Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral

Função do 1º Grau e 2º Grau

Prof. Dani Prestini

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Função

Aplicações:

Um fabricante vende um produto por R$ 0,80 a unidade. O custo total do produto consiste numa taxa fixa de R$ 40,00 mais o custo de produção de R$ 0,30 por unidade.

a) Qual o função matemática que expressa o lucro em função das peças vendidas?
b) Qual o gráfico desta função?
c) Se vender 200 unidades desse produto, o comerciante terá lucro ou prejuízo?
d) Qual o número de unidades que o fabricante deve vender para não ter lucro nem prejuízo?

Função

Aplicações:

Uma caixa fechada com uma base quadrada deve apresentar um volume de 2.000 cm^3. O material para a tampa e fundo custa R$ 3,00 por cm^2, e o material para os lados custa R$ 1,50 por cm^2 .

a) Se x cm for o comprimento de um lado do quadrado da base, expresse o custo do material como função de x.
b) Qual as dimensões da caixa para que o gasto com a sua confecção seja mínimo possível?

Função

Aplicações:

Sabe-se que o lucro total de uma empresa é dado pela fórmula L = R - C, em que **L** é o lucro total, **R** é a receita total e ***C*** é o custo total de produção. Numa empresa que produziu **x** unidades, verificou-se que $R(x) = 6000x - x^2$ e $C(x) = x^2 - 2000x$. Nessas condições, qual deve ser a produção **x** para que o lucro da empresa seja máximo?

Função

Aplicações:

O crescimento da população mundial obedece à equação $P(t) = C.e^{kt}$ em que **t** é o tempo em anos e **P** é o número de habitantes. Em 1950, o valor de **P** era de 2,6 bilhões e, em 1975, **P** valia 3,9 bilhões. A população da Terra, no ano 2030, será de quantos bilhões de habitantes?

Função Polinomial

Definição:

DEFINIÇÃO Função polinomial

Seja n um número inteiro não negativo, e sejam $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n$ números reais com $a_n \neq 0$. A função dada por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

é uma **função polinomial de grau n**, em que $a_n, a_{n-1}, \ldots + a_2, a_1, a_0$ são os coeficientes. O **coeficiente principal** é a_n.

A função zero dada por $f(x) = 0$ é uma função polinomial que não tem grau nem coeficiente principal.

Função Polinomial

Definição:

Exemplo 1 – Quais dos seguintes exemplos são funções polinomiais? Para os que são funções polinomiais, defina o grau e o coeficiente principal. Para os que não são, justifique.

(a) $f(x) = 4x^3 - 5x - \frac{1}{2}$

(b) $g(x) = 6x^{-4} + 7$

(c) $h(x) = \sqrt{9x^4 + 16x^2}$

(d) $k(x) = 15x - 2x^4$

a) Sim $\to$ Grau 3 $\to$ C.p. 4

b) Não

c) Não

d) Sim $\to$ Grau 4 $\to$ C.p. -2

Função Polinomial

Grau de uma Função Polinomial

Funções polinomiais de grau indefinido ou de grau baixo		
Nome	**Forma**	**Grau**
Função zero	$f(x) = 0$	Indefinido
Função constante	$f(x) = a \ (a \neq 0)$	0
Função do primeiro grau	$f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$	1
Função do segundo grau	$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$	2

Funções do 1º Grau e seus Gráficos

Definição:

Uma **função do primeiro grau** é uma função polinomial de grau 1, e tem a forma:

$$f(x) = ax + b, \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são constantes e } a \neq 0.$$

Se, em vez de a, utilizarmos m como coeficiente principal e considerarmos a notação $y = f(x)$, obtemos:

$$y = mx + b$$

Essa equação representa uma reta inclinada. O coeficiente angular m de uma reta não vertical que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dado por $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

A equação da reta que passa pelo ponto (x_1, y_1) e tem coeficiente angular m é $y - y_1 = m(x - x_1)$. Essa equação é chamada de *equação geral da reta*.

No plano cartesiano, uma reta é o gráfico de uma função do primeiro grau somente se ela for uma **reta inclinada** ou uma **reta horizontal**. Retas verticais não são gráficos de funções porque elas falham no teste da linha vertical, que é feito para analisar se um gráfico é ou não de uma função.

