Álgebra Linear (ALI0001 – CCI-192-02U)

Matriz de um Transformação Linear
Composição entre Transformações Lineares
Inversa de uma Transformação Linear

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula do dia 24 de maio de 2023.

UDESC

Exercício

Exercício 1) Considere $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z) = (-x + 2y + 3z, 4x - y + 5z)$$

a) Determine a matriz canônica de T.

b) Se $\alpha = \{(1, 1, -1), (1, 2, -1), (1, -1, 0)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1, -2), (-3, 5)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$, encontre a matriz de T em relação às bases α e β, ou seja, encontre $[T]_\beta^\alpha$.

c) Se $u \in \mathbb{R}^3$ é tal que

$$[u]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

encontre $[T(u)]_\beta$.

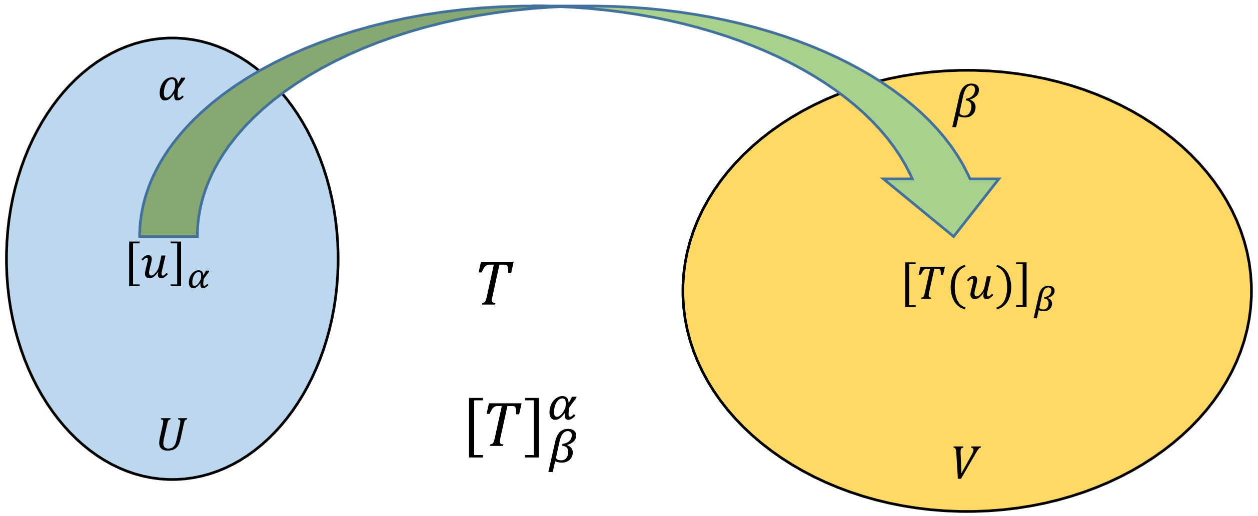
Solução: Todos os itens foram resolvidos durante a aula.

Teorema e Notação

Teorema: Sejam $T: U \to V$ uma transformação linear, $\alpha = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base de U e $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ uma base de V. Então para todo $u \in U$ é válido que:

$$[T(u)]_\beta = [T]_\beta^\alpha \cdot [u]_\alpha .$$

Interpretação:



Observação: No caso em que α e β são as bases canônicas de U e V, podemos omitir as bases "penduradas" e denotar simplesmente:

$$[T(u)] = [T] \cdot [u].$$

No caso em que $T: U \to U$ e a base α é considerada tanto no domínio quanto no contradomínio, denotamos simplesmente

$$[T]_\alpha = [T]_\alpha^\alpha \qquad \text{e} \qquad [T(u)]_\alpha = [T]_\alpha^\alpha . [u]_\alpha .$$

Exemplo Resolvido

Exemplo 1) Considere $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y) = (x-y, -5x+3y,\ 3x+2y)$ e $\alpha = \{(2,-1),(1,4)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1,0,-1),(-1,2,2),(0,1,2)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

a) Determine a matriz que induz T em relação às bases α e β, ou seja, encontre $[T]_\beta^\alpha$.

b) Se $u \in \mathbb{R}^2$ é tal que $u = 3(2,-1) - 7(1,4)$ encontre $T(u)$ escrito como combinação linear da base β.

Solução: a) Para obter a matriz de T em relação às bases não canônicas α e β, devemos aplicar a transformação nos vetores da base do domínio (α) e escrever cada uma das imagens obtidas como combinação linear da base do contradomínio (β). Os escalares de cada uma dessas combinações lineares devem formar cada uma das colunas de $[T]_\beta^\alpha$.

