TEG

Gilmário B. Santos

gilmario.santos@udesc.br

http://www.joinville.udesc.br/portal/pagina/gilmario

Sequência gráfica

Trata-se de uma forma de especificação de um grafo simples.

Designa-se por sequência gráfica (ou sequência dos graus dos vértices de um grafo) a toda a sequência de inteiros não negativos para a qual existe algum grafo simples cujos vértices admitem essa sequência como sequência dos seus graus.

Um problema interessante é identificar se existe grafo simples para certa sequência gráfica, é o que faremos a seguir...

S = (6, 5, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1) é uma sequência gráfica?

Para responder a esta pergunta, o primeiro passo é verificar o teorema da soma dos graus (condição necessária à existência de um grafo simples).

- Se a soma dos graus for ímpar então não há grafo para tal sequência gráfica;
- Se a soma for par, então é preciso verificar a sequência utilizando algum procedimento.

No caso em questão, a soma dos graus em S = (6, 5, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1) é igual a 32, portanto par.

Como se trata de uma condição necessárias, ainda resta a dúvida *S* é uma sequência gráfica? Ou seja, existe um grafo G, com V (G) = {v1, v2, . . . ,v9 }, tal que d(v1) = 6, d(v2) = 5, d(v3) = 5, d(v4) = 4, d(v5) = 4, d(v6) = 3, d(v7) = 2, d(v8) = 2 e d(v9) = 1 ?

Para esta verificação aplicaremos um algoritmo discutido a seguir...

S = (6, 5, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1) é uma sequência gráfica?

Procedimento: a ideia é realizar rodadas de distribuição de adjacências (grau) do nó de maior grau, obtendo novas sequências gráficas eliminando o nó contribuinte. Repete-se o processo até se esgotar os graus ou encontrar uma inconsistência, conforme segue:

1. Ordena-se S de forma decrescente, sendo que o nó de maior grau corresponderá ao primeiro termo dessa ordem (v1 com grau(v1)=6)

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9
S	6	5	5	4	4	3	2	2	1

2. Determina-se *S1* a sequência que decorre da eliminação do primeiro termo de S (v1) e da subtração de uma unidade dos n=grau(v1) primeiros termos, ou seja, (4, 4, 3, 3, 2, 1, 2, 1);

	~~v1~~	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9
S1	~~6~~	4	4	3	3	2	1	2	1

S = (6, 5, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1) é uma sequência gráfica?

Procedimento: a ideia é realizar rodadas de distribuição de adjacências (grau) do nó de maior grau, obtendo novas sequências gráficas eliminando o nó contribuinte. Repete-se o processo até se esgotar os graus ou encontrar uma inconsistência, conforme segue:

...
3. Determina-se S2 pela aplicação do passo 1: ordenando os termos da sequência S1, S2 = (4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1).
Note: os graus da sequência d′ correspondem à sequência de vértices (v2,v3,v4,v5,v6,v8,v7,v9).

	~~v1~~	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9
S1	~~6~~	4	4	3	3	2	1	2	1

	~~v1~~	v2	v3	v4	v5	v6	v8	v7	v9
S2	~~6~~	4	4	3	3	2	2	1	1

4. Determina-se *S3* pela aplicação do passo 2: eliminação do primeiro termo de *S2* (v2) e da subtração de uma unidade dos n=grau(v2) primeiros termos.
Agora, os graus da sequência S3 correspondem à sequência de vértices (v3,v4,v5,v8,v6,v7,v9).

	~~v1~~	~~v2~~	v3	v4	v5	v6	v8	v7	v9
S3	~~6~~	~~4~~	3	2	2	1	2	1	1

S = (6, 5, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1) é uma sequência gráfica?

Procedimento: a ideia é realizar rodadas de distribuição de adjacências (grau) do nó de maior grau, obtendo novas sequências gráficas eliminando o nó contribuinte. Repete-se o processo até se esgotar os graus ou encontrar uma inconsistência, conforme segue:

5. Determina-se S4 pela aplicação do passo 1 sobre S3

	~~v1~~	~~v2~~	v3	v4	v5	v6	v8	v7	v9
S3	~~6~~	~~4~~	3	2	2	1	2	1	1

	~~v1~~	~~v2~~	v3	v4	v5	v8	v6	v7	v9
S4	~~6~~	~~4~~	3	2	2	2	1	1	1

4. Determina-se S5 pela aplicação do passo 2 sobre S4

	~~v1~~	~~v2~~	~~v3~~	v4	v5	v8	v6	v7	v9
S5	~~6~~	~~4~~	~~3~~	1	1	1	1	1	1

Perceba que S5 é uma sequência de uns em quantidade par.

