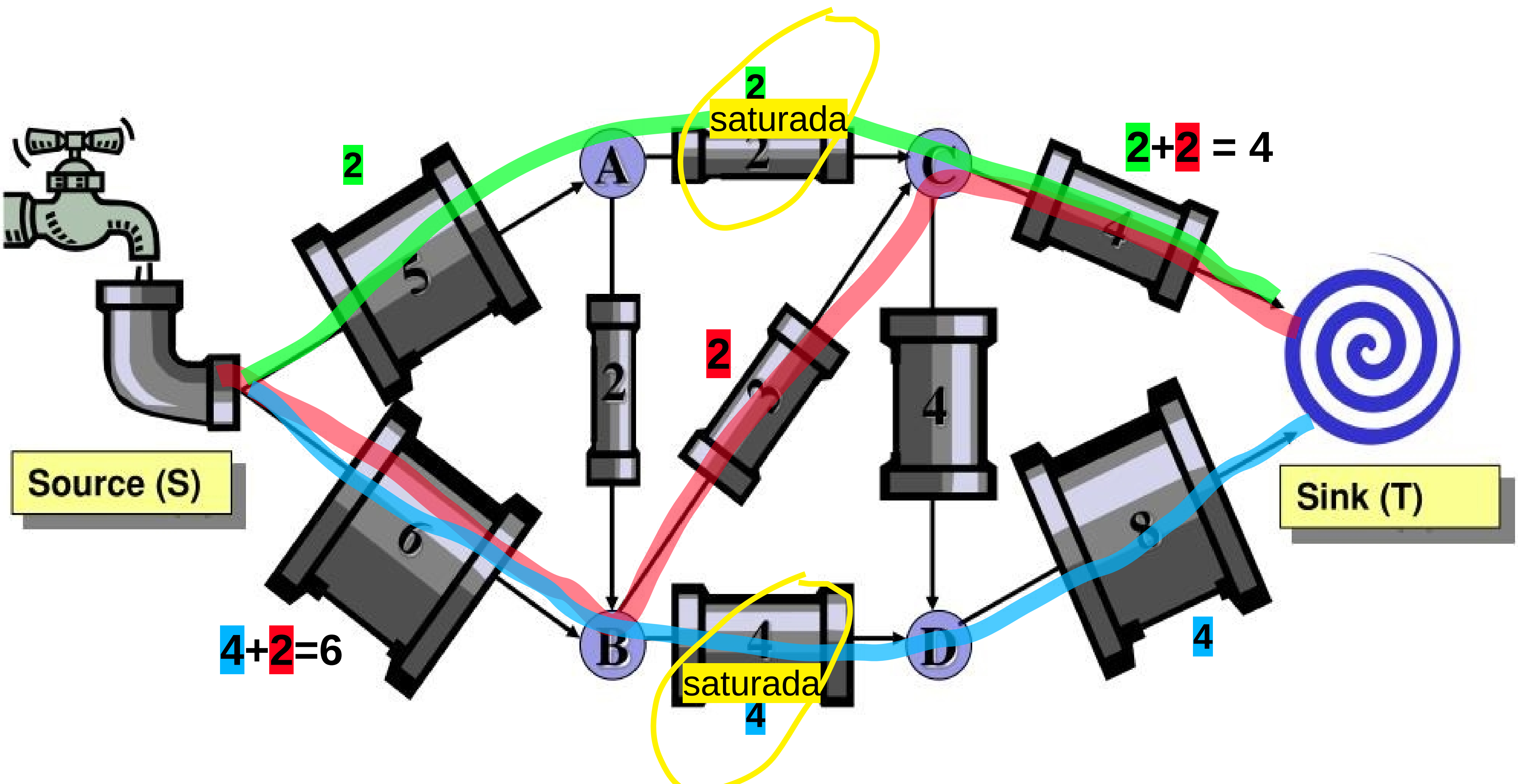
Capacidade Ociosa: 4-2= 2

Capacidade Ociosa: 6-4= 2



Network Flow

O fluxo máximo SBCT é igual a 2, ou seja, é igual à menor capacidade ociosa em SBCT



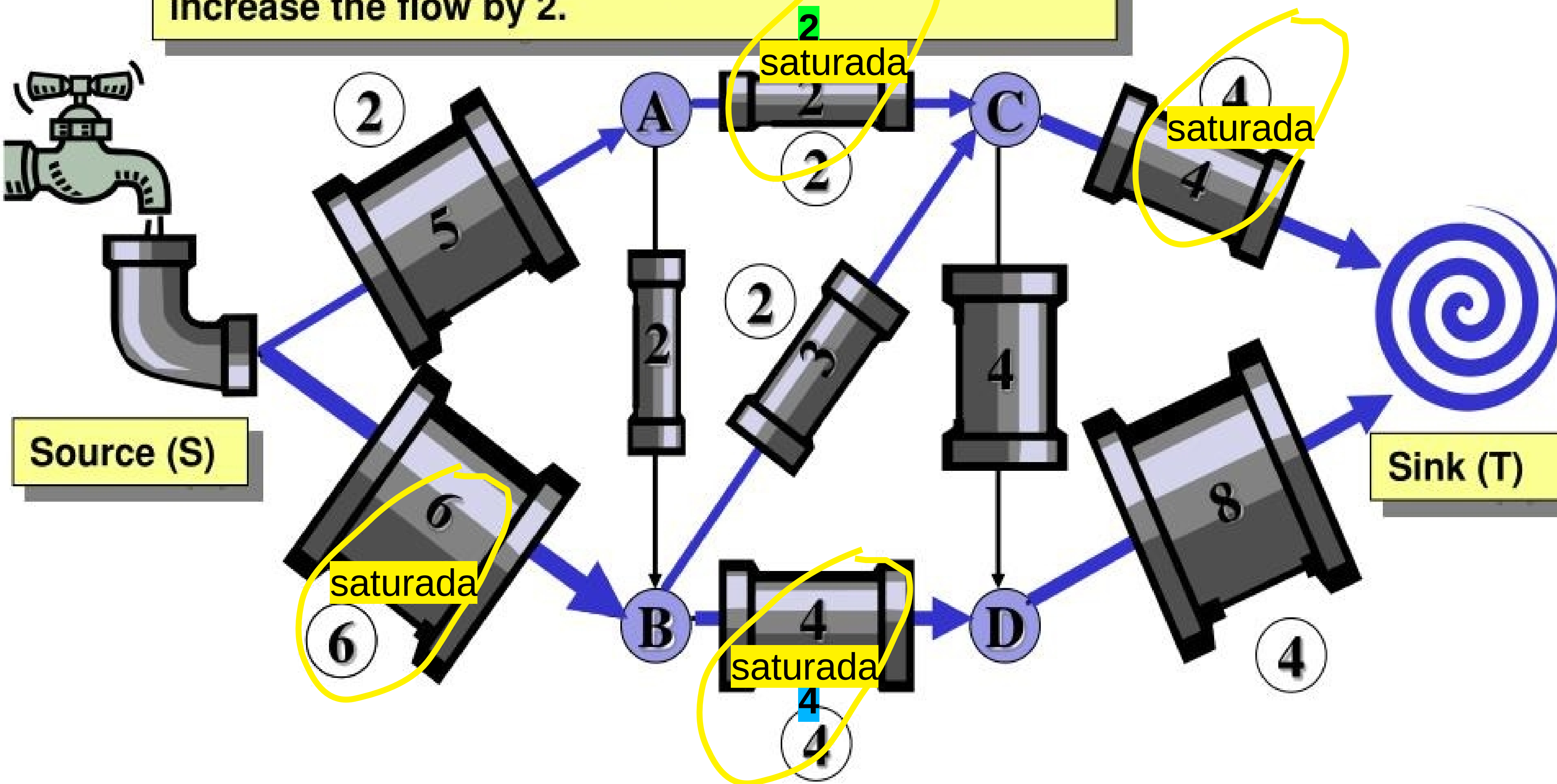
Network Flow

We can increase the flow if we can find a path from S to T with no saturated edges.