Fazendo isso para o primeiro vetor da base α:

$$T(2,-1) = (3,-13,4) = a(1,0,-1) + b(-1,2,2) + c(0,1,2)$$

e obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ 2b + c = -13 \\ -a + 2b + 2c = 4 \end{cases}.$$

Exemplo Resolvido

cuja solução (resolva o sistema como exercício) é $a = -8, b = -11$ e $c = 9$.

Note que esses valores, nessa ordem, irão formar a primeira coluna de $[T]_\beta^\alpha$.

Agora, repetimos o procedimento para o segundo vetor da base α:

$$T(1,4) = (-3,7,11) = a(1,0,-1) + b(-1,2,2) + c(0,1,2)$$

e obtemos o sistema

$$\begin{cases} a - b = -3 \\ 2b + c = 7 \\ -a + 2b + 2c = 11 \end{cases}$$

cuja solução (resolva o sistema como exercício) é $a = -1, b = 2$ e $c = 3$.
Esses valores formam a segunda coluna da matriz $[T]_\beta^\alpha$.

Portanto, obtemos que $$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ -11 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Note que a ordem da matriz obtida é 3×2, o que está de acordo com $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Exemplo

Solução: b) Para resolver esse item, note que podemos proceder de duas formas distintas.

1ª Forma: Como $u = 3(2,-1) - 7(1,4) = (-1,-31)$, aplicando a transformação temos

$$T(u) = T(-1,-31) = (30,-88,-65)$$

E escrevendo $T(u)$ como combinação linear da base β, obtemos

$$T(u) = (30,-88,-65) = a(1,0,-1) + b(-1,2,2) + c(0,1,2)$$

e obtemos o sistema

$$\begin{cases} a - b = 30 \\ 2b + c = -88 \\ -a + 2b + 2c = -65 \end{cases}$$

cuja solução é $a = -17,\ \ b = -47,\ \ c = 6.$ Portanto

$$T(u) = -17(1,0,-1) + (-47)(-1,2,2) + 6(0,1,2).$$

2ª Forma: Consiste em interpretar a combinação linear da base α dada no enunciado por meio da matriz de coordenadas de u. Como $u = 3(2,-1) - 7(1,4)$ é uma combinação linear de u em termos da base $\alpha = \{(2,-1),(1,4)\}$, temos que os escalares 3 e -7 formam as coordenadas de u em relação à base α .

Assim, a matriz de coordenadas de u na base α é dada por

Exemplo

$$[u]_\alpha = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Agora, lembre que, em relação às base canônicas podíamos escrever

$$T(u) = A.[u] = [T].[u]$$

onde $A = [T]$ era a matriz canônica de T. Podemos generalizar essa fato, usando uma notação semelhante que destaque as bases α do domínio e β do contradomínio como

$$[T(u)]_\beta = [T]_\beta^\alpha . [u]_\alpha$$

O resultado da multiplicação matricial acima consiste em uma matriz coluna, cujos elementos representam as coordenadas da imagem $T(u)$ em relação à base β (do contradomínio). Tal matriz é a matriz de coordenadas de $T(u)$ em relação à base β.

Com tal notação, obtemos que

$$[T(u)]_\beta = [T]_\beta^\alpha . [u]_\alpha = \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ -11 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 \\ -47 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Veja que, com essa multiplicação matricial, chegamos mais rapidamente nos valores de a, b e c do que na solução anterior. Interpretando a matiz obtida como coordenadas de $T(u)$ na base β, obtemos que $T(u) = -17(1,0,-1) + (-47)(-1,2,2) + 6(0,1,2)$.

Exemplo Resolvido

Exemplo 2) Considere $T: P_2 \to M(2,2)$ dada por

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} a-b+c & a+2b \\ -b+c & -a+b+c \end{bmatrix}$$

e $\alpha = \{1+x^2, 1+2x-2x^2, -x+x^2\}$ e $\beta = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$.

a) Determine $[T]_\beta^\alpha$.

b) Se $[p(x)]_\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ determine $[T(p(x))]_\beta$.

c) Se $[T(q(x))]_\beta = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ encontre $[q(x)]_\alpha$

Solução: a) Vamos proceder de forma análoga ao que fizemos no Exemplo 7, item a. Aplicamos T nos elementos de α e escrevemos a imagem resultante como combinação linear da base β:

Exemplo Resolvido

Como $$T(a+bx+cx^2)=\begin{bmatrix} a-b+c & a+2b \\ -b+c & -a+b+c \end{bmatrix}$$

Temos que, para o primeiro vetor da base α:

$$T(1+x^2)=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=d\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+z\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

E chegamos no sistema $\begin{cases} d-t=2 \\ d+y=1 \\ y-z+t=1 \\ y+z=0 \end{cases}$ cuja solução (resolva o sistema como exercício) é $d=-1, y=2, z=-2$ e $t=-3$. Esses valores formam a primeira coluna da matriz $[T]_\beta^\alpha$.

