A reta: tipos de equações (Teoria)

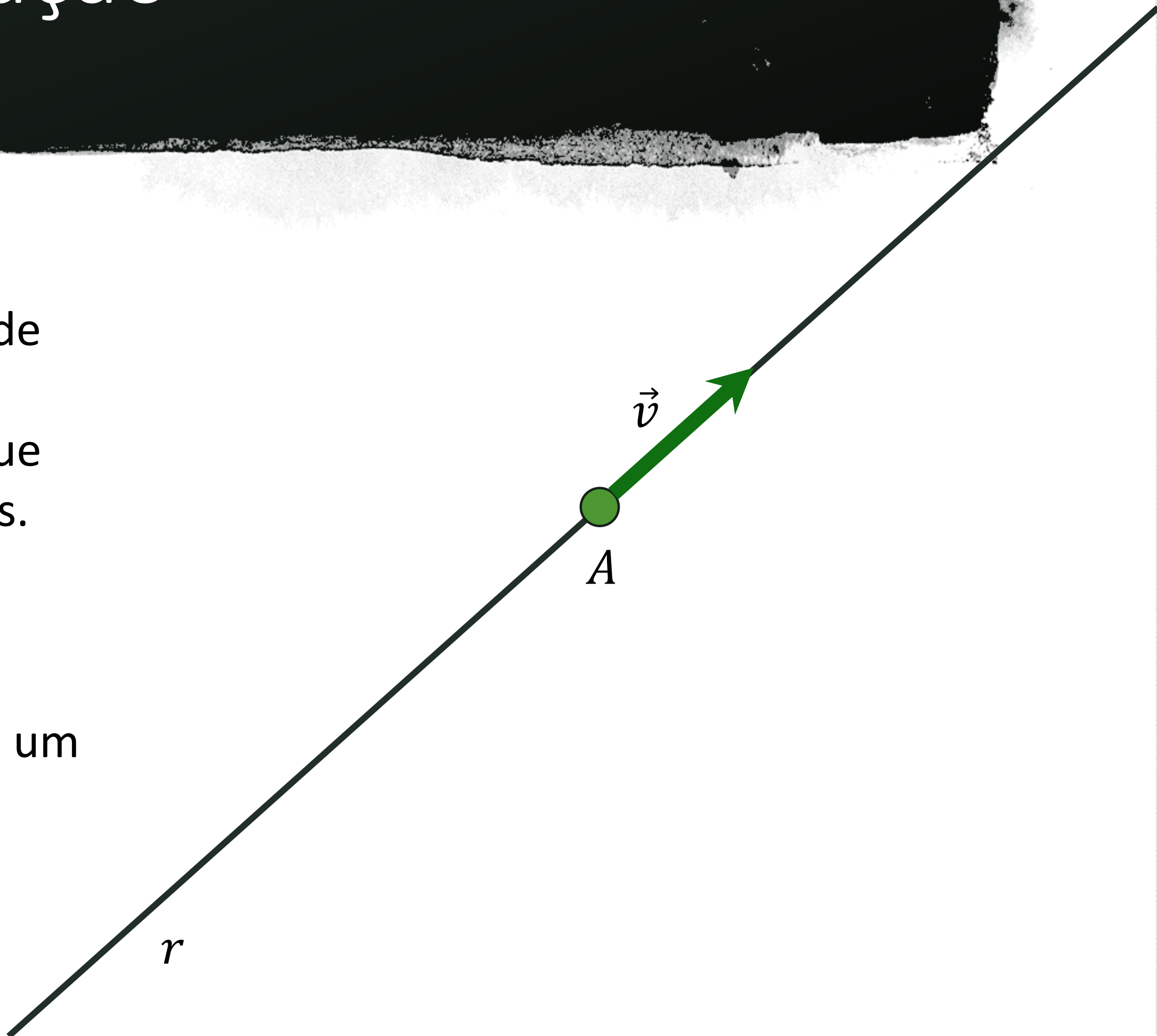
Estrutura desta apresentação

- Introdução
- Equações da reta
  - Equação vetorial da reta;
  - Equações paramétricas da reta;
  - Equações simétricas da reta;
  - Equações reduzidas da reta.
- Retas paralelas aos planos e eixos coordenados
  - Vetor diretor com uma componente nula;
  - Vetor diretor com duas componentes nulas.

Introdução

Uma reta pode ser definida como um conjunto de infinitos pontos, com tamanho infinito e unidimensional. Apresenta-se como um traço que segue uma única direção, sem curvas ou ângulos.

Note que, para defini-la por completo, serão necessários um vetor, para fornecer a direção, e um ponto da mesma, para fixá-la no espaço.



