UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA	CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS (CCT) DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA (DMAT) GRUPO COLABORATIVO DE ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR*

GABARITO DA PRIMEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS DE ALI-0001**

Respostas:

1. $a)\ 7 \times 13.$ $b)\ 13 \times 9$ $c)\ 7 \times 9.$ $d)\ 13 \times 13.$ $e)\ 9 \times 9.$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}.$

3. a) Verdadeira. b) Verdadeira se e somente se U e V tiverem a mesma ordem.
c) Verdadeira. d) Verdadeira. e) Falsa. f) Falsa.

4. a) Verdadeira. b) Falsa. A matriz nula é tanto simétrica quanto antissimétrica.
c) Falsa. d) Verdadeira. e) Falsa. f) Verdadeira.
g) Falsa. h) Verdadeira. i) Verdadeira. j) Falsa.
k) Verdadeira. l) Verdadeira. m) Falsa. $A - A^T$ é sempre antissimétrica, mas AA^T não o é.
n) Verdadeira. o) Verdadeira. p) Verdadeira.

5. Ao supor que AB é uma matriz antissimétrica e calcular esse produto, é possível encontrar que x=-1 e $y = 5$. Substituindo esses valores em A e B e calculando o produto BA, pode-se verificar que BA não é antissimétrica e nem invertível.

6. a) Verdadeira. b) Verdadeira. c) Falsa. d) Verdadeira.

7. a) SPI. Solução: $x = \frac{-41}{4} + \frac{1}{4}z;\quad y = \frac{29}{8} - \frac{13}{8}z;\quad z \in \mathbb{R}.$

b) Sistema impossível.

c) SPI. Solução: $y = 19 - 8x;\quad z = 5 - 2x;\quad x \in \mathbb{R}.$

d) Sistema impossível

e) SPI. Solução: $x = 2 + z;\quad y = 2;\quad z \in \mathbb{R}.$

f) SPD. Solução: $x = 4\ ;\ y = -3.$

* Professores participantes do Grupo Colaborativo no semestre 2023/1: Graciela Moro, Ivanete Zuchi Siple, Katiani da Conceição Loureiro e Marnei Mandler..

g) SPD. Solução: $x = 1\ ;\ \ y = 0;\ \ z = 3\ ;\ \ w = 2.$

h) SPD. Solução: $x = \dfrac{21}{5}\ ;\ \ y = \dfrac{13}{25}\ z = \dfrac{-63}{25};\quad w = \dfrac{13}{5}.$

8. A partir do escalonamento da matriz ampliada do sistema dado, obtém-se o sistema equivalente

$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$. Dessa forma, o sistema original admite uma única solução, dada por $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$

9. $x_1 = 1 - 3x_2 - x_5;\quad x_3 = 2 + x_5;\quad x_4 = 3 + 2x_5;$ com $x_2, x_5 \in \mathbb{R}$.

10. $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$

11. a) $a = 9,\ \ b = 24,\ \ c = -65,\ \ d = 1,\ \ e = 14,\ \ f = 5,\ \ g = 45,\ \ h = 134.$

b) $X = \begin{bmatrix} -979 \\ -143 \\ 134 \end{bmatrix}.$

12. a) $a = -5,\ \ b = 8,\ \ c = -38,\ \ d = -22,\ \ e = -1,\ \ f = 9,\ \ g = -13,\ \ h = -4.$

b) $X = \begin{bmatrix} 61 \\ 31 \\ 2 \end{bmatrix}.$

13. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 22/7 \\ 0 & 1 & 0 & -11/7 \\ 0 & 0 & 1 & -17/7 \end{bmatrix},\quad posto(A) = 3\quad nulidade(A) = 1.$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ posto(A) = 2\quad nulidade(A) = 1.$

14. A nulidade de uma matriz **não nula** de ordem 3×5 pode ser igual a $4, 3$ ou 2. A nulidade de uma matriz **não nula** de ordem 4×2 pode ser igual a 1 ou 0.

15. a) $posto(A) \leq 4;\quad nulidade(A) \geq 0$ b) $posto(A) \leq 3;\quad nulidade(A) \geq 2$

c) $posto(A) \leq 3;\quad nulidade(A) \geq 0$ d) $posto(A) \leq 6;\quad nulidade(A) \geq 3$

16. a) $posto(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } t = 1 \\ 2, & \text{se } t = -2 \\ 3, & \text{se } t \neq 1 \text{ e } t \neq -2 \end{cases}$

b) $posto(A) = \begin{cases} 2, & \text{se } t = 1 \text{ ou } t = \frac{3}{2} \\ 3, & \text{se } t \neq 1 \text{ e } t \neq \frac{3}{2} \end{cases}$

17. O posto de A é igual a dois se, e somente se, $r = 2$ e $s = 1$. O posto de A nunca é igual a um.

18. $k = -6$.