Repetindo o processo para o segundo vetor da base α:

$$T(1+2x-2x^2)=\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}=d\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+z\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo Resolvido

E chegamos no sistema $\begin{cases} d - t = -3 \\ d + y = 5 \\ y - z + t = -4 \\ y + z = -1 \end{cases}$ cuja solução (resolva o sistema como exercício)

é $d = 18, y = -13, z = 12$ e $t = 21$. Esses valores formam a segunda coluna de $[T]_{\beta}^{\alpha}$.

Repetindo o processo para o terceiro (e último) vetor da base α:

$$T(-x + x^2) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = d\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

chegamos no sistema $\begin{cases} d - t = 2 \\ d + y = -2 \\ y - z + t = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$ cuja solução (resolva o sistema como exercício) é

$$d = -8, \quad y = 6, \quad z = -6 \quad \text{e} \quad t = -10.$$

Esses valores formam a terceira coluna de $[T]_{\beta}^{\alpha}$.

Exemplo Resolvido

Portanto, obtemos que a matriz é dada por

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 & 18 & -8 \\ 2 & -13 & 6 \\ -2 & 12 & -6 \\ -3 & 21 & -10 \end{bmatrix}.$$

Veja que a ordem da matriz obtida é 4×3, o que está de acordo com as dimensões do contradomínio e do domínio de $T: P_2 \to M(2,2)$.

b) Usando o teorema anterior, temos diretamente que, se $[p(x)]_{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ então

$$[T(p(x))]_{\beta} = [T]_{\beta}^{\alpha} . [p(x)]_{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 & 18 & -8 \\ 2 & -13 & 6 \\ -2 & 12 & -6 \\ -3 & 21 & -10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 \\ -46 \\ 44 \\ 75 \end{bmatrix}$$

que significa que

$$T\big(p(x)\big) = 61 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 46 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 44 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 75 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 15 \\ -15 & -2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo Resolvido

c) Conhecendo $[T(q(x))]_\beta = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ para encontrar $[q(x)]_\alpha$ não conseguimos usar diretamente o teorema anterior. Por isso, vamos supor que $[q(x)]_\alpha = \begin{bmatrix} d \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e então obtemos que $[T(p(x))]_\beta = [T]_\beta^\alpha . [p(x)]_\alpha$ implica que

$$\begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 18 & -8 \\ 2 & -13 & 6 \\ -2 & 12 & -6 \\ -3 & 21 & -10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} d \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d + 18y - 8z \\ 2d - 13y + 6z \\ -2d + 12y - 6z \\ -3d + 21y - 10z \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} -d + 18y - 8z = -7 \\ 2d - 13y + 6z = -4 \\ -2d + 12y - 6z = 0 \\ -3d + 21y - 10z = 1 \end{cases}$ obtemos $d = -9, y = 4, z = 11.$

Exemplo Resolvido

Portanto, $$[q(x)]_\alpha = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3) Determine a lei de $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$ sabendo que $\alpha = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ e $\beta = \{(2,1),(5,3)\}$.

Solução: Aqui conhecemos a matriz de $[T]_\beta^\alpha$ e as bases α e β . Para encontrar a lei da transformação, precisaremos usar um raciocínio inverso do que fizemos nos exemplos anteriores. Interpretando as colunas de $[T]_\beta^\alpha$ sabemos que os coeficientes das imagens dos vetores da base α, escritos como combinação linear da base β são os valores dispostos em cada coluna, respectivamente. Assim, temos que

$$T(1,1,1) = -4(2,1) + 2(5,3) = (2,2)$$

$$T(1,1,1) = 5(2,1) - 2(5,3) = (0,-1)$$

$$T(1,1,1) = 13(2,1) - 5(5,3) = (1,-2)$$

Exemplo Resolvido

Agora, podemos determinar a lei de $T(x,y,z)$ pois conhecemos as imagens de uma base do domínio. Para fazer isso, escrevemos $v=(x,y,z)$ como combinação linear da base α e obtemos

$$(x,y,z)=a(1,1,1)+b\,(0,1,1)+c(0,0,1)$$

e obtemos o sistema

$$\begin{cases} a=x \\ a+b=y \\ a+b+c=z \end{cases}$$

cuja solução (simples de ser obtida) é dada por $a=x,\ b=-x+y$ e $c=-y+z$. Assim

$$(x,y,z)=x(1,1,1)+(-x+y)\,(0,1,1)+(-y+z)(0,0,1).$$

Aplicando T em ambos os lados e usando a linearidade em relação à adição e à multiplicação por escalar, obtemos

