Álgebra Linear (ALI0001 – CCI-192-02U)

Transformações Lineares

Injetoras, Sobrejetoras e Bijetoras

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula do dia 17 de maio de 2023.

UDESC

Transformações lineares injetoras

Exemplo 1) Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z) = (x + 4y - 2z, -3x - 11y + 9z).$$

Determine as imagens de $u = (1, 2, 3)$ e de $v = (-13, 5, 2)$ por T.

Solução: Temos que

$$T(u) = T(1, 2, 3) = (1 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3, -3 \cdot 1 - 11 \cdot 2 + 9 \cdot 3) = (3, 2)$$

e que

$$T(v) = T(-13, 5, 2) = (-13 + 4 \cdot 5 - 2 \cdot 2, -3 \cdot (-13) - 11 \cdot 5 + 9 \cdot 2) = (3, 2).$$

Note que, mesmo que $u \neq v$, obtivemos que $T(u) = T(v)$.

Nesse caso, dizemos que T não é injetora.

Definição 1: Uma transformação linear $T: U \to V$ é injetora se para quaisquer $u, v \in U$ for válido que

$$u \neq v \qquad \Rightarrow \qquad T(u) \neq T(v).$$

Tomando a contraposição da definição acima, obtemos uma definição alternativa:

Definição 2: Uma transformação linear $T: U \to V$ é injetora se para quaisquer $u, v \in U$ for válido que

$$T(u) = T(v) \qquad \Rightarrow \qquad u = v.$$

Transformações lineares injetoras

O próximo resultado simplifica a verificação da injetividade de uma transformação linear $T\colon U \to V$, a partir do que ocorre com seu núcleo.

Teorema: Uma transformação linear $T\colon U \to V$ é injetora se, e somente se,
$$N(T) = \{\vec{0}_U\}.$$

Justificativa: Suponha que $T\colon U \to V$ é injetora.
Seja $u \in N(T)$. Logo, pela definição de núcleo, temos que
$$T(u) = \vec{0}_V.$$
Pela Propriedade 1 sabemos que
$$T\left(\vec{0}_U\right) = \vec{0}_V.$$
Dessa forma, temos que
$$T(u) = T\left(\vec{0}_U\right).$$
Como por hipótese T é injetora, temos pela Definição 2, que
$$u = \vec{0}_U,$$
ou seja, se $u \in N(T)$ então $u = \vec{0}_U$. Isso mostra que
$$N(T) = \{\vec{0}_U\}.$$

Transformações lineares injetoras

Reciprocamente, suponhamos que $T: U \to V$ seja tal que $N(T) = \{\vec{0}_U\}$.
Assim, se $u, v \in U$ são tais que

$$T(u) = T(v)$$

obtemos que

$$T(u) - T(v) = \vec{0}_V,$$

e usando que $kT(v) = T(kv)$ para $k = -1$, temos que

$$T(u) + T(-v) = \vec{0}_V \qquad \Rightarrow \qquad T(u - v) = \vec{0}_V.$$

Assim, obtemos que

$$u - v \in N(T).$$

Como, por hipótese, $N(T) = \{\vec{0}_U\}$, obtemos que

$$u - v = \vec{0}_U$$

ou seja

$$u = v + \vec{0}_U = v.$$

Com isso, sempre que $u, v \in U$ são tais que $T(u) = T(v)$ obtemos que $u = v$.

Isso significa, aplicando a Definição 1, que $T: U \to V$ é injetora.

Exercícios

Exercício 1) Encontre uma base e a dimensão para o núcleo das transformações lineares abaixo. A seguir, classifique as transformações como injetoras ou não:

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y) = (x - 2y\,, -3x + 5y, 4x - 9y)$

b) $T: P_2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(a + bx + cx^2) = (a + 4b - c, -2a - 5b + c, 9a + 6b + c)$

c) $T: \mathbb{R}^4 \to M(2,2)$ dada por

$$T(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} x - 3z + 2w & 2x + y - 7z + w \\ -3x + 4y + 6z - 9w & -5y + 3z - 4w \end{bmatrix}$$

Solução: Todos os itens foram resolvidos durante a aula.

