# Hipérbole (Exemplos)

O primeiro passo é descobrir qual equação da hipérbole se aplica para esta situação.

Para isto, faz-se necessário conhecer informações sobre o centro e o eixo real.

O centro é o ponto médio dos focos (ou dos vértices), logo

$$C = \frac{F_1 + F_2}{2} = (0,0)$$

Lembre-se que os vértices pertencem ao eixo real. Assim, o eixo real está sobre o eixo dos $x$.

A equação da hipérbole neste caso é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dos seus focos,

$$F_1(-c, 0) \text{ e } F_2(c, 0),$$

obtém-se $c = 3$. Dos seus vértices,

$$A_1(-a, 0) \text{ e } A_2(a, 0),$$

obtém-se $a = 2$

**Exemplo 01:** Estabelecer a equação da hipérbole que possui:

a) Os vértices $(\pm 2,0)$ e os focos $(\pm 3,0)$

Da relação

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

tem-se

$$b^2 = 3^2 - 2^2 \Rightarrow b^2 = 5$$

Assim, a equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se torna

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

**Exemplo 01:** Estabelecer a equação da hipérbole que possui:

a) Os vértices $(\pm 2,0)$ e os focos $(\pm 3,0)$

O primeiro passo é descobrir qual equação da hipérbole se aplica para esta situação.

Para isto, faz-se necessário conhecer informações sobre o centro e o eixo real.

O centro é o ponto de interseção das assíntotas, logo é o resultado do sistema linear

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

Deste sistema vem

$$2x + 5 = -2x + 1$$

$$4x = -4$$

$$x = -1$$

Substituindo na primeira equação

$$y = 2(-1) + 5 = 3$$

Assim,

$$C(-1,3)$$

Lembre-se que o segmento que une o centro ao foco terá a mesma direção do eixo real.
Assim, o eixo real é paralelo ao eixo dos $y$.

**Exemplo 01:** Estabelecer a equação da hipérbole que possui:
b) As retas assíntotas $y = 2x + 5$ e $y = -2x + 1$ e um dos focos $(-1,8)$.

A equação da hipérbole neste caso é

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1,$$

em que já se conhece $h = -1$ e $k = 3$. Dos seus focos,

$$F_1(h, -c+k) \text{ e } F_2(h, c+k),$$

tem-se

$$c + 3 = 8$$

o que fornece $c = 5$

Das assíntotas, a que possui coeficiente angular positivo tem formato

$$y - k = \frac{a}{b}(x-h)$$

Assim,

$$\frac{a}{b} = 2 \Rightarrow a = 2b$$

Como

$$c^2 = a^2 + b^2$$

tem-se

$$5^2 = 4b^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 5$$

**Exemplo 01:** Estabelecer a equação da hipérbole que possui:

b) As retas assíntotas $y = 2x + 5$ e $y = -2x + 1$ e um dos focos $(-1{,}8)$.

Além disso,

$$a^2 = (2b)^2 = 4b^2$$

$$a^2 = 4 \cdot 5 = 20$$

Com isso, a equação

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

pode ser escrita como

$$\frac{(y-3)^2}{20} - \frac{(x+1)^2}{5} = 1$$

**Exemplo 01:** Estabelecer a equação da hipérbole que possui:

b) As retas assíntotas $y = 2x + 5$ e $y = -2x + 1$ e um dos focos $(-1{,}8)$.

Quando o centro está na origem, uma das componentes dos vértices é nula. Logo, com certeza o centro desta hipérbole não é a origem.
Assim, existem duas possibilidades neste caso:

2. **Hipérbole de centro fora da origem do sistema**
   i. O eixo real é paralelo ao eixo dos $x$
   ii. O eixo real é paralelo ao eixo dos $y$

i. A equação neste caso é

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

E alguns dos elementos são

$$C(h,k)$$
$$F_1(-c+h,k) \text{ e } F_2(c+h,k)$$
$$A_1(-a+h,k) \text{ e } A_2(a+h,k)$$
$$B_1(h,-b+k) \text{ e } B_2(h,b+k)$$

Do valor de $A$, tem-se $k=-1$ e, do valor de $B$, $h=3$.

