Álgebra Linear
(ALI0001 – CCI-192-02U)

Combinação Linear

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula do dia 03 de abril de 2023.

Combinação Linear de Elementos de um espaço vetorial

Definição: Seja V um espaço vetorial. Considere os elementos $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V$.
Um elemento v é dito uma combinação linear de $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ se, e somente se, existirem escalares $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \cdots + a_n v_n. \qquad (*)$$

Observações:

- O conceito de combinação linear depende das operações de adição e de multiplicação por escalar definidas em V.
- Como V é fechado para as operações e os elementos $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V$, o vetor resultante da igualdade $(*)$ é sempre um elemento do espaço vetorial V, ou seja, $v \in V$.
- De maneira intuitiva, com uma combinação linear "geramos" novos elementos de V a partir de um conjunto finito de elementos previamente conhecidos, dado por

$$\{v_1, v_2, v_3, \ \dots, v_n\},$$

  utilizando somente as operações de adição e de multiplicação por escalar.
- Os escalares $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ são chamados de coeficientes da combinação linear dada por $(*)$.

Exemplo 0) Quando $V = \mathbb{R}^3$, temos que $v = (a, b, c)$ é uma combinação linear de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, pois podemos escrever $v = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

Enunciados dos exercícios resolvidos em aula

Exercício 1) Em $V = \mathbb{R}^3$, munido das operações usuais, considere os elementos

$$v_1 = (1, -3, -4) \quad \text{e} \quad v_2 = (-2, 5, 3).$$

a) Verifique se o elemento $v = (6, -7, 31)$ é uma combinação linear de v_1 e v_2.

b) Verifique se o elemento $u = (-9, 8, -60)$ é uma combinação linear de v_1 e v_2.

c) Determine o valor de k para que o elemento $w = (-5, 9, k)$ seja uma combinação linear de v_1 e v_2.

Exercício 2) Em $V = P_2$, com as operações usuais, verifique se $p(x) = -8 + 7x - 4x^2$ é ou não uma combinação linear de

$$p_1(x) = -1 + 2x + 5x^2, \quad p_2(x) = 3 - 5x - 9x^2 \quad \text{e} \quad p_3(x) = 4 - 3x + 11x^2.$$

Em caso positivo, escreva p como combinação linear de p_1, p_2 e p_3.

Exercício 3) Em $V = M(2,2)$, com as operações usuais, verifique se $C = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & -13 \end{bmatrix}$ é ou não uma combinação linear de

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Enunciados dos exercícios resolvidos em aula

Exercício 4) Seja $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ e } y > 0\}$, munido das operações não usuais

$$(x, y) + (a, b) = (xa, yb)$$

$$k(x, y) = \left(x^k, y^k\right).$$

Verifique se o elemento $v = \left(8, \frac{64}{9}\right)$ é uma combinação linear de $v_1 = (2,4)$ e $v_2 = (1, 3)$.

Todos os exercícios (do 1 ao 4) foram resolvidos durante a aula.

Nas próximas páginas segue a resolução de outros exemplos, similares aos exercícios estudados em aula:

Exemplos Resolvidos

Exemplo 1) Em $V = \mathbb{R}^2$, dados os elementos

$$v_1 = (-1, 4) \qquad \text{e} \qquad v_2 = (3, -2)$$

temos que o elemento

$$v = -8v_1 + 11v_2 = -8(-1, 4) + 11(3, -2) = (41, -54)$$

é uma combinação linear de v_1 e v_2, pois existem os escalares $a_1 = -8$ e $a_2 = 11$ que satisfazem a definição anterior.

Da mesma forma, o elemento

$$u = (-68, -90)$$

também é uma combinação linear de v_1 e v_2, pois conseguimos escrever

$$u = (-68, -90) = 29(-1,4) - 13(3, -2) = 29v_1 - 13v_2.$$

Observação: O Exemplo 1 também é bastante simples, mas nos ajuda a entender melhor o que é uma combinação linear.

O caso do elemento u é mais interessante do que o do elemento v, pois exige que sejamos capazes de determinar os coeficientes $a_1 = 29$ e $a_2 = -13$ da combinação linear $u = a_1v_1 + a_2v_2$, conhecendo apenas os vetores v_1, v_2.

Veremos mais exemplos de como obter tais coeficientes de uma combinação linear.

Exemplos

Exemplo 2: Em $V = \mathbb{R}^3$, considere os vetores $v_1 = (-2, 3, -1)$ e $v_2 = (-4, 1, -3)$.

a) Verifique se o vetor $v = (-5, 10, -2)$ é uma combinação linear de v_1 e v_2.

b) Verifique se o vetor $u = (7, -1, 6)$ é uma combinação linear de v_1 e v_2.

c) Determine o valor de k para que o vetor $w = (9, k, -14)$ seja uma combinação linear de v_1 e v_2.

