Álgebra Linear (ALI0001 – CCI-192-02U)

Conjunto Imagem de uma Transformação Linear

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula do dia 15 de maio de 2023.

Conjunto Imagem de uma Transformação Linear

O conjunto imagem de uma transformação linear $T: U \to V$ é o conjunto formado por todos os elementos do seu contradomínio V que são imagens de algum elemento do domínio U.

Definição: Seja $T: U \to V$ uma transformação linear.
Definimos o conjunto imagem de T por

$$Im(T) = \{v \in V\ ;\ v = T(u) \text{ para algum } u \in U\}.$$

Observações:

i) A imagem de $T: U \to V$ é sempre um subconjunto do contradomínio V, ou seja

$$Im(T) \subset V.$$

ii) Como $\vec{0}_V = T(\vec{0}_U)$ temos que $\vec{0}_V \in Im(T)$, pois é a imagem do vetor nulo do domínio.

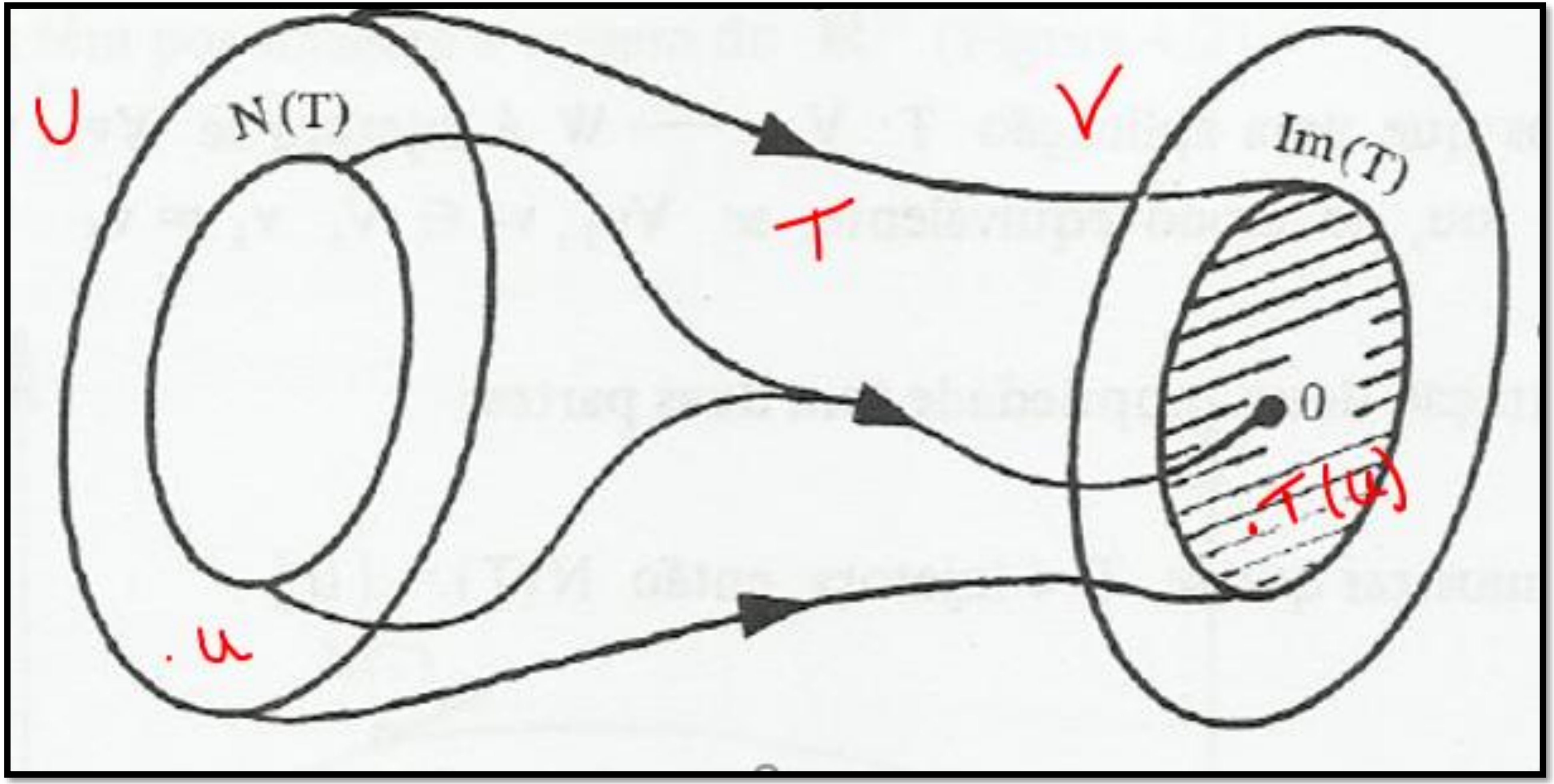
iii) Além disso, como $\vec{0}_V = T(u)$ para todo $u \in N(T)$, temos que $\vec{0}_V$ é a imagem de qualquer vetor pertencente ao núcleo da transformação T.

