UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA	CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS (CCT) DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA (DMAT) GRUPO COLABORATIVO DE ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR*

SEGUNDA LISTA DE EXERCÍCIOS DE ALI-001**

ESPAÇOS VETORIAIS

Questões:

1. Seja $V = \mathbb{R}^2$ o conjunto de todos os pares ordenados de números reais, munido das operações de adição (+) e multiplicação por escalar (.) **usuais**, definidas por:

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b), \qquad \alpha.(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Verifique se os seguintes subconjuntos de V são fechados para as operações de adição e/ou de multiplicação por escalar:

a) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq 0\}$.
b) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\}$.
c) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x.y \leq 0\}$
d) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x.y = 0\}$
e) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 2x + 3y \geq 0\}$
f) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 2x + 3y = 0\}$
g) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x + 3y = 1\}$
h) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = |x|\}$
i) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq x^2\}$.
j) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = e^x\}$.
k) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. Seja $V = M(2,2)$ o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem 2×2, munido das operações **usuais** de adição entre matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar. Verifique se os seguintes subconjuntos de V são fechados para as operações de adição e/ou de multiplicação por escalar:

a) $W = \{A \in M(2,2);\ A \text{ é } invertível\}$.
b) $W = \{A \in M(2,2);\ A^2 = A\}$.
c) $W = \{A \in M(2,2);\ A.A^T = 3A\}$.
d) $W = \{A \in M(2,2);\ A^T + 2A = I\}$, em que I é a matriz identidade de ordem 2×2.

* Professores participantes do Grupo Colaborativo no semestre 2023/1: Graciela Moro, Katiani da Conceição Loureiro e Marnei Luis Mandler.

e) $W = \{A \in M(2,2);\ A^T + A = 0\}$, em que 0 é a matriz nula de ordem 2×2.

f) $W = \{A \in M(2,2);\ AB = BA\}$, em que $B \in M(2,2)$ é uma matriz fixada.

g) $W = \{A \in M(2,2);\ A^T.C = -C.A\}$, em que $C \in M(2,2)$ é uma matriz fixada.

h) $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2);\ \ a+b+c+d \geq 0\right\}$

i) $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2);\ \ 2a - b + 3d = 0\right\}$

j) $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2);\ a = 2b - 3c \ \text{ e } \ d = -5b + 7c\right\}$

k) $W = \left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in M(2,2);\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$

3. Seja $V = \mathbb{R}^2$ o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e considere as operações de adição $(+)$ e multiplicação por escalar $(.)$ definidas em V como:

$$(x, y) + (s, t) \ = \ (x + s + 1, y + t \ - \ 2),$$
$$\alpha.(x, y) = (\alpha x + \alpha \ - 1, \alpha y - 2\alpha + 2).$$

a) Calcule $u + v$ e $\alpha.u$ para $u = (-2, 3)$, $v \ = \ (1, -2)$ e $\alpha \ = \ 2$.

b) Encontre o elemento $\vec{0} \in V$ tal que $u + \vec{0} = u$, para todo $u \in V$.

c) Dado $u = (x, y) \in V$, determine o elemento $-u$.

d) Mostre que $u + (-u) = -u \ + \ u \ = \vec{0}$ é válido para todo $u \in V$.

e) Verifique se V é ou não um espaço vetorial com as operações de (+) e (.) dadas acima.

4. Seja $V = \mathbb{R}^2$ o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e considere as operações de adição (+) e multiplicação por escalar (.) definidas em V como

$$(x, y) + (s, t) = (x + s, 0) \qquad \text{e} \qquad \alpha.(x, y) = (\alpha x, 0).$$

Com essas operações, V é um espaço vetorial? Caso não seja, indique quais axiomas não são satisfeitos.

