A reta: propriedades (Exemplos)

Para o cálculo do ângulo, é necessário conhecer o vetor diretor de cada uma das retas envolvidas.

1) Reta r

Convertendo para as equações paramétricas:

$$r:\begin{cases} x = t \\ y = nt + 5 \\ z = 2t - 3 \end{cases}$$

Assim,

$$\overrightarrow{v_1} = (1, n, 2)$$

2) Eixo y

Um vetor diretor é

$$\overrightarrow{v_2} = (0,1,0) = \vec{j}$$

Observação: a equação da reta do eixo y pode ser escrita como

$$s:\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Exemplo 01: Determinar o valor de n para que seja de $\frac{\pi}{6}$ o ângulo que a reta $r:\begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 3 \end{cases}$ forma com o eixo y.

A fórmula para cálculo do ângulo entre duas retas é dada por

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}|}{|\overrightarrow{v_1}||\overrightarrow{v_2}|}$$

Resolvendo cada uma das expressões primeiro,

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = (1, n, 2) \cdot (0,1,0) = 0 + n + 0 = n$$

$$|\overrightarrow{v_1}| = \sqrt{\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1}} = \sqrt{1^2 + n^2 + 2^2} = \sqrt{5 + n^2}$$

$$|\overrightarrow{v_2}| = \sqrt{\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2}} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$$

Substituindo os dados obtidos na fórmula do ângulo e considerando $\theta = \frac{\pi}{6}$, tem-se

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{|n|}{\sqrt{5 + n^2} \cdot 1}$$

Desenvolvendo,

$$|n| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{5 + n^2}$$

$$2\,|n| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5 + n^2}$$

Exemplo 01: Determinar o valor de n para que seja de $\frac{\pi}{6}$ o ângulo que a reta r: $\begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 3 \end{cases}$ forma com o eixo y.

$$2\,|n| = \sqrt{3}\cdot\sqrt{5+n^2}$$

$$(2\,|n|)^2 = \left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5+n^2}\right)^2$$

$$4n^2 = 3(5+n^2)$$

$$4n^2 = 15 + 3n^2$$

$$n^2 = 15$$

$$\therefore\ n = \pm\sqrt{15}$$

Observação 2: O exercício está encerrado, mas somente porque trabalhou-se com retas. **SE** o exercício tivesse pedido o ângulo entre dois vetores, a fórmula do ângulo seria

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}||\overrightarrow{v_2}|}$$

e, como $\cos\frac{\pi}{3} > 0$, após calcular os possíveis valores de n, seria necessário garantir que $\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} > 0$, o que poderia eliminar algumas das possibilidades obtidas para a variável.

Exemplo 01: Determinar o valor de n para que seja de $\frac{\pi}{6}$ o ângulo que a reta $r: \begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 3 \end{cases}$ forma com o eixo y.

Duas retas são paralelas se seus vetores diretores forem paralelos (ou seja, tiverem a mesma direção).
Como a única informação relevante do vetor diretor (para a reta) é sua direção, isso implica que, se duas retas são paralelas, o vetor diretor de uma é vetor diretor da outra e vice-versa.
Por este motivo, escolhe-se como vetor diretor de r o próprio vetor diretor de s, que neste caso é

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_s} = (1, -3, -1)$$

As equações paramétricas de r tornam-se então

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Substituindo o ponto $P(-3, m, n)$ nesta equação, tem-se

Exemplo 02: A reta r passa pelo ponto $A(1, -2{,}1)$ e é paralela à reta $s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}$. Se $P(-3, m, n) \in r$, determinar m e n.

$$\begin{cases} -3 = 1 + t \\ m = -2 - 3t \\ n = 1 - t \end{cases}$$

$$-3 = 1 + t \Rightarrow t = -4$$

Assim,

$$m = -2 - 3t = -2 - 3(-4) = 10$$

$$n = 1 - t = 1 - (-4) = 5$$

Exemplo 02: A reta r passa pelo ponto $A(1,-2,1)$ e é paralela à reta s: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}$. Se $P(-3, m, n) \in r$, determinar m e n.

