Superfícies Quádricas
(Exemplos)

Buscando reescrever a equação na forma padrão,

$$y^2 + 4z^2 - 8z = 0$$

$$y^2 + 4(z^2 - 2z) = 0$$

$$y^2 + 4(z^2 - 2z + 1 - 1) = 0$$

$$y^2 + 4[(z-1)^2 - 1] = 0$$

$$y^2 + 4(z-1)^2 - 4 = 0 \quad (\div 4)$$

$$\frac{y^2}{4} + (z-1)^2 = 1$$

Esta é a mesma equação de uma elipse no plano yOz. Como não se tem a variável x, tem-se um **cilindro elíptico com geratriz paralela ao eixo dos x**.

Cálculo dos traços:

- Plano xOy $(z = 0)$

$$\frac{y^2}{4} + (0-1)^2 = 1$$

$$y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

Uma reta (eixo dos x).

Exemplo 01: Identifique e represente geometricamente as superfícies dadas pelas equações, apresentando os traços nos planos coordenados.

a) $y^2 + 4z^2 - 8z = 0$

- Plano xOz ($y = 0$)

$$\frac{0^2}{4} + (z-1)^2 = 1$$

$$(z-1)^2 = 1$$

$$z - 1 = \pm 1$$

$$z = 2 \quad \text{ou} \quad z = 0$$

Duas retas.

- Plano yOz ($x = 0$)

$$\frac{y^2}{4} + (z-1)^2 = 1$$

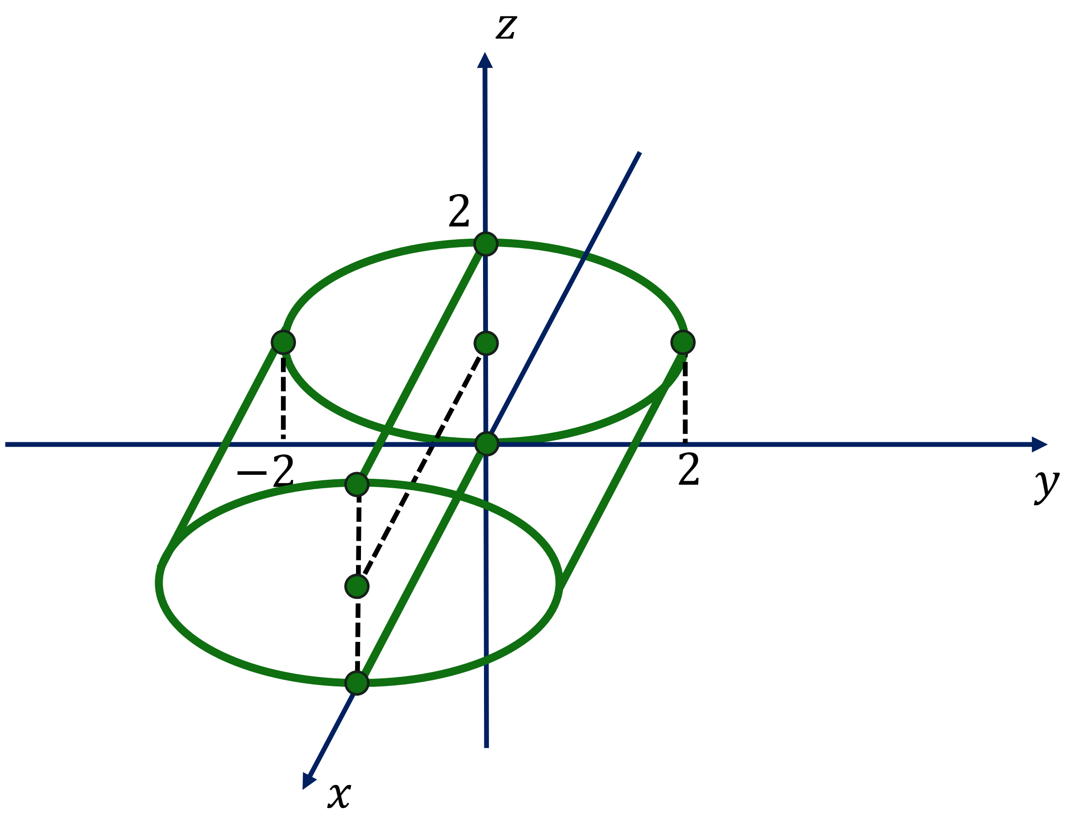
Elipse de centro $C(0,0,1)$ e eixo maior no eixo dos y, com $a = 2$ e $b = 1$.