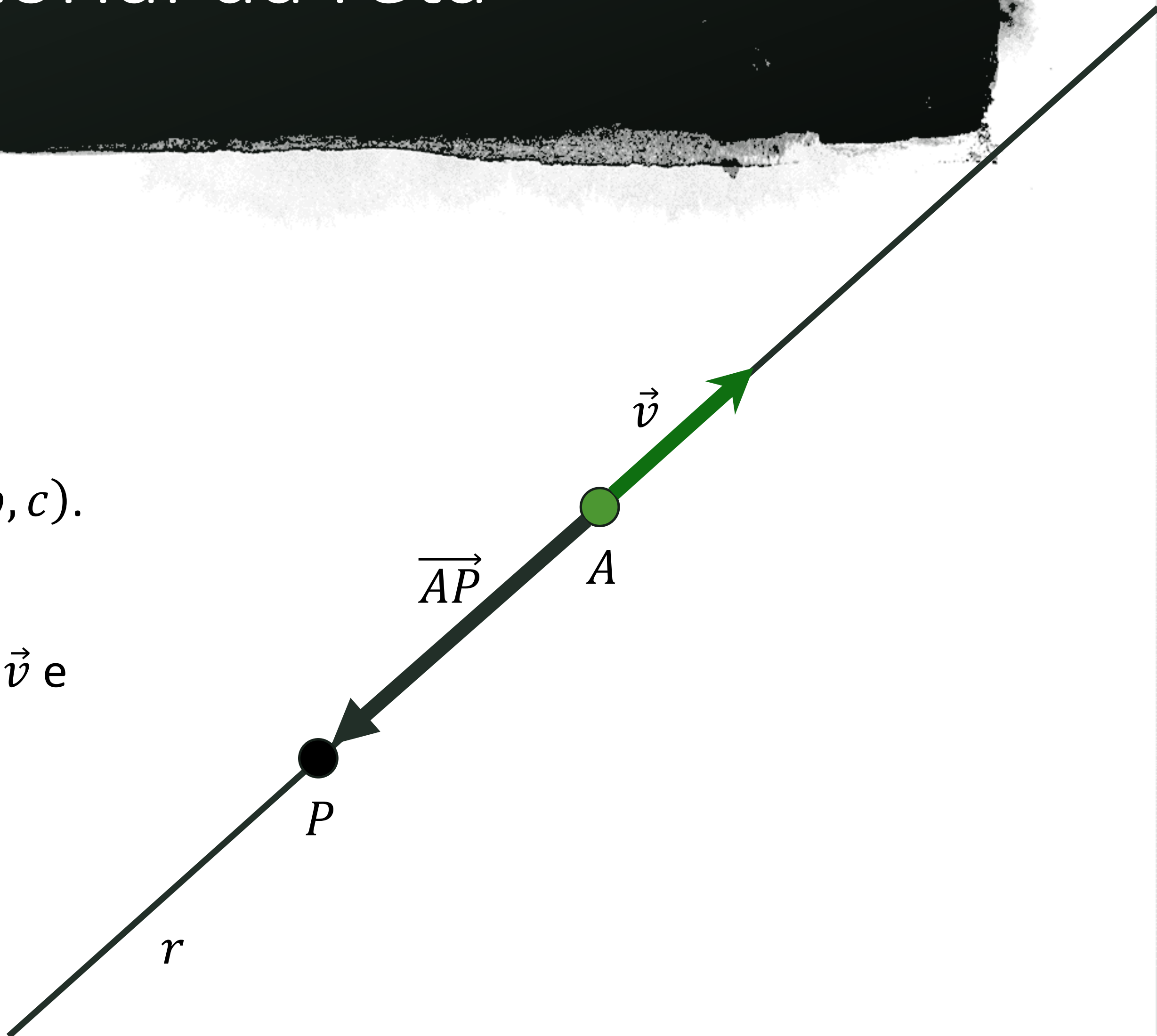
Equações da reta

1) Equação vetorial da reta

Seja r uma reta que:

- Passa por um ponto $A(x_0, y_0, z_0)$;
- Tem a direção de um vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c)$.

Dado qualquer ponto $P(x, y, z)$ da reta, o vetor $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AP}$ deverão ser colineares.