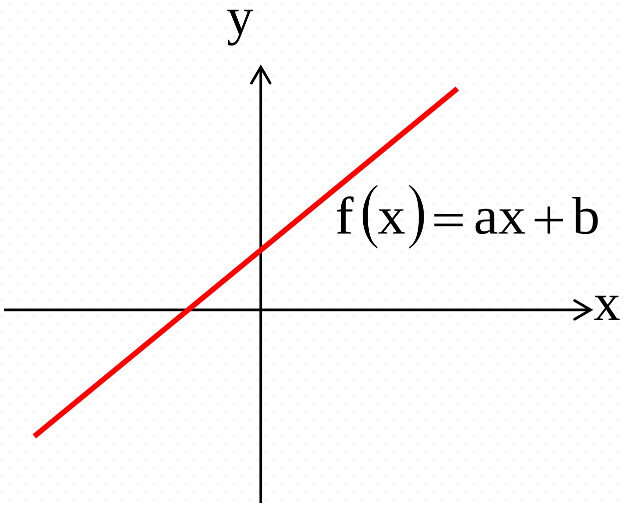
Funções do 1º Grau e seus Gráficos

Observações:

i) Domínio: ➡ $\mathbb{R}$ (os números reais) ; D = $\mathbb{R}$

ii) Imagem: ➡ $\mathbb{R}$ (os números reais) ; Im = $\mathbb{R}$

iii) Gráfico: ➡ Uma reta que possui uma inclinação em relação ao eixo x.

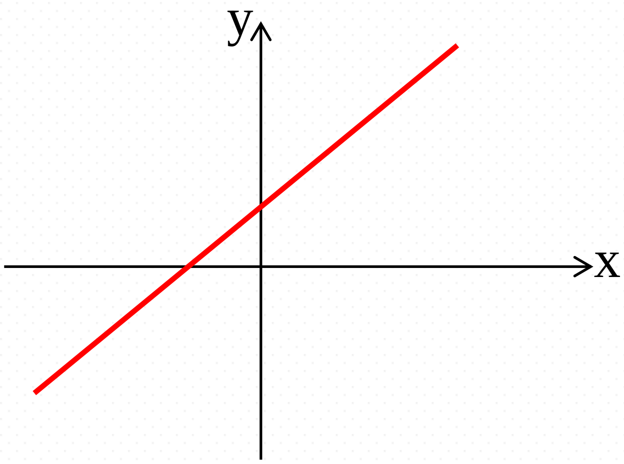


Funções do 1º Grau e seus Gráficos

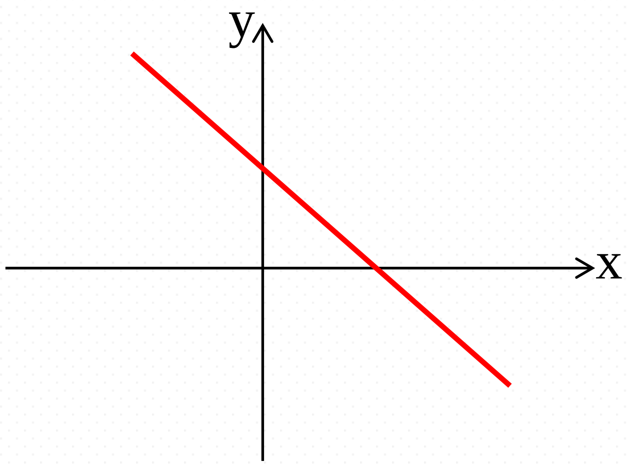
Observações:

iv) Variação:

Se $a > 0$: Crescente



Se $a < 0$: decrescente



v) Zero da função:

O valor do domínio (x) onde a imagem (y) é igual a zero. Também pode ser definido como o ponto onde o gráfico corta o eixo x.

$$f(x) = 0$$

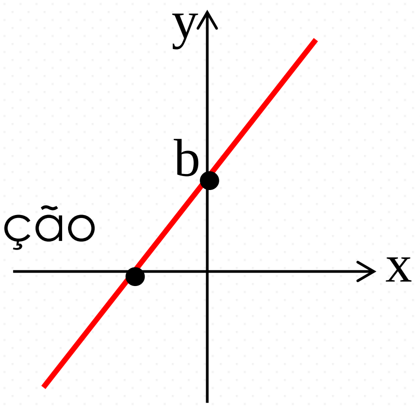
Funções do 1º Grau e seus Gráficos

Observações:

vi) Traçar o Gráfico de forma direta:

$$f(x) = ax + b$$

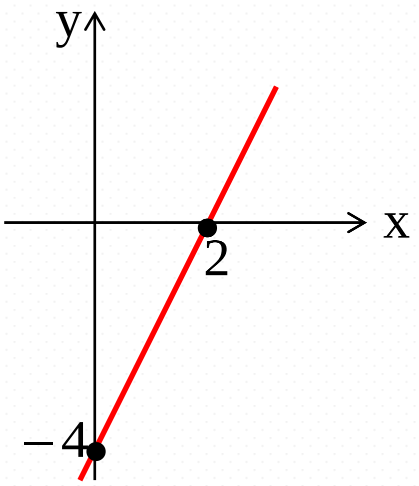
Zero da função



Exemplo: trace o gráfico da função:

a) $f(x) = 2x - 4$

$$2x - 4 = 0$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$



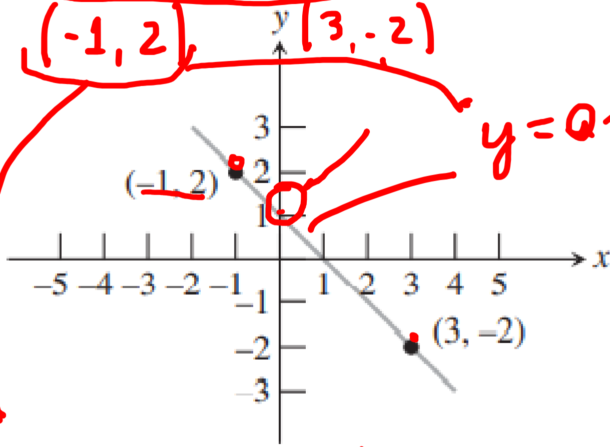
Funções do 1º Grau e seus Gráficos

Definição:

Exemplo 2 – Encontre a lei para a função do primeiro grau $f(x)$, tal que $f(-1) = 2$ e $f(3) = -2$.

$y = mx + b$

$(-1, 2)$ $(3, -2)$



$y = ax + b$

$y = ax + b$

$2 = a(-1) + b$

$\boxed{2 = -a + b}$

$y = ax + b$

$-2 = a(3) + b$

$\boxed{-2 = 3a + b}$

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 3a + b = -2 \end{cases}$$

$-a + b = 2 \rightarrow b = 2 + a$

$3a + 2 + a = -2$

$4a = -4$

$\boxed{a = -1}$

$b = 2 - 1$

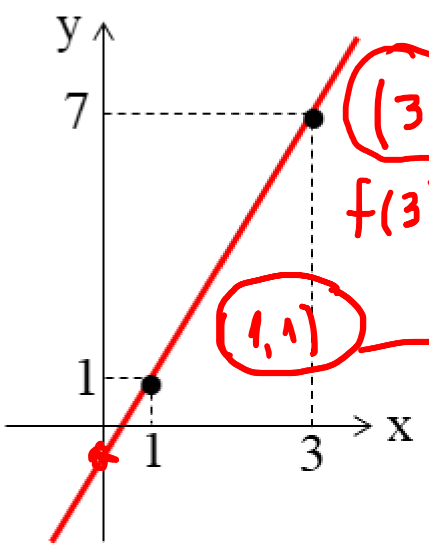
$\boxed{b = 1}$

$\boxed{y = -x + 1}$

Funções do 1º Grau e seus Gráficos

Definição:

Exemplo 3 – Determine a função representada no gráfico abaixo:



$y = ax + b$

$7 = a(3) + b$

$\boxed{7 = 3a + b}$

$1 = a(1) + b$

$\boxed{1 = a + b}$

$\begin{cases} a + b = 1 \rightarrow a = 1 - b \\ 3a + b = 7 \end{cases}$

$3(1 - b) + b = 7$

$3 - 3b + b = 7$

$-2b = 4$

$\boxed{b = -2}$

$a = 1 - (-2)$

$\boxed{a = 3}$

$\boxed{y = 3x - 2}$

Funções do 2º Grau e seus Gráficos

Definição:

Uma **função de segundo grau** (também conhecida como **função quadrática**) é uma função polinomial de grau 2 dada pela forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes reais e $a \neq 0$.

O gráfico de toda função do segundo grau é uma parábola de concavidade para cima ou para baixo, dependendo do coeficiente principal, conforme veremos a seguir. Qualquer gráfico de uma função do segundo grau pode ser obtido do gráfico da função $f(x) = x^2$ por uma sequência de transformações, a saber: translações, reflexões, "esticamentos" e "encolhimentos".

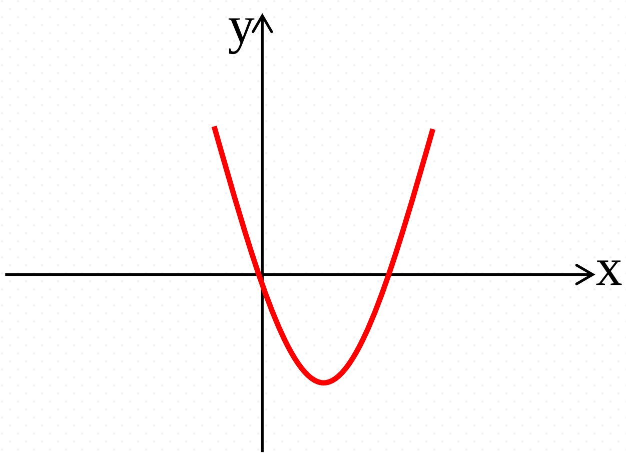
Funções do 2º Grau e seus Gráficos

Observações:

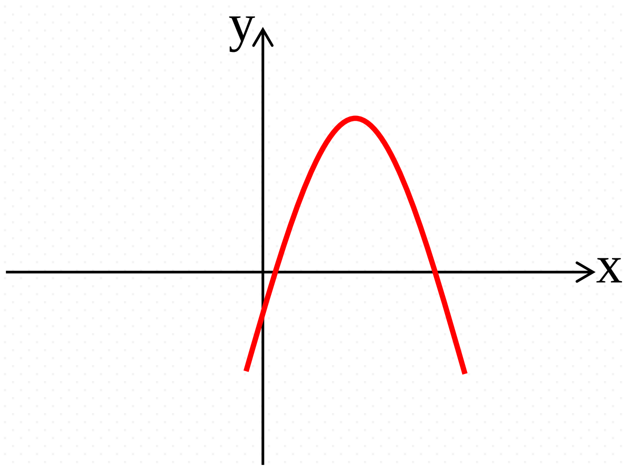
i) Domínio: ➡ $\mathbb{R}$ (os números reais) ; D = $\mathbb{R}$

ii) Gráfico: ➡ Uma curva denominada "parábola".

$Se\ \ a > 0$: Concavidade para cima



$Se\ a < 0$: Concavidade para baixo



Funções do 2º Grau e seus Gráficos

Observações:

iii) Zero da função: o valor do domínio (x) onde a imagem (y) é igual a zero. Também pode ser definido como os pontos onde o gráfico (parábola) corta o eixo x.

Serão calculados a partir da equação definida da seguinte forma:

$$f(x) = \boxed{0}$$

$$f(x) = \boxed{ax^2 + bx + c}$$

$$\Rightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0$$

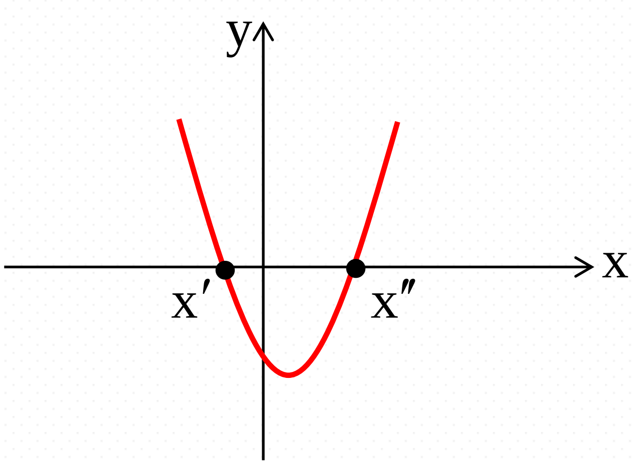
$$\Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Funções do 2º Grau e seus Gráficos

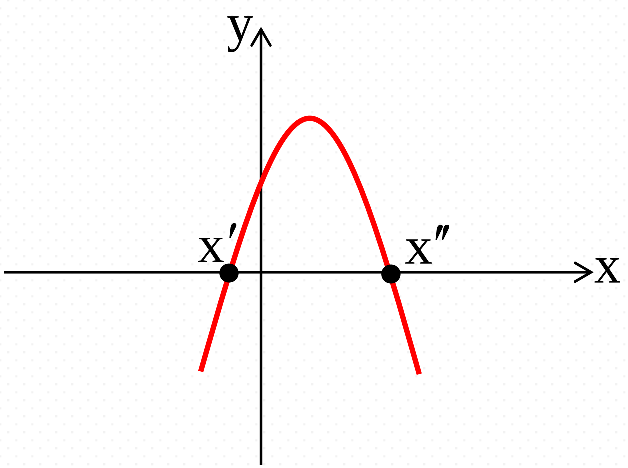
Observações:

Análise dos zeros da função:

$Se\ \ a > 0\ \ e\ \ \Delta > 0$:



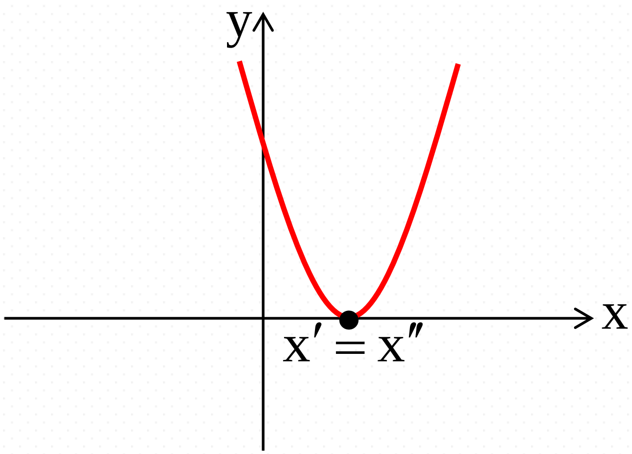
$Se\ \ a < 0\ \ e\ \ \Delta > 0$:



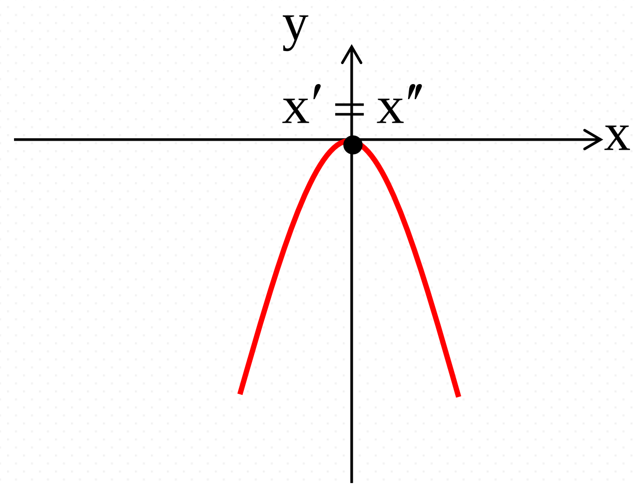
Funções do 2º Grau e seus Gráficos

Observações:

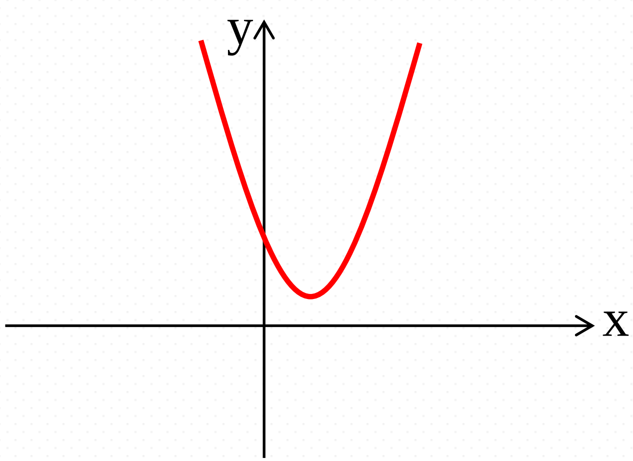
$Se\ a > 0\ e\ \Delta = 0:$



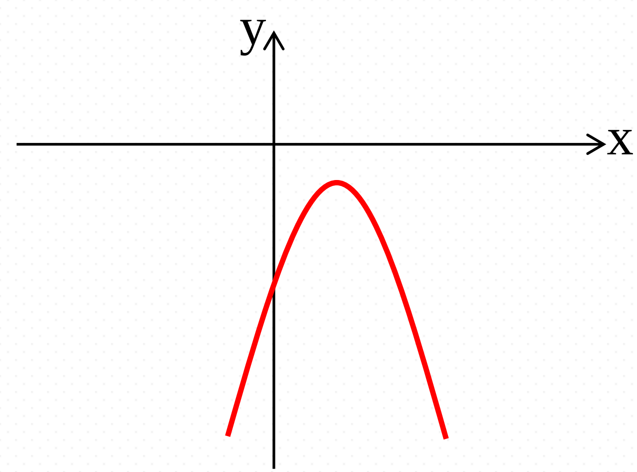
$Se\ a < 0\ e\ \Delta = 0:$



$Se\ a > 0\ e\ \Delta < 0:$



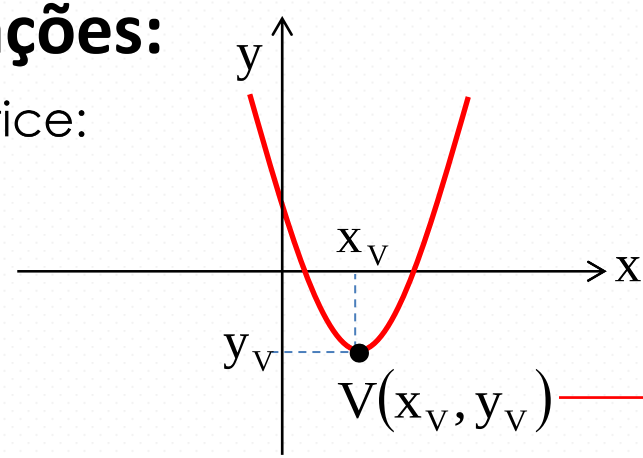
$Se\ a < 0\ e\ \Delta < 0:$



Funções do 2º Grau e seus Gráficos

Observações:

iv) Vértice:

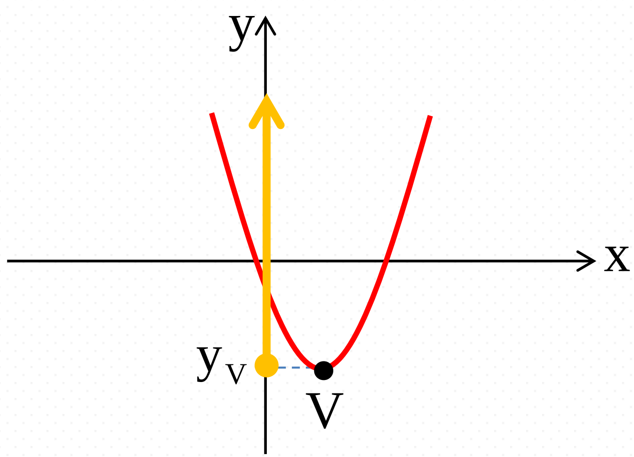


$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$x_V = -\frac{b}{2a} \qquad y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

