Álgebra Linear
(ALI0001 – CCI-192-02U)

Classificação de Sistemas

Sistemas Homogêneos

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de ALI do dia 13 de março de 2023.

Caracterização das soluções de um sistema linear do tipo AX=B

Considere o sistema linear de m equações e n incógnitas $AX = B$.

O sistema é classificado como:

a. Impossível (SI): se não admite solução. Neste caso, $posto([A|B]) \neq posto(A)$.

b. Possível (SP): se admite solução. Neste caso, $posto([A|B]) = posto(A)$ e ainda, é:

- Determinado (SPD): quando a solução é única. Neste caso $posto(A) = n$ e, com isso,

$$nulidade(A) = n - posto(A) = n - n = 0.$$

- Indeterminado (SPI): quando há infinitas soluções. Neste caso $posto(A) < n$ e

$$nulidade(A) = n - posto(A) \neq 0.$$

Definição: Considere o sistema linear possível e indeterminado $AX = B$, com A uma matriz de ordem $m \times n$. O **grau de liberdade** do sistema é definido por

$$g = nulidade(\mathrm{A}) = n - posto(A)$$

e corresponde ao **número de variáveis livres** da solução do sistema.

Exemplo

Exemplo 1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -5 \\ 2 & -4 & k \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ k-1 \\ -4 \end{bmatrix},$$

onde $k \in \mathbb{R}$. Determine, se possível, o(s) valor(es) de k para os quais o sistema $AX = B$ se torna:

i) impossível ii) possível e indeterminado iii) possível e determinado

Solução: Escalonando a matriz ampliada do sistema:

$$[A\,|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & -5 & k-1 \\ 2 & -4 & k & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to L_2 + 4L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & k+3 \\ 0 & 0 & k-2 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to -L_2 \\ L_3 \to L_3 + (k-2)L_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -k-3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 + (k-2)(k+3) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -k-3 \\ 0 & 0 & 0 & k^2 + k - 12 \end{array}\right].$$

Exemplo

Com o escalonamento finalizado, podemos analisar o posto das matrizes A e $[A\,|B]$. Temos que

$$posto(A) = 2,$$

pois há somente duas linhas não nulas.

O posto da matriz ampliada depende do termo $k^2 + k - 12$:

$$posto([A|B]) = \begin{cases} 3, \text{se} \quad k^2 + k - 12 \neq 0 \\ 2, \text{se} \quad k^2 + k - 12 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 3, \text{se} \quad k \neq 3 \ \text{ e } \ k \neq -4 \\ 2, \text{se} \quad k = 3 \ \text{ ou } \ k = -4 \end{cases}.$$

Assim, temos que:

i) O sistema é impossível (SI) se e somente se $posto([A|B]) \neq posto(A)$.
Nesse exemplo, esse caso ocorre se e somente se $posto([A|B]) = 3$, ou seja, quando

$$k \neq 3 \quad \text{e} \quad k \neq -4\,.$$

ii) O sistema é possível e indeterminado (SPI) se e somente se $P([A|B]) = P(A) = 2$ e $nul(A) = 3 - posto(A) = 3 - 2 = 1 \neq 0$. Nesse exemplo, esse caso ocorre quando

$$k = 3 \quad \text{ou} \quad k = -4\,.$$

iii) O sistema é possível e determinado (SPD) se e somente se $P([A|B]) = P(A) = 3 = n$ e e $nul(A) = 3 - posto(A) = 3 - 3 = 0$. Como, nesse exemplo, temos $posto(A) = 2$, não existe $k \in \mathbb{R}$ que satisfaça essa condição.

Exemplo

Exemplo 2. Determine **todos** os valores de a de forma que o sistema

$$\begin{cases} 3x + 6y - 9z = 12 \\ 7x + 7y - 7z = 18 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases}$$

i) admita apenas uma solução. Exiba a solução.
ii) admita infinitas soluções. Exiba as soluções.
iii) não admita solução.