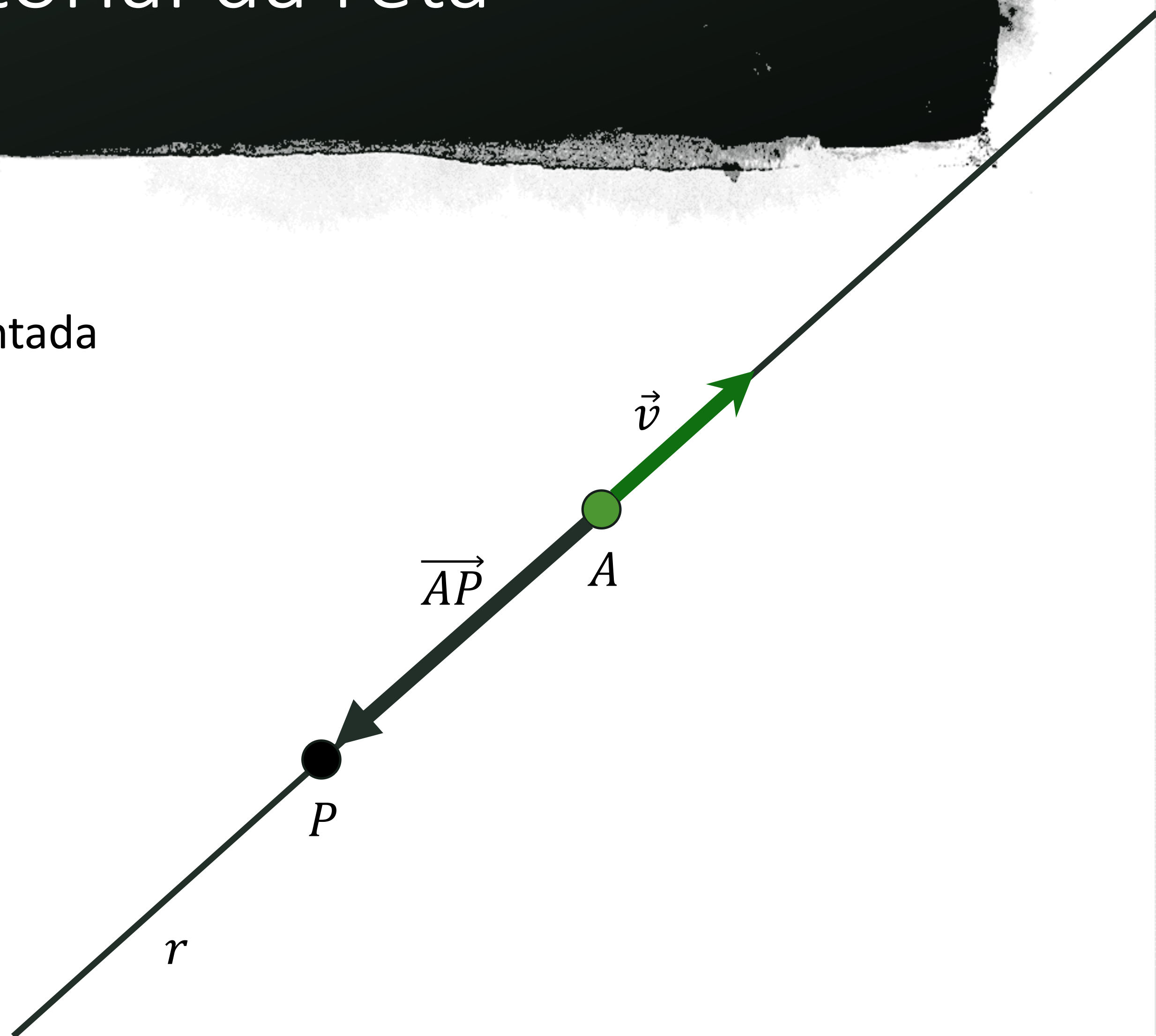


1) Equação vetorial da reta

Esta relação de colinearidade pode ser representada analiticamente pela multiplicação por escalar

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$$

Desenvolvendo esta expressão, tem-se



1) Equação vetorial da reta

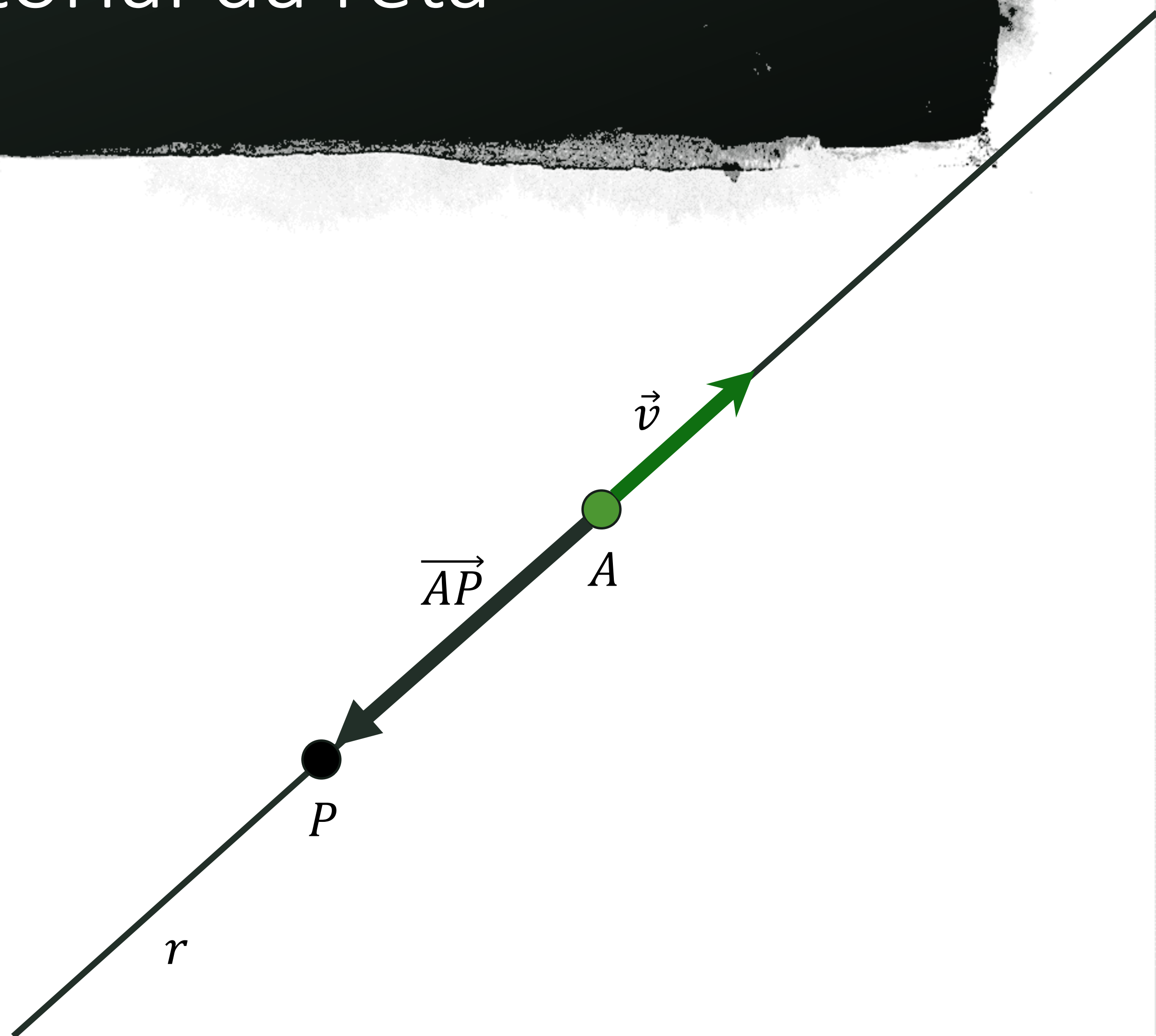
$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$$