Com esses dois valores, pode-se ainda descobrir $a$ e $b$ (uma vez que eles são positivos):

$$a+h=a+3=4 \Rightarrow a=1$$
$$b+k=b-1=2 \Rightarrow b=3$$

**Exemplo 02:** Considere os pontos $A(4,-1)$ e $B(3,2)$. Determine as equações, os principais elementos e faça o esboço das hipérboles que possuem $B$ como uma das extremidades de seu eixo imaginário, $A$ como vértice e eixo real paralelo a um dos eixos coordenados.

$$h = 3, k = -1, a = 1, b = 3$$

**Equação:** A equação da hipérbole

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

se torna

$$\frac{(x-3)^2}{1} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

**Elementos:** É possível obter $c$ a partir de

$$c^2 = a^2 + b^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10}$$

Com isso, pode se obter os elementos

$$C(h,k)$$

$$F_1(-c+h,k) \text{ e } F_2(c+h,k)$$

$$A_1(-a+h,k) \text{ e } A_2(a+h,k)$$

$$B_1(h,-b+k) \text{ e } B_2(h,b+k)$$

que serão

$$C(3,-1)$$

$$F_1\left(3-\sqrt{10},-1\right) \text{ e } F_2\left(3+\sqrt{10},-1\right)$$

$$A_1(2,-1) \text{ e } A_2(4,-1)$$

$$B_1(3,-4) \text{ e } B_2(3,2)$$

**Exemplo 02:** Considere os pontos $A(4,-1)$ e $B(3,2)$. Determine as equações, os principais elementos e faça o esboço das hipérboles que possuem $B$ como uma das extremidades de seu eixo imaginário, $A$ como vértice e eixo real paralelo a um dos eixos coordenados.

$$h = 3, k = -1, a = 1, b = 3, c = \sqrt{10}$$

Ainda há a excentricidade, que será

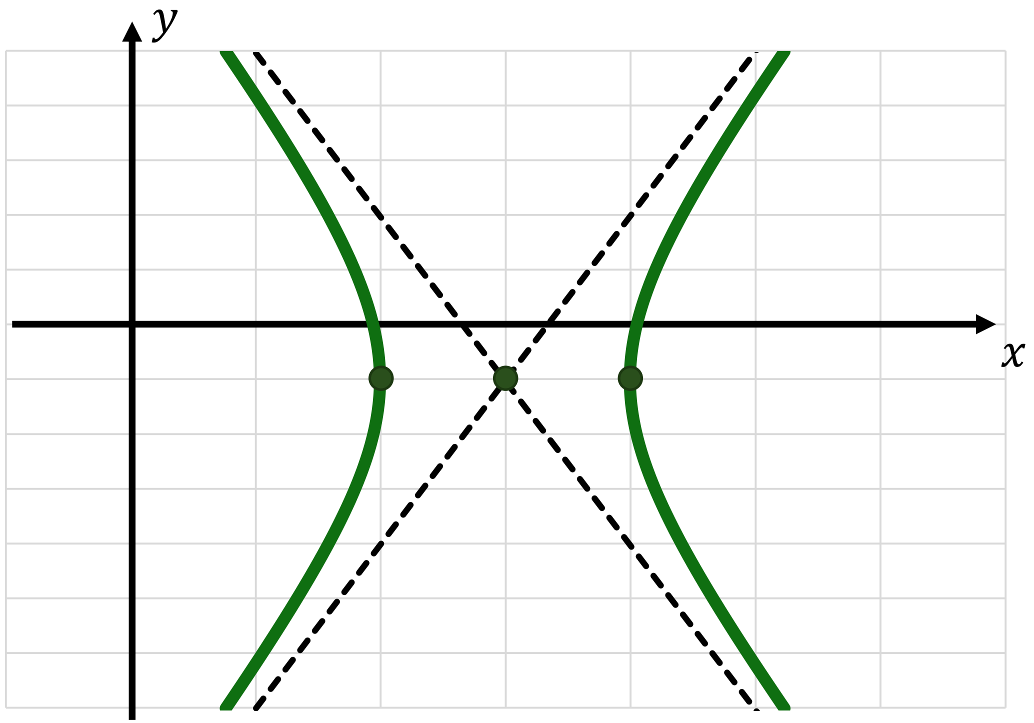
$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{10}$$

