Álgebra Linear
(ALI0001 – CCI-192-02U)

Espaços Vetoriais

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula do dia 27 de março de 2023.

UDESC

Espaços Vetoriais – Definição

Definição: Seja V um conjunto não vazio, de quaisquer elementos, no qual estão definidas duas operações, a **adição (+)** e a **multiplicação por escalar (.)**.

Dizemos que a estrutura $(V,+,.)$ é um **espaço vetorial** e que os elementos de V são vetores se, e somente se:

$i)$ V é um conjunto **fechado** para as operações de adição **e** de multiplicação por escalar.

$ii)$ Os seguintes **axiomas** são satisfeitos para quaisquer elementos $u, v, w \in V$ e quaisquer escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$A_1)$ A adição é comutativa: $u + v = v + u$.

$A_2)$ A adição é associativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$.

$A_3)$ A adição admite elemento neutro (nulo): Existe $\overrightarrow{0_V} \in V$ tal que $v + \overrightarrow{0_V} = v = \overrightarrow{0_V} + v$ para todo $v \in V$.

$A_4)$ A adição admite oposto: Para cada $v \in V$, existe $-v \in V$ tal que $-v + v = \overrightarrow{0_V}$.

$M_5)$ A multiplicação por escalar é associativa: $(\alpha\beta)v = \alpha.(\beta v)$.

$M_6)$ Distributividade sobre a adição de escalares: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.

$M_7)$ Distributividade sobre a adição de vetores: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

$M_8)$ A multiplicação por escalar admite elemento neutro: $1.v = v$ para todo $v \in V$.

Exemplo de Espaço Vetorial

Exemplo 1) Considere o conjunto

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x > 0 \ \text{ e } \ y > 0\}.$$

munido das seguintes operações não usuais de adição e de multiplicação por escalar:

$$(x, y) + (a, b) = (x.a, y.b)$$

$$k(x, y) = \left(x^k, y^k\right).$$

Verifique se $(\mathrm{V}, +, .)$, com tais operações, é ou não um espaço vetorial.

Solução: Exemplo resolvido em aula, com a verificação do fechamento (na aula do dia 22/03) e dos oito axiomas (na aula do dia 27/03), provando que V, com tais operações não usuais, é um espaço vetorial.

Exemplo de Espaço Vetorial

Exemplo 2) Considere o conjunto

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \;\; x > 0 \;\text{ e }\; y > 0\}.$$

munido das seguintes operações não usuais de adição e de multiplicação por escalar:

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$

$$k(x, y) = \left(x^k, y^k\right).$$

Verifique se $(\mathrm{V}, +, .)$, com tais operações, é ou não um espaço vetorial.

Solução: Exemplo resolvido em aula, com a verificação de que a propriedade M_6 não é satisfeita para essas operações. Portanto, V com tais operações não usuais, NÃO é um espaço vetorial.

Exemplo de Espaço Vetorial

Exemplo 3) Considere o conjunto

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}.$$

munido das seguintes operações não usuais de adição e de multiplicação por escalar:

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y.b)$$

$$k(x, y) = \left(kx, y^k\right).$$

Verifique se $(\mathrm{V}, +, .)$, com tais operações, é ou não um espaço vetorial.

Solução: Exemplo discutido em aula, sem a resolução formal.

É possível verificar que V com tais operações não usuais, satisfaz todas as condições necessárias e é um espaço vetorial.

O elemento neutro aditivo é $\overrightarrow{0_V} = (0, 1) \in V$ e o elemento oposto de $u = (a, b) \in V$ é o elemento $-u = \left(-a, \frac{1}{b}\right) \in V$.

Exemplo de Espaço Vetorial

Exemplo 4) Considere o conjunto

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}.$$

munido das seguintes operações não usuais de adição e de multiplicação por escalar:

$$(x, y) + (a, b) = (x.a, y + b)$$

$$k(x, y) = \left(x^k, ky\right).$$

Verifique se $(\mathrm{V}, +, .)$, com tais operações, é ou não um espaço vetorial.

