A reta: tipos de equações – Exemplos

O primeiro passo consiste em criar uma equação da reta. Como não há exigência de uma em específico, fica a critério do aluno. Apresentam-se duas: a vetorial e as paramétricas.

Para isso, são necessários um ponto da reta e um vetor diretor.

Foram dados dois pontos. Escolhe-se um:

$$A(3,-1,4)$$

Para o vetor diretor, como se conhecem dois pontos da reta, pode-se estabelecê-lo como

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$
$$\vec{v} = B - A$$
$$\vec{v} = (4,-3,-1) - (3,-1,4)$$
$$\vec{v} = (1,-2,-5)$$

Podem-se estabelecer agora as equações da reta. Para a equação vetorial,

$$P = A + t\vec{v}$$
$$(x,y,z) = (3,-1,4) + t(1,-2,-5)$$

Exemplo 01: O ponto $P(2,y,z)$ pertence à reta determinada por $A(3,-1,4)$ e $B(4,-3,-1)$. Calcular P.

Para as equações paramétricas da reta,

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Substituindo os valores

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 4 - 5t \end{cases}$$

Substituindo o ponto P dado, tem-se

$$\begin{cases} 2 = 3 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 4 - 5t \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação, tem-se

$$2 = 3 + t \Rightarrow t = -1$$

Substituindo o resultado nas demais,

$$\begin{cases} y = -1 - 2 \cdot (-1) \\ z = 4 - 5 \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 9 \end{cases} \Rightarrow \therefore P(2,1,9)$$

Exemplo 01: O ponto $P(2, y, z)$ pertence à reta determinada por $A(3, -1,4)$ e $B(4, -3, -1)$. Calcular P.

Não é uma exigência do exercício, mas aproveitando a deixa, se fosse necessário identificar um ponto e um vetor diretor da reta dada, uma opção seria:

- Ponto: $A(3, -1, 0)$
- Vetor: $\vec{v} = (2, -1, -2)$

Voltando ao exercício, basta substituir o valor dado nas equações simétricas fornecidas e calcular as demais variáveis.

Alternativa a) $x = 5$

$$\frac{5-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-2}$$

$$1 = \frac{y+1}{-1} \quad \text{e} \quad 1 = \frac{z}{-2}$$

$$y + 1 = -1 \quad \text{e} \quad z = -2$$

$$y = -2 \quad \text{e} \quad z = -2$$

$$\therefore P_a(5, -2, -2)$$

Exemplo 02: Determine os pontos da reta $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-2}$ que têm **a)** abcissa 5; **b)** ordenada 4; **c)** cota 1.

Alternativa b) $y = 4$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{4+1}{-1} = \frac{z}{-2}$$

$$\frac{x-3}{2} = -5 \quad \text{e} \quad -5 = \frac{z}{-2}$$

$$x - 3 = -10 \quad \text{e} \quad z = 10$$

$$x = -7 \quad \text{e} \quad z = 10$$

$$\therefore P_b(-7,4,10)$$

Alternativa c) $z = 1$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{1}{-2}$$

$$\frac{x-3}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{y+1}{-1} = -\frac{1}{2}$$

$$x - 3 = -1 \quad \text{e} \quad 2(y+1) = 1$$

$$x = 2 \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \therefore P_c\left(2, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

Exemplo 02: Determine os pontos da reta $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-2}$ que têm **a)** abcissa 5; **b)** ordenada 4; **c)** cota 1.

O primeiro passo consiste em criar as equações simétricas da reta

Novamente, são necessários um ponto da reta e um vetor diretor.

Escolhe-se como ponto $A(1,-2,3)$. Para o vetor diretor,

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$
$$\vec{v} = B - A$$
$$\vec{v} = (3,-1,-1) - (1,-2,3)$$
$$\vec{v} = (2,1,-4)$$

Podem-se estabelecer agora as equações simétricas da reta. Tem-se

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z - 3}{-4}$$

Para encontrar as equações reduzidas, basta agora escrever duas variáveis em função da terceira. A cada alternativa deve-se optar por uma variável independente distinta.

Exemplo 03: Determine as equações reduzidas da reta que passa pelos pontos $A(1,-2,3)$ e $B(3,-1,-1)$, com variável independente em: **a)** x; **b)** y; **c)** z.

$$\boxed{\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}}$$

Alternativa a) Variável independente x

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}$$

$$2(y+2)=x-1$$

$$2y+4=x-1$$

$$2y=x-5$$

$$y=\frac{x-5}{2}$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{z-3}{-4}$$

$$2(z-3)=-4(x-1)$$

$$2z-6=-4x+4$$

$$2z=-4x+10$$

$$z=-2x+5$$

$$r:\begin{cases} y=\dfrac{x-5}{2} \\ z=-2x+5 \end{cases}$$

Exemplo 03: Determine as equações reduzidas da reta que passa pelos pontos $A(1,-2,3)$ e $B(3,-1,-1)$, com variável independente em: **a)** x; **b)** y; **c)** z.