Exemplo 01: Identifique e represente geometricamente as superfícies dadas pelas equações, apresentando os traços nos planos coordenados.

a) $y^2 + 4z^2 - 8z = 0$

- Esboço:

$$\frac{y^2}{4} + (z-1)^2 = 1$$



Exemplo 01: Identifique e represente geometricamente as superfícies dadas pelas equações, apresentando os traços nos planos coordenados.

a) $y^2 + 4z^2 - 8z = 0$

Buscando reescrever a equação na forma padrão,

$$12x^2 - 4y^2 + 4z^2 - 36 = 0$$

$$12x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 36 \quad (\div 36)$$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Tem-se um **hiperboloide de uma folha ao longo de $\boldsymbol{y}$ com $\boldsymbol{C(0,0,0)}$.**

Cálculo dos traços:

- Plano xOy $(z = 0)$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Hipérbole com eixo real ao longo do eixo dos x e centro na origem.

Exemplo 01: Identifique e represente geometricamente as superfícies dadas pelas equações, apresentando os traços nos planos coordenados.

b) $12x^2 - 4y^2 + 4z^2 - 36 = 0$

- Plano xOz ($y = 0$)

$$\frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Elipse com eixo maior em z e centro na origem.

- Plano yOz ($x = 0$)

$$-\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Hipérbole equilátera com eixo real ao longo do eixo dos z e centro na origem.

Assíntotas:

$$z = \pm y$$

Exemplo 01: Identifique e represente geometricamente as superfícies dadas pelas equações, apresentando os traços nos planos coordenados.

