Máximos e mínimos; pontos críticos

Pontos críticos

Seja $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Um ponto $(x_0, y_0) \in A$ é chamado de

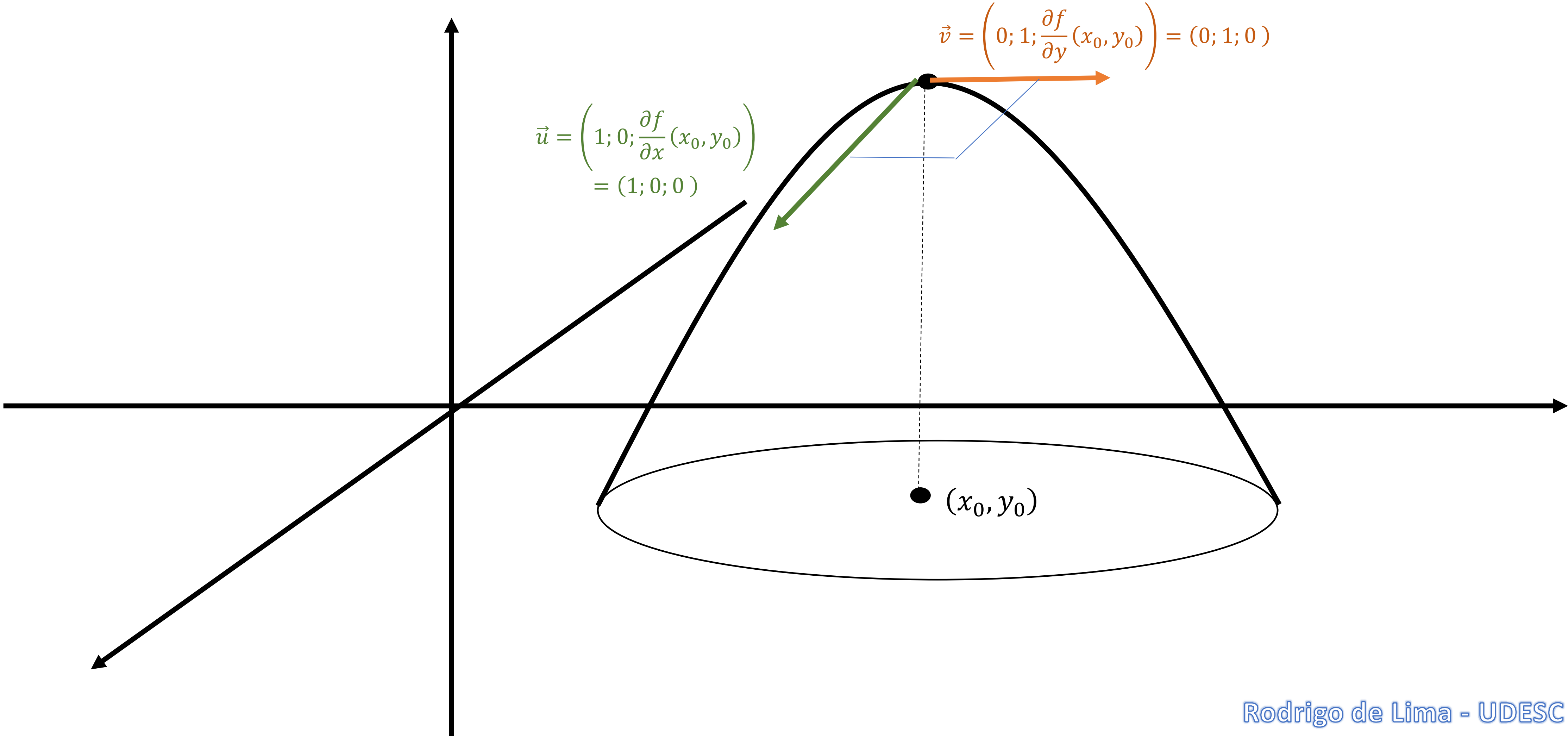
i. <u>crítico</u> de *f(x,y)* se $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \;\; e \;\; \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \\ ou \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ ou } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \;\; \text{não existem} \end{cases}$

ii. <u>extremo</u> de *f(x,y)* se (x_0, y_0) é de máximo ou de mínimo (local ou global)