**Esboço:** Para o esboço, é bom criar as assíntotas:

$$r: y - k = \frac{b}{a}(x - h) \Rightarrow r: y = 3x - 10$$

$$s: y - k = -\frac{b}{a}(x - h) \Rightarrow s: y = -3x + 8$$

Lembrando que $C(3,-1)$, $A_1(2,-1)$ e $A_2(4,-1)$, tem-se




**Exemplo 02:** Considere os pontos $A(4,-1)$ e $B(3,2)$. Determine as equações, os principais elementos e faça o esboço das hipérboles que possuem $B$ como uma das extremidades de seu eixo imaginário, $A$ como vértice e eixo real paralelo a um dos eixos coordenados.

ii. A equação neste caso é

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

E alguns dos elementos são

$$C(h,k)$$

$$F_1(h,-c+k) \text{ e } F_2(h,c+k)$$

$$A_1(h,-a+k) \text{ e } A_2(h,a+k)$$

$$B_1(-b+h,k) \text{ e } B_2(b+h,k)$$

Do valor de $A$, tem-se $h = 4$ e, do valor de $B$, $k = 2$.

Com esses dois valores, pode-se ainda descobrir $a$ e $b$ (uma vez que eles são positivos):

$$-a + k = -a + 2 = -1 \Rightarrow a = 3$$

$$-b + h = -b + 4 = 3 \Rightarrow b = 1$$

É possível obter $c$ a partir de

$$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10}$$

**Exemplo 02:** Considere os pontos $A(4,-1)$ e $B(3,2)$. Determine as equações, os principais elementos e faça o esboço das hipérboles que possuem $B$ como uma das extremidades de seu eixo imaginário, $A$ como vértice e eixo real paralelo a um dos eixos coordenados.

$$h = 4, k = 2, a = 3, b = 1, c = \sqrt{10}$$

**Equação:** A equação da hipérbole

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

se torna

$$\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{1} = 1$$

**Elementos:** Com isso, os elementos

$$C(h,k)$$

$F_1(h,-c+k)$ e $F_2(h,c+k)$

$A_1(h,-a+k)$ e $A_2(h,a+k)$

$B_1(-b+h,k)$ e $B_2(b+h,k)$

serão

$$C(4,2)$$

$F_1\left(4,2-\sqrt{10}\right)$ e $F_2\left(4,2+\sqrt{10}\right)$

$A_1(4,-1)$ e $A_2(4,5)$

$B_1(3,2)$ e $B_2(5,2)$

**Exemplo 02:** Considere os pontos $A(4,-1)$ e $B(3,2)$. Determine as equações, os principais elementos e faça o esboço das hipérboles que possuem $B$ como uma das extremidades de seu eixo imaginário, $A$ como vértice e eixo real paralelo a um dos eixos coordenados.

