Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral

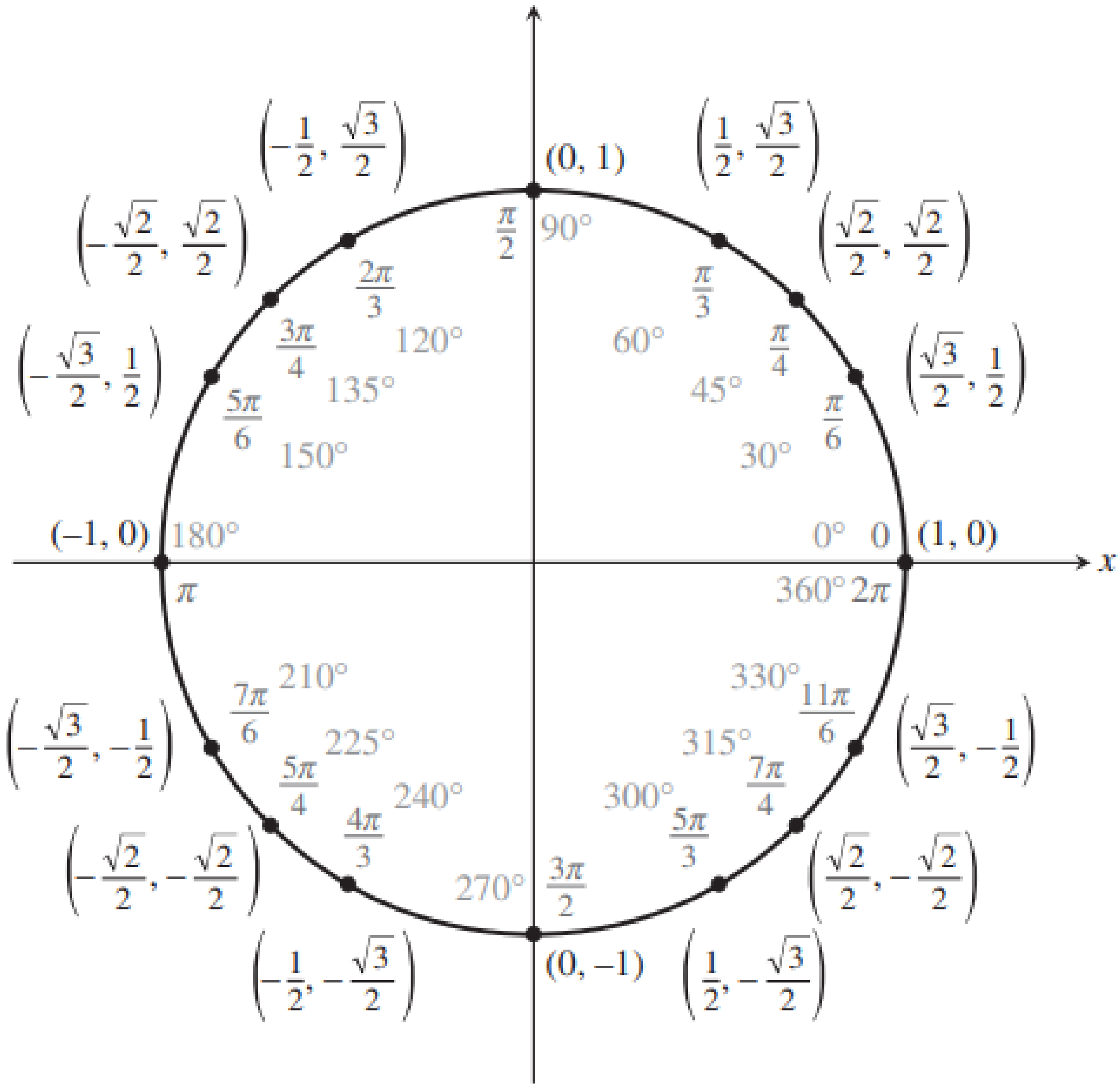
Funções Trigonométricas

Prof. Dani Prestini

UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Funções Trigonométricas

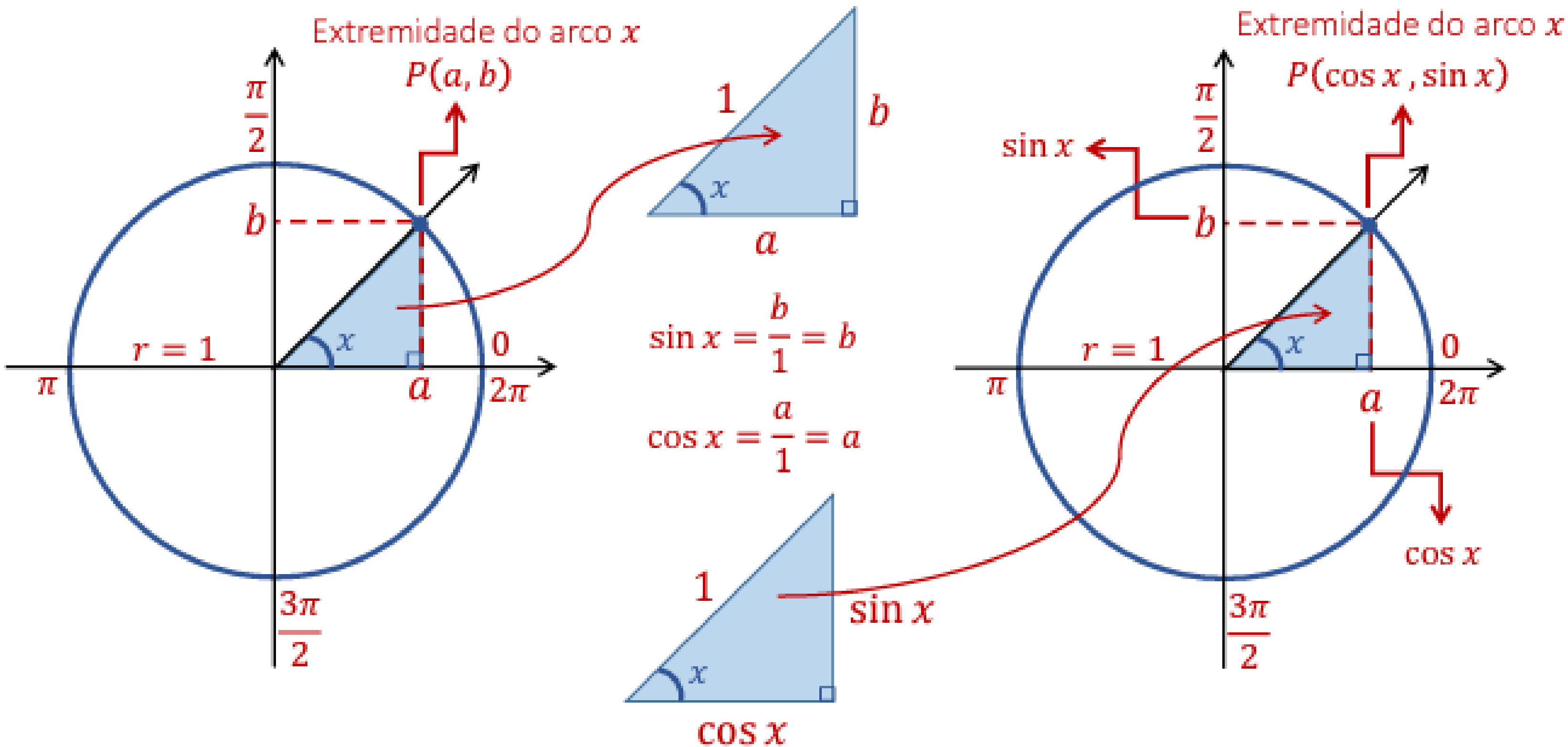
Ciclo Trigonométrico



Funções Trigonométricas

Seno e Cosseno no Ciclo Trigonométrico

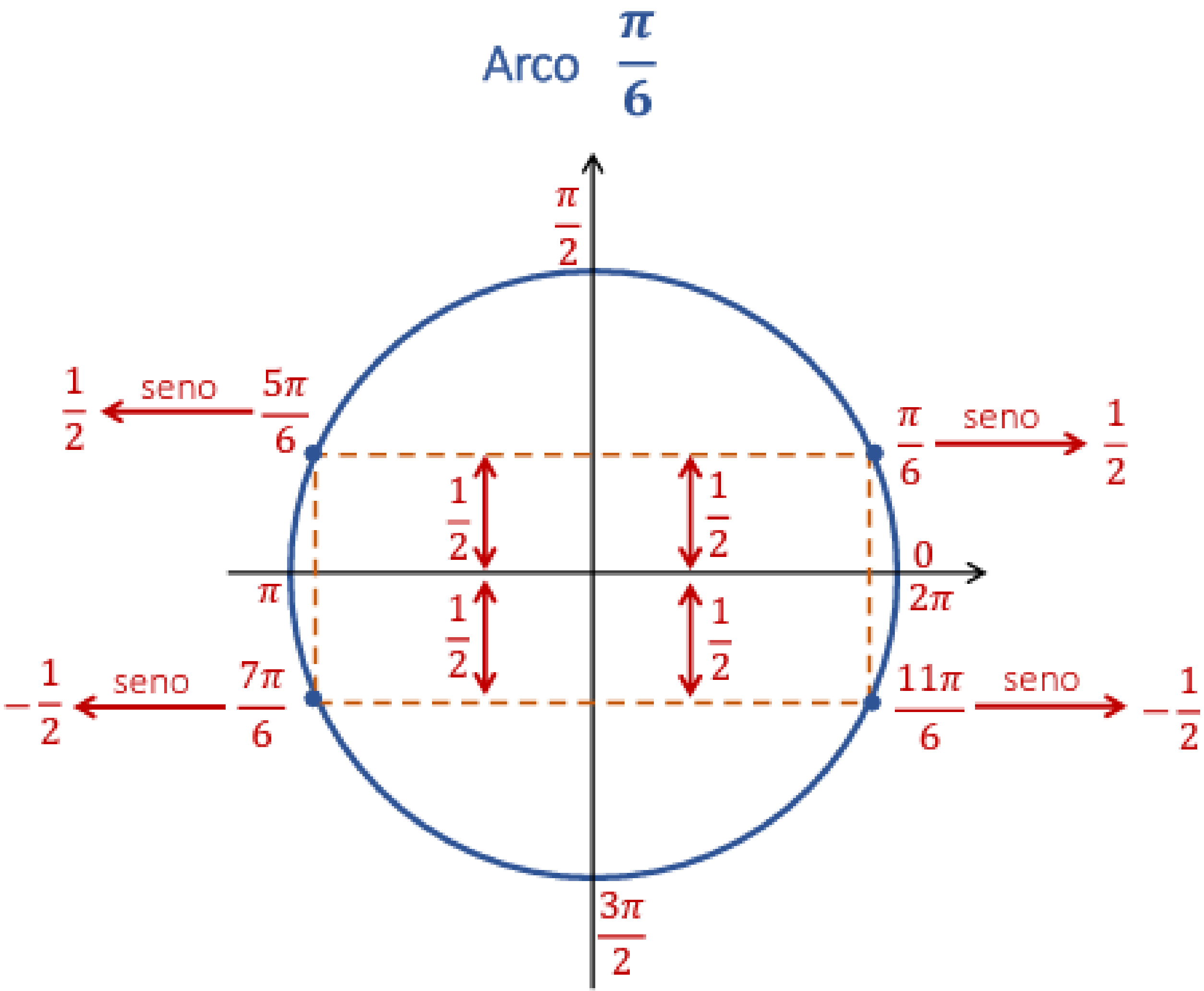
Lembre que, para cada arco x, o ciclo trigonométrico associa um ponto $P(a, b)$ do plano cartesiano, chamado de extremidade do arco x.



A abscissa de P é igual ao cosseno do arco x e a ordenada de P é igual ao seno do arco x.

Funções Trigonométricas

Seno dos Arcos Notáveis

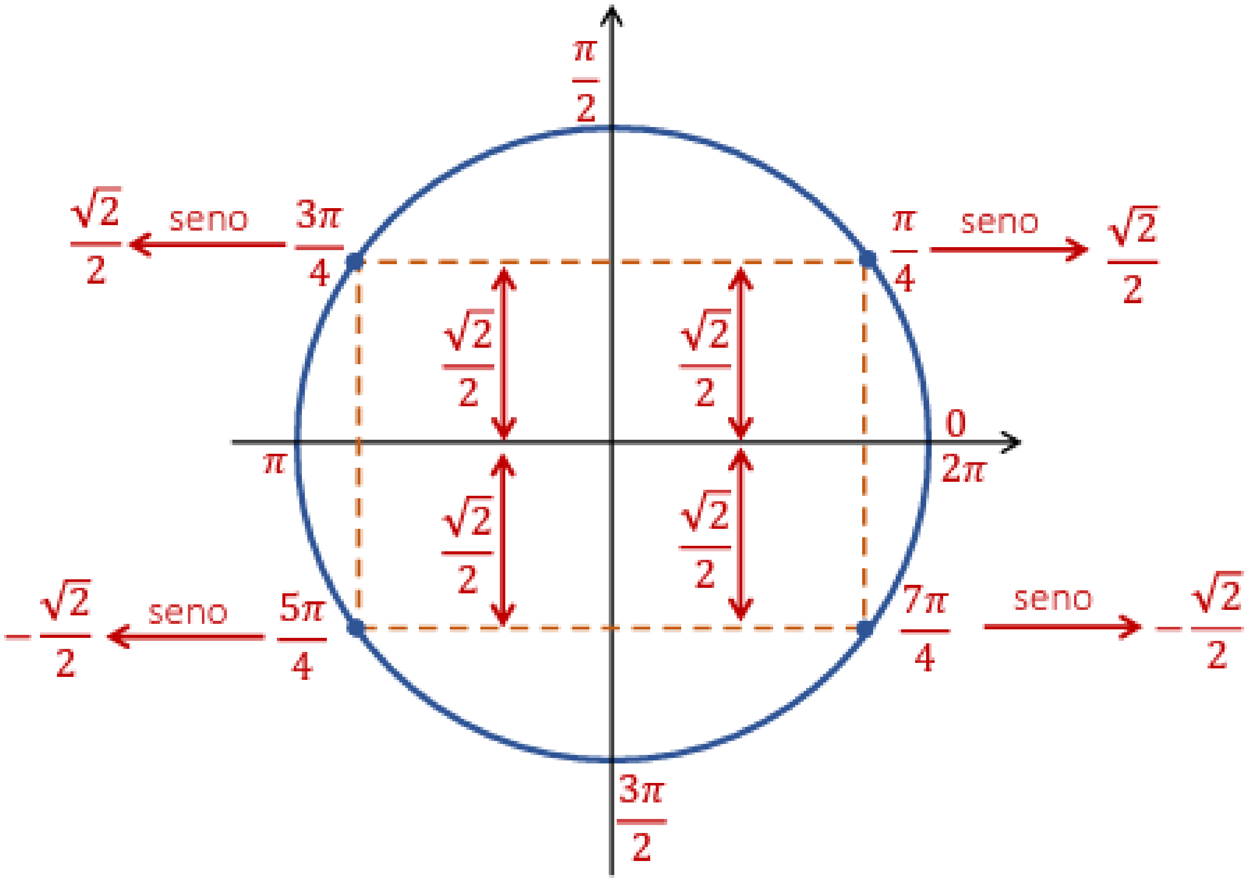


Arco		Valor do seno
$\frac{\pi}{6}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{2}$
$\frac{7\pi}{6}$	$\rightarrow$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\rightarrow$	$-\frac{1}{2}$

