A reta: Propriedades (Teoria)

Estrutura desta apresentação

- Ângulo entre duas retas
- Condições entre duas retas:
  - Paralelismo
  - Ortogonalidade
  - Coplanaridade
- Posições relativas de duas retas
  - Ponto de interseção de duas retas concorrentes
- Ponto que divide um segmento de uma reta numa razão dada

Ângulo entre duas retas

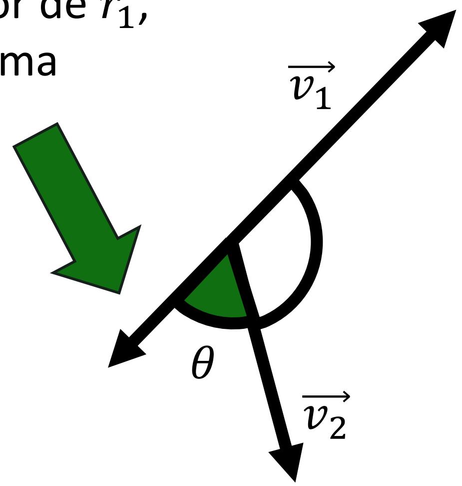
Sejam duas retas:

- a reta r_1, que passa pelo ponto $A_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem vetor diretor $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$, e
- a reta r_2, que passa pelo ponto $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem vetor diretor $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$.

Define-se como o **ângulo das duas retas $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$** o **menor** ângulo formado entre um vetor diretor de r_1 e um vetor diretor de r_2.

Ângulo entre duas retas

Também é vetor diretor de r_1, pois a direção é a mesma



O ângulo entre as retas r_1 e r_2 pode então ser determinado por

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}|}{|\overrightarrow{v_1}||\overrightarrow{v_2}|}$$

com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

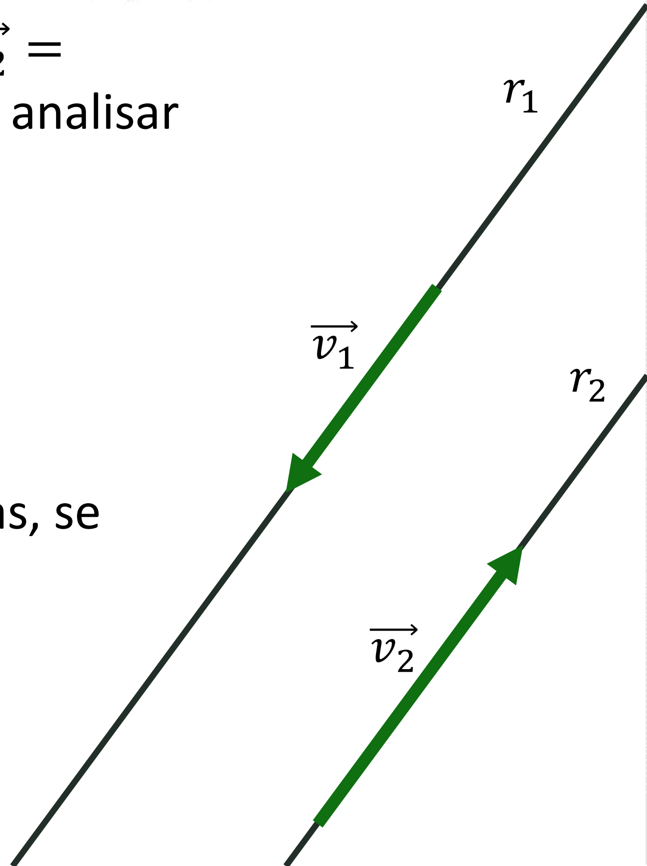
Condição de paralelismo entre duas retas

Se a reta r_1 tem vetor diretor $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$, e a reta r_2 tem vetor diretor $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$, pode-se aplicar a condição de paralelismo entre dois vetores para analisar se as duas retas são paralelas. Assim, as retas r_1 e r_2 serão paralelas se

$$\overrightarrow{v_1} = \alpha \overrightarrow{v_2}$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ ou, caso ambos vetores não apresentem componentes nulas, se

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



Condição de paralelismo entre duas retas

$$\boxed{\begin{gathered}\overrightarrow{v_1} = \alpha\overrightarrow{v_2} \\[2ex] \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}\end{gathered}}$$

Observações:

- Note que, se duas retas são paralelas, qualquer vetor diretor de uma é vetor diretor da outra!
- Se as retas r_1 e r_2 forem paralelas e, além disso, um ponto qualquer de r_1 pertencer a r_2, pode-se afirmar que as retas são **coincidentes**.

