Indução Matemática

Exercícios dos Slides

1.

Provar que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

- Base:

Com $n = 1$:

$$n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$
$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$
$$1 = \frac{2}{2}$$
$$1 = 1$$

Provamos que a proposição vale para $n = 1$.

- Passo:

Se funciona para k, funciona para $k + 1$:

$$p(k) \to p(k+1)$$

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k \cdot (k+1)}{2} \to \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$$

Analisando a expressão para $k + 1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1)$$

Substituindo o valor que já conhecemos para $\sum_{i=1}^{k} i$:

$$= \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k \cdot (k+1) + 2 \cdot (k+1)}{2}$$

Colocando $(k+1)$ em evidência:

$$= \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$$

Provamos então que:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$$

2.

$\forall n > 3, n \in \mathbb{N}$

$2^n < n!$

- Base:

Com $n = 4$:

$$2^n < n!$$

$$2^4 < 4!$$

$$16 < 24$$

Está provado que a proposição vale para $n = 4$.

- Passo:

Se funciona para k, funciona para $k+1$:

$$p(k) \to p(k+1)$$

$$2^k < k! \to 2^{k+1} < (k+1)!$$

Temos que:

$$(k+1)! = (k+1) \cdot k!$$

Além disso, temos:

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2^1$$

Já sabemos que $2^k < k!$. Resta analisar a relação entre $(k+1)$ e 2:

$$k > 3 \Rightarrow k+1 > 4 > 2$$

$$k+1 > 2$$

Juntando as informações ($2^k < k!$ e $2 < k+1$):

$$2^k \cdot 2 < k! \cdot (k+1)$$

Ou seja, provamos que:

$$2^{k+1} < (k+1)!$$