UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA	CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS (CCT) DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA (DMAT) GRUPO COLABORATIVO DE ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR*

TERCEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS DE ALI-001**

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Questões:

1. Seja $T: U \to U$ uma transformação linear tal que, para $u_1, u_2 \in U$ seja válido que $T(u_1) = 2u_1 - 5u_2$ e $T(u_2) = -3u_1 + 4u_2$. Determine:

 a) $T(-6u_1 + 7u_2)$ b) $T(u_1 - u_2)$ c) $T(u_2 - u_1)$

2. Verifique se as funções dadas abaixo são transformações lineares. Em cada caso, justifique sua resposta:

 a) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z,w) = (x+y, 0, z+w)$.

 b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x,y) = xy$.

 c) $T: M(2,2) \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b, c-d, 2a-b+3c)$.

 d) $T: M(5,5) \to M(5,5)$ dada por $T(A) = A.B + I$, onde $B \in M(5,5)$ é uma matriz fixada e $I \in M(5,5)$ é a matriz identidade.

 e) $T: P_2 \to P_2$ dada por $T\big(p(x)\big) = p(x) + x^2 + x + 1$.

 f) $T: P_3 \to P_2$ dada por $T(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a - b + d) + (5a - c - 3d)x + (2b + 3c)x^2$

 g) $T: M(2,2) \to \mathbb{R}$ dada por $T(A) = \det(A)$.

 h) $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = |x|$.

 i) $T: M(2,2) \to P_2$ dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + (b+c)x - (a+d)x^2$.

 j) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (3x, a, 5z)$, em que $a \in \mathbb{R}$ é uma constante.

 k) $T: P_3 \to P_3$ dada por $T(a + bx + cx^2 + dx^3\ ) = (b + 2cx + 3dx^2) + (2c + 6d)x^2$.

 l) $S: M(n,n) \to M(n,n)$ dada por $S(A\ ) = 2A + 5A^t$, em que A^t é a matriz transposta de A.

 m) $S: M(n,n) \to M(n,n)$ dada por $S(A) = A.A^t$, em que A^t é a matriz transposta de A.

3. Considere o espaço vetorial $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0,\ y > 0\}$ munido das operações **não usais** de adição e multiplicação por escalar dadas por $(x,y) + (a,b) = (x \cdot a,\ y \cdot b)$ e $k(x,y) = (x^k, y^k)$. Verifique se são transformações lineares as funções $T : V \to V$ definidas por

 a) $T(x,y) = (x \cdot y^2, x^3 \cdot y)$

 b) $T(x,y) = (xy, x+y)$

 c) $T(x,y) = \left(x^7 \cdot y^5, \dfrac{\sqrt{y}}{x}\right)$

 d) $T(x,y) = \big(x \cdot \cos(y), -y \cdot \operatorname{sen}(x)\big)$

* Professores participantes do Grupo Colaborativo no semestre 2023/1: Graciela Moto, Katiani da Conceição Loureiro e Marnei Luis Mandler.

4. Considere o espaço vetorial $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$ munido das operações **não usais** de adição e multiplicação por escalar dadas por $(x, y) + (a, b) = (x + a, y.b)$ e $k(x, y) = (kx, y^k)$. Considere $\mathbb{R}^2$ munido das **operações usuais** de adição e multiplicação escalar. Verifique se são transformações lineares:

a) $T : \mathbb{R}^2 \to V$ definida por $T(x, y) = (5x, e^{-2y})$.

b) $T : V \to V$ definida por $T(x, y) = (x - y, e^{3x})$.

c) $T : V \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (4x, \ln(y))$.

