MDI0002 – Matemática Discreta Videoaula 11 Relação de Equivalência

Karina Girardi Roggia karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação Centro de Ciências Tecnológicas Universidade do Estado de Santa Catarina

2020



Relação de Equivalência

- reflete uma noção de igualdade semântica
- entidades com formas diferentes (sintaticamente diferentes)
- podem ser equivalentes ("igualadas")
- exemplo: ↔



Propriedades que caracterizam equivalência

Considerando a noção semântica de igualdade

- Reflexividade. Qualquer elemento é sempre "igual" a si mesmo
- Transitividade. Intuitiva em qualquer noção de "igualdade"
- Simetria. O que mais caracteriza a "igualdade" (e diferencia da ordem)

Definição (Relação de Equivalência)

 $R \subseteq A^2$ é uma Relação de Equivalência se, e somente se, R é uma endorrelação reflexiva, simétrica e transitiva.



Partição

Importante resultado de uma relação de equivalência:

 $R: A \rightarrow A$ induz uma única partição do conjunto A

- subconjuntos disjuntos e não-vazios, denominados *classes de equivalência*
- união de todas as classes de equivalência resulta no conjunto original

... e toda partição induz uma relação de equivalência.

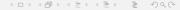


Classes de Equivalência

Notação para classe de equivalência:

- Tome-se $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ uma partição de A
- ou seja, cada A_i (com i = 1, ..., n) é um subconjunto de A
- É usual denotar cada partição por um elemento representativo da classe
- Para $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$, teremos $[a_1] = A_1, \ldots, [a_n] = A_n$





Exemplos

- $\langle A, = \rangle$
- $\langle 2^A, = \rangle$
- $A^2: A \rightarrow A$
- $\langle \mathbb{N}, R_{mod2} \rangle$ onde $R_{mod2} = \{ \langle a, b \rangle \mid a\%2 = b\%2 \}$

* x%y= resto da divisão inteira de x por y

R_{mod2} induz uma partição de $\mathbb N$

- [0], a classe de equivalência dos número pares (resto zero)
- [1], a classe de equivalência dos número ímpares (resto um)



Conjunto Quociente

Definição (Conjunto Quociente)

Dada a relação de equivalência $R:A\to A$, o **conjunto quociente**, é

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

onde para qualquer $a \in A$, temos que $[a]_R = \{b \in A \mid aRb\}$

O conjunto quociente é a partição de A induzida pela relação de equivalência R.



Sejam os conjuntos $\mathbb{N}_+=\mathbb{N}-\{0\}$ (naturais não nulos) e $F=\mathbb{Z}\times\mathbb{N}_+$ (frações).

Seja a relação de equivalência

$$R = \{ \langle \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \rangle \in F^2 \mid \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \}$$

Portanto, $\mathbb Q$ é o conjunto quociente F/R

$$\mathbb{Q} = F/R$$

Cada número racional é uma classe de equivalência de frações

- $[0]_R = \{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \ldots\}$
- $\left[\frac{1}{2}\right]_R = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots\right\}$
- $\bullet \ \ [\frac{-5}{4}]_R = \{\frac{-5}{4}, \frac{-10}{8}, \frac{-15}{12}, \ldots\}$