Neste caso, a sequência S original é gráfica se e só se o número de uns é par, que é o caso.

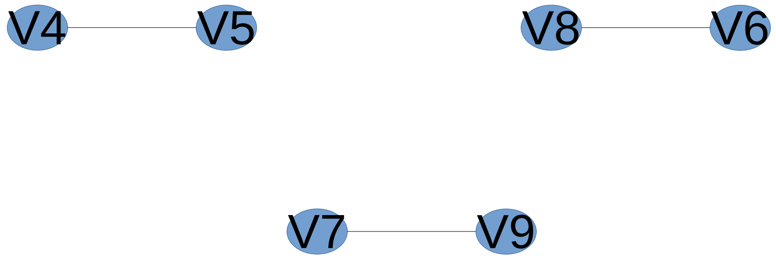
Sequência gráfica

Montando um grafo, fazendo agora o percurso inverso:

i. Começando por determinar G′ a partir de S5,
ii. G’’ a partir de G’ e S4,
iii. G’’’ a partir de G’’ e S2, etc,

Obtém-se um grafo para a sequência original:

	~~v1~~	~~v2~~	~~v3~~	v4	v5	v8	v6	v7	v9
S5	~~6~~	~~4~~	~~3~~	1	1	1	1	1	1



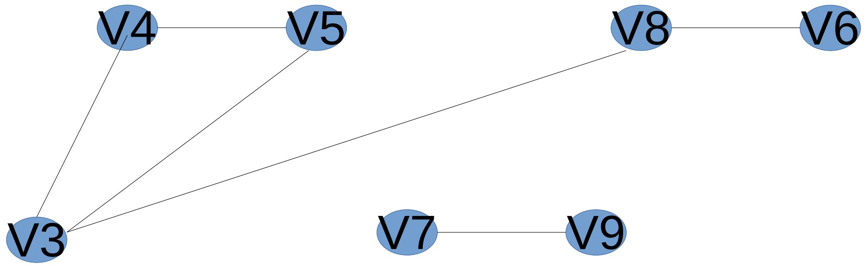
Sequência gráfica

Montando um grafo, fazendo agora o percurso inverso:

i. Começando por determinar G′ a partir de S5,
ii. G’’ a partir de G’ e S4,
iii. G’’’ a partir de G’’ e S2, etc,

Obtém-se um grafo para a sequência original:

	~~v1~~	~~v2~~	v3	v4	v5	v8	v6	v7	v9
S4	~~6~~	~~4~~	3	2	2	2	1	1	1



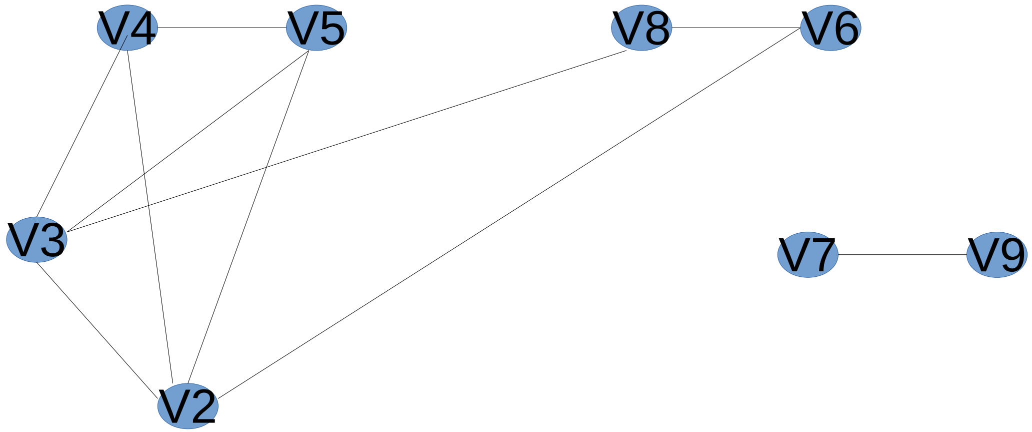
Sequência gráfica

Montando um grafo, fazendo agora o percurso inverso:

i. Começando por determinar G′ a partir de S5,
ii. G’’ a partir de G’ e S4,
iii. G’’’ a partir de G’’ e S2, etc,

