UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Lista de Exercícios - Autovalores e autovetores

Legenda

Cálculos   Teoria   Geometria

Questões

1. Considere o quadrado determinado pelos pontos $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ e $D(0,1)$.Em cada item aplique o referido operador linear sobre o quadrado e verifique se é preservada a direção dos vetores AB, AC e AD.

   (a) Cisalhamento em x de duas unidades.

   (b) Cisalhamento em y de três unidades.

   (c) Dilatação de duas unidades.

   (d) Reflexão em torno da reta $y = 2x$.

   Além dos vetores AB, AC e AD, existem outros vetores que ao serem transformados (por cada um dos referidos operadores) preservam a direção? Quais?

2. Suponha que um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transforma os pontos indicados na Figura 1 nos pontos correspondentes da Figura 2:

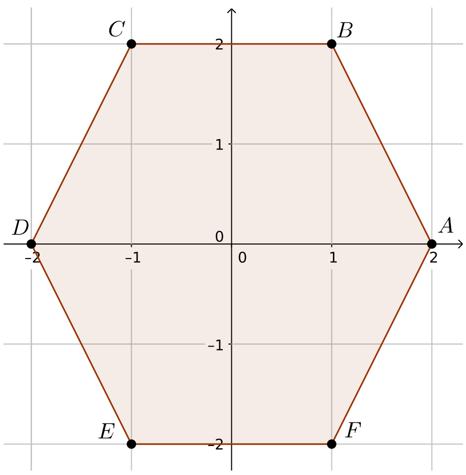

Figura 1: Domínio

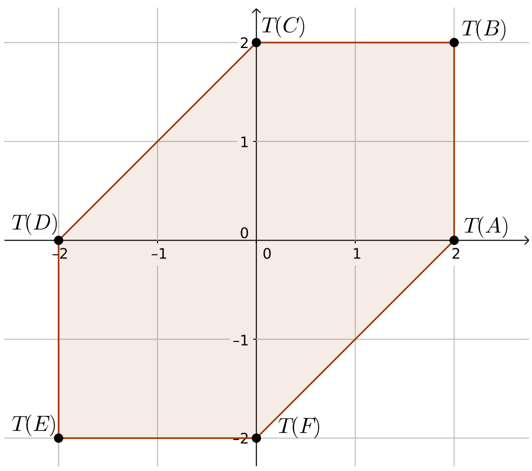

Figura 2: Contradomínio

   (a) Qual é a fórmula para $T(x, y)$?

   (b) Quais são os autovalores e os autovetores de T?

3. Encontre os autovalores e autovetores das transformações lineares dadas:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2y, x)$.

(b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (x+y, 2x+y)$.

(c) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (x+y, x-y+2z, 2x+y-z)$.

(d) $T: P_2 \to P_2$ tal que $T(ax^2+bx+c) = ax^2+cx+b$.

(e) $T: M(2,2) \to M(2,2)$ tal que $T(A) = A^T$.

4. Encontre os autovalores e autovetores correspondentes das matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. (ENADE) Uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ faz uma reflexão em relação ao eixo horizontal, conforme mostrado na Figura 3.

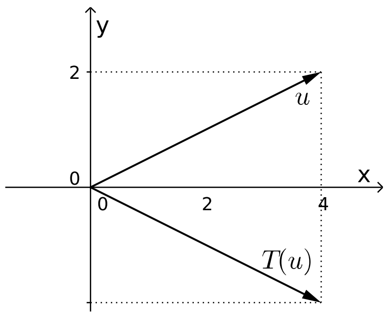

Figura 3: Aplicação de T em um vetor $u \in \mathbb{R}^2$

Essa transformação T:

(a) É dada por $T(x,y) = (-x,y)$.

(b) Tem autovetor $(0,-1)$ com autovalor associado igual 2.

(c) Tem autovetor $(2,0)$ com autovalor associado igual 1.

(d) Tem autovetor de multiplicidade 2.

(e) Não é inversível.

6. Construa uma matriz 2×2 **não diagonal** com autovalores 1 e -1.

7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Determine o conjunto $S = \{v \in \mathbb{R}^3 | Av = v\}$ e represente-o geometricamente.