$$P - A = t\vec{v}$$

$$P = A + t\vec{v}$$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}) + \boldsymbol{t}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

Esta é denominada a **equação vetorial da reta**!



1) Equação vetorial da reta

Nesta equação:

- O vetor $\vec{v}$ recebe o nome de **vetor diretor** da reta r;
- O valor t é denominado **parâmetro**.

Observando esta equação, pode-se notar que a cada valor de t encontra-se um ponto particular P. O conjunto dos pontos P, ao variar o parâmetro de $-\infty$ a $+\infty$, descreve a reta por completo.

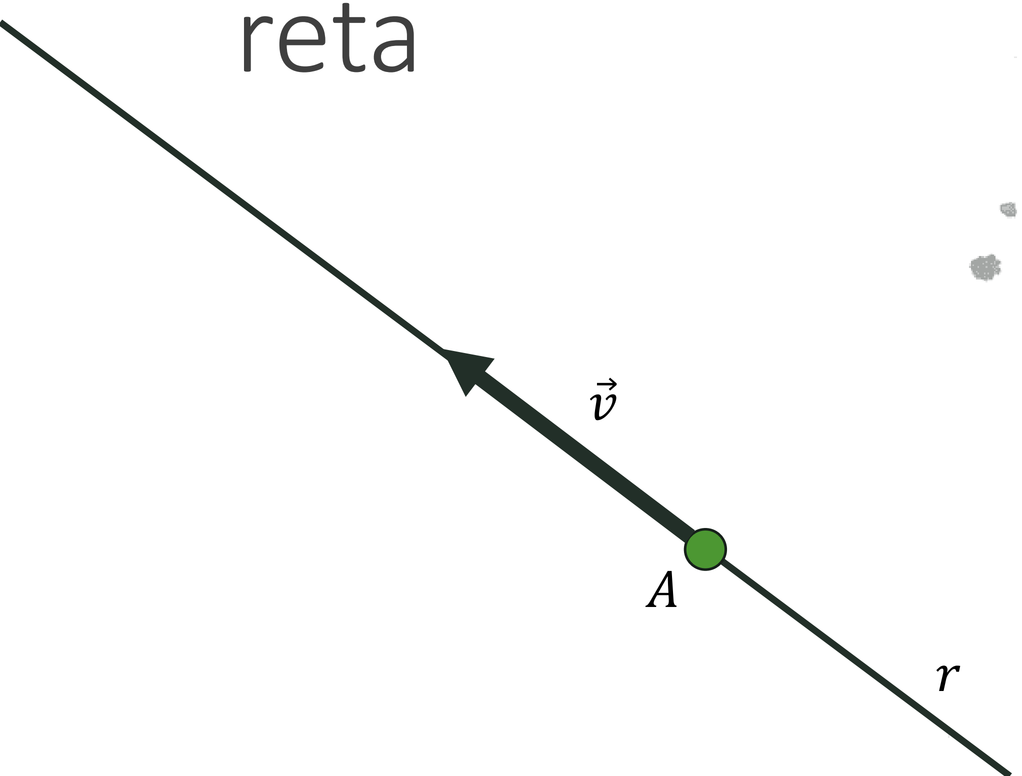
Equação vetorial da reta

$$P = A + t\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

ponto **vetor diretor**

Observação: diferentes representações de uma mesma reta

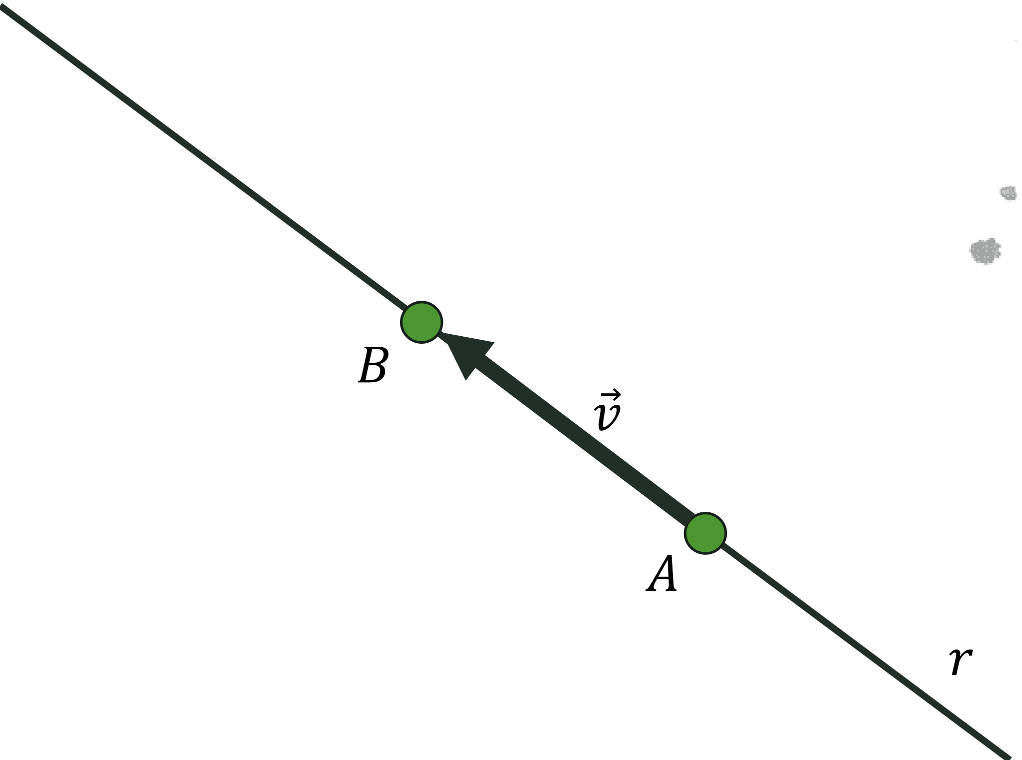


- Note que, dentro de um tipo de equação da reta, há infinitas maneiras de se representar uma mesma reta, já que há infinitas possibilidades de pontos e vetores diretores;
- A seguir, serão apresentados outros tipos de equações para representação da reta r;
- É importante saber como criar qualquer uma das equações da reta a partir de um ponto e um vetor diretor;
- O caminho contrário é igualmente importante! A partir de uma equação da reta, deve-se saber extrair as coordenadas de um ponto da reta e um vetor diretor da mesma.

Observação: reta definida por dois pontos

Até o momento foram exigidos um vetor diretor e um ponto para representação da reta.

Note que dois pontos A e B já seriam suficientes! Basta escolher um dos dois pontos para definir a reta e estabelecer o vetor diretor como $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.



2) Equações paramétricas da reta

Desenvolvendo um pouco mais a equação vetorial da reta,

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (at, bt, ct)$$

$$(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$$

Fazendo uma análise termo a termo, têm-se as **equações paramétricas da reta**,