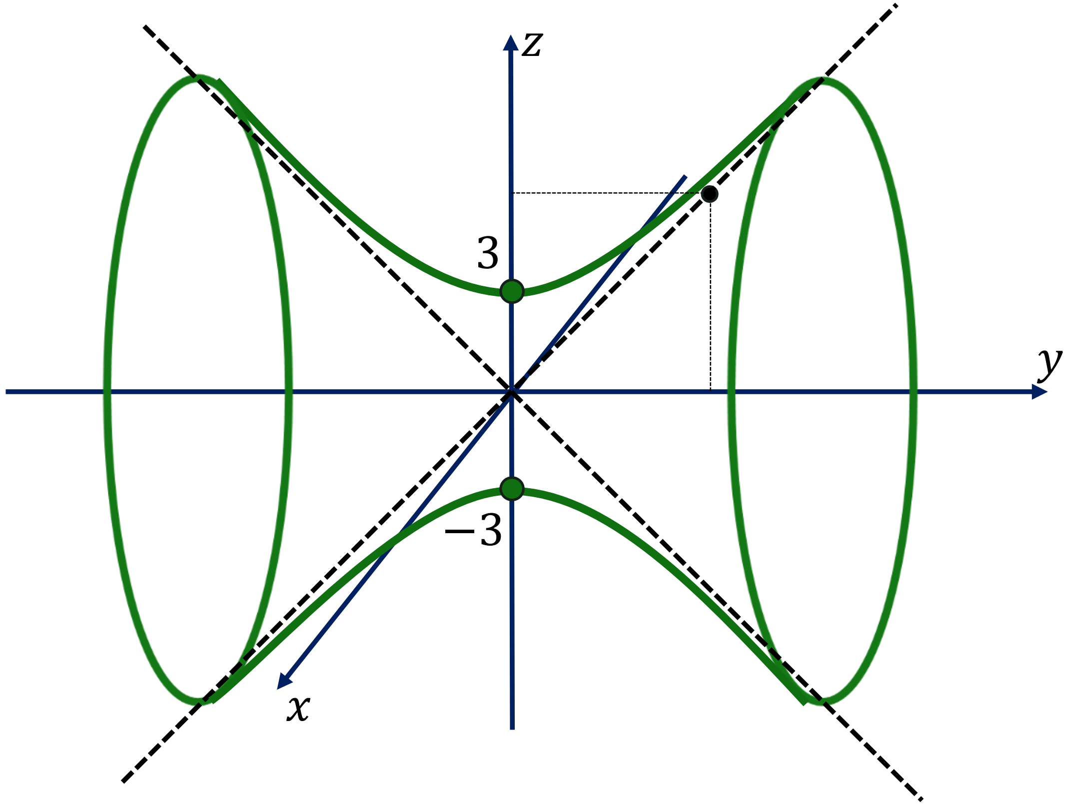
b) $12x^2 - 4y^2 + 4z^2 - 36 = 0$

- Esboço:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Assíntotas no plano yOz:

$$z = \pm y$$



Exemplo 01: Identifique e represente geometricamente as superfícies dadas pelas equações, apresentando os traços nos planos coordenados.

b) $12x^2 - 4y^2 + 4z^2 - 36 = 0$

Buscando reescrever a equação na forma padrão,

$$4x^2 + y^2 - 2y + 2z + 1 = 0$$

$$4x^2 + (y^2 - 2y + 1 - 1) + 1 = -2z$$

$$4x^2 + (y - 1)^2 - 1 + 1 = -2z \quad (\div 4)$$

$$x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = -\frac{z}{2}$$

Tem-se um **paraboloide elíptico de vértice $\boldsymbol{V(0,1,0)}$ ao longo do eixo dos $\mathbf{z}$.**

Cálculo dos traços:

- Plano xOy $(z = 0)$

$$x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 0$$

Um ponto: $V(0,1,0)$.

Exemplo 01: Identifique e represente geometricamente as superfícies dadas pelas equações, apresentando os traços nos planos coordenados.

c) $4x^2 + y^2 - 2y + 2z + 1 = 0$

- Plano xOz ($y = 0$)

$$x^2 + \frac{(0-1)^2}{4} = -\frac{z}{2}$$

$$x^2 = -\frac{z}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

Parábola com eixo no eixo dos z e concavidade voltada para baixo.

- Plano yOz ($x = 0$)

$$\frac{(y-1)^2}{4} = -\frac{z}{2}$$

$$(y-1)^2 = -2z$$

Parábola com eixo no eixo dos z e concavidade voltada para baixo.

Exemplo 01: Identifique e represente geometricamente as superfícies dadas pelas equações, apresentando os traços nos planos coordenados.

