MDI0002 – Matemática Discreta
Videoaula 12
Tipos de Relações

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2020

Tipos de Relações

Tipos de uma relação (não mutuamente exclusivos)

- funcional
- injetora
- total
- sobrejetora
- bijetora (ou isomorfismo)

Dualidade

- se corretamente entendida e aplicada
- simplifica ("divide pela metade") o estudo e o entendimento de conceitos

A dualidade dos tipos de relação

- funcional é o dual de injetora e vice-versa
- total é o dual de sobrejetora e vice-versa
- isomorfismo: é o dual de si mesmo

Relação funcional é especialmente importante: permite definir função ☺

Definição (Relação Funcional)

Seja $R : A \to B$ uma relação. Então R é uma **Relação Funcional** se, e somente se,

$$(\forall a \in A)(\forall b_1, b_2 \in B)(aRb_1 \land aRb_2 \to b_1 = b_2)$$

Portanto, para $R : A \to B$ funcional, cada elemento de A está relacionado com, no máximo, um elemento de B.

Exemplos: Relação Funcional

Sejam $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$

Exemplos de relação funcional:

- $\emptyset : A \to B$
- $\{\langle 0, a\rangle, \langle 1, b\rangle\} : C \to B$
- $=: A \to B$
- $x^2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ onde $x^2 = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid y = x^2\}$

Contra-exemplos:

- $A \times B : A \to B$
- $<: C \to C$

Relação funcional como matriz ou grafo (para endorrelação)

- matriz: no máximo um valor verdadeiro em cada linha
- grafo: no máximo uma aresta partindo de cada nodo

Conceito dual de relação funcional

Definição (Relação Funcional)

Seja $R : A \to B$ uma relação. Então R é uma **Relação Funcional** se, e somente se,

$$(\forall a \in A)(\forall b_1, b_2 \in B)(aRb_1 \land aRb_2 \to b_1 = b_2)$$

Portanto, para $R : A \to B$ funcional, cada elemento de A está relacionado com, no máximo, um elemento de B.

Conceito dual de relação funcional

Definição (Relação Injetora)

Seja $R : A \to B$ uma relação. Então R é uma **Relação Injetora** se, e somente se,

$$(\forall b \in B)(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1 R b \land a_2 R b \to a_1 = a_2)$$

Portanto, para $R : A \to B$ **injetora**, cada elemento de B está relacionado com, no máximo, um elemento de A.

Grafo e matriz

Relação injetora como matriz ou grafo (para endorrelação)

- matriz: no máximo um valor verdadeiro em cada coluna
- grafo: no máximo uma aresta chegando em cada nodo

Grafo e matriz

Relação funcional como matriz ou grafo (para endorrelação)

- matriz: no máximo um valor verdadeiro em cada linha
- grafo: no máximo uma aresta partindo de cada nodo

Exemplos: Relação Injetora

Sejam $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$

Exemplos de relação injetora:

- $\varnothing : A \to B$
- $\{\langle 0, a\rangle, \langle 1, b\rangle\} : C \to B$
- $=: A \to B$

Contra-exemplos:

- $A \times B : A \to B$
- $<: C \to C$
- $x^2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ onde $x^2 = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid y = x^2\}$

Dual $\neq$ Complementar

Funcional e Injetora

- conceitos duais
- não são complementares

É fácil encontrar exemplos de relações que

- são simultaneamente funcional e injetora, ou
- não são simultaneamente funcional e injetora

Definição (Relação Total)

Seja $R : A \to B$ uma relação. Então R é uma **Relação Total** se, e somente se,

$$(\forall a \in A)(\exists b \in B)(aRb)$$

Portanto, para $R : A \to B$ total, todo elemento de A está relacionado com pelo menos um elemento de B.

Exemplos: Relação Total

Sejam $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$

Exemplos de relação total:

- $=: A \to B$
- $A \times B : A \to B$
- $x^2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ onde $x^2 = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid y = x^2\}$

Contra-exemplos:

- $\varnothing : A \to B$
- $\{\langle 0, a\rangle, \langle 1, b\rangle\} : C \to B$
- $<: C \to C$

Relação total como matriz ou grafo (para endorrelação)

- matriz: pelo menos um valor verdadeiro em cada linha
- grafo: pelo menos uma aresta partindo de cada nodo

Conceito dual de relação total

Definição (Relação Total)

Seja $R : A \to B$ uma relação. Então R é uma **Relação Total** se, e somente se,

$$(\forall a \in A)(\exists b \in B)(aRb)$$

Portanto, para $R : A \to B$ total, todo elemento de A está relacionado com pelo menos um elemento de B.