Condição de ortogonalidade entre duas retas

Analogamente, a condição de ortogonalidade entre as retas também é oriunda do conceito desenvolvido para vetores, considerando neste caso os vetores diretores.

Assim, se a reta $r_1$tem vetor diretor $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$, e a reta r_2 tem vetor diretor $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$, a condição de ortogonalidade de r_1 e r_2 será

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$$

Observação

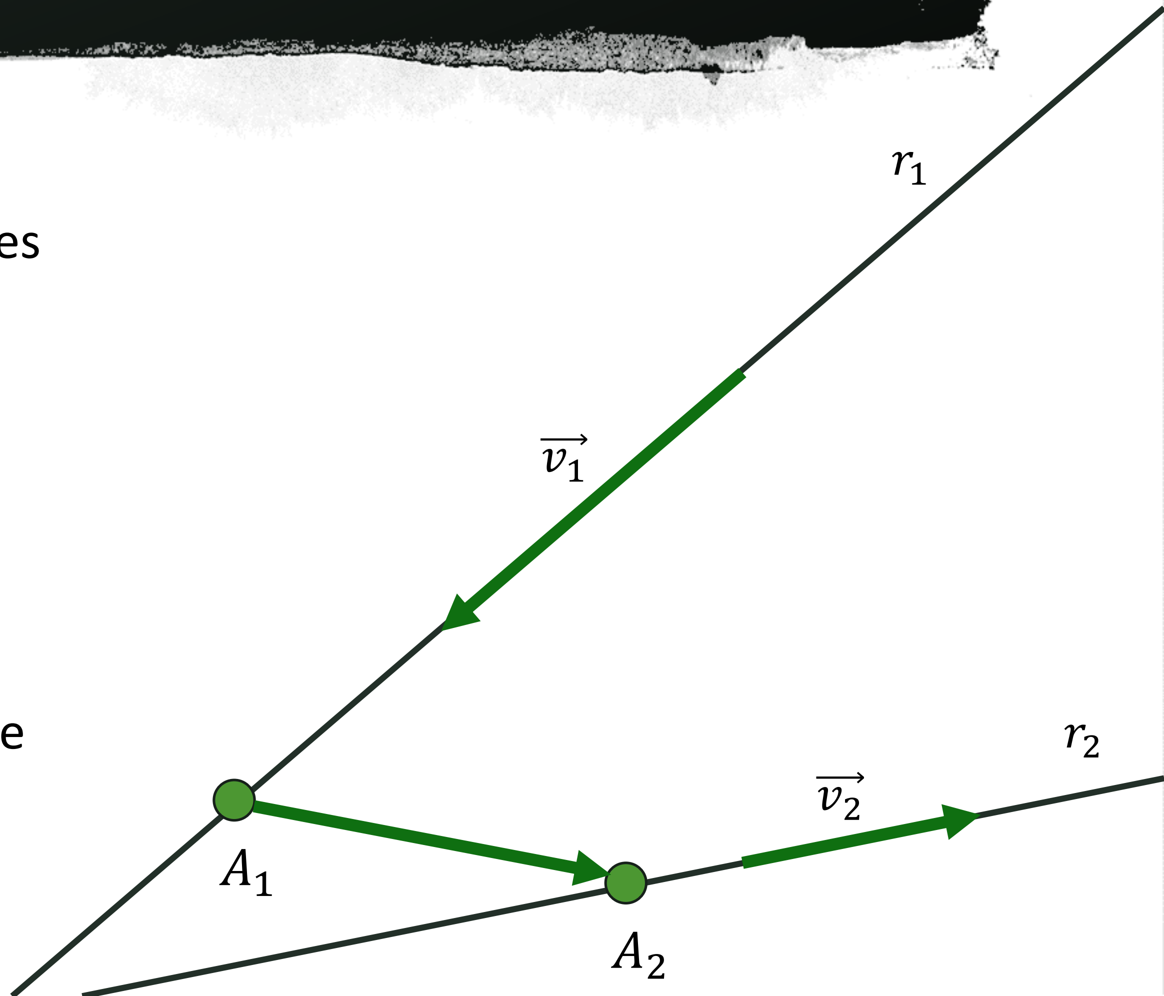
Caso seja necessário obter uma terceira reta simultaneamente ortogonal a r_1 e r_2, seu vetor diretor será paralelo ou igual a $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$.