(b) Determine uma base e a dimensão para S.

8. Na Figura 4 encontram-se os auto-espaços S_1, associado ao autovalor -1, e S_2, associado ao autovalor 0, de um operador linear no $\mathbb{R}^3$.

Determine:

(a) os autovetores desse operador.

(b) a fórmula explícita desse operador.

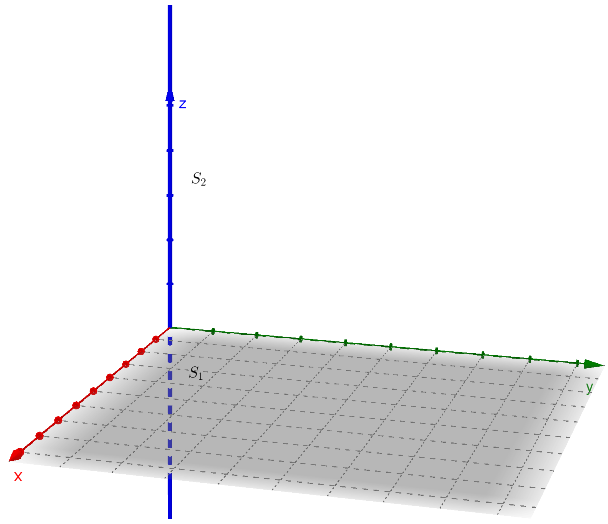

Figura 4: Autoespaços do operador linear

9. (ENADE) Seja A uma matriz quadrada de ordem n.

   (a) Se λ é um autovalor de A, mostre que 2λ é um autovalor de $2A$.

   (b) Se λ é um autovalor de A, mostre que λ^2 é um autovalor de A^2.

10. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que T tenha autovalores -2 e 3 associados aos autovetores $(3y, y)$ e $(-2y.y)$ respectivamente.

11. Que vetores **não nulos** do plano, quando cisalhados por $C(x, y) = (y - 3x, y)$ e em seguida girados de 45° (no sentido anti-horário) ficam **ampliados / reduzidos** (na mesma direção)? Em **quantas** vezes? Represente geometricamente os vetores e suas imagens.

12. Determine os autovalores e autovetores, se existirem, do operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ obtido quando se faz uma rotação de π radianos em torno do eixo x, seguida de uma contração de $\frac{1}{2}$. Represente graficamente os auto-espaços.

13. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear que dobra o comprimento do vetor $(1, -3)$ e triplica e muda o sentido do vetor $(3, -1)$.

   (a) Determine $T(x, y)$.

   (b) Calcule $T(0, 2)$.

   (c) Qual é a matriz do operador T na base $\alpha = \{(2, 1), (1, 2)\}$?

14. Seja $T : M(2, 2) \to M(2, 2)$ um operador com autovetores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ associados aos autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ e $\lambda_4 = 0$, respectivamente. Determine $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$.

15. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que é a projeção sobre a reta $y = \frac{x}{2}$, encontre os autovalores e autovetores da transformação T. Faça a representação geométrica dos auto-espaços.

16. Considere P_1 como o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a um. Seja $D : P_1 \to P_1$ dado por $D(p) = x \cdot p' + p'$. Determine os autovalores e autovetores de D.

17. Seja A uma matriz quadrada e A^T a sua transposta. As matrizes A e A^T possuem os mesmos autovalores e autovetores? Justifique sua resposta.

18. Determine os autovalores e autovetores da transformação linear, e faça a representação geométrica, que a cada vetor $v \in \mathbb{R}^3$ associa a sua projeção ortogonal no plano $x + y = 0$.

19. Um lançador de mísseis controlado por computador foi raqueado por forças inimigas. Especialistas descobriram que toda vez que o lançador é posicionado na direção do vetor $v = (x, y, z)$ (com o objetivo de acertar um alvo inimigo) automaticamente é redirecionado para a direção do vetor $w = (4x + 2y + 2z, 2x + 4y + 2z, 2x + 2y + 4z)$ evitando que o alvo seja atingido. Devido ao sistema do lançador, este só poderá ser reprogramado (com o objetivo de evitar a mudança automática de posição) se for encontrada um direção na qual a ação da mudança automática não tenha efeito, isto é, se for encontrada uma direção v tal que $w = kv$. Para resolver este problema foi chamado um matemático muito famoso chamado Roger. Como Roger resolveu este problema?