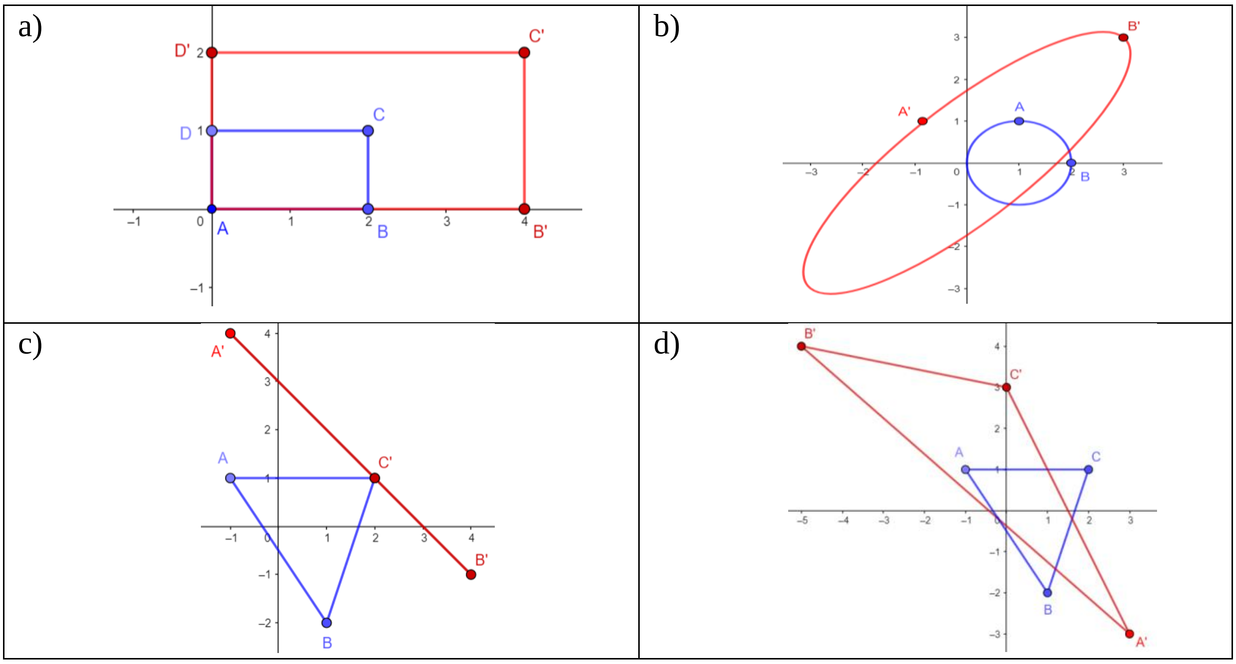
d) $T : \mathbb{R}^2 \to V$ definida por $T(x, y) = (2x - y, -x + 3y)$.

e) $T : V \to V$ definida por $T(x, y) = (4x, y^2)$.

f) $T : \mathbb{R}^2 \to V$ definida por $T(x, y) = (-x, |y|)$.

g) $T : V \to V$ definida por $T(x, y) = (0, y^3)$.

5. Em cada item, decida se a transformação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma a Figura em azul na Figura em vermelha é linear ou não. Justifique sua resposta e, em caso afirmativo, obtenha a lei da transformação:



6. Considere a base $\beta = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, em que $v_1 = (-2, 1)$ e $v_2 = (1, 3)$ e seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $T(v_1) = (-1, 2, 0)$ e $T(v_2) = (0, -3, 5)$. Encontre a lei de $T(x, y)$ e use a expressão encontrada para obter $T(2, -3)$.

7. Considere o triângulo de vértices $A(1,1)$, $B(-3, -3)$ e $C(2, -1)$. Determine a imagem deste triângulo ao ser aplicada a transformação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (-x + 2y, -x + y)$. A seguir, represente geometricamente a imagem obtida.

8. Encontre a lei de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $N(T) = ger\{(1,1,0), (0,0,1)\}$ e $T(1, 3, -1) = (1, -1, 2)$.

9. Seja $T: M(2,2) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = (0,5,3)$;

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-7,-4,2); \quad T\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\right) = (13,24,-38) \quad \text{e} \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = (-6,14,-15).$$

Determine:

a) a lei dessa transformação.

b) uma base e a dimensão para o núcleo e para o conjunto imagem de T.

10. Para cada transformação linear dada abaixo, encontre uma base e a dimensão para:

(i) o núcleo da transformação. (ii) o conjunto imagem da transformação.