iii) Portanto, o conjunto imagem de uma transformação linear é sempre não vazio (pois contém pelo menos o vetor nulo), ou seja,

$$Im(T) \neq \emptyset.$$

Imagem de uma Transformação Linear

Em uma representação esquemática, temos que o conjunto imagem de uma transformação linear $T: U \rightarrow V$ é tal que:



Veja que o conceito de conjunto Imagem de uma transformação linear é o mesmo que o conjunto imagem de uma função qualquer.

Exercício

Exercício 1) Considere $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y) = (5x - 2y, -3x + 4y, 7x + 8y).$$

a) Verifique se $u = (11, -15, -17)$ pertence à Imagem de T.

b) Verifique se $u = (1, -2, -3)$ pertence à Imagem de T.

c) Encontre todos os elementos que pertencem ao conjunto imagem de T.

Solução: Todos os itens foram resolvidos durante a aula.

Exemplo Resolvido

Exemplo 1) Considere $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y) = (7x - 3y, -5x + y, x - 4y)$.

a) Verifique se $v_1 = (-41, 19, -38)$ e $v_2 = (-10, 3, 45)$ pertencem à $Im(T)$.

b) Determine o conjunto $Im(T)$.

Solução: a) Para v_1, vamos determinar se existe algum $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$v_1 = T(u) = T(x,y)$$

ou seja,

$$(-41, 19, -38) = (7x - 3y, -5x + y, x - 4y).$$

Com isso, vamos analisar se o sistema linear admite solução:

$$\begin{cases} 7x - 3y = -41 \\ -5x + y = 19 \\ x - 4y = -38 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y = 19 + 5x \\ x - 4(19 + 5x) = -38 \end{array} \quad \Rightarrow \quad -19x = 38 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

$$y = 19 - 10 = 9$$

Substituindo na primeira equação, temos que $7.(-2) - 3.9 = -14 - 27 = -41$, que indica que o sistema admite solução (SPD), dada por $x = -2, y = 9$.

Portanto, existe $u = (-2, 9) \in \mathbb{R}^2$ tal que $v_1 = T(u) = T(-2,9)$ e com isso,

$$v_1 \in Im(T).$$

Exemplo Resolvido

Para v_2, vamos determinar se existe algum $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$v_2 = T(u) = T(x, y)$$

ou seja, $$(-10, 3, 45) = (7x - 3y, -5x + y, x - 4y).$$

Vamos analisar a existência de soluções para o sistema linear

$$\begin{cases} 7x - 3y = -10 \\ -5x + y = 3 \\ x - 4y = 45 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} y = 3 + 5x \\ x - 4(3 + 5x) = 45 \end{array} \quad \Rightarrow \quad -19x = 57 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} y = -12 \\ x = -3 \end{array}$$

Substituindo na primeira equação, temos $7.(-3) - 3.(-12) = -21 + 36 = +15 \neq -10$, que indica que o sistema não admite solução (é impossível).

Portanto, não existe $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $v_2 = T(u) = T(x, y)$ e com isso,

$$v_2 \notin Im(T).$$

Solução: b) Para encontrar o conjunto imagem de $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, vamos obter a expressão de um elemento genérico de $\mathbb{R}^3$ que pertença à $Im(T)$.

