Distâncias
(Teoria)

Estrutura desta apresentação

- Distância entre dois pontos
- Distância de um ponto a uma reta
- Distância entre duas retas
- Distância de um ponto a um plano
- Distância entre dois planos
- Distância de uma reta a um plano

Introdução

- Neste ponto da disciplina, já foram abordados os conceitos de pontos, retas e planos;
- Foca-se neste momento na distância entre duas destas estruturas;
- Para tal, serão utilizados os conceitos até então estudados e a geometria do problema.

Distância entre dois pontos

1) Distância entre dois pontos

Para calcular a distância d entre dois pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$:

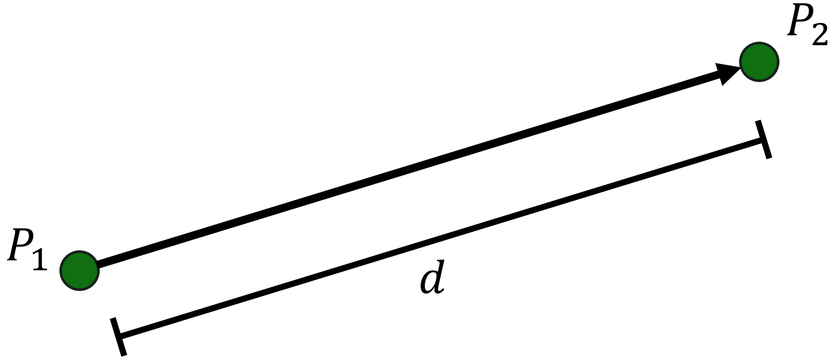
i. É criado o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$;

ii. Calcula-se o comprimento deste vetor.

Ou seja,

$$\boldsymbol{d(P_1, P_2)} = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}\right|$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Distância de um ponto a uma reta

2) Distância de um ponto a uma reta

Sejam:

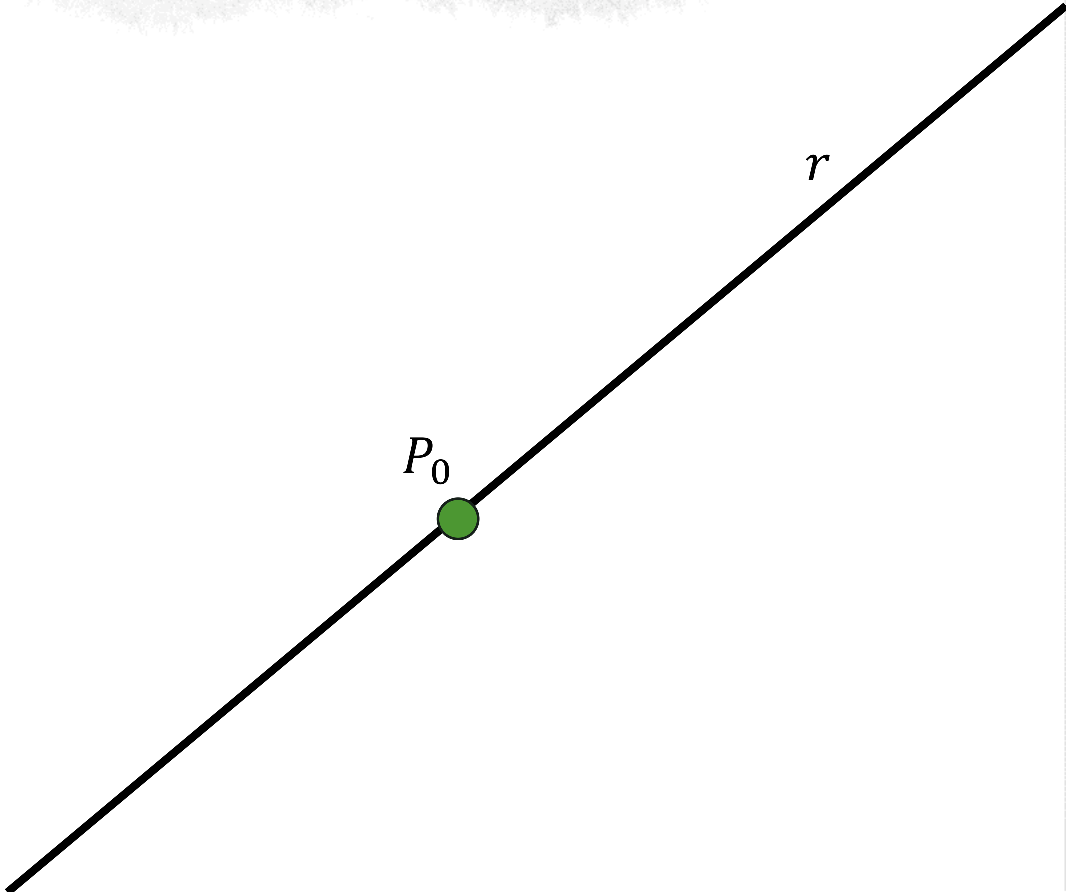
- uma reta r, definida por um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e pelo vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$; e
- um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ qualquer do espaço.

Há duas possibilidades:

1. Caso $\boldsymbol{P_0 \in r}$

Nesta situação,

$$d(P_0, r) = 0$$



2) Distância de um ponto a uma reta

2. **Caso $\boldsymbol{P_0 \notin r}$**

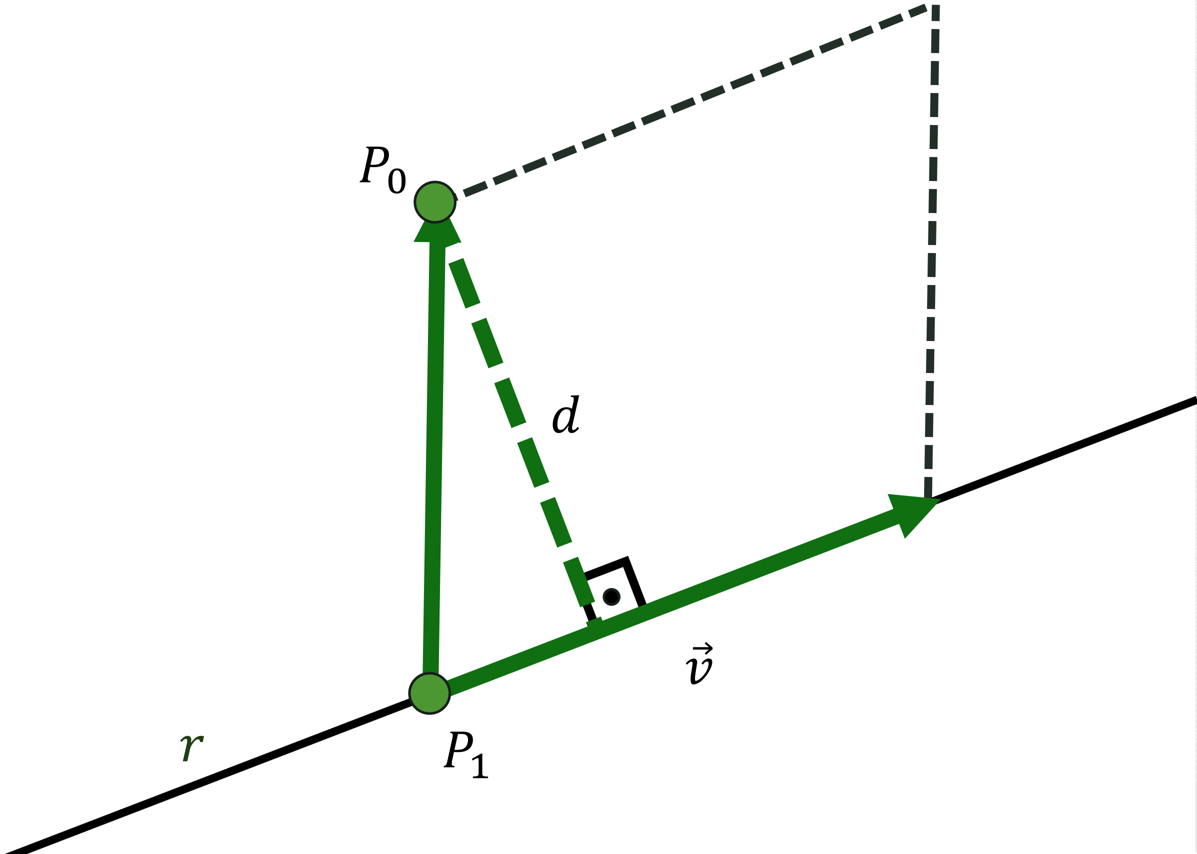
Neste caso, a distância será o comprimento do menor segmento que une o ponto à reta.