5. Seja $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$ o conjunto de todos os pares ordenados de números reais cujas abscissas são sempre positivas e considere as operações de adição (+) e multiplicação por escalar (.) definidas em V como

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y.b) \qquad \text{e} \qquad \alpha.(x, y) = (\alpha x, y^{\alpha}).$$

Responda aos itens abaixo:

a) Verifique se V é fechado para as operações acima definidas.

b) Encontre o elemento $\overrightarrow{0_V} \in V$ tal que $u + \overrightarrow{0_V} = u$, para todo $u \in V$.

c) Dado $u = (x, y) \in V$, determine o elemento $-u \in V$ tal que $u + (-u) = \vec{0}_V$.

d) Verifique se V é ou não um espaço vetorial com as operações de (+) e (.) dadas acima. Caso não seja, indique quais axiomas não são satisfeitos.

6. Seja $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x < 0 \ \text{ e } \ y < 0\}$ o conjunto de todos os pares ordenados de números reais cujas coordenadas são ambas sempre negativas e considere as operações de adição (+) e multiplicação por escalar (.) definidas em V como

$$(x,y) + (a,b) = (-xa, -yb) \qquad \text{e} \qquad \alpha.(x,y) = ((-1)^{\alpha+1}x^{\alpha}, (-1)^{\alpha+1}y^{\alpha}).$$

Responda aos itens abaixo:

a) Verifique se V é fechado para as operações acima definidas.

b) Encontre o elemento $\overrightarrow{0_V} \in V$ tal que $u + \overrightarrow{0_V} = u$, para todo $u \in V$.

c) Dado $u = (x,y) \in V$, determine o elemento $-u \in V$ tal que $u + (-u) = \overrightarrow{0_V}$.

d) Mostre que $1.u = u$, para todo $u \in V$.

e) Verifique se V é ou não um espaço vetorial com as operações de (+) e (.) dadas acima. Caso não seja, indique quais axiomas não são satisfeitos.

7. Verifique se o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a um, com coeficientes reais, denotado por $P_1 = \{a + bx;\ \ a,b \in \mathbb{R}\}$, munido das operações de adição e multiplicação por escalar definidas por:

$$p(x) + q(x) = (a + bx) + (c + dx) \ = \ (a + d) + (b + c)x,$$
$$\alpha(a + bx) = (\alpha a) + (\alpha b)x$$

é ou não um espaço vetorial. Caso não seja, indique quais axiomas não são satisfeitos.

8. Em $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \ \text{ e } y > 0\}$, considere as operações **não usuais** de adição e multiplicação por escalar definidas por

$$(x,y) + (a,b) = \left(7xa, \frac{1}{2}yb\right) \qquad\qquad k(x,y) = (x^k, y^k).$$

a) Verifique se existe elemento neutro aditivo em V, isto é, se existe $\overrightarrow{0_V} \in V$ tal que $u + \overrightarrow{0_V} = u, \forall u \in V$.

b) Dado $u = (x,y) \in V$, verifique se existe um elemento oposto aditivo para u, ou seja, se existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = \overrightarrow{O_V}$. Caso exista tal oposto, exiba-o.

c) Verifique se é válida ou não a propriedade $k(u + v) = ku + kv$ para todos $u, v \in V, k \in \mathbb{R}$.

d) Verifique se é válida ou não a propriedade $(k_1 + k_2)u = k_1 u + k_2 u$ para todos $u \in V,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

e) Verifique se o conjunto $W = \{(x,y) \in V;\ \ y = 98x^2\}$ é fechado ou não para as operações de adição e/ou de multiplicação por escalar **não usuais** definidas acima.

9. Em cada um dos itens abaixo, verifique se o subconjunto W é um subespaço do espaço vetorial V dado, considerando as operações usuais de adição e multiplicação em V:

a) $V = \mathbb{R}^3$ e $W \ = \ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + 3y - \ z \ = 0\}$.

b) $V = \mathbb{R}^3$ e W = $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 7x - 5y - 9z \geq \ 0\}$.

c) $V = \mathbb{R}^3$ e $W \ = \ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z \ = 1\}$.

d) $V = P_2 = \{a + bx + cx^2; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{a + bx + cx^2 \in P_2;\ a = -9c$ e $b = 7c\}$.

e) $V = P_n$ (o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n) e $W = \{p \in P_n;\ p(-1) = -p(1)\}$.

f) $V = P_n$ (o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n) e $W = \{p \in P_n;\ p(6) = p(2)p(3)\}$.

g) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = 0\right\}$.