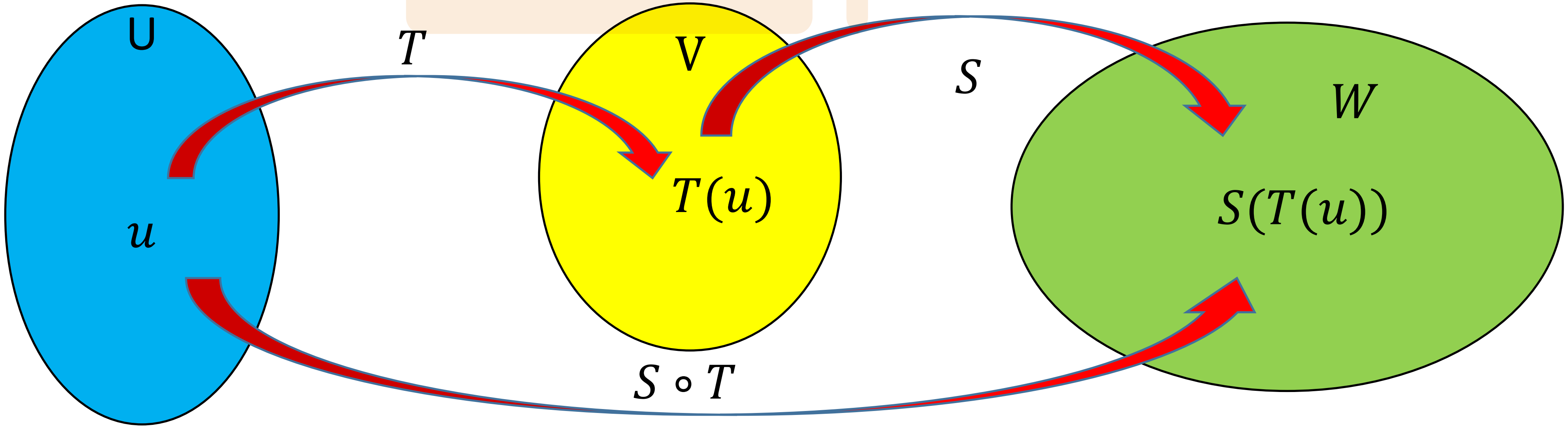
$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= xT(1,1,1)+(-x+y)T(0,1,1)+(-y+z)T(0,0,1) \\ &= x(2,2)+(-x+y)(0,-1)+(-y+z)(1,-2) \\ &= (2x-y+z,3x+y-2z). \end{aligned}$$

Composição de Transformações Lineares

Definição: Sejam $T: U \to V$ e $S: V \to W$ transformações lineares.

A transformação composta entre S e T é definida como $S \circ T: U \to W$ tal que

$$(S \circ T)(u) = S(T(u)).$$



Observações:

- Para $S \circ T$ estar definida é necessário que $\text{Domínio}(S) = V = \text{Contradomínio}(T)$.
- Note que, nesse caso:

$$\text{Domínio}(S \circ T) = U = \text{Domínio}(T)$$

e

$$\text{Contradomínio}(S \circ T) = W = \text{Contradomínio}(S).$$

Composição de Transformações Lineares

Cuidado: Em geral, têm-se que

$$S \circ T \neq T \circ S,$$

pois $T \circ S$ pode sequer estar definida.

Teorema: Se $T: U \to V$ e $S: V \to W$ são transformações lineares então a composta

$$S \circ T: U \to W$$

também é uma transformação linear.

Justificativa: Vamos verificar que a composta $S \circ T: U \to W$ preserva a adição e a multiplicação por escalar.

De fato, se $u_1, u_2 \in U$ e $k \in \mathbb{R}$ então

$$(S \circ T)(u_1 + u_2) = S(T(u_1 + u_2)) = S\big(T(u_1) + T(u_2)\big)$$

$$= S\big(T(u_1)\big) + S\big(T(u_2)\big) = (S \circ T)(u_1) + (S \circ T)(u_2)$$

e

$$(S \circ T)(ku_1) = S(T(ku_1)) = S\big(kT(u_1)\big) = kS\big(T(u_1)\big) = k(S \circ T)(u_1).$$

Portanto, $S \circ T$ é linear.