Mas como calculá-lo? Note que:

i. É possível criar um paralelogramo com o vetor diretor $\vec{v}$ e o vetor que une P_1 e P_0;

ii. Já foi visto que a área desse paralelogramo pode ser calculada com

$$A_P = \left|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}\right|$$



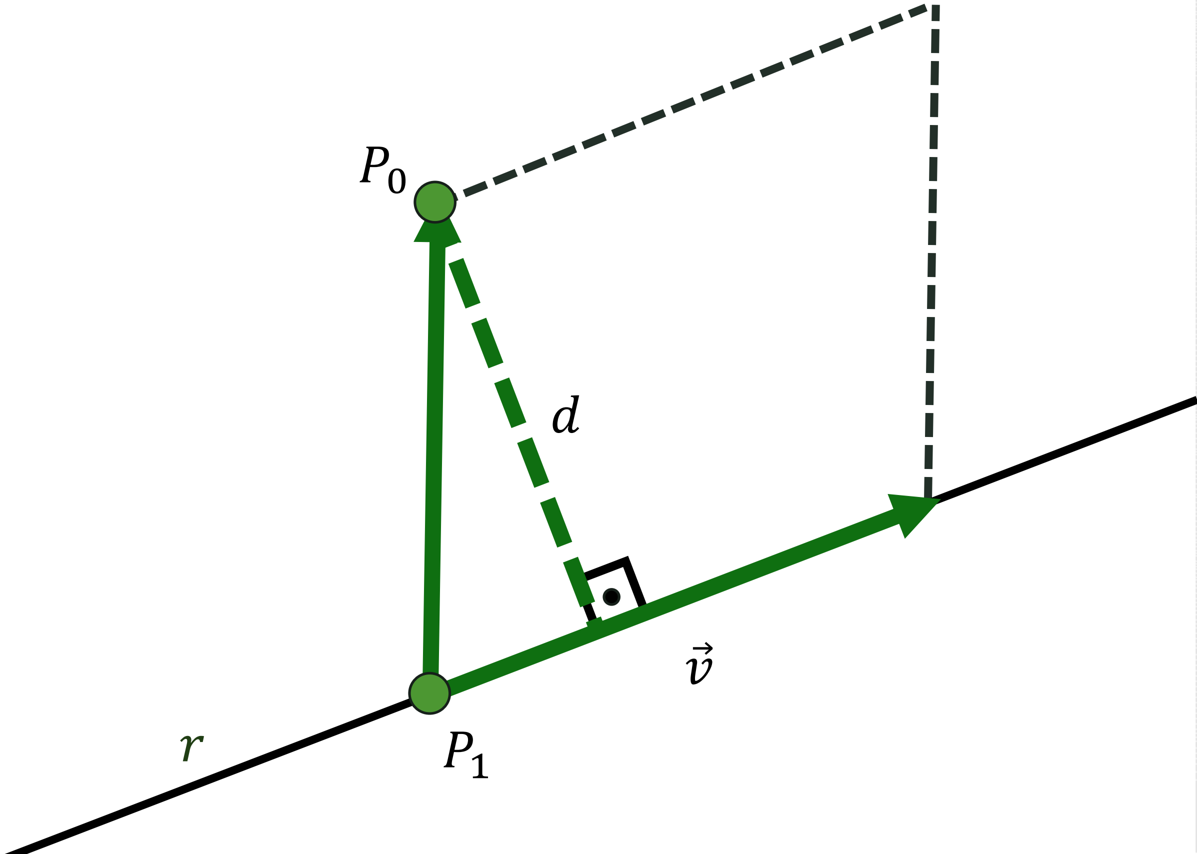
2) Distância de um ponto a uma reta

iii. Ao mesmo tempo, sabe-se de geometria plana que a área de um paralelogramo é dada pela fórmula