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por $T(x,y) = (x+y, x-y, 2x, 2y)$.

b) $T: M(2,2) \to \mathbb{R}^4$ dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a+b, b+c+d, 2a+c, 2c+d)$.

c) $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ dada por $T(a,b,c) = (a+b+c) + (a-b+2c)x + (2a+b+9c)x^2$.

d) $T: \mathbb{R}^2 \to M(4,1)$ dada por $T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -4 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

e) $T: M(2,2) \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+7b-5c, 3c+2d, -a+9b-d)$.

f) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(x,y,z) = (-5x-y+10z, -x+2y+z, 2x-3y+5z, -4x+4y-5z)$.

g) $T: M(2,2) \to M(2,2)$ dada por $T(A) = -A + A^t$, em que A^t é a matriz transposta de A.

h) $T: P_2 \to M(2,2)$ dada por $T(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} a+7b-5c & -2a+4b-2c \\ 5a-10b+5c & 4a+b-2c \end{bmatrix}$.

i) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z,w) = (x-2y-3z-4w, -x+2y-z+4w, 2x-3y+5z-5w)$.

j) $T: P_2 \to P_1$ dada por $T(a+bx+cx^2) = (a+2b-3c) + (5a-9b+4c)x$.

k) $T: \mathbb{R}^4 \to M(2,2)$ dada por $T(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} x-4y+7z-4w & 3x-11y-z-2w \\ -2x+9y-4z+10w & -x+5y+3z+6w \end{bmatrix}$.

l) $T: M_2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a-2b-3c+5d, -2a+5b+c-4d, 3a-8b+c+3d)$.

11. Considere $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $T(1,0,0) = (1,1,0)$, $T(0,1,0) = (1,1,2)$ e $T(0,0,1) = (0,0,2)$. Determine uma base e a dimensão para os seguintes subespaços vetoriais:

a) $N(T)$. $b)$ $N(T) \cap Im(T)$ c) $N(T) + Im(T)$.

12. Determine explicitamente a expressão de uma transformação linear $T : P_2 \to M(2,2)$ que satisfaça, simultaneamente, as seguintes condições:

(i) o elemento $p(x) = 1 + x^2$ pertence ao $N(T)$;

(ii) o elemento $q(x) = 1 - x + x^2$ não pertence ao $N(T)$;

(iii) o elemento $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ pertence à $Im(T)$.

13. Encontre a lei de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $N(T) = ger\{(1,1,1,0), (0,0,0,1)\}$.

14. Seja $T: P_2 \to P_2$ a transformação linear definida por $T(a + bx + cx^2) = x(b + 2cx)$.

    a) Verifique se os seguintes polinômios pertencem ao $N(T)$ e/ou à $Im(T)$:

    i. $p_1(x) = 2$. ii. $p_2(x) = x^2$ iii. $p_3(x) = 1 - x$.

    b) Descreva algebricamente $N(T)$ e $Im(T)$.

15. Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. Mostre que

    a) o núcleo de T é um subespaço vetorial de V.

    b) o conjunto imagem de T é um subespaço vetorial de W.

16. Determine uma base e a dimensão para o Núcleo e para a Imagem da transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ que satisfaz $T(1, 0, -1) = 1 - 2x + x^2$, $T(0, 1, -1) = 4 - x - x^2$ e $T(-1, 2, -2) = 6 - 5x + x^2$.

17. Quando possível, exiba exemplos de transformações lineares satisfazendo:

    a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\dim N(T) = 1$.

    b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$.

    c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Im(T) = \{(0, 0, 0)\}$.

    d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = -x\}$.

    e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Im(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 2x - z\}$.

18. Seja $T: P_2 \to P_2$ a transformação linear tal que $T(1) = 1 + x, T(x) = x + x^2$ e $T(x^2) = 1 + x - 2x^2$. Responda aos itens abaixo:

    a) Encontre a lei de $T(a + bx + cx^2)$.

    b) T é injetora? Justifique sua resposta.

    c) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.

    d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

19. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to M(2,2)$ a transformação linear tal que $T(-1,0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $T(0, -1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Responda aos itens abaixo:

    a) Encontre a lei de $T(x, y)$.

    b) Usando a transformação obtida no item anterior, determine $T(1000, 999)$.

    c) T é bijetora? Justifique sua resposta.