$$h = 4, k = 2, a = 3, b = 1, c = \sqrt{10}$$

Ainda há a excentricidade, que será

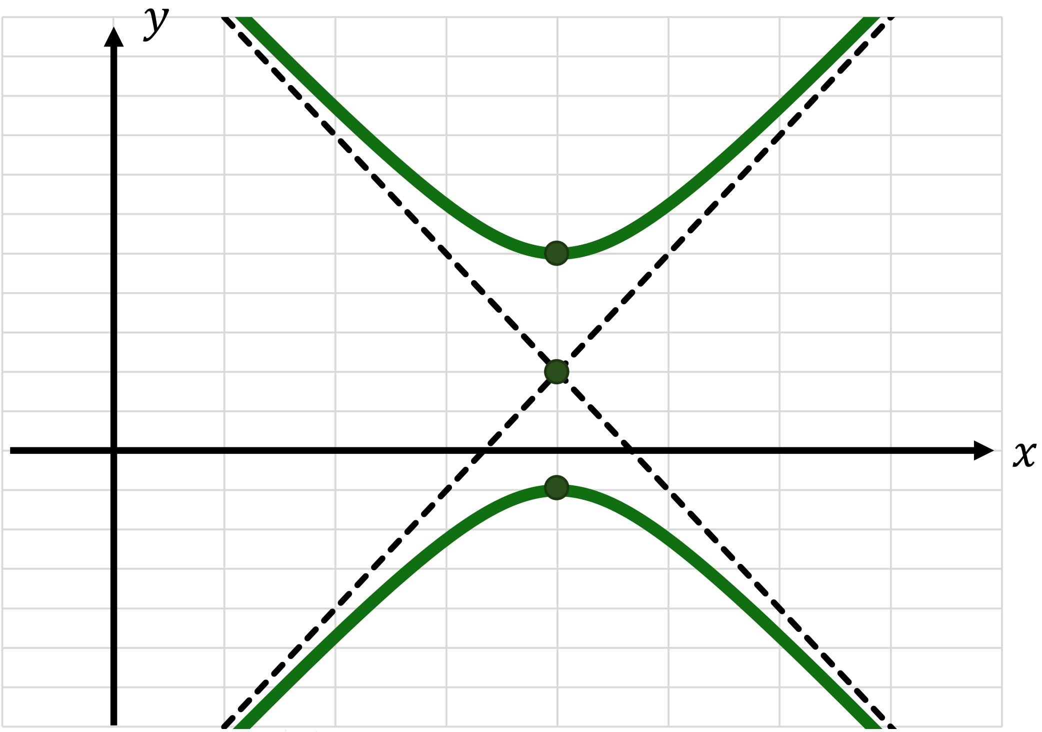
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

**Esboço:** Para o esboço, é bom criar as assíntotas:

$$r: y - k = \frac{a}{b}(x - h) \Rightarrow r: y = 3x - 10$$

$$s: y - k = -\frac{a}{b}(x - h) \Rightarrow s: y = -3x + 14$$

Lembrando que $C(4,2)$, $A_1(4,-1)$ e $A_2(4,5)$, tem-se




**Exemplo 02:** Considere os pontos $A(4,-1)$ e $B(3,2)$. Determine as equações, os principais elementos e faça o esboço das hipérboles que possuem $B$ como uma das extremidades de seu eixo imaginário, $A$ como vértice e eixo real paralelo a um dos eixos coordenados.

O primeiro passo é descobrir qual equação da hipérbole se aplica para esta situação.

Para isto, faz-se necessário conhecer informações sobre o centro e o eixo real.

O centro é o ponto médio dos focos, logo

$$C = \frac{F_1 + F_2}{2} = (0,0)$$

Lembre-se que o segmento que une os focos terá a mesma direção do eixo real.
Assim, o eixo real está sobre o eixo dos $x$.

A equação da hipérbole neste caso é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dos seus focos,

$$F_1(-c, 0) \text{ e } F_2(c, 0),$$

obtém-se $c = \sqrt{8}$.
Como trata-se de uma hipérbole equilátera,

$$a = b$$

**Exemplo 03:** Determine a equação da hipérbole equilátera com focos nos pontos $(-\sqrt{8}, 0)$ e $(\sqrt{8}, 0)$.

Da relação

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

tem-se

$$\left(\sqrt{8}\right)^2 = a^2 + a^2$$

$$8 = 2a^2$$

$$a^2 = 4$$

Como $a = b$,

$$b^2 = 4$$

Assim, a equação da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se torna

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

**Exemplo 03:** Determine a equação da hipérbole equilátera com focos nos pontos $(-\sqrt{8}, 0)$ e $(\sqrt{8}, 0)$.

Primeiramente, usa-se o método de **completar quadrados** para voltar para a forma padrão.