20. Seja $T : V \to V$ um operador linear.

    (a) Se $\lambda = 0$ é um autovalor de T, mostre que T não é injetora.

    (b) A recíproca é verdadeira? Ou seja, se T não é injetora, $\lambda = 0$ é autovalor de T?

21. Quais são os autovalores e autovetores do operador derivação $D : P_2 \to P_2$ dado por $D(p) = p'$.

22. Sejam $A, B \in M(n, n)$ matrizes triangulares com a mesma diagonal principal. Existe alguma relação entre os seus autovalores? Qual?

23. Mostre que o conjunto formado pelo vetor nulo e por todos os autovetores de um operador linear $T : V \to V$ associados a um autovalor λ é um **subespaço vetorial** de V.

24. Discuta a veracidade da seguinte afirmação: Se λ **não** é um autovalor de A, então o sistema linear $(A - \lambda I)v = 0$ só tem a solução trivial.

25. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Dizemos que uma matriz B é semelhante a uma matriz A se existir uma mamtriz inversível P tal que $B = P^{-1}AP$. Mostre que se B é semelhante a A, então as duas matrizes tem o mesmo polinômio característico e, portanto, os mesmos autovalores.

26. Mostre que se $B = R^{-1}AR$ e v é um autovetor de B associado a um autovalor λ então Rv é um autovetor de A associado a λ.

27. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por $T(x, y) = (7x - 4y, -4x + y)$. Determine uma base de R^2 formada por autovetores de T e mostre que a matriz do operador $[T]_\beta^\beta$ é diagonal.

28. Nos itens abaixo, considere que $T : V \to V$ é uma transformação linear. Se possível, determine uma matriz P que diagonaliza a matriz A de T e calcule $P^{-1}AP$.

    (a) $T : P_1 \to P_1$ definida por $T(a + bx) = (4a + 2b) + (a + 3b)x$

    (b) $T : P_1 \to P_1$ definida por $T(p(x)) = p(x + 1)$

29. Verifique se cada matriz A a seguir é diagonalizável. Caso seja, determine uma matriz P que diagonaliza A e calcule $P^{-1}AP$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

30. Considere o operador $T : R^3 \to R^3$ definido por $T(x, y, z) = (5x + 4z, x - 5y, 3z)$ e o operador $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido pela reflexão através do plano $\pi : x + 2z = 0$.

    (a) Determine $S \circ T$

    (b) $S \circ T$ é diagonalizável? Se for, encontre D e P tais que $D = P^{-1}[S \circ T]P$.

31. Determine o valor de k para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & k & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ seja diagonalizável.

32. Determine a de modo que a matriz A seja diagonalizável. Para o valor de a encontrado, determine uma matriz inversível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

33. Encontre os autovalores de A^9 se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

34. Calcule A^{10} para $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

35. Seja T um operador linear que preserva o comprimento do vetor $v_1 = (1, 0, 0)$, duplica o comprimento do vetor $v_2 = (0, 2, 0)$ e inverte o sentido do vetor $v_3 = (0, 2, 1)$. Determine o operador linear T^{20}.

36. Seja $T : V \to V$ o operador linear que tem autovalores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \ldots, \lambda_n = n$ associados aos autovetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, respectivamente. Sabendo que $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e que $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$, determine $[T(v)]_\beta$.

37. Verifique se o operador $T : \mathbb{R}^3 \to R^3$ dado por $T(x, y, z) = (x + y + z, -2x + 4y + 2z, 2z)$ é diagonalizável ou não. Em caso afirmativo, determine $T^{22}(x, y, z)$.

38. Seja A uma matriz inversível. Prove que se A é diagonalizável então A^{-1} também é.

39. Seja A uma matriz 4×4 e seja λ um autovalor de multiplicidade 3. Se $A - \lambda I$ tem posto 1, A é diagonalizável? Explique.

40. Classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa. Justifique cada resposta.

(a) Se A é diagonalizável então A tem n autovalores distintos.

(b) Se A é inversível então A é diagonalizável.