Condição de coplanaridade entre duas retas

Assim como nas condições anteriores, deseja-se aplicar a condição de coplanaridade vista para vetores para determinar se duas retas são coplanares.

Note, entretanto, que dada condição exige três vetores. Estes serão:

- Um vetor diretor da primeira reta;
- Um vetor diretor da segunda reta;
- Um terceiro vetor definido com dois pontos, um de cada reta.



Condição de coplanaridade entre duas retas

Assim, considerando uma reta r_1, que passa pelo ponto $A_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem vetor diretor $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$, e também uma reta r_2, que passa pelo ponto $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem vetor diretor $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$, estas retas serão coplanares se

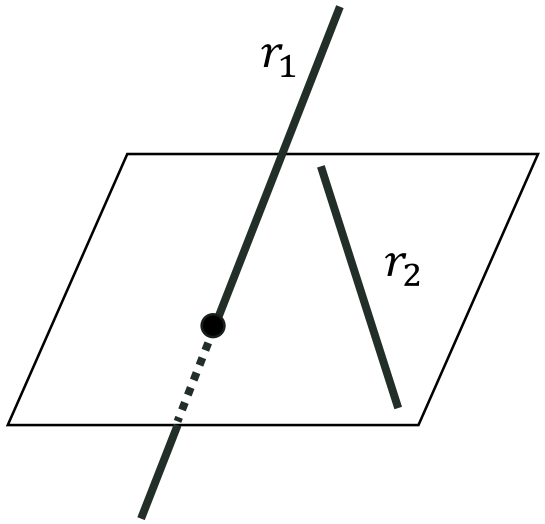
$$\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right) = 0$$

Ou seja, se

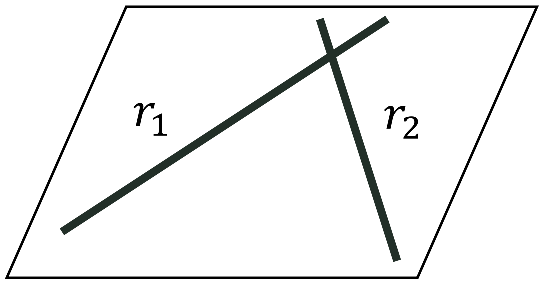
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Posições relativas de duas retas

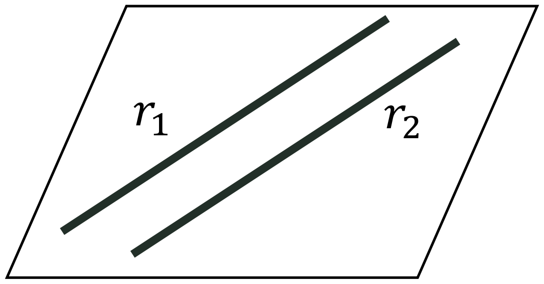
Duas retas distintas no espaço podem ser:



reversas



concorrentes



paralelas

Posições relativas de duas retas

Para fazer essa classificação, propõem-se os seguintes passos:

1. Aplica-se a condição de coplanaridade. Se esta condição falhar, conclui-se que as retas são **reversas**;
2. Caso a condição de coplanaridade seja válida, aplica-se a condição de paralelismo. Se esta condição também for válida, as retas são **paralelas**. Caso falhe, as retas são **concorrentes**, apresentando um ponto de interseção.