$$A_P = \text{base} \cdot \text{altura}$$

Nesta situação, isto se reflete como

$$A_P = |\vec{v}| \cdot d$$



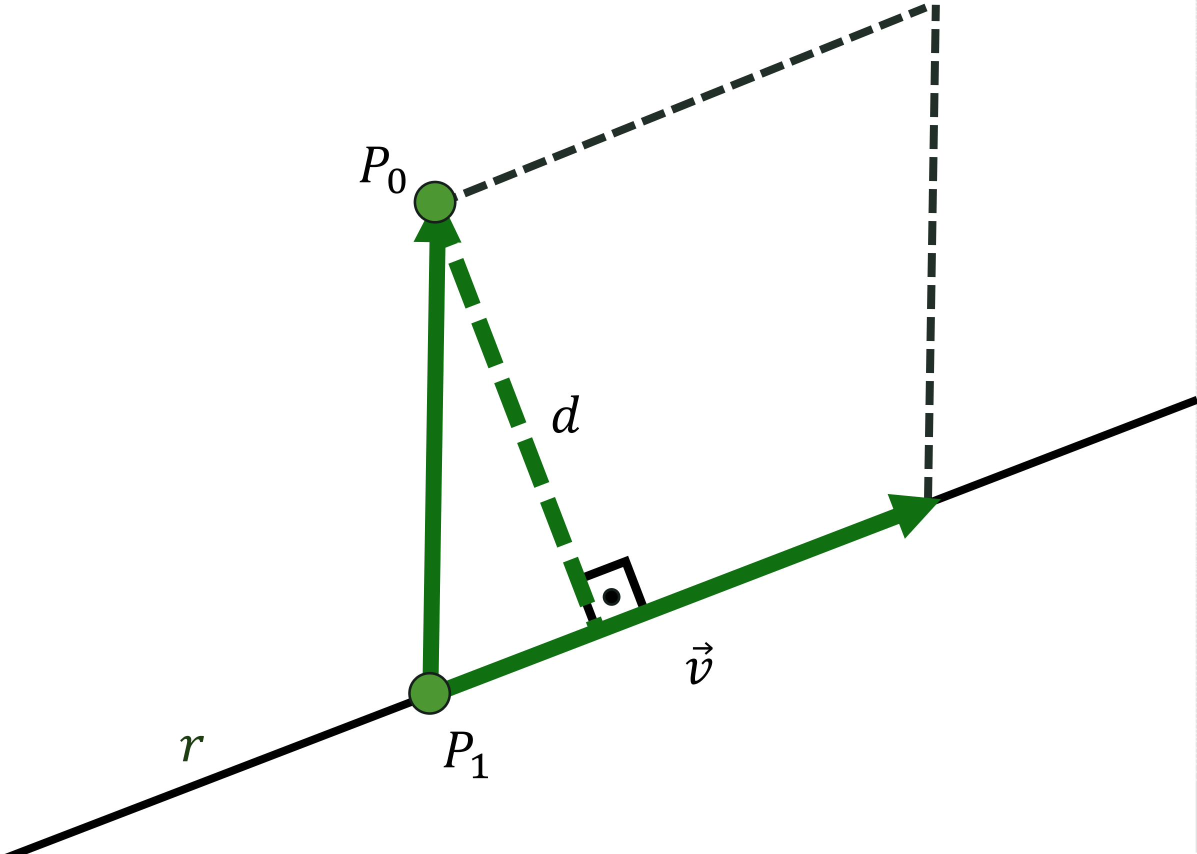
2) Distância de um ponto a uma reta

Com esses dados, comparando as duas fórmulas obtidas para a área, é possível obter uma expressão para a distância.

$$A_P = |\vec{v}| \cdot d = \left|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}\right|$$

Assim,

$$\boldsymbol{d = d(P_0, r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}\right|}{|\vec{v}|}}$$



Distância entre duas retas

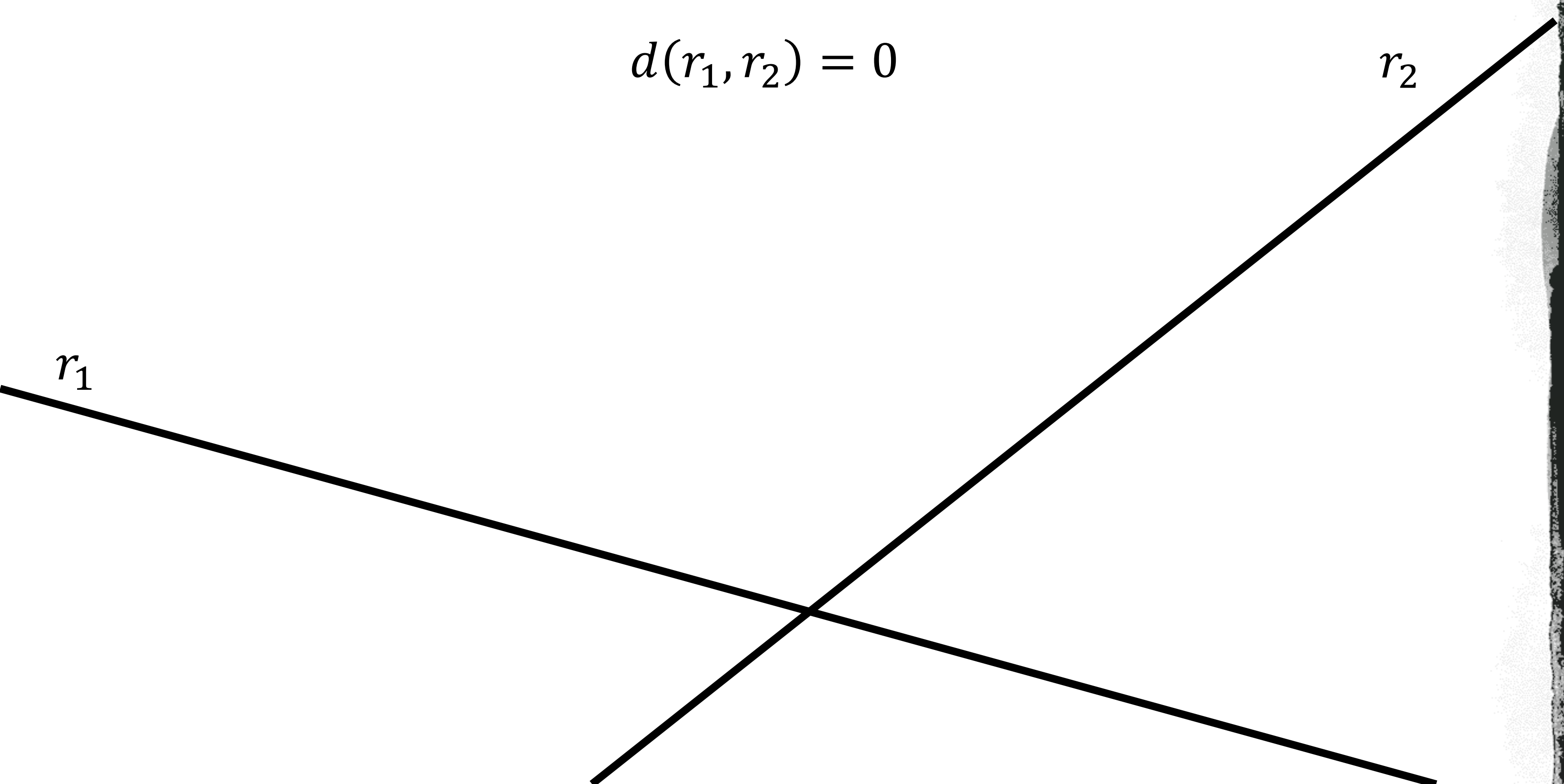
3) Distância entre duas retas

O cálculo da distância entre duas retas r_1 e r_2 depende da posição relativa entre elas.