h) $V = M(3,1)$ e $W = \{X \in M(3,1); AX = 0\}$, em que A é uma matriz de ordem 3×3 fixada.

i) $V = M(3,1)$ e $W = \{X \in M(3,1); AX = B\}$, em que A é uma matriz de ordem 3×3 fixada e B é uma matriz não nula de ordem 3×1 fixada.

j) $V = M(2,2)$ e $W = \{X \in M(2,2);\ \det(X) = 0\}$.

k) $V = M(2,2)$ e $W = \{A \in M(2,2); A \text{ é uma matriz antissimétrica}\}$.

l) $V = M(2,2)$ e $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2);\ b = a \ \ e \ \ d = -a + 6c\right\}$.

10. Em cada item, represente W algebricamente e a seguir verifique se W é um subespaço vetorial do espaço vetorial V dado, considerando as operações usuais nele definido.

a) $V = \mathbb{R}^2$, W é o conjunto dos pares ordenados pertencentes à curva $y = x^3$.

b) $V = M(2,2)$; W é o conjunto de todas as matrizes simétricas de ordem 2×2.

c) $V = F(\mathbb{R})$ (o conjunto de todas as funções reais de uma variável real); W é o conjunto das funções reais pares.

d) $V = F(\mathbb{R})$; W é o conjunto dos polinômios de grau exatamente igual a dois.

11. Seja $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$, com as operações de adição (+) e multiplicação por escalar (.) definidas em V por

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y.b) \qquad \text{e} \qquad \alpha.(x, y) = (\alpha x, y^{\alpha}).$$

Verifique se os subconjuntos abaixo são ou não subespaços vetoriais de V:

a) $W = \{(x, y) \in V; y = e^{-x}\}$

b) $W = \{(x, y) \in V; y = |x|\}$

c) $W = \{(x, y) \in V; y = 5x\}$

d) $W = \{(x, y) \in V; y = x^2\}$

e) $W = \{(x, y) \in V; x = \ln(y)\}$

12. Em $V = \mathbb{R}^3$, munido com as operações usuais, determine o valor de $k \in \mathbb{R}$ para o qual o elemento $v = (k, -105, -k)$ é escrito como uma combinação linear de $v_1 = (3, 2, -6)$ e $v_2 = (4, 7, 17)$. A seguir, exiba tal combinação linear.

13. Em $V = M(2,2)$, munido com as operações usuais, verifique se a matriz $C = \begin{bmatrix} -61 & -15 \\ -33 & 14 \end{bmatrix}$ pode ser escrita como uma combinação linear de $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$. Em caso positivo, exiba todas as combinações lineares possíveis e indique se alguma das matrizes A_i pode ser descartada, sem causar prejuízo à combinação linear.

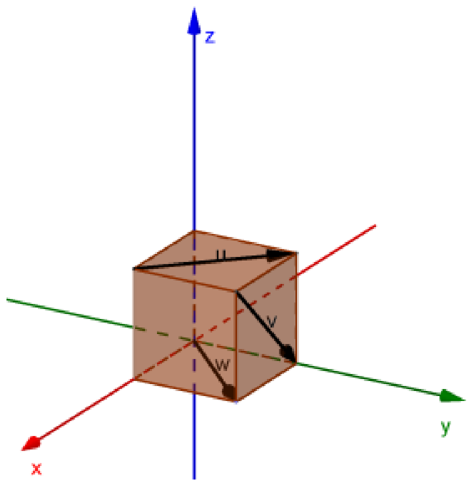
14. Em $V = M(2,2)$, munido com as operações usuais, mostre que qualquer matriz simétrica pode ser escrita como combinação linear de $A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$.

15. Em $V = P_3$, munido com as operações usuais, considere os elementos $p_1(x) = 1 + x - x^2 + x^3$, $p_2(x) = 1 - 2x + 3x^3$, $p_3(x) = -1 + 2x^2 - x^3$ e $p_4(x) = 3 - x - 3x^2 + 5x^3$. Verifique se os elementos $p(x) = 5 + 7x - 9x^2 + 2x^3$ e $q(x) = 6 - 4x - x^2 + 8x^3$ podem ser escritos como combinação linear de p_1, p_2, p_3 e p_4. Em caso positivo, determine tais combinações lineares.