Solução: a) Para que v seja uma combinação linear de v_1 e v_2 precisamos verificar se a definição anterior é satisfeita ou não.

Como temos apenas dois vetores, vamos verificar se existem $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2.$$

Substituindo as coordenadas dos vetores, obtemos que

$$(-5, 10, -2) = a_1(-2, 3, -1) + a_2\,(-4, 1, -3) = (-2a_1 - 4a_2, 3a_1 + a_2, -a_1 - 3a_2).$$

A igualdade acima é verdadeira se e somente se o sistema linear

$$\begin{cases} -2a_1 - 4a_2 = -5 \\ 3a_1 + a_2 = 10 \\ -a_1 - 3a_2 = -2 \end{cases}$$

Exemplos

admitir solução, ou seja, se esse sistema for possível (SP)!

Resolvendo o sistema por escalonamento da matriz ampliada:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} -2 & -4 & | -5 \\ 3 & 1 & | \ 10 \\ -1 & -3 & | -2 \end{bmatrix} L_1 \leftrightarrow -L_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & | \ 2 \\ 3 & 1 & | \ 10 \\ -2 & -4 & | -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 + 2L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & | \ 2 \\ 0 & -8 & | \ 4 \\ 0 & 2 & | -1 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow \frac{-1}{8} L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & | \ 2 \\ 0 & 1 & | \ \frac{-1}{2} \\ 0 & 2 & | -1 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - 2L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & | \ 2 \\ 0 & 1 & | \ \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & | \ 0 \end{bmatrix}.$$

Com isso, vemos que $posto([A|B]) = 2 = posto(A)$. Portanto, o sistema é possível (e inclusive, determinado), pois $nulidade(A) = 2 - P(A) = 2 - 2 = 0$.

Além disso, a solução do sistema é dada por

$$a_1 = \frac{7}{2} \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{-1}{2}.$$

Portanto, v é uma combinação linear de v_1 e v_2, pois conseguimos escrever

$$v = \frac{7}{2} v_1 - \frac{1}{2} v_2.$$

Exemplos

Solução b) Faremos o mesmo para $u = (7, -1, 6)$. Vamos verificar se existem $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

ou seja, se conseguimos escrever

$$(7, -1, 6) = a_1(-2, 3, -1) + a_2\,(-4, 1, -3) = (-2a_1 - 4a_2, 3a_1 + a_2, -a_1 - 3a_2)$$

para $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. De forma análoga ao item a, chegamos no sistema linear

$$\begin{cases} -2a_1 - 4a_2 = 7 \\ 3a_1 + a_2 = -1 \\ -a_1 - 3a_2 = 6 \end{cases},$$

Resolvendo esse sistema (por escalonamento), obtemos que

$$[A|B] = \begin{bmatrix} -2 & -4 & | & 7 \\ 3 & 1 & | & -1 \\ -1 & -3 & | & 6 \end{bmatrix} L_1 \leftrightarrow -L_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -6 \\ 3 & 1 & | & 10 \\ -2 & -4 & | & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 + 2L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -6 \\ 0 & -8 & | & 28 \\ 0 & 2 & | & -5 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow \frac{-1}{8} L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -6 \\ 0 & 1 & | & \frac{-7}{2} \\ 0 & 2 & | & -5 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - 2L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & \frac{-7}{2} \\ 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplos

Com isso, obtemos que

$$posto([A|B]) = 3 \quad \text{e} \quad posto(A) = 2$$

e o sistema é impossível (SI), pois $posto([A|B]) \neq posto(A)$.

Isso significa que não existem $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ que satisfaçam a igualdade $u = a_1 v_1 + a_2 v_2$.

Portanto, $u = (7, -1, 6)$ não é uma combinação linear de v_1 e v_2.

Solução c) Queremos obter o valor de k para o qual o vetor $w = (9, k, -14)$ seja uma combinação linear de v_1 e v_2, ou seja, para o qual a igualdade

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

seja válida para $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Como essa igualdade significa que

$$(9, k, -14) = a_1(-2, 3, -1) + a_2\,(-4, 1, -3) = (-2a_1 - 4a_2, 3a_1 + a_2, -a_1 - 3a_2)$$

queremos que o sistema linear

$$\begin{cases} -2a_1 - 4a_2 = 9 \\ 3a_1 + a_2 = k \\ -a_1 - 3a_2 = -14 \end{cases}$$

admita solução, isto é, seja um sistema possível (SP)!