Solução: Exemplo discutido em aula, sem a resolução formal.

É possível verificar que V com tais operações não usuais, satisfaz todas as condições necessárias e é um espaço vetorial.

O elemento neutro aditivo é $\overrightarrow{0_V} = (1, 0) \in V$ e o elemento oposto de $u = (a, b) \in V$ é o elemento $-u = \left(\frac{1}{a}, -b\right) \in V$.

Exemplos Clássicos de Espaços Vetoriais

- Dentre os diferentes conjuntos que, com operações apropriadas de adição e de multiplicação por escalar, são considerados espaços vetoriais, destacaremos três exemplos clássicos, que serão bastante utilizados em ALI.
- Esses exemplos nos permitirão ver que $n-uplas$ coordenadas, polinômios de grau menor ou igual a n ou matrizes de ordem $m \times n$, apesar de possuírem naturezas totalmente distintas, se comportam exatamente da mesma forma em relação à adição e à multiplicação por escalar.
- É esse comportamento único que nos interessa quando estudamos espaços vetoriais.

Exemplo 5) Para cada número natural n, considere o conjunto de todas as $n-uplas$ coordenadas de números reais, definido por

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \ / \ x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Em $\mathbb{R}^n$ definimos as operações usuais de adição e de multiplicação por escalar como

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n),$$

$$k.(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (kx_1, kx_2, kx_3, \dots, kx_n) \text{ para qualquer } k \in \mathbb{R}.$$

É possível verificar (sem dificuldades) que $\mathbb{R}^n$ é fechado para as operações usuais de adição e multiplicação por escalar e que as operações satisfazem os axiomas (de A_1 a M_8).

Portanto, $\mathbb{R}^n$ com as operações usuais é um espaço vetorial, denominado por espaço vetorial euclidiano $n-dimensional$.

Exemplos Clássicos de Espaços Vetoriais

Exemplo 6) Fixados os naturais m e n, definimos o conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$, denotado por

$$M(m,n) = \left\{ \left[a_{ij}\right]_{m\times n} \ / \ a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Em $M(m,n)$ definimos as operações usuais de adição de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar escalar como

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[b_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n},$$
$$k\left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[ka_{ij}\right]_{m\times n}.$$

É possível verificar (sem dificuldades) que $M(m,n)$ é fechado para as operações usuais de adição e multiplicação por escalar e que as operações satisfazem todos os axiomas (de A_1 a M_8). Inclusive, a maior parte dos axiomas foi demonstradas na aula de revisão de Matrizes.

Portanto, $M(m,n)$ com as operações usuais é um espaço vetorial e os elementos pertencentes a $M(m,n)$ (que são matrizes) podem ser denominados por vetores.

No caso particular em que $m = n$, o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem n pode ser denotado por

$$M_n = M(n,n).$$

Exemplos Clássicos de Espaços Vetoriais

Exemplo 7) Fixado o natural n, definimos o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a n, denotado por

$$P_n = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \ / \ a_i \in \mathbb{R} \ \}.$$

Em P_n definimos as operações usuais de adição de polinômios e de multiplicação de um polinômio por um escalar como

$$(a_0+a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) =$$
$$(a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \cdots + (a_n+b_n) + x^n$$

$$k(a_0+a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = (ka_0) + (ka_1)x + (ka_2)x^2 + \cdots + (ka_n)x^n.$$

É possível verificar (sem dificuldades) que P_n é fechado para as operações usuais de adição e multiplicação por escalar e que as operações satisfazem todos os axiomas (de A_1 a M_8).

Portanto, P_n com as operações usuais é um espaço vetorial e os elementos pertencentes a P_n (que são funções polinomiais na variável x) podem ser denominados por vetores.

No caso particular em que $n = 3$, podemos denotar o espaço vetorial P_3 por

$$P_3 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \ / \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \ \}.$$

Exemplo

Exemplo 8) Prove que o conjunto $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = -2x\}$, com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar, é um espaço vetorial.

Solução: Como provamos na aula do dia 20/03 que V é fechado para as operações de adição e de multiplicação por escalar, precisamos apenas verificar os oito axiomas.