19. a) $a = 5$ e $b = 4$. b) $a \neq 5$ e $b \in R$. c) $a = 5$ e $b \neq 4$.

20. a) $a \neq 0$ **e** $b \neq 2$. b) $a = 0$ **ou** $b \neq 2$. c) $a = 0$ **e** $b = 2$.

21. $3a + b - c = 0$.

22. a) $k \neq 3$ e $k \neq -3$. b) $k = 3$ c) $k = -3$.

23. a) $k = 3$ **ou** $k = -4$. b) não existe valor de *k* para o qual o sistema seja SPD.

c) $k \neq 3$ **e** $k \neq -4$.

24. a) $k = 68$. b) $k \neq 68$ ou $k \neq 4$. c) $k = 4$. Nesse caso, as infinitas soluções são dadas por $x = -6 - 39t$, $y = -2 + 7t$, $z = -7 - 7t$, com $t \in \mathbb{R}$.

25. a) $k = 64$. b) $k \neq 64$ ou $k \neq 5$. c) $k = 5$. Nesse caso, as infinitas soluções são dadas por $x = -28 + 244t$, $y = -9 + 73t$, $z = -6 + 39t$, com $t \in \mathbb{R}$.

26. a) i) sistema impossível

ii) sistema possível e indeterminado, com uma variável livre.

iii) sistema possível e indeterminado, com quatro variáveis livres.

iv) sistema possível e determinado.

v) sistema possível e indeterminado, com três variáveis livres.

b) Lembre-se que sistemas homogêneos sempre admitem solução! Assim, em todos os casos o sistema homogêneo é possível. Ainda:

i) Existem infinitas soluções, com uma variável livre.

ii) Existem infinitas soluções, com uma variável livre.

iii) Existem infinitas soluções, com quatro variáveis livres.

iv) Existe uma única solução (nenhuma variável livre).

v) Existem infinitas soluções, com três variáveis livres.

27. Lembre-se que a nulidade de uma matriz está relacionada à quantidade de variáveis livres de um sistema linear.

28. a) É a solução $X = 0$, ou seja, em que todas as incógnitas/variáveis são iguais a zero.

b) $k = 2$.

29. Sim, pois a matriz dos coeficientes desse sistema tem posto no máximo igual a 3. Com isso, a nulidade dessa matriz é no mínimo igual a 1. Assim, esse sistema admite pelo menos uma variável livre e haverá infinitas soluções. Portanto, existem soluções distintas da trivial.

30. Sim. Como $\det(A) = 0$, a matriz dos coeficientes desse sistema não é invertível e, por isso, não existe solução única. Como o sistema é homogêneo, ele sempre admite solução. Portanto, existem infinitas soluções.

31. Se o posto da matriz ampliada e o posto da matriz dos coeficientes forem ambos iguais a quatro, o sistema tem única solução. Se esses postos forem iguais, mas menores do que quatro, o sistema tem infinitas soluções. Se esses postos forem diferentes, o sistema é impossível.

32. a) Verdadeira. b) Verdadeira. c) Verdadeira

33. a) O sistema $AX = 0$ admite somente a solução trivial, pois $posto(A) = 4$.

b) Tal sistema é $\begin{cases} 2x + y - 3z = 18 \\ -x + y + 4z = -23 \\ 5x + y - 10z = 59 \end{cases}$. Existem infinitas soluções para esse sistema, que é SPI.

34. Não existem tais valores para k, pois um sistema homogêneo sempre admite pelo menos a solução trivial.

35. a) $t = 3$ ou $t = -1$ b) $t = -5$ ou $t = 0$ ou $t = 4$ c) $t = -3$ ou $t = 0$ ou $t = 1$.

36. a) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} 185 \\ 5 \\ 98 \end{bmatrix}$ c) $X = \begin{bmatrix} 3160 \\ -1990 \\ -910 \end{bmatrix}$ d) $X = \begin{bmatrix} 111 \\ 89 \\ 89 \end{bmatrix}$.

37. $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

38. $X = AB^{-2}$.