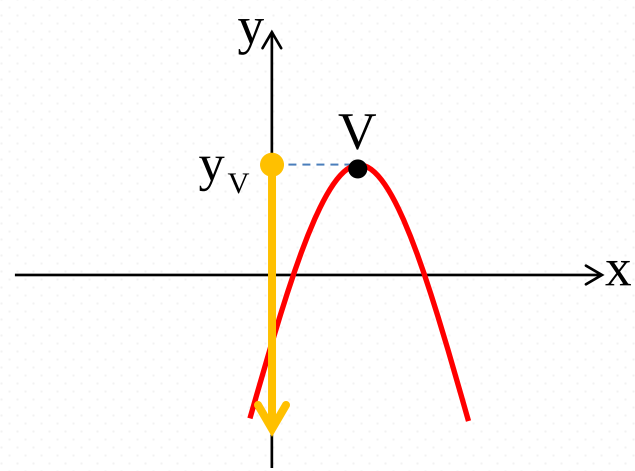
v) Imagem:

Se $a > 0$:



$$Im = \{y \in R \,/\, y \geq y_V\}$$

Se $a < 0$:



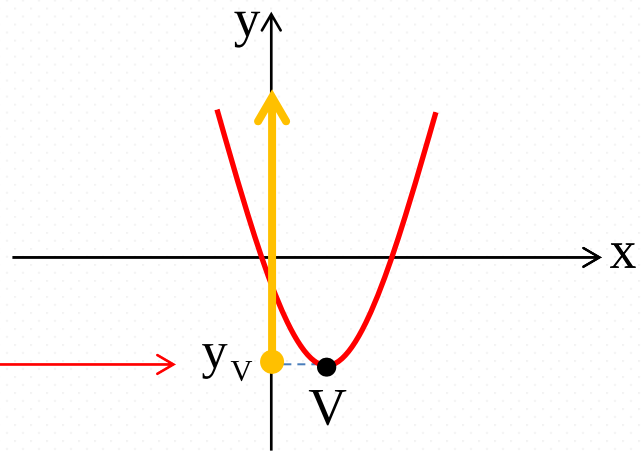
$$Im = \{y \in R \,/\, y \leq y_V\}$$

Funções do 2º Grau e seus Gráficos

Observações:

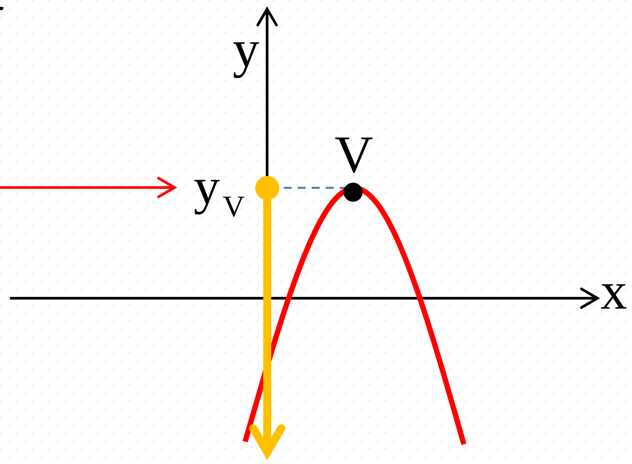
vi) Valor mínimo: é definido pela menor imagem da função.

Se $a > 0$: valor mínimo:



vii) Valor máximo: é definido pela maior imagem da função.

Se $a < 0$: valor máximo:



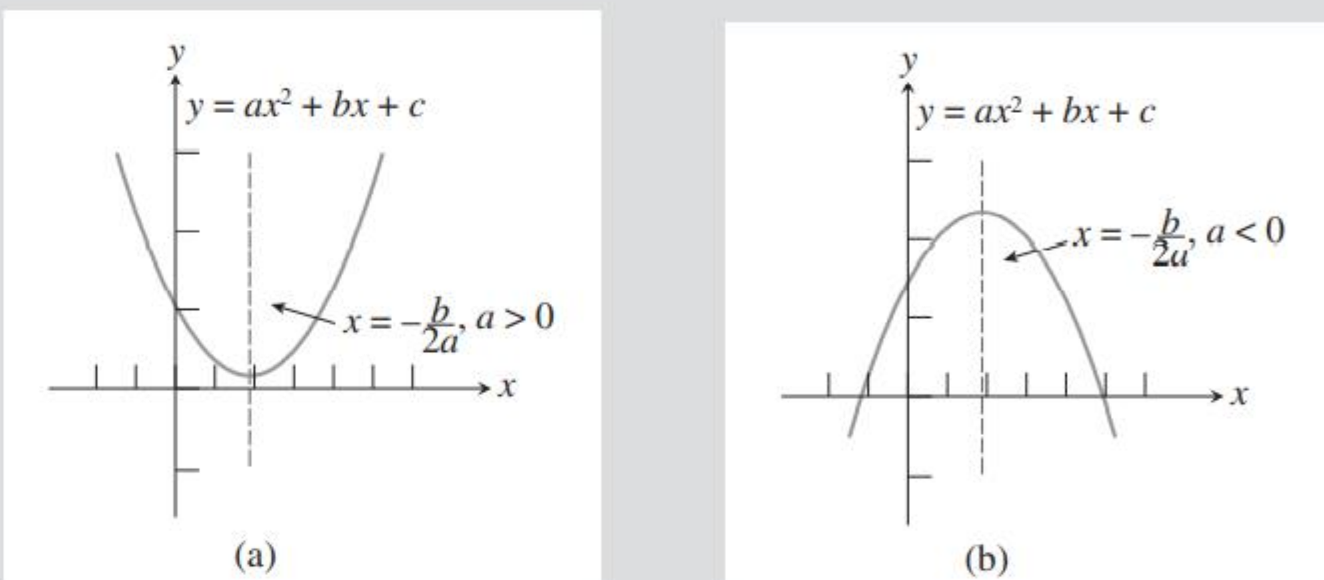
Funções do 2º Grau e seus Gráficos

Forma Canônica

Toda função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo $a \neq 0$, pode ser escrita na **forma canônica**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k.$$

O gráfico de f é uma parábola com vértice (h, k) e eixo de simetria $x = h$, com $h = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = c - ah^2$. Se $a > 0$, então a parábola tem concavidade para cima; se $a < 0$, então a parábola tem concavidade para baixo (veja a Figura



Funções do 2º Grau e seus Gráficos

Exemplo 1 – Escreva a função $f(x) = 3x^2 + 12x + 11$ na forma canônica.

$$f(x) = 3x^2 + 12x + 11$$

$$f(x) = 3(x^2 + 4x) + 11$$

$$f(x) = 3(x^2 + 4x + (?) - (?)) + 11$$

$$f(x) = 3(x^2 + 4x + (2^2) - (2^2)) + 11$$

$$f(x) = 3(x^2 + 4x + 4) - 3(4) + 11$$

$$\boxed{f(x) = 3(x + 2)^2 - 1}$$

Funções do 2º Grau e seus Gráficos

Exemplo 2 - Dada a função $f(x) = x^2 - 4x - 5$. Determine:

$a)\ f(-3)$

$f(-3) = (-3)^2 - 4.(-3) - 5$

$f(-3) = 9 + 12 - 5$

$\boxed{f(-3) = 16}$

$b)\ f(x) = 7$

$f(x) = x^2 - 4x - 5$

$7 = x^2 - 4x - 5$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$a = 1$
$b = -4$
$c = -12$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-12)$

$\Delta = 16 + 48$

$\Delta = 64$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{2}$$

$$\boxed{x' = \frac{4+8}{2} = 6}$$

$$\boxed{x'' = \frac{4-8}{2} = -2}$$

Funções do 2º Grau e seus Gráficos

Exemplo 3 - Dada a função do 2º. grau $f(x) = ax^2 + bx - 3$, sabendo que f(-2) = 5 e f(3) = 0. Determine a função f(x).

$$\mathrm{f}(-2) = 5$$

$$\mathrm{f}(-2) = \mathrm{a}(-2)^2 + \mathrm{b}(-2) - 3$$

$$5 = 4\mathrm{a} - 2\mathrm{b} - 3$$

$$\boxed{8 = 4\mathrm{a} - 2\mathrm{b}} \quad (\div 2)$$

$$\mathrm{f}(3) = 0$$

$$\mathrm{f}(3) = \mathrm{a}(3)^2 + b(3) - 3$$

$$0 = 9a + 3b - 3$$

$$\boxed{3 = 9a + 3b} \quad (\div 3)$$

$$\begin{cases} 2\mathrm{a} - \mathrm{b} = 4 \\ 3\mathrm{a} + \mathrm{b} = 1 \end{cases}$$

$$3\mathrm{a} + (2\mathrm{a} - 4) = 1$$

$$3\mathrm{a} + 2\mathrm{a} - 4 = 1$$

$$5\mathrm{a} = 5$$

$$\boxed{\mathrm{a} = 1}$$

$$2\mathrm{a} - 4 = \mathrm{b}$$

$$\mathrm{b} = 2\mathrm{a} - 4$$

$$\mathrm{b} = 2(1) - 4$$

$$\mathrm{b} = 2 - 4$$

$$\boxed{\mathrm{b} = -2}$$

Portanto: $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Funções do 2º Grau e seus Gráficos

Exemplo 4 - Dada a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Trace o gráfico da função, destacando os zeros da função, o ponto de intersecção com o eixo y, conjunto imagem e o valor máximo ou mínimo.