Posições relativas de duas retas

r_1 e r_2 podem ser

coplanares
$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$

paralelas
$\overrightarrow{v_1} = \alpha \overrightarrow{v_2}$

$r_1 \cap r_2 = \emptyset$

concorrentes

$\overrightarrow{v_1} \neq \alpha \overrightarrow{v_2}$

$r_1 \cap r_2 = \{\mathrm{I}\}$

reversas
$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0$

Ponto de interseção de duas retas concorrentes

- Caso duas retas sejam concorrentes, elas se interseccionam em um ponto.
- Este ponto é obtido garantindo que as equações de ambas retas sejam válidas simultaneamente.
- Apesar de não ser exigido, o mais indicado é utilizar as equações reduzidas de cada reta para este cálculo. Assim, se

$$r_1\colon\begin{cases} y = m_1x + n_1 \\ z = p_1x + q_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2\colon\begin{cases} y = m_2x + n_2 \\ z = p_2x + q_2 \end{cases}$$

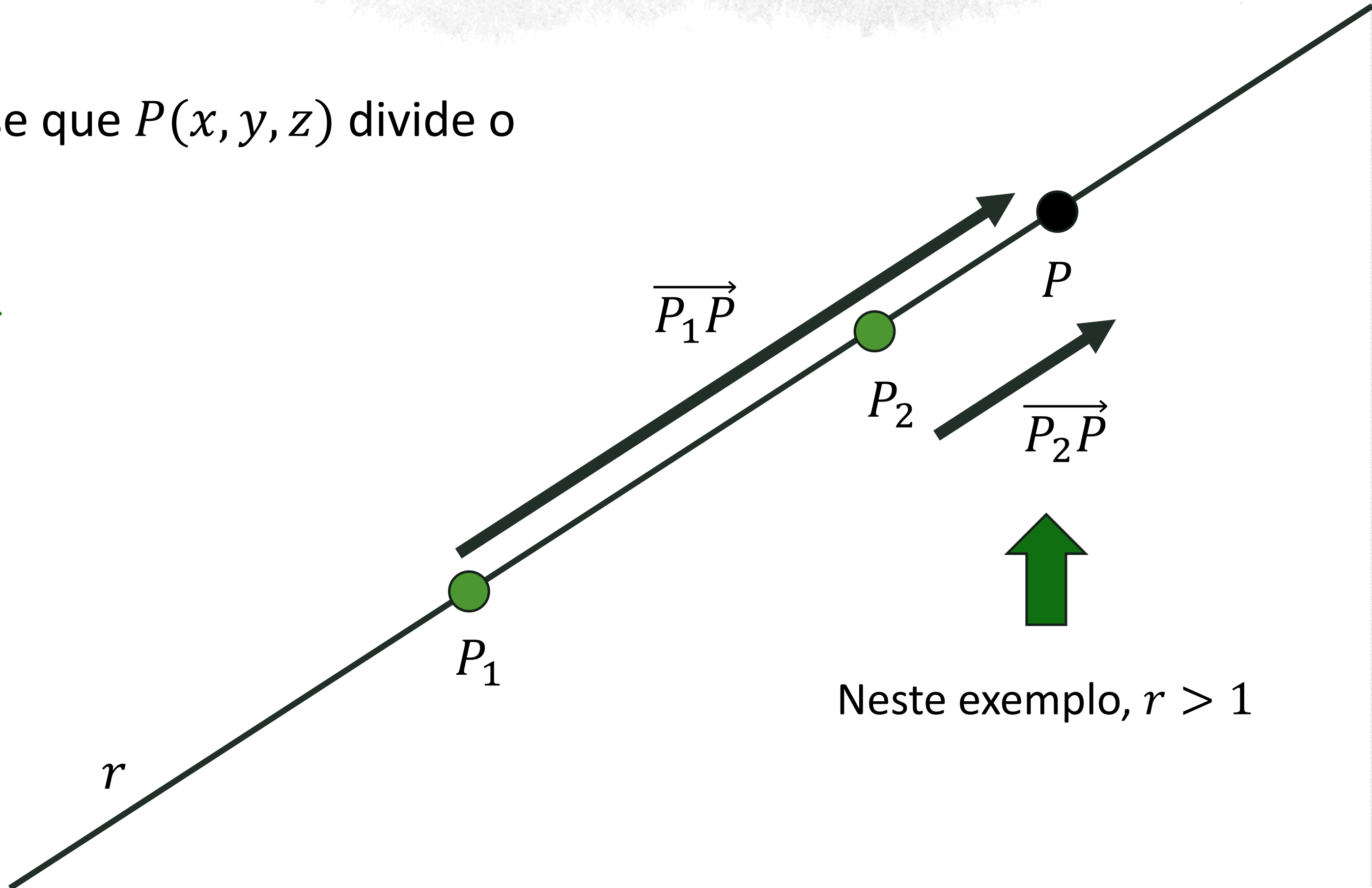
o ponto de intereseção é dado por

$$\mathrm{I}\colon\begin{cases} y = m_1x + n_1 \\ z = p_1x + q_1 \\ y = m_2x + n_2 \\ z = p_2x + q_2 \end{cases}$$

Ponto que divide um segmento de uma reta numa razão dada

Dados $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, diz-se que $P(x, y, z)$ divide o segmento de reta P_1P_2 na razão r se:

$$\boldsymbol{\overrightarrow{P_1P} = r\overrightarrow{P_2P}}$$



Neste exemplo, $r > 1$

Ponto que divide um segmento de uma reta numa razão dada

Como cada vetor pode ser definido como