Exemplos

Resolvendo esse sistema (por escalonamento), obtemos que

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 9 \\ 3 & 1 & k \\ -1 & -3 & -14 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow -L_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 14 \\ 3 & 1 & k \\ -2 & -4 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 14 \\ 0 & -8 & k-42 \\ 0 & 2 & 37 \end{array}\right] L_2 \leftrightarrow \frac{-1}{8} L_2 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{-k+42}{8} \\ 0 & 2 & 37 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \to L_3 - 2L_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{-k+42}{8} \\ 0 & 0 & \frac{k+106}{4} \end{array}\right].$$

Assim, obtemos que $posto(A) = 2$ e $posto([A|B]) = \begin{cases} 3, & \text{se } k + 106 \neq 0 \\ 2, & \text{se } k + 106 = 0 \end{cases}$.

Para que o sistema seja possível, é necessário que $posto([A|B]) = posto(A) = 2$.

Isso ocorre se, e somente se, $k + 106 = 0$, ou seja, se e somente se

$$k = -106.$$

Além disso, para $k = -106$ a solução do sistema é $a_1 = \frac{-83}{2}$ e $a_2 = \frac{37}{2}$. Portanto, a combinação linear desejada é dada por

$$w = (9, -106, -14) = \frac{-83}{2} v_1 + \frac{-83}{2} v_2.$$

Exemplos

Exemplo 3) Em $V = P_2$, verifique se $p(x) = 5 - 7x + 9x^2$ é ou não uma combinação linear de

$$p_1(x) = 2 + x - x^2,\ \ p_2(x) = -1 - 2x + x^2 \text{ e } p_3(x) = 3 - 4x + 2x^2.$$

Em caso positivo, escreva p como combinação linear de p_1, p_2 e p_3.

Solução: Vamos verificar se existem $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ para os quais possamos escrever

$$p(x) = a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x)$$

ou seja

$$\begin{aligned} 5 - 7x + 9x^2 &= a_1(2 + x - x^2) + a_2(-1 - 2x + x^2) + a_3(3 - 4x + 2x^2) \\ &= (2a_1 - a_2 + 3a_3) + (a_1 - 2a_2 - 4a_3)x + (-a_1 + a_2 + 2a_3)x^2. \end{aligned}$$

A igualdade acima é válida se, e somente se, os coeficientes do polinômio do lado esquerdo forem respectivamente iguais aos coeficientes do polinômio do lado direito.

Com isso, chegamos no sistema linear:

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 + 3a_3 = 5 \\ a_1 - 2a_2 - 4a_3 = -7 \\ -a_1 + a_2 + 2a_3 = 9 \end{cases}.$$

Exemplos

Dessa forma, vão existir $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ conforme o desejado se e somente se o sistema for possível (SP).

Resolvendo o sistema, por escalonamento da sua matriz ampliada, temos que:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 5 \\ 1 & -2 & -4 & | & -7 \\ -1 & 1 & 2 & | & 9 \end{bmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & | & -7 \\ 2 & -1 & 3 & | & 5 \\ -1 & 1 & 2 & | & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & | & -7 \\ 0 & 3 & 11 & | & 19 \\ 0 & -1 & -2 & | & 2 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow -L_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & | & -7 \\ 0 & 1 & 2 & | & -2 \\ 0 & 3 & 11 & | & 19 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 + 2L_2 \\ \\ L_3 \to L_3 - 3L_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -11 \\ 0 & 1 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 5 & | & 25 \end{bmatrix} L_3 \leftrightarrow -1/5L_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -11 \\ 0 & 1 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{bmatrix}.$$

Portanto, vemos que o sistema é possível, pois $posto(A) = 3 = posto([A|B])$ e ainda, é determinado (SPD), pois $nulidade(A) = 3 - 3 = 0$.

Com isso, a combinação linear desejada é possível.

Exemplos

Além disso, interpretando a matriz escalonada, obtemos que

$$a_1 = -11 \qquad a_2 = -12 \qquad \text{e} \qquad a_3 = 5.$$

Portanto, chegamos na combinação linear

$$p(x) = -11p_1(x) - 12p_2(x) + 5p_3(x).$$

Observação: Substitua as expressões dos polinômios na igualdade acima e comprove (por meio de uma prova real) que a combinação linear realmente é verdadeira.

Inclusive, é prudente sempre efetuar a prova real de uma combinação linear para verificar se todos os cálculos estão corretos!

Exemplo 4) Em $V = M(2,2)$, verifique se $C = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ é ou não uma combinação linear de

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução: Vamos verificar se existem $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ para os quais possamos escrever

$$C = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3.$$

Exemplos

Substituindo as matrizes, obtemos

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 - a_2 + 2a_3 & a_1 + a_2 - a_3 \\ 2a_1 + a_2 & a_1 + a_2 \end{bmatrix}.$$

A igualdade acima é válida se, e somente se, os elementos da primeira matriz forem respectivamente iguais aos elementos da última matriz.

