Lista 03 - MDI

01. $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow 1.1! + 2.2! + 3.3! + n.n! = (n+1)! - 1$

caso base:

$1 = (1+1)! - 1$

$1 = 2! - 1$

$1 = 2.1 - 1$

$1 = 2 - 1$

$1 = 1$

passo:

hipótese

$$\boxed{1\ 1! + 2.2! + 3\ 3! + \ldots + n.n! = (n+1)! - 1}$$

para $k+1$ tem-se.

$1\ 1! + 2.2! + 3.3! + \ldots + k.k! + (k+1).(k+1)! = [(k+1)+1]! - 1$

$(k+1)! - 1 + (k+1).(k+1)! = (k+2)! - 1$

$(k+1)! \, . \, [1 + (k+1)] - 1 = (k+2)! - 1$

$(k+2).(k+1)! - 1 = (k+2)! - 1$

$(k+2)! - 1 = (k+2)! - 1$

02. $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

base:

$1^3 = 1$

$1 = 1$

passo:

hipótese:

$$\boxed{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2}$$

para $k+1$ tem-se:

$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + \ldots + k + k+1)^2$

$(1 + 2 + 3 + \ldots + k)^2 + (k+1)^3 = (1 + 2 + \ldots + k + k+1)^2$

$(1 + 2 + 3 + \ldots + k)^2 + (k+1)^3 = (1 + 2 + \ldots + k + k+1)^2$

dado que:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$$

então:

$$\left[\frac{k.(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 = \ldots$$

$$\left[\frac{k^2.(k+1)^2}{4}\right] + (k+1)^2.(k+1) = \ldots$$

$$\left[\frac{k^2}{4} + (k+1)\right](k+1)^2 = \ldots$$

$$\left[\frac{k^2 + 4k + 4}{4}\right].(k+1)^2 = \ldots$$

$$\left[\frac{(k+2)^2}{2^2}\right].(k+1)^2 = \ldots$$

$$\left[\frac{(k+2)^2}{2^2}\right] \cdot (k+1)^2 = \dots$$

$$\left[\frac{(k+1).(k+2)}{2}\right]^2 = \dots$$

$$(1+2+3+\dots+k+k+1)^2 = (1+2+3+\dots+k+k+1)^2$$

03. $\forall n \in \mathbb{N},\ n > 6 \longrightarrow n^2 > 5n + 10$

base:

$7 > 6$

$7^2 > 5.7 + 10$

$49 > 35 + 10$

$49 > 45$

passo:

hipótese (para $k > 6$):

$k^2 > 5k + 10$

para $k+1$ tem-se:

$(k+1)^2 > 5(k+1) + 10$

$k^2 + 2k + 1 > 5k + 5 + 10$

$k^2 + 2k + 1 > 5k + 15$

$k^2 > 5k + 15 - 2k - 1$

$k^2 > 3k + 14$

$k^2 > 5k + 10 - 2k + 4$

$k^2 > 5k + 10 - 2(k-2)$

dado que $k \geq 7$ e que $k > 5k + 10$

então:

$2(k-2) > 0$

logo tem-se que:

$5k + 10 > 5k + 10 - 2(k-2)$

assim por transitividade:

$k^2 > 5k + 10 > 5k + 10 - 2(k-2)$

logo está provado que a seguinte desigualdade é válida:

$(k+1)^2 > 5(k+1) + 10$

04. $\forall n \in \mathbb{N} \longrightarrow 2^n + (-1)^{n+1} = 3i,\ i \in \mathbb{N}$

base:

$2^1 + (-1)^{1+1} = 3i$

$2 + 1 = 3i$

$3 = 3.i$

$3.1 = 3.i$

passo:

hipótese

$2^k + (-1)^{k+1} = 3i,\ \forall k \in \mathbb{N},\ i \in \mathbb{N}$

para $k+1$, dado j tal que $j \in \mathbb{N}$, tem-se:

$3.1 = 3.i$

sendo $i = 1$ então tem-se:

$3.i = 3.i$

para $K+1$, dado j tal que $j \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$2^{K+1} + (-1)^{K+1+1} = 3j$$

$$2^2 . 2^{K-1} + (-1)^K . (-1)^2 = 3j$$

$$4 . 2^{K-1} + (-1)^K . 1 = 3j$$

$$3.2^{K-1} + 2^{K-1} + (-1)^{(K-1)+1} = 3j$$

dado que a hipótese vale para qualquer número natural menor ou igual a K e $K-1 < K$ tem-se:

$$3.2^{K-1} + 3i = 3j$$

$$3\left(2^{K-1} + i\right) = 3j$$

sendo

$$j = 2^{K-1} + i$$

tem-se:

$$3j = 3j$$

logo está provado para $K+1$

05. B é o conjunto de todos os números divisíveis por 2 ou 3, maiores que 0

06.a) $x^0 = 1, \quad x^n = x^{n-1} . x$

06.b) $x^4 = x^3 . x = x^2 . x . x = x . x . x . x = x^0 . x . x . x . x = 1 . x . x . x \; x = x . x . x . x$

07.a) para $\forall K, n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$0.n = 0, \quad K.n = \sum_{i=1}^{K} n = n.K = \sum_{i=1}^{n} K$$

07.b) $2.3 = \sum_{i=1}^{2} 3 = 3+3 = 6$

08. $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

base:

$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

$$1 = \frac{1.(2)^2}{4}$$

$$1 = \frac{4}{4}$$

$$1 = 1$$

passo:

$$\boxed{\text{hipótese: } \sum_{i=1}^{K} i^3 = \frac{K^2(K+1)^2}{4}}$$

para $K+1$ tem-se:

$$\sum_{i=1}^{K+1} i^3 = \frac{(K+1)^2(K+1+1)^2}{4}$$

$$\left(\sum_{i}^{K} i^3\right) + (K+1)^3 = (K+1)^2(K+2)^2$$

$$\sum_{i=1} \cdots = \frac{(k+1)(k+1+1)}{4}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} i^3\right) + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1).(k+1)^2 = \ldots$$

$$(k+1)^2 \left[\frac{k^2}{4} + (k+1)\right] = \ldots$$

$$(k+1)^2 \left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right] = \ldots$$

$$\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

09. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \rightarrow$ n é primo ou produto de números primos

base:

2 é primo

passo:

hipótese:
k é primo ou produto de números primos

então para $k+1$ tem-se:

① $k+1$ é primo.

② $k+1$ não é primo, assim:

$k+1 = i \cdot j,\ i, j \in \mathbb{N},\ i \geq 2,\ j \geq 2$

note que então

$i \leq \frac{(k+1)}{2},\quad j \leq \frac{(k+1)}{2}$

dado que

$\frac{(k+1)}{2} < k$

então vale a hipótese para i e j

logo $k+1$ pode ser escrito como produto de números primos (fatorando i e j se necessário)

10. não há caso base.