Produto Vetorial e Produto Misto – Teoria

Estrutura desta apresentação

- Introdução
  - Determinante.
- Produto Vetorial
  - Definição;
  - Propriedades;
  - Interpretação geométrica do seu módulo.
- Produto Misto
  - Definição;
  - Propriedades;
  - Interpretação geométrica do seu módulo.
- Resumo
- Duplo Produto Vetorial

Introdução

- Todo o estudo feito até o momento pode ser aplicado tanto no $\mathbb{R}^2$ quanto no $\mathbb{R}^3$;
- Apresentam-se a seguir os demais produtos de vetores que serão utilizados na disciplina; estes, entretanto, são específicos do $\mathbb{R}^3$.
- Para o cálculo de tais produtos, um certo conhecimento de determinante é indicado.

Determinantes

- Para matrizes 2x2, tem-se a regra de Chió

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

- Para matrizes 3x3, tem-se a regra de Sarrus

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

Determinantes

- Vale lembrar a notação:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det A$$

- Algumas propriedades interessantes:
  - Se A possui uma linha nula, $\det A = 0$;
  - Se A possui uma linha múltipla de outra linha, $\det A = 0$;
  - Trocar de posição duas linhas inverte o sinal do determinante;
  - Quando se multiplica uma linha de A por uma constante, $\det A$ fica multiplicado por ela.

Produto vetorial: definição

Dados os vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = (x_2, y_2, z_2)$, o **produto vetorial** dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, denotado $\vec{u} \times \vec{v}$ ou $\vec{u} \wedge \vec{v}$, é o vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}$$

ou

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Produto vetorial: definição

Uma maneira de memorizar a fórmula é utilizar a notação

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Produto vetorial: propriedades

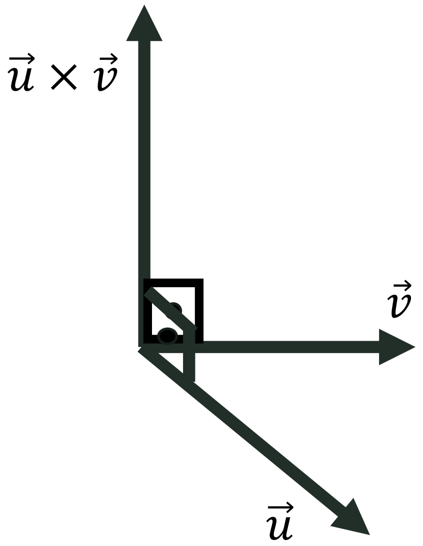
1. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$, qualquer que seja $\vec{u}$.
2. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
3. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
4. $(\mathrm{m}\vec{u}) \times \vec{v} = \mathrm{m}(\vec{u} \times \vec{v}), \mathrm{m} \in \mathbb{R}$
5. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, um dos vetores é nulo ou se os dois vetores são colineares.

Produto vetorial: propriedades

6. $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ e $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$
7. Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ têm as direções de um triedro O_{xyz} direto.
8. $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$
9. Se $\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$ e se θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \theta$
10. O produto vetorial não é associativo! Ou seja, não há garantia que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ seja igual a $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

Produto vetorial: propriedade 6

Propriedade: $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ e $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$



Da definição de produto vetorial, tem-se

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

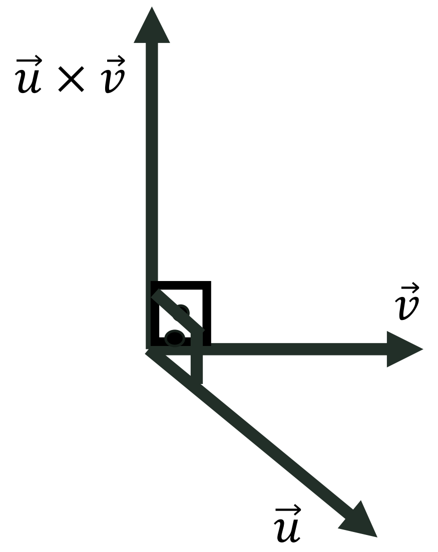
Produto vetorial: propriedade 6

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (x_1, y_1, z_1) \cdot (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = x_1(y_1 z_2 - z_1 y_2) + y_1(z_1 x_2 - x_1 z_2) + z_1(x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = x_1 y_1 z_2 - x_1 z_1 y_2 + y_1 z_1 x_2 - y_1 x_1 z_2 + z_1 x_1 y_2 - z_1 y_1 x_2$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$$



Ou seja, $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ (condição de ortogonalidade!)