Para isso, seja $v = (a, b, c) \in Im(T)$. Logo, por definição, existe $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$v = T(u) = T(x, y).$$

Exemplo Resolvido

ou seja, tal que

$$(a, b, c) = (7x - 3y, -5x + y, x - 4y).$$

Com isso, obtemos um sistema linear, que deve ser possível:

$$\begin{cases} 7x - 3y = a \\ -5x + y = b \\ x - 4y = c \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} y = b + 5x \\ x - 4(b + 5x) = c \end{array} \Rightarrow \quad -19x = 4b + c \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4b + c}{-19}$$

$$y = b + 5.\left(\frac{4b + c}{-19}\right) = \frac{b + 5c}{-19}$$

Substituindo na primeira equação, obtemos que

$$7x - 3y = a \quad \Rightarrow \quad 7.\frac{4b + c}{-19} - 3.\frac{b + 5c}{-19} = a \quad \Rightarrow \quad 28b + 7c - 3b - 15c = -19a$$

ou seja

$$19a + 25b - 8c = 0.$$

Portanto:

$$Im(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3;\ 19a + 25b - 8c = 0\}.$$

Note que $v_1 = (-41, 19, -38)$ satisfaz a condição algébrica obtida, pois $v_1 \in Im(T)$.
enquanto $v_2 = (-10, 3, 45)$ não satisfaz a condição algébrica obtida, pois $v_2 \notin Im(T)$.

Conjunto Imagem é subespaço vetorial do contradomínio

Geometricamente, a equação do conjunto imagem do exemplo anterior representa um plano que passa pela origem, que consiste em um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Tal fato é sempre válido, conforme é generalizado pelo Teorema a seguir:

Teorema: Se $T: U \to V$ é uma transformação linear então $Im(T)$ é um subespaço vetorial do contradomínio V.

Justificativa: Sejam $v_1, v_2 \in Im(T)$ e $k \in \mathbb{R}$.
Por definição, existem $u_1, u_2 \in U$ tais que

$$v_1 = T(u_1) \qquad \text{e} \qquad v_2 = T(u_2).$$

Assim, pela linearidade da transformação:

$$v_1 + v_2 = \quad T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2)$$

e com isso, vemos que $v_1 + v_2 \in Im(T)$, pois é a imagem do vetor $u_1 + u_2 \in U$.

Além disso $kv_1 = kT(u_1) = T(ku_1)$ e $kv_1 \in Im(T)$, pois é a imagem do vetor $ku_1 \in U$.

Portanto, $Im(T)$ é um subconjunto de V fechado para a adição e para a multiplicação por escalar.

Isso significa que $Im(T)$ é um subespaço vetorial de V.

Base e dimensão para o Conjunto Imagem

Como a imagem de uma transformação linear T é um subespaço vetorial, podemos sempre obter uma base e a dimensão para $Im(T)$.

Exercício 2) Determine uma base e a dimensão para o conjunto imagem de $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y) = (5x - 2y, -3x + 4y, 7x + 8y).$$

Solução: O exercício foi resolvido durante a aula.

Exemplo Resolvido

Exemplo 2) Determine uma base e a dimensão para a imagem de $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x,y,z) = (x + 2y - 3z,\ 4x - 5y - 11z).$$

Solução: Seja $v \in Im(T)$. Logo, pela definição de imagem, existe $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$v = T(u) = T(x,y,z)$$

ou seja

$$v = (x + 2y - 3z, 4x - 5y - 11z)$$

Evidenciando as variáveis livres, obtemos

$$v = (x + 2y - 3z, 4x - 5y - 11z) = x(1,4) + y(2,-5) + z(-3,-11)$$

e com isso, obtemos os geradores para o conjunto imagem:

$$Im(T) = ger\{(1,4),(2,-5),(-3,-11)\}.$$

Como sabemos que $Im(T) \subset \mathbb{R}^2$, temos que

$$\dim\big(Im(T)\big) \leq \dim(\mathbb{R}^2) = 2.$$

Como temos três geradores para a imagem, sabemos que eles são obrigatoriamente LD. Por isso, precisamos descartar um desses geradores.

Exemplo

Para fazer isso, analisamos a combinação linear nula dos geradores:

$$a(1,4) + b(2,-5) + c(-3,-11) = (0,0)$$

que fornece o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a + 2b - 3c = 0 \\ 4a - 5b - 11c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -2b + 3c \\ 4(-2b + 3c) - 5b - 11c = 0 \end{matrix} \quad -8b + 12c - 5b - 11c = 0$$

$$a = 37b$$

$$c = 13b$$

Como b é uma variável livre, podemos descartar o segundo vetor gerador. Fazendo isso, obtemos que

$$\beta = \{(1,4); (-3,-11)\}.$$

é um conjunto gerador para a imagem que é linearmente independente.