Solução: Escalonando a matriz ampliada do sistema:

$$[A\,|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -9 & 12 \\ 7 & 7 & -7 & 18 \\ 4 & 1 & a^2 - 14 & a + 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{3}L_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 7 & -7 & 18 \\ 4 & 1 & a^2 - 14 & a + 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to L_2 - 7L_1 \\ L_3 \to L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2 - 2 & a - 14 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to \frac{-1}{7}L_2 \\ L_3 \to L_3 - L_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & a^2 - 16 & a - 4 \end{array}\right]$$

Com isso, podemos analisar o posto das matrizes A e $[A\,|B]$.

Veja que o posto de A depende do termo $a^2 - 16$:

$$posto(A) = \begin{cases} 3, & \text{se } a^2 - 16 \neq 0 \\ 2, & \text{se } a^2 - 16 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 3, & \text{se } \ a \neq \pm 4 \\ 2, & \text{se } \ a = \pm 4 \end{cases}.$$

O posto da matriz ampliada depende dos termos $a^2 - 16$ e $a - 4$: se o primeiro for não nulo, $posto([A|B]) = 3$ (independente do que ocorre com o segundo termo); se o primeiro termo for nulo e o segundo não, $posto([A|B]) = 3$. Caso ambos sejam nulos, temos $posto([A|B]) = 2$. Portanto:

$$P([A|B]) = \begin{cases} 3, \quad \text{se} \quad a^2 - 16 \neq 0 \\ 3, \text{se } a^2 - 16 = 0 \text{ e } a - 4 \neq 0 \\ 2, \text{se } a^2 - 16 = 0 \text{ e } a - 4 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 3, \quad \text{se} \quad a \neq \pm 4 \\ 3, \text{se } a = \pm 4 \text{ e } a \neq 4 \\ 2, \text{se } a = \pm 4 \text{ e } a = 4 \end{cases} = \begin{cases} 3, \text{se} \quad a \neq \pm 4 \\ 3, \text{se } a = -4 \\ 2, \text{se} \quad a = 4 \end{cases}$$

i) O sistema admite única solução (é SPD) quando $posto([A|B]) = posto(A) = 3$ e, com isso, $nul(A) = 3 - 3 = 0$. Nesse exemplo, isso ocorre quando $a \neq \pm 4$, pois somente nesse caso temos $P(A) = 3$. A solução, nesse caso, é dada por

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y - 2z = {}^{10}/_{7} \\ (a^2 - 16)z = a - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y + 3z \\ y = {}^{10}/_{7} - 2z \\ (a-4)(a+4)z = a - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = {}^{8a + 185}/_{(7a+28)} \\ y = {}^{(10a - 26)}/_{(7a+28)} \\ z = {}^{1}/_{(a+4)} \end{cases}$$

ii) O sistema admite infinitas soluções (é SPI) quando $posto([A|B]) = posto(A) = 2$ e, com isso, $nul(A) = 3 - 2 = 1 \neq 0$. Nesse exemplo, para haver uma variável livre, devemos ter que

$$a = \pm 4$$

(para que $posto(A) = 2$) e, ao mesmo tempo,

$$a = 4,$$

(para que $posto([A|B]) = 2$.

Portanto, tomando a interseção entre os valores, obtemos que $a = 4$.

As soluções, nesse caso, são dadas por

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y - 2z = {}^{10}/_{7} \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y + 3z \\ y = {}^{10}/_{7} - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = {}^{8}/_{7} + 7z \\ y = {}^{10}/_{7} - 2z \end{cases} \quad \text{com } z \in \mathbb{R}.$$

iii) O sistema não admite soluções (é SI) quando $posto([A|B)) \neq posto(A)$.

Esse caso ocorre quando $posto(A) = 2$ e $posto([A|B]) = 3$.

Para isso ocorrer, devemos ter que $a = \pm 4$ e, ao mesmo tempo, que $a \neq \pm 4$ ou $a = -4$ (casos em que $posto([A|B]) = 3$). Fazendo a interseção entre os valores, obtemos que

$$a = -4.$$

Sistemas Homogêneos

Em um sistema homogêneo, os termos independentes são todos obrigatoriamente nulos. Portanto, é um sistema da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

A matriz ampliada de um sistema homogêneo é tal que

$$[A \mid O\,] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array}\right].$$

Em sistemas homogêneos, a matriz dos termos independentes é $B = O$, ou seja, é a matriz nula de ordem $m \times 1$.