**Passo 1:** Colocam-se em evidência as constantes associadas às maiores potências ($x$ e $y$ separados).

$$9(x^2 - 2x) - 4(y^2 + 4y) - 43 = 0$$

**Passo 2:** Vê-se qual constante é necessária para que se tenha um trinômio quadrado perfeito, somando e subtraindo este valor em cada parênteses.

$$9(x^2 - 2x + 1 - 1) - 4(y^2 + 4y + 4 - 4) - 43 = 0$$

**Passo 3:** Reescreve-se a expressão usando trinômios quadrados perfeitos.

$$9[(x-1)^2 - 1] - 4[(y+2)^2 - 4] - 43 = 0$$

**Passo 4:** Desenvolve-se a expressão de acordo com a cônica que ela representa.

$$9(x-1)^2 - 9 - 4(y+2)^2 + 16 - 43 = 0$$

$$9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 36 \quad (\div 36)$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

**Exemplo 04:** Identifique a curva e apresente seus elementos

a) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

Trata-se de uma hipérbole de centro $C(1,-2)$ e eixo real paralelo ao eixo dos $x$.
Da videoaula:

**2. Hipérbole de centro fora da origem do sistema**

i. O eixo real é paralelo ao eixo dos $x$

$$C(h,k)$$

$$F_1(-c+h,k) \text{ e } F_2(c+h,k)$$

$$A_1(-a+h,k) \text{ e } A_2(a+h,k)$$

$$B_1(h,-b+k) \text{ e } B_2(h,b+k)$$

A fórmula padrão é

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Com isso,

$$h = 1, k = -2, a = 2 \text{ e } b = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$$

Os elementos serão, por fim,

$$C(1,-2), F_1\left(1-\sqrt{13},-2\right), F_2\left(1+\sqrt{13},-2\right)$$

$$A_1(-1,-2), A_2(3,-2), B_1(1,-5), B_2(1,1), e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

**Exemplo 04:** Identifique a curva e apresente seus elementos

a) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$

Primeiramente, usa-se o método de **completar quadrados** para voltar para a forma padrão.

**Passo 1:** Colocam-se em evidência as constantes associadas às maiores potências ($x$ e $y$ separados).

$$2(y^2 + 2y) - x + 4 = 0$$

**Passo 2:** Vê-se qual constante é necessária para que se tenha um trinômio quadrado perfeito, somando e subtraindo este valor em cada parênteses.

$$2(y^2 + 2y + 1 - 1) - x + 4 = 0$$

**Passo 3:** Reescreve-se a expressão usando trinômios quadrados perfeitos.

$$2[(y + 1)^2 - 1] - x + 4 = 0$$

**Passo 4:** Desenvolve-se a expressão de acordo com a cônica que ela representa.

$$2(y + 1)^2 - 2 = x - 4$$

$$2(y + 1)^2 = x - 2$$

$$(y + 1)^2 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

**Exemplo 04:** Identifique a curva e apresente seus elementos

b) $2y^2 + 4y - x + 4 = 0$

$$(y+1)^2=\frac{1}{2}(x-2)$$

Trata-se de uma parábola de vértice $V(2,-1)$ e eixo paralelo ao eixo dos $x$.