Portanto, β é uma base para $Im(T)$ e

$$\dim\big(Im(T)\big) = 2.$$

Observações:

- No exemplo anterior, temos que $Im(T) \subset \mathbb{R}^2$ é tal que $\dim\big(Im(T)\big) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. Isso significa que, para esse exemplo, $Im(T) = \mathbb{R}^2$.
- Veja que o sistema homogêneo utilizado para verificar se os geradores de $Im(T)$ eram LI ou LD consiste no sistema que deve ser resolvido para obter o núcleo $N(T)$ de T.

Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem

Além disso, reunindo as informações do exemplo anterior e do Exemplo 3 da aula passada, temos que

$$\dim\big(Im(T)\big) = 2 \quad \text{e} \quad \dim\big(N(T)\big) = 1.$$

Com isso, vemos que

$$\dim\big(Im(T)\big) + \dim\big(N(T)\big) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

e $\mathbb{R}^3$ é justamente o domínio da transformação $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Esse fato sobre a soma das dimensões do núcleo e do conjunto imagem é um resultado geral, válido para qualquer transformação linear, conforme indica o Teorema a seguir:

Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem: Se $T: U \to V$ é uma transformação linear então

$$\dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = \dim(U).$$

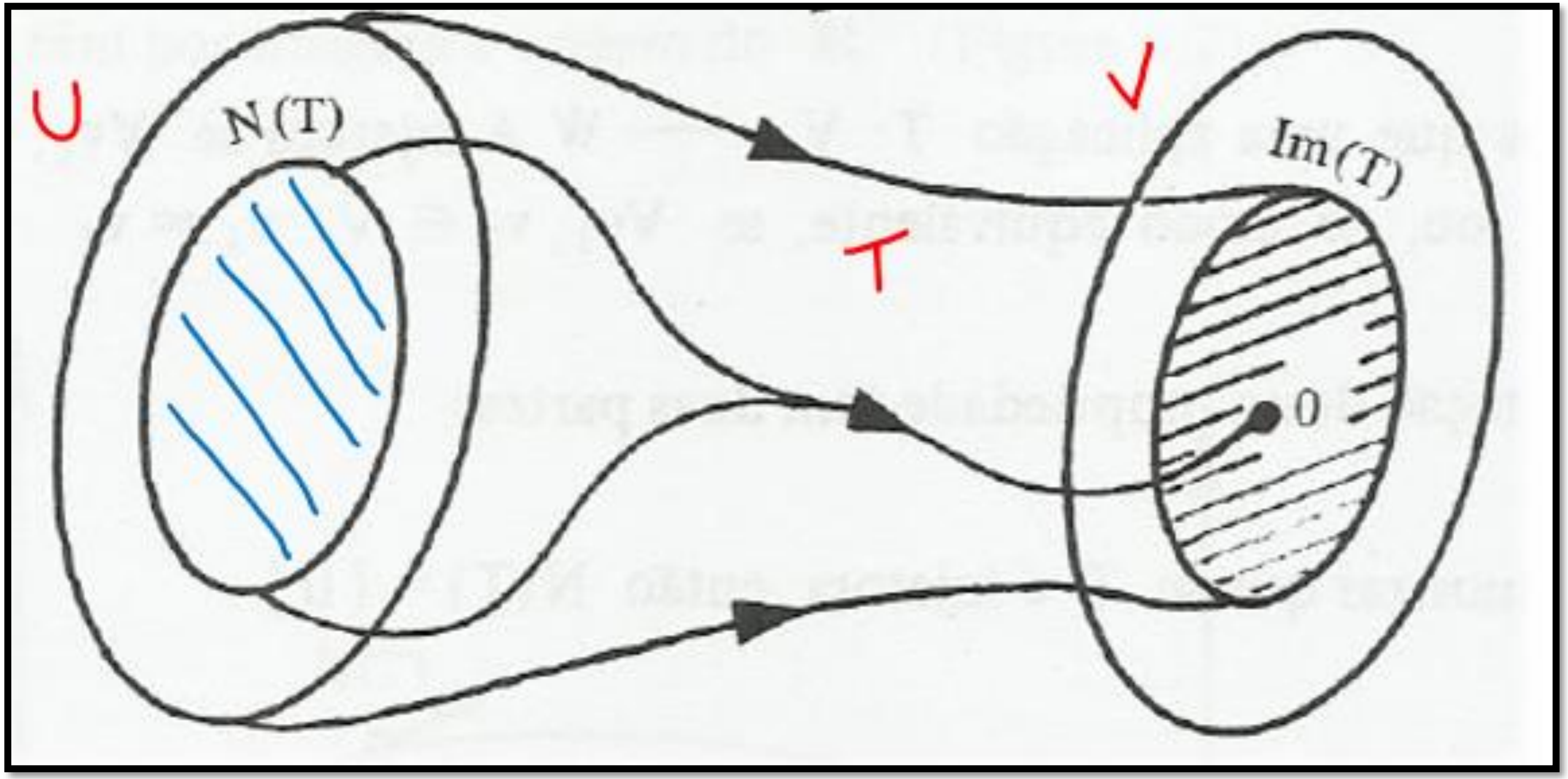
Justificativa Geométrica:

Veremos somente uma interpretação geométrica para o Teorema da Dimensão.

A justificativa algébrica para esse Teorema não é imediata, pois envolve a obtenção de uma base para U formada pela união de uma base para o núcleo com os elementos de U que dão origem à imagem.

Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem

A figura apresenta uma representação para o Núcleo e para a Imagem de $T: U \to V$.



Veja que, de forma intuitiva, o domínio U da transformação T é composto ou por elementos que estão no núcleo de T ou por elementos que formam a imagem de T.

Isso significa que o "tamanho" (dimensão) de U é dado pela soma entre os "tamanhos" (dimensões) do núcleo ($N(T)$) e da imagem ($Im(T)$) da transformação T.

Exercício

Exercício 4) Determine uma base e a dimensão para o núcleo e para o conjunto imagem da transformação linear $T: P_2 \to M(2,2)$ dada por

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} a+3b-4c & -2a-5b+c \\ 3a+7b+2c & 2a+9b-29c \end{bmatrix}.$$

Solução: O exercício foi resolvido durante a aula.

Exemplo Resolvido

Exemplo 3) Determine uma base e a dimensão para a imagem de $T: M(2,2) \to P_2$ dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b-c+d) + (2a-b+3c)x + (5a+2b+3d)x^2.$$

Solução: Seja $p(x) \in Im(T)$. Logo, pela definição, existe $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2)$ tal que

$$p(x) = T(A) = T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$

ou seja

$$\begin{aligned} p(x) &= (a+b-c+d) + (2a-b+3c)x + (5a+2b+3d)x^2 \\ &= a(1+2x+5x^2) + b(1-x+2x^2) + c(-1+3x) + d(1+3x^2) \end{aligned}$$

Logo,

$$Im(T) = ger\{1+2x+5x^2, 1-x+2x^2, -1+3x, 1+3x^2\}.$$

Ainda não sabemos se o conjunto gerador é uma base para a imagem de T.
Porém, no Exemplo 4 da aula passada vimos que

$$\dim\big(N(T)\big) = 2.$$

Pelo Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem, temos que

$$\dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = \dim(M(2,2)).$$

Exemplo Resolvido

Como $\dim(M(2,2)) = 4$, obtemos que

$$2 + \dim\big(Im(T)\big) = 4$$

E assim

$$\dim\big(Im(T)\big) = 4 - 2 = 2.$$

Com isso, temos que os quatro geradores obtidos são linearmente dependentes (LD).

Portanto, para obter uma base para $Im(T)$ precisamos descartar dois dos geradores.

Para descobrir quais vamos descartar, tomamos a combinação linear nula

$$a(1 + 2x + 5x^2) + b(1 - x + 2x^2) + c(-1 + 3x) + d(1 + 3x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$

que fornece o sistema homogêneo

$$\begin{cases} a + b - c + d = 0 \\ 2a - b + 3c = 0 \\ 5a + 2b + 3d = 0 \end{cases}.$$

Esse sistema foi resolvido no Exemplo 5 da aula passada, quando obtivemos que

$$b = 2a + 3c, \quad d = -3a - 2c$$

com $a, c \in \mathbb{R}$ (variáveis livres). Portanto, descartamos o primeiro e o terceiro gerador (associados às variáveis livres) e obtemos uma base para $Im(T)$ dada por

$$\beta_{Im(T)} = \{1 - x + 2x^2, 1 + 3x^2\}.$$

Exemplo Resolvido

Veja que nada foi pedido à respeito do Núcleo da transformação linear.

