Álgebra Linear
(ALI0001 – CCI-192-02U)

Aplicações de Sistemas Lineares

Método da Inversa para resolução de sistemas lineares

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de ALI do dia 15 de março de 2023.

UDESC

Aplicação de Sistemas: Problema da dieta

Exemplo 1: Suponhamos que queremos preparar um café da manhã com manteiga, presunto e pão, de maneira a consumir exatamente 540 calorias, 11,6 gramas de proteínas e 33 gramas de gorduras. A tabela mostra o número de calorias, proteínas (em gramas) e de gorduras (em gramas) encontradas, respectivamente, em uma grama de manteiga, de presunto e de pão:

	Manteiga	**Presunto**	**Pão**
calorias	7	3,5	2,6
proteínas	0,06	0,15	0,08
gorduras	0,8	0,3	0,02

Se indicamos por x_1, x_2 e x_3 respectivamente o total de gramas de manteiga, de presunto e de pão que iremos consumir, a resposta para a questão consiste na solução do sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 7x_1 + 3{,}5x_2 + 2{,}6x_3 = 540 \\ 0{,}06x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}08x_3 = 11{,}6 \\ 0{,}8x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}02x_3 = 33 \end{cases}$$

Se resolvermos o sistema, vamos encontrar as quantidades x_1 de manteiga, x_2 de presunto e x_3 de pão de forma que sejam consumidos exatamente a quantidade desejada de calorias, proteína e gorduras.

Exemplo

Para resolver o sistema, escalonamos a matriz ampliada:

$$[A\,|B]=\begin{bmatrix} 7 & 3,5 & 2,6 & | & 540 \\ 0,06 & 0,15 & 0,08 & | & 11,6 \\ 0,8 & 0,3 & 0,02 & | & 33 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \longrightarrow 100L_2 \\ L_3 \longrightarrow 100L_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 7 & 3,5 & 2,6 & | & 540 \\ 6 & 15 & 8 & | & 1160 \\ 80 & 30 & 2 & | & 3300 \end{bmatrix} L_1 \longrightarrow L_1 - L_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -11,5 & -5,4 & | & -620 \\ 6 & 15 & 8 & | & 1160 \\ 80 & 30 & 2 & | & 3300 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \longrightarrow L_2 - 6L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 80L_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -11,5 & -5,4 & | & -620 \\ 0 & 84 & 40,4 & | & 4480 \\ 0 & 950 & 434 & | & 52900 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow \frac{1}{84}L_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -11,5 & -5,4 & | & -620 \\ 0 & 1 & \frac{101}{210} & | & \frac{1220}{21} \\ 0 & 950 & 434 & | & 52900 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 - 950L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & -11,5 & -5,4 & | & -620 \\ 0 & 1 & \frac{101}{210} & | & \frac{1220}{21} \\ 0 & 0 & -\frac{481}{21} & | & \frac{-48100}{21} \end{bmatrix}$$