(c) Uma matriz quadrada com vetores-coluna linearmente independentes é diagonalizável.

(d) Se A é diagonalizável, então cada um de seus autovalores tem multiplicidade 1.

(e) Se nenhum dos autovalores de A é nulo, então $\det(A) \neq 0$.

(f) Se u e v são autovetores de A associados, respectivamente, aos autovalores distintos λ_1 e λ_2, então $u + v$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_1 + \lambda_2$.

(g) Se v é autovetor dos operadores $T : V \to V$ e $S : V \to V$ então v é autovetor do operador $T + S$.

41. (ENADE) O que é correto afirmar a respeito de um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que possua os números 2 e 3 como únicos autovalores?

(a) Pode existir uma base de $\mathbb{R}^3$ na qual a matriz desse operador é da forma $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Existe base de $\mathbb{R}^3$ na qual a matriz desse operador tem uma linha nula.

(c) Existe base de $\mathbb{R}^3$ na qual a matriz desse operador é da forma $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(d) É possível que o autoespaço associado a algum dos autovalores de T tenha dimensão 2.

(e) O polinômio característico de T é igual a $(\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

42. Mostre que se λ é autovalor de uma matriz inversível A associado ao autovetor v, então λ^{-1} é um autovalor de A^{-1} associado ao autovetor v.

Soluções

1.

2. (a) $T(x, y) = \left(\dfrac{2x + y}{2}, y\right)$

   (b) $\lambda = 1$ e $v = (x, 0)$, com $x \neq 0$

3. (a)
   - Para $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ tem-se $v_1 = (-\sqrt{2}y, y)$, com $y \neq 0$.
   - Para $\lambda_2 = \sqrt{2}$ tem-se $v_2 = (\sqrt{2}y, y)$, com $y \neq 0$.

   (b)
   - Para $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ tem-se $v_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}y, y)$, com $y \neq 0$.
   - Para $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ tem-se $v_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}y, y)$, com $y \neq 0$.

   (c)
   - Para $\lambda_1 = -2$ tem-se $v_1 = (x, -3x, x)$, com $x \neq 0$.
   - Para $\lambda_2 = -1$ tem-se $v_2 = (-2z, 4z, z)$, com $z \neq 0$.
   - Para $\lambda_3 = 2$ tem-se $v_3 = (y, y, y)$, com $y \neq 0$.

   (d)
   - Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ tem-se $p_1(x) = ax^2 + bx + b$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
   - Para $\lambda_2 = -1$ tem-se $p_2(x) = -bx + b$, com $b \neq 0$.

(e)
- Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ tem-se $A_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.
- Para $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$ tem-se $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{bmatrix}$, com $c \neq 0$.

4. (a) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ tem-se $v_1 = (x, 0, 0)$, com $x \neq 0$.

   (b)
   - Para $\lambda_1 = -1$ tem-se $v_1 = (-z, -2z, z)$, com $z \neq 0$.
   - Para $\lambda_2 = 1$ tem-se $v_2 = (-x, x, 0)$, com $x \neq 0$.
   - Para $\lambda_3 = 3$ tem-se $v_3 = (x, 0, x)$, com $x \neq 0$.

   (c)
   - Para $\lambda_1 = -1$ tem-se $v_1 = (-\frac{1}{3}z, 0, z, 0)$, com $z \neq 0$.
   - Para $\lambda_2 = 1$ tem-se $v_2 = (0, -t, 0, t)$, com $t \neq 0$.
   - Para $\lambda_3 = 6$ tem-se $v_3 = (\frac{1}{4}z, 0, x, 0)$, com $x \neq 0$ ou $z \neq 0$.

5. Apenas o item (c) é verdadeiro.

6.

7. (a) Para $\lambda = 1$ tem-se $S_1 = \left\{ (\dfrac{z-y}{2}, y, z); y, z \in \mathbb{R} \right\}$ e para $\lambda = 7$ tem-se $S_2 = \left\{ (-\dfrac{1}{2}z, -z, z), z \in \mathbb{R} \right\}$.

   (b) Para S_1, $\alpha = \{(-1, 2, 0), (1, 0, 2)\}$ e para S_2, $\beta = \{(-1, -2, 2)\}$.