Da videoaula:

**2. Parábola com vértice fora da origem**

ii. O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos $x$

$$(y-k)^2=2p(x-h)$$

$$F\left(h+\frac{p}{2},k\right)$$

$$d\colon x=-\frac{p}{2}+h$$

Com isso,

$$h=2 \text{ e } k=-1$$

$$2p=\frac{1}{2}\Rightarrow p=\frac{1}{4}$$

Os elementos serão, por fim,

$$F\left(\frac{17}{8},-1\right)$$

$$d\colon x=\frac{15}{8}$$

**Exemplo 04:** Identifique a curva e apresente seus elementos

b) $2y^2+4y-x+4=0$

Novamente, deve-se **completar quadrados** para voltar para a forma padrão. Neste caso, entretanto, será necessário tratar da raiz antes (isto vai voltar para te assombrar no exercício! Aguarde!).

$$y = -2 - \frac{3}{2}\sqrt{-x^2 + 2x + 3}$$

$$y + 2 = -\frac{3}{2}\sqrt{-x^2 + 2x + 3}$$

$$(y+2)^2 = \left(-\frac{3}{2}\sqrt{-x^2 + 2x + 3}\right)^2$$

$$(y+2)^2 = \frac{9}{4}(-x^2 + 2x + 3)$$

Note que um dos quadrados perfeitos já surgiu. Basta estabelecer o segundo.

**Passo 1:** Coloca-se em evidência a constante associadas à maior potência em $x$

$$(y+2)^2 = \frac{9}{4}(-1)(x^2 - 2x - 3)$$

**Passo 2:** Vê-se qual constante é necessária para que se tenha um trinômio quadrado perfeito, somando e subtraindo este valor no parênteses.

$$(y+2)^2 = \frac{9}{4}(-1)(x^2 - 2x + 1 - 1 - 3)$$

**Exemplo 05:** Descreva e represente geometricamente a curva

$$y = -2 - \frac{3}{2}\sqrt{-x^2 + 2x + 3}$$

$$(y+2)^2 = \frac{9}{4}(-1)(x^2 - 2x + 1 - 1 - 3)$$

**Passo 3:** Reescreve-se a expressão usando trinômios quadrados perfeitos.

$$(y+2)^2 = -\frac{9}{4}[(x-1)^2 - 4]$$

**Passo 4:** Desenvolve-se a expressão de acordo com a cônica que ela representa.

$$(y+2)^2 = -\frac{9}{4}(x-1)^2 + 9$$

$$(y+2)^2 + \frac{9}{4}(x-1)^2 = 9 \ (\div 9)$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

Tem-se uma elipse de centro $C(1,-2)$ e eixo maior paralelo ao eixo dos $y$. Certo?

Quase!
A raiz quadrada vem pra te assombrar agora, pois isso estabelece restrições de valores nas variáveis $x$ e $y$!

**Exemplo 05:** Descreva e represente geometricamente a curva

$$y = -2 - \frac{3}{2}\sqrt{-x^2 + 2x + 3}$$

**Restrições para $x$:** Do enunciado

$$-x^2 + 2x + 3 \geq 0$$

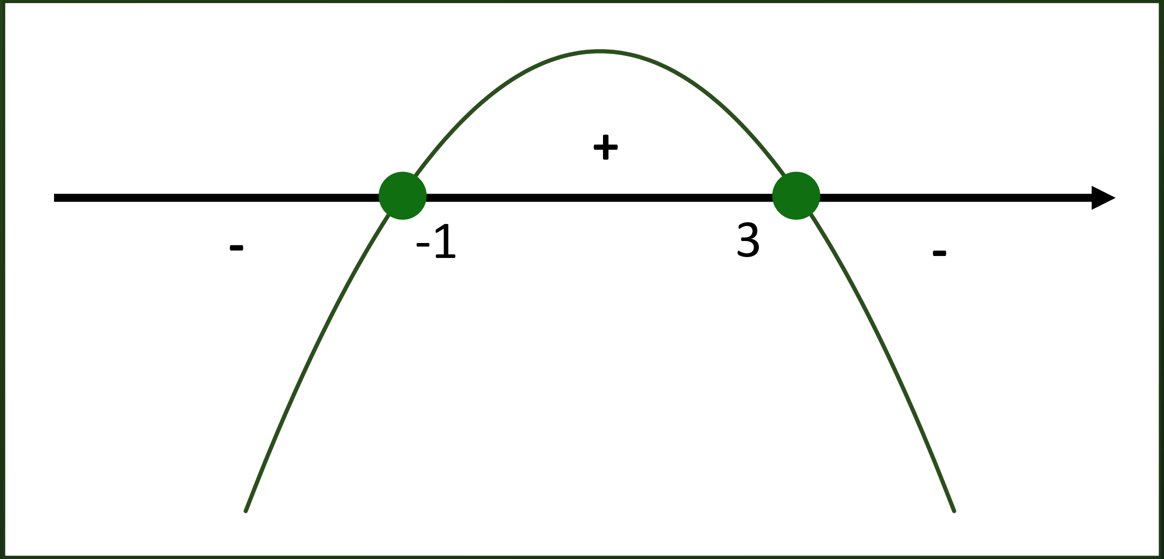
Calculando as raízes do polinômio, por Bhaskara,