Transformações lineares Sobrejetoras

Um função é dita sobrejetora quando todo os elementos do seu contradomínio são imagens de algum elemento do domínio, ou seja, quando o contradomínio e o conjunto imagem da função são idênticos.

O mesmo conceito é válido para transformações lineares, com uma informação adicional para a dimensão do conjunto imagem:

Definição: Uma transformação linear $T: U \to V$ é sobrejetora se, e somente se,

$$Im(T) = V,$$

ou seja, se e somente se

$$\dim(Im(T)) = \dim(V).$$

Exercício 2) Verifique se as transformações lineares abaixo são sobrejetoras e obtenha uma base e a dimensão para seu conjuntos imagem: Todos os itens foram resolvidos em aula.

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y) = (x-2y, -3x+5y, 4x-9y)$

b) $T: P_2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(a+bx+cx^2) = (a+4b-c, -2a-5b+c, 9a+6b+c)$

c) $T: \mathbb{R}^4 \to M(2,2)$ dada por

$$T(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} x-3z+2w & 2x+y-7z+w \\ -3x+4y+6z-9w & -5y+3z-4w \end{bmatrix}$$

Transformações lineares bijetoras

Definição: Uma transformação linear $T\colon\ U \to V$ é bijetora se for simultaneamente injetora e sobrejetora, ou seja, se e somente se

$$N(T) = \{\vec{0}_U\} \quad \text{e} \quad Im(T) = V.$$

Observações

- Uma transformação linear bijetora também é chamada de isomorfismo.
- Se $T\colon\ U \to V$ for um isomorfismo, os espaços vetoriais U e V são ditos "isomorfos".
- Espaços vetoriais isomorfos possuem a "mesma forma", ou seja, são praticamente idênticos, a menos da representação de seus elementos.
- Reunindo as informações dos Exercícios 1c e 2c, vemos que $T\colon \mathbb{R}^4 \to M(2,2)$ era injetora e sobrejetora. Portanto, T é bijetora e pode ser chamada de um isomorfismo entre $\mathbb{R}^4$ e $M(2,2)$.
- Isso significa que $\mathbb{R}^4$ e $M(2,2)$ são espaços isomorfos (tem a mesma forma).
- Com isso, dizemos que o elemento $u = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ é isomorfo ao elemento

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M(2,2).$$

Teorema

O próximo resultado generaliza tal fato entre os espaços domínio e contradomínio de uma transformação linear bijetora:

Teorema: Se $T: U \to V$ é uma transformação linear bijetora, então

$$\dim(U) = \dim(V).$$

Justificativa: Se $T: U \to V$ é bijetora, então pela definição, temos que

$$N(T) = \{\vec{0}_U\} \quad \text{e} \quad Im(T) = V.$$

Dessa forma

$$\dim\big(N(T)\big) = 0 \quad \text{e} \quad \dim\big(Im(T)\big) = \dim(V).$$

Pelo Teorema da Dimensão do Núcleo e Imagem, obtemos que

$$\dim(U) = \dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = 0 + \dim(V) = \dim(V).$$

Observações:

- Pelo teorema anterior, dois espaços isomorfos sempre possuem a mesma dimensão.
- Será que a recíproca do teorema é verdadeira?
- Veremos que não, ou seja, nem toda transformação linear entre espaços vetoriais de mesma dimensão será necessariamente bijetora.

Exercício

Exercício 3) Verifique se são bijetoras as transformações lineares abaixo:

a) $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ dada por

$$T(a, b, c) = (a - b + c) + (-a + 2b + c)x + (5a - 3b + 9c)x^2.$$

b) $T: P_2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(p(x)) = (3p(-1) + p(1),\ p(2) - p(0), p(1) - p(-1))$.