Como $posto([A \mid O\,]) = posto(A)$, temos que um sistema homogêneo sempre é possível (SP), podendo ser determinado (SPD) ou indeterminado (SPI).

Note que um sistema homogêneo qualquer sempre admite pelo menos a solução

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad \cdots, \quad x_n = 0.$$

Essa solução é denominada **solução trivial** ou **solução nula**; quaisquer outras soluções, se existirem, são ditas **não triviais** ou **soluções próprias**.

Sistemas Homogêneos de equações lineares: $AX = 0$

Ainda, se $posto([A \mid 0]) = posto(A) = n$, onde n é o número de variáveis do sistema homogêneo (e também o número de colunas da matriz A), então o sistema homogêneo é possível e determinado (SPD), pois

$$nulidade(A) = n - P(A) = n - n = 0,$$

e não existem variáveis livres. Nessa caso, a solução trivial é a sua única solução.

Se $P([A \mid 0]) = P(A) \neq n$, o sistema homogêneo é possível e indeterminado (SPI), pois

$$nulidade(A) = n - P(A) \neq 0$$

e, por isso, existem variáveis livres. Nesse caso, existem soluções não triviais.

Exemplo 1: Determine as soluções, se existirem, dos sistemas homogêneos dados:

a) $$\begin{cases} 3x - y - 7z = 0 \\ -5x + 4y - 9z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Solução: Escalonando a matriz ampliada do sistema homogêneo, obtemos:

$$[A \mid 0\,] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -7 & 0 \\ -5 & 4 & -9 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -5 & 4 & -9 & 0 \\ 3 & -1 & -7 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 \rightarrow L_2 + 5L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

Exemplos de Sistemas Homogêneos

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & -6 & 6 & 0\\ 0 & 5 & -16 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to \frac{-1}{6}L_2} \sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 5 & -16 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 5L_2} \sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -11 & 0\end{array}\right].$$

Com isso, temos que

$$posto([A\,|0\,]) = posto(A) = 3 = n$$

e o sistema é SPD. Portanto, sua única solução é a trivial, dada por

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0.$$

b) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y - 8z = 0 \\ -4x - 7y - 13z = 0 \\ 6x + 8y + 12z = 0 \end{cases}$

Solução: Escalonando a matriz ampliada do sistema

$$[A\,|\,0\,] = \left[\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & -8 & 0\\ -4 & -7 & -13 & 0\\ 6 & 8 & 12 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -8 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0\\ -4 & -7 & -13 & 0\\ 6 & 8 & 12 & 0\end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 + 4L_1 \\ L_4 \to L_4 - 6L_1 \end{array}$$

Exemplos de Sistemas Homogêneos

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -8 & | & 0 \\ 0 & 5 & 15 & | & 0 \\ 0 & -15 & -45 & | & 0 \\ 0 & 20 & 60 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to \frac{1}{5} L_2 \\ L_3 \to L_3 + 3L_2 \\ L_4 \to L_3 - 4L_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -8 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Com isso, temos que

$$posto([A\,|0]) = posto(A) = 2 < 3 = n$$

e o sistema é SPI, com uma variável livre, pois

$$nulidade(A) = 3 - posto(A) = 3 - 2 = 1.$$

Além disso, suas infinitas soluções são tais que

$$\begin{cases} x - 2y - 8z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 8z \\ y = -3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Observação: Note que, em ambos os exemplos, a matriz nula dos termos independentes não interferiu no posto da matriz ampliada. Por isso, em um sistema homogêneo, é possível omitir a última coluna (inteiramente nula) ao efetuar o escalonamento.

Exemplos de Sistemas Homogêneos

Além disso, escrevendo no formato matricial as infinitas soluções desse sistema homogêneo, temos que

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z \\ -3z \\ z \end{bmatrix} = z.\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

em que $z \in \mathbb{R}$ e onde

$$X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é uma solução particular do sistema homogêneo dado.

Dizemos que $X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ é a solução fundamental do sistema homogêneo, pois essa solução "gera" todas as demais soluções, a partir de uma simples multiplicação pelo valor atribuído à variável livre z. Por exemplo, atribuindo $z = -5$, obtemos a solução

$$X = -5.\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Exemplo teórico:

Exemplo 2: Dado um sistema homogêneo $AX = O$, que admita soluções diferente da trivial, mostre que se X_1 e X_2 são duas de suas soluções, então qualquer combinação destas soluções, dada por $aX_1 + bX_2$, com $a, b \in \mathbb{R}$, também é solução do sistema homogêneo.