Para fazer isso, vamos considerar u, v e $w \in V$ representados por

$$u = (a, -2a), \quad v = (b, -2b) \ \text{ e } \ w = (c, -2c)$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

A técnica que será utilizada na demonstração de todos os axiomas consiste em sair de um lado da igualdade desejada, até chegarmos no outro lado.

A_1) Comutatividade: $u + v = v + u$.

Temos que

$$\begin{aligned} u + v &= (a, -2a) + (b, -2b) \\ &= (a + b, -2a + -2b) \\ &= (b + a, -2b + -2a) \\ &= (b, -2b) + (a, -2a) = v + u. \end{aligned}$$

Exemplo

A_2) *Associatividade:* $(u+v)+w=u+(v+w)$.

Temos que

$$\begin{aligned}(u+v)+w &= \big((a,-2a)+(b,-2b)\big)+(c,-2c)\\ &= (a+b,-2a-2b)+(c,-2c)\\ &= (a+b+c,-2a-2b-2c)\\ &= (a,-2a)+(b+c,-2b-2c)\\ &= (a,-2a)+\big((b,-2b)+(c,-2c)\big)=u+(v+w).\end{aligned}$$

A_3) *Existência do Elemento Neutro:* Existe $\overrightarrow{0_V}\in H, tal\ que\ v+\overrightarrow{0_V}=v$ para todo $v\in V$.

De fato, o vetor $\overrightarrow{0_V}=(0,0)\in V$, (pois $0=-2.0$) e é o elemento neutro aditivo, pois satisfaz

$$v+\overrightarrow{0_V}=(b,-2b)+(0,0)=(b+0,-2b+0)=(b,-2b)=v.$$

A_4) *Existência do Elemento Oposto:* Dado $v\in H$, existe $-v\in H$ tal que $-v+v=\vec{0}_V$.

De fato, dado o vetor $v=(b,-2b)\in V$, temos que o vetor $-v=(-b,2b)\in V$ (pois $2b=-2(-b)$) e é tal que

$$\begin{aligned}-v+v &= -(b,-2b)+(b,-2b)=(-b,2b)+(b,-2b)\\ &= (-b+b,2b-2b)=(0,0)=\overrightarrow{0_V}.\end{aligned}$$

Exemplo

M_1) Associatividade: $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$.

Temos que, para α e $\beta \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha\beta)v = (\alpha\beta)(b,(-2)b) = ((\alpha\beta)b,(\alpha\beta)(-2)b) = \alpha(\beta b,\beta(-2b))$$
$$= \big(\beta(b,-2b)\big) = \alpha(\beta v).$$

M_2) Distributividade da soma de escalares: $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$.

Temos que, para α e $\beta \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha+\beta)v = (\alpha+\beta)(b,-2b) = ((\alpha+\beta)b,(\alpha+\beta)(-2)b)$$
$$= (\alpha b+\beta b,-2\alpha b-2\beta b) = (\alpha b,-2\alpha b)+(\beta b,-2\beta b)$$
$$= \alpha(b,-2b)+\beta(b,-2b) = \alpha v+\beta v.$$

M_3) Distributividade da soma de vetores: $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$.

Temos que, para α ∈ ℝ:

$$\alpha(u+v) = \alpha\big((a,-2a)+(b,-2b)\big) = \alpha(a+b,-2a-2b)$$
$$= (\alpha a+\alpha b,-2\alpha a-2\alpha b) = (\alpha a,-2\alpha a)+(\alpha b,-2\alpha b)$$
$$= \alpha(a,-2a)+\alpha(b,-2b) = \alpha u+\alpha v.$$

Exemplo

M_4) *Existência do elemento neutro aditivo:* $1u = u$.

De fato, o escalar 1 é o elemento neutro da multiplicação por escalar, pois:

$$1u = 1(a, -2a) = (a, -2a) = u.$$

Portanto, como todos os axiomas foram comprovados, o conjunto

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = -2x\}$$

é um espaço vetorial para as operações usuais.