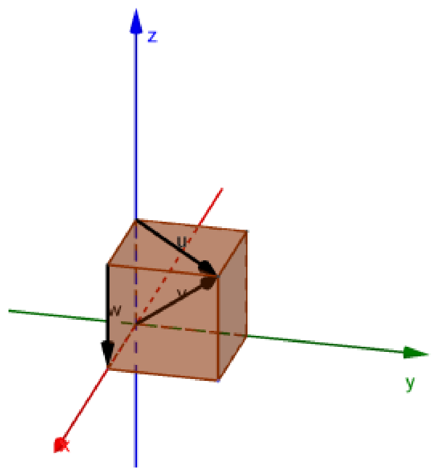
16. Em um espaço vetorial V genérico, verifique se u e v são combinações lineares de $v_1, v_2, v_3 \in V$, então $w = -5u + 8v$ também é uma combinação linear de v_1, v_2, v_3.

17. Determine se os elementos u, v, w de $\mathbb{R}^3$ exibidos nas figuras abaixo são linearmente dependentes ou linearmente independentes. Explique por que.

a)



b)



18. Verifique se o conjunto $\beta = \{(1,2,3), (1,3,1), (0,3,1), (1,4,5)\}$ é LI ou LD.

19. Dados os elementos $v_1 = (2,-1,3)$, $v_2 = (-1,0,-2)$ e $v_3 = (2,-3,1)$, verifique se $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ é LI ou LD. Caso seja LD, escreva um dos elementos como uma combinação linear dos demais.

20. Dado o conjunto $\beta = \{(1,1,3), (1,2,1), (0,1,3), (1,4,5)\}$, extraia um subconjunto LI de β.

21. Determine se as colunas da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & -7 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$ formam um conjunto linearmente dependente ou independente. A seguir, determine o número de soluções do sistema homogêneo $AX = 0$. Existe alguma relação entre a dependência ou independência linear das colunas da matriz A e o número de soluções de um sistema homogêneo?

22. Seja $\beta = \{u, v, w\}$ um subconjunto LI de um espaço vetorial V. Verifique se os subconjuntos abaixo são LI ou LD:

a) $\sigma = \{u + v - 3w, u + 3v - w, v + w\}$.

b) $\sigma = \{u - 2v + 5w, 3u - 7v - 8w, 2u - 3v + 33w\}$.

c) $\sigma = \{u + 3v - 4w, -2u - 5v - w, 5u - v + 125w\}$.

d) $\sigma = \{\vec{0}, u, v, w\}$.

23. Em $V = M(2,2)$, com as operações usuais, determine se os elementos $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ são LI ou LD.

24. Em $V = P_3$, munido das operações usuais, determine se os elementos $p_1(x) = 1 + x - x^2 + x^3$ $p_2(x) = 1 - 2x + 3x^3$, $p_3(x) = -1 + 2x^2 - x^3$ e $p_4(x) = 3 - x - 3x^2 + 5x^3$ são LI ou LD.

25. Considere o subespaço vetorial $H = \{(x, x, z);\ x, z \in \mathbb{R}\}$ para responder aos itens abaixo:

a) interprete geometricamente o conjunto H.

b) determine um conjunto de geradores para H.

c) verifique se o subespaço vetorial H é gerado pelos elementos $(2, 2, 0)$ e $(-1, 1, 0)$.

26. Verifique se as igualdades abaixo são verdadeiras ou falsas:

a) $\mathbb{R}^3 = ger\{(1, 2, 3), (-1, -1, 0), (2, 1, -1)\}$.

b) $P_2 = ger\{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$.

27. Determine o subespaço de $V = M(2,2)$ que é gerado por $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

28. Considere o subespaço vetorial de P_3 dado por

$$W = \{a + bx + cx^2 + dx^3;\ c + 3d = 0 \text{ e } a + b - 7d = 0\}$$

a) Verifique se W é um subespaço vetorial de P_3, considerando as operações usuais.

b) Encontre os geradores de W.