Produto vetorial: propriedade 7

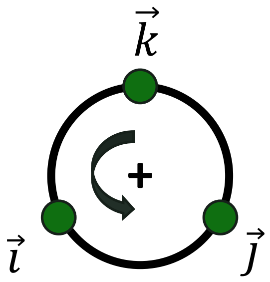
Propriedade: Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ têm as direções de um triedro O_{xyz} direto.

Por exemplo,

$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$

$\vec{k} \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$

$\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$



Produto vetorial: propriedade 9

Propriedade: Se $\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$ e se θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \theta$

Da propriedade 8,

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

Da fórmula do produto interno,

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (|\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta)^2$$

Produto vetorial: propriedade 9

Colocando o termo comum em evidência,

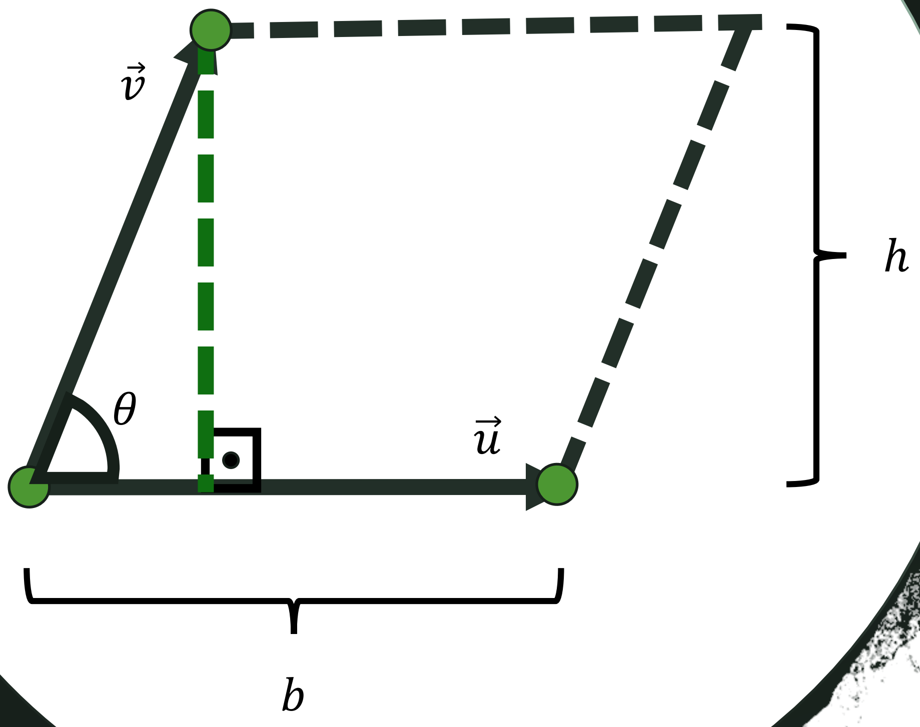
$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