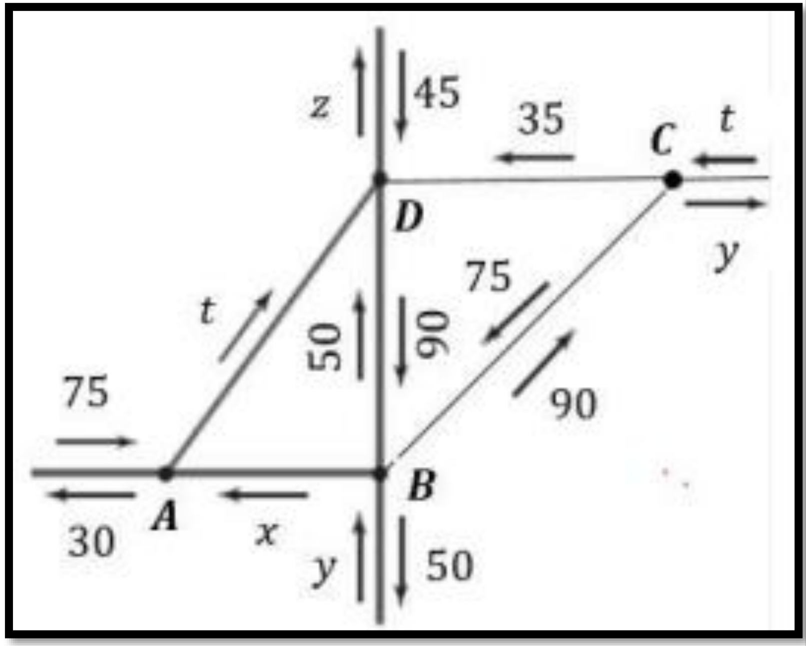
$$L_3 \longrightarrow \frac{-21}{481}L_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -11,5 & -5,4 & | & -620 \\ 0 & 1 & \frac{101}{210} & | & \frac{1220}{21} \\ 0 & 0 & 1 & | & 100 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = -620 + 11,5x_2 + 5,4x_3 \\ x_2 = \dfrac{1220}{21} - \dfrac{101}{210}x_3 \\ x_3 = 100 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 35 \\ x_2 = 10 \\ x_3 = 100 \end{cases}$$

Aplicação de Sistemas: redes de tráfego

Exemplo 2: Podemos usar sistemas de equações lineares para modelar matematicamente situações que envolvem redes de tráfego.

Por exemplo, vamos obter o modelo matemático que analisa uma rede de tráfego com quatro cruzamentos (A, B, C e D) que está representado na figura abaixo:



A unidade de medida é "veículos por minuto".

O tráfego flui ao longo das vias, no sentido assinalado, e é válida a lei que:

> o número de veículos que entra em um cruzamento é igual ao número de veículos que sai desse cruzamento.

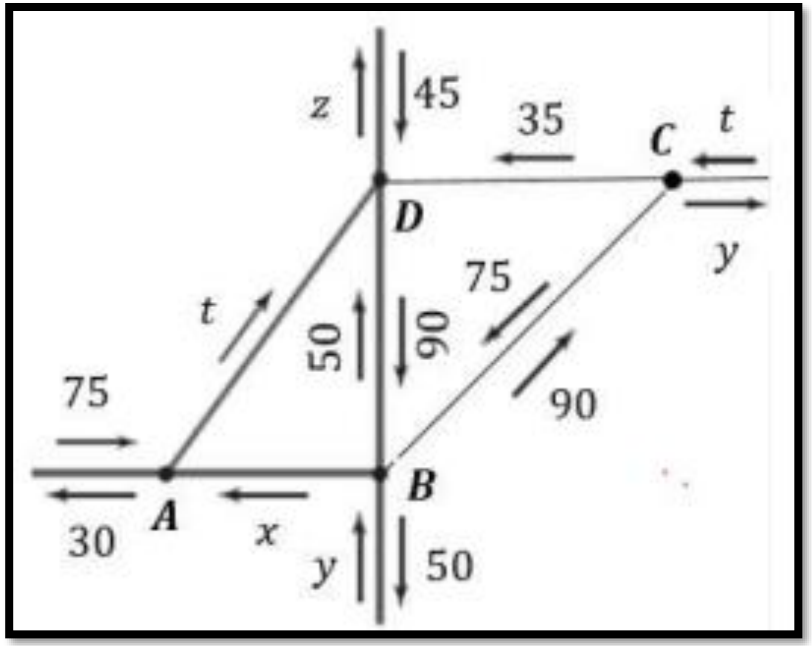
A partir dessas informações, aplicando a lei em cada cruzamento, obtemos que

$$\begin{aligned} A&: \quad x + 75 = 30 + t \\ B&: \quad y + 90 + 75 = 50 + x + 50 + 90 \\ C&: \quad t + 90 = y + 35 + 75 \\ D&: \quad 45 + t + 50 + 35 = z + 90 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - t = -45 \\ -x + y = 25 \\ -y + t = 20 \\ -z + t = -40 \end{cases}$$

com a restrição que $x, y, z, t \geq 0.$

Aplicação de Sistemas: redes de tráfego

O sistema
$$\begin{cases} x - t = -45 \\ -x + y = 25 \\ -y + t = 20 \\ -z + t = -40 \end{cases}$$



tem como solução
$$\begin{cases} x = t - 45 \\ 0 = 0 \\ y = t - 20 \\ z = t + 40 \end{cases}$$