20. Classifique as transformações lineares dadas no **Exercício 10** como injetoras, sobrejetoras e/ou bijetoras, justificando sua resposta.

21. Determine o valor de $k \in \mathbb{R}$ para o qual a transformação $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (3x + y - 7z, 2x + y - 8z, -4x + 5y + kz)$$

não seja injetora.

22. Classifique as seguintes transformações lineares como injetoras, sobrejetoras e/ou bijetoras:

a) $T:\mathbb{R}^4 \to M(2,2)$ dada por $T(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} -x-4y+3z+4w & 3x+11y-8z-3w \\ -2x+3y-6z+6w & x-2y+4z-51w \end{bmatrix}$.

b) $T: P_2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(a+bx+cx^2) = (a-4b+10c, -5a+19b-8c, 3a-13b+72c)$.

c) $T: \mathbb{R}^3 \to P_3$ dada por $T(a,b,c) = (a-5b-2c) + (7a-36b-9c)x + (-4a+3b+94c)x^2 + (3a-b+10c)x^3$.

23. Mostre que se uma transformação linear $T: U \to V$ é injetora, então $N(T) = \{\overrightarrow{O_U}\}$.

24. Em cada caso, determine $\dim N(T)$, sabendo que:

a) $T: \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^8$ é tal que $\dim Im(T) = 3$.

b) $T: V \to W$ é sobrejetora, $\dim(V) = 5$ e $\dim(W) = 3$.

c) $T: V \to W$ é injetora.

d) $T: \mathbb{R}^4 \to P_3$ é bijetora.

25. Em cada caso, determine $\dim Im(T)$, sabendo que:

a) $T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$ é tal que $\dim N(T) = 2$.

b) $T: P_9 \to W$ é injetora.

c) $T: V \to P_8$ é injetora e $\dim(V) = 4$.

d) $T: M(4,2) \to P_7$ é bijetora.

26. Em cada caso, determine se existe ou não uma transformação linear que satisfaça as condições dadas:

a) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a origem.

b) $T: P_4 \to M(3,2)$ que seja sobrejetiva.

c) $T: P_2 \to \mathbb{R}^2$ que seja injetiva.

d) $T: P_9 \to M(3,3)$ que seja bijetora.

e) $T: P_6 \to \mathbb{R}^6$ tal que $\dim N(T) = \dim Im(T)$.

f) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $N(T) = ger\{(1,0,0,0);\ (0,1,0,0)\}$ e $Im(T) = ger\{(1,1,2);\ (2,2,4)\}$

g) $T: P_5 \to M(2,2)$ tal que $\dim N(T) = 1$.

h) $T: P_8 \to \mathbb{R}^8$ tal que $\dim N(T) = 2$ e $\dim Im(T) = 6$.

i) $T: P_7 \to \mathbb{R}^{10}$ tal que $2 \leq \dim Im(T) \leq 8$.

j) $T: M(4,3) \to P_{10}$ tal que $1 \leq \dim N(T) \leq 7$.

27. Responda as seguintes questões, justificando sua resposta com argumentos consistentes:

a) Se $T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$ é uma transformação linear, podemos ter $\dim Im(T) \geq 6$?

b) Existe alguma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1) = (2,2)$ e $T(2,2) = (3,1)$?

c) A transformação $T: P_1 \to P_2$ definida por $T(p(x)) = xp(1) + p(0)x^2$ é linear?

d) Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear cuja imagem é um plano que passa pela origem, que tipo de objeto geométrico é o núcleo de T?

28. Seja β a base canônica de $M(2,2)$. Se $T: M(2,2) \to P_3$ é dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + (b+c)x + (c-d)x^2 + dx^3$$

a) Encontre $[T]_{\alpha}^{\beta}$, em que $\alpha = \{2, 2+x, 2+x^2, 2+x^3\}$ é base de P_3.

b) Encontre o posto e a nulidade da matriz $[T]_{\alpha}^{\beta}$.

c) Determine $\dim N(T)$ e $\dim Im(T)$.

29. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Encontre vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$ tais que $T(u) = 2u$ e $T(v) = -v$.

30. Seja $T: U \to V$ é uma transformação linear invertível tal que $[T]$ é uma matriz de ordem $n \times n$, determine $\dim N(T)$ e $\dim Im(T)$.

31. Considere $\alpha = \{(1,-1); (0,2)\}$ e $\beta = \{(1,0,-1); (0,1,2); (1,2,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Seja T uma transformação linear tal que $[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

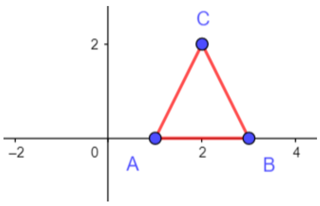
a) Encontre a lei da transformação linear T.

b) Determine uma base e a dimensão para o núcleo e para o conjunto imagem de T.

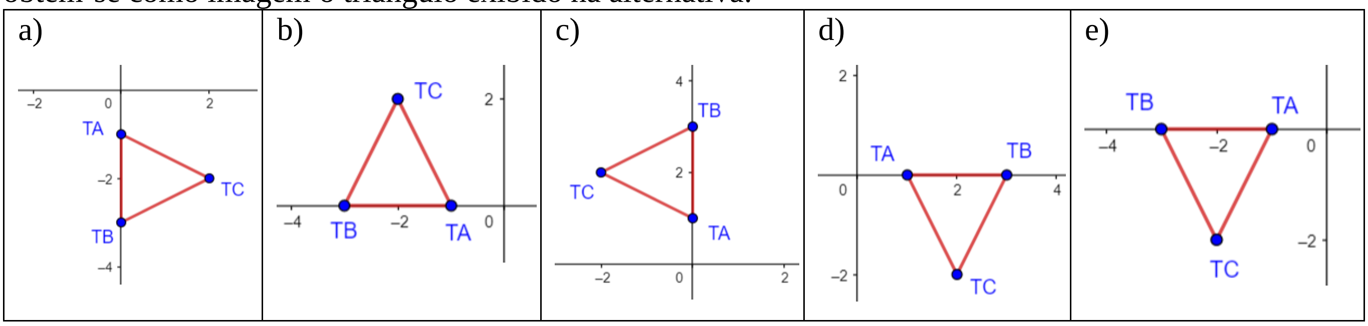
c) Encontre uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\gamma}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

32. Seja $T: P_2 \to P_3$ a transformação linear definida por $T\big(p(x)\big) = x.p(x-3)$. Determine a matriz canônica de T, isto é, a matriz $[T] = [T]_{\beta}^{\alpha}$, em que $\alpha = \{1, x, x^2\}$ e $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ são as bases canônicas de P_2 e de P_3, respectivamente.

33. Ao aplicar a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a todos os pontos do triângulo ABC exibido na figura abaixo



obtém-se como imagem o triângulo exibido na alternativa:



34. Seja $T: P_3 \to P_2$ a transformação linear definida por $T(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2cx + 3dx^2$. Determine:

a) A matriz canônica de T.

b) A matriz $[T]_\beta^\alpha$, em que $\alpha = \{1, x, x^2, x^3\}$ é a base de P_3 e $\beta = \{1, 1 + x, -1 + x^2\}$ é base de P_2.

c) Se $p \in P_3$ é tal que $[p]_\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$, determine $[T(p)]_\beta$.

35. Sejam $T, S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares dadas por

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z, z) \quad \text{e} \quad S(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z).$$

a) Determine as leis de $T \circ S$ e $S \circ T$.

b) Encontre uma base para os núcleos de $T \circ S$ e $S \circ T$.

c) Encontre uma base para os conjuntos imagens de $T \circ S$ e $S \circ T$.

d) $T \circ S$ é um isomorfismo? Justifique sua resposta.

36. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$. Mostre que

$$(T^2 - I) \circ (T^2 - 9I) = 0,$$

em que $I: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é a transformação identidade, dada por $I(x, y, z) = (x, y, z)$.

37. Sejam R, S, T três transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^3$. Supondo que as matrizes de R e S, em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ são dadas por $[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $[S] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, encontre a lei da transformação T tal que $R = S \circ T$.

38. Sejam $S: P_1 \to P_2$ e $T: P_2 \to P_1$ as transformações lineares dadas por

$$S(a + bx) = a + (a + b)x + 2bx^2 \quad \text{e} \quad \mathrm{T}(a + bx + cx^2) = b + 2cx.$$

a) Determine $(S \circ T)(3 + 2x - x^2)$.

b) É possível calcular $(T \circ S)(a + bx)$? Em caso afirmativo, calcule $(T \circ S)(\pi + \pi x)$.

39. Determine a lei da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(-2,1) = \left(-\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ e $T\left(\frac{1}{2}, 4\right) = (2,1)$. A seguir, encontre $\dim N(T)$ e $\dim Im(T)$ e verifique se T é invertível. Caso seja, determine sua inversa.

40. Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0,0) = (1,1,1)$, $T(0,0,1) = (1,0,1)$ e $T(0,1,2) = (0,0,4)$. Determine a lei de T e verifique se T é um isomorfismo. Em caso afirmativo, determine o isomorfismo inverso.

41. Considere $T: P_2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1) = (1, 0, 1)$, $T(x + x^2) = (1, 2, -2)$ e $T(1 - x) = (0, -1, 1)$. Determine as leis de T e de T^{-1}.

42. Mostre que se a transformação linear $T: U \to V$ é invertível, então $\dim(U) = \dim(V)$ e $N(T) = \{\overrightarrow{O_U}\}$.

43. Considere a transformação $T: P_2 \to P_2$ definida por $T(a + bx + cx^2) = (a + b) + (b + 2c)x + cx^2$ e a transformação linear $S: P_2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $S(a + bx + cx^2) = (a + b, c, a - b)$.

a) Verifique se S é um isomorfismo. Em caso positivo, encontre a lei de S^{-1}.

b) Determine uma base para o núcleo e para o conjunto imagem de $S \circ T$.

c) Seja $\beta = \{1 + x, x - x^2, 1 - x\}$ base de P_2 e $\alpha = \{(1,0,0),(0,1,1),(0,0,-1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz $[S \circ T]_{\alpha}^{\beta}$.

44. Considere as transformações lineares $T: \mathbb{R}^4 \to M(2,2)$ definida por $T(a,b,c,d) = \begin{bmatrix} a & a+b \\ b+c & d \end{bmatrix}$ e $S: M(2,2) \to M(2,2)$ definida por $S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-c & c-b \\ b & a+d \end{bmatrix}$. Verifique se $S \circ T$ é um isomorfismo. Em caso afirmativo, determine a lei do isomorfismo inverso $(S \circ T)^{-1}$.

45. Considere a transformação $T: P_2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(a + bx + cx^2) = (\, a + 3b - c, 2a + 5b - c, -a + 6b - 7c \,)$$

para responder aos itens abaixo:

a) Determine a matriz $[T]_{\beta}^{\alpha}$, em relação às bases $\alpha = \{1 + x + x^2, -1 - 2x + x^2, x^2\}$ e $\beta = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,-1,-2)\}$.

b) Mostre que T é bijetora e determine a lei da transformação inversa $T^{-1}: R^3 \to P_2$.

46. Considere as transformações lineares $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $S: P_1 \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$T(x,y) = (3x - 2y, -5x + 4y, -x + 3y)$$

e

$$S(p(x)) = (2p(-1) + p(3), 3p(1) - p(4)).$$

a) Considerando $\alpha = \{(1,-1),(-2,1)\}$ e $\beta = \{(1,0,-1),(\,1,1,0),(-1,-1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$, respectivamente, determine a matriz $[T]_{\beta}^{\alpha}$.

b) Determine, caso existam, as leis das transformações $S \circ T$ e $T \circ S$.