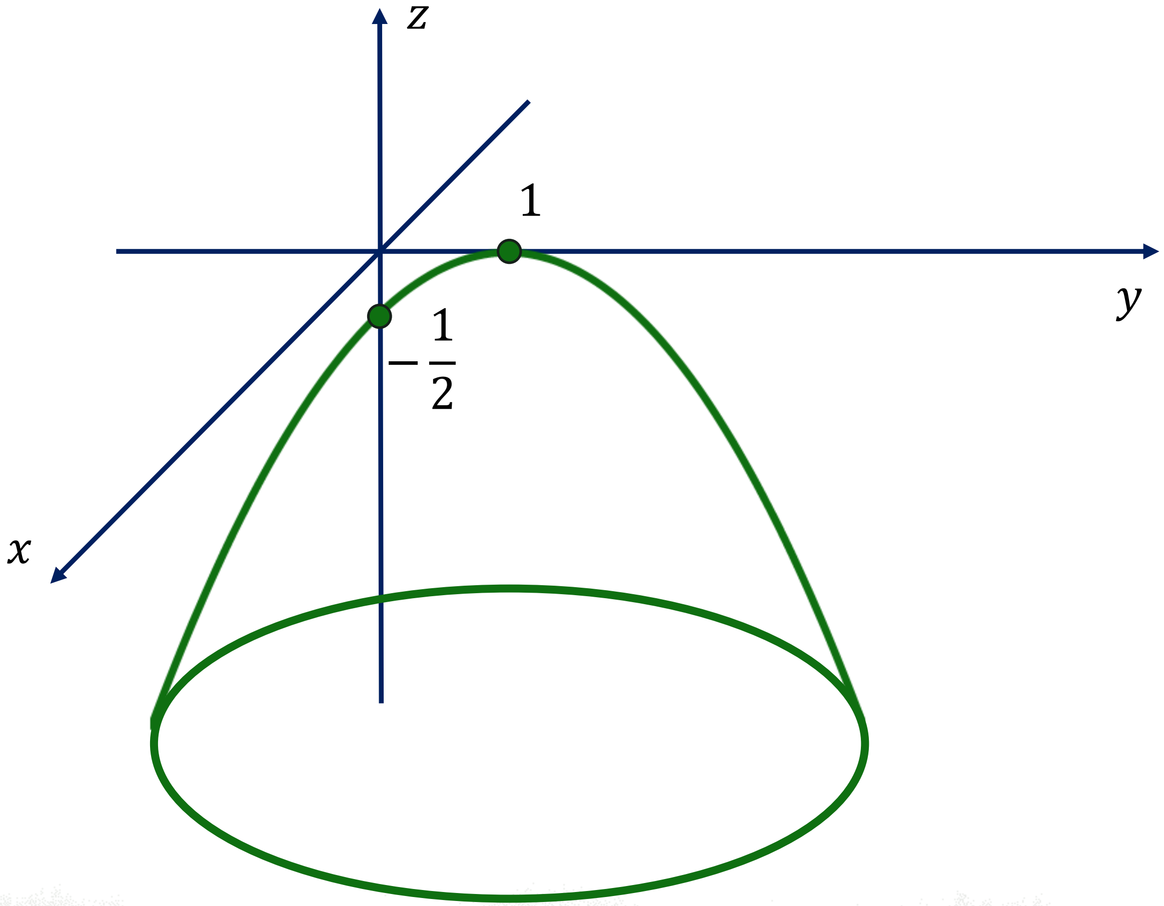
c) $4x^2 + y^2 - 2y + 2z + 1 = 0$

- Esboço:

$$x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = -\frac{z}{2}$$

- Plano yOz $(x = 0)$

$$(y-1)^2 = -2z$$



Exemplo 01: Identifique e represente geometricamente as superfícies dadas pelas equações, apresentando os traços nos planos coordenados.

c) $4x^2 + y^2 - 2y + 2z + 1 = 0$

Buscando reescrever a equação na forma padrão,

$$x^2 - 2x - y^2 + 4y + z^2 + 2z - 2 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1 - 1) - (y^2 - 4y + 4 - 4)$$
$$+ (z^2 + 2z + 1 - 1) - 2 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 - (y-2)^2 + 4 + (z+1)^2 - 1 - 2 = 0$$

$$(x-1)^2 - (y-2)^2 + (z+1)^2 = 0$$

Tem-se uma **superfície cônica circular reta de vértice $\boldsymbol{V(1,2,-1)}$ e eixo paralelo ao eixo dos $\boldsymbol{y}$.**

Cálculo dos traços:

- Plano xOy ($z = 0$)

$$(x-1)^2 - (y-2)^2 + (0+1)^2 = 0$$

$$(x-1)^2 - (y-2)^2 = -1$$

$$-(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

Hipérbole com eixo real ao longo do eixo dos y e centro $C(1,2,0)$.