1. As retas são concorrentes

Neste caso, por definição,

$$d(r_1, r_2) = 0$$

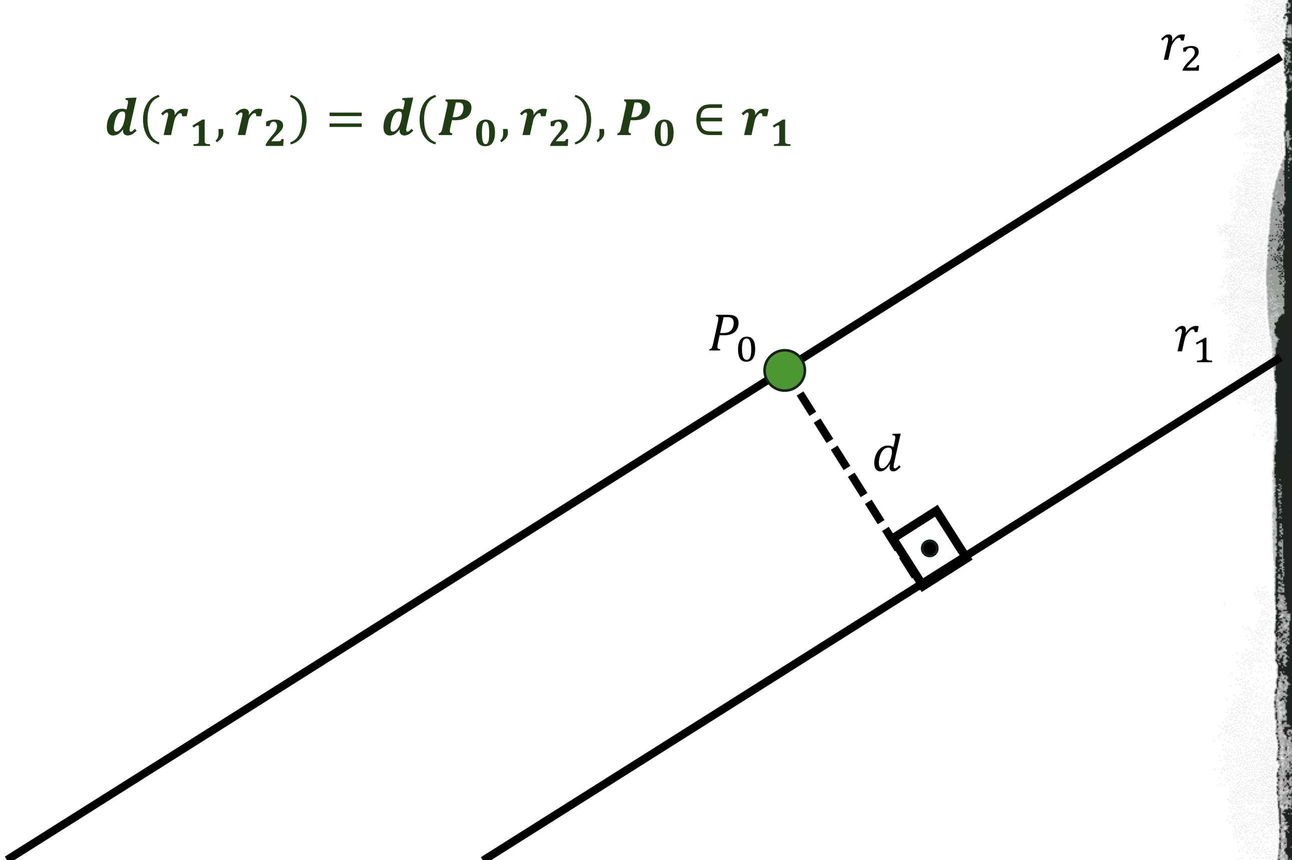


2. As retas são paralelas

A distância entre as retas é a distância de um ponto qualquer P_0 de uma das retas à outra, isto é

$$\boldsymbol{d(r_1, r_2) = d(P_0, r_1), P_0 \in r_2}$$

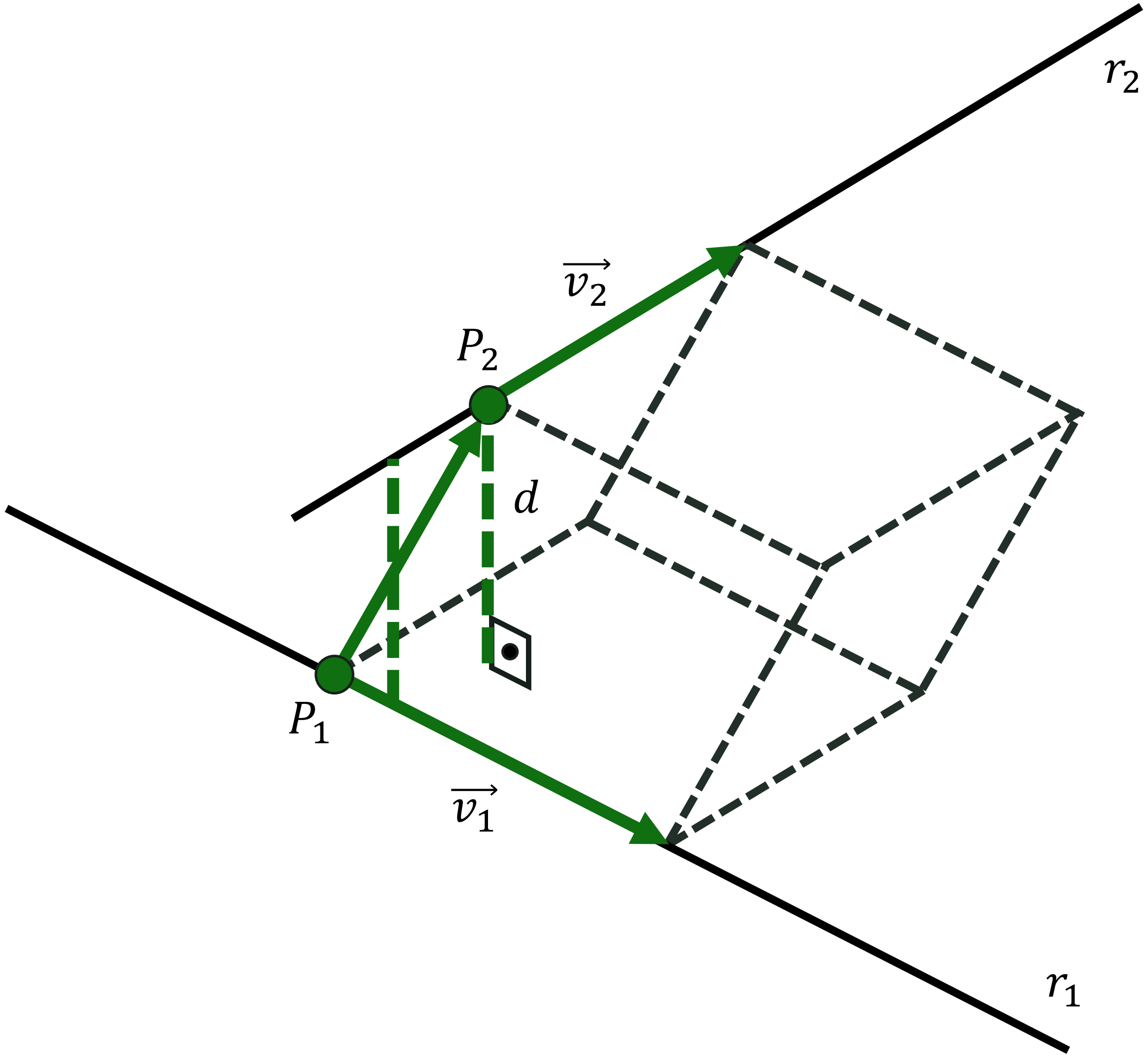
$$\boldsymbol{d(r_1, r_2) = d(P_0, r_2), P_0 \in r_1}$$



3) Distância entre duas retas

$$\boldsymbol{d(P_0, r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{v}|}}$$