Obtém-se um grafo para a sequência original:

	~~v1~~	v2	v3	v4	v5	v6	v8	v7	v9
S2	~~6~~	4	4	3	3	2	2	1	1



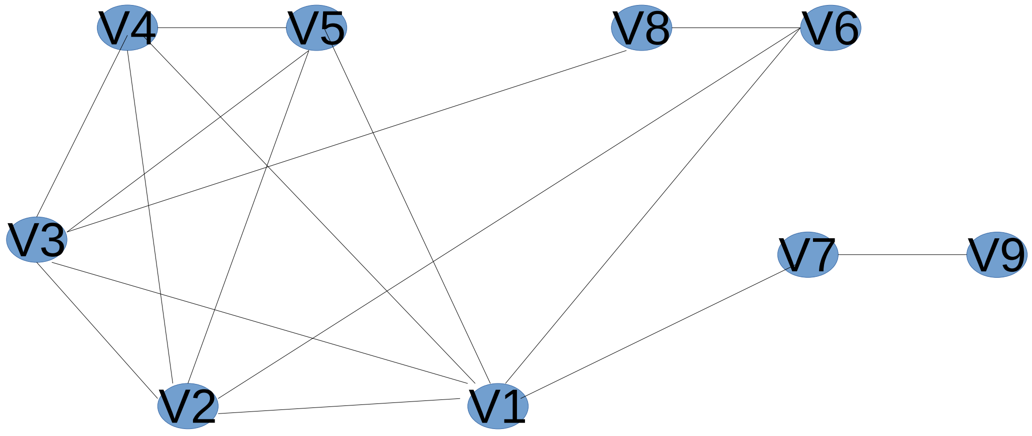
Sequência gráfica

Montando um grafo, fazendo agora o percurso inverso:

i. Começando por determinar G′ a partir de S5,
ii. G’’ a partir de G’ e S4,
iii. G’’’ a partir de G’’ e S2, etc,

Obtém-se um grafo para a sequência original:

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9
S	6	5	5	4	4	3	2	2	1



Sequência gráfica

Obtém-se um grafo para a sequência original:

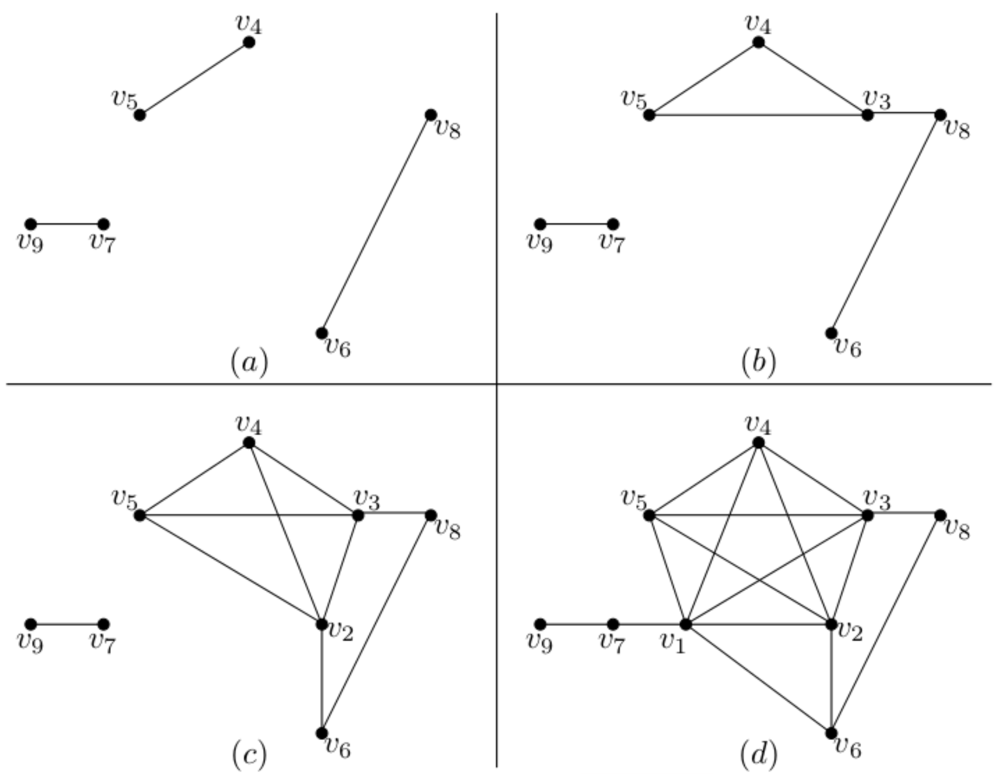
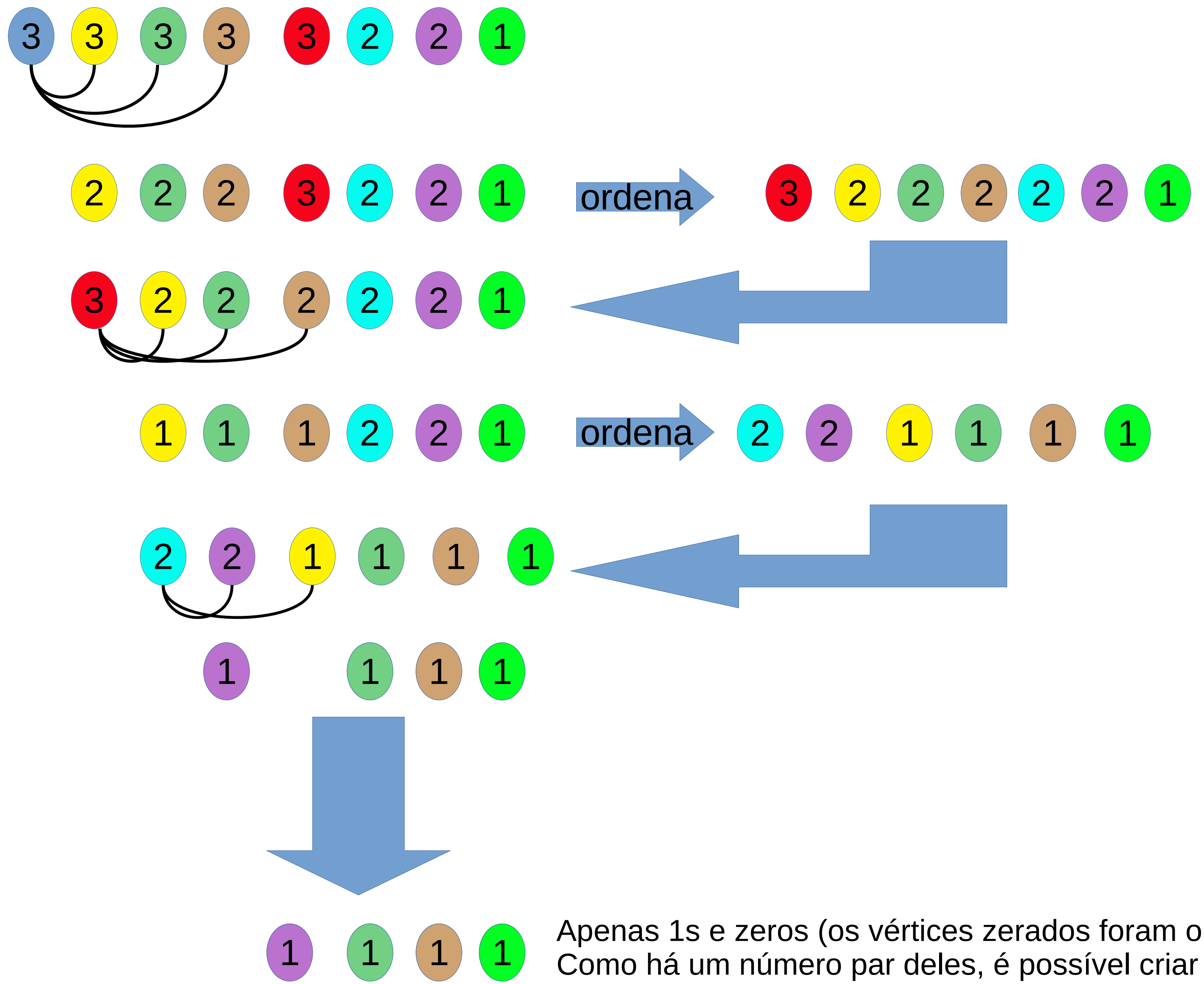