Passo 1) Retirar os dados necessários de cada reta.

$$\overrightarrow{v_r} = (2,3,4)$$
$$A_r(2,0,5)$$

$$\overrightarrow{v_s} = (1,-1,-2)$$
$$A_s(5,2,7)$$

Passo 2) Mostrar que as retas são coplanares.

$$\left(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}\right) = 0?$$

$$\overrightarrow{A_rA_s} = A_s - A_r$$
$$\overrightarrow{A_rA_s} = (5,2,7) - (2,0,5)$$
$$\overrightarrow{A_rA_s} = (3,2,2)$$

$$\left(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\left(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{A_rA_s}\right) = -4 - 18 + 8 + 12 + 8 - 6 = 0$$

Ou seja, as retas r e s são coplanares.

Exemplo 03: Mostre que r e s são concorrentes, calculando em seguida seu ponto de interseção.

$$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$$

Passo 3) Mostrar que as retas não são paralelas.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \ ?$$

$$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-1} \neq \frac{4}{-2}$$

As retas não são paralelas. Como são coplanares mas não são paralelas, pode-se afirmar que são concorrentes!

Passo 4) (Opcional) Obter as equações reduzidas de r e s.

Reta r:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} \Longrightarrow y = \frac{3}{2}x - 3$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{z-5}{4} \Longrightarrow z - 5 = 2(x-2) \Longrightarrow z = 2x + 1$$

$$\therefore r: \begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x - 3 \\ z = 2x + 1 \end{cases}$$

Exemplo 03: Mostre que r e s são concorrentes, calculando em seguida seu ponto de interseção.

$$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$$

Reta s:

$$x = 5 + t \Longrightarrow t = x - 5$$

Substituindo nas outras duas equações

$$y = 2 - (x - 5) = -x + 7$$

$$z = 7 - 2(x - 5) = -2x + 17$$

$$\therefore s: \begin{cases} y = -x + 7 \\ z = -2x + 17 \end{cases}$$

Passo 5) Calcular o ponto de interseção.

$$\mathrm{I}: \begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x - 3 \\ z = 2x + 1 \\ y = -x + 7 \\ z = -2x + 17 \end{cases}$$

$$z = z$$
$$2x + 1 = -2x + 17$$
$$2x + 2x = 17 - 1$$
$$x = 4$$

Exemplo 03: Mostre que r e s são concorrentes, calculando em seguida seu ponto de interseção.

$$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$$

$$y = -x + 7$$
$$y = -4 + 7 = 3$$

$$z = 2x + 1$$
$$z = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

$$\therefore \quad \mathrm{I}(4,3,9)$$

Exemplo 03: Mostre que r e s são concorrentes, calculando em seguida seu ponto de interseção.

$$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$$

Como se deseja uma reta que seja simultaneamente ortogonal às retas r e s, pode-se escolher como vetor diretor dela

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}$$

Obtendo o vetor diretor das retas:

Reta r:

Tem-se uma reta paralela ao eixo y!

$$\overrightarrow{v_r} = \vec{j} = (0,1,0)$$

Reta s:

Revertendo para as equações paramétricas,

$$s: \begin{cases} x = t \\ y = -2t + 1 \\ z = -t - 3 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v_s} = (1, -2, -1)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Exemplo 04: Estabelecer as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A(3,2,1)$ e é simultaneamente ortogonal às retas

$$r: \begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -x - 3 \end{cases}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} = -\vec{i} - \vec{k}$$
$$\vec{v} = (-1,0,-1)$$

Equações paramétricas da reta:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Exemplo 04: Estabelecer as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A(3,2,1)$ e é simultaneamente ortogonal às retas

$$r: \begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -x - 3 \end{cases}$$

A fórmula para o ponto que divide um segmento de uma reta numa razão dada é

$$\overrightarrow{P_1P} = r\overrightarrow{P_2P}$$

Dos dados do exercício,

$$\overrightarrow{P_1P} = P - P_1$$
$$\overrightarrow{P_1P} = (9,14,7) - (1,4,3)$$
$$\overrightarrow{P_1P} = (8,10,4)$$

$$r = \frac{2}{3}$$

Assim,

$$(8,10,4) = \frac{2}{3}\overrightarrow{P_2P}$$

$$\overrightarrow{P_2P} = \frac{3}{2}(8,10,4) = (12,15,6)$$

Como

$$\overrightarrow{P_2P} = P - P_2 \Rightarrow "P_2 = P - \overrightarrow{P_2P}"$$

tem-se

$$P_2 = (9,14,7) - (12,15,6)$$
$$\therefore\ P_2(-3,-1,1)$$

Exemplo 05: O ponto $P(9,14,7)$ divide o segmento P_1P_2 na razão $\frac{2}{3}$. Determinar P_2, sabendo que $P_1(1,4,3)$.

Dúvidas?