Departamento de Ciência da Computação - DCC
Prof. Ricardo Martins
Site: https://ricardofm.com
Email: ricardo.martins@udesc.br
Ramal: 3481-7823
Sala: Bloco F – 2° piso (sala 8)

LINGUAGENS FORMAIS E AUTÔMATOS

LFA0001:
Ciência da Computação
4ª fase

GRAMÁTICAS REGULARES

- **Gramática**
  - formalismo
    - axiomático ou
    - gerador
  - permite definir linguagens
    - regulares
    - não-regulares
    - **importante**: é fácil definir gramáticas que geram linguagens **não-regulares**
  - Linguagens Regulares
    - **restrições** nas regras de produção ⇥ definem exatamente a classe das LR

GRAMÁTICAS REGULARES

- **Definição. Gramáticas Lineares**
  - Seja $G = (V, T, P, S)$ uma gramática e
    - sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in V$ (variáveis)
    - $w \in T^*$ (palavra de símbolos terminais)
- **Então G é**
  - Gramática Linear à Direita (GLD)
    - $\mathbf{A} \rightarrow w\mathbf{B}$ ou
    - $\mathbf{A} \rightarrow w$
  - Gramática Linear à Esquerda (GLE)
    - $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}w$ ou
    - $\mathbf{A} \rightarrow w$

GRAMÁTICAS REGULARES

- **Definição. Gramáticas Lineares Unitárias à Direita**
  - como na linear à direita
  - adicionalmente, $|w| \leq 1$
- **Definição. Gramáticas Lineares Unitárias à Esquerda**
  - como na linear à esquerda
  - adicionalmente, $|w| \leq 1$

✓ Note-se que:

- uma variável deriva, no máximo, **uma variável.**

GRAMÁTICAS REGULARES

- ***Teorema.*** **Seja L uma linguagem**
  - L é gerada por uma GLD sse
  - L é gerada por uma GLE sse
  - L é gerada por uma GLUD sse
  - L é gerada por uma GLUE
- ***Ou seja...***
  - as diversas formas das gramáticas lineares são formalismos equivalentes
- ***Definição. Gramática Regular (GR)***
  - qualquer gramática linear (qualquer uma das representações)
- ***Linguagem Gerada***
  - por uma gramática regular, G, é representada por L(G) ou GERA(G)

GRAMÁTICAS REGULARES

➢ ***Exemplo. a(ba)****

- **GLD**. G = ({S, A}, {a, b}, P, S) onde P é tq
  - $S \rightarrow aA$
  - $A \rightarrow baA \mid \varepsilon$
- **GLE**. G = ({S}, {a, b}, P, S) onde P é tq
  - $S \rightarrow Sba \mid a$
- **GLUD**. G = ({S, A, B}, {a, b}, P, S) onde P é tq
  - $S \rightarrow aA$
  - $A \rightarrow bB \mid \varepsilon$
  - $B \rightarrow aA$
- **GLUE**. G = ({S, A}, {a, b}, P, S) onde P é tq
  - $S \rightarrow Aa \mid a$
  - $A \rightarrow Sb$

GRAMÁTICAS REGULARES

- ***Outro exemplo. $(a + b)^*(aa + bb)$***
  - **GLD**. $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ onde P é tq
    - $S \rightarrow aS \mid bS \mid A$
    - $A \rightarrow aa \mid bb$
  - **GLE**. $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ onde P é tq
    - $S \rightarrow Aaa \mid Abb$
    - $A \rightarrow Aa \mid Ab \mid \varepsilon$
  - ***Gramáticas Regulares***
    - ***denotam exatamente as LR!***

GRAMÁTICAS REGULARES

- ***Teorema.***
  - Se L é gerada por uma GR,
  - então L é uma LR
- ***Prova***
  - mostrar que
    - dado uma GR G qq,
    - é possível construir um AF M tq
    - ACEITA(M) = GERA(G)
  - M simula as derivações de G
  - demonstração de que ACEITA(M) = GERA(r)
    - indução no número de derivações

GRAMÁTICAS REGULARES

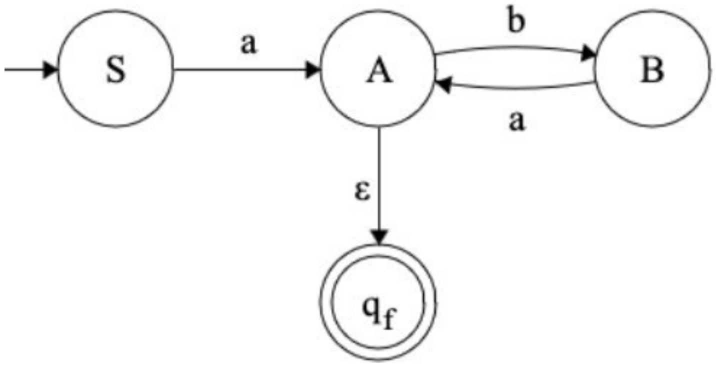
- ***Prova. Construção:***
  - suponha $G = (V, T, P, S)$ uma GLUD
  - seja AFε $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ tq
    - $\Sigma = T$
    - $Q = V \cup \{q_f\}$
    - $F = \{q_f\}$
    - $q_0 = S$
    - δ é como segue