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

ponto

vetor diretor

3) Equações simétricas da reta

Para a próxima equação da reta, faz-se, de imediato, uma restrição para o vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$. Assume-se que $abc \neq 0$, ou seja, não só que o vetor diretor seja não nulo (restrição que já existia), mas que **nenhuma de suas componentes seja nula**.

Partindo das equações paramétricas da reta

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

e isolando o parâmetro t em cada uma delas, tem-se

3) Equações simétricas da reta

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{a} \\ t = \dfrac{y - y_0}{b} \\ t = \dfrac{z - z_0}{c} \end{cases}$$

Como o parâmetro t é o mesmo para cada uma das equações,

ponto

$$\boldsymbol{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

vetor diretor

Estas são as **equações simétricas (ou normais) da reta**.

Observação: como ver se três pontos estão numa mesma reta

Equações simétricas da reta

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Com as equações simétricas da reta, pode-se determinar uma condição para saber se três pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e $P_3(x_3, y_3, z_3)$ estão em uma linha reta. Neste caso, basta definir as equações simétricas da reta gerada pelos pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, verificando em seguida se o ponto $P_3(x_3, y_3, z_3)$ pertence a ela . Tem-se assim a seguinte expressão

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

Note que ela coincide com a condição de paralelismo!

4) Equações reduzidas da reta

A partir das equações simétricas da reta, isolando duas das variáveis em função da terceira fornece outra forma para a equação da reta.

Escolhe-se aqui, como exemplo, escrever as demais variáveis em função de x. Entretanto, não há nada que impeça escolher y ou z como variáveis independentes. O processo, nestes casos, é análogo.