Solução: O item (a) foi deixado como exercício. O item (b) foi resolvido em aula.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 2) Verifique se $T:\mathbb{R}^3 \to P_2$ dada por

$$T(a,b,c) = (9a-2b+c)+(6a-5b+4c)x+(a+b-c)x^2$$

é injetora ou não.

Solução: Vamos verificar se $N(T) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.

Para isso, seja $u = (a,b,c) \in N(T)$. Logo $T(u) = \vec{0}_{P_2}$ e $T(a,b,c) = 0 + 0x + 0x^2$.

Assim, temos que

$$\begin{cases} 9a-2b+c=0 \\ 6a-5b+4c=0 \\ a+b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 9a-2b+(a+b)=0 \\ \\ c=a+b \end{array} \quad \begin{array}{l} b=10a \\ 6a-5.(10a)+4.(11a)=0 \\ c=a+10a=11a \qquad 0=0 \end{array}$$

Portanto

$$u=(a,b,c) = (a,10a,11a) = a(1,10,11).$$

Assim

$$N(T) = ger\{(1,10,11)\} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; b=10a \text{ e } c=11a\}.$$

Como

$$N(T)\} \neq \{\vec{0}_U\},$$

Temos, pelo teorema anterior, que T não é injetora.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 3) Verifique se $T: P_3 \to M(2,2)$ dada por

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{bmatrix} a + 2b - 3c & -5b + 4c + d \\ -3a - 9c + 2d & -a + b - c - d \end{bmatrix}$$

é injetora ou não.

Solução: Vamos verificar se $N(T) = \{\vec{0}_{P_3}\}$.

Para isso, seja $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in N(T)$. Logo $T(p(x)) = \vec{0}_{M(2,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Assim, temos que

$$\begin{cases} a + 2b - 3c = 0 \\ -5b + 4c + d = 0 \\ -3a - 9c + 2d = 0 \\ -a + b - c - d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -2b + 3c \\ d = 5b - 4c \\ \\ c = -a + b - d \end{array}$$

$$a = 0 + 3c = 3c \qquad a = 0$$

$$d = 0 - 4c = -4c \qquad d = 0$$

$$c = -(-2b + 3c) + b - (5b - 4c)$$

$$c = -2b + c \qquad b = 0$$

Substituindo na terceira equação:

$$-3a - 9c + 2d = 0 \quad \Rightarrow \quad -3(3c) - 9c + 2(-4c) = 0 \qquad -26c = 0 \qquad c = 0$$

Portanto

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 = \vec{0}_{P_3}.$$

Assim
$$N(T) = \{\vec{0}_{P_3}\},$$
e, pelo teorema, T é injetora.

Transformações lineares Sobrejetoras

Pelo Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem, para $T: P_3 \to M(2,2)$ obtemos que

$$\dim\big(N(T)\big) + \dim(Im(T)) = \dim(P_3)$$

ou seja

$$0 + \dim\big(Im(T)\big) = 4.$$

Então

$$\dim\big(Im(T)\big) = 4.$$

Como o contradomínio de T é tal que

$$\dim(M(2,2)) = 4$$

temos que

$$\dim\big(Im(T)\big) = 4 = \dim(M(2,2)).$$

Com isso, vemos que

$$Im(T) = M(2,2)$$

e T é sobrejetora.

Observação:

A transformação linear do exemplo anterior é simultaneamente injetora e sobrejetora. Quando isso ocorre, dizemos que a transformação é bijetora!

Exemplos Resolvidos

Exemplo 6) Verifique se é bijetora a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^4 \to M(2,2)$ dada por

$$T(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} x+y+z+t & -x-2y+t \\ 5y-z+2t & 3y+z-t \end{bmatrix}.$$

Solução: Vamos verificar se os dois itens da definição anterior são satisfeitos:

- $N(T) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^4}\}$?