Funções Trigonométricas

Seno dos Arcos Notáveis

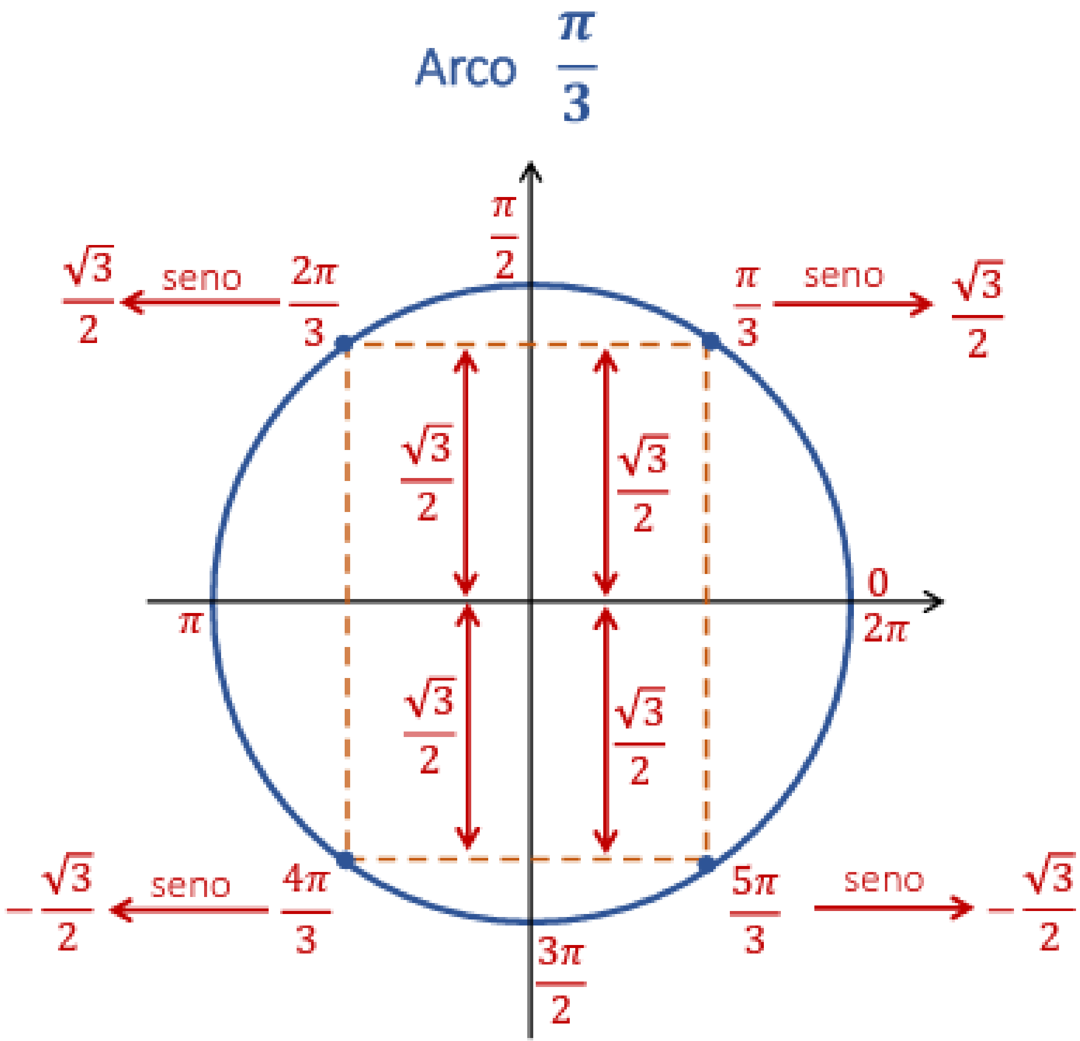
Arco $\frac{\pi}{4}$



Arco		Valor do seno
$\frac{\pi}{4}$	$\longrightarrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\longrightarrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$\longrightarrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\longrightarrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Funções Trigonométricas

Seno dos Arcos Notáveis



Arco	Valor do seno
$\frac{\pi}{3}$ $\longrightarrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$ $\longrightarrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$ $\longrightarrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{3}$ $\longrightarrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

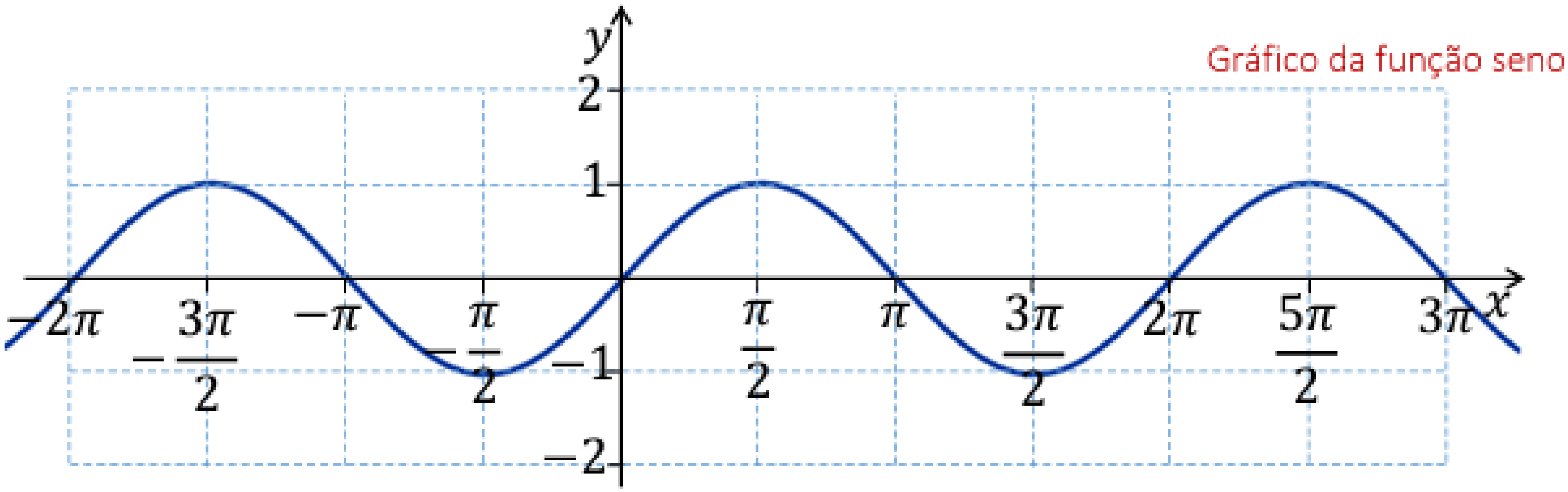
Funções Trigonométricas

Função Seno

Definição. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sin x$$

é chamada de função seno.



Domínio	Imagem	Período
$D(f) = \mathbb{R}$	$Im(f) = [-1,1]$	$P(f) = 2\pi$

Funções Trigonométricas

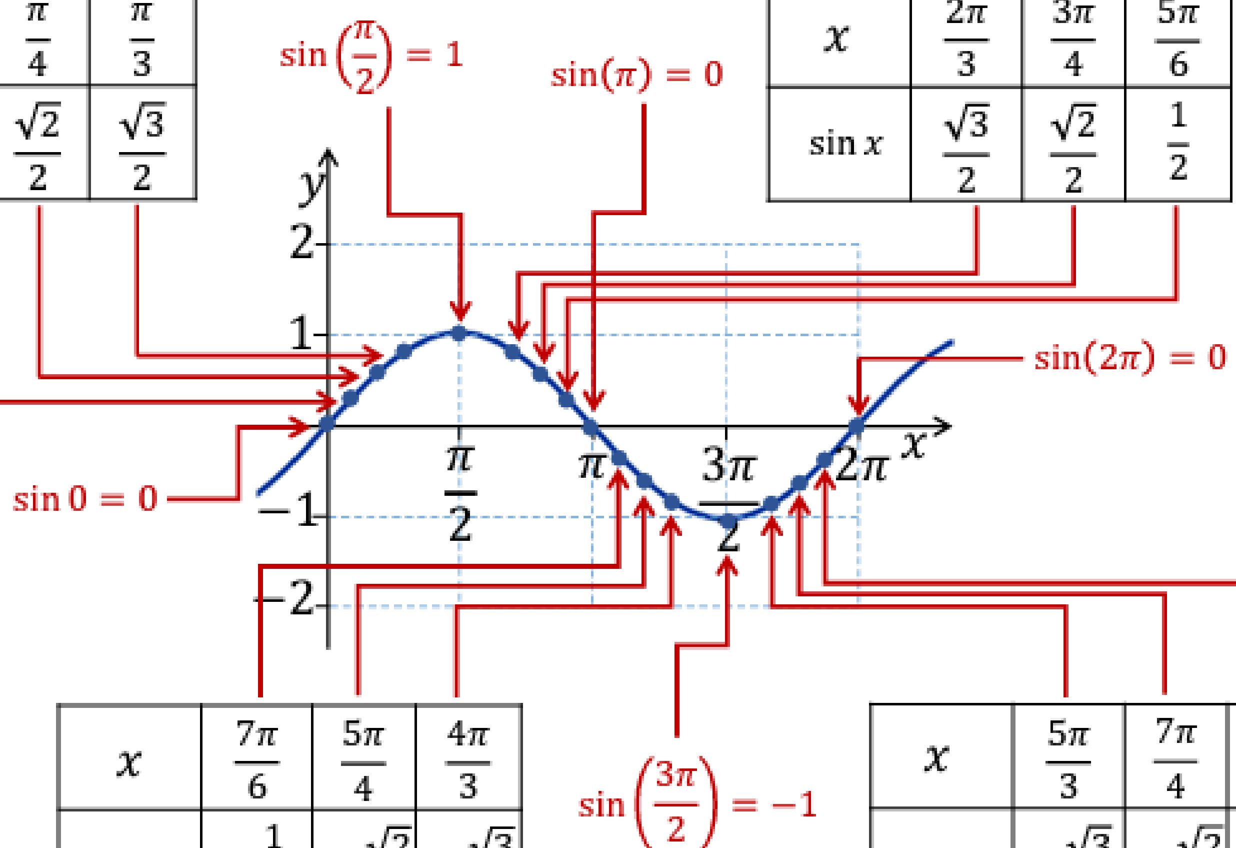
Função Seno

Primeiro quadrante

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Segundo quadrante

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$



x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$
$\sin x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Terceiro quadrante

x	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Quarto quadrante

Funções Trigonométricas

Função Seno

- ✓ Inverte horizontalmente o gráfico se $m < 0$.
- ✓ Alonga ou comprime horizontalmente o gráfico.

- ✓ Desloca horizontalmente o gráfico.

$$f(x) = a\sin(mx + n) + b$$

- ✓ Alonga ou comprime verticalmente o gráfico.
- ✓ Inverte verticalmente o gráfico se $a < 0$.

- ✓ Desloca verticalmente o gráfico.

Funções Trigonométricas

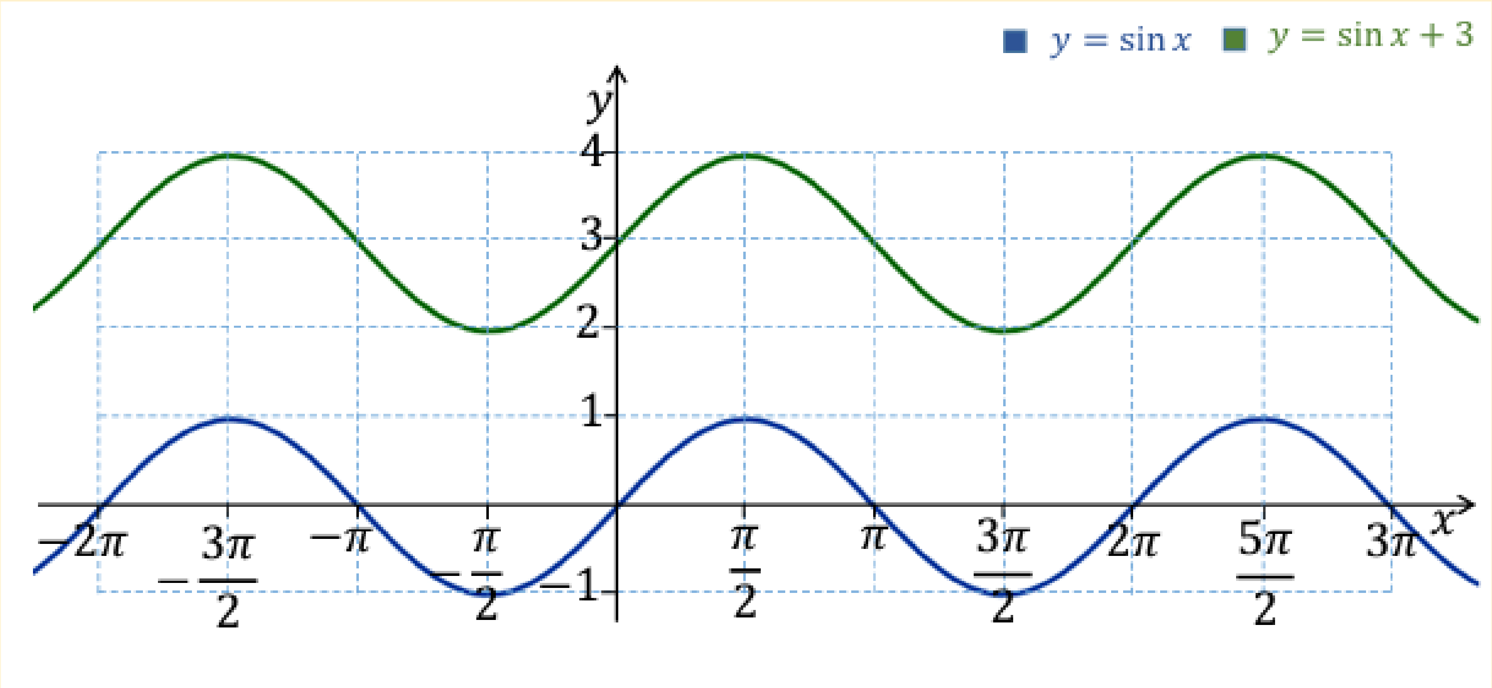
Deslocamento Vertical para Cima

Exemplo. Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período da função

$$f(x) = \sin x + 3$$

Solução:

Deslocamento vertical do gráfico da função seno em três unidades para cima.



