UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

GAN0001 - Geometria Analítica
Prof. Bruno Terêncio do Vale

Sétima Lista de Exercícios
Tópico: Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

1. Determinar as coordenadas cilíndricas dos seguintes pontos, dados em coordenadas cartesianas:

   (a) $A\,(0,1,1)$
   (b) $B\,(0,-2,-2)$
   (c) $C\,(1,-2,2)$
   (d) $D\,(6,3,2)$
   (e) $E\,(8,-4,1)$

2. Determinar as coordenadas esféricas do problema 1.

3. Transforme os pontos, dados em coordenadas cilíndricas, para coordenadas cartesianas.

   (a) $A\left(6, \dfrac{2\pi}{3}, -2\right)$
   (b) $B\left(1, \dfrac{11\pi}{6}, -2\right)$
   (c) $C\left(4, \dfrac{\pi}{4}, 2\right)$
   (d) $D\left(8, \dfrac{2\pi}{3}, 3\right)$
   (e) $E\left(6, \dfrac{\pi}{6}, -3\right)$

4. Transforme os pontos, dados em coordenadas esféricas, para coordenadas cartesianas.

   (a) $A\left(4, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right)$
   (b) $B\left(3, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$
   (c) $C\left(6, \dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right)$
   (d) $D\left(5, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$
   (e) $E\left(2, \pi, \dfrac{\pi}{2}\right)$

5. Escreva as seguintes superfícies, dadas em coordenadas cartesianas, em coordenadas cilíndricas e esféricas.

   (a) $5x + 4y = 0$
   (b) $-x^2 - y^2 + z^2 = 4$
   (c) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
   (d) $x^2 + y^2 = 9$
   (e) $z = 4$
   (f) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

6. As superfícies a seguir estão expressas em coordenadas cilíndricas. Referi-las ao sistema cartesiano ortogonal e identificá-las.

   (a) $r^2 + 3z^2 = 36$
   (b) $r = a \operatorname{sen}\theta,\ a \in \mathbb{R}$
   (c) $r^2 + z^2 = 16$
   (d) $r^2 - z^2 = 1$
   (e) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

7. As superfícies a seguir estão expressas em coordenadas esféricas. Transformá-las em coordenadas retangulares e identificá-las.

   (a) $\rho = 5a\cos\phi,\ a \in \mathbb{R}$
   (b) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$
   (c) $\rho \operatorname{sen}\phi = a,\ a \in \mathbb{R}$
   (d) $\rho = 4$

8. Represente geometricamente o sólido que satisfaz as condições: $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \dfrac{\pi}{6} \\ 0 \leq \rho \leq 3 \end{cases}$

Respostas dos Exercícios

1. Considerando $\theta \in [0, 2\pi)$:

   (a) $A\left(1, \frac{\pi}{2}, 1\right)$ ou $A\left(-1, \frac{3\pi}{2}, 1\right)$

   (b) $B\left(2, \frac{3\pi}{2}, -2\right)$ ou $B\left(-2, \frac{\pi}{2}, -2\right)$

   (c) $C\left(\sqrt{5}, \theta_1, 2\right)$ ou $C\left(-\sqrt{5}, \theta_2, 2\right)$; $\theta = \text{arctg}\,(-2)$; $\theta_1 \in 4^{\text{o}}$ quadrante e $\theta_2 \in 2^{\text{o}}$ quadrante.

   (d) $D\left(3\sqrt{5}, \theta_1, 2\right)$ ou $D\left(-3\sqrt{5}, \theta_2, 2\right)$; $\theta = \text{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$; $\theta_1 \in 1^{\text{o}}$ quadrante e $\theta_2 \in 3^{\text{o}}$ quadrante.

   (e) $E\left(4\sqrt{5}, \theta_1, 1\right)$ ou $E\left(-4\sqrt{5}, \theta_2, 1\right)$; $\theta = \text{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$; $\theta_1 \in 4^{\text{o}}$ quadrante e $\theta_2 \in 2^{\text{o}}$ quadrante.

2. Considerando $\rho \geq 0$; $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\phi \in [0, \pi]$:

   (a) $A\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

   (b) $B\left(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

   (c) $C\left(3, \theta, \arccos\left(\frac{2}{3}\right)\right)$; $\theta = \text{arctg}\,(-2)$; $\theta \in 4^{\text{o}}$ quadrante.

   (d) $D\left(7, \theta, \arccos\left(\frac{2}{7}\right)\right)$; $\theta = \text{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$; $\theta \in 1^{\text{o}}$ quadrante.

   (e) $E\left(9, \theta, \arccos\left(\frac{1}{9}\right)\right)$; $\theta = \text{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$; $\theta \in 4^{\text{o}}$ quadrante.

3. (a) $A\left(-3, 3\sqrt{3}, -2\right)$

   (b) $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -2\right)$

   (c) $C\left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2\right)$

   (d) $D\left(-4, 4\sqrt{3}, 3\right)$

   (e) $E\left(3\sqrt{3}, 3, -3\right)$

4. (a) $A\left(-\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3}\right)$

   (b) $B\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{9}{4}, -\frac{3}{2}\right)$

   (c) $C\left(-\frac{9}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}, 3\right)$

   (d) $D\left(-\frac{5\sqrt{3}}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

   (e) $E\,(-2, 0, 0)$

5. A primeira expressão está em coordenadas cilíndricas e a segunda em coordenadas esféricas.

   (a) $\tan\theta = -\frac{5}{4}$; $\tan\theta = -\frac{5}{4}$

   (b) $-r^2 + z^2 = 4$; $\rho^2\left(-\text{sen}^2\,\phi + \cos^2\phi\right) = 4$

   (c) $r = z$; $\phi = \frac{\pi}{4}$

   (d) $r = 3$; $\rho\,\text{sen}\,\phi = 3$

   (e) $z = 4$; $\rho\cos\phi = 4$

   (f) $r^2 + z^2 = 25$; $\rho = 5$

6. (a) $x^2 + y^2 + 3z^2 = 36$; elipsoide de revolução

   (b) $x^2 + y^2 = ay$; cilindro circular reto se $a \neq 0$ ou reta se $a = 0$

   (c) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$; esfera

   (d) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; hiperboloide de uma folha

   (e) $y = x$; plano

7. (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 5az$; esfera se $a \neq 0$ ou ponto se $a = 0$

   (b) $y = \sqrt{3}x$; plano

   (c) $x^2 + y^2 = a^2$; cilindro circular reto

   (d) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$; esfera

8. Como se trata de coordenadas esféricas, tem-se