$$\Delta = 2^2 - 4(-1)(3) = 16$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2(-1)}$$

o que fornece $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$

Fazendo a análise de sinais:




Ou seja, deve-se garantir $-1 \leq x \leq 3$.

**Exemplo 05:** Descreva e represente geometricamente a curva

$$y = -2 - \frac{3}{2}\sqrt{-x^2 + 2x + 3}$$

**Restrições para $y$:** Da definição de $y$, como

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 3} \geq 0$$

tem-se

$$y \leq -2$$

Assim, o que se tem é um RAMO da elipse

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

em que $-1 \leq x \leq 3$ e $y \leq -2$

**Esboço:**
Faz-se a curva da elipse original, fazendo os devidos cortes depois.

Como a equação padrão da elipse neste caso é

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

tem-se

$$h = 1, k = -2, a = 3 \quad \text{e} \quad b = 2$$

**Exemplo 05:** Descreva e represente geometricamente a curva

$$y = -2 - \frac{3}{2}\sqrt{-x^2 + 2x + 3}$$

$$h = 1, k = -2, a = 3 \quad \text{e} \quad b = 2$$

Além disso, da videoaula:

**2. Elipse de centro fora da origem do sistema**

ii. O eixo maior é paralelo ao eixo dos $y$

$$C(h, k)$$

$$A_1(h, -a + k) \text{ e } A_2(h, a + k)$$

$$B_1(-b + h, k) \text{ e } B_2(b + h, k)$$

Assim,

$$C(1, -2)$$

$$A_1(1, -5) \text{ e } A_2(1,1)$$

$$B_1(-1, -2) \text{ e } B_2(3, -2)$$

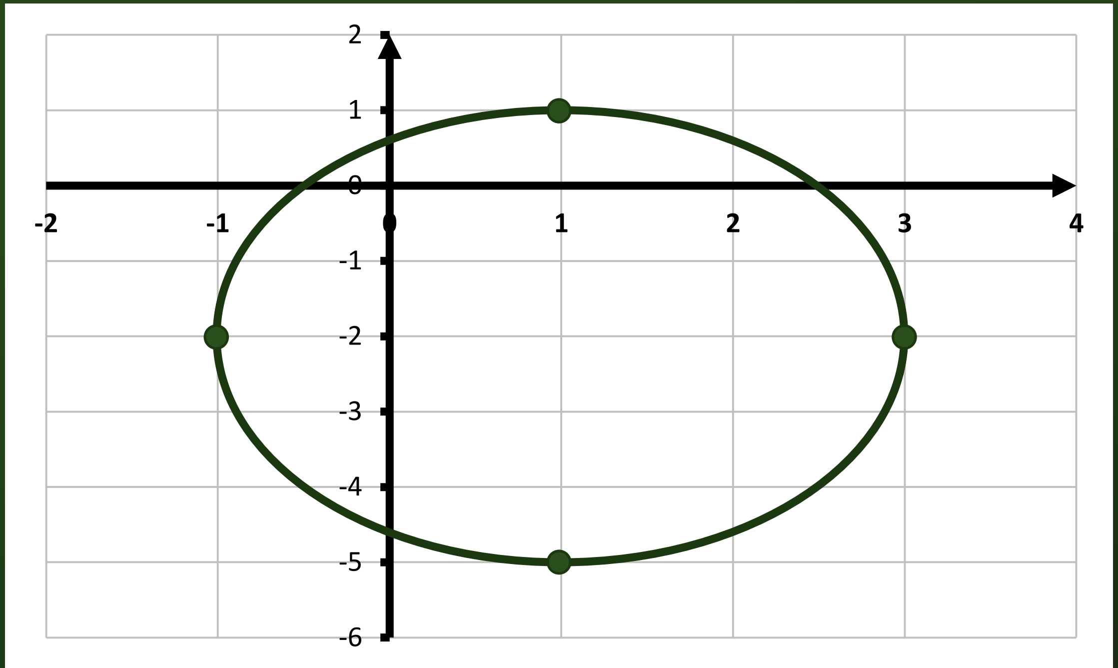
**Exemplo 05:** Descreva e represente geometricamente a curva