Interpretando a solução obtida, podemos determinar o número mínimo de veículos que deve:

a) sair do cruzamento D e seguir na direção superior: $z = t + 40 \geq 40.$

b) entrar no cruzamento C, vindo da direita:

$$y \geq 0 \text{ e } x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad t \geq 20 \text{ e } t \geq 45 \quad \Rightarrow \quad t \geq 45$$

c) entrar no cruzamento B, vindo de baixo:

$$y = t - 20 \geq 45 - 20 = 25$$

Revisão: Inversa de uma matriz

Uma matriz quadrada A, de ordem $n \times n$, é **invertível** (ou **não-singular**) quando existe uma matriz de ordem $n \times n$, denotada por A^{-1}, tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem $n \times n$.

Para obter a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, supomos que $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ seja tal que $A.A^{-1} = I$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2a + c & 2b + d \\ 5a + 3c & 5b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da igualdade matricial, obtemos os sistemas:

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 5a + 3c = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2b + d = 0 \\ 5b + 3d = 1 \end{cases}.$$

Resolvendo os sistemas obtemos $a = 3, b = -1, c = -5$ e $d = 2$, e com isso, encontramos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos obter uma outra forma de obter a inversa (quando existir) de uma matriz.

Método para obter a inversa por escalonamento

Para isso, observe que a forma matricial dos sistemas $\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 5a + 3c = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2b + d = 0 \\ 5b + 3d = 1 \end{cases}$ é

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Note que os dois sistemas possuem a mesma matriz dos coeficientes, e por isso, suas matrizes ampliadas diferem apenas devido à matriz coluna dos termos independentes:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

Por isso, em vez de resolver dois sistemas separadamente, podemos resolvê-los em um único processo de escalonamento, desde que usemos, na matriz ampliada, duas colunas (lado a lado) para os termos independentes. Ou seja, vamos escalonar a matriz $[A|\,I]$:

$$[A\,|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \; L_1 \to \frac{1}{2}L_1 \quad \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \; L_2 \to L_2 - 5L_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & 1 \end{array}\right] \; L_2 \to 2L_2 \; \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right] \; L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}L_2 \; \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right]$$

$$= [I \mid A^{-1}].$$

Veja que, ao final do escalonamento de $[A \mid I]$, encontramos $[I \mid A^{-1}]$, ou seja, a inversa surgiu à direita da matriz escalonada.

Método para obter a inversa por escalonamento

Portanto, para obter a inversa (se existir) de uma matriz quadrada A, basta tomar a matriz identidade (de mesma ordem que A) ao seu lado direito e escalonar a matriz $[A \mid I]$ até obter (se possível) a matriz $[\, I \mid A^{-1}]$:

$$\boxed{[A \mid I] \xrightarrow[\text{escalonamento}]{} [I \mid A^{-1}]}$$

Caso não seja possível obter, ao final do escalonamento, a matriz identidade I no lado esquerdo da matriz escalonada, isso significa que não existe A^{-1}, ou seja, A não é invertível.

Exemplo 3: Encontre, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Solução: Vamos escalonar a matriz A com a identidade de ordem 3 ao seu lado direito:

$$[A \vdots I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 + 6L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \to L_3 + 4L_2 \end{array}$$

Método para obter a inversa por escalonamento

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] L_3 \to -L_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + L_3 \\ L_2 \to L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right] = [I \mid A^{-1}].$$

Note que é preciso escalonar por completo a matriz $[A \mid I]$, ou seja, é necessário anular também os elementos situados acima dos pivôs.