4) Equações reduzidas da reta

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Começando pela igualdade que envolve x e y,

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

$$a(y - y_0) = b(x - x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$$

$$y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x_0 + y_0$$

4) Equações reduzidas da reta

$$y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x_0 + y_0$$

Fazendo

$$m = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad n = -\frac{b}{a}x_0 + y_0$$

encontra-se

$$\boldsymbol{y = mx + n}$$

4) Equações reduzidas da reta

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Analisando agora a igualdade que envolve x e z,

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$a(z - z_0) = c(x - x_0)$$

$$\mathrm{z} - z_0 = \frac{c}{a}(x - x_0)$$

$$\mathrm{z} = \frac{c}{a}x - \frac{c}{a}x_0 + z_0$$

4) Equações reduzidas da reta

$$z = \frac{c}{a}x - \frac{c}{a}x_0 + z_0$$

Fazendo

$$p = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad q = -\frac{c}{a}x_0 + z_0$$

encontra-se

$$\boldsymbol{z = px + q}$$

4) Equações reduzidas da reta

As duas equações obtidas compõem **as equações reduzidas da reta com variável independente em x**

$$\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$$

Observação: vetor diretor e ponto da reta nas equações reduzidas

Equações reduzidas da reta
(Variável independente em x)

$$\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$$

Visualizar o vetor diretor e o ponto da reta neste caso não é tão intuitivo. Para isso, revertemos as equações reduzidas para as equações paramétricas, propondo a variável independente como o parâmetro (ou seja, no caso apresentado, propõe-se $x = t$). Assim,

$$\begin{cases} x = t \\ y = mt + n \\ z = pt + q \end{cases}$$

de modo que se obtém como vetor diretor $\vec{v} = (1, m, p)$ e, como ponto da reta, $P(0, n, q)$.

Retas paralelas aos planos e eixos coordenados

Retas paralelas aos planos e eixos coordenados

Ao estabelecer as equações simétricas da reta, assumiu-se como vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$, com $abc \neq 0$.

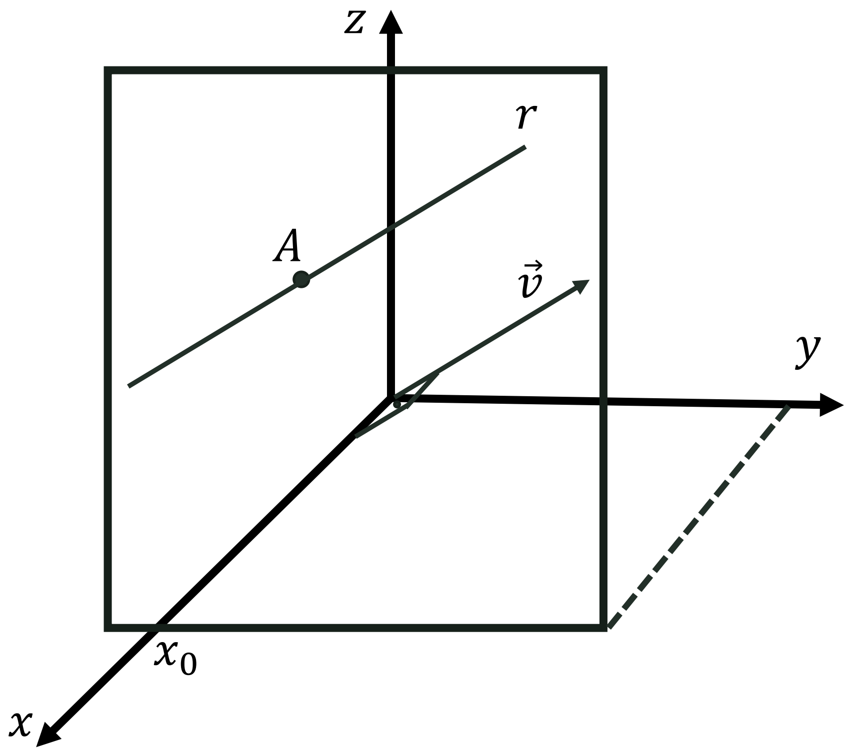
Apresentam-se agora os casos em que uma das componentes (ou duas das componentes) do vetor diretor são nulas.

1) Vetor diretor com uma componente nula

Neste caso, $\vec{v}$ é ortogonal a um dos eixos coordenados e, portanto, a reta é paralela ao plano dos outros eixos. Considerando $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto da reta:

a) $\vec{v} = (0, b, c) \perp 0x \quad \therefore r \;//\; y0z$

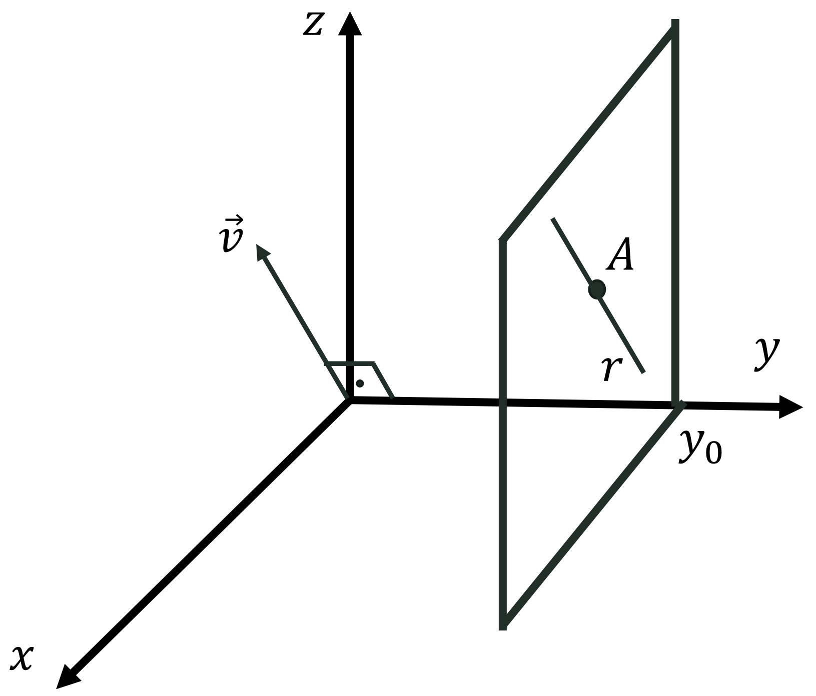
$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} \end{cases}$$