3. As retas são reversas



3) Distância entre duas retas

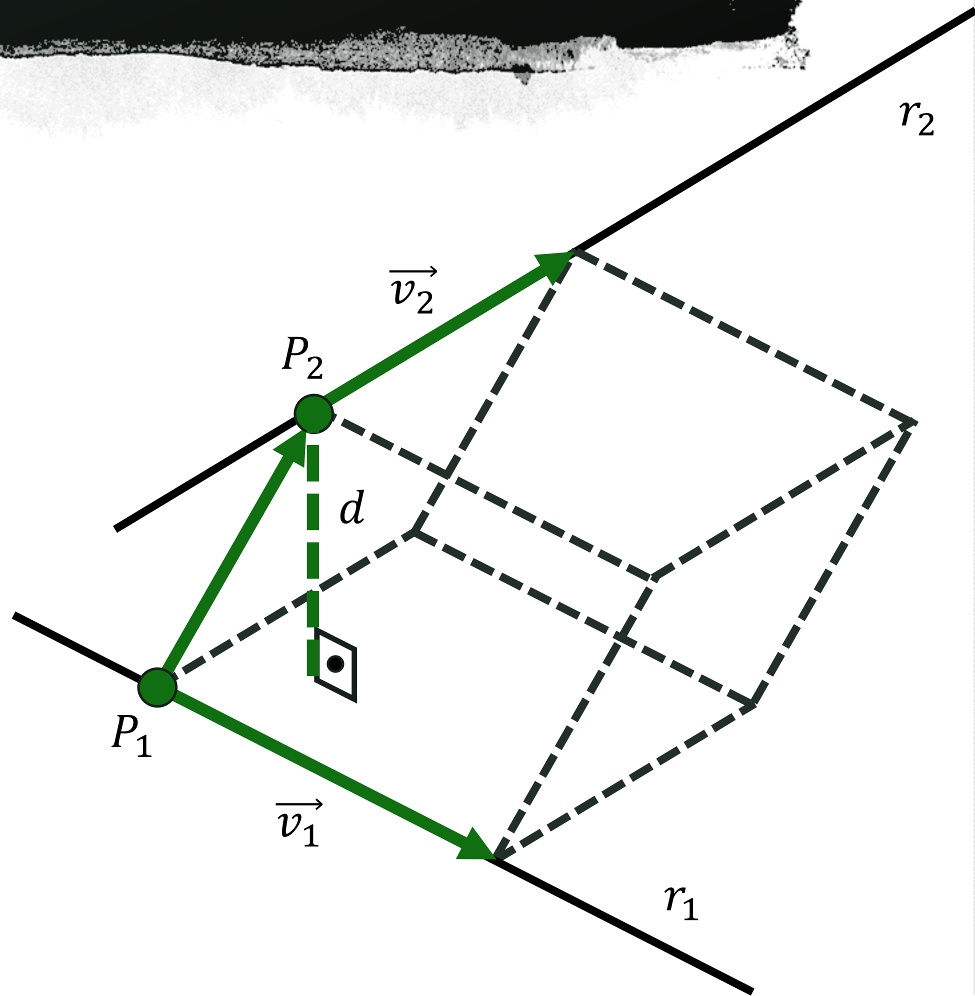
3) Distância entre duas retas

Sejam duas retas reversas:

- uma reta r_1, definida por um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e pelo vetor diretor $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$; e
- uma reta r_2, definida por um ponto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e pelo vetor diretor $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$.

Note que:

i. É possível criar um paralelepípedo com os vetores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$;



3) Distância entre duas retas

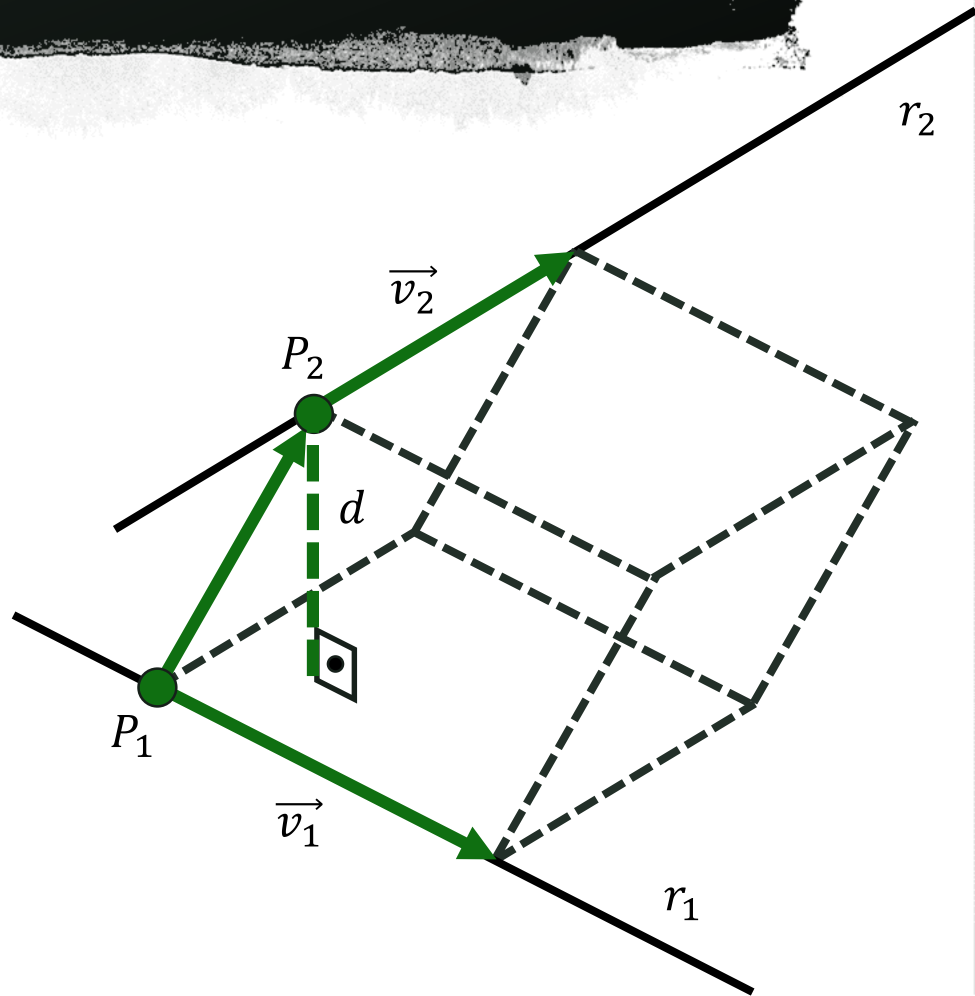
ii. Já foi visto que o volume desse paralelepípedo pode ser calculado com

$$V_P = \left|\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{P_1P_2}\right)\right|$$

ii. A altura desse paralelepípedo é a distância entre as retas, uma vez que a reta r_1 é paralela ao plano base do paralelepípedo;

iii. A base do paralelepípedo é definida pelos vetores diretores, de modo que sua área pode ser dada por