29. Considere o subespaço S de $\mathbb{R}^4$ dado por $S = ger\{(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(-2,2,1,1),(1,0,0,0)\}$

a) O elemento $v = (2,-3,2,2) \in S$? Justifique sua resposta.

b) Determine a condição algébrica que deve ser satisfeita para que $v = (x,y,z,t) \in S$.

c) Encontre uma base e a dimensão para S.

d) $S = \mathbb{R}^4$? Por quê?

30. Encontre os geradores para os subespaços vetoriais de $M(3,1)$ que são formado por todas as soluções dos seguintes sistemas homogêneos

a) $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + 5z = 0 \\ 3x - 4y - 7z = 0 \\ -2x + 9y + 144z = 0 \\ 5x - 3y + 69z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ -x - 2y + 6z = 0 \\ 4x - y - 59z = 0 \end{cases}$

31. Sejam $U = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); a + b + c = 0\right\}$ e $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2);\ b + 2d = 0\right\}$ dois subespaços vetoriais de $M(2,2)$. Determine os geradores para U, W e $U \cap W$.

32. Para quais valores de $k \in \mathbb{R}$ os elementos $\{(1,2,0,k),(0,-1,k,1),(0,2,1,0),(1,0,2,3k)\}$ geram um subespaço tridimensional em $\mathbb{R}^4$?

33. Determine a interseção entre os subespaços $U = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3;\ \ a + b - c + 3d = 0\}$ e $W = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3;\ b - 2c + 3d = 0\}$.

34. Determine uma base e a dimensão para o subespaço

$$W = \{(x,y,z,w,t) \in \mathbb{R}^5;\ x - 5z + 2w = 0, y + 2z - 3t = 0, 4x + 10y - 7w = 0\}.$$

35. Seja W o subespaço vetorial de $M(2,2)$ dado por

$$W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2);\ a + 6d = 0 \text{ e } c - 2a - 5b = 0\right\}.$$

a) Determine uma base e a dimensão de W.

b) Verifique se o conjunto $\alpha = \left\{\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 24 & -2 \end{bmatrix}\right\}$ também é uma base para W.

36. Considere W o subespaço vetorial de P_3 dado por

$$W = ger\{1 - 2x^2,\ 3 + x,\ 1 - x + x^3,\ 4 - x + 2x^2 + 2x^3\}.$$

a) Determine a condição algébrica do subespaço gerado W.

b) Exiba uma base e determine a dimensão de W.

37. Exiba um contraexemplo que comprove que a união de dois subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial não precisa ser, necessariamente, um subespaço vetorial.

38. Exiba exemplos de dois subespaços W_1 e W_2 de $\mathbb{R}^3$ tais que $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$. A seguir, analise se essa soma é direta. Justifique sua resposta.

39. Sejam U e W subespaços de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 2 e 3, respectivamente. Mostre que a dimensão de $U \cap W$ é pelo menos igual a 1. O que ocorre se a dimensão de $U \cap W$ for 2? Essa dimensão pode ser igual a 3? Justifique sua resposta.

40. Sejam U e W subespaços de P_9 de dimensões iguais a 7 e 6, respectivamente. Mostre que U e W possuem, obrigatoriamente, pelo menos um subespaço tridimensional em comum.

41. Seja $B \in M(n,n)$ uma matriz não nula fixada e considere $W = \{A \in M(n,n);\ A^T + AB = 0\}$.

a) Mostre que W é subespaço de $M(n,n)$.

b) Considerando $n = 2$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, determine uma base e a dimensão de W.

42. Em $V = \mathbb{R}^3$, munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, considere os seguintes subespaços vetoriais:

$$U = ger\{(1,-2,0),(1,1,1)\} \quad \text{e} \quad W = ger\{(0,3,1),(-1,1,2)\}.$$

Determine:

a) a condição algébrica para que $u = (x,y,z)$ pertença a U.

b) a condição algébrica para que $u = (x,y,z)$ pertença a W.

c) uma base e a dimensão para $U \cap W$ e $U + W$.

d) $U + W = \mathbb{R}^3$? Essa soma é direta?