39. As soluções são:

a) $\begin{cases} s = \pi^2 \\ t = 2\pi \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = \frac{1}{5} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 = 1 + 4x_2 + x_5 \\ x_3 = 4 + 2x_5 \\ x_4 = -\frac{3}{2} + 3x_5 \end{cases}$ d) Esse sistema é impossível.

40. É possível utilizar o método da inversa somente nos itens a e b. Faça isso e encontre, em cada item, a seguinte inversa das matrizes dos coeficientes:

a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 + \pi/15 & \pi/3 \\ 1/15 & 1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3+\pi & 5\pi \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -8/25 & 0 & -3/5 \\ 0 & 8/25 & 0 & 3/5 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/25 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 25 & -32 & 0 & -60 \\ 0 & 32 & 0 & 60 \\ -50 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 20 \end{bmatrix}$

41. a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 27 & 82 \\ -4 & -21 & -63 \\ 1 & 5 & 15 \end{bmatrix}$ b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & -5 & 5/3 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ c) não existe A^{-1}

42. Perceba que a matriz dos coeficientes dos três sistemas é a mesma. Com isso, basta calcular a inversa apenas da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e obter $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -25 & 13 \\ -1 & 10 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Assim:

a) Se $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$ então $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Se $X = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ então $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

c) Se $X = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ então $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -66 \\ 27 \\ 5 \end{bmatrix}$.

43. a) Note que é preciso separar a demonstração em dois casos, dependendo da entrada da primeira linha e primeira coluna:

i) Se $a \neq 0$ então a redução à forma escalonada da matriz M consiste na matriz identidade. E com isso pode-se concluir que o sistema só tem a solução trivial.

ii) Se $a = 0$ então uma troca da primeira com a segunda linha faz com que o problema recaia no caso anterior, em que a primeira entrada da primeira linha não é zero. Note que nesse caso c não será zero, pois senão ocorreria $ad - bc = 0.d - b.0 = 0$, o que contradiz a hipótese.

b) Basta escalonar a matriz $[M \mid I]$ até obter a matriz $[I \mid M^{-1}]$.

44. A situação é modelada por um sistema possível e indeterminado (SPI). Em todas as infinitas soluções, deve-se obter 60 livros luxo. As quantidades de livros de capa mole (x) e de capa dura (y) devem satisfazer a relação $x = 180 - 2y$, com $y \leq 90$.

45. Serão necessários 1920 projéteis.

46. a) A solução do sistema é $\begin{cases} x_1 = 300 - x_4 \\ x_2 = -50 + x_4 \\ x_3 = 150 - x_4 \end{cases}$.

b) No contexto do problema, x_4 deve ser um número natural. Pela análise das soluções obtidas, encontra-se que $50 \leq x_4 \leq 150$. Assim, pode-se fazer, por exemplo, $x_4 = 100$ ou $x_4 = 75$. Obtenha os valores das outras incógnitas para esses valores.

c) 150 veículos.

47. A lei da função desejada é $p(x) = 24 - 28x + 8x^2$.

48. A solução do sistema é $\begin{cases} x_1 = x_6 \\ x_2 = x_7 \\ x_3 = 600 - x_6 \\ x_4 = x_6 - x_7 \\ x_5 = 500 - x_7 \end{cases}$.

a) $x_1 = 100$ $x_2 = 100$ $x_3 = 500$ $x_4 = 0$ $x_5 = 400$ $x_6 = 100$ $x_7 = 100$

b) $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 600$ $x_4 = 0$ $x_5 = 500$ $x_6 = 0$ $x_7 = 0$

c) Quando $x_5 = 1000$ não existe solução que faça sentido para o problema, pois senão teríamos $x_7 = -500 < 0$.

49. A solução do sistema é $\begin{cases} x_1 = 100 + x_4 \\ x_2 = -100 + x_4 \\ x_3 = 200 + x_4 \end{cases}$.

a) Quando $x_4 = 0$ não existe solução que faça sentido para o problema, pois $x_2 = -100 < 0$.

b) $x_1 = 200$ $x_2 = 0$ $x_3 = 300$ $x_4 = 100$.

c) $x_1 = 400$ $x_2 = 200$ $x_3 = 500$ $x_4 = 300$.

50) a) O sistema correspondente é $\begin{cases} x - t = -45 \\ -x + y = 25 \\ -y + t = 20 \\ -z + t = -40 \end{cases}$, com $x, y, z, t \geq 0$.

b) i) 25 veículos ii) 40 veículos iii) 45 veículos.

c) A solução é $x = 30$ veículos, $y = 55$ veículos, $z = 115$ veículos, $t = 75$ veículos.