$$A_b = |\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|$$



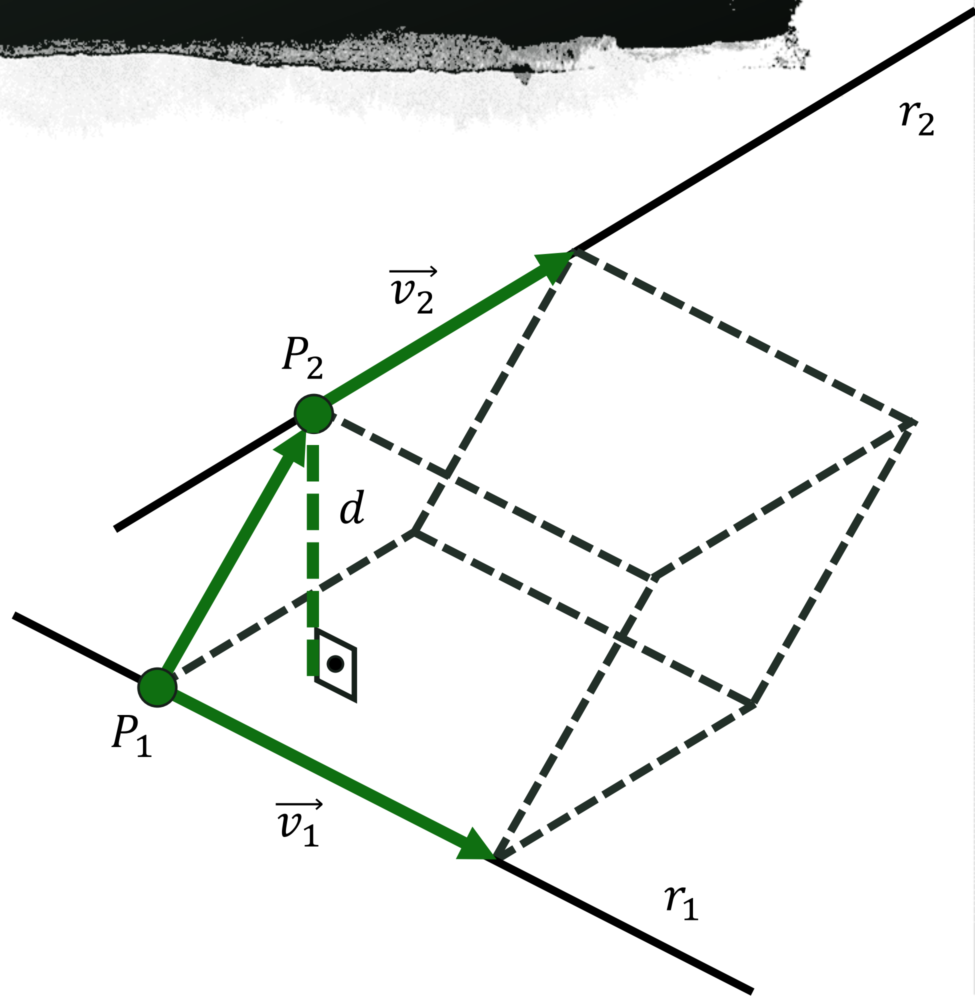
3) Distância entre duas retas

iv. Ao mesmo tempo, sabe-se de geometria espacial que o volume de um paralelepípedo é dado pela fórmula

$$V_P = \text{área da base} \cdot \text{altura}$$

Nesta situação, isto se reflete como

$$V_P = |\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}| \cdot d$$



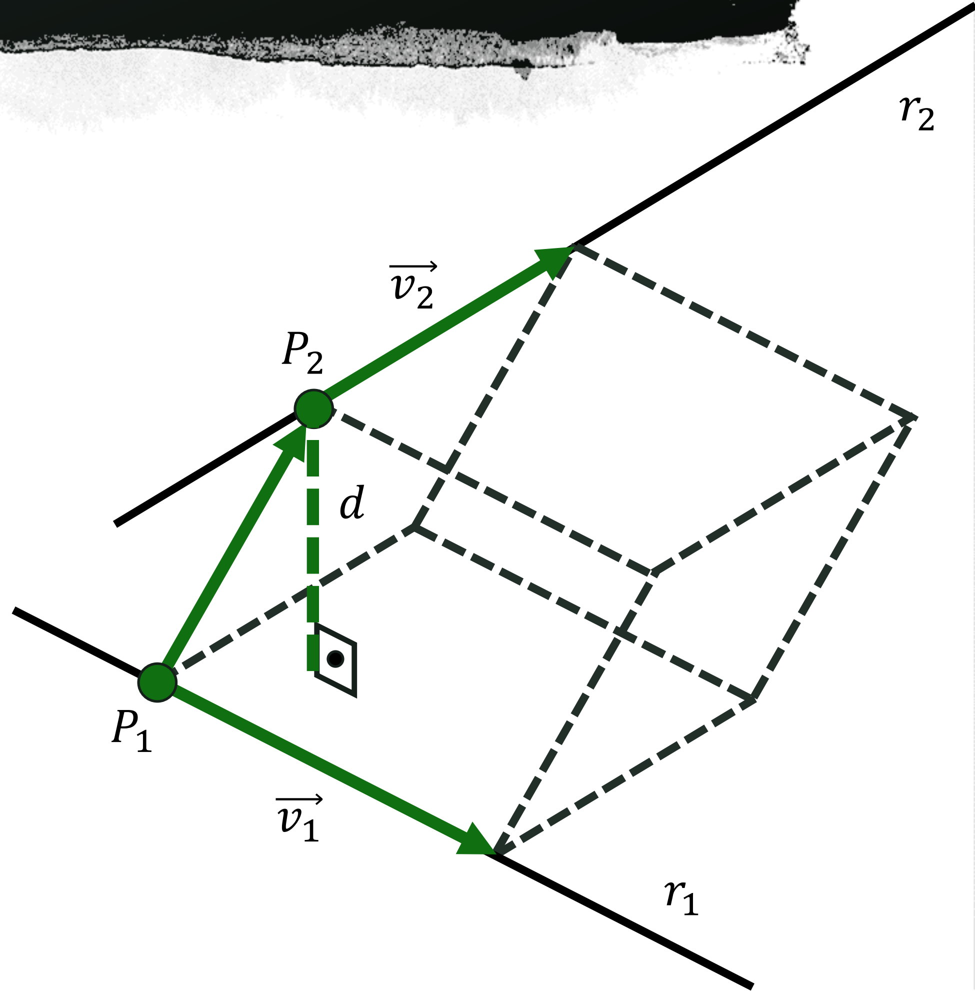
3) Distância entre duas retas

Com esses dados, comparando as duas fórmulas obtidas para o volume, é possível obter uma expressão para a distância.

$$V_P = |\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}| \cdot d = \left|\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{P_1P_2}\right)\right|$$

Assim,

$$\boldsymbol{d = d(r_1, r_2) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{P_1P_2}\right)\right|}{|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|}}$$



Distância de um ponto a um plano

4) Distância de um ponto a um plano

Sejam:

- um plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$; e
- um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ qualquer do espaço.

Há duas possibilidades:

1. **Caso $\boldsymbol{P_0 \in \pi}$**

   Nesta situação,

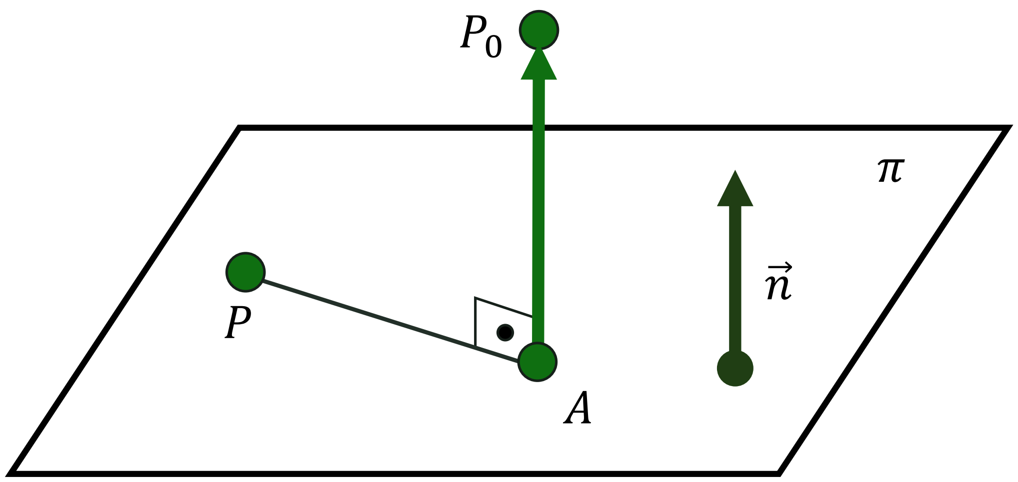
$$d(P_0, \pi) = 0$$

2. Caso $\boldsymbol{P_0 \notin \pi}$

Considere A o pé da perpendicular conduzida por P_0 sobre o plano π, e $P(x, y, z)$ qualquer ponto deste plano.