1) Vetor diretor com uma componente nula

b) $\vec{v} = (a, 0, c) \perp 0y \quad \therefore r \mathbin{//} x0z$

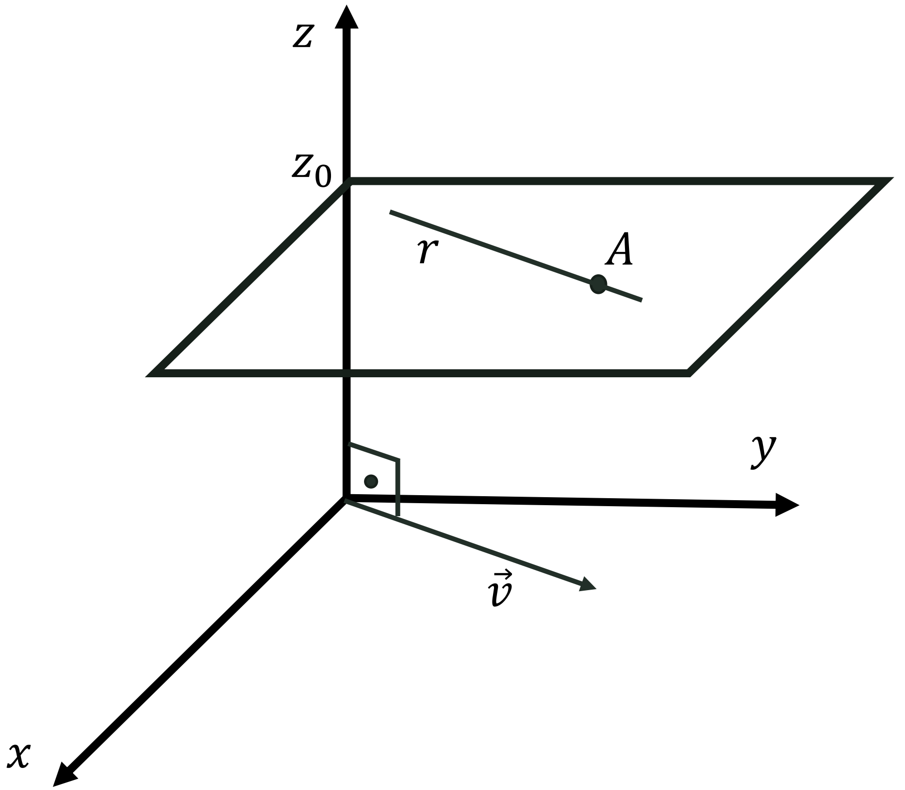
$$\begin{cases} y = y_0 \\ \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{z - z_0}{c} \end{cases}$$



1) Vetor diretor com uma componente nula

c) $\vec{v} = (a, b, 0) \perp 0z \;\; \therefore r \,//\, x0y$

$$\begin{cases} z = z_0 \\ \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} \end{cases}$$