The flow can then be increased by the minimum excess capacity.

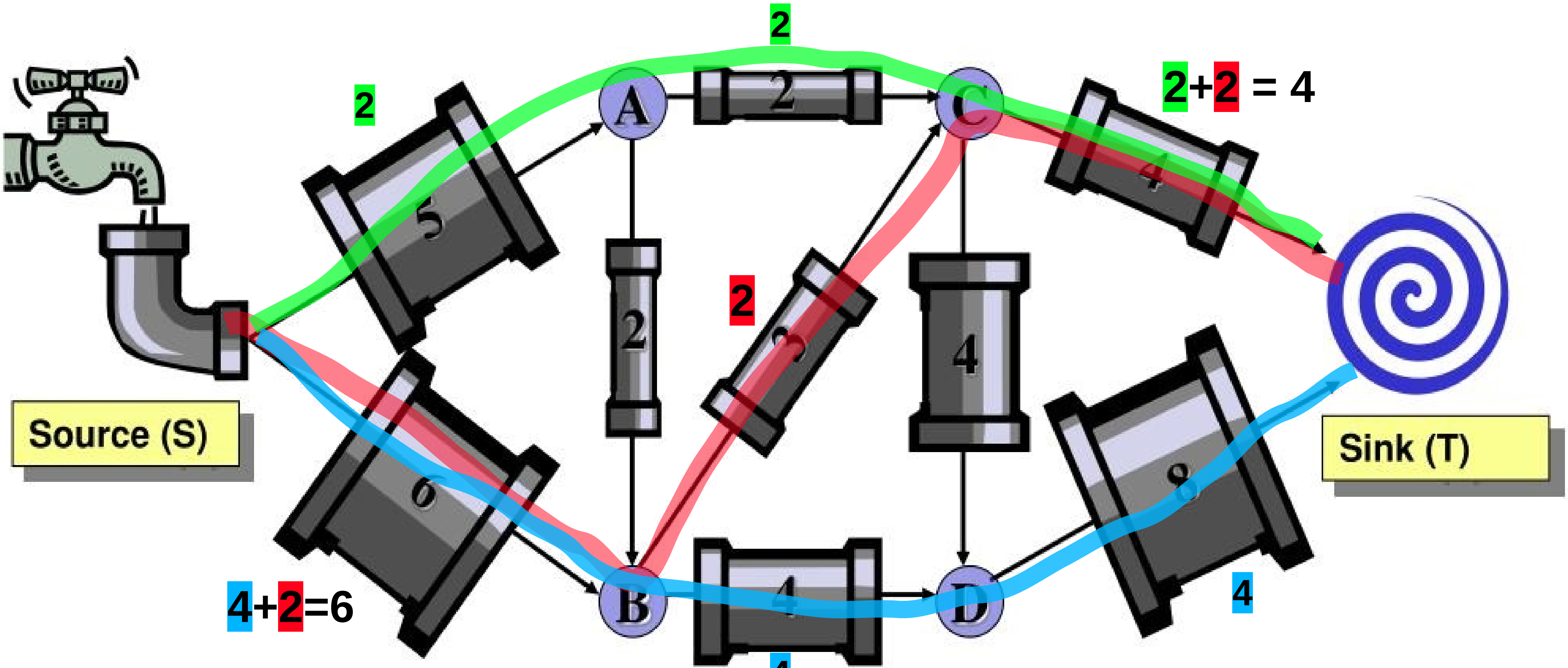
Consider the path SBCT .

The minimum excess capacity is 2, so we can increase the flow by 2.



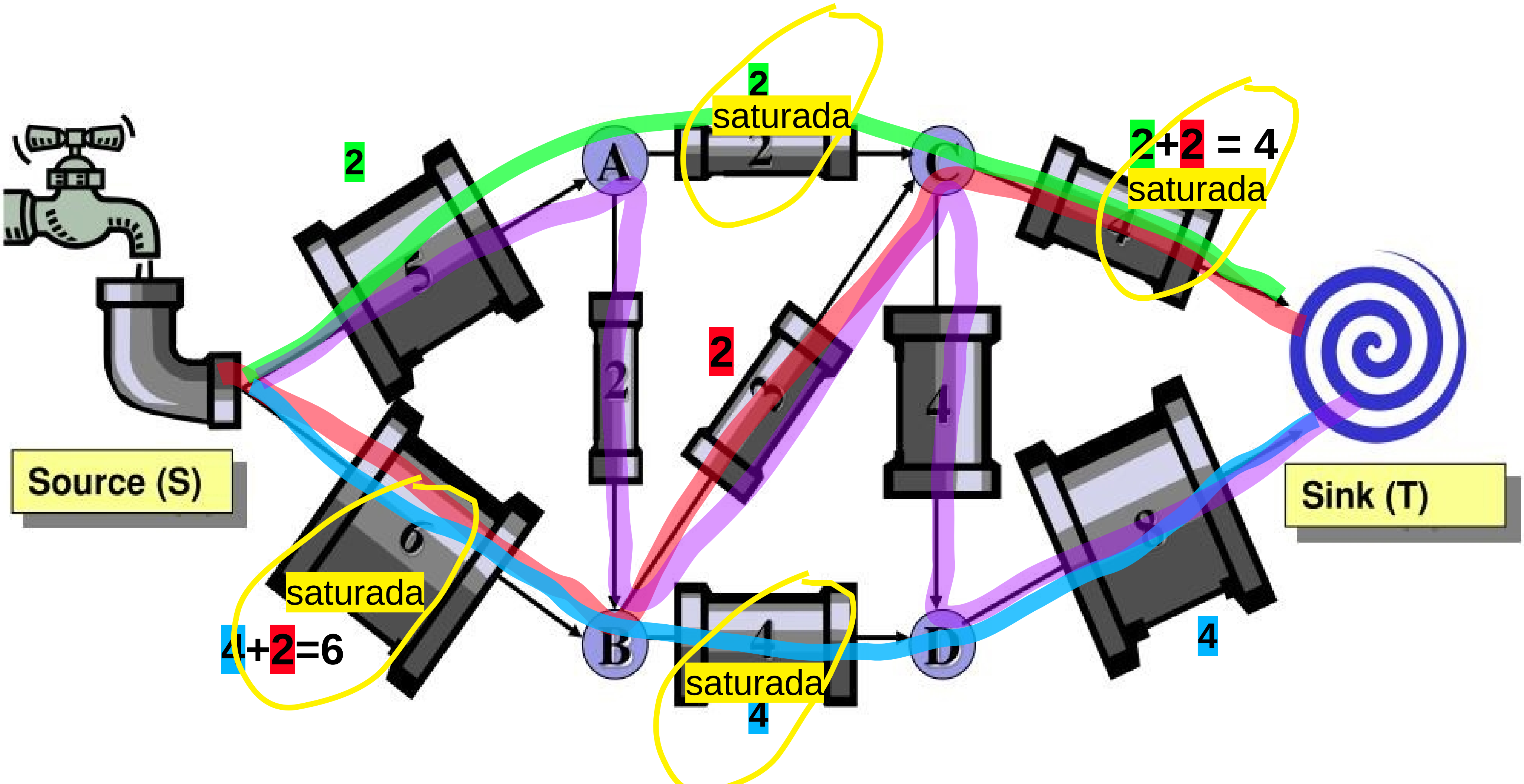
Network Flow

O que temos até aqui:



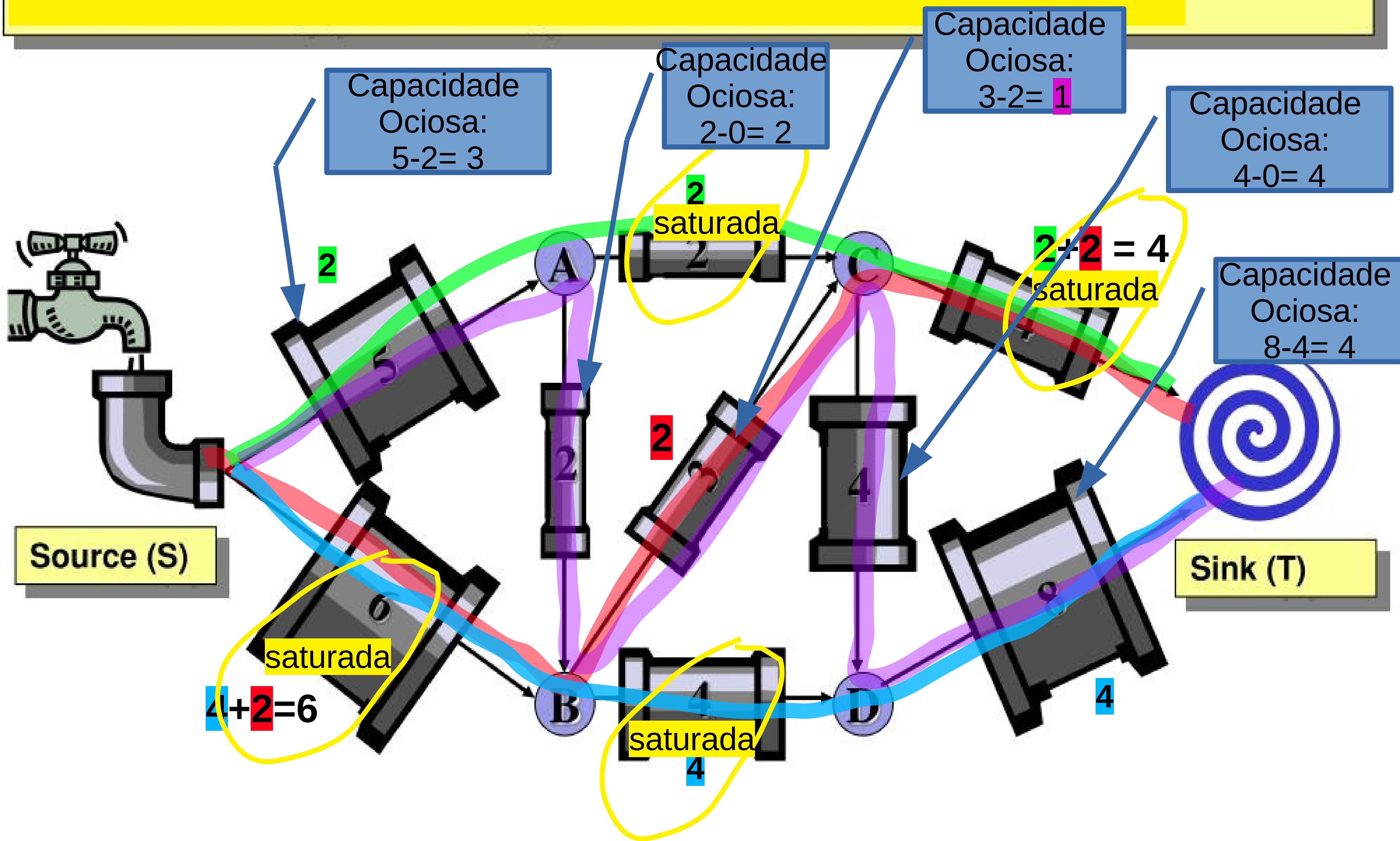
Network Flow

Buscamos um novo caminho não saturado: SABCDT



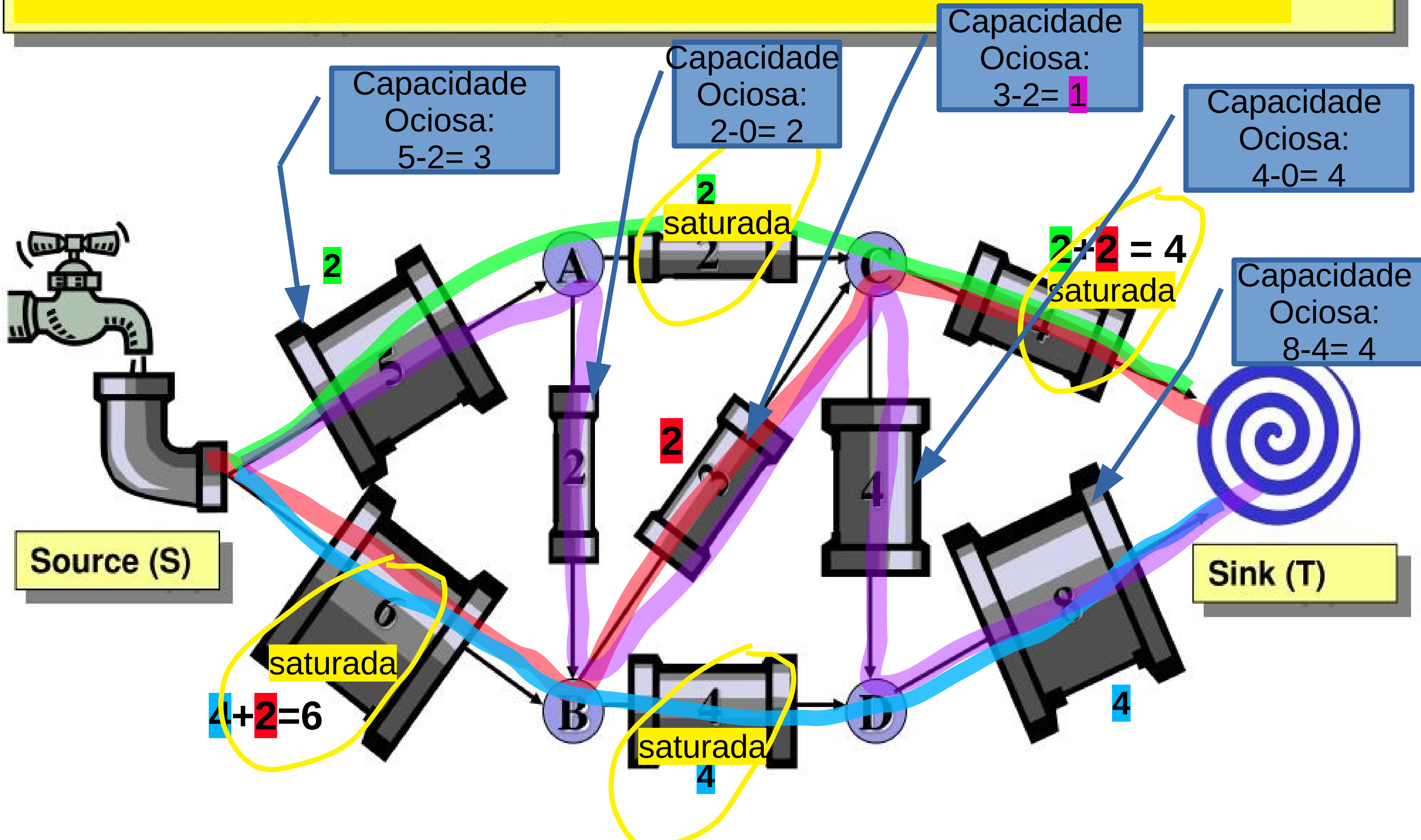
Network Flow

Um caminho não saturado: SABCDT



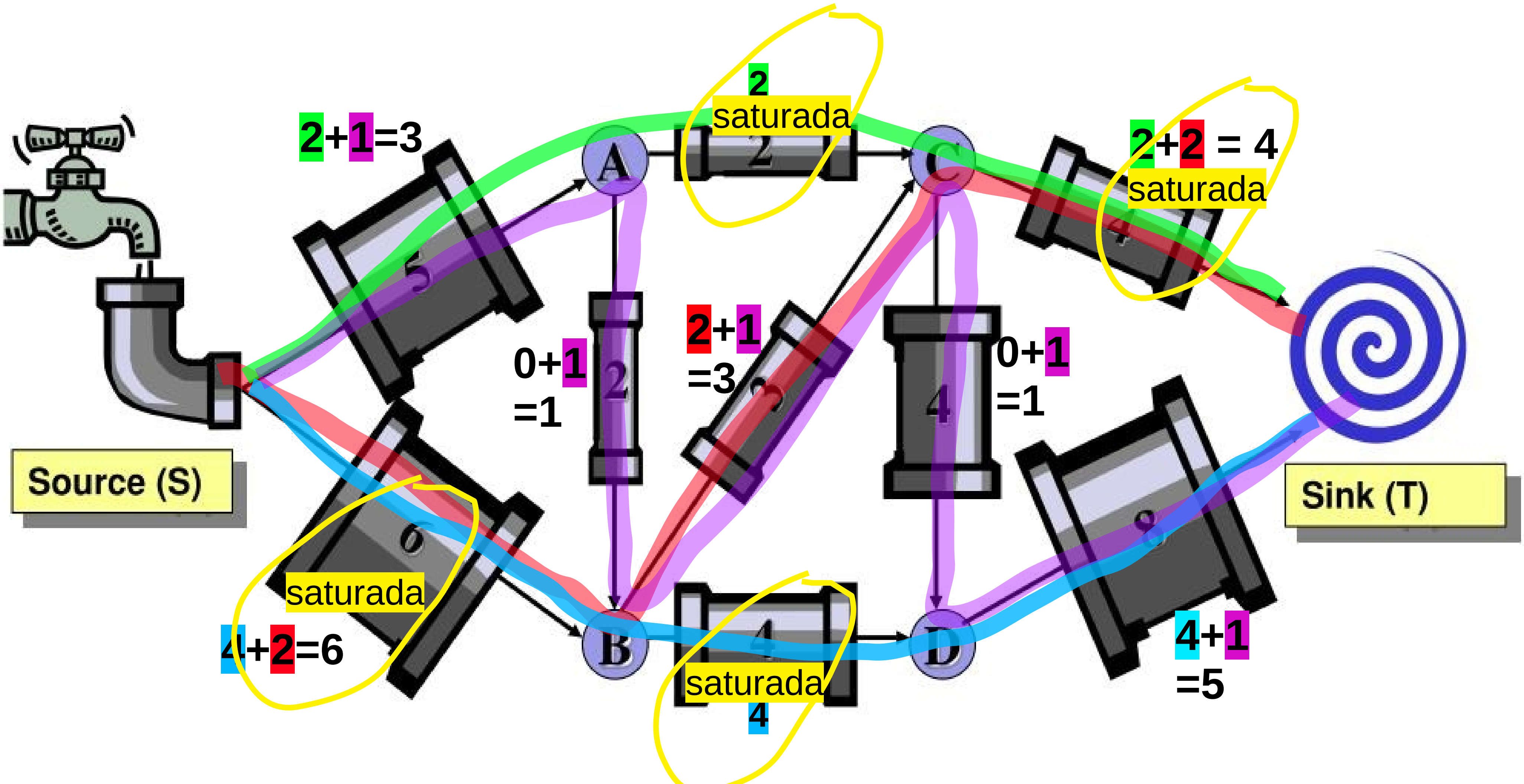
Network Flow

O fluxo máximo SABCDT é igual a 1, ou seja, a menor capacidade ociosa em SABCDT