Zeros da função

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -4 \quad c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3)$$

$$\Delta = 16 - 12$$

$$\Delta = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$\boxed{x' = \frac{4+2}{2} = 3}$$

$$\boxed{x'' = \frac{4-2}{2} = 1}$$

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-(-4)}{2(1)}$$

$$x_v = \frac{4}{2}$$

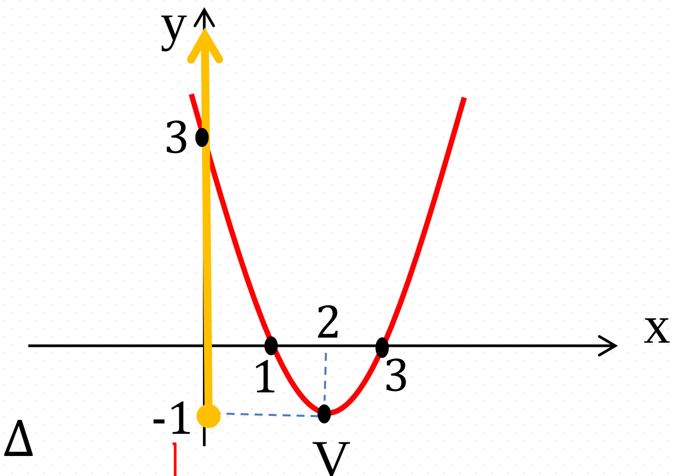
$$\boxed{x_v = 2}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_v = \frac{-4}{4(1)}$$

$$y_v = \frac{-4}{4}$$

$$\boxed{y_v = -1}$$



valor mínimo

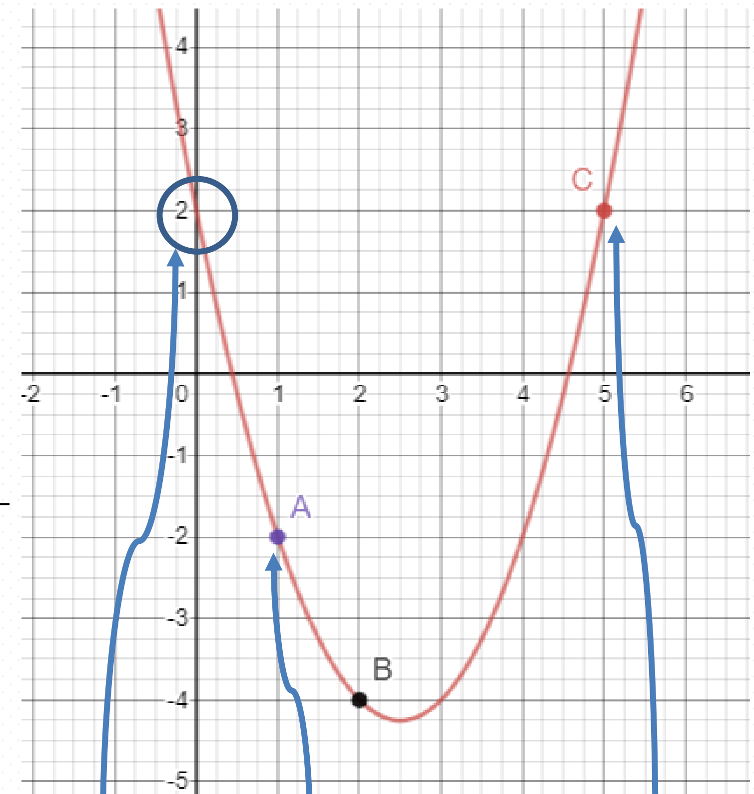
$$\boxed{Im = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y \geq -1\}}$$

Funções do 2º Grau e seus Gráficos

Exemplo 5 - Qual a função geradora do gráfico.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f(x) = ax^2 + bx + 2$$
$$f(1) = a(1)^2 + b.1 + 2$$
$$-2 = a + b + 2$$
$$\boxed{-4 = a + b}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + 2$$
$$f(5) = a(5)^2 + b.5 + 2$$
$$2 = 25a + 5b + 2$$
$$\boxed{0 = 25a + 5b}$$



$$\boxed{c = 2} \qquad \boxed{A(1, -2)} \qquad \boxed{C(5, 2)}$$

$$f(1) = -2 \qquad f(5) = 2$$

$$\begin{cases} a + b = -4 \\ 25a + 5b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$25(-4 - b) + 5b = 0$$
$$-100 - 25b + 5b = 0$$
$$-20b = 100$$
$$b = \frac{100}{-20}$$
$$\boxed{b = -5}$$

$$a = -4 - b$$
$$a = -4 - (-5)$$
$$a = -4 + 5$$
$$\boxed{a = 1}$$

$$\boxed{\text{Portanto: } f(x) = x^2 - 5x + 2}$$

Exercícios

1) Livro Texto: páginas 101 à 103 – Exercícios do 1 ao 60

Obrigado