$$y = -2 - \frac{3}{2}\sqrt{-x^2 + 2x + 3}$$

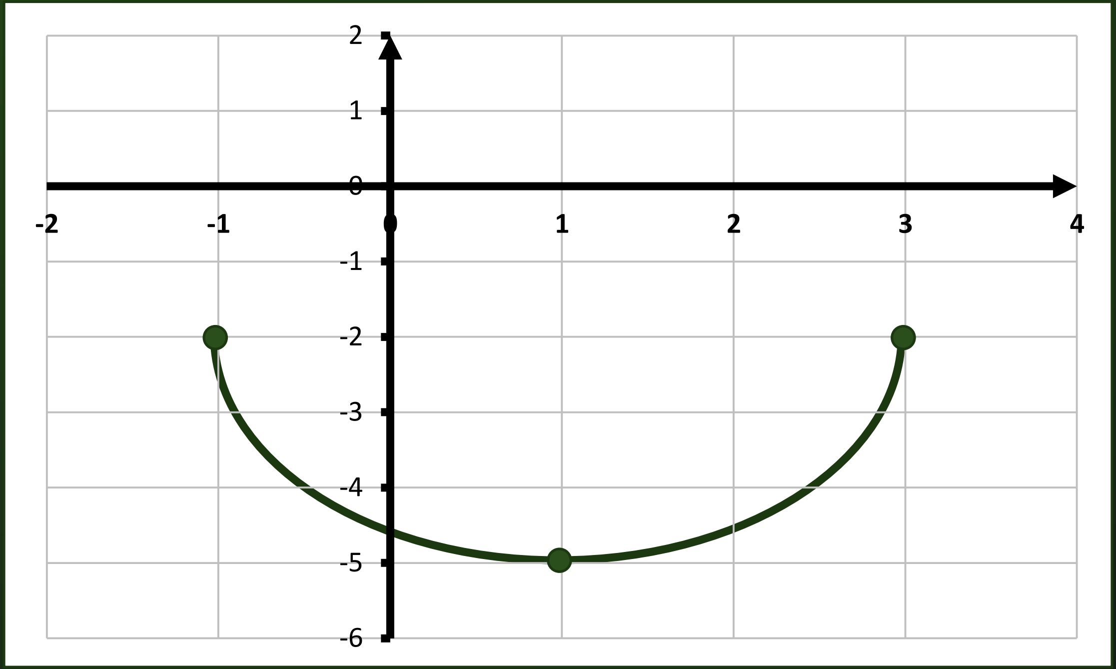
Elipse:

$A_1(1,-5)$ e $A_2(1,1)$

$B_1(-1,-2)$ e $B_2(3,-2)$




Ramo da elipse: $-1 \leq x \leq 3$ e $y \leq -2$




**Exemplo 05:** Descreva e represente geometricamente a curva

$$y = -2 - \frac{3}{2}\sqrt{-x^2 + 2x + 3}$$

# Dúvidas?