Mesmo assim, ao verificarmos se os geradores da Imagem são LI ou LD, o sistema associado corresponde às soluções para o Núcleo.

Por isso, quando for solicitado obter o núcleo e a imagem, vale a pena iniciarmos com o núcleo.

Exemplo 4) Determine uma base e a dimensão para a imagem de $T: P_2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(p(x)) = (4p(0),\ p(1),\ p(0) + 7p(1)).$$

Solução: Seja $u \in Im(T)$. Logo, pela definição, existe $p(x) = a + bx + cx^2 \in P_2$ tal que

$$\begin{aligned} u = T(p(x)) &= (4p(0), p(1), p(0) + 7p(1)) \\ &= (4(a + b.0 + c.0), a + b.1 + c.1, a + b.0 + c.0 + 7(a + b + c)) \\ &= (4a, a + b + c, 8a + 7b + 7c) \\ &= a(4,1,8) + b(0,1,7) + c(0,1,7). \end{aligned}$$

Logo

$$Im(T) = ger\{(4,1,8), (0,1,7)\}.$$

Ainda não sabemos se o conjunto gerador é uma base para a imagem de T.

Porém, no Exemplo 6 da aula passada vimos que $\dim(N(T)) = 1.$

Exemplo Resolvido

Pelo Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem, temos que

$$\dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = \dim(P_2)$$

ou seja

$$1 + \dim\big(Im(T)\big) = 3$$

e então

$$\dim\big(Im(T)\big) = 3 - 1 = 2.$$

Portanto, sabemos que qualquer base para a $Im(T)$ deve ser formada por dois vetores.

Como temos somente dois geradores para a $Im(T)$, concluímos que eles são obrigatoriamente LI.

Portanto, uma base para a imagem de T é

$$\beta_{IM(T)} = \{(4,1,8),(0,1,7)\}.$$

Observação:

- Veja que a aplicação do Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem simplifica os cálculos relacionados à determinação da independência/dependência linear.
- Além disso, o Teorema da Dimensão permite comprovar se as dimensões obtidas estão corretas.

Exemplo Resolvido

Exemplo 5) Determine uma base e as dimensões para o núcleo e para a imagem de $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ que satisfaz as condições

$$T(1,0,-1) = 1 - 2x + x^2,$$
$$T(0,1,-1) = 4 - x - x^2,$$

e

$$T(-1,2,-2) = 6 - 5x + x^2.$$

Solução: Primeiro devemos obter a lei de T.

Para isso, note que $\{(1,0,-1),(0,1,-1),(-1,2,-2)\}$ é LI e portanto, forma uma base para $\mathbb{R}^3$.

Assim, para $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ temos que existem a,b,c tais que

$$(a,b,c) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1) + z(-1,2,-2)$$
$$= (x - z, y + 2z, -x - y - 2z)$$

Portanto, obtemos um sistema linear que deve ser possível:

$$\begin{cases} a = x - z \\ b = y + 2z \\ c = -x - y - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = a + z \\ y = b - 2z \\ c = -(a + c) - (b - 2z) - 2c \\ c = -a - z - b + 2z - 2z \end{array}$$

$$x = a + (-a - b - c)$$
$$= -b - c$$
$$y = b - 2(-a - b - c)$$
$$= 2a + 3b + 2c$$
$$z = -a - b - c$$

Exemplo Resolvido

Portanto, obtemos

$$(a,b,c) = (-b-c)(1,0,-1) + (2a+3b+2c)(0,1,-1) + (-a-b-c)(-1,2,-2)$$

Aplicando T em ambos os lados e usando a linearidade, temos que

$$T(a,b,c) = (-b-c)T(1,0,-1) + (2a+3b+2c)T(0,1,-1) + (-a-b-c)T(-1,2,-2)$$

e usando as informações dadas no enunciado, encontramos

$$\begin{aligned} T(a,b,c) &= (-b-c)(1-2x+x^2) + (2a+3b+2c)(4-x-x^2) + \\ &\quad +(-a-b-c)(6-5x+x^2) \\ &= (-b-c+8a+12b+8c-6a-6b-6c) \\ &\quad +(2b+2c-2a-3b-2c+5a+5b+5c)x \\ &\quad +(-b-c-2a-3b-2c-a-b-c)x^2 \\ &= (2a+5b+c) + (3a+4b+5c)x + (-3a-5b-4c)x^2 \end{aligned}$$

Agora podemos obter o núcleo de T.