$D(f) = \mathbb{R}$ $\quad Im(f) = [2,4]$ $\quad P(f) = 2\pi$

Funções Trigonométricas

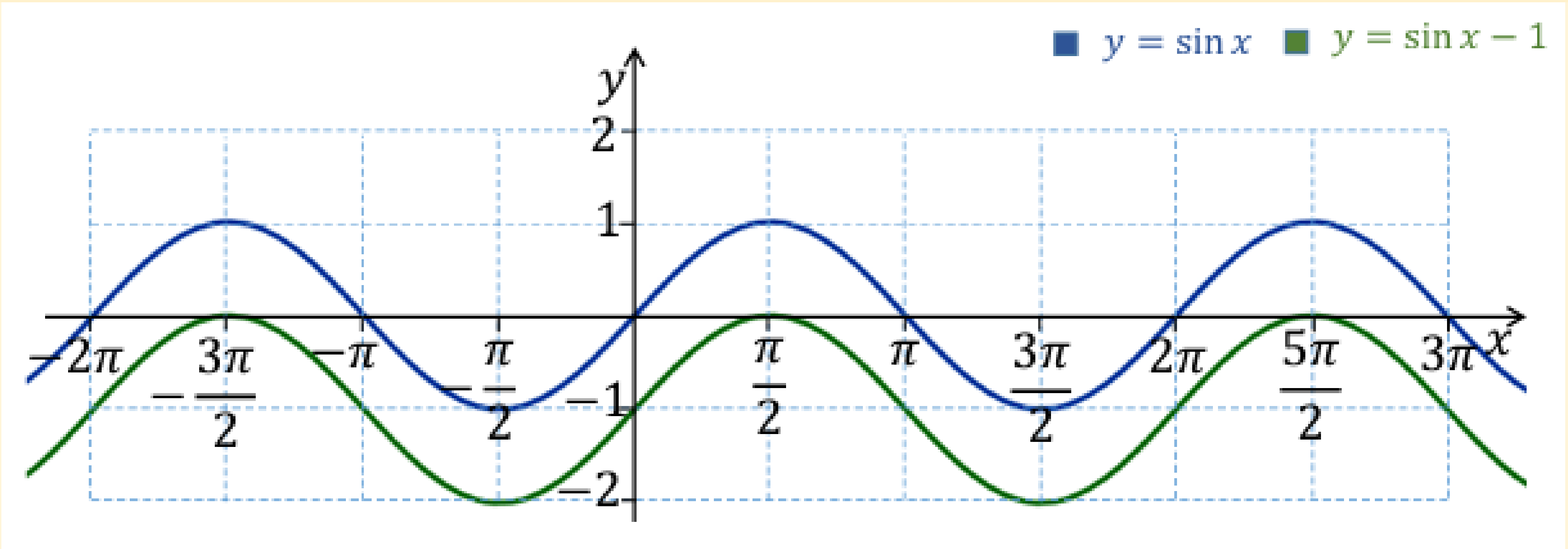
Deslocamento Vertical para Baixo

Exemplo. Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período da função

$$f(x) = \sin x - 1$$

Solução:

Deslocamento vertical do gráfico da função seno em uma unidade para baixo.



$D(f) = \mathbb{R}$ $\quad$ $Im(f) = [-2,0]$ $\quad$ $P(f) = 2\pi$

Funções Trigonométricas

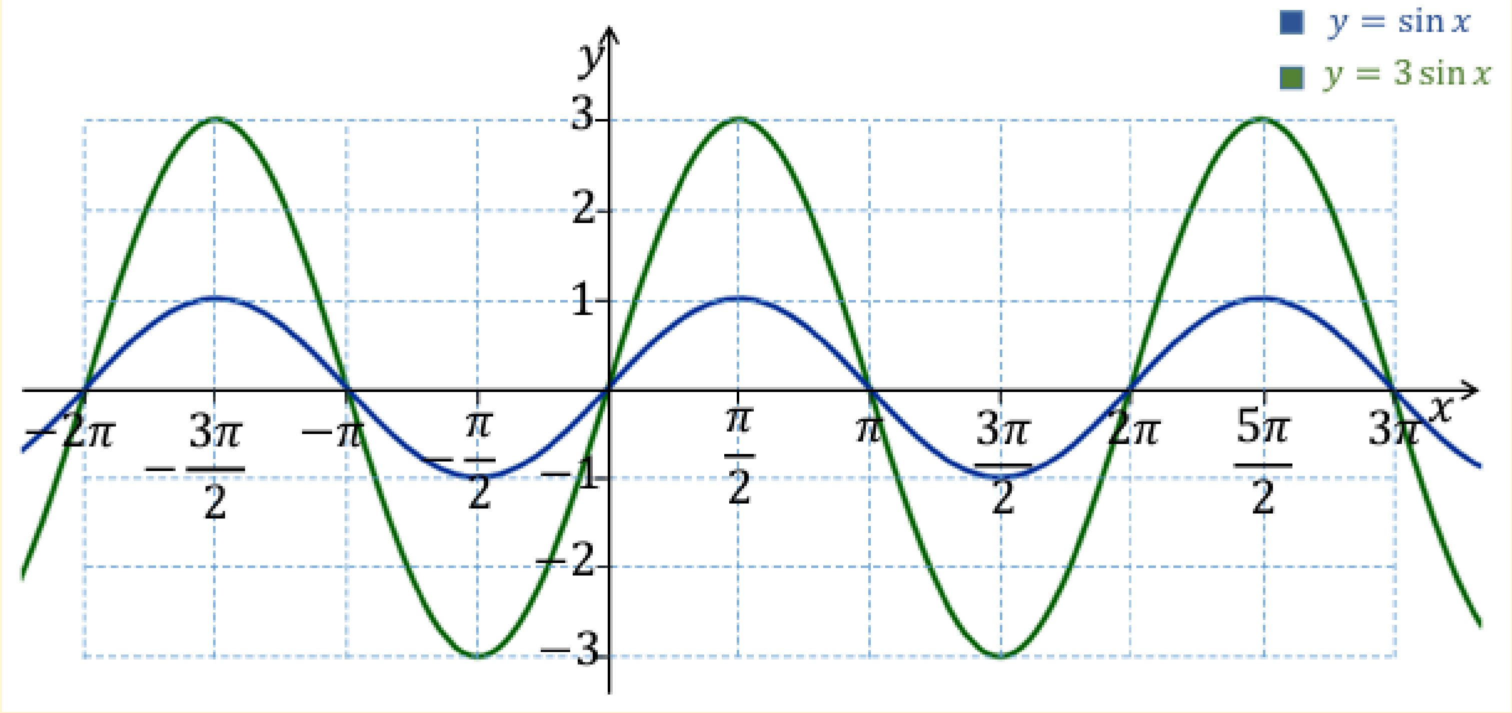
Alongamento Vertical

Exemplo. Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período da função

$$f(x) = 3\sin x$$

Solução:

Alongamento vertical do gráfico da função seno pelo fator 3.



$D(f) = \mathbb{R}$ $\quad Im(f) = [-3,3]$ $\quad P(f) = 2\pi$

Funções Trigonométricas

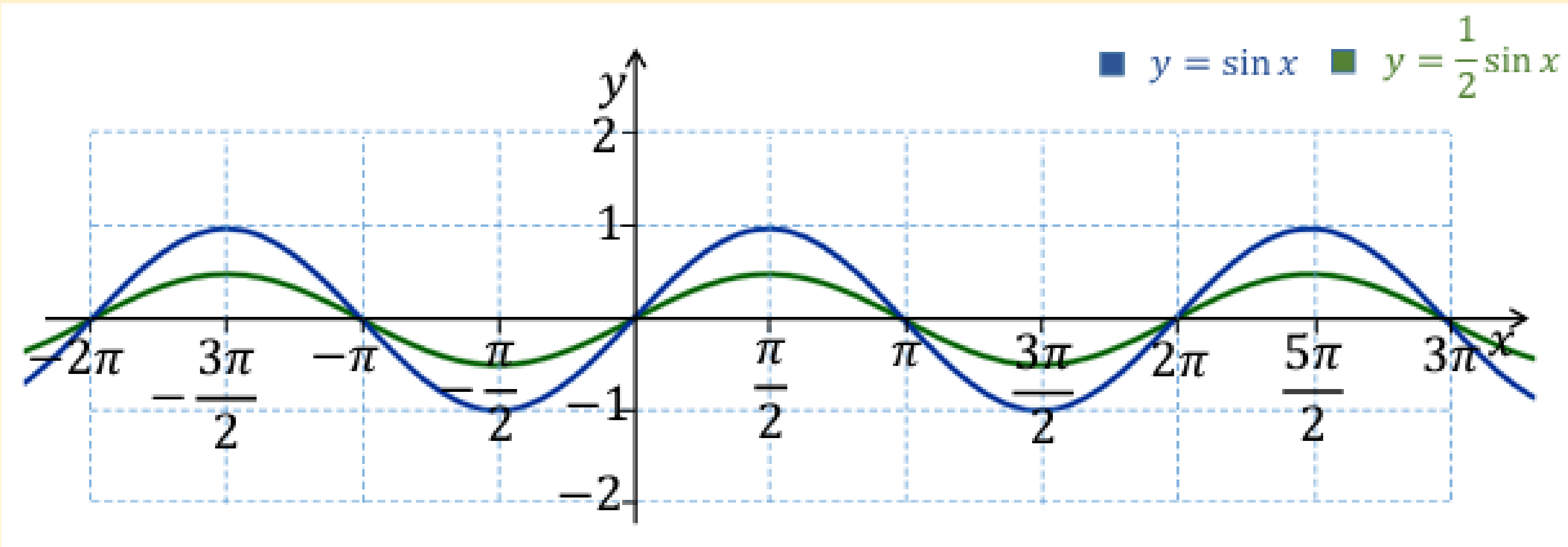
Compressão Vertical

Exemplo. Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período da função

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin x$$

Solução:

Compressão verticalmente o gráfico da função seno pelo fator $\frac{1}{2}$.



$D(f) = \mathbb{R}$ $\quad Im(f) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ $\quad P(f) = 2\pi$

Funções Trigonométricas

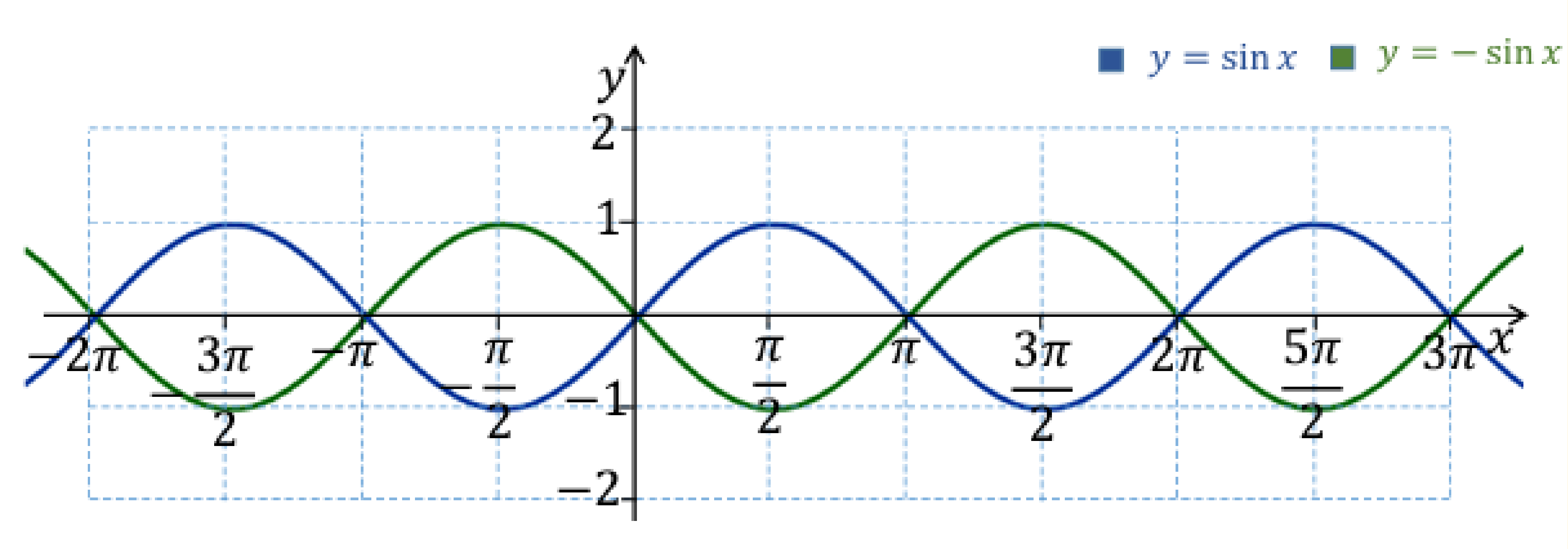
Reflexão em Relação ao Eixo Horizontal

Exemplo. Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período da função

$$f(x) = -\sin x$$

Solução:

Reflete o gráfico da função seno em relação ao eixo horizontal.