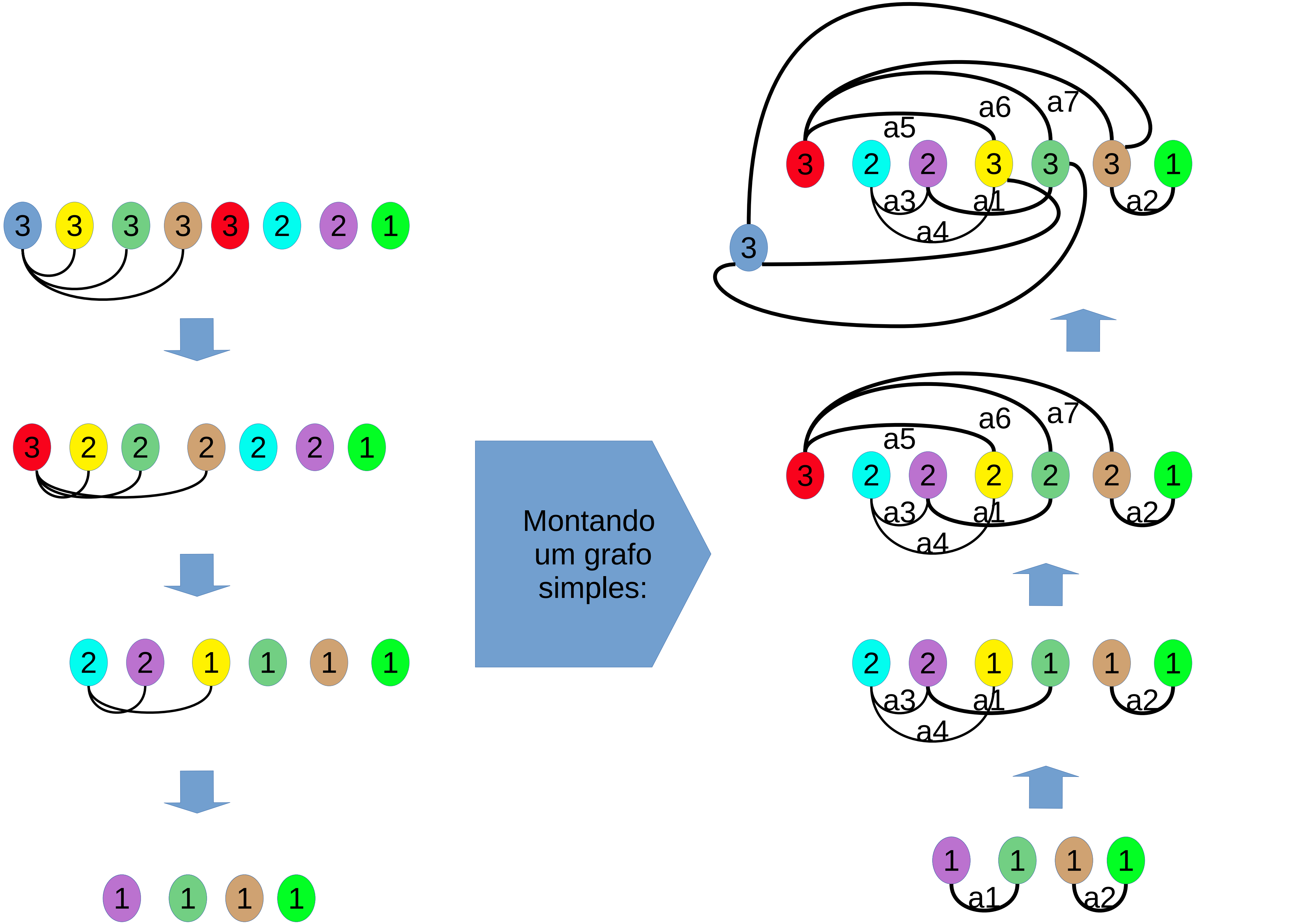
Figura 12.12: Construção de um grafo que admite a sequência de graus $(6, 5, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1)$ (ver Exemplo 12.12).