Relação Sobrejetora

Conceito dual de relação total

Definição (Relação Sobrejetora)

Seja $R : A \to B$ uma relação. Então R é uma **Relação Sobrejetora** se, e somente se,

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(aRb)$$

Portanto, para $R : A \to B$ **sobrejetora**, todo elemento de B se relaciona com pelo menos um elemento de A.

Relação sobrejetora como matriz ou grafo (para endorrelação)

- matriz: pelo menos um valor verdadeiro em cada coluna
- grafo: pelo menos uma aresta chegando em cada nodo

Exemplos: Relação Sobrejetora

Sejam $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$

Exemplos de relação sobrejetora:

- $=: A \to A$
- $\{\langle 0, a\rangle, \langle 1, b\rangle\} : C \to B$
- $A \times B : A \to B$

Contra-exemplos:

- $=: A \to B$
- $\varnothing : A \to B$
- $<: C \to C$
- $x^2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ onde $x^2 = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid y = x^2\}$

Dual $\neq$ Complementar

Total e Sobrejetora

- conceitos duais
- não são complementares

É fácil encontrar exemplos de relações que

- são simultaneamente total e sobrejetora, ou
- não são simultaneamente total e sobrejetora

Isomorfismo (Bijeção)

Isomorfismo: noção de igualdade semântica

- relação tal que
- quando composta com a sua inversa
- resulta em uma igualdade

Intuitivamente: "ir" (via relação) e "voltar" (via sua inversa) sem alterar

Definição (Isomorfismo)

Seja $R : A \to B$ uma relação. Então R é um **Isomorfismo** (ou *isorrelação* ou *relação bijetora*), se, e somente se,

$$R^{-1} \circ R = id_A$$

$$R \circ R^{-1} = id_B$$

Notação e Nomenclatura

Notação para enfatizar que $R : A \to B$ é uma isorrelação

$$R : A \leftrightarrow B$$

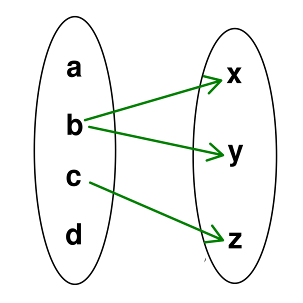
Conjuntos isomorfos: se existe uma isorrelação entre tais conjuntos

Relação Bijetora

Na escola...

$$\text{Bijetora} = \text{Injetora e Sobrejetora}$$

Uma relação injetora e sobrejetora pode não ser um isomorfismo!



Exemplo

Sejam $A = \{a, b, c\}$, $C = \{1, 2, 3\}$ e $R : A \to C$

$$R = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$$

R é um isomorfismo.
Considere a sua relação inversa $R^{-1} : C \to A$, que é

$$R^{-1} = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, c\rangle\}$$

Logo:

$$R^{-1} \circ R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\} = id_A$$

$$R \circ R^{-1} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\} = id_B$$

Portanto, A e C são conjuntos isomorfos

Exemplos

$A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{0, 1, 2\}$ e X conjunto qualquer

Exemplos

- $id_B : B \to B$
- $id_X : X \to X$
- $\{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 0\rangle\} : C \to C$

Contra-exemplos

- $\varnothing : A \to B$
- $A \times B : A \to B$
- $<: C \to C$
- $x^2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ onde $x^2 = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid y = x^2\}$

Demonstração

Prova de que é um isomorfismo

- mostrar que a composição com a relação inversa R^{-1} resulta nas identidades

Prova de que não é um isomorfismo

- pode ser um pouco mais difícil
- frequentemente, feita por absurdo

Não é isomorfismo

Sejam $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ e $R : A \to B$

$$R = \{\langle 0, a\rangle, \langle 1, b\rangle\}$$

R não é isomorfismo: prova por absurdo
Suponha que R é isomorfismo. Então, R^{-1} é tal que

$$R^{-1} \circ R = id_A \text{ e } R \circ R^{-1} = id_B$$

$R^{-1} \circ R = id_A \Rightarrow$ [definição da relação identidade]
$\langle 2, 2\rangle \in R^{-1} \circ R \Rightarrow$ [definição de composição de relações]
$\exists x \in A(\langle 2, x\rangle \in R \land \langle x, 2\rangle \in R^{-1})$
O que é absurdo! Não existe $\langle 2, x\rangle$ em R.
Portanto, R não é isomorfismo.

Em um isomorfismo (bijeção)

- conjuntos origem e destino
- possuem o mesmo número de elementos

Veremos isso em TEC ;)