$D(f) = \mathbb{R}$ $\quad Im(f) = [-1,1]$ $\quad P(f) = 2\pi$

Funções Trigonométricas

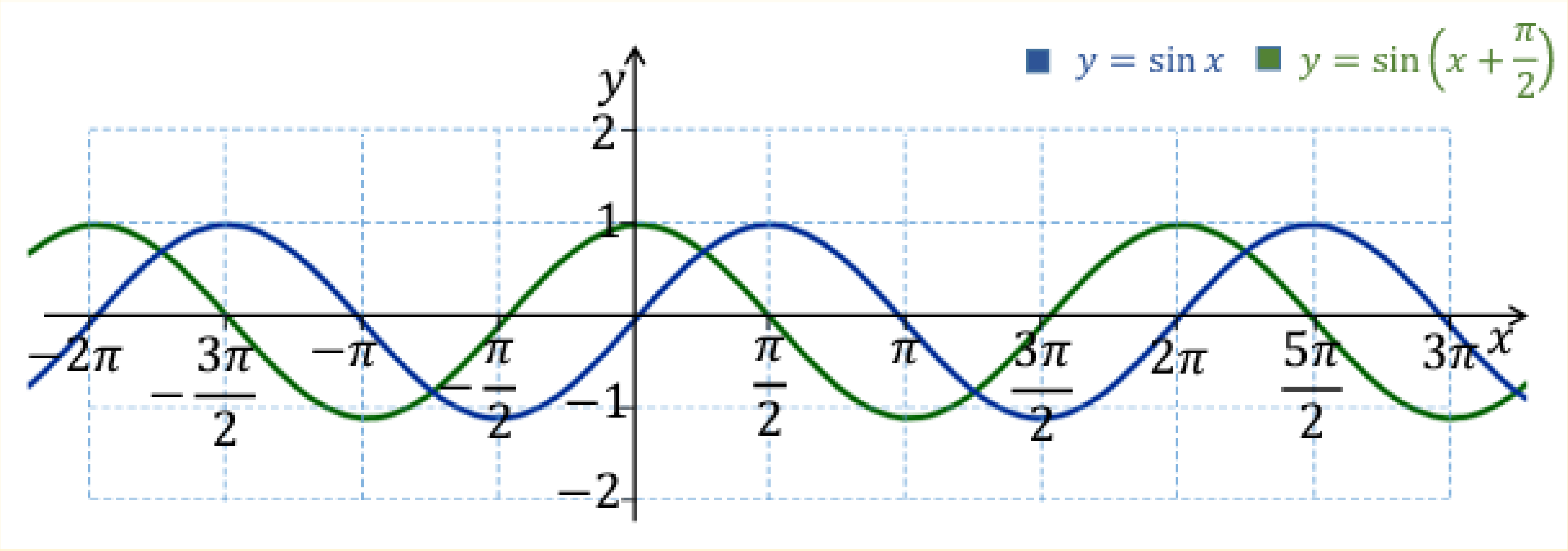
Deslocamento Horizontal para a Esquerda

Exemplo. Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período da função

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Solução:

Deslocamento horizontal do gráfico da função seno em $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda.



$D(f) = \mathbb{R}$ $\quad Im(f) = [-1,1]$ $\quad P(f) = 2\pi$

Funções Trigonométricas

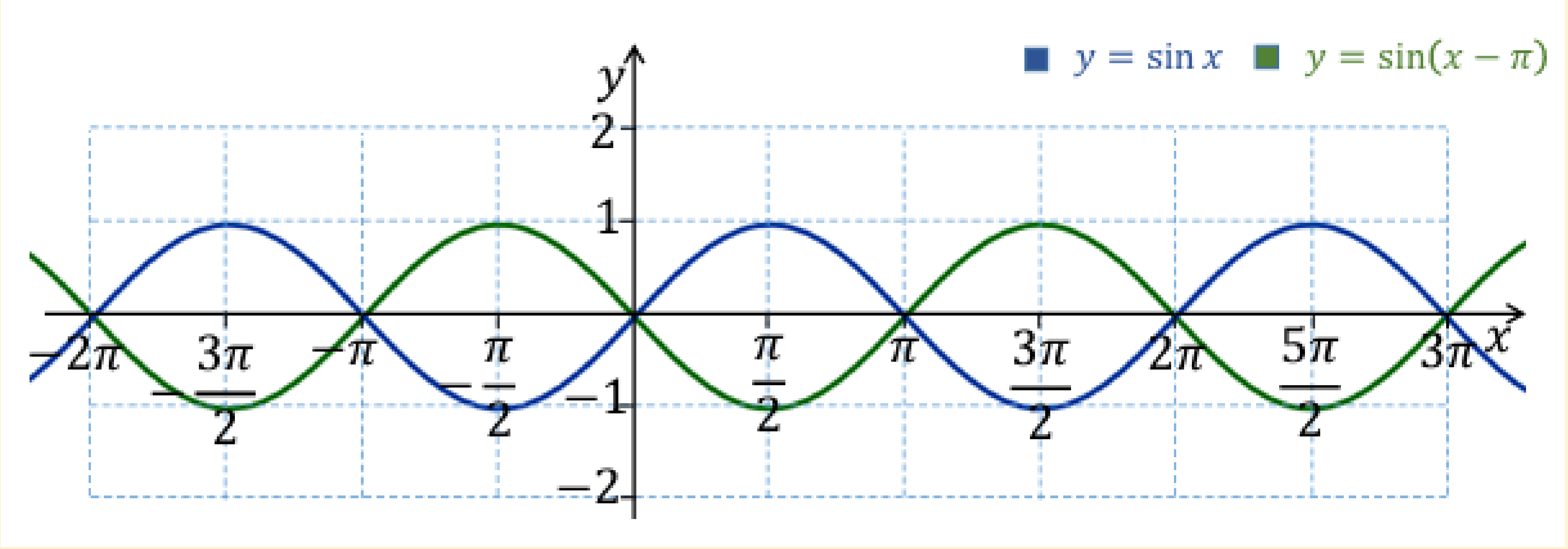
Deslocamento Horizontal para a Direita

Exemplo. Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período da função

$$f(x) = \sin(x - \pi)$$

Solução:

Deslocamento horizontal do gráfico da função seno em π unidades para a direita.



$D(f) = \mathbb{R}$ $\quad Im(f) = [-1,1]$ $\quad P(f) = 2\pi$

Funções Trigonométricas

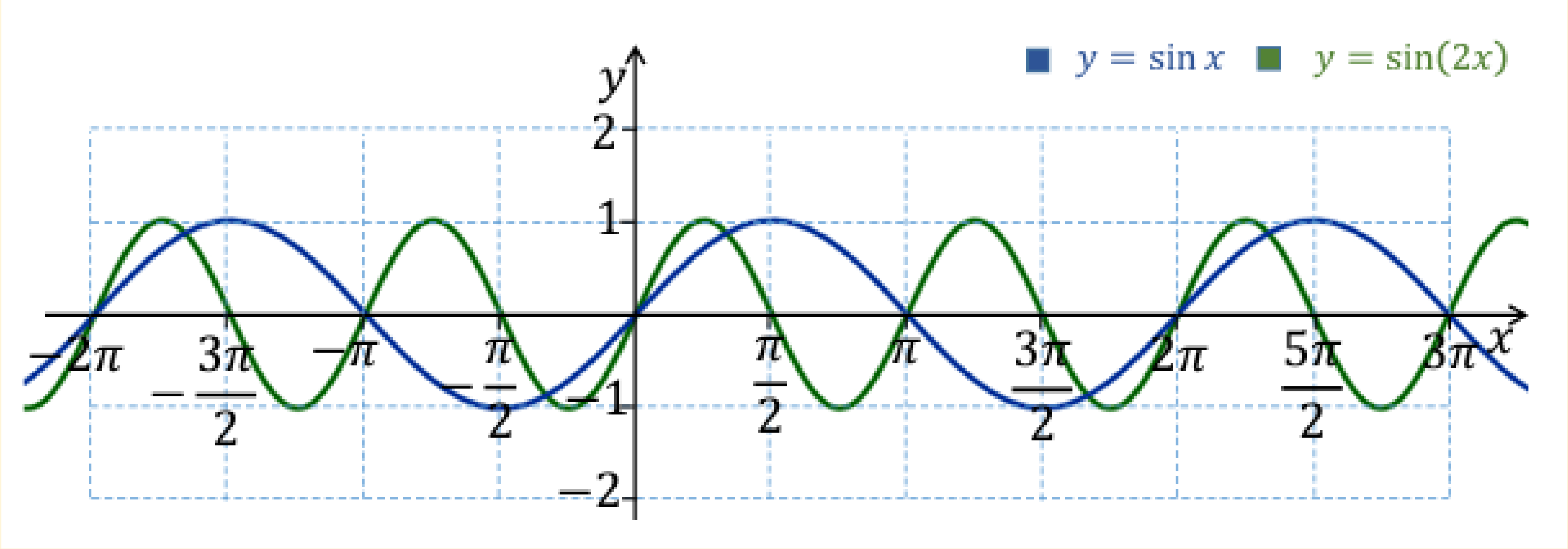
Compressão Horizontal

Exemplo. Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período da função

$$f(x) = \sin(2x)$$

Solução:

Compressão horizontal do gráfico da função seno pela metade.



$D(f) = \mathbb{R}$ $\quad Im(f) = [-1,1]$ $\quad P(f) = \pi$

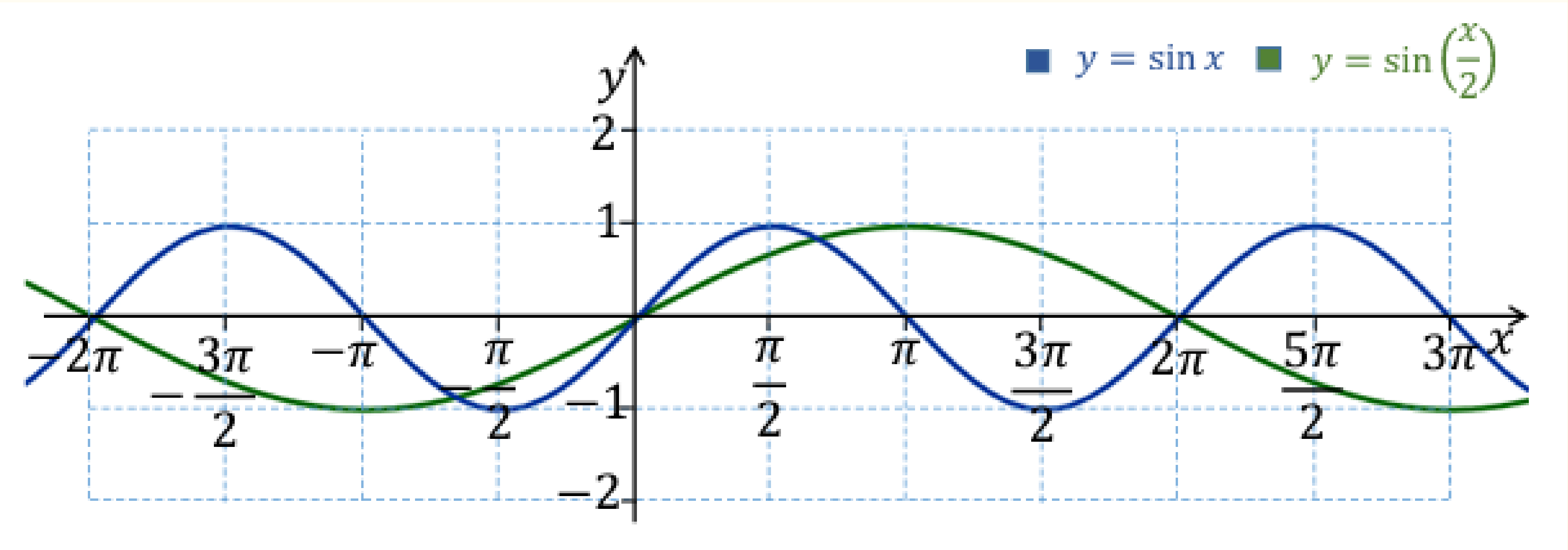
Funções Trigonométricas
Alongamento Horizontal

Exemplo. Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período da função

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Solução:

Alongamento horizontal do gráfico da função seno em dobro.



$D(f) = \mathbb{R}$ $\quad Im(f) = [-1,1]$ $\quad P(f) = 4\pi$

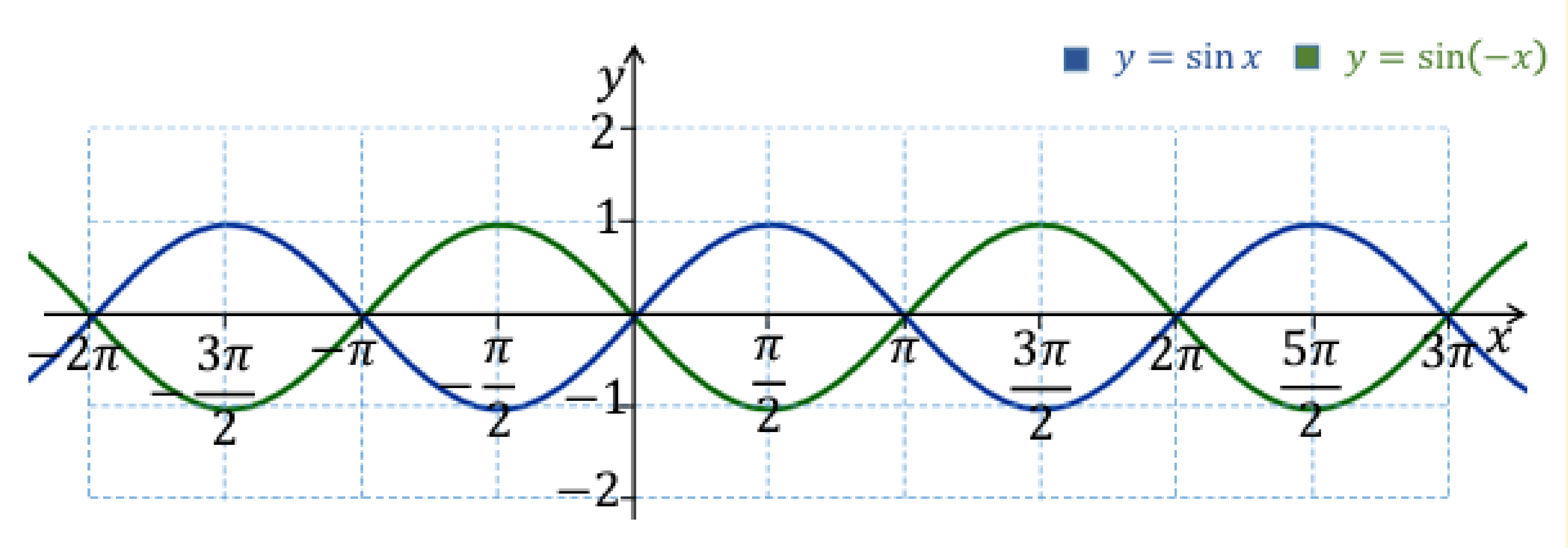
Funções Trigonométricas
Reflexão em Relação ao Eixo Vertical

Exemplo. Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período da função

$$f(x) = \sin(-x)$$

Solução:

Reflexão do gráfico da função seno em relação ao eixo vertical.