Seja $u = (x,y,z,t) \in N(T)$. Logo $T(u) = T(x,y,z,t) = \vec{0}_{M(2,2)}$, isto é

$$\begin{bmatrix} x+y+z+t & -x-2y+t \\ 5y-z+2t & 3y+z-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ -x-2y+\ \ t = 0 \\ 5y-z+2t = 0 \\ 3y+z-t = 0 \end{cases}$$

Obs: A é dita matriz que induz a transformação T

Resolvendo-o por escalonamento da matriz dos coeficientes $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Exemplos Resolvidos

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad L_2 \to L_2 + L_1 \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \to -L_2 \\ L_3 \to L_3 + 5L_2 \\ L_4 \to L_4 + 3L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \to \frac{1}{4} L_3 \\ L_4 \to L_4 - L_3 \end{array} \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y - z - 2\,t = 0 \\ z + 3t = 0 \\ -7t = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = -y - z - t \\ y = z + 2t \\ z = -3t \\ t = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

Assim

$$u = (x, y, z, t) = (0,0,0,0) = \vec{0}_{\mathbb{R}^4}.$$

Portanto $N(T) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^4}\}$ e então T é injetora, pelo Teorema.

Exemplos Resolvidos

- $Im(T) = M(2,2)$?

  Como $N(T) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^4}\}$ temos que $\dim(N(T)) = 0.$

Pelo Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem, temos que

$$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) \quad \Rightarrow \quad 4 = 0 + \dim(Im(T))$$

que indica que

$$\dim(Im(T)) = 4 = \dim(M(2,2)$$

Então

$$Im(T) = M(2,2).$$

Com isso,

$$T \text{ é sobrejetora.}$$

Portanto, T é simultaneamente injetora e sobrejetora, ou seja, é bijetora.

Observação:

- Como $T: \mathbb{R}^4 \to M(2,2)$ dada no exemplo anterior é bijetora temos que $\mathbb{R}^4$ e $M(2,2)$ são isomorfos.
- Além disso, veja que $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 =$$\dim(M(2,2))$.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 7) Verifique se $T: P_1 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(a + bx) = (a - 2b, -3a + 6b)$$

é bijetora.

Solução: Vamos verificar se $N(T) = \{\vec{0}_{P_1}\}$.

Seja $p(x) = a + bx \in N(T)$. Logo

$$T(p(x)) = \vec{0}_{\mathbb{R}^2} \qquad \text{ou seja,} \qquad T(a + bx) = (0,0),$$

e então

$$(a - 2b, -3a + 6b) = (0,0).$$

Assim obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ -3a + 6b = 0 \end{cases}$$

cuja solução é

$$a = 2b.$$

Portanto

$$N(T) = \{a + bx \in P_1; a = 2b\}$$

Como $N(T) \neq \{\vec{0}_{P_1}\}$, temos que T não é injetora e portanto, também não é bijetora.

Exemplo 8: Pode existir uma transformação linear $T: P_2 \to \mathbb{R}^4$ que seja bijetora? E injetora? E sobrejetora?

Solução: Como $\dim(P_2) = 3$ e $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ temos que $\dim(P_2) \neq \dim(\mathbb{R}^4)$ e por isso, não pode existir $T: P_2 \to \mathbb{R}^4$ bijetora, pois senão o teorema anterior seria contrariado.

Se existir $T: P_2 \to \mathbb{R}^4$ que for injetora, temos que $N(T) \neq \left\{\vec{0}_{P_2}\right\}$ e $\dim\big(N(T)\big) = 0$ e com isso, pelo Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem:

$$\dim(P_2) = \dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = 0 + \dim\big(Im(T)\big)$$

que indica que

$$3 = \dim(Im(T)),$$

que é possível, pois $Im(T) \subset \mathbb{R}^4$.

Portanto, é possível existir alguma $T: P_2 \to \mathbb{R}^4$ que seja injetora.

Se existir $T: P_2 \to \mathbb{R}^4$ que for sobrejetora, temos que

$$Im(T) = \mathbb{R}^4 \quad \text{e} \quad \dim\big(Im(T)\big) = 4.$$

Com isso, pelo Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem

$$\dim(P_2) = \dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big)$$

Exemplos Resolvidos

ou seja

$$3 = \dim\big(N(T)\big) + 4.$$

E então

$$\dim\big(N(T)\big) = -1,$$

que não é possível, pois a dimensão representa a quantidade de vetores em uma base.