Note que:

i. O vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é normal ao plano π e, portanto, o vetor $\overrightarrow{AP_0}$ tem a mesma direção de $\vec{n}$;



4) Distância de um ponto a um plano

4) Distância de um ponto a um plano

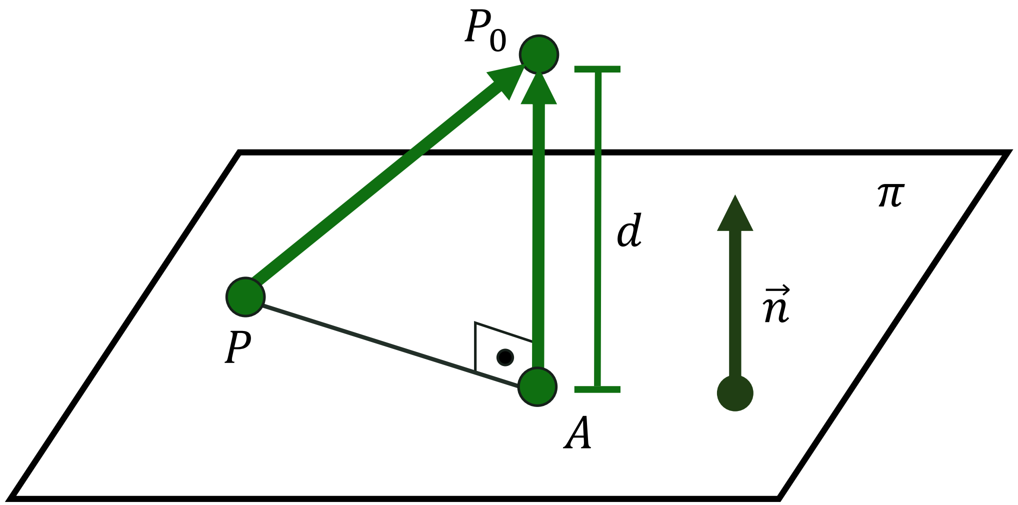
ii. A distância d do ponto P_0 ao plano π é

$$d(P_0, \pi) = |\overrightarrow{AP_0}|$$

iii. O vetor $\overrightarrow{AP_0}$ é a projeção do vetor $\overrightarrow{PP_0}$ na direção de $\vec{n}$.

Pela fórmula da projeção,

$$\overrightarrow{AP_0} = \left(\frac{\overrightarrow{PP_0} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\right)\vec{n}$$



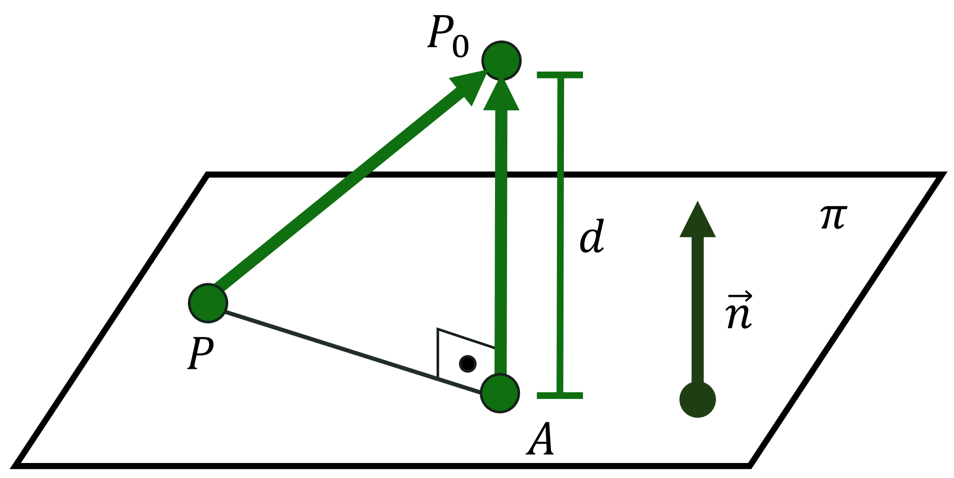
4) Distância de um ponto a um plano

Assim,

$$d(P_0,\pi) = |\overrightarrow{AP_0}| = \left|\left(\frac{\overrightarrow{PP_0}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\right)\vec{n}\right|$$

$$d(P_0,\pi) = \left|\frac{\overrightarrow{PP_0}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\right||\vec{n}|$$

$$d(P_0,\pi) = \left|\overrightarrow{PP_0}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$$



4) Distância de um ponto a um plano

$$d(P_0,\pi) = \left| \overrightarrow{PP_0} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$$

Como

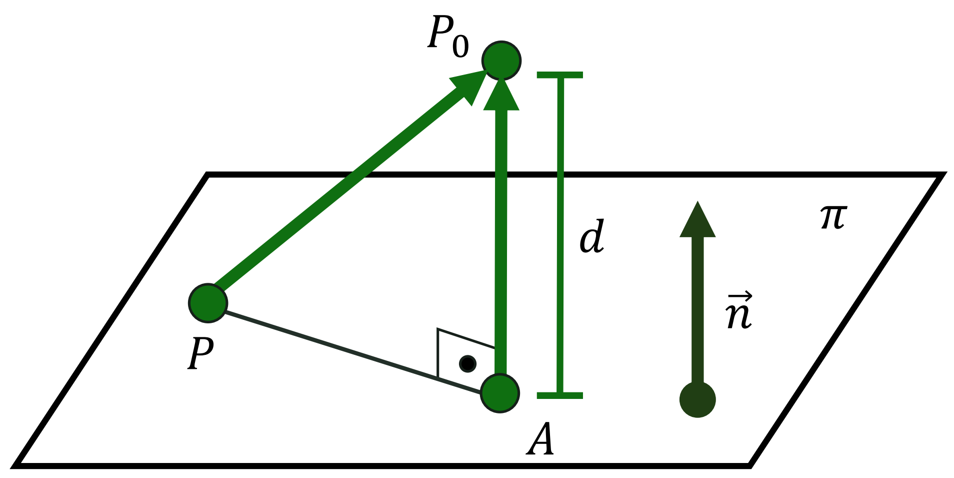
$$\overrightarrow{PP_0} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$$

e

$$\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

tem-se

$$d(P_0,\pi) = \left| (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) \cdot \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right|$$



4) Distância de um ponto a um plano

$$d(P_0,\pi) = \left|(x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) \cdot \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

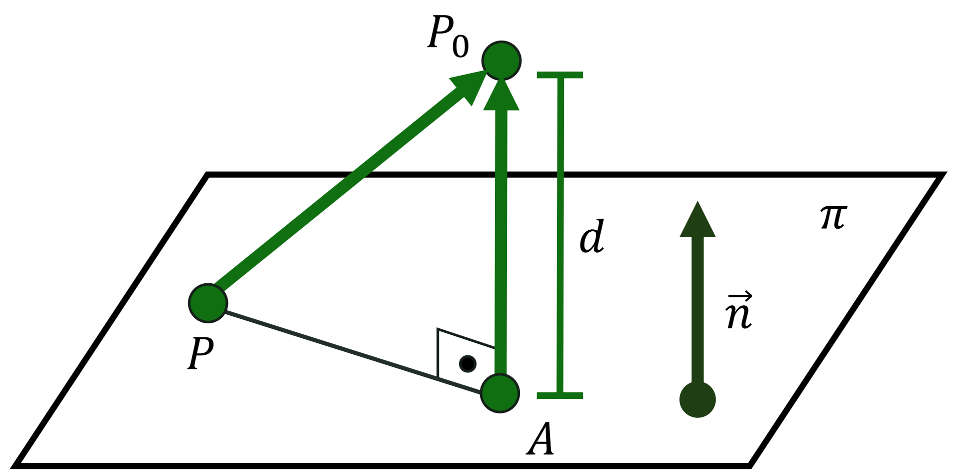
$$d(P_0,\pi) = \frac{|a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$d(P_0,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax + by + cz)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Da equação geral do plano, uma vez que P pertence ao plano π,