Exercício

Exercício 2) Considere as transformações $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ e $S: P_2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$T(a,b,c) = (2a - b + c) + (-a + b - 3c)x + (5a + 2b - c)x^2$$

e

$$S(a + bx + cx^2) = (4a - 7b + c, a - b + 2c).$$

Determine, se possível:

a) A transformação composta $S \circ T$.

b) A transformação $T \circ S$.

c) As matrizes canônicas de T, de S e de $S \circ T$. Existe alguma relação entre elas?

Solução: Todos os itens foram resolvidos durante a aula.

Matriz Canônica de uma Composição

Teorema: Se $T: U \rightarrow V$ e $S: V \rightarrow W$ são transformações lineares então a composta $S \circ T: U \rightarrow W$ é tal que

$$[S \circ T] = [S] \cdot [T].$$

Observações:

- Se α, β e γ são respectivamente bases dos espaços vetoriais U, V e W, então o teorema anterior pode ser generalizado para

$$[S \circ T]_{\gamma}^{\alpha} = [S]_{\gamma}^{\beta} \,.\, [T]_{\beta}^{\alpha}.$$

- Em geral, como a multiplicação de matrizes não é comutativa, ou seja, como

$$[S] \,.\, [T] \neq [T] \,.\, [S],$$

ainda que ambas as composições $S \circ T$ e $T \circ S$ estejam definidas, temos que

$$S \circ T \neq T \circ S.$$

- Quando $S \circ T$ está definida, é válida a seguinte relação entre as ordem das matrizes canônicas:

$$[S]_{\dim(W) \times \dim(V)} \cdot [T]_{\dim(V) \times \dim(U)} = [S \circ T]_{\dim(W) \times \dim(U)}.$$

Exercício

Exercício 3) Considere as transformações $T: M(2,2) \to \mathbb{R}^3$ e $S: \mathbb{R}^3 \to M(2,2)$ dadas por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (-a + 2b + d,\ 2a + b - 3d,\ b - c + d)$$

e
$$S(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + 3y - z & 2x - y + 4z \\ 2x - 5y & -2y + z \end{bmatrix}.$$

Determine, se possível as transformações compostas:

a) $S \circ T$ b) $T \circ S$

Solução: Foi mostrado em aula que as duas compostas estão definidas. Ficou como exercício ao aluno encontrar as suas leis. Como

$$[S \circ T] = [S] \cdot [T] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 1 & 9 \\ -4 & 7 & -4 & 9 \\ -12 & -1 & 0 & 17 \\ -4 & -1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

têm-se que $S \circ T: M(2,2) \to M(2,2)$ é dada por

$$(S \circ T)\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -7a - 2b + c + 9d & -4a + 7b - 4c + 9d \\ -12x - b + 17d & -4a - b - c + 7d \end{bmatrix}.$$

Analogamente, é possível obter que $T \circ S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dada por

$$(T \circ S)(x, y, z) = (3x - y + 10z, 4x - y - z, 2y + 5z).$$

Exemplo Resolvido

Exemplo 4) Considere as transformações $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $S: \mathbb{R}^3 \to P_2$ dadas por

$$T(a,b) = (2a - 5b,\ 3a - b, a + 2b)$$

e

$$S(a,b,c) = (a - 3b + c) + (2a + b - 2c)x + (-a + 2b - c)x^2.$$

Determine, se possível:

a) A transformação composta $S \circ T$.

b) A transformação $T \circ S$.

c) As matrizes canônicas de T, de S e de $S \circ T$. Existe alguma relação entre elas?

Solução a) Primeiro devemos verificar se a composta $S \circ T$ está definida. Como

$$\text{Domínio}(S) = \mathbb{R}^3 = \text{Contradomínio}(T)$$

temos que $S \circ T$ está definida e é tal que a lei de $S \circ T: \mathbb{R}^2 \to P_2$ é dada por

$$(S \circ T)(a,b) = S\big(T(a,b)\big) = S((2a - 5b, 3a - b, a + 2b)$$

$$= [(2a - 5b) - 3(3a - b) + (a + 2b)] + [2(2a - 5b) + (3a - b) - 2(a + 2b)]x$$
$$+[-(2a - 5b) + 2(3a - b) - (a + 2b)]x^2$$
$$= [2a - 5b - 9a + 3b + a + 2b] + [4a - 10b + 3a - b - 2a - 4b]x$$
$$+[-2a + 5b + 6a - 2b - a - 2b]x^2$$
$$= -6a + (5a - 15b)x + (3a + b)x^2.$$