- ***Prova. ACEITA(M) = GERA(G) ?***

	Transição Gerada
$A \rightarrow \varepsilon$	$\delta(A, \varepsilon) = q_f$
$A \rightarrow a$	$\delta(A, a) = q_f$
$A \rightarrow B$	$\delta(A, \varepsilon) = B$
$A \rightarrow aB$	$\delta(A, a) = B$

GRAMÁTICAS REGULARES

Exemplo



- G = ({S, A, B}, {a, b}, P, S)
  - $S \rightarrow aA$
  - $A \rightarrow bB \mid \varepsilon$
  - $B \rightarrow aA$

- AFε M = ({a, b}, {S, A, B, qf}, δ, S, {qf}), onde δ é tal que:

Produção	Transição
$S \rightarrow aA$	$\delta(S, a) = A$
$A \rightarrow bB$	$\delta(A, b) = B$
$A \rightarrow \varepsilon$	$\delta(A, \varepsilon) = q_f$
$B \rightarrow aA$	$\delta(B, a) = A$

GRAMÁTICAS REGULARES

- ***Teorema:* Se L é uma LR, então existe G, GR que gera L**
  - dado um AFD M qq,
    - construção GR G
    - tq GERA(G) = ACEITA(M)
  - construção de uma GLUD
    - derivação simula função programa estendida
  - demonstração de que AGERA(G) = ACEITA(M)
    - indução no tamanho da palavra

GRAMÁTICAS REGULARES

♦ Prova. Construção

- suponha AFD $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ tq ACEITA(M) = L.
- seja $G = (V, T, P, S)$ uma GLUD tq
  - $V = Q \cup \{S\}$
  - $T = \Sigma$
  - P é tq (suponha $q_i, q_k \in Q$, $a \in \Sigma$ e $q_f \in F$)

Transição	Produção
-	$S \to q_0$
-	$q_f \to \varepsilon$
$\delta(q_i, a) = q_k$	$q_i \to a q_k$

GRAMÁTICAS REGULARES

♦ **Prova. Construção**

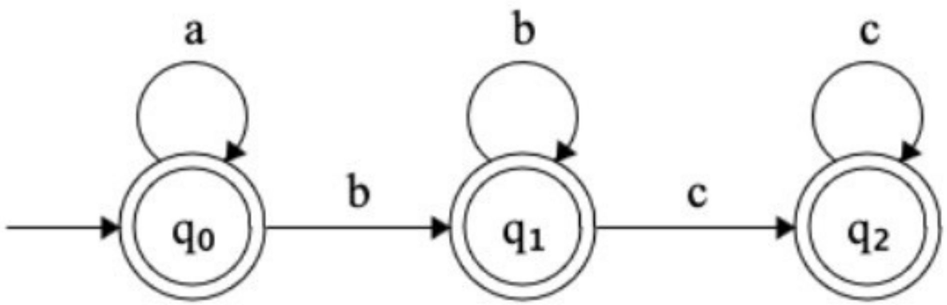
- suponha AFD $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ tq ACEITA(M) = L.
- seja $G = (V, T, P, S)$ uma GLUD tq
  - $V = Q \cup \{S\}$
  - $T = \Sigma$
  - P é tq (suponha $q_i, q_k \in Q$, $a \in \Sigma$ e $q_f \in F$)

Transição	Produção
-	$S \to q_0$
-	$q_f \to \varepsilon$
$\delta(q_i, a) = q_k$	$q_i \to a q_k$

GRAMÁTICAS REGULARES

♦ Exemplo

- AFD $M = (\{a, b, c\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1, q_2\})$



- $G = (\{q_0, q_1, q_2, S\}, \{a, b, c\}, S, P)$ onde P é tq

Transição	Produção
-	$S \rightarrow q_0$
-	$q_0 \rightarrow \varepsilon$
-	$q_1 \rightarrow \varepsilon$
-	$q_2 \rightarrow \varepsilon$
$\delta(q_0, a) = q_0$	$q_0 \rightarrow aq_0$
$\delta(q_0, b) = q_1$	$q_0 \rightarrow bq_1$
$\delta(q_1, b) = q_1$	$q_1 \rightarrow bq_1$
$\delta(q_1, c) = q_2$	$q_1 \rightarrow cq_2$
$\delta(q_2, c) = q_2$	$q_2 \rightarrow cq_2$