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$ax + by + cz = -d$$

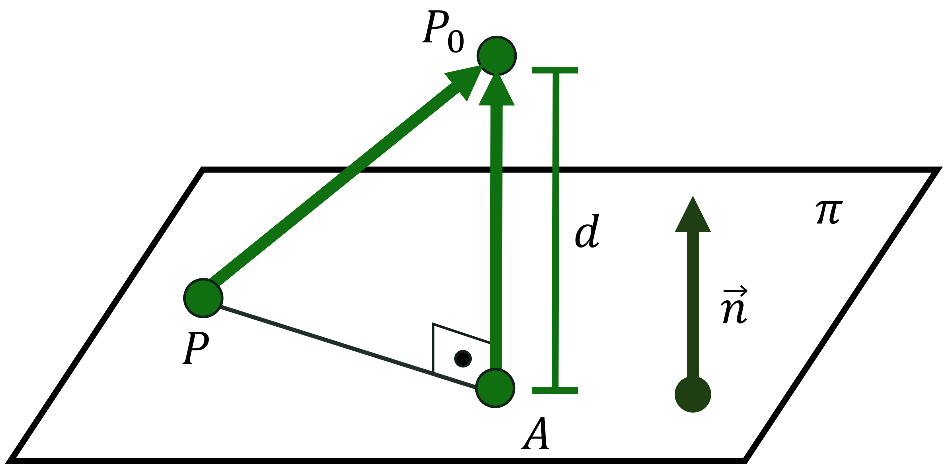


4) Distância de um ponto a um plano

Substituindo,

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - (-d)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\boldsymbol{d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$



Distância entre dois planos

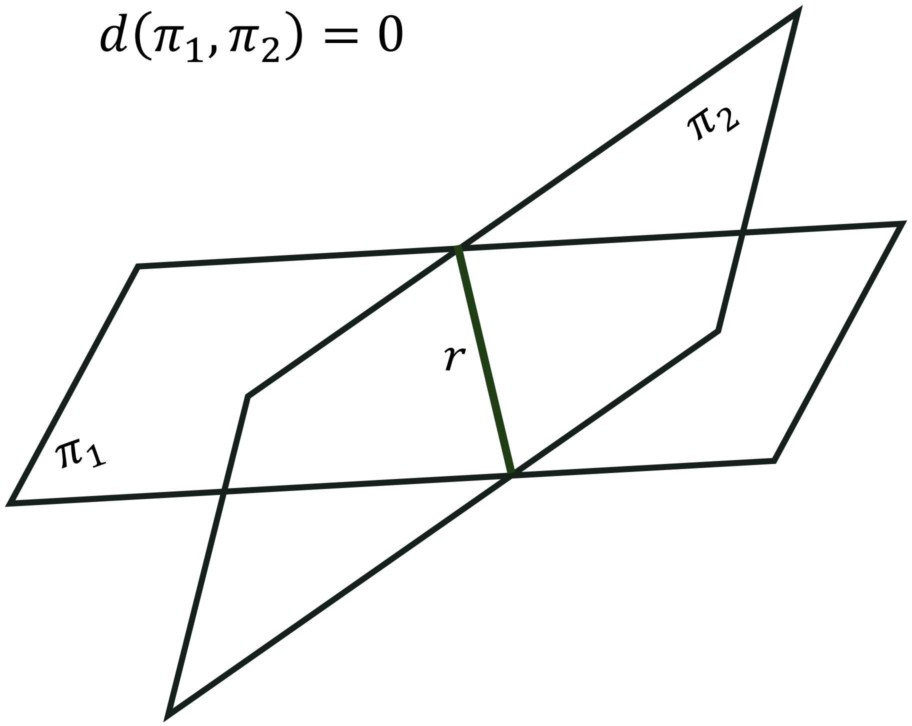
5) Distância entre dois planos

O cálculo da distância entre dois planos π_1 e π_2 depende da posição relativa entre eles.

1. Os planos não são paralelos

Neste caso, por definição,

$$d(\pi_1, \pi_2) = 0$$

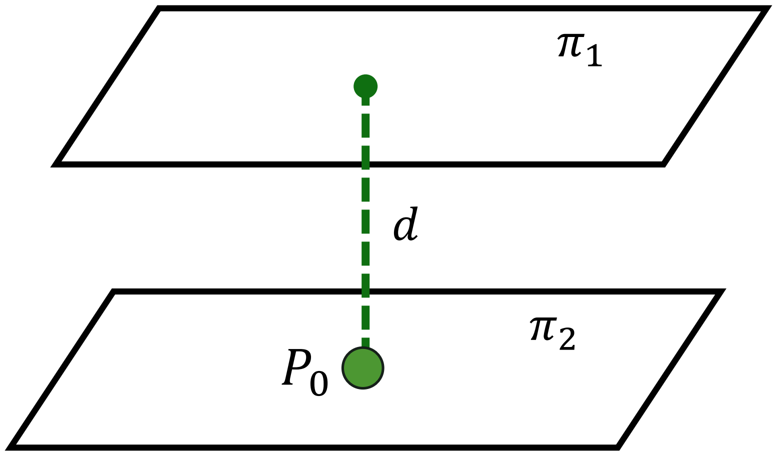


2. Os planos são paralelos

A distância entre os planos é a distância de um ponto qualquer P_0 de um dos planos ao outro, isto é

$$\boldsymbol{d(\pi_1, \pi_2) = d(P_0, \pi_1), P_0 \in \pi_2}$$

$$\boldsymbol{d(\pi_1, \pi_2) = d(P_0, \pi_2), P_0 \in \pi_1}$$



5) Distância entre dois planos

$$\boldsymbol{d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Distância de uma reta a um plano

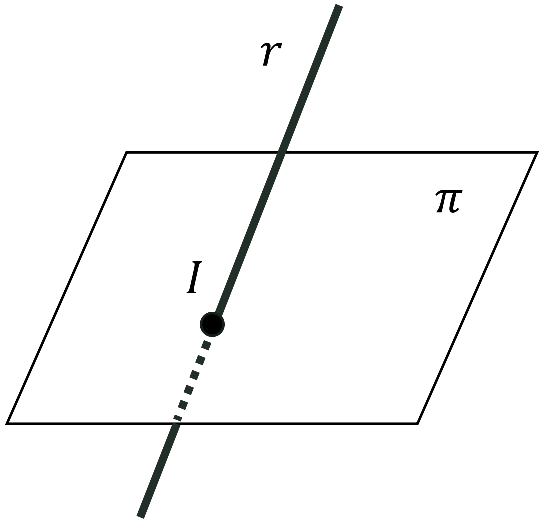
6) Distância de uma reta a um plano

O cálculo da distância entre uma reta e um plano depende da posição relativa entre eles.

1. A reta e o plano não são paralelos

Neste caso, por definição,

$$d(r, \pi) = 0$$



6) Distância de uma reta a um plano

$$\boldsymbol{d(P_0,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

2. A reta e o plano são paralelos

A distância da reta ao plano é a distância de um ponto qualquer P_0 da reta ao plano, isto é

$$\boldsymbol{d(r,\pi) = d(P_0,\pi), P_0 \in r}$$