8. (a) $v = (x, y, 0)$ e $u = (0, 0, z)$

   (b) $T(x, y, z) = (-x, -y, 0)$

9. (a) Se $Av = \lambda v$ então $(2A)v = 2(Av) = 2(\lambda v) = (2\lambda)v$.

   (b) Se $Av = \lambda v$ então $(A^2)v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$.

10. $T(x, y) = (-6y, -x + y)$

11. Para $\lambda_1 = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$ tem-se $v_1 = (x, \frac{3}{5}x)$ e para $\lambda_2 = \sqrt{2}$ tem-se $v_2 = (0, y)$.

12. Para $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ tem-se $v_1 = (x, 0, 0)$ e para $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$ tem-se $v_3 = (0, y, z)$.

13. (a) $T(x, y) = \left(\frac{-29x-15y}{8}, \frac{15x+21y}{8}\right)$

    (b)

    (c) $\begin{bmatrix} \frac{-11}{24} & \frac{51}{8} \\ \frac{51}{8} & \frac{175}{24} \end{bmatrix}$

14. $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + c - d & -b \\ 2c - 2d & 0 \end{bmatrix}$

15. Para $\lambda_1 = 1$ tem-se $v_1 = (2y, y)$ e para $\lambda_2 = 0$ tem-se $v_2 = (x, -2x)$.

16. Para $\lambda_1 = 0$ os autovetores são do tipo $p_1(x) = a$ e para $\lambda_2 = 1$ eles têm a forma $p_2(x) = b + bx$.

17. Para concluir que os autovalores são os mesmos, mostre que A e A^T têm o mesmo polinômio característico.

18. Para $\lambda_1 = 0$ tem-se $v_1 = (x, x, 0)$ e para $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ tem-se $v_2 = (-y, y, z)$

19. Basta tomar a direção do vetor $v_1 = (1, 1, 1)$ e então $w = 8v$, ou a direção dos vetores $v_2 = (-1, 0, 1)$ ou $v_3 = (-1, 1, 0)$ onde $k = 2$.

20. (a)

    (b)

21. $\lambda = 0 \Rightarrow p(x) = 0$.

22.

23.

24. Verdadeiro.

25. Partir da hipótese $A = PBP^{-1}$ e mostrar que $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$.

26. Se $B = R^{-1}AR$ então $RB = AR$. Assim, se $Bv = \lambda v$, tem-se:

$$A(Rv) = (AR)v = (RB)v = R(Bv) = R(\lambda v) = \lambda(Rv).$$

27. $\beta = \{(\frac{1}{2}, 1), (-2, 1)\}$ e $[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

28. (a) $\beta = \{(-1, 1), (2, 1)\}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

    (b) Não existe base β para a qual exista a matriz diagonalizadora P.

29. (a) Não

    (b) $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

    (c) Não

30. (a) $(S \circ T)(x, y, z) = (3x, x - 5y, -4x - 5z)$.

    (b) Para $\lambda_1 = 0$ tem-se $v_1 = (0, y, 0)$, para $\lambda_2 = 3$ tem-se $v_2 = (-2z, -\frac{7}{3}z, z)$ e para $\lambda_3 = -5$ tem-se $v_3 = (0, y, y)$.

31. $k = 0$

32. $a = 4$, $P = \begin{bmatrix} 1 & -15 & 1 & 0 \\ 1 & -16 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

33. São $1, 2^{-9}, 0, 2^9$

34. $A^{10} = \begin{bmatrix} 342 & 341 \\ 682 & 683 \end{bmatrix}$

35. $T^{20}(x, y, z) = (x, 1048576y - 2097150z, z)$

36. $[T(v)]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ \vdots \\ n^2 \end{bmatrix}$

37.

38.

39.

40. (a) F (b) F (c) F (d) F (e) V (f) F (g) V

41. Alternativa (d)

42. Se $Av = \lambda v$ e existe A^{-1}, então $A^{-1}v = A^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)v = \frac{1}{\lambda}A^{-1}(\lambda v) = \frac{1}{\lambda}A^{-1}(Av) = \frac{1}{\lambda}(A^{-1}A)v = \frac{1}{\lambda}Iv = \frac{1}{\lambda}v$.