Exemplo 01: Identifique e represente geometricamente as superfícies dadas pelas equações, apresentando os traços nos planos coordenados.

d) $x^2 - 2x - y^2 + 4y + z^2 + 2z - 2 = 0$

- Plano xOz ($y = 0$)

$$(x-1)^2 - (0-2)^2 + (z+1)^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + (z+1)^2 = 4$$

Circunferência de centro $C(1,0,-1)$ e raio 2.

- Plano yOz ($x = 0$)

$$(0-1)^2 - (y-2)^2 + (z+1)^2 = 0$$

$$-(y-2)^2 + (z+1)^2 = -1$$

$$(y-2)^2 - (z+1)^2 = 1$$

Hipérbole com eixo real ao longo do eixo dos y e centro $C(0,2,-1)$.

Exemplo 01: Identifique e represente geometricamente as superfícies dadas pelas equações, apresentando os traços nos planos coordenados.

d) $x^2 - 2x - y^2 + 4y + z^2 + 2z - 2 = 0$

- Plano $x = 1$

$$(1-1)^2 - (y-2)^2 + (z+1)^2 = 0$$

$$-(y-2)^2 + (z+1)^2 = 0$$

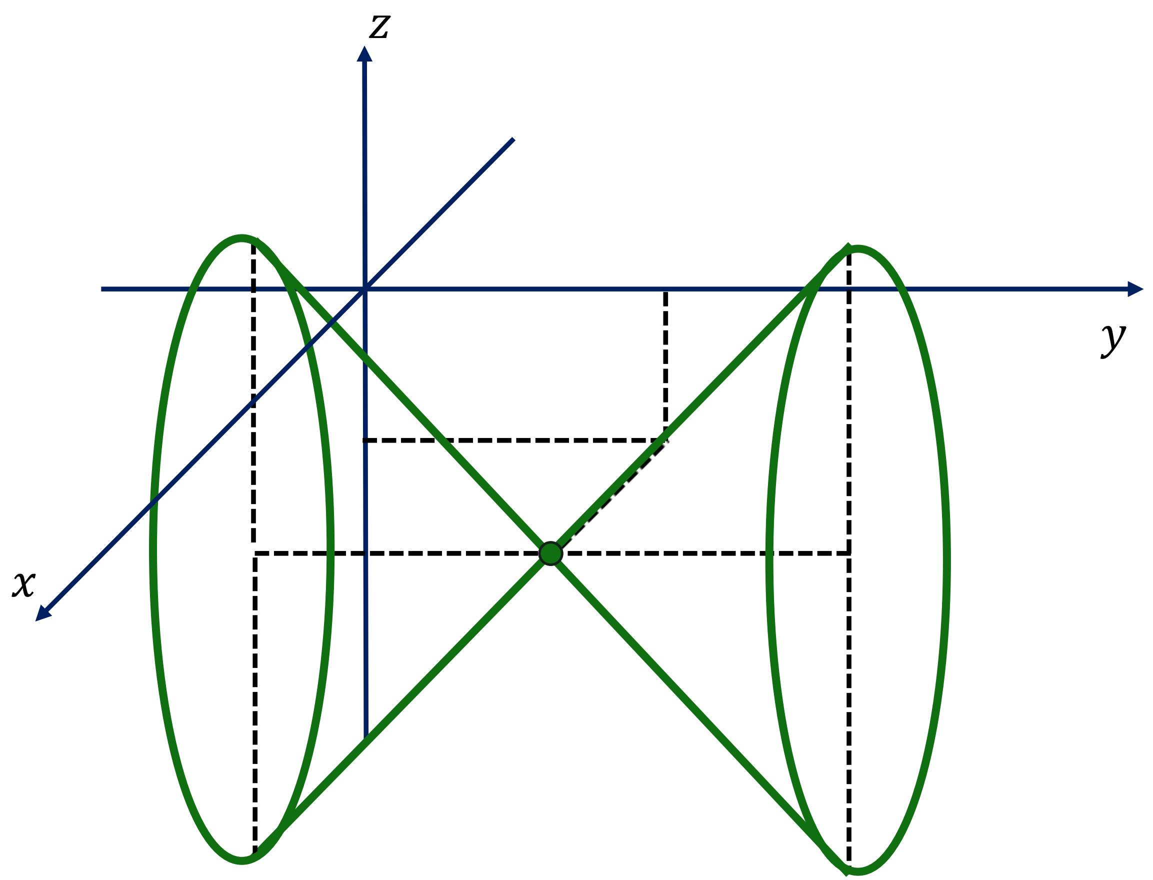
$$\pm(y-2) = z+1$$

$$z = y-3 \quad \text{ou} \quad z = -y+1$$

Ou seja, duas retas.

- Esboço:

$$(x-1)^2 - (y-2)^2 + (z+1)^2 = 0$$



Exemplo 01: Identifique e represente geometricamente as superfícies dadas pelas equações, apresentando os traços nos planos coordenados.

d) $x^2 - 2x - y^2 + 4y + z^2 + 2z - 2 = 0$

A equação do elipsoide de centro $C(h,k,l)$ é dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$$

Como se trata de uma superfície esférica, $a=b=c$, de modo que a equação se torna

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=a^2$$

Como o ponto A pertence à superfície,

$$(6-h)^2+(-1-k)^2+(3-l)^2=a^2$$

$$36-12h+h^2+1+2k+k^2+9-6l+l^2=a^2$$

$$h^2+k^2+l^2-12h+2k-6l+46=a^2$$

Analogamente, como o ponto B pertence à superfície,

$$(0-h)^2+(7-k)^2+(5-l)^2=a^2$$

$$h^2+49-14k+k^2+25-10l+l^2=a^2$$