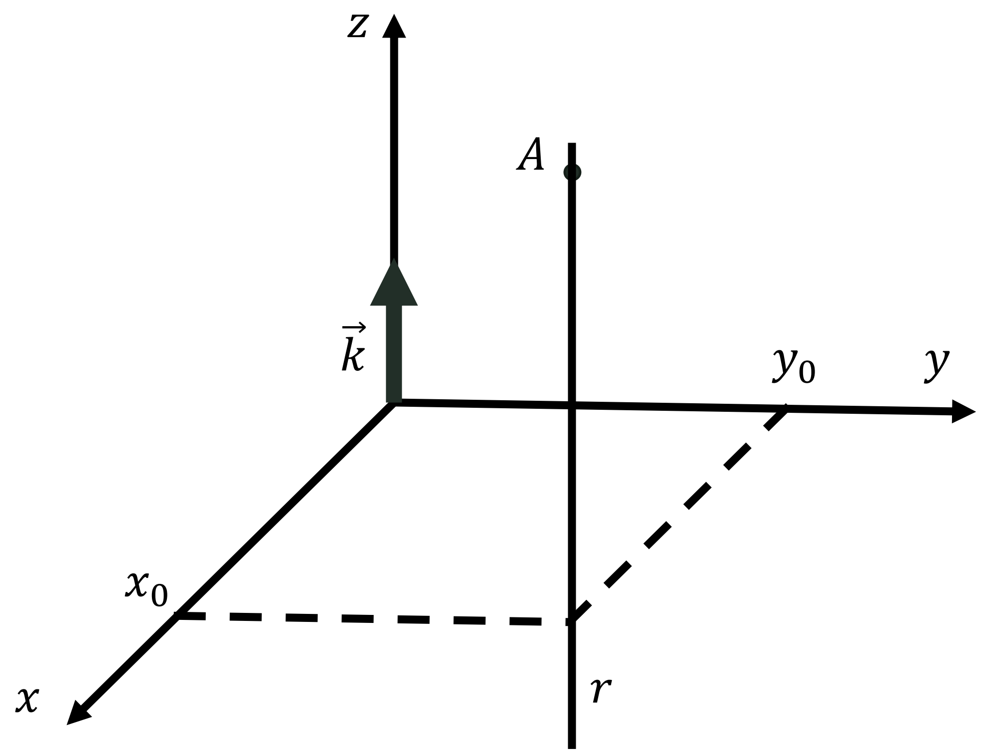


2) Vetor diretor com duas componentes nulas

Neste caso, $\vec{v}$ é colinear a $\vec{i}$, $\vec{j}$ ou $\vec{k}$, ou seja, a reta r é paralela a um dos eixos coordenados. Considerando $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto da reta:

a) $\vec{v} = (0,0,c) \;//\; \vec{k} \therefore r \;//\; 0z$

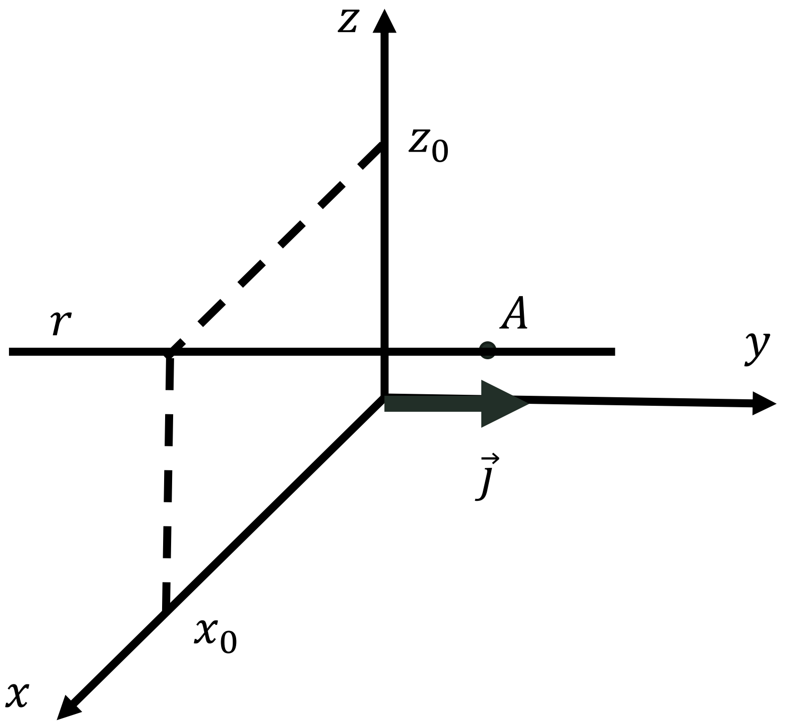
$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$



2) Vetor diretor com duas componentes nulas

b) $\vec{v} = (0, b, 0) \; // \; \vec{j} \therefore r \; // \; 0y$

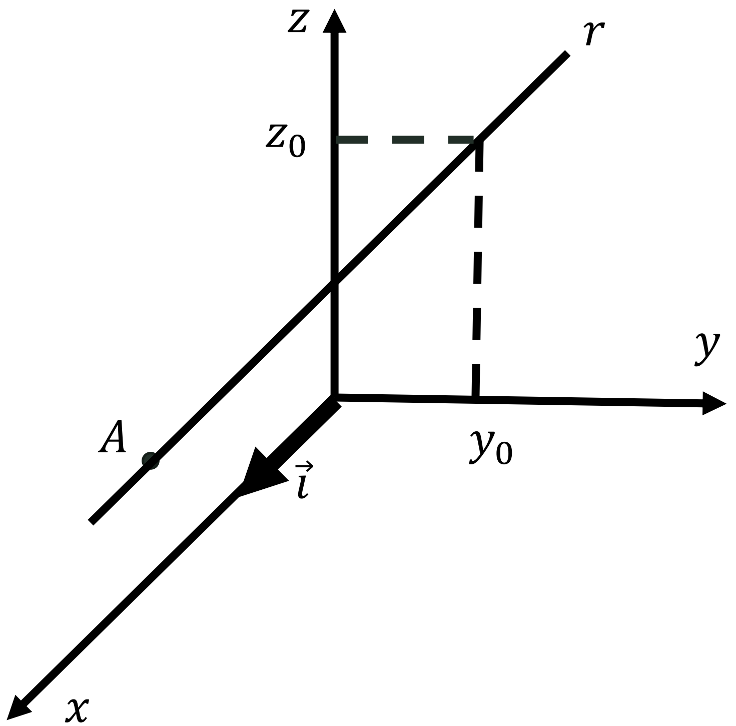
$$\begin{cases} x = x_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$



2) Vetor diretor com duas componentes nulas

c) $\vec{v} = (a, 0,0) \, // \, \vec{i} \therefore r \, // \, 0x$

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$



Observação: equações das retas dos eixos

Particularmente, teremos as seguintes equações da reta para cada eixo:

- eixo x: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

- eixo y: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

- eixo z: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$