Da identidade trigonométrica,

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

Como $0° \leq \theta \leq 180°$,

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \theta$$



Interpretação geométrica do módulo do produto vetorial

Área da paralelogramo:

$$A_P = b \cdot \mathrm{h}$$

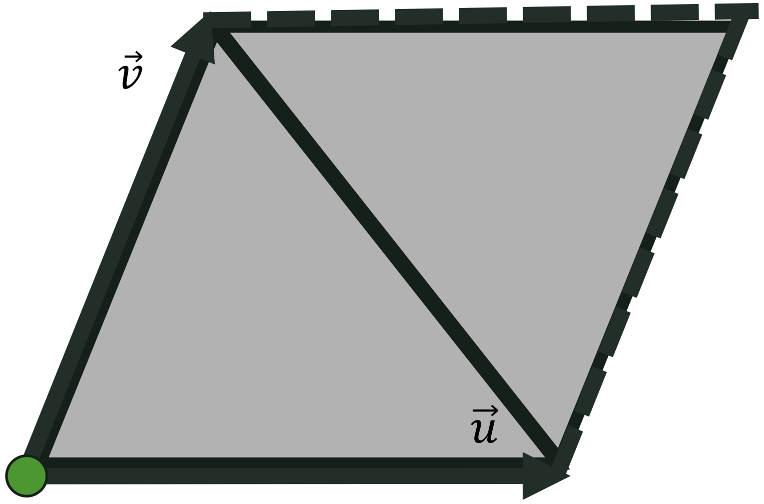
Tem-se

$$b = |\vec{u}|$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{|\vec{v}|} \Rightarrow h = |\vec{v}| \operatorname{sen}\theta$$

$$A_P = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen}\theta$$

$$\boldsymbol{A_P = |\vec{u} \times \vec{v}|}$$



Interpretação geométrica do módulo do produto vetorial

Área da triângulo:

$$A_T = \frac{A_P}{2}$$

$$\boldsymbol{A_T} = \frac{|\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}|}{\boldsymbol{2}}$$

Produto misto: definição

Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, chama-se **produto misto** dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ ao número real $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$, sendo indicado por $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Produto misto: propriedades

1. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ implica que os três vetores são coplanares (são casos particulares se um dos vetores é nulo ou se dois deles são colineares)

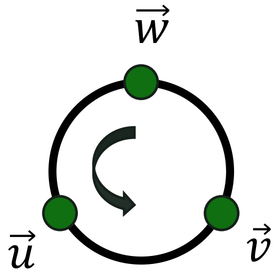
Condição de coplanaridade:

Se 3 vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares, então

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Produto misto: propriedades

2. O produto misto independe da ordem circular dos vetores, ou seja



$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$$

Entretanto,

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$$

Esta propriedade é chamada **propriedade cíclica**, e dela resulta que o $\cdot$ e $\times$ podem permutar no produto misto, ou seja

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Produto misto: propriedades

3. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{r}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$
4. $(\mathrm{m}\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \mathrm{m}\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \mathrm{m}\vec{w}) = \mathrm{m}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}), \mathrm{m} \in \mathbb{R}$

Interpretação geométrica do módulo do produto misto

Volume do paralelepípedo:

$$V_P = A_b \cdot h$$

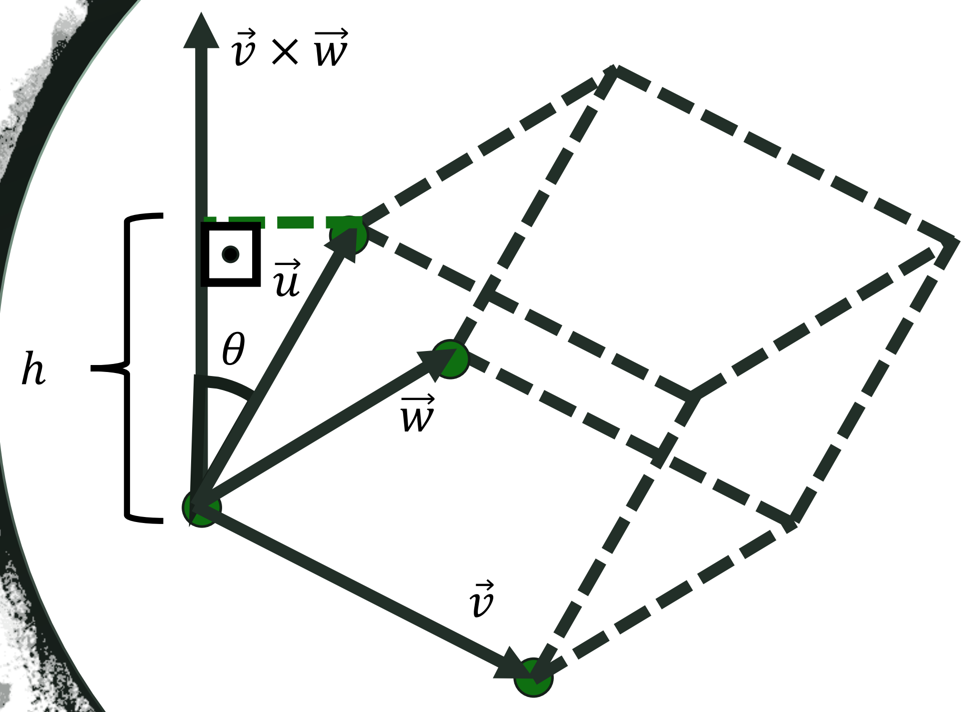
Tem-se

$$A_b = |\vec{v} \times \vec{w}|$$

$$|\cos\theta| = \frac{h}{|\vec{u}|} \Rightarrow h = |\vec{u}|\ |\cos\theta|$$

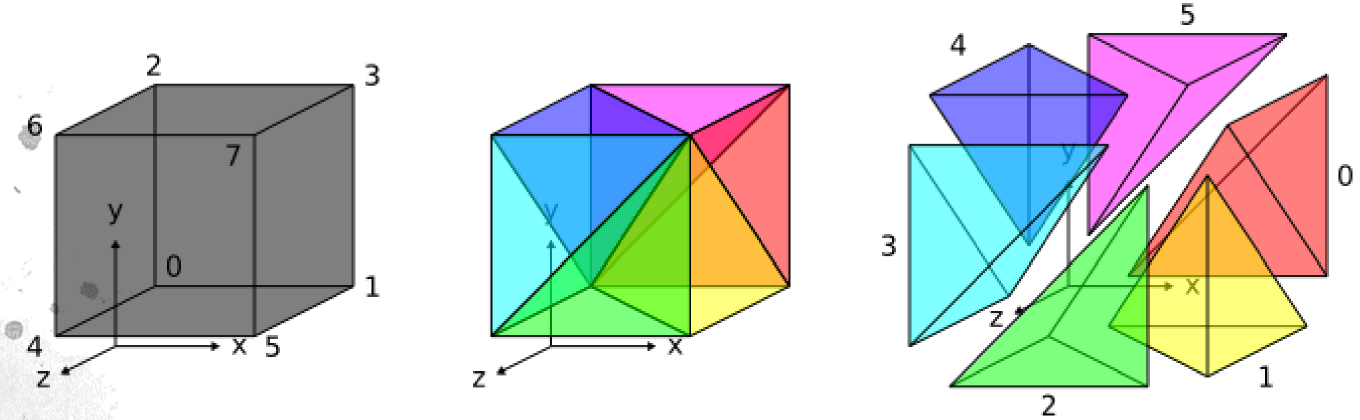
$$V_P = |\vec{u}||\vec{v} \times \vec{w}||\cos\theta| = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

$$\boldsymbol{V_P = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|}$$



Interpretação geométrica do módulo do produto misto

Volume do tetraedro:



Fonte: https://www.dune-project.org/

$$V_T = \frac{V_P}{6}$$

$$\boldsymbol{V_T = \frac{|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|}{6}}$$

Para $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

Multiplicação por escalar: $\alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$

1 vetor e 1 real **1 vetor**

Produto interno: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

2 vetores **1 real**

Produto vetorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2)$$

2 vetores **1 vetor**

Produto misto:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_3y_1z_2 + x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3$$

3 vetores **1 real**

Duplo produto vetorial

Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, chama-se **duplo produto vetorial** de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ ao vetor $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

Pode ser mostrado que o duplo produto vetorial pode ser calculado como

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$