$$h^2+k^2+l^2-14k-10l+74=a^2$$

Assim, tem-se o sistema linear

Exemplo 02: Encontre a equação da superfície esférica que passa pelos pontos $A(6,-1{,}3)$ e $B(0{,}7{,}5)$ e que tem centro na reta

$$r:\begin{cases}x=2z-3\\y=z-1\end{cases}$$

$$\begin{cases} h^2 + k^2 + l^2 - 12h + 2k - 6l + 46 = a^2 \\ h^2 + k^2 + l^2 - 14k - 10l + 74 = a^2 \end{cases}$$

Subtraindo as duas equações, tem-se

$$-12h + 16k + 4l - 28 = 0$$

Por sua vez, o centro pertence à reta r, logo

$$\begin{cases} h = 2l - 3 \\ k = l - 1 \end{cases}$$

Substituindo,

$$-12(2l - 3) + 16(l - 1) + 4l - 28 = 0$$

$$-24l + 36 + 16l - 16 + 4l - 28 = 0$$

$$-4l - 8 = 0$$

$$l = -2$$

Fazendo a (retro)substituição,

$$h = 2l - 3 = 2(-2) - 3 = -7$$
$$k = -2 - 1 = -3$$

Assim, tem-se $C(-7, -3, -2)$.

Exemplo 02: Encontre a equação da superfície esférica que passa pelos pontos $A(6, -1,3)$ e $B(0,7,5)$ e que tem centro na reta

$$r\colon \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

$$C(-7,-3,-2)$$

O raio da esfera (ao quadrado) pode então ser obtido substituindo as componentes do centro em qualquer uma das equações obtidas com os pontos A e B.

$$h^2 + k^2 + l^2 - 14k - 10l + 74 = a^2$$

$$(-7)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 - 14(-3) - 10(-2) + 74 = a^2$$

$$49 + 9 + 4 + 42 + 20 + 74 = a^2$$

$$a^2 = 198$$

Com isso, tem-se a equação

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = a^2$$

$$(x+7)^2 + (y+3)^2 + (z+2)^2 = 198$$

Exemplo 02: Encontre a equação da superfície esférica que passa pelos pontos $A(6,-1,3)$ e $B(0,7,5)$ e que tem centro na reta

$$r: \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

Dúvidas?