Álgebra Linear
(ALI0001 – CCI-192-02U)

Conjuntos Fechados –
Exemplos e interpretação geométrica

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula do dia 22 de março de 2023.

UDESC

Revisão: Conjuntos Fechados

Definição: Seja H um conjunto qualquer não vazio, no qual estejam definidas as operações de adição e de multiplicação por escalar. Define-se que:

- H é fechado para adição se, e somente se, dados quaisquer dois elementos u e v que pertencem a H, a soma $u + v$ também é um elemento que pertence a H.

Simbolicamente: $\forall\, u, v \in H,\ u + v \in H.$

- H é fechado para a multiplicação por escalar se, e somente se, dado qualquer elemento u que pertence a H e qualquer escalar $k \in \mathbb{R}$, a multiplicação escalar ku também é um elemento que pertence a H.

Simbolicamente: $\forall\, u \in H, \forall k \in \mathbb{R},\quad ku \in H.$

- Quando H é simultaneamente fechado para as operações de adição e de multiplicação por escalar, H é dito simplesmente um conjunto fechado.

OBSERVAÇÕES: A definição de conjunto fechado também pode ser aplicada quando H é um subconjunto (não vazio) de outro conjunto.

A nomenclatura "fechado" é relativamente intuitiva: indica que, ao operarmos (pela adição ou multiplicação por escalar) com elementos de um conjunto fechado, o resultado sempre permanece "dentro" do conjunto, ou seja, nunca resulta em um elemento "fora" desse conjunto.

Exemplos

Exemplo 1) Verifique se os conjuntos abaixo são ou não fechados para as operações usuais de adição e/ou de multiplicação por escalar:

a) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \;\; y = 5x^2\}$.

b) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \;\; 4x - 2y + 3z = 0\}$.

c) $H = \{A_{n\times n}; \;\; A \text{ é antissimétrica}\}$.

d) $H = \{A_{2\times 2}; \; \det(A) \neq 0\}$.

e) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ e } y > 0\}$.

Solução: Todos os itens, com exceção do (d), foram resolvidos durante a aula.

Exemplo 2) Considere o conjunto $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ e } y > 0\}$, munido das seguintes operações não usuais de adição e de multiplicação por escalar dadas por

$$(x, y) + (a, b) = (xa, yb)$$

$$k(x, y) = \left(x^k, y^k\right).$$

Verifique se H é fechado em relação a tais operações.

Solução: O exemplo foi resolvido durante a aula, mostrando que com o conjunto é fechado para as duas operações não usuais.

Exemplos

Exemplo 3) Verifique se os conjuntos abaixo são ou não fechados para as operações usuais de adição e/ou de multiplicação por escalar:

a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ 3x - 7y + 5z = 0\}$

Solução: Sejam $u = (x, y, z) \in U$ e $v = (a, b, c) \in U$. Logo, pela condição algébrica do conjunto:

$$3x - 7y + 5z = 0 \qquad \text{e} \qquad 3a - 7b + 5c = 0.$$

Assim, temos que:

$i)$ $u + v = (x + a, y + b, z + c)$ é tal que

$$\begin{aligned} 3(x + a) - 7(y + b) + 5(z + c) &= 3x + 3a - 7y - 7b + 5z + 5c \\ &= (3x - 7y + 5z) + (3a - 7b + 5c) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

e então $u + v \in U$, pois satisfaz sua condição algébrica e U é fechado para a adição usual.

$ii)$ $ku = (kx, ky, kz)$ é tal que

$$3(kx) - 7(ky) + 5(kz) = k(3x - 7y + 5z) = k.0 = 0.$$

e então $ku \in U$, pois satisfaz sua condição algébrica.

Portanto, U é fechado para a multiplicação por escalar usual.

Exemplos

b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ \ 3x - 7y + 5z = 6\}$.

Solução: Note que U é o conjunto de todos os vetores de um plano que **não** passa pela origem.

Sejam $u = (x, y, z) \in U$ e $v = (a, b, c) \in U$. Logo, pela condição algébrica do conjunto:

$$3x - 7y + 5z = 6 \quad \text{e} \quad 3a - 7b + 5c = 6.$$

Assim, temos que:

$i)$ $u + v = (x + a, y + b, z + c)$ é tal que

$$\begin{aligned} 3(x+a) - 7(y+b) + 5(z+c) &= 3x + 3a - 7y - 7b + 5z + 5c \\ &= (3x - 7y + 5z = 0) + (3a - 7b + 5c) \\ &= 6 + 6 = 12 \neq 6. \end{aligned}$$

Logo, $u + v \notin U$, pois suas coordenadas não satisfazem a condição imposta por U.

Portanto, U **não** é fechado para a adição usual.

OBS: Outra forma de mostrar que U **não** é um fechado para a adição usual é utilizando um contraexemplo:

$$u = (2, 0, 0) \in U \quad \text{e} \quad v = (0, 2, 4) \in U, \quad \text{porém } u + v = (2, 2, 4) \notin U.$$

Exemplos

Além disso, para $k \in \mathbb{R}$ temos que

$i)$ $ku = (kx, ky, kz)$ é tal que

$$3(kx) - 7(ky) + 5(kz) = k(3x - 7y + 5z) = k.6 = 6k \neq 6,$$

para $k \neq 1$.

Logo, $ku \notin U$, pois suas coordenadas não satisfazem a condição imposta por U.

Portanto, U **não** é fechado para a multiplicação por escalar usual.

c) $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = -\frac{1}{3}x^2\right\}$.

Solução: Sejam $u = (x, y)$ e $v = (a, b)$ $\in U$. Logo, pela condição algébrica do conjunto:

$$y = -\frac{1}{3}x^2 \qquad \text{e} \qquad b = -\frac{1}{3}a^2.$$

Assim, será que $u + v = (x + a, y + b) \in U$?

Como

$$(y + b) = -\frac{1}{3}x^2 + -\frac{1}{3}a^2 = -\frac{1}{3}(x^2 + a^2) \neq -\frac{1}{3}(x + a)^2,$$

temos que $u + v \notin U$, pois não satisfaz a condição que define o conjunto.

Exemplos

Portanto, U não é fechado para a adição usual.

Além disso, para $k \in \mathbb{R}$ temos que

$$ku = (kx, ky)$$

é tal que

$$3(kx) - 7(ky) + 5(kz) = k(3x - 7y + 5z) = k.6 = 6k \neq 6,$$

para $k \neq 1$. Logo, $ku \notin U$, pois suas coordenadas não satisfazem a condição de U.

Portanto, U **não** é fechado para a multiplicação por escalar usual.

A figura ao lado contém uma interpretação geométrica para o não fechamento da adição usual em U.

Note que u e v pertencem a U, pois suas extremidades pertencem à parábola de equação $y = -\frac{1}{3}x^2$.

No entanto, a resultante $u + v \notin U$, pois sua extremidade é um ponto que não pertence à essa Parábola.