Uma outra forma similar de verificação:

Os arcos são adjacências que contabilizam o respectivo grau na sequência (cada grau consta dentro do círculo que representa um vértice):

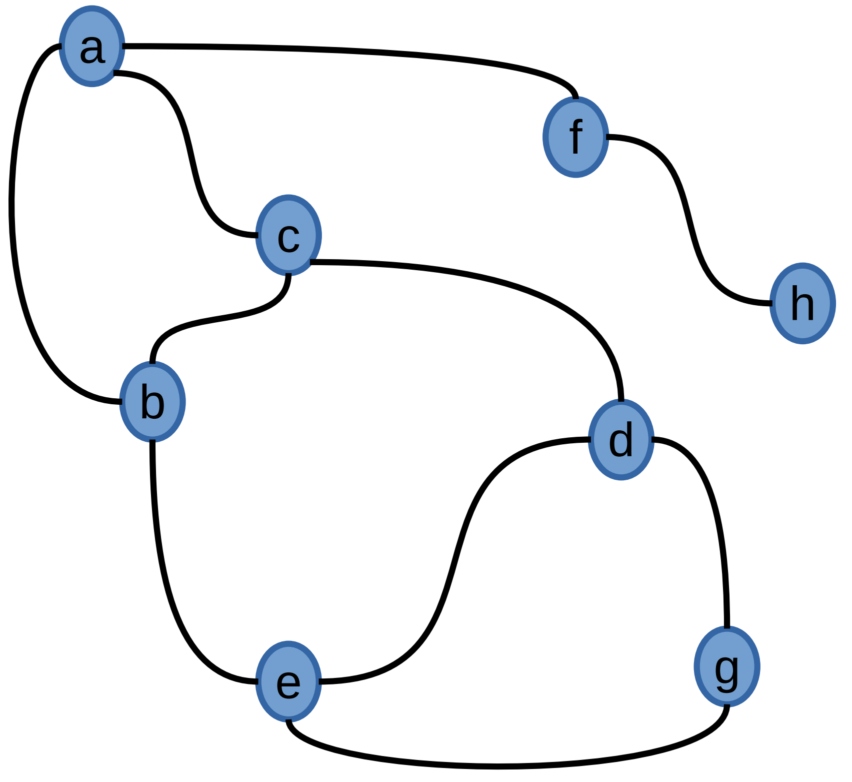


Apenas 1s e zeros (os vértices zerados foram omitidos).
Como há um número par deles, é possível criar um grafo cuja sequência de graus é a sequência original.