43. Em $V = M(2,2)$, munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, considere o subespaço vetorial $S = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2);\ a + b = 0 \ \text{ e } \ c + d = 0\right\}$.

a) Determine uma base e indique a dimensão de S.

b) Construa uma base para $M(2,2)$ que contenha a base de S obtida no item anterior.

44. Em $V = \mathbb{R}^4$, munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, considere os seguintes subespaços vetoriais:

$$W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ -6x - 2y + 3z + t = 0\}$$

$$W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ 3x + y - 5t = 0 \quad \text{e} \quad x + 5y - 3z = 0\}.$$

Determine uma base e a dimensão para: a) W_1 b) W_2 c) $W_1 \cap W_2$ $d)$ $W_1 + W_2$

45. Em $V = M(2,2)$, munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, considere os seguintes subconjuntos:

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2)\;;\; b = c \;\text{ e }\; a = -b \right\} \qquad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2)\;;\; b = d \right\}$$

a) Verifique se W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de $M(2,2)$.

b) Determine uma base e a dimensão para:

$i)$ W_1 ii) W_2 iii) $W_1 \cap W_2$ iv) $W_1 + W_2$

46. Em $V = P_3$, munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, considere os seguintes subespaços vetoriais:

$$W_1 = \{p \in P_3;\; p(-1) + 2p(1) = 0\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{p \in P_3;\; p(2) = p(0)\}.$$

a) Determine uma condição algébrica para que $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W_1$.

b) Determine uma condição algébrica para que $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W_2$.

c) Determine uma base e a dimensão para W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.

47. Em $V = P_3$, munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, considere os seguintes subespaços vetoriais

$$W_1 = \{p(x) \in P_3;\; p(0) + p(-1) = 0\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{\, a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3\;;\; b + 3c - 4d = 0\}.$$

Determine uma base e a dimensão para: a) W_1 b) W_2 c) $W_1 \cap W_2$ d) $W_1 + W_2$.

48. Em $V = \mathbb{R}^5$, munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, considere os seguintes subespaços vetoriais:

$$W_1 = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5;\; -x + z + w = 0,\quad x + w = 0\}$$

$$W_2 = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5;\; -y + z + t = 0\}$$

$$W_3 = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5;\; -2x + t + 2w = 0\}.$$

a) Determine uma base e a dimensão para $W_1 \cap W_2 \cap W_3$.

b) Determine uma base e a dimensão para $W_1 + W_3$.

c) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^5$? Essa soma é direta?

49. Em $V = P_3$, munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, considere os seguintes subespaços vetoriais $W = \{p \in P_3;\; p(0) = 0\}$ e

$$U = ger\{1 + 2x + x^2, -1 + 2x^2 + 3x^3, -1 + 4x + 8x^2 + 9x^3\}$$

a) Determine a condição algébrica para que $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ pertença a U.

b) Exiba uma base e a dimensão para: $i)$ U ii) W iii) $U \cap W$ iv) $U + W$

50. Em $V = M(2,2)$, munido das operações usuais de adição e multiplicação por escalar, considere os subespaços

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2);\ \ a - 3b + 5c + 4d = 0 \quad \text{e} \quad 3a - 8b + 2c - 7d = 0 \right\}$$

e
$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2)\ ;\ -2a + 5b + 4c + d = 0 \right\}.$$

Determine uma base e a dimensão para:

a) W_1. b) W_2. c) $W_1 \cap W_2$. d) $W_1 + W_2$.

51. Considere os subespaços vetoriais de $M(2,2)$ dados por $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2);\ a + d = 0 \right\}$ e

$$W = ger\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

a) Determine uma condição algébrica para que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ pertença a W.

b) Exiba uma base e a dimensão para: $i)$ U ii) W iii) $U \cap W$ iv) $U + W$

52. Sejam $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$, $\beta_1 = \{(-1,1),(1,1)\}$, $\beta_2 = \{(\sqrt{3},1),(\sqrt{3},-1)\}$ e $\beta_3 = \{(2,0),(0,2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

a) Encontre a matrizes que efetuam a mudança:

i) da base β_1 para a base β. ii) da base β para a base β_1.

iii) da base β para a base β_2. iv) da base β para a base β_3.

b) Determine as coordenadas do elemento $v = (3,-2)$ em relação às bases β, β_1, β_2 e β_3.

c) Se as coordenadas de um elemento u em relação à base β_1 são dadas por $[u]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, determine as coordenadas de u em relação às bases: i) β. ii) β_2. iv) β_3.