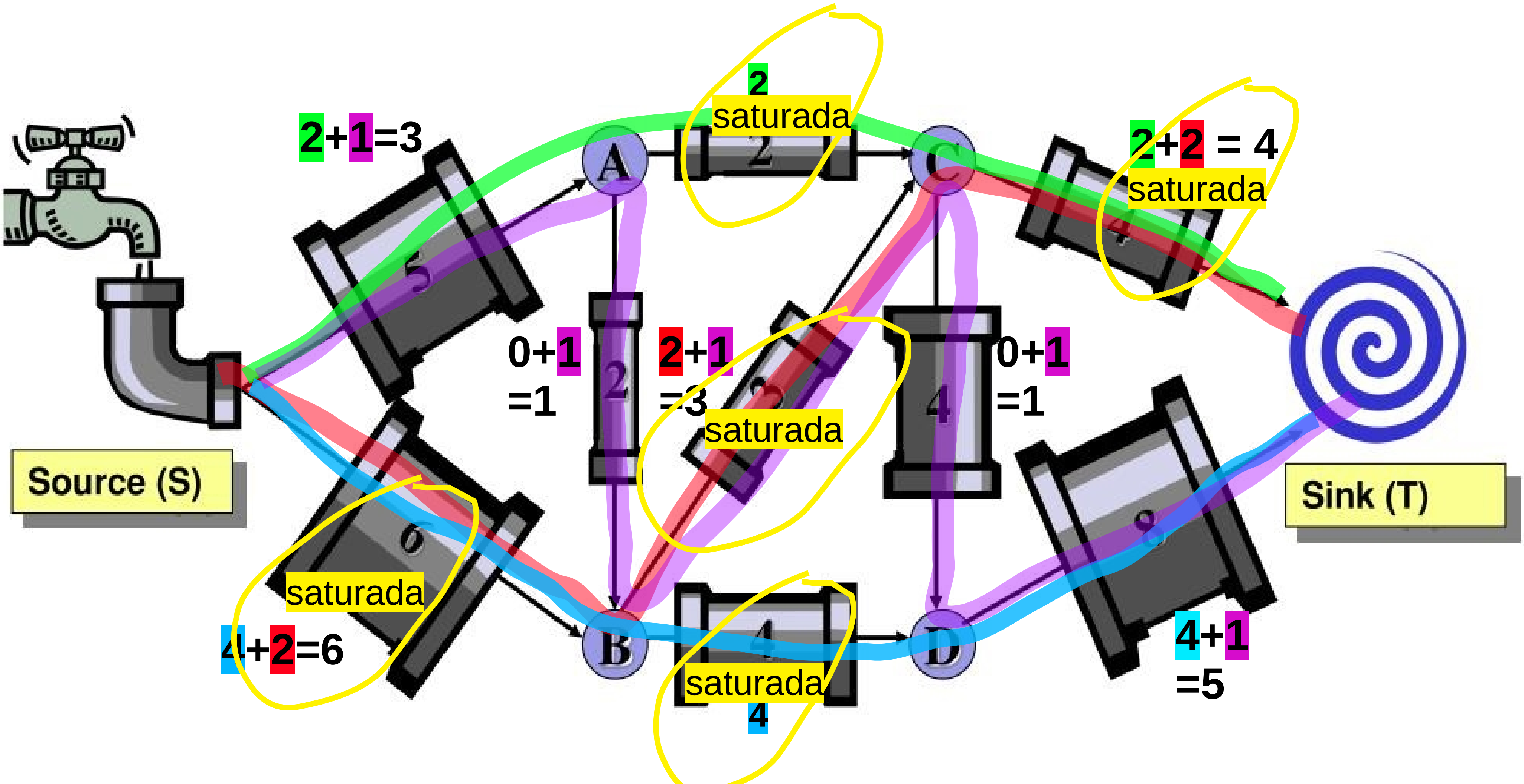
Network Flow

O fluxo máximo SABCDT é igual a 1, ou seja, a menor capacidade ociosa em SABCDT



Network Flow

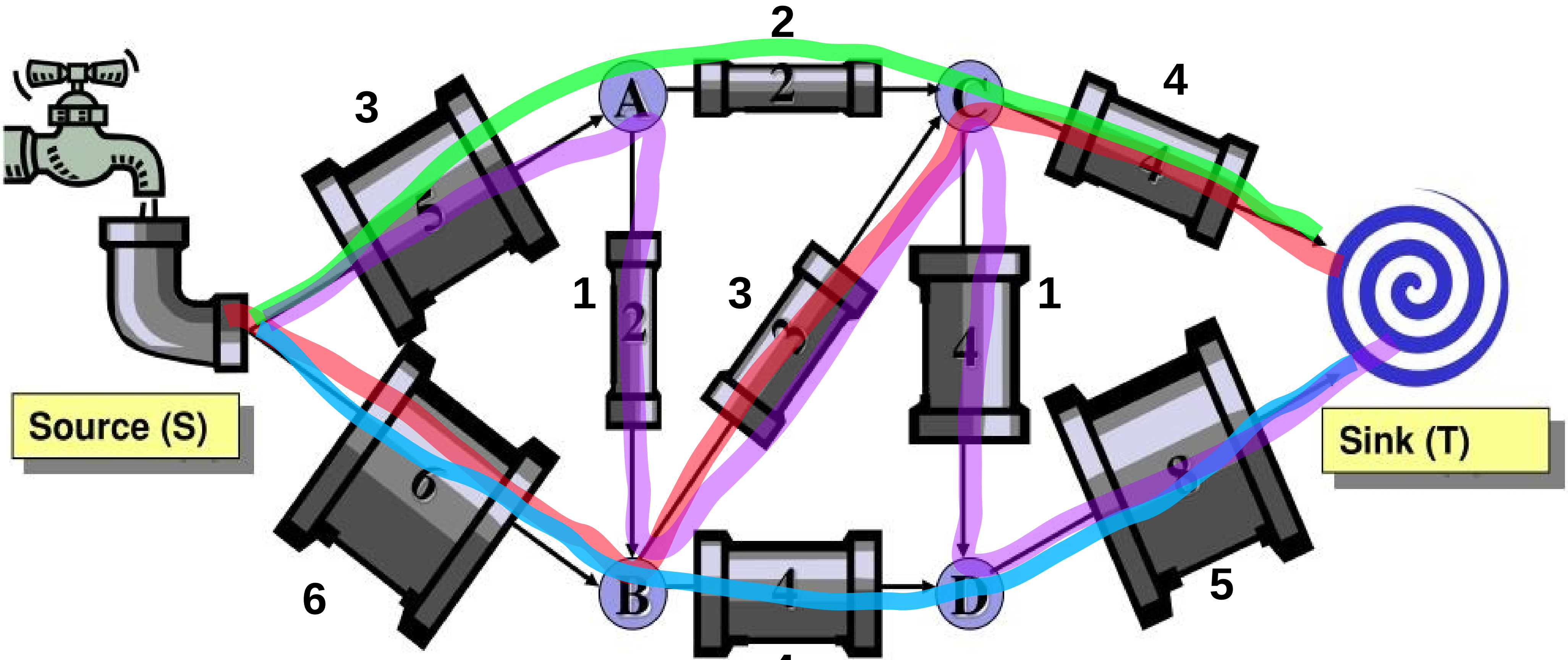
Fim: todos os possíveis caminhos entre s e t estão saturados, contendo pelo menos uma aresta saturada, sem capacidade ociosa.