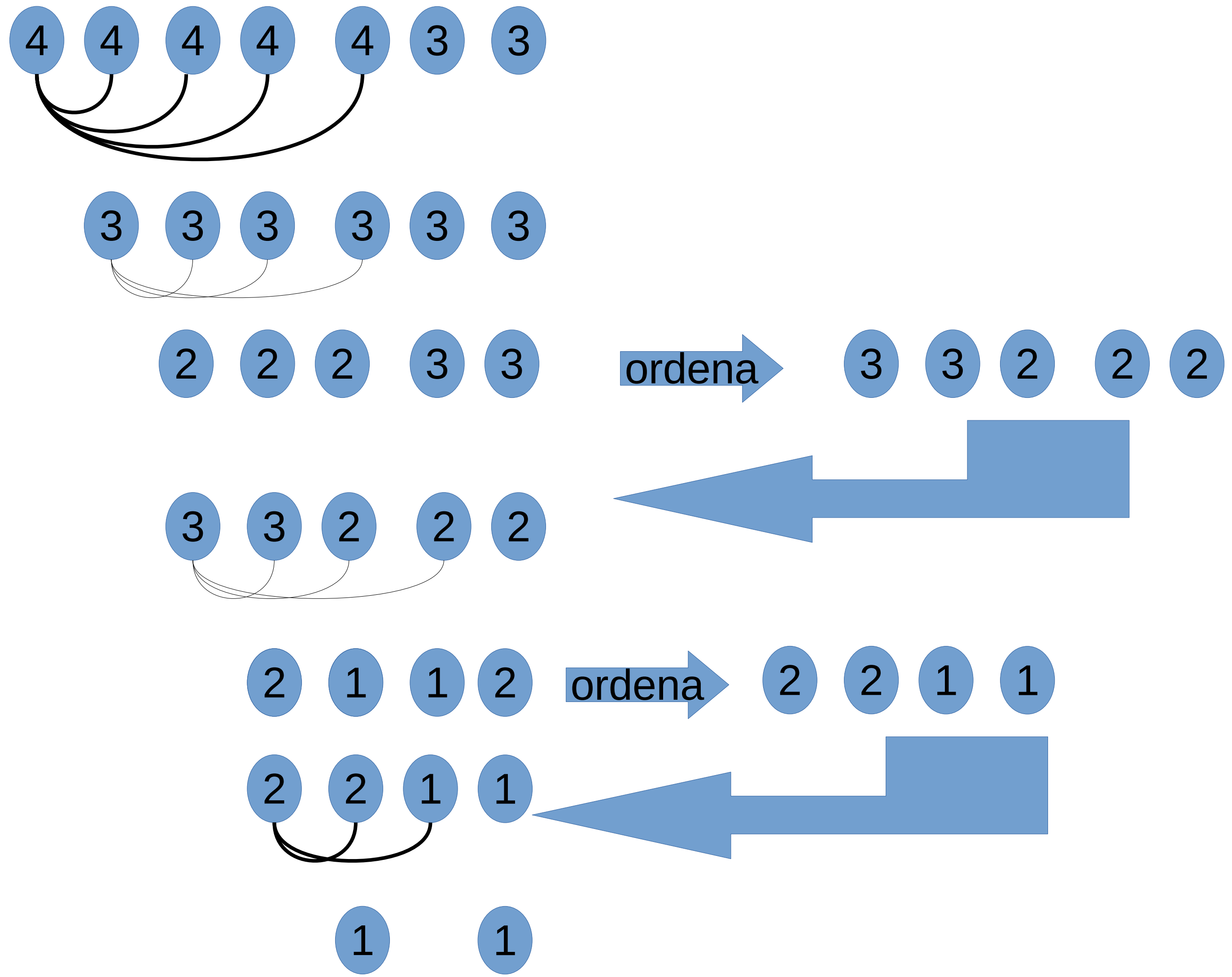


Montando
um grafo
simples:
a5
a6
a7
a3
a1
a4
a2

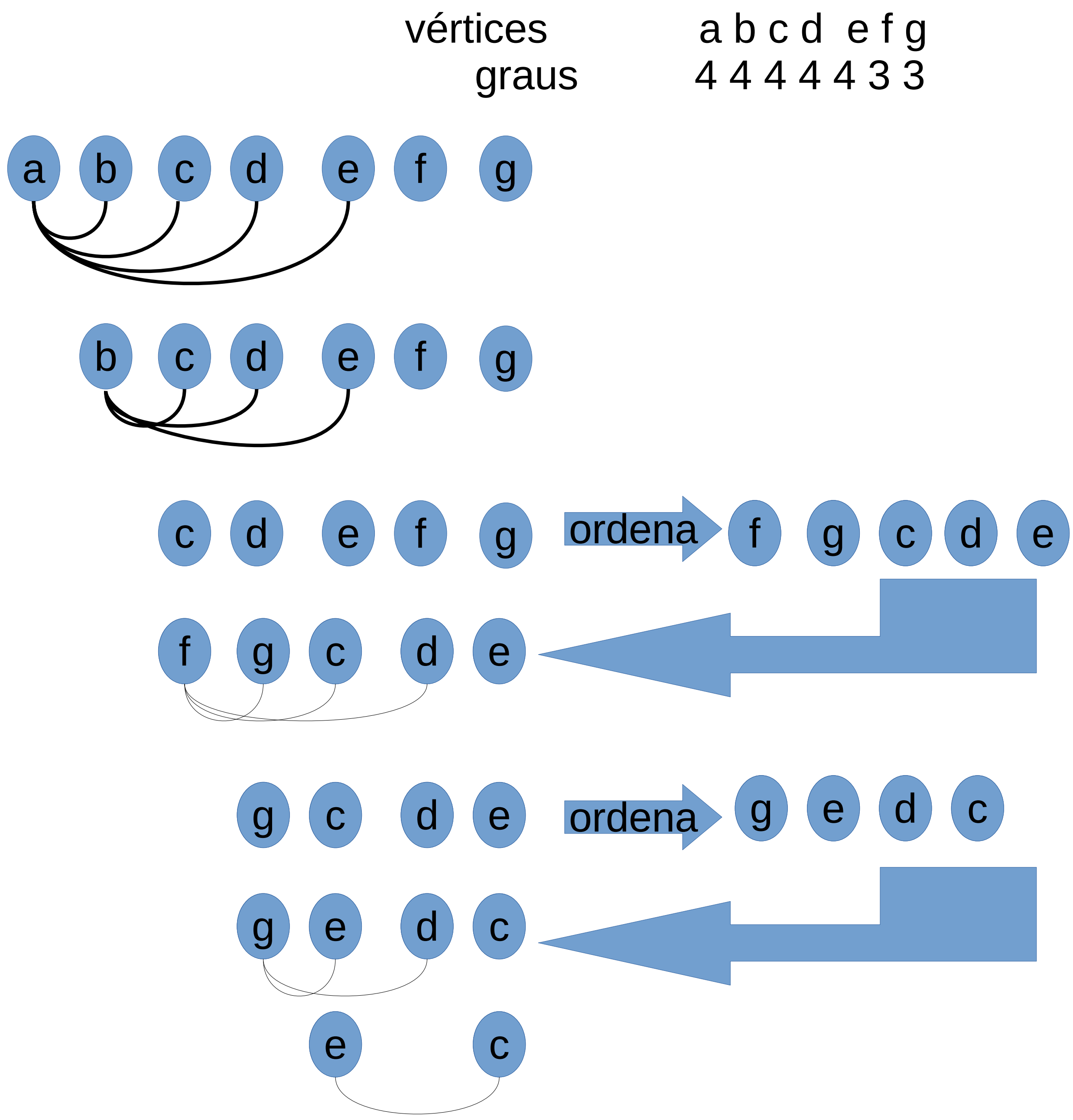
Um outro grafo simples para a sequência 3 3 3 3 3 2 2 1



Os graus constam dentro dos círculos: 4 4 4 4 4 3 3

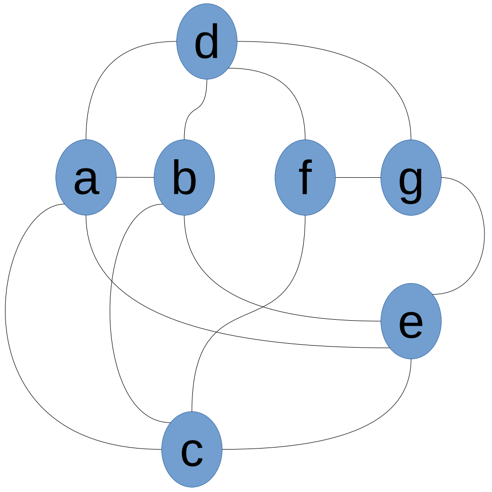


Como há um número par deles de uns, é possível criar
um grafo cuja sequência de graus é a sequência original.


vértices a b c d e f g
graus 4 4 4 4 4 3 3
a b c d e f g
b c d e f g
c d e f g
ordena
f g c d e
f g c d e
g c d e
ordena
g e d c
g e d c
e c

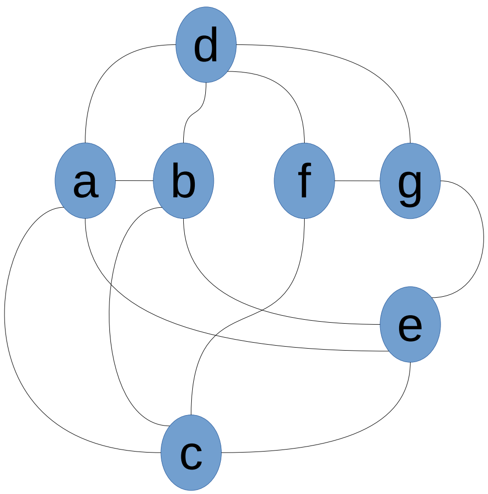
vértices	a b c d e f g
graus	4 4 4 4 4 