$$\overrightarrow{P_1P} = P - P_1 = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$
$$\overrightarrow{P_2P} = P - P_2 = (x - x_2, y - y_2, z - z_2)$$

Substituindo na equação $\overrightarrow{P_1P} = r\overrightarrow{P_2P}$,

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = r(x - x_2, y - y_2, z - z_2)$$

Ponto que divide um segmento de uma reta numa razão dada

$$\boxed{\begin{gathered}\overrightarrow{P_1P} = r\overrightarrow{P_2P} \\ (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = r(x - x_2, y - y_2, z - z_2)\end{gathered}}$$

Comparando a primeira componente, tem-se

$$x - x_1 = r(x - x_2)$$
$$x - x_1 = rx - rx_2$$
$$x - rx = x_1 - rx_2$$
$$x(1 - r) = x_1 - rx_2$$

$$\boldsymbol{x = \frac{x_1 - rx_2}{1 - r}}$$

Analogamente,

$$\boldsymbol{y = \frac{y_1 - ry_2}{1 - r}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{z = \frac{z_1 - rz_2}{1 - r}}$$

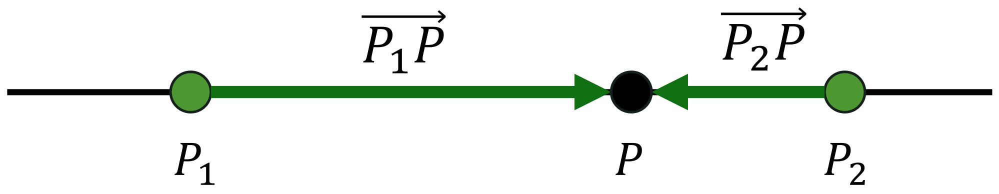
Ponto que divide um segmento de uma reta numa razão dada

$$\overrightarrow{P_1P} = r\overrightarrow{P_2P}$$

$$\boxed{x = \frac{x_1 - rx_2}{1 - r}; \quad y = \frac{y_1 - ry_2}{1 - r} \quad \text{e} \quad z = \frac{z_1 - rz_2}{1 - r}}$$

Observações:

- Note que para que o ponto P esteja entre P_1 e P_2, é necessário $r < 0$.



- O ponto que divide o segmento de reta P_1P_2 ao meio é obtido fazendo $r = -1$. Neste caso,

$$\boldsymbol{x = \frac{x_1 + x_2}{2}} \quad ; \quad \boldsymbol{y = \frac{y_1 + y_2}{2}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{z = \frac{z_1 + z_2}{2}}$$