53. Em P_4, considere as bases $\alpha = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ e $\beta = \{2, 2x, 4x^2, 8x^3, 16x^4\}$.

a) Determine a matriz mudança de base de α para β.

b) Se $[p]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, determinar $[p]_\beta$

c) Determine o polinômio $p(x)$ cujas coordenadas são dadas no item anterior.

54. Seja $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2);\ d = 0\right\}$ um subespaço vetorial de $M(2,2)$. Considere as bases α e β para W dadas por

$$\alpha = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -11 & 0 \end{bmatrix}\right\} \quad \text{e} \quad \beta = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

a) Determine as matrizes mudança de base $[I]_{\beta}^{\alpha}$ e $[I]_{\alpha}^{\beta}$.

b) Se $[A]_{\beta} = \begin{bmatrix} \pi \\ e \\ 0 \end{bmatrix}$, determine $[A]_{\alpha}$.

c) Se $[B]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 4 \\ -20 \\ 10 \end{bmatrix}$, determine $[B]_{\beta}$.

55. Sejam α e β bases de $\mathbb{R}^3$. Determine a base β sabendo que $\alpha = \{(1,-1,0), (0,1,0), (0,0,-1)\}$ e que a matriz mudança de base de α para β é dada por

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

56. Seja $\alpha = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ uma base para um subespaço vetorial de $M(2,2)$ e β outra base para esse mesmo subespaço tal que

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine a base β.

b) Se $[A]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, determine $[A]_{\alpha}$.

57. Sejam V um espaço vetorial qualquer, munido das operações usuais de adição e multiplicação por escalar, e $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de V. Considere os elementos $u_1 = v_1 + v_2$, $u_2 = 2v_1 + v_2 - v_3$ e $u_3 = -v_2$.

a) Mostre que $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ também é uma base para V.

b) Determine a matriz mudança de base de β para α.

c) Encontre as coordenadas do elemento $w = u_1 + u_2 - u_3$ em relação à base α.

58. Sejam α e β bases de um espaço vetorial V qualquer.

a) Mostre que $\det\left([I]_{\beta}^{\alpha} . [I]_{\alpha}^{\beta}\right) = 1$.

b) Determine a matriz $[I]_{\alpha}^{\alpha}$.

59. Em $V = \mathbb{R}^3$, considere as bases $\beta = \{(1,2,3),(0,-1,2),(-1,0,5)$ e $\alpha = \{(1,1,1),(-1,1,0),(0,1,1)\}$.

a) Determine a matriz $[I]^{\beta}_{\alpha}$. b) Se $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, determine $[v]_\alpha$.

c) Determine a matriz $[I]^{\alpha}_{\beta}$. d) Se $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, determine$[v]_\beta$.

60. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta com argumentos consistentes:

a) A interseção entre dois subespaços vetoriais nunca é vazia.

b) A matriz $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ pertence ao subespaço $W = ger\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$.

c) Se $\{u, v, w\}$ é LI, então $\{u-v, v-w, u-w\}$ é LD.

d) O subespaço $W = ger\{(1,2,0),(2,4,0)\}$ é um plano em $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem.

e) Se $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de um espaço vetorial V, então o conjunto

$$\sigma = \{v_1 + v_3, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$$

também é uma base para V.

f) O subespaço $W = \{p(x) \in P_3;\ p(-3) + p(2) = 0\}$ é gerado pelos elementos $p_1(x) = 1 + 2x$; $p_2(x) = 13x + x^2$ e $p_3(x) = x^3 - 19x$.

g) O conjunto $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ é sempre uma base para o subespaço gerado $W = ger\{v_1, v_2, v_3\}$.

h) O conjunto $\beta = \{2, x^2, x + x^2\}$ é uma base para P_2.

i) As coordenadas de $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ em relação base $\alpha = \{2, 1+x, x + x^2, x^2 + x^3\}$ de P_3 são dadas por $[p]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.