Como conseguimos obter a Identidade de ordem 3×3 do lado esquerdo, a matriz situada no lado direito é a inversa desejada. Portanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Verifique, como exercício, que essa matriz satisfaz a definição de matriz inversa

$$A \cdot A^{-1} = I = A \cdot A^{-1}.$$

Relembrando: Propriedades da Inversa

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem $n \times n$. São válidas as seguintes propriedades:

i) Se A é invertível, sua inversa A^{-1} também é invertível e a inversa de A^{-1} é A, ou seja,

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

ii) Se a matriz A é invertível, sua transposta A^T também é invertível e sua inversa é

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

iii) Se A e B são matrizes invertíveis de mesma ordem, então o produto AB é uma matriz invertível e a inversa de AB é o produto $B^{-1} \cdot A^{-1}$, ou seja

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

iv) Se A é invertível e $k \in \mathbb{R}$, com $k \neq 0$, então kA também é invertível e sua inversa é

$$(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}.$$

v) A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Além disso

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Método da inversa para resolver sistemas lineares

Teorema: Se A é invertível, então o sistema de n equações e n variáveis $AX = B$ é sempre possível e determinado (SPD) e sua única solução é dada por $X = A^{-1}B$.

Justificativa: Se A é invertível, então existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ e com isso, a matriz $X = A^{-1}B$ é tal que

$$AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = I.B = B,$$

ou seja, $X = A^{-1}B$ é solução do sistema linear $AX = B$. Portanto, o sistema é possível.

Além disso, se Y for qualquer outra solução desse sistema, temos que $AY = B$.

Como $AX = B$, obtemos que

$$AY = B = AX \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AY = A^{-1}AX \quad \Rightarrow \quad IY = IX \quad \Rightarrow \quad Y = X.$$

Portanto, existe uma única solução para o sistema, e ele é possível e determinado (SPD).

Observação: O método da inversa é útil para resolver vários sistemas cuja matriz dos coeficientes A é sempre a mesma, e em que apenas a matriz B é diferente em cada caso.

Exemplo 4: Resolva os sistemas abaixo, pelo método da inversa:

$a)\ \begin{cases} 2x + 3y + z = -1 \\ 3x + 3y + z = 1 \\ 2x + 4y + z = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 8 \\ 2x + 4y + z = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$

Método da inversa para resolver sistemas lineares

Solução: Veja que os três sistemas dados possuem os mesmos coeficientes, com variações apenas nos seus termos independentes. Com isso, vamos aplicar o método da inversa para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para obter A^{-1}, escalonamos a matriz A ao lado da matriz identidade 3×3:

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} L_2 \to L_2 - L_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} L_2 \to L_2 - L_3 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} L_2 \to -L_2 \\ L_3 \to L_3 + 4L_2 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & -3 \end{array}\right] = [\, I \mid A^{-1}].$$

Método da inversa para resolver sistemas lineares

Portanto, obtemos que $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ e com isso, todos os sistemas são SPD.

Agora, vamos obter as soluções dos sistemas:

a) No primeiro sistema, temos que a matriz dos termos independentes é $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ e pelo método da inversa, a sua solução é

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1).(-1) + 1.1 + 0.2 \\ (-1).(-1) + 0.1 + 1.2 \\ 6.(-1) - 2.1 - 3.(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

b) No segundo sistema, temos que a matriz dos termos independentes é $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$ e pelo método da inversa, a sua solução é

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1).4 + 1.8 + 0.5 \\ (-1).4 + 0.8 + 1.5 \\ 6.4 - 2.8 - 3.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Exercícios Propostos:

c) O terceiro sistema é homogêneo, pois $B = 0$. Com isso, sua solução é a trivial, pois

$$X = A^{-1}.0 = 0.$$

Exercício 1: Determine, por escalonamento, a inversa (se existir) das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ b) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \\ 5 & -16 & -11 \end{bmatrix}$.

Exercício 2: Resolva os sistemas lineares $AX = B$, onde A é a matriz do exercício anterior e B é dada por:

a) $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ c) $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ d) $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.