$$\boxed{\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}}$$

Alternativa b) Variável independente y

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}$$

$$x-1=2(y+2)$$

$$x-1=2y+4$$

$$x=2y+5$$

$$\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$$

$$z-3=-4(y+2)$$

$$z-3=-4y-8$$

$$z=-4y-5$$

$$r:\begin{cases}x=2y+5\\ z=-4y-5\end{cases}$$

Exemplo 03: Determine as equações reduzidas da reta que passa pelos pontos $A(1,-2,3)$ e $B(3,-1,-1)$, com variável independente em: **a)** x; **b)** y; **c)** z.

$$\boxed{\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}}$$

Alternativa c) Variável independente z

$$\frac{x-1}{2}=\frac{z-3}{-4}$$

$$-4(x-1)=2(z-3)$$

$$-4x+4=2z-6$$

$$-4x=2z-10$$

$$x=\frac{-z+5}{2}$$

$$\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$$

$$-4(y+2)=z-3$$

$$-4y-8=\mathrm{z}-3$$

$$-4y=z+5$$

$$y=\frac{-z-5}{4} \quad \Rightarrow \quad r:\begin{cases} x=\dfrac{-z+5}{2} \\ y=\dfrac{-z-5}{4} \end{cases}$$

Exemplo 03: Determine as equações reduzidas da reta que passa pelos pontos $A(1,-2,3)$ e $B(3,-1,-1)$, com variável independente em: **a)** x; **b)** y; **c)** z.

a) $(x, y, z) = (-2,3,1) + t(1,0,3)$

Ponto: $A(-2,3,1)$

Vetor: $\vec{v} = (1,0,3)$

b) $\begin{cases} x = 2 - 3z \\ y = -1 + z \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$$

Ponto: $A(2, -1,0)$

Vetor: $\vec{v} = (-3,1,1)$

Exemplo 04: Citar um ponto e um vetor diretor de cada uma das seguintes retas:

c) $\begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

Reta paralela ao eixo x!

Ponto: $A(0,2,0)$

Vetor: $\vec{v} = (1,0,0)$

d) $\begin{cases} x = 2 \\ \frac{y+3}{2} = 1 - z \end{cases}$

Reta perpendicular ao eixo x (paralela ao plano y0z)

Ponto: $A(2,-3,1)$

$\Rightarrow 1 - \mathrm{z} = \dfrac{z-1}{-1}$

Vetor: $\vec{v} = (0,2,-1)$

Exemplo 04: Citar um ponto e um vetor diretor de cada uma das seguintes retas:

Momento
Dúvidas do Coleguinha

“Boa noite professor, não consegui entender como a equação simétrica da reta pode ser usada para descrever a condição de colinearidade entre pontos.”

Autor: um cara que conheço faz pouco tempo, mas considero pakas!

Apresenta-se a resolução deste exercício de 2 maneiras:

1) Utilizando a condição de paralelismo entre dois vetores.

Criam-se primeiro os vetores que serão utilizados

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,1,3) - (-1,4,-3)$$
$$\overrightarrow{AB} = (3,-3,6)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (4,-1,7) - (-1,4,-3)$$
$$\overrightarrow{AC} = (5,-5,10)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (1,1,-1) - (-1,4,-3)$$
$$\overrightarrow{AD} = (2,-3,2)$$

Agora, para a condição de paralelismo:

- $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são paralelos?

$$\frac{3}{5} = \frac{-3}{-5} = \frac{6}{10} \quad \Rightarrow \quad \text{Sim!}$$

Os pontos A, B e C são colineares.

Exemplo 05: Sejam os pontos $A(-1,4,-3)$, $B(2,1,3)$, $C(4,-1,7)$ e $D(1,1,-1)$. Mostre que A, B e C são colineares, mas que A, B e D não o são.

- $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$ são paralelos?

$$\frac{3}{2} \neq \frac{-3}{-3} \neq \frac{6}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{Não!}$$

Os pontos A, B e D não são colineares.

2) Utilizando a equação da reta

Criam-se as equações simétricas da reta que passa pelos pontos A e B.

Escolhe-se como ponto $A(-1,4,-3)$. Para o vetor diretor, $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (3,-3,6)$.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 4}{-3} = \frac{z + 3}{6}$$

Exemplo 05: Sejam os pontos $A(-1,4,-3)$, $B(2,1,3)$, $C(4,-1,7)$ e $D(1,1,-1)$. Mostre que A, B e C são colineares, mas que A, B e D não o são.

Para que 3 pontos sejam colineares, eles têm de estar em uma mesma reta. Assim, basta analisar se C e D fazem parte da reta formada por A e B.

Ponto C :

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+3}{6}$$

$$\frac{4+1}{3} = \frac{-1-4}{-3} = \frac{7+3}{6} = \frac{5}{3}$$

Ou seja, C faz parte da reta, logo A, B e C são colineares.

Ponto D:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+3}{6}$$

$$\frac{1+1}{3} \neq \frac{1-4}{-3} \neq \frac{-1+3}{6}$$

Ou seja, D não faz parte da reta, logo A, B e D não são colineares.

Exemplo 05: Sejam os pontos $A(-1,4,-3)$, $B(2,1,3)$, $C(4,-1,7)$ e $D(1,1,-1)$. Mostre que A, B e C são colineares, mas que A, B e D não o são.

Dúvidas?