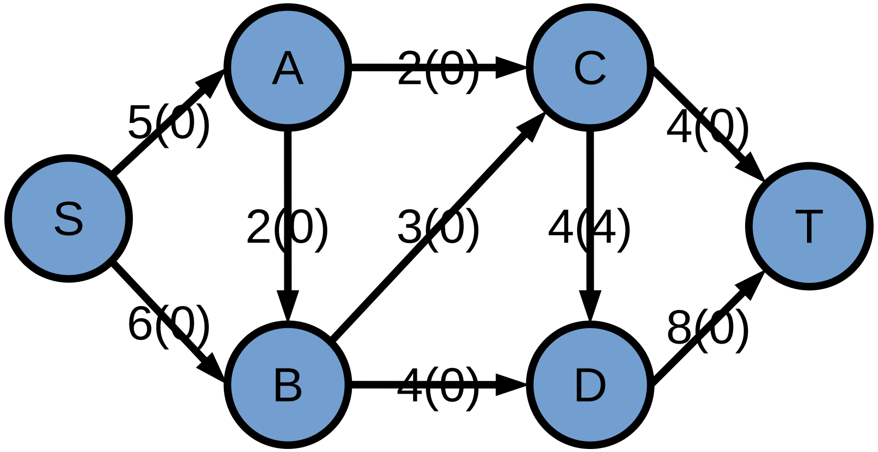
Network Flow

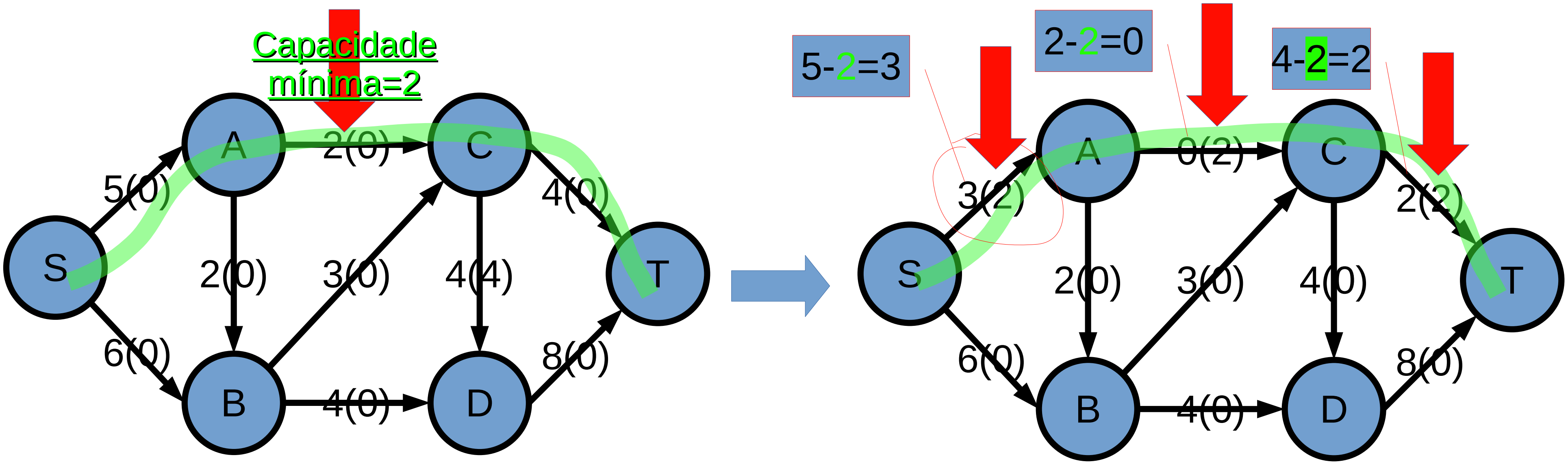
Fim: todos os possíveis caminhos entre s e t estão saturados, contendo pelo menos uma aresta saturada, sem capacidade ociosa. Temos um fluxo máximo na rede = 9, sendo validadas as propriedades que definem o fluxo em redes, particularmente:

$$\sum_{1}^{|V|} outdeg(v_i) = \sum_{1}^{|V|} indeg(v_i)$$

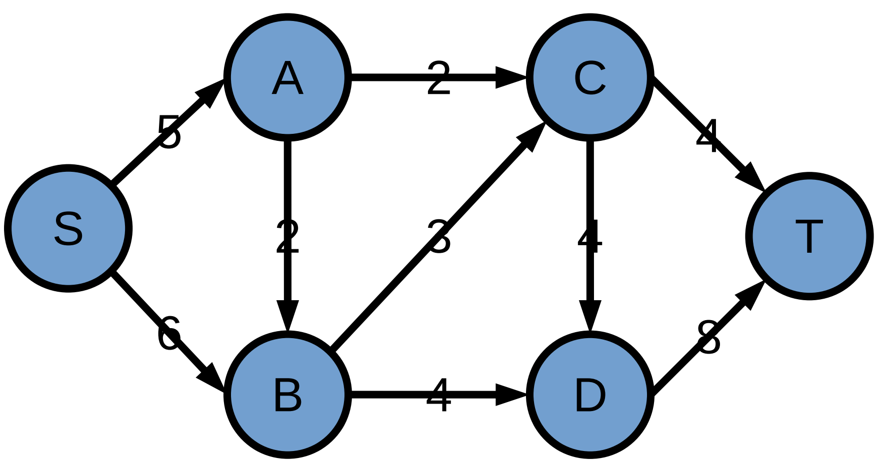


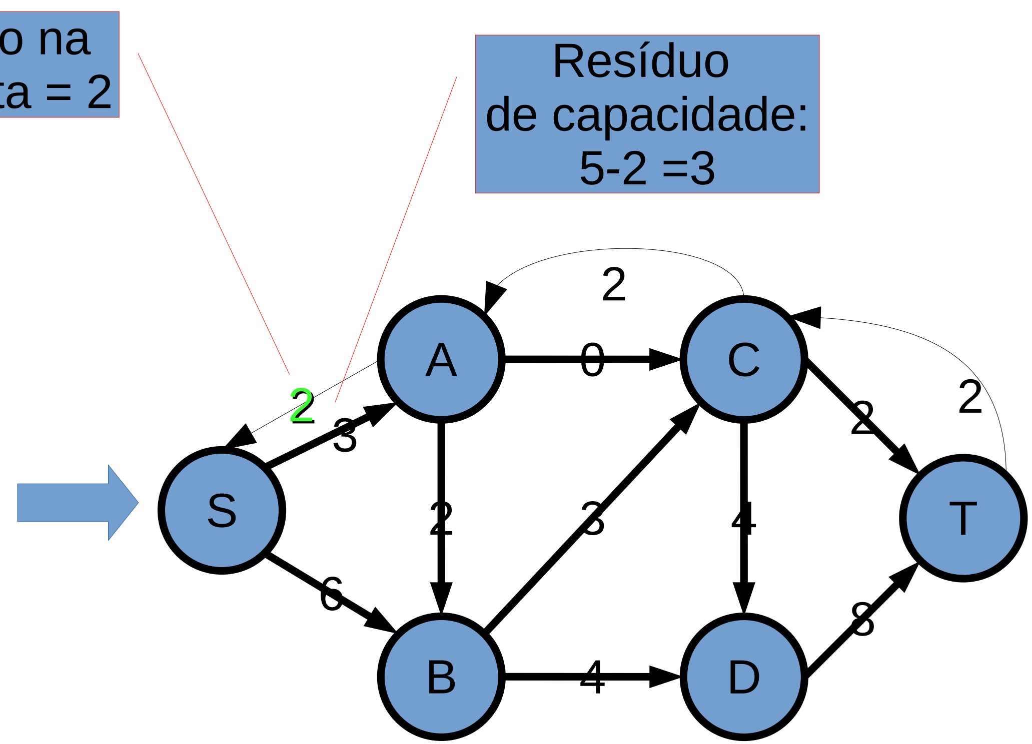
Certas implementações para determinação de fluxo máximo utilizam uma estrutura de apoio chamada rede residual, é o caso implementado por Szwarcfiter [2], a seguir é feito um exemplo para io grafo abaixo...

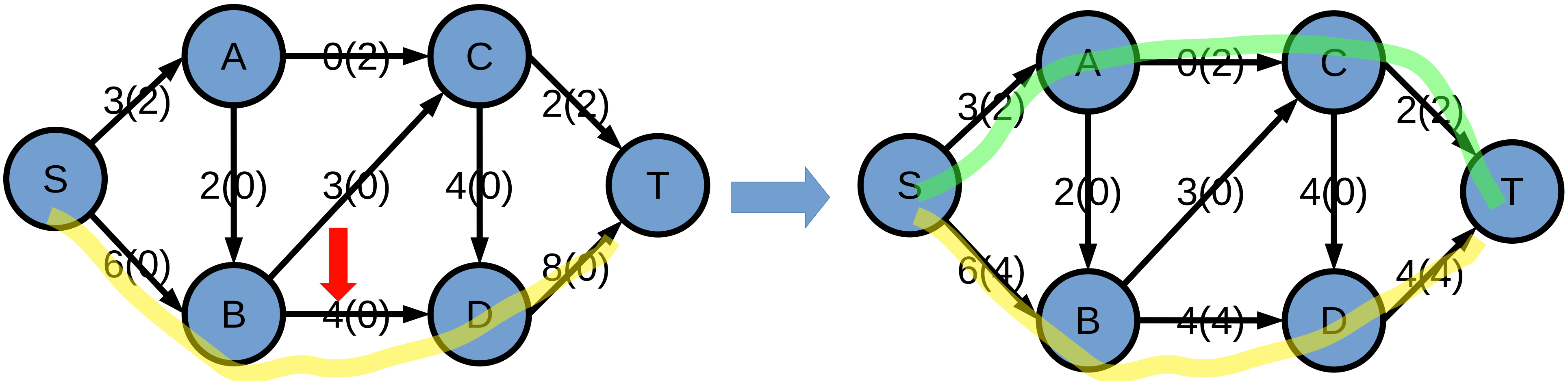




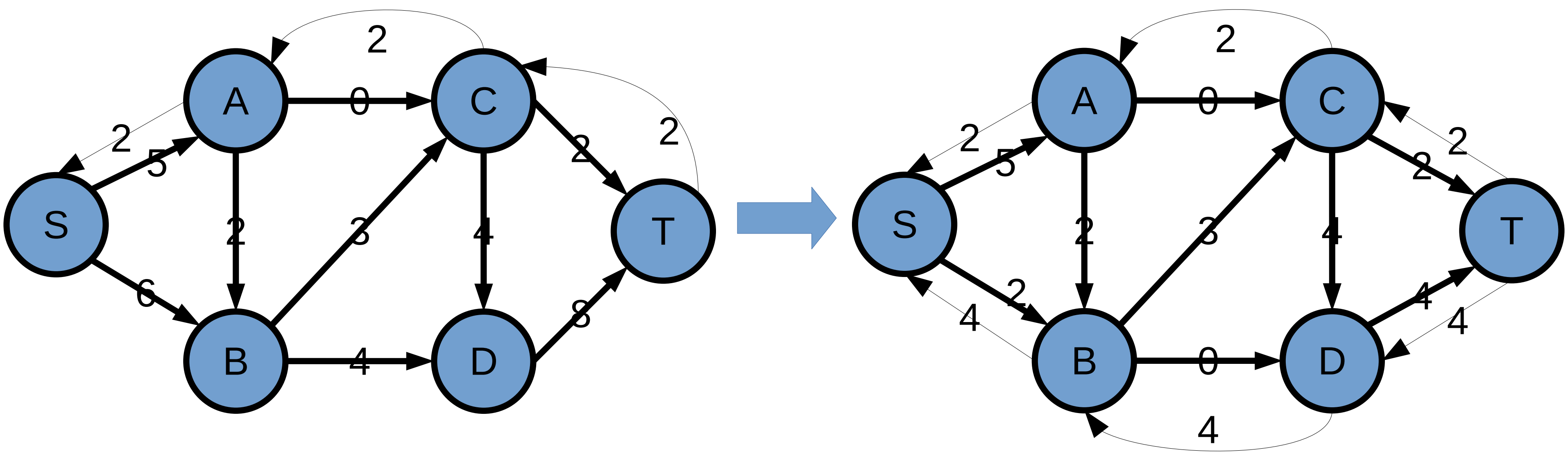
REDE RESIDUAL:

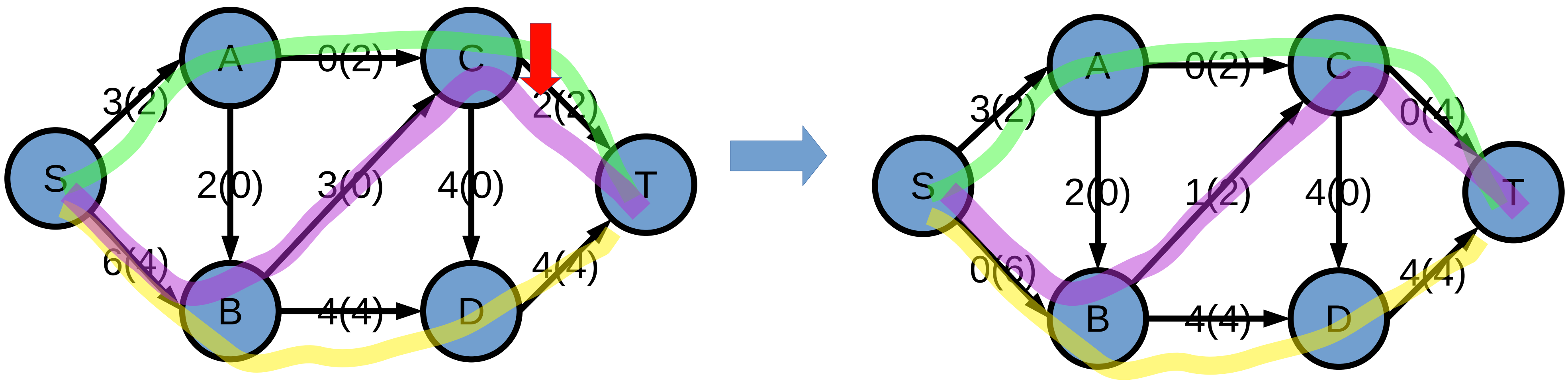




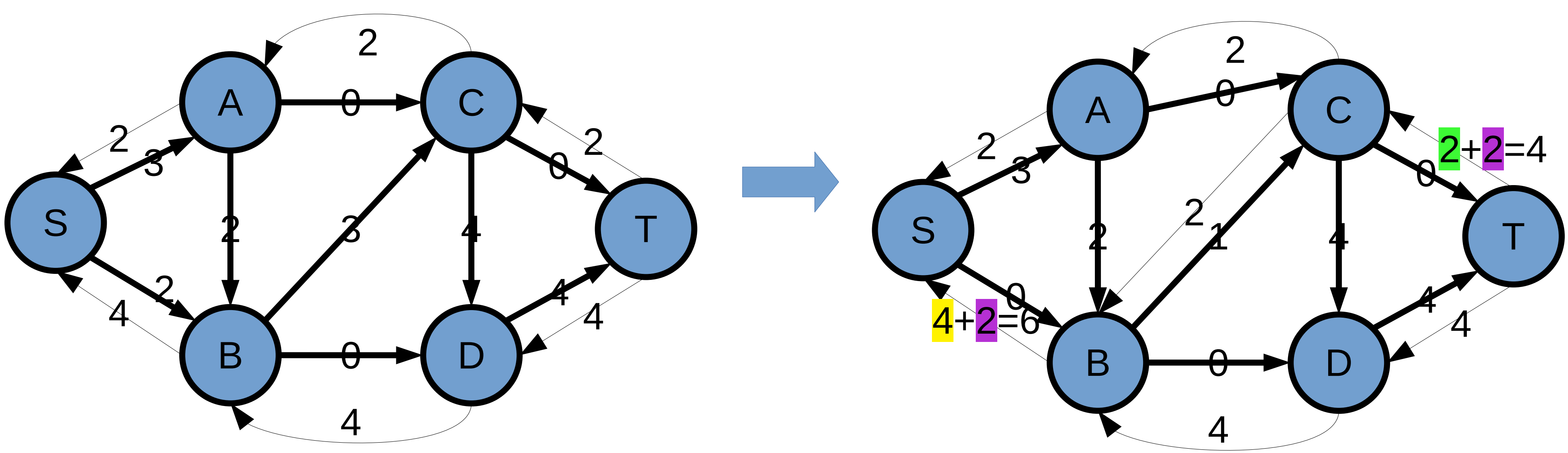


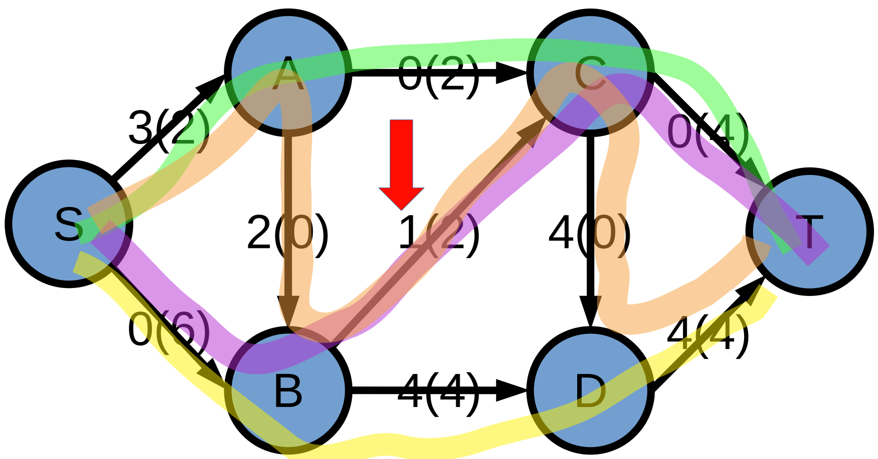
REDE RESIDUAL:

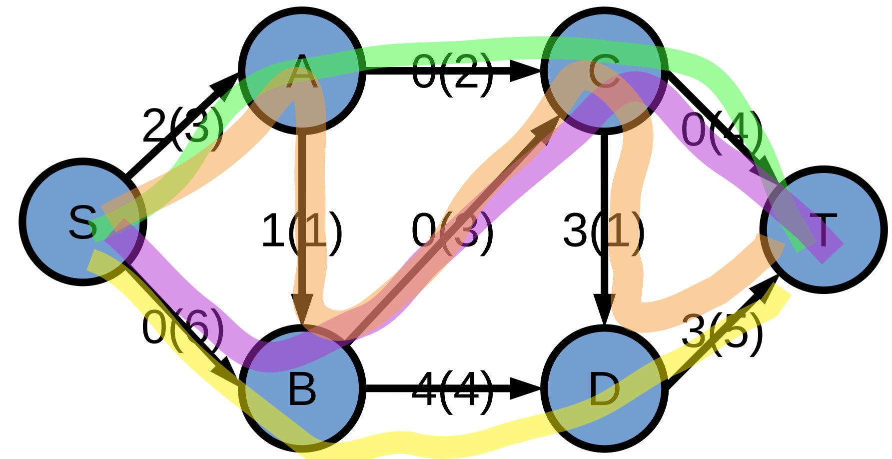




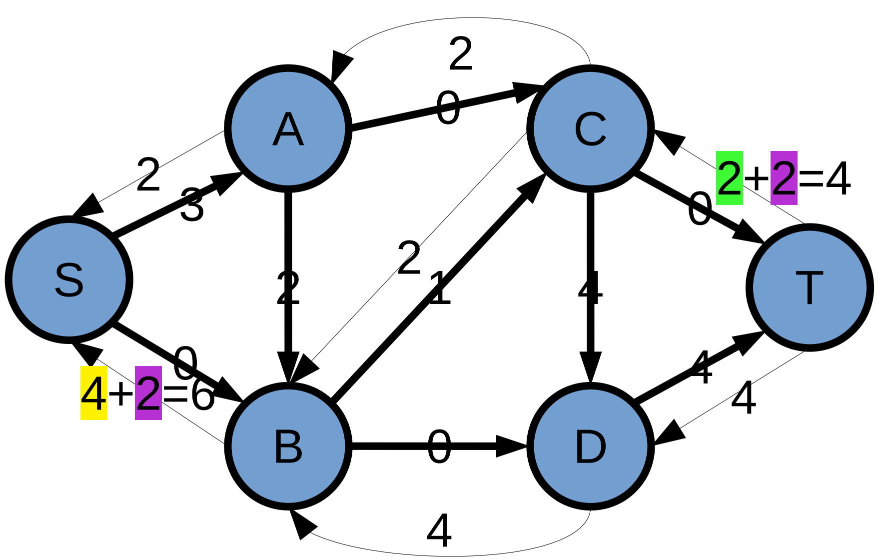
REDE RESIDUAL:

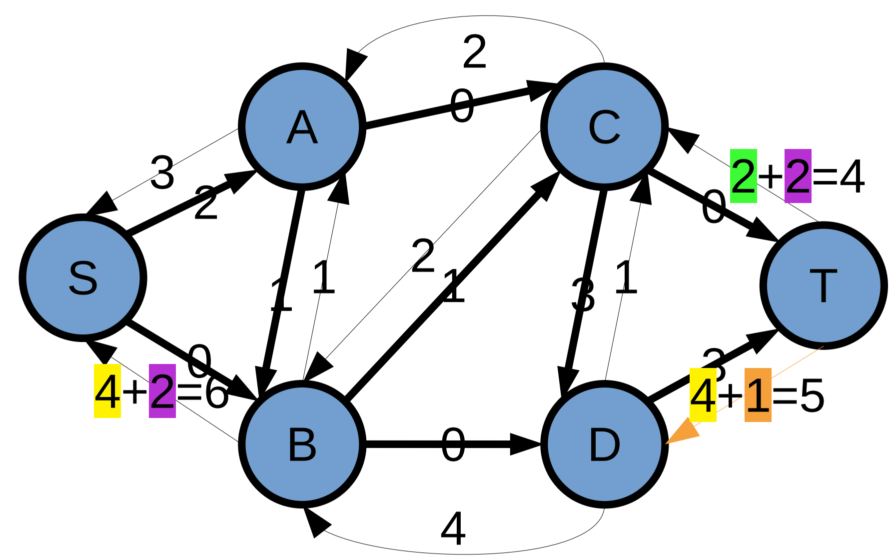


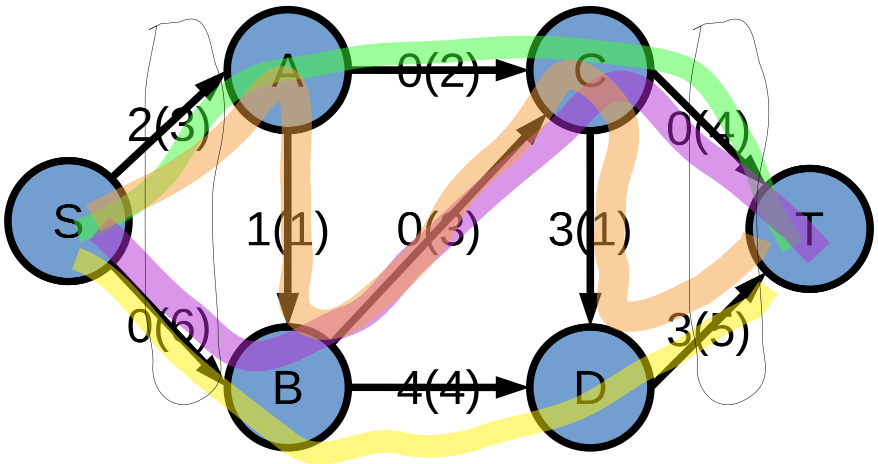




REDE RESIDUAL:

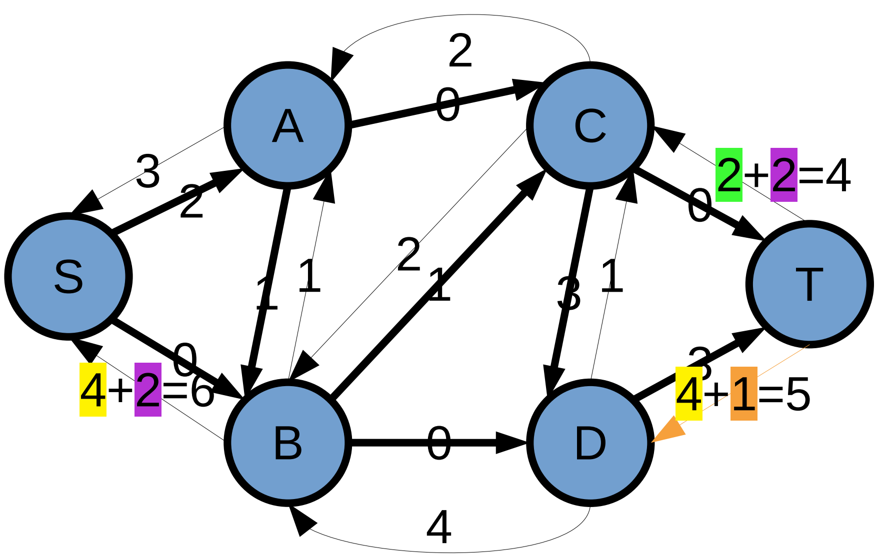






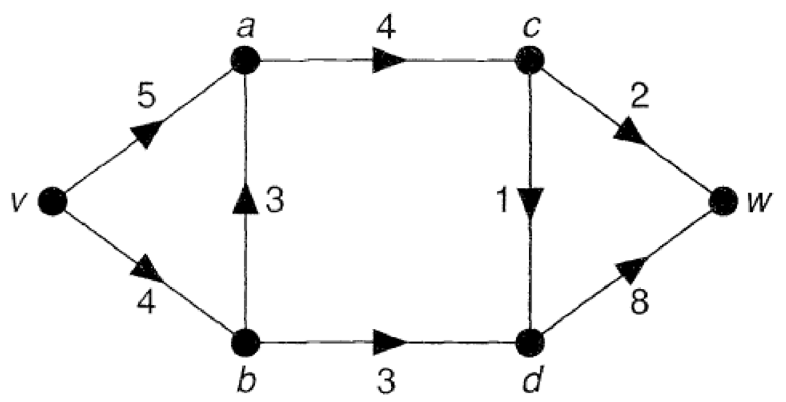
Fluxo máximo = 9

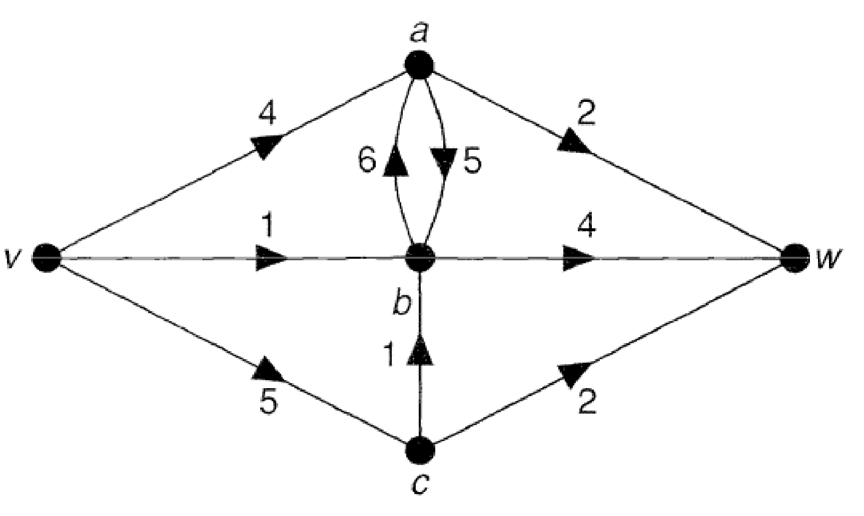
REDE RESIDUAL:



Fluxo em Redes

A simulação anterior é a base do algoritmo Ford-Fulkerson. Utilize as referências bibliográficas, estude o algoritmo e aplique nos grafos/redes abaixo para a determinação do fluxo máximo, com origem em *v* e destino em *w*.





[1] BOAVENTURA NETTO , P. O. Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos. Edgard Blucher, SP, quinta edição.

[2] SZWARCFITER, J. L. Grafos e Algoritmos Computacionais. Campus, 1986.

[3] WILSON, R.J. Introduction to Graph Theory. John Wiley & Sons Inc., 1985.
https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/wilsongraph.pdf

[4] https://www.slideserve.com/vahe/network-flow

[5] https://www.slideserve.com/adora/network-flow-back-flow-powerpoint-ppt-presentation