$D(f) = \mathbb{R}$ $\quad Im(f) = [-1,1]$ $\quad P(f) = 2\pi$

Funções Trigonométricas

Exemplo

Exemplo. Esboce o gráfico da função

$$f(x) = 2\sin(x+\pi) + 1$$

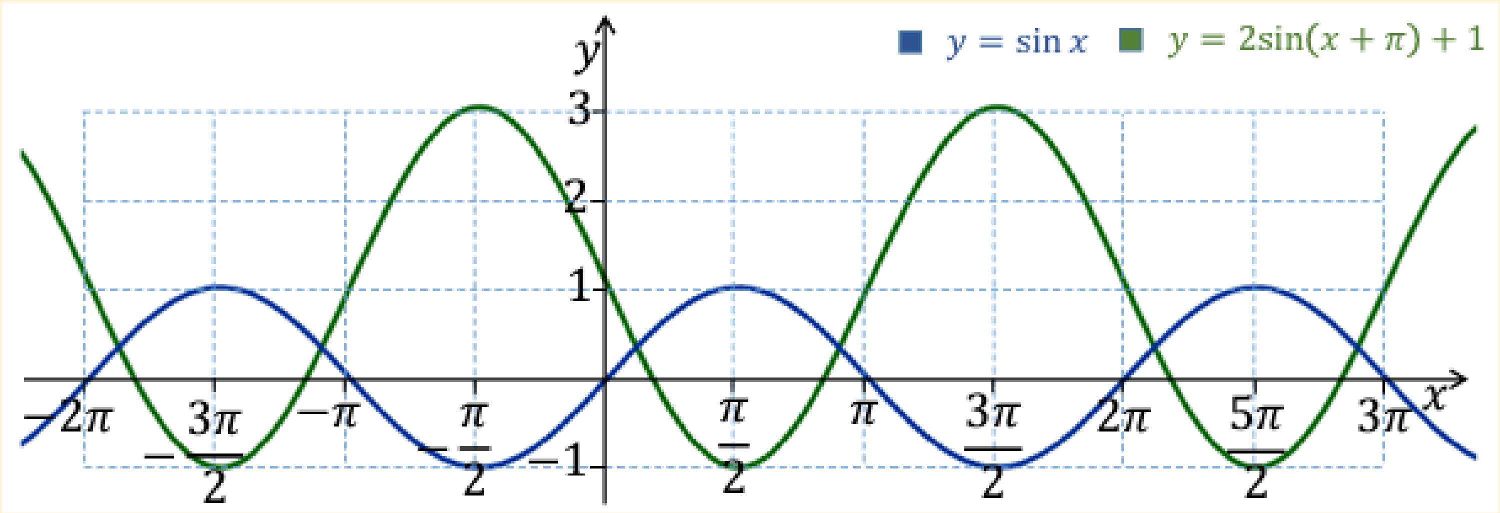
Solução:

Deslocamento vertical do gráfico da função seno em 1 unidade para cima.

$$f(x) = 2\sin(x+\pi) + 1$$

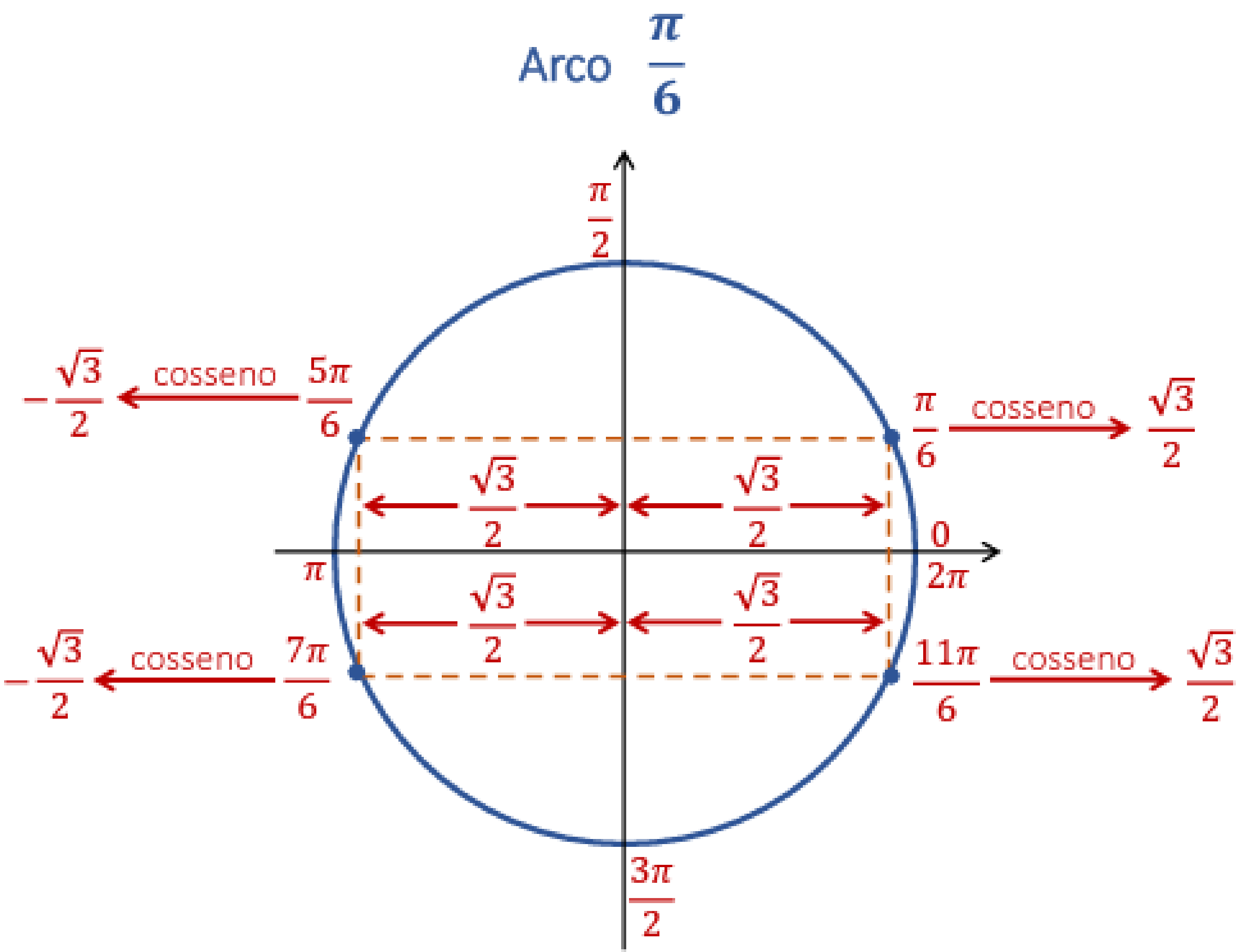
Alongamento vertical do gráfico da função seno em dobro.

Deslocamento horizontal do gráfico da função seno em π unidades para a esquerda.



Funções Trigonométricas

Cosseno dos Arcos Notáveis

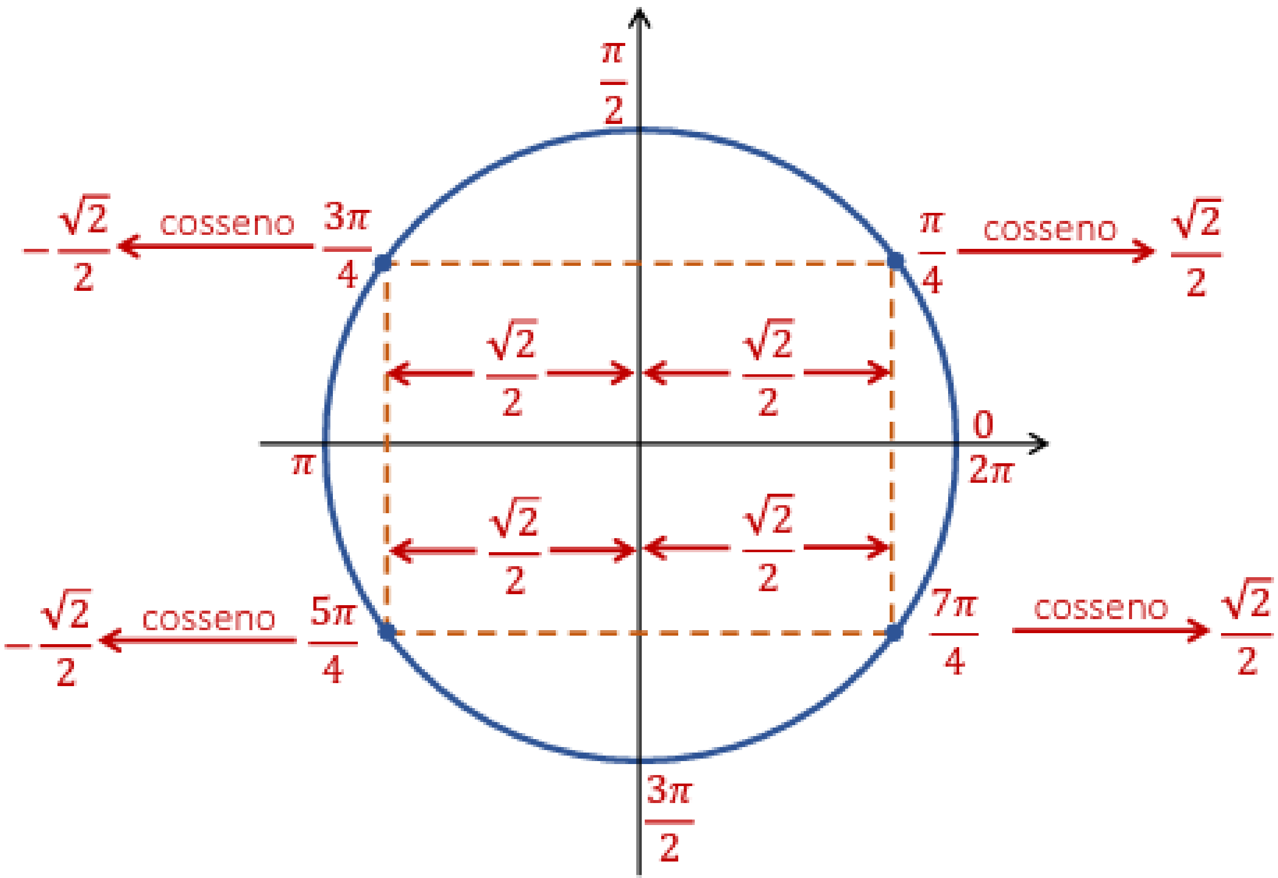


Arco		Valor do cosseno
$\frac{\pi}{6}$	$\rightarrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\rightarrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{7\pi}{6}$	$\rightarrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\rightarrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Funções Trigonométricas

Cosseno dos Arcos Notáveis

Arco $\frac{\pi}{4}$

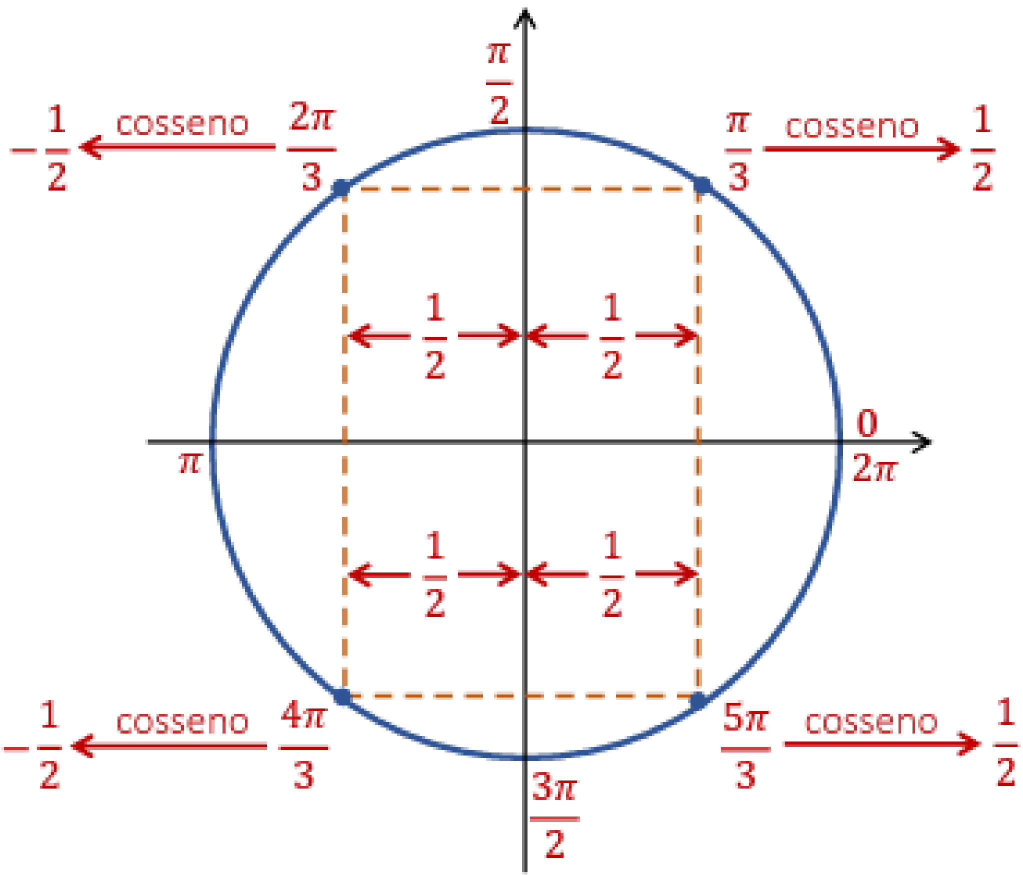


Arco	Valor do cosseno
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Funções Trigonométricas