Portanto, não é possível existir alguma $T: P_2 \to \mathbb{R}^4$ que seja sobrejetora.

Além disso, toda transformação linear $T: P_2 \to \mathbb{R}^4$ é, no máximo, injetora.

O resultado do exemplo anterior pode ser generalizado pelo seguinte teorema:

Teorema: Se $\dim(U) < \dim(V)$ então não existe nenhuma transformação linear $T: U \to V$ que seja sobrejetora.

Justificativa: Suponha que $\dim(U) < \dim(V)$. Supondo, por absurdo, que exista alguma transformação linear $T: U \to V$ que seja sobrejetora, então $Im(T) = V$ e, pelo teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem, obtemos

$$\dim(U) = \dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = \dim\big(N(T)\big) + \dim(V).$$

Como $\dim\big(N(T)\big) \geq 0$, obtemos que

$$\dim(U) = \dim\big(N(T)\big) + \dim(V) \geq 0 + \dim(V) \geq \dim(V)$$

que é uma contradição. Portanto, não pode existir tal T.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 9: Pode existir uma transformação linear $T: \mathbb{R}^5 \to M(2,2)$ que seja bijetora? E sobrejetora? E injetora?

Solução: Como $\dim(\mathbb{R}^5) = 5$ e $\dim(M(2,2)) = 4$ temos que $\dim(\mathbb{R}^5) \neq \dim(\mathbb{R}^4)$ e por isso, não pode existir $T: \mathbb{R}^5 \to M(2,2)$ bijetora, pois senão o teorema para transformações bijetoras seria contrariado.

Se existir $T: \mathbb{R}^5 \to M(2,2)$ que for sobrejetora, temos que $Im(T) = \mathbb{R}^4$ e então, pelo Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem

$$\dim(\mathbb{R}^5) = \dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = \dim\big(N(T)\big) + \dim(\mathbb{R}^4)$$

ou seja

$$5 = \dim\big(N(T)\big) + 4$$

que significa que

$$\dim\big(N(T)\big) = -1,$$

que não é possível, pois a dimensão representa a quantidade de vetores em uma base. Portanto, não é possível existir alguma $T: \mathbb{R}^5 \to M(2,2)$ que seja sobrejetora.

Se existir $T: \mathbb{R}^5 \to M(2,2)$ que for injetora, temos que $N(T) \neq \left\{\vec{0}_{\mathbb{R}^5}\right\}$ e $\dim\big(N(T)\big) = 0$ e com isso, pelo Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem

Exemplos Resolvidos

$$\dim(\mathbb{R}^5) = \dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = 0 + \dim\big(Im(T)\big)$$

que indica que

$$5 = \dim(Im(T)),$$

que não é possível, pois $Im(T) \subset M(2,2)$ e, por isso,

$$\dim(Im(T)) \leq \dim(M(2,2) = 4.$$

Portanto, não é possível existir alguma $T: \mathbb{R}^5 \to M(2,2)$ que seja injetora.

Além disso, toda transformação linear $T: \mathbb{R}^5 \to M(2,2)$ é, no máximo, sobrejetora.

O resultado do exemplo anterior pode ser generalizado pelo seguinte teorema:

Teorema: Se $\dim(U) > \dim(V)$ então não existe nenhuma transformação linear $T: U \to V$ que seja injetora.

Justificativa: Suponha que $\dim(U) > \dim(V)$. Supondo, por absurdo, que exista alguma transformação linear $T: U \to V$ que seja injetora, então $N(T) \neq \{\vec{0}_U\}$ e $\dim\big(N(T)\big) = 0$ e, pelo teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem, obtemos

$$\dim(U) = \dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = 0 + \dim(V).$$

ou seja, $\dim(U) = \dim(V)$, que é uma contradição.

Portanto, não pode existir tal T.