Seja $u = (a,b,c) \in N(T)$. Logo, pela definição, de núcleo, temos que $T(u) = \vec{0}_{P_2}$, ou seja,

$$(2a+5b+c) + (3a+4b+5c)x + (-3a-5b-4c)x^2 = 0 + 0x + 0x^2.$$

Logo, devemos resolver o sistema homogêneo dado por

Exemplo Resolvido

$$\begin{cases} 2a + 5b + c = 0 \\ 3a + 4b + 5c = 0 \\ -3a - 5b - 4c = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por escalonamento da matriz dos coeficientes:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -3 & -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \\ -3 & -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -L_1 \\ L_2 + 3L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \frac{1}{7} L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 + 8L_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, obtemos que

$$\begin{cases} a - b + 4c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3c \\ b = c \end{cases}$$

Com isso, obtemos que $u = (a, b, c) \in N(T)$ é tal que

$$u = (-3c, c, c) = c(-3,1,1)$$

Então $N(T) = ger\{(-3,1,1)\}$.

Como obtemos um único gerador, ele é LI e uma base para $N(T)$ é dada por

Exemplo Resolvido

$$\beta_{N(T)} = \{(-3,1,1)\}$$

e $\dim\big(N(T)\big) = 1$.

Para obter uma base para a imagem de T, consideramos $p(x) \in Im(T)$.

Logo, pela definição, existe $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned} p(x) = T(u) &= T(a, b, c) \\ &= (2a + 5b + c) + (3a + 4b + 5c)x + (-3a - 5b - 4c)x^2 \\ &= a(2 + 3x - 3x^2) + b(5 + 4x - 5x^2) + c(1 + 5x - 4x^2). \end{aligned}$$

Logo

$$Im(T) = ger\{2 + 3x - 3x^2, 5 + 4x - 5x^2, 1 + 5x - 4x^2\}.$$

Para verificar se os geradores da imagem de T são LI ou LD, aplicamos o Teorema da Dimensão:

$$\dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = \dim(\mathbb{R}^3)\,,$$

ou seja,

$$1 + \dim\big(Im(T)\big) = 3$$

E então

$$\dim\big(Im(T)\big) = 2.$$

Exemplo

Exemplo 6) Determine uma base e a dimensão para a imagem de $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ dada por

$$T(a,b,c) = (a - 2b + c) + (3a + b - c)x + 5cx^2.$$

Solução: Seja $u \in Im(T)$. Logo, pela definição, existe $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$tal que

$$\begin{aligned} u = T(u) &= T(a,b,c) \\ &= (a - 2b + c) + (3a + b - c)x + 5cx^2 \\ &= a(1 + 3x) + b(-2 + x) + c(1 - x + 5x^2) \end{aligned}$$

Logo

$$Im(T) = ger\{1 + 3x, -2 + x, 1 - x + 5x^2\}.$$

Ainda não sabemos se o conjunto gerador é uma base para a imagem de T.
Porém, no exemplo 7 da aula passada vimos que

$$\dim\big(N(T)\big) = 0.$$

E pelo Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem, temos que

$$\dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = \dim(\mathbb{R}^3),$$

ou seja,

$$0 + \dim\big(Im(T)\big) = 3$$

E então

$$\dim\big(Im(T)\big) = 3.$$

Exemplo e Exercícios

Portanto, sabemos que qualquer base para a $Im(T)$ deve ser formada por três elementos.

Como temos três geradores para a $Im(T)$, concluímos que eles são obrigatoriamente LI.

Portanto, uma base para a imagem de T é

$$\beta_{Im(T)} = \{1 + 3x, -2 + x, 1 - x + 5x^2\}.$$

Além disso, como

$$\dim\big(Im(T)\big) = 3 = \dim(P_2)\,,$$

obtemos que $Im(T) = P_2$, ou seja, o conjunto imagem de $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ é igual a todo o contradomínio.

Futuramente, chamaremos esse tipo de transformação de “Sobrejetora”.