Exemplo Resolvido

b) Para $T \circ S$ temos que

$$\text{Domínio}(T) = \mathbb{R}^2 \neq P_2 = \text{Contradomínio}(S)$$

e então $T \circ S$ não está definida.

c) As matrizes canônicas de T, S e de $S \circ T$ são dadas por:

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad [S] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad [S \circ T] = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 5 & -15 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$[S].[T] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-9+1 & -5+3+2 \\ 4+3-2 & -10-1-4 \\ -2+6-1 & 5-2-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 5 & -15 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [S \circ T].$$

Exemplo Resolvido

Exemplo 5) Considere as transformações $T: M(2,2) \to \mathbb{R}^3$ e $S: \mathbb{R}^3 \to M(2,2)$ dadas por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b-c, 2b-c+3d, a+c-d)$$

e

$$S(x,y,z) = \begin{bmatrix} x-2y+3z & 2x-y+z \\ 3x+2z & y+z \end{bmatrix}.$$

Determine, se possível a composta:

a) $S \circ T$ b) $T \circ S$

Solução: As matrizes canônicas de T e S são dadas por

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [S] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$[S \circ T] = [S]_{4\times 3}.[T]_{3\times 4}$$

está definida, é possível determinar $S \circ T$. Além disso, como

$$[T \circ S] = [T]_{3\times 4}.[S]_{4\times 3}$$

também está definida, é possível determinar $T \circ S$.

Exemplo Resolvido

Assim, pelo Teorema anterior, temos que

a) $S \circ T$: $M(2,2) \to M(2,2)$ é tal que sua matriz canônica é

$$[S \circ T] = [S]\,.\,[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 4 & -9 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 5 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tomando a transformação induzida por essa matriz, obtemos que a lei desejada é

$$(S \circ T)\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4a - 3b + 4c - 9d & 3a - 4d \\ 5a + 3b - c - 2d & a + 2b + 2d \end{bmatrix}.$$

b) $T \circ S$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é tal que sua matriz canônica é

$$[T \circ S] = [T].[S] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tomando a transformação induzida por essa matriz, obtemos que a lei desejada é

$$(T \circ S)(x, y, z) = (-3y + 2z, x + y + 3z, 4x - 3y + 4z).$$

Inversa de uma Transformação Linear

Definição: Se $T: U \to V$ é uma transformação linear bijetora, então dizemos que T é invertível e que existe a transformação linear inversa $T^{-1}: V \to U$ tal que

$$(T^{-1} \circ T)(u) = u \quad \text{para todo } u \in U.$$

e

$$(T \circ T^{-1})(v) = v \quad \text{para todo } v \in V.$$

Exemplo 6) Seja $T: \mathbb{R}^2 \to P_1$ dada por $T(a,b) = (3a-b) + (2a+b)x$.

a) Mostre que T é invertível.

b) Encontre T^{-1}.

c) Determine as matrizes canônicas de T e de T^{-1}. Qual a relação entre elas?

Solução a) Para mostrar que T é bijetora, vamos verificar que T é injetora e sobrejetora. Seja $u = (a,b) \in N(T)$. Logo $T(a,b) = \vec{0}_{P_1} = 0 + 0x$ e assim obtemos

$$\begin{cases} 3a - b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3a \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ 2a + 9a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

e então $u = (0,0) = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}$ e $N(T) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^2}\}$, o que garante que T é injetora.

Exemplo Resolvido

Ainda, temos que

$$\dim\big(N(T)\big) = 0.$$

E pelo Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem, obtemos que

$$\dim(\mathbb{R}^2) = \dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = 0 + \dim\big(Im(T)\big).$$

Logo

$$\dim\big(Im(T)\big) = 2 = \dim(P_1).$$

Então $Im(T) = P_1$ e T é sobrejetora.