Cosseno dos Arcos Notáveis

Arco $\frac{\pi}{3}$



Arco		Valor do cosseno
$\frac{\pi}{3}$	→	$\frac{1}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$	→	$-\frac{1}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	→	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{3}$	→	$\frac{1}{2}$

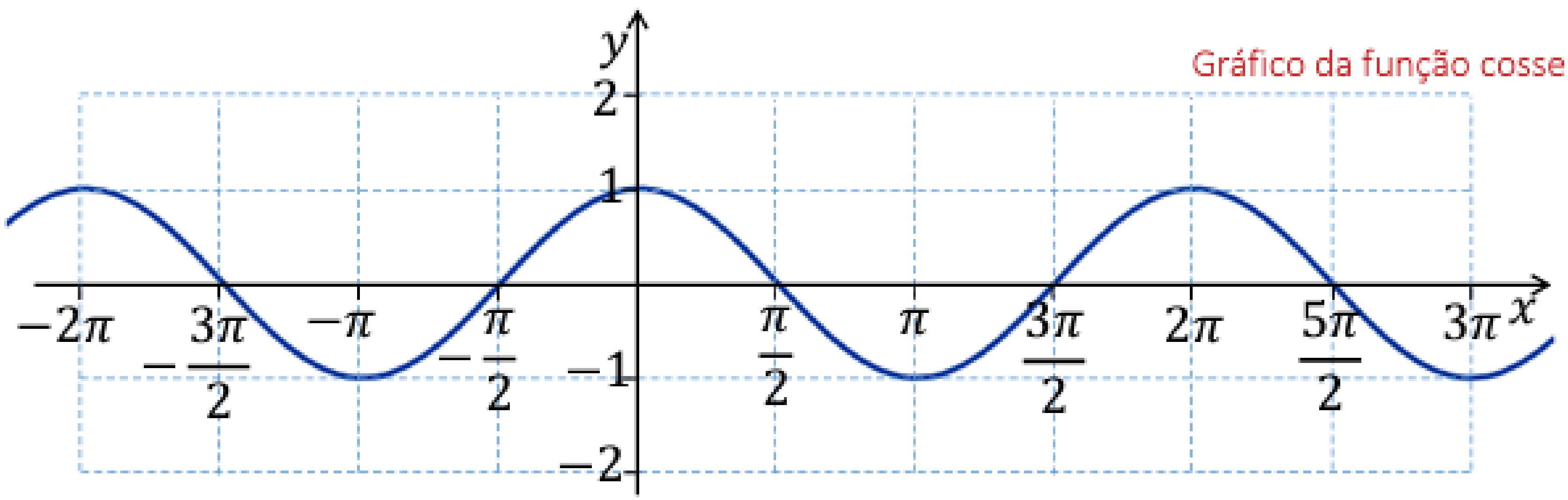
Funções Trigonométricas

Função Cosseno

Definição. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \cos x$$

é chamada de **função cosseno.**



Domínio	Imagem	Período
$D(f) = \mathbb{R}$	$Im(f) = [-1,1]$	$P(f) = 2\pi$

Funções Trigonométricas

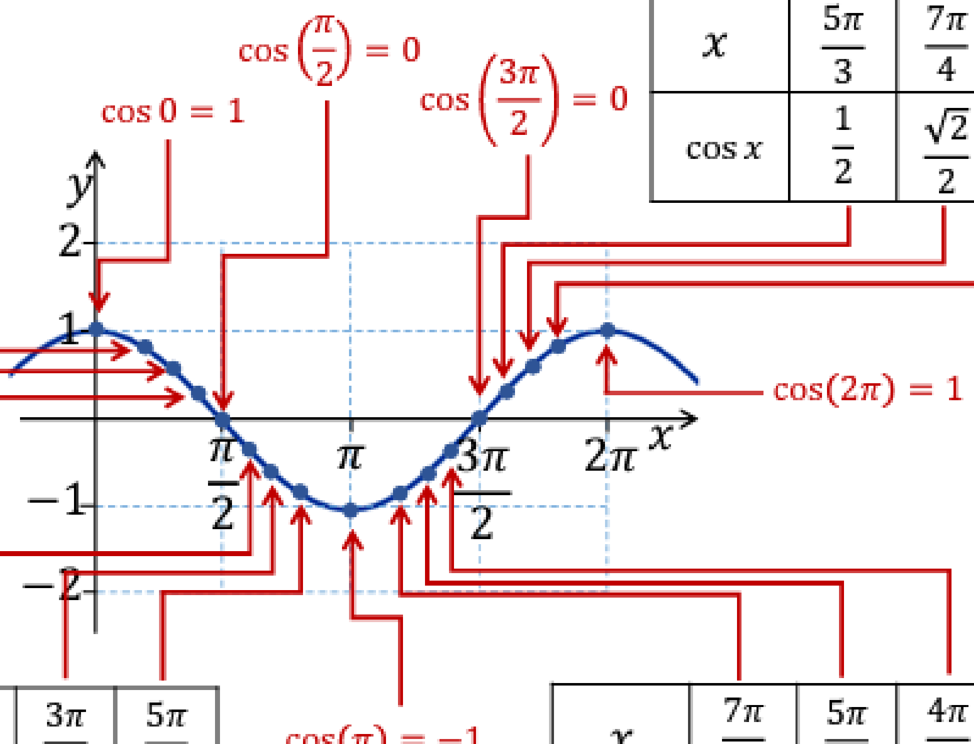
Função Cosseno

Primeiro quadrante

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Quarto quadrante

x	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$



x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Segundo quadrante

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$
$\cos x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Terceiro quadrante

Funções Trigonométricas

Exemplo

Exemplo. Esboce o gráfico da função

$$f(x) = -\cos(3x) - 1$$

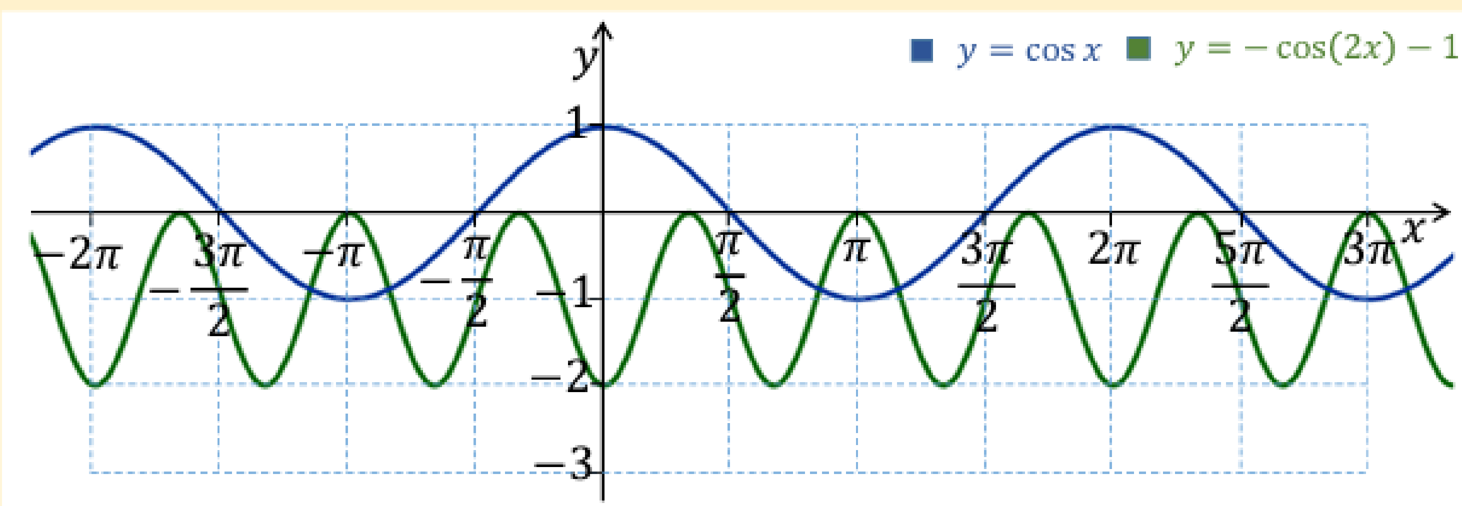
Solução:

Deslocamento vertical do gráfico da função cosseno em 1 unidade para baixo.

$$f(x) = -\cos(3x) - 1$$

Reflexão do gráfico da função cosseno em relação ao eixo vertical.

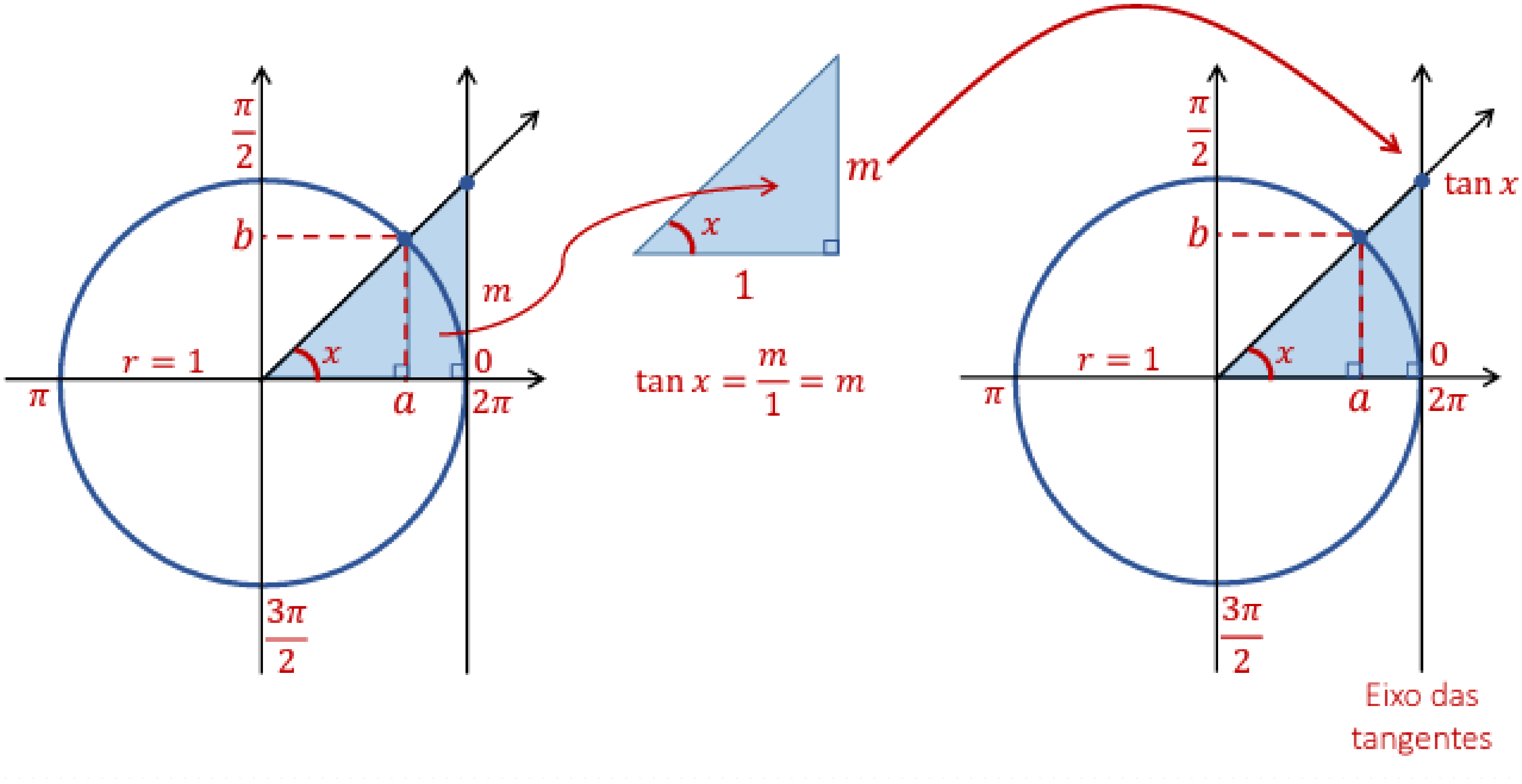
Compressão horizontal do gráfico da função cosseno pela metade.



Funções Trigonométricas

Tangente no Ciclo Trigonométrico

Lembre que, para cada arco x, o ciclo trigonométrico associa um ponto $P(a, b)$ do plano cartesiano, chamado de extremidade do arco x.