Solução: Se X_1 e X_2 são soluções do sistema homogêneo $AX = O$, então pela definição de solução, temos que são satisfeitas as igualdades matriciais

$$AX_1 = O \quad \text{e} \quad AX_2 = O.$$

Assim, usando propriedades das operações com matrizes, obtemos que, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, é válido que

$$\begin{aligned} A(aX_1 + bX_2) &= A(aX_1) + A(bX_2) \\ &= a(AX_1) + b(AX_2) \\ &= a(O) + b(O) = O + O = O. \end{aligned}$$

Como obtemos que $A(aX_1 + bX_2) = O$, essa igualdade significa que $aX_1 + bX_2$ também é uma solução do sistema homogêneo $AX = O$.

Mais um exemplo teórico:

Exemplo 3: Suponha que X_1 e X_2 sejam duas soluções de um sistema não homogêneo $A.X = B$, em que $B \neq O$. Mostre que

a) $X_1 + X_2$ não é solução do sistema $AX = B$.

b) $X_1 - X_2$ é solução do sistema homogêneo $AX = O$.

Solução: Se X_1 e X_2 são soluções do sistema não homogêneo $AX = B$, então pela definição de solução, temos que são satisfeitas as igualdades matriciais

$$A.X_1 = B \quad \text{e} \quad A.X_2 = B.$$

Assim, usando propriedades das operações com matrizes, obtemos que:

a) $X_1 + X_2$ é tal que

$$A.(X_1 + X_2) = A.X_1 + AX_2 = B + B = 2B \neq B,$$

pois $B \neq O$. Assim, $X_1 + X_2$ não é solução do sistema $A.X = B$.

b) $X_1 - X_2$ é tal que

$$A.(X_1 - X_2) = A.X_1 - AX_2 = B - B = O,$$

Assim, $X_1 - X_2$ é solução do sistema homogêneo

$$A.X = O.$$

Mais um exemplo teórico:

Exemplo 4: Seja $A_{8\times 11}$ uma matriz não nula. Analise as possibilidades para a solução do sistema homogêneo formado por oito equações e onze variáveis associado à matriz A, dado por

$$AX = O.$$

Solução: Como A tem 8 linhas e pelo menos uma delas é não nula, obtemos que

$$1 \leq posto(A) \leq 8.$$

Como A tem 11 colunas, temos que

$$nulidade(A) = 11 - posto(A).$$

Dessa forma, obtemos que

$$10 \geq nulidade(A) \geq 3.$$

Portanto, o sistema homogêneo associado à matriz A tem, obrigatoriamente, **pelo menos três variáveis e, no máximo, 10 variáveis livres.**

Em particular, como

$$nulidade(A) \neq 0,$$

o sistema homogêneo jamais será possível e determinado (SPI).

Mais um exemplo teórico:

Exemplo 5: Seja $A_{8\times 7}$ uma matriz não nula. Analise as possibilidades para a solução do sistema homogêneo formado por oito equações e sete variáveis associado à matriz A, dado por $AX = O$.

Solução: Como A tem 8 linhas e 7 colunas, existirão, no máximo, sete pivôs em sua matriz escalonada. Todos os elementos da oitava linha estarão, obrigatoriamente, situados na coluna de um pivô e, por isso, serão anulados no processo de escalonamento. Dessa forma, o posto de A é no máximo igual a 7. Como A é não nula, temos que

$$1 \leq posto(A) \leq 7.$$

Como A tem 7 colunas, temos que

$$nulidade(A) = 7 - posto(A).$$

Dessa forma, obtemos que

$$6 \geq nulidade(A) \geq 0.$$

Portanto, o sistema homogêneo associado à matriz A tem **no máximo, 6 variáveis livres.**

Em particular, como pode ocorrer o caso em que

$$nulidade(A) = 0,$$

o sistema homogêneo pode ser possível e determinado (SPD). Isso ocorre justamente quando $posto(A) = 7$.

Exercícios da Lista: fazer até o 35.