Porém:

$$(x_0, y_0) \text{ é extremo} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ é crítico}$$

$$(x_0, y_0) \text{ é crítico} \not\Rightarrow (x_0, y_0) \text{ é extremo}$$



Se $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tem derivadas segundas contínuas (ou seja: é de classe C^2), definimos o <u>Hessiano</u> de f num ponto (x, y) ao determinante:

$$H(x,y) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \right)^2$$

A matriz $\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$ é chamada de matriz jacobiana de f em (x, y)

Teorema

Seja $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e (x_0, y_0) um ponto crítico de f. Se:

a) $H(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ então (x_0, y_0) é um ponto de mínimo;

b) $H(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ então (x_0, y_0) é um ponto de máximo;

c) $H(x_0, y_0) < 0$ então (x_0, y_0) não é um ponto de mínimo nem de máximo (ponto de sela);

d) $H(x_0, y_0) = 0$ nada podemos afirmar.

Exemplo 1

Encontre os pontos críticos da função $f(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$ e classifique-os, se possível, como de máximo, mínimo ou de sela.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 6 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 3x + 8y + 2 = 0$$

$$2x + 3y = 6$$
$$3x + 8y = -2$$

$\mathrm{C}\left(\frac{54}{7}; -\frac{22}{7}\right) \rightarrow$ ponto crítico

Exemplo 1

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3;$$

$$H(x,y) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = 7 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$$

Logo, $C\left(\frac{54}{7}; -\frac{22}{7}\right)$ é extremo de mínimo (local ou global? Exercício)

Exemplo 2

Encontre os pontos críticos da função $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ e classifique-os, se possível, como de máximo, mínimo ou de sela.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y = 0$$

Exemplo 2

$6x^2 + y^2 + 10x = 0 \quad (1)$

$2xy + 2y = 0 \quad (2)$

Por (2) temos:

$$2xy + 2y = 0 \Leftrightarrow 2y(x+1) = 0 \Leftrightarrow y = 0;\ x = -1$$

Tomando $y = 0$ e aplicando em (1):

$$6x^2 + y^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow 2x(3x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 0;\ x = -\frac{5}{3}$$

Temos assim dois pontos críticos: $\boldsymbol{C_1(0,0)}$ e $\boldsymbol{C_2\left(-\frac{5}{3},0\right)}$.

Sendo agora $x = -1$ e aplicando em (1):

$$6x^2 + y^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow 6(-1)^2 + y^2 + 10(-1) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2$$

Temos mais dois pontos críticos: $\boldsymbol{C_3(-1,2)}$ e $\boldsymbol{C_4(-1,-2)}$.

Exemplo 2

Pontos críticos: $C_1(0,0)$; $C_2\left(-\frac{5}{3},0\right)$; $C_3(-1,2)$; $C_4(-1,-2)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x + 10$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + 2$$

$$H(x,y) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

a. $C_1(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 10; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$$

$$H(0,0) = \det\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 20 > 0 \quad \rightarrow \quad (0,0) \text{ é um ponto extremo}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 10 > 0 \quad \rightarrow \quad (0,0) \ \text{ é um ponto de mínimo}$$

Exemplo 2

$b.\quad C_2\left(-\frac{5}{3},0\right)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{5}{3},0\right)=-10;\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(-\frac{5}{3},0\right)=0;\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{5}{3},0\right)=-\frac{4}{3}$$

$$H\left(-\frac{5}{3},0\right)=\det\begin{bmatrix}-10 & 0\\ 0 & -\frac{4}{3}\end{bmatrix}=\frac{40}{3}>0 \quad \rightarrow \quad \left(-\frac{5}{3},0\right) \text{ é um ponto extremo}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{5}{3},0\right)=-10<0 \quad \rightarrow \quad \left(-\frac{5}{3},0\right) \text{ é um ponto de máximo}$$

Exemplo 2

c. $C_3(-1,2)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,2) = -2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,2) = 4; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,2) = 0$$

$$H(-1,2) = \det\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = -16 < 0 \quad \rightarrow \quad (-1,2) \text{ é um ponto de sela}$$

d. $C_4(-1,-2)$

Exercício

Exercícios

1. Encontre as derivadas de segunda ordem das funções abaixo:

a) $f(x,y) = x^3 + 4xy^2 + x^2y$;

b) $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Determine e classifique, se possível, os pontos críticos das seguintes funções

a) $f(x,y) = x^2 - 8xy + 2y^2$

b) $f(x,y) = x^3 + x^2y - 7xy - 3x + 12y$

c) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

d) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{y^2 - x^2}$

e) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + 4x$

3. Encontre o conjunto das funções $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$.