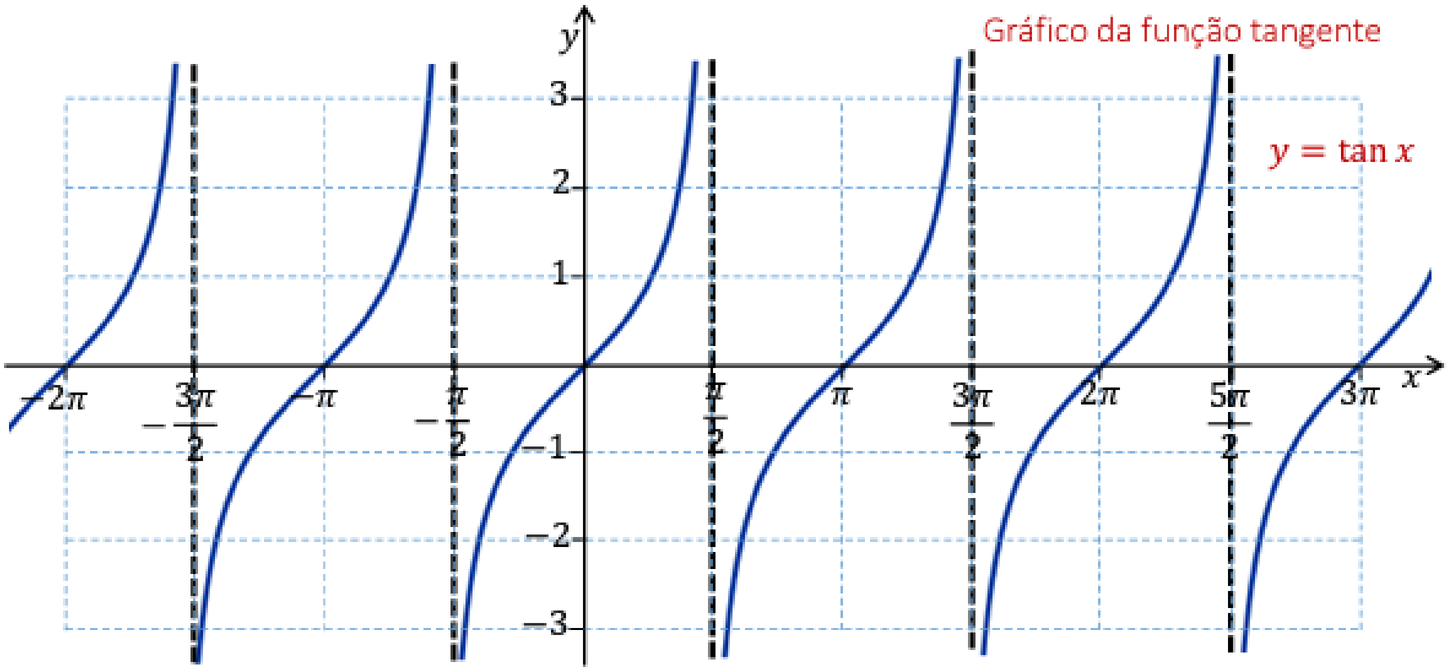
Funções Trigonométricas

Função Tangente

Definição. A função f dada por

$$f(x) = \tan x$$

é chamada de **função tangente.**



Lembre que:	Domínio	Imagem	Período	Assíntotas
$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle\vert x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$Im(f) = \mathbb{R}$	$P(f) = \pi$	$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

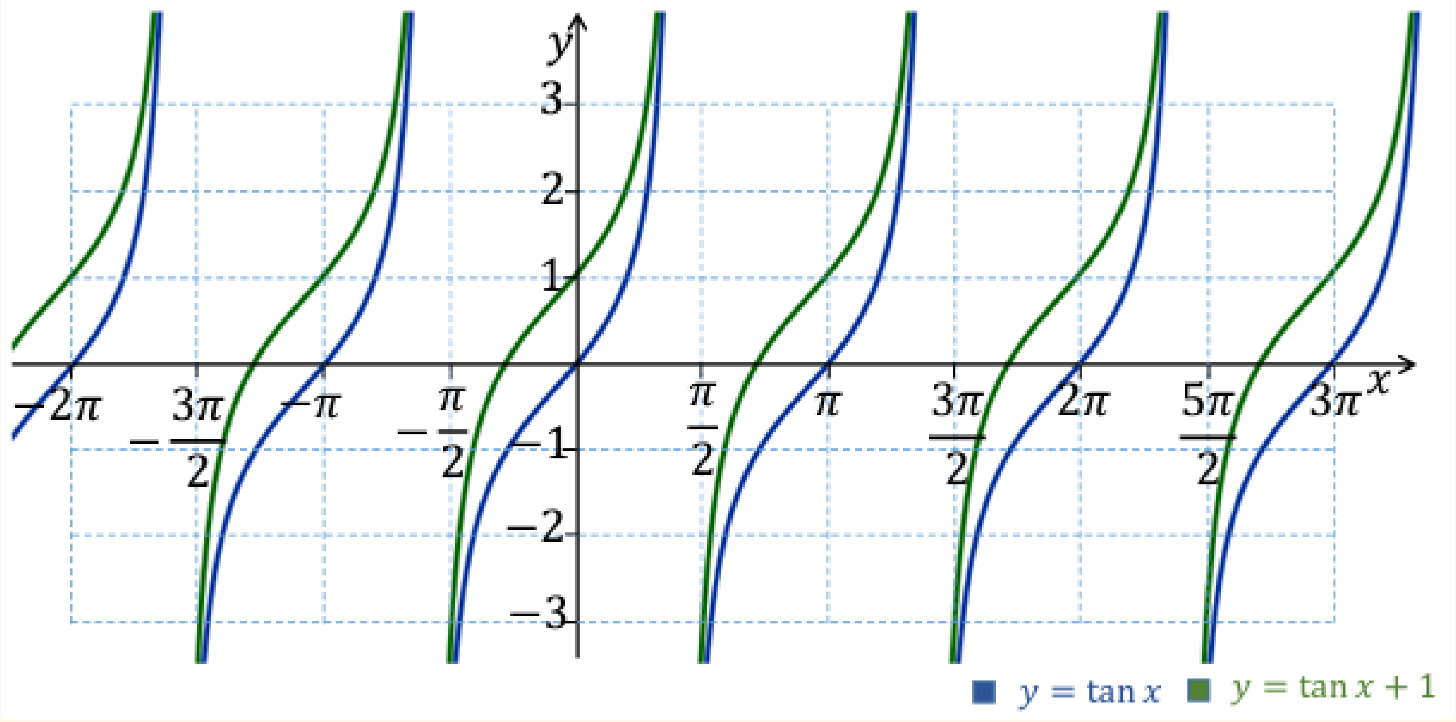
Funções Trigonométricas

Exemplo

Exemplo. Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período e as assíntotas da função

$$f(x) = \tan x + 1$$

Solução: Deslocamento vertical do gráfico da função tangente em uma unidade para cima.



$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad Im(f) = \mathbb{R}$ $\quad P(f) = \pi$

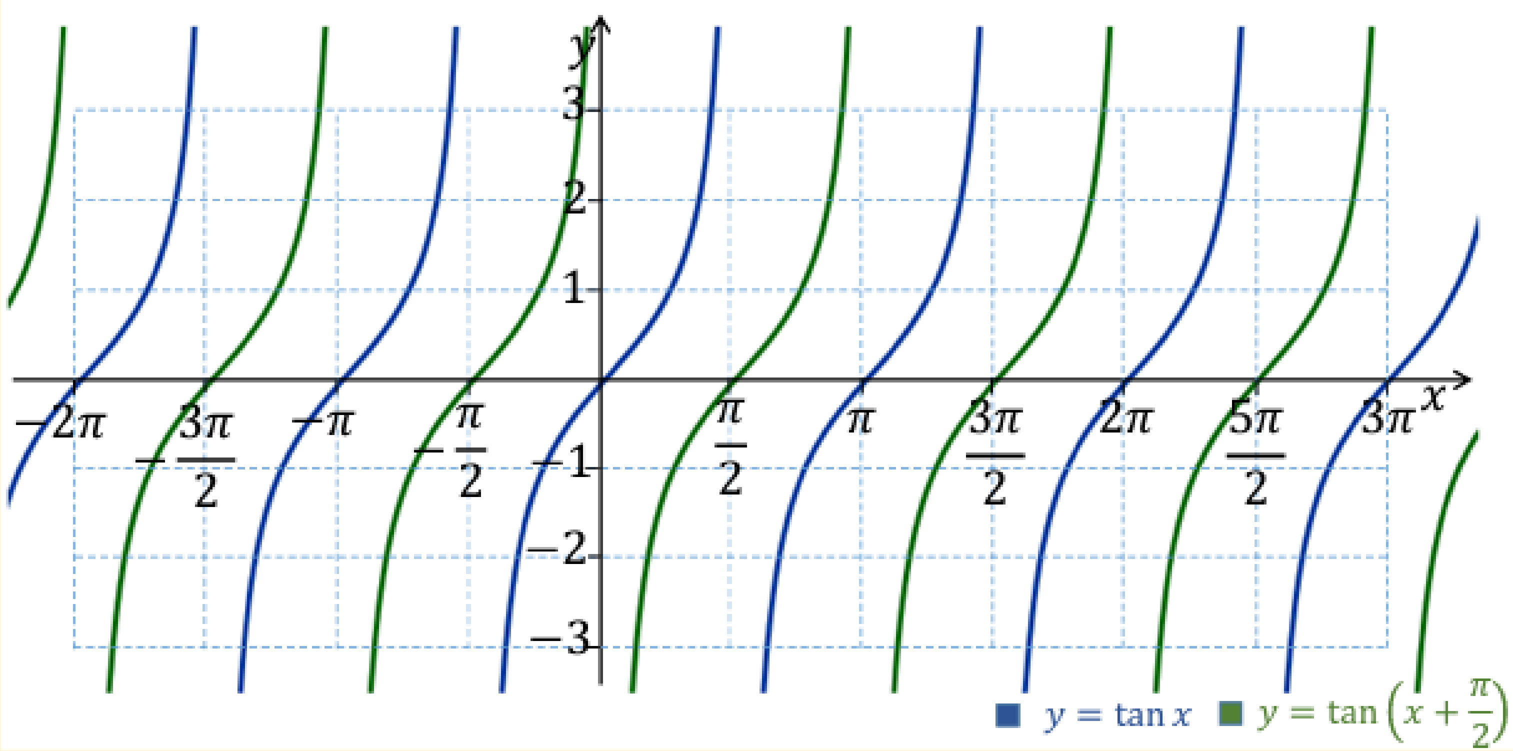
Funções Trigonométricas

Exemplo

Exemplo. Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período e as assíntotas da função

$$f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Solução: Deslocamento horizontal do gráfico da função tangente em uma $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda.



$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ $\quad Im(f) = \mathbb{R}$ $\quad P(f) = \pi$

Funções Trigonométricas
Exercícios

1) Esboce o gráfico das funções trigonométricas, e determine o período (T), amplitude (A), domínio e imagem das funções:

a) $y = 2 + \sin x$ $\quad T = 2\pi \quad A = 1 \quad D(f) = \mathbb{R} \quad Im(f) = [1,3]$

b) $y = 2\sin 4x$ $\quad T = \dfrac{\pi}{2} \quad A = 2 \quad D(f) = \mathbb{R} \quad Im(f) = [-2,2]$

c) $y = -3\cos(0{,}5x)$ $\quad T = 4\pi \quad A = 3 \quad D(f) = \mathbb{R} \quad Im(f) = [-3,3]$

d) $y = 3\sin 2\pi x$ $\quad = 1 \quad A = 3 \quad D(f) = \mathbb{R} \quad Im(f) = [-3,3]$

e) $y = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad T = \pi \quad A = 3 \quad D(f) = \mathbb{R} \quad Im(f) = [-3,3]$

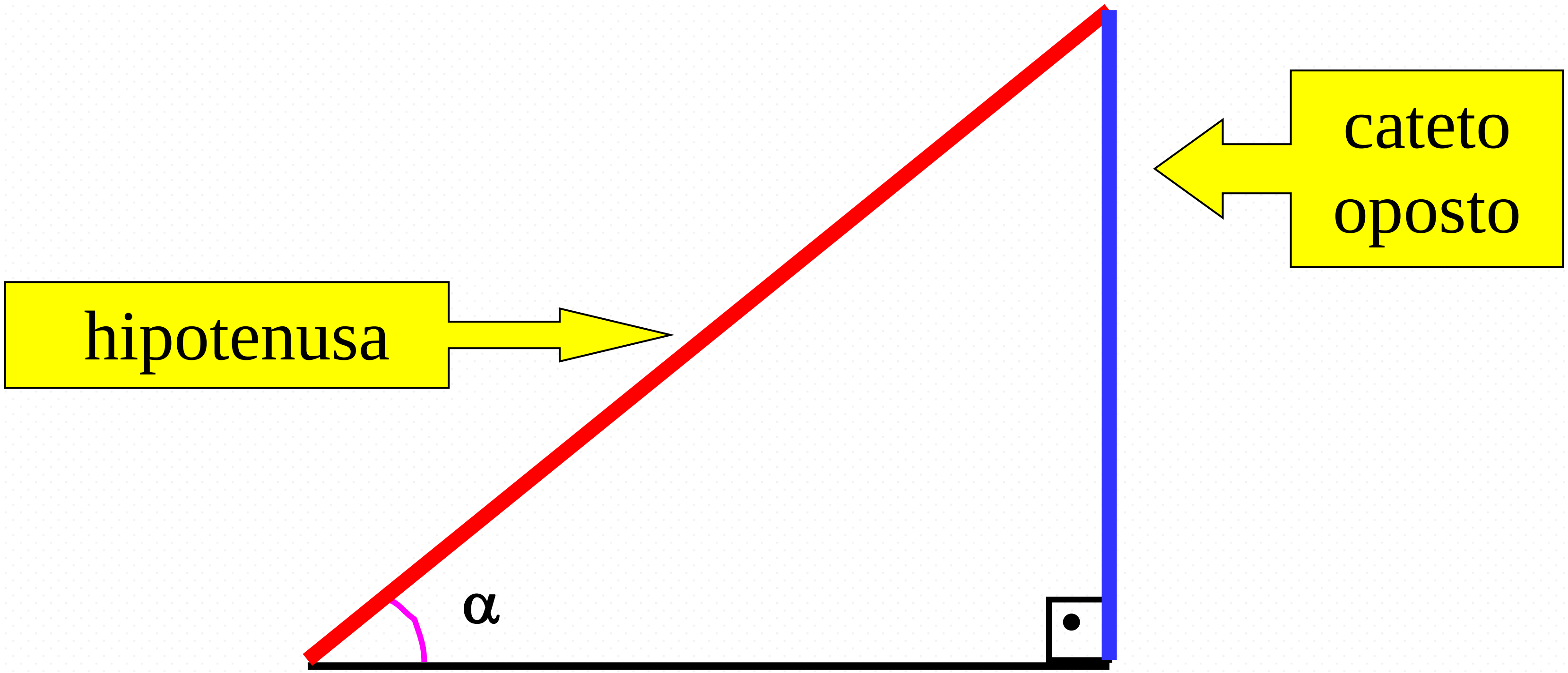
a) $y = \tan(2x) + 1$ $\quad T = \dfrac{\pi}{2} \quad D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\} \quad Im(f) = \mathbb{R}$

b) $y = 2\tan(3x)$ $\quad T = \dfrac{\pi}{3} \quad D(f) = \left\{x \in R \,\middle|\, x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\} \quad Im(f) = \mathbb{R}$