47. Considere as transformações lineares $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dadas por

$$T(x,y) = (x + y, 3x - y, -x + y)$$

e

$$S(x,y,z) = (x - 2y - z, -2x + 5y - 2z, -3x + 7y - 2z).$$

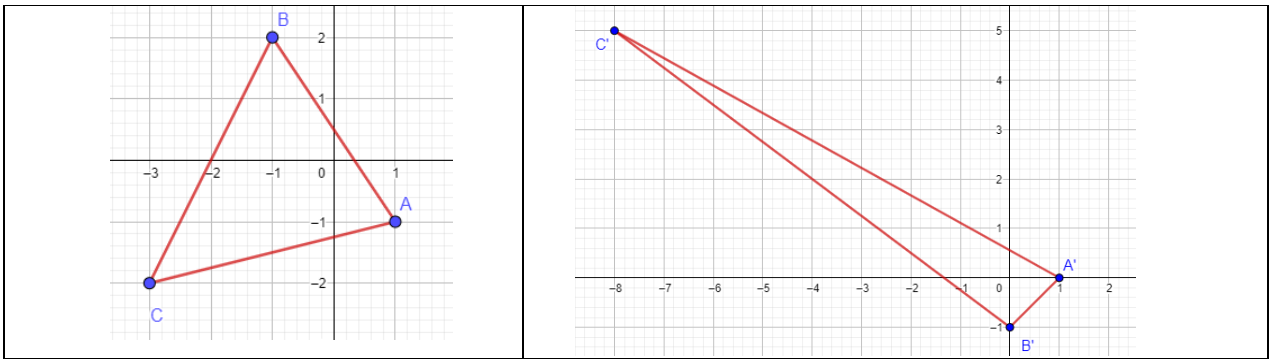
a) Determine, caso existam, as leis das transformações compostas $S \circ T$ e $T \circ S$.

b) Mostre que S é invertível e obtenha a lei de S^{-1}.

c) Considerando $\alpha = \{(-3,5),(1,-2)\}$ e $\beta = \{(1,-1,2),(-1,2,-3),(1,3,-1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$, respectivamente, determine a matriz $[T]_{\beta}^{\alpha}$.

48. Encontre a lei da transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ tal que $[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 10 & -5 \end{bmatrix}$, conhecendo as bases $\alpha = \{(1,-1,1),(-1,2,3),(2,-3,-1)\}$ e $\beta = \{1, x, x^2\}$.

49. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear que leva o triângulo ABC no triângulo $A'B'C'$ (exibidos na figura abaixo):



a) Encontre a lei da transformação T.

b) Sejam $\alpha = \{(1,-1),(-1,2)\}$ e $\beta = \{(3,-2),(-7,5)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz $[T]_\beta^\alpha$.

c) Determine a lei da transformação inversa T^{-1}.

50. Classifique as afirmações abaixo como verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

a) Se $T: U \rightarrow V$ é uma transformação linear tal que $T(w) = T(u+v)$, então $w = u + v$?

b) Sejam C uma matriz de ordem $n \times n$ fixada e C^t a sua transposta. A função $S: M(n,n) \rightarrow M(n,n)$ dada por $S(A) = A \cdot C^t + A^t \cdot C$ não é uma transformação linear.

c) Para toda transformação linear $T: M(4,5) \rightarrow P_{12}$ têm-se que dim $N(T) \geq 7$.

d) Para toda transformação linear $T: P_{12} \rightarrow M(4,5)$ têm-se que dim $Im(T) \leq 13$.

e) Sejam $T: U \rightarrow V$ e $S: V \rightarrow W$ transformações lineares. Se $u \in N(T)$ então $u \in N(S \circ T)$ e se $w \in Im(S \circ T)$ então $w \in Im(S)$.

f) A transformação $T: P_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T\big(p(x)\big) = \big(p(-1),\ p(2) + p(0)\big)$ é linear e sua matriz em relação às bases $\alpha = \{1, x\}$ e $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ é dada por $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.