Com isso, chegamos no sistema linear:

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 = 8 \\ a_1 + a_2 - a_3 = 6 \\ 2a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = -4 \end{cases}.$$

Portanto, vão existir $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ conforme o desejado se e somente se esse sistema for possível (SP).

Exemplos

Resolvendo o sistema, por escalonamento (faça como exercício) encontramos que

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 8 \\ 1 & 1 & -1 & | & 6 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 2 & -3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 & | & -13 \\ 0 & 0 & 0 & | & 16 \end{bmatrix},$$

que indica que o sistema é impossível, pois $posto(A) = 3$ e $posto([A|B]) = 4$, ou seja,

$$posto([A|B]) \neq posto(A).$$

Portanto, não existem $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ conforme desejado e, com isso, concluímos que a matriz C não é uma combinação linear de A_1, A_2 e A_3.

Exemplo 5) Em $V = M(2,2)$, verifique se $C = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -9 & -22 \end{bmatrix}$ é ou não uma combinação linear de

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 11 & -3 \\ -10 & -17 \end{bmatrix}.$$

Caso positivo, exiba a combinação linear e indique se alguma matriz A_i poderia ser descartada sem prejuízo à combinação linear.

Solução: Vamos verificar se existem $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ para os quais possamos escrever

$$C = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + a_4A_4.$$

Exemplos

Substituindo as matrizes, obtemos que

$$\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -9 & -22 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 11 & -3 \\ -10 & -17 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4a_1 + a_2 + 11a_4 & -a_2 + 2a_3 - 3a_4 \\ -2a_1 + 2a_2 + a_3 - 10a_4 & -2a_1 + 3a_2 + 4a_3 - 17a_4 \end{bmatrix}.$$

Com isso, chegamos no sistema linear:

$$\begin{cases} 4a_1 + a_2 + 11a_4 = 5 \\ -a_2 + 2a_3 - 3a_4 = -7 \\ -2a_1 + 2a_2 + a_3 - 10a_4 = -9 \\ -2a_1 + 3a_2 + 4a_3 - 17a_4 = -22 \end{cases}.$$

Portanto, vão existir $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ conforme o desejado se, e somente se, o sistema linear acima for possível (SP). Escalonando a matriz ampliada do sistema, obtemos que

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 0 & 11 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -7 \\ -2 & 2 & 1 & -10 & -9 \\ -2 & 3 & 4 & -17 & -22 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \to 1/4L_1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/4 & 0 & 11/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -7 \\ -2 & 2 & 1 & -10 & -9 \\ -2 & 3 & 4 & -17 & -22 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \to L_3 + 2L_1 \\ L_4 \to L_4 + 2L_1 \end{array}$$

Exemplos

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/4 & 0 & 11/4 & 5/4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -7 \\ 0 & 5/2 & 1 & -9/2 & -13/2 \\ 0 & 7/2 & 4 & -23/2 & -39/2 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to -L_2 \\ L_3 \to L_3 + 5/2L_2 \\ L_4 \to L_4 + 7/2L_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/4 & 0 & 11/4 & 5/4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & -24 \\ 0 & 0 & 11 & -22 & -44 \end{array}\right] L_3 \to 1/6L_3$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/4 & 0 & 11/4 & 5/4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & -22 & -44 \end{array}\right] L_4 \to L_4 - 11L_3 \quad \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/4 & 0 & 11/4 & 5/4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Portanto, vemos que o sistema é possível, pois $posto([A|B]) = 3 = posto(A)$ e ainda, é indeterminado (SPI), pois $nulidade(A) = 4 - 3 = 1 \neq 0$.

Além disso, interpretando a matriz escalonada e resolvendo o sistema associado, obtemos

$$a_1 = \frac{3}{2} - 3a_4, \qquad a_2 = -1 + a_4 \qquad \text{e} \qquad a_3 = -4 + 2a_4$$

com $a_4 \in \mathbb{R}$ uma variável livre. Portanto, C é uma combinação linear de A_1, A_2, A_3, A_4 e

$$C = \left(\frac{3}{2} - 3a_4\right)A_1 + (-1 + a_4)A_2 + (-4 + 2a_4)A_3 + a_4A_4.$$

Tomando $a_4 = 0$, temos $C = 3/2A_1 - A_2 - 4A_3$, que significa que A_4 (elemento associado à variável livre) poderia ser descartada, sem causar prejuízo à combinação linear.