Relações Trigonométricas

Triângulo Retângulo

Função Seno

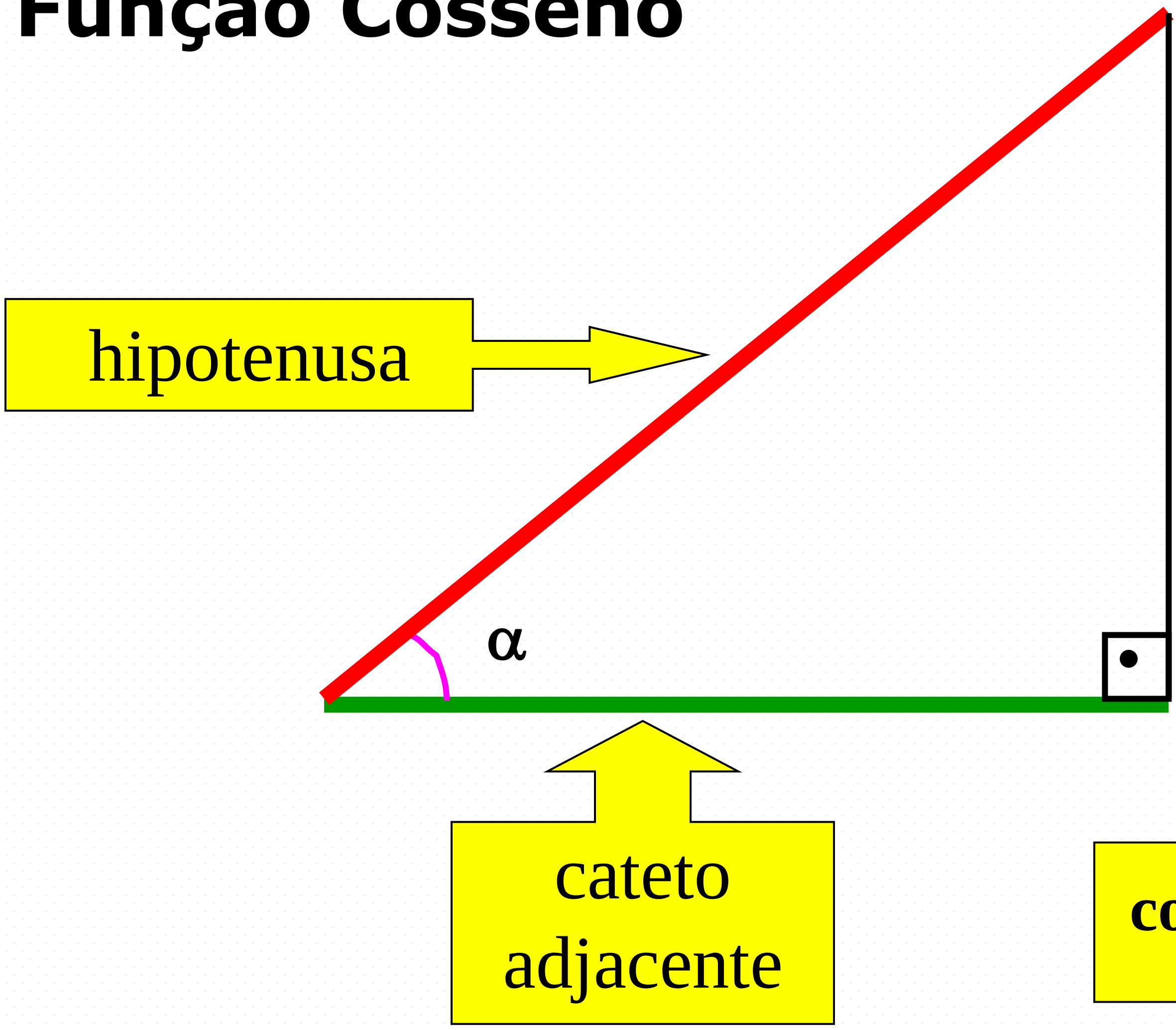


$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Relações Trigonométricas

Triângulo Retângulo

Função Cosseno

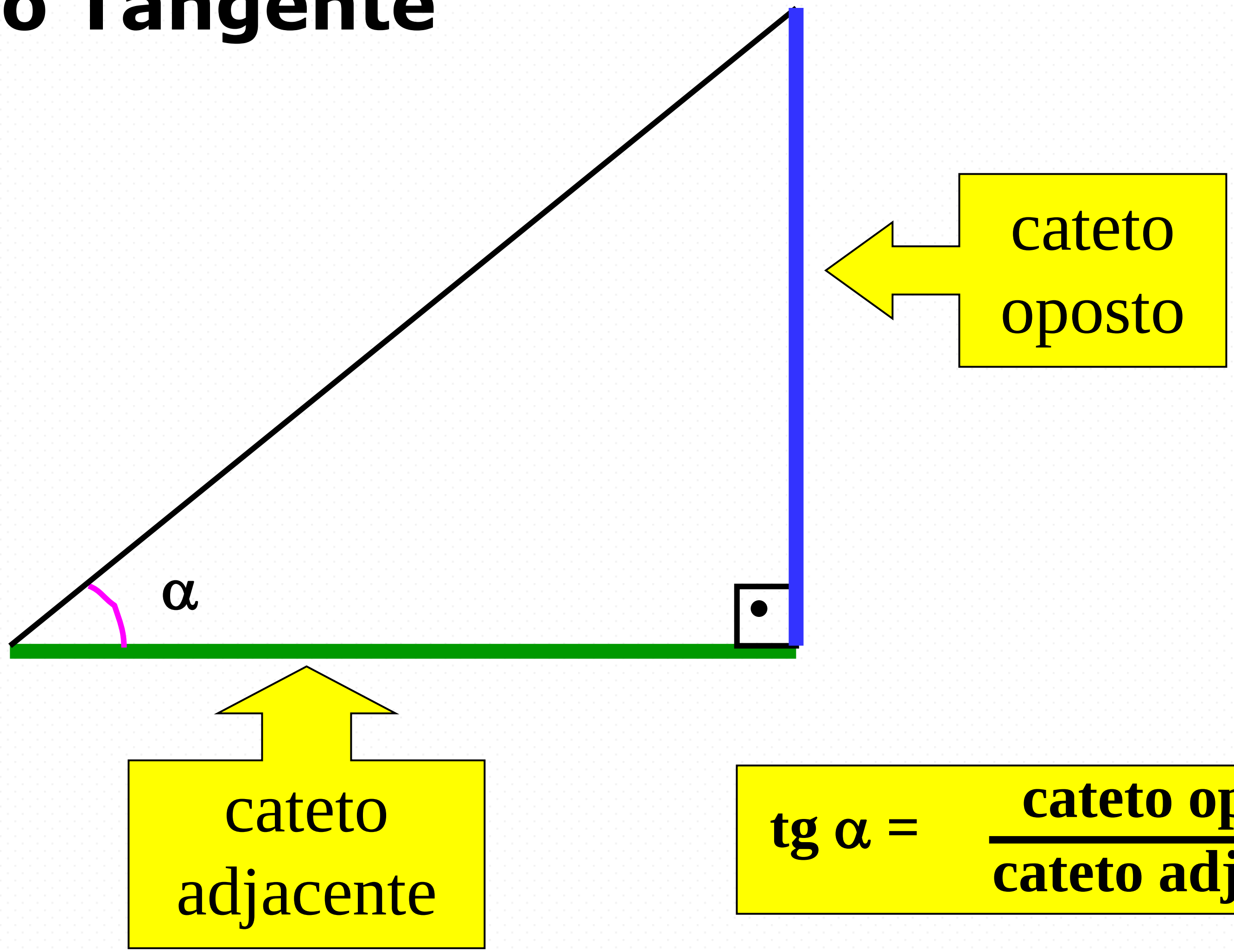


$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Relações Trigonométricas

Triângulo Retângulo

Função Tangente

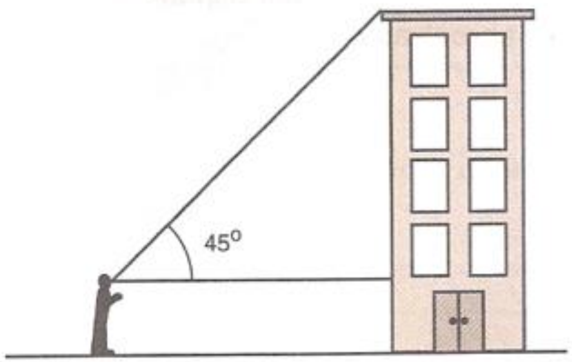


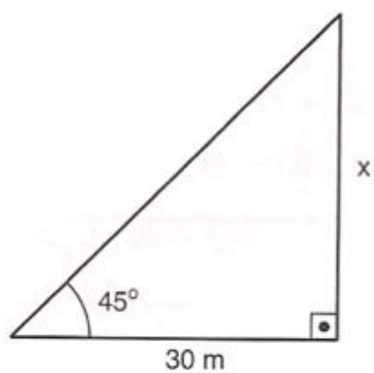
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Relações Trigonométricas

Exemplo de aplicação:

Uma pessoa de 2 metros de altura observa um prédio segundo um ângulo de 45° com a horizontal. Sabendo que a tangente de 45° é igual a 1 e que a distância dessa pessoa ao prédio é 30 metros, calcule a altura do prédio:





Calculando o valor de x, temos:

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{x}{30} \Rightarrow 1 = \frac{x}{30} \Rightarrow x = 30$$

Logo, a altura do prédio é $30 + 2 = 32$ m.

Identidades Trigonométricas

Identidades trigonométricas básicas são repetidas abaixo para fins de referência:

1. **Identidades pitagóricas.** Para quaisquer t para os quais ambos os lados são definidos:

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1 \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t \qquad \operatorname{cotg}^2 t + 1 = \csc^2 t$$

$$\cos^2 t = 1 - \operatorname{sen}^2 t \qquad \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t - 1 \qquad \operatorname{cotg}^2 t = \csc^2 t - 1$$

$$\operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t \qquad 1 = \sec^2 t - \operatorname{tg}^2 t \qquad 1 = \csc^2 t - \operatorname{cotg}^2 t$$

2. **Identidades recíprocas.** Para quaisquer t para os quais ambos os lados são definidos:

$$\operatorname{sen} t = \frac{1}{\csc t} \qquad \cos t = \frac{1}{\sec t} \qquad \operatorname{tg} t = \frac{1}{\operatorname{cotg} t}$$

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \operatorname{cotg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t}$$

3. **Identidades quociente.** Para quaisquer t para os quais ambos os lados são definidos:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \operatorname{cotg} t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

Identidades Trigonométricas

Exemplo Simplifique: $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

Da identidade pitagórica, $1-\cos^2\alpha=\operatorname{sen}^2\alpha$. Logo, $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{sen}\alpha$.

Exemplo Verifique que $\dfrac{\operatorname{sen}t\cos t}{\operatorname{tg}t}=\cos^2 t$ é uma identidade.

Começando com o lado esquerdo, um primeiro passo óbvio é reduzir a senos e cossenos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}t\cos t}{\operatorname{tg}t} &= \frac{\operatorname{sen}t\cos t}{\operatorname{sen}t/\cos t} && \text{Identidade quociente}\\
&= \operatorname{sen}t\cos t \div \frac{\operatorname{sen}t}{\cos t} && \text{Álgebra}\\
&= \operatorname{sen}t\cos t\cdot\frac{\cos t}{\operatorname{sen}t} && \text{Álgebra}\\
&= \cos^2 t && \text{Álgebra}
\end{aligned}
$$

Equações Trigonométricas

Equações trigonométricas podem ser resolvidas por uma combinação de técnicas algébricas e trigonométricas, incluindo redução de outras funções a seno e cosseno, substituição a partir de identidades trigonométricas conhecidas, simplificação algébrica, entre outras.

1. **Equações trigonométricas básicas** são equações da forma sen $t = a$, cos $t = b$, tg $t = c$. Elas são resolvidas pelo uso de inversas de funções trigonométricas para expressar todas as soluções no intervalo $[0,2\pi)$ e, então, estender para o conjunto completo de soluções. Alguns problemas, contudo, especificam que apenas soluções no intervalo $[0,2\pi)$ devem ser consideradas.
2. **Outras equações trigonométricas** são resolvidas pela redução a equações básicas por meio de técnicas algébricas e trigonométricas.

Exemplo: Encontre os valores para x, no intervalo $[0, 2\pi]$, da equação $senx = \frac{1}{2}$

$\text{sen } x = \frac{1}{2}$

$\cancel{\text{arc sen}}(\cancel{\text{sen}}\, x) = \text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right)$

$x = \text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right)$

$x' = 30° \text{ — } \boxed{\frac{\pi}{6} \text{ rad}}$

$x'' = 150° \text{ — } \boxed{\frac{5\pi}{6} \text{ rad}}$

Equações Trigonométricas

Exemplo: Encontre todas as soluções no intervalo $[0,2\pi]$ para $senx + cosx = 1$

$$(\operatorname{sen} x)^2 = (1 - \cos x)^2$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x$$

$$\cancel{1} - \cos^2 x = \cancel{1} - 2\cos x + \cos^2 x$$

$$2\cos^2 x - 2\cos x = 0$$

$$(2\cos x)\cdot(\cos x - 1) = 0$$

$$2\cos x = 0 \qquad \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = 0 \qquad \cos x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} \qquad x = 0$$

$$x = \frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} = 90° \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1$$

$$1 + 0 = 1 \quad \checkmark$$

$$x = \frac{3\pi}{2} = 270° \qquad \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} = 1$$

$$-1 + 0 = 1 \quad X$$

$$x = 0 \qquad \operatorname{sen} 0 + \cos 0 = 1$$

$$0 + 1 = 1 \quad \checkmark$$

$$S = \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$$

Equações Trigonométricas

Exemplo: Encontre todas as soluções no intervalo $[0, 2\pi]$ para $tg^2x - tgx = 6$ $Tg\,x = y$

$y^2 - y = 6$

$y^2 - y - 6 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25$

$y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2.(1)}$

$y = \frac{1 \pm 5}{2}$

$y' = 3$

$y'' = -2$

$tg\,x = 3$

$arc\,tg(Tg\,x) = arc\,tg\,(3)$

$x = arc\,tg(3)$

$x' = 71{,}57°$

$x'' = 251{,}57°$

$tg\,x = -2$

$arc\,tg(tg\,x) = arc\,tg(-2)$

$x = arc\,tg(-2)$

$x' = 296{,}57°$

$x'' = 116{,}57°$

Exercícios

1) Lista de Exercícios postada no Moodle.

Obrigado