Portanto, T é bijetora e assim é invertível.

b) Para obter a inversa de T, vamos utilizar a definição para obter $T^{-1}: P_1 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$(T \circ T^{-1})(p(x)) = p(x) \quad \text{para todo } p(x) \in P_1.$$

Considerando $p(x) = c + dx$ e supondo que $T^{-1}(p(x)) = (e, f)$ obtemos que

$$(T \circ T^{-1})(p(x)) = p(x) \quad \Rightarrow \quad T(T^{-1}(c + dx)) = c + dx \quad \Rightarrow \quad T(e, f) = c + dx$$

Aplicando a lei de T, obtemos que

$$(3e - f) + (2e + f)x = c + dx.$$

Exemplo Resolvido

Assim, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 3e - f = c \\ 2e + f = d \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f = 3e - c \\ 2e + 3e - c = d \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} f = 3e - c \\ 5e = c + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = \dfrac{-2c+3d}{5} \\ e = \dfrac{c+d}{5} \end{cases}$$

Portanto, obtemos que $T^{-1}(c + dx) = (e, f) = \left(\dfrac{c+d}{5}, \dfrac{-2c+3d}{5}\right).$

c) Para obter as matrizes canônicas de T e de T^{-1}, vamos interpretar os coeficientes de cada coordenada e encontrar as linhas da respectiva matriz.

Como $T(x, y) = (3x - y, 2x + y)$, obtemos que $[T] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$

Como $T^{-1}(c + dx) = \left(\frac{c+d}{5}, \frac{-2c+3d}{5}\right)$, obtemos que $[T^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$

Para identificar uma relação entre tais matrizes, veja que

$$[T] \,.\, [T^{-1}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Da mesma forma, é possível obter que $[T^{-1}].[T] = I$.

Portanto,

$[T^{-1}]$ e $[T]$ são matrizes inversas!!!

Inversa de uma Transformação Linear

Exercício 5) Seja $T: \mathbb{R}^2 \to P_1$ dada por $T(a, b) = (a - 3b) + (-2a + 7b)x$.

a) Mostre que T é invertível.

b) Encontre T^{-1}.

c) Determine as matrizes canônicas de T e de T^{-1}. Qual a relação entre elas?

Solução: Todos os itens foram resolvidos durante a aula.

Generalização

- Se $T: U \to V$ é invertível, então é bijetora e, com isso, $N(T) = \{\vec{0}_U\}$ e $Im(T) = V$. Aplicando o Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem, obtemos que
$$\dim(U) = \dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = 0 + \dim(V) = \dim(V)\,.$$
- Portanto, a matriz canônica de T tem ordem $\dim(V) \times \dim(U) = \dim(U) \times \dim(U)$, ou seja, é uma matriz quadrada.
- Como $(T^{-1} \circ T)(u) = u = I(u)$ para todo $u \in U$, com I a identidade, podemos denotar
$$T^{-1} \circ T = I.$$
- Da mesma forma, como $(T \circ T^{-1})(v) = v = I(v)$ para todo $v \in V$, denotamos
$$T \circ T^{-1} = I,$$

onde I é a transformação identidade.

- Assim, obtemos matricialmente que
$$[T^{-1} \circ T] = [I] = [T \circ T^{-1}].$$

Aplicando o teorema sobre a matriz canônica de uma composição, obtemos:
$$[T^{-1}].[T] = [I] = [T].[T^{-1}].$$
Ou seja $[\,T^{-1}]$ e $[T]$ são matrizes inversas entre si, e podemos denotar
$$[T^{-1}] = [T]^{-1}.$$
Portanto, a matriz da transformação inversa é a inversa da matriz da transformação!!!

Teorema

Teorema: Uma transformação linear $T: U \to V$, tal que $\dim(U) = \dim(V)$, é invertível se e somente se
$$\det([T]) \neq 0,$$
e, nesse caso, $T^{-1}: V \to U$ é tal que
$$[T^{-1}] = [T]^{-1}.$$

Observações:

- Já justificamos que T é invertível se e somente se $[T^{-1}] = [T]^{-1}$. Além disso, se T é invertível então existe a inversa da sua matriz canônica $[T]$ e, com isso, temos que
$$\det([T]) \neq 0.$$
- Se α e β são respectivamente bases dos espaços vetoriais U e V então o teorema anterior pode ser generalizado para
$$[T^{-1}]_{\alpha}^{\beta} = \left([T]_{\beta}^{\alpha}\right)^{-1}.$$

Exemplo 7) Seja $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ dada por
$$T(a,b,c) = (a - b + c) + (2a + b + c)x + (a + c)x^2.$$
Verifique se T é invertível e, em caso afirmativo, encontre T^{-1}.

Solução: Vamos aplicar o teorema anterior e analisar do ponto de vista matricial.

Exemplo Resolvido

Como $T(a,b,c) = (a-b+c) + (2a+b+c)x + (a+c)x^2$, a sua matriz canônica é

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\det([T]) = 1 - 1 - 1 + 2 = 1 \neq 0,$$

Temos que T é invertível

Para obter a inversa de T, vamos inverter a matriz $[T]$.

Para isso, vamos escalonar a matriz $[T|I]$, conforme estudado anteriormente:

$$[T \vdots I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 \leftrightarrow L_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} L_1 \to L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \to L_3 - 3L_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right] \begin{matrix} L_1 \to L_1 + L_3 \\ \\ L_3 \to -L_3 \end{matrix}$$

Exemplo Resolvido

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + L_3 \\ \\ L_3 \to -L_3 \end{array} \sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right] = [\mathrm{I} \mid T^{-1}].$$

Portanto, obtemos que

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Assim, pelo teorema anterior, obtemos que

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Agora, precisamos obter a transformação linear induzida por essa matriz.

Como $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ temos que $T^{-1}: P_2 \to \mathbb{R}^3$ é tal que

$$T^{-1}(a + bx + cx^2) = (a + b - 2c, -a + c, -a - b + 3c).$$

Exercício

Exercício 6) Seja $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ dada por

$$T(a,b,c) = (a-b-c) + (a-c)x + (-2a+b+3c)x^2.$$

Verifique se T é invertível e, em caso afirmativo, encontre T^{-1}.

Solução: Ficou como exercícios aos alunos encontrar a inversa da matriz canônica de T e, a partir dela, obter a lei da inversa da transformação.

Exemplo Resolvido

Exemplo 8) Seja $T: P_2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$T(1+t) = (1,-1,0), \quad T(-1+3t) = (0,1,1) \quad \text{e} \quad T(1+t^2) = (1,0,2)$$

Determine a lei de T^{-1}.

Solução: Vamos resolver a questão usando a definição de transformação inversa e propriedades de transformações lineares.

Aplicando a transformação inversa $T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to P_2$ em ambos os lados de todas as igualdades dadas no enunciado, obtemos

$$T^{-1}(T(1+t)) = T^{-1}(1,-1,0)$$

$$T^{-1}(T(-1+3t)) = T^{-1}(0,1,1)$$

$$T^{-1}(T(1+t^2)) = T^{-1}(1,0,2)$$

Pela definição de inversa, como

$$T^{-1}(T(u)) = u \text{ para todo } u$$

obtemos que

$$(1+t) = T^{-1}(1,-1,0)$$
$$(-1+3t) = T^{-1}(0,1,1)$$
$$(1+t^2) = T^{-1}(1,0,2)$$

Exemplo Resolvido

Assim, conhecemos a imagem de T^{-1} nos vetores de $\beta = \{(1,-1,0),(0,1,1),(1,0,2)\}$.
É possível verificar que β é uma base de $\mathbb{R}^3$ (faça isso como exercício).
Com isso, para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ temos que existem escalares a, b, c tais que

$$(x,y,z) = a(1,-1,0) + b(0,1,1) + c(1,0,2).$$

Ou seja

$$\begin{cases} x = a + c \\ y = -a + b \\ z = b + 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x - c \\ \\ b = z - 2c \end{cases} \Rightarrow \quad y = -(x - c) + (z - 2c) = -x + z - c$$

Logo $c = -x - y + z$ e assim

$$a = x - (-x - y + z) = 2x + y - z$$

$$b = z - 2(-x - y + z) = 2x + 2y - z$$

Assim, obtemos que

$$(x,y,z) = (2x + y - z)(1,-1,0) + (2x + 2y - z)(0,1,1) + (-x - y + z)(1,0,2).$$

Aplicando T^{-1} em ambos os lados e usando o fato que a inversa de uma transformação linear também é linear, e portanto, preserva a soma e a multiplicação por escalar, obtemos que

Exemplo Resolvido

$$T^{-1}(x,y,z) = T^{-1}[(2x+y-z)(1,-1,0) + (2x+2y-z)(0,1,1) + (-x-y+z)(1,0,2)]$$

$$= (2x+y-z)T^{-1}(1,-1,0) + (2x+2y-z)T^{-1}(0,1,1) + (-x-y+z)T^{-1}(1,0,2)$$

Aplicando os dados obtidos, ou seja, usando as igualdades

$$(1+t) = T^{-1}(1,-1,0)$$
$$(-1+3t) = T^{-1}(0,1,1)$$
$$(1+t^2) = T^{-1}(1,0,2)$$

obtemos que

$$T^{-1}(x,y,z) = (2x+y-z)(1+t) + (2x+2y-z)(-1+3t) + (-x-y+z)(1+t^2)$$
$$= (2x+y-z -2x-2y+z-x-y+z) + (2x+y-z+6x+6y-3z)t$$
$$+(-x-y+z)t^2$$
$$= (-x-2y+z) + (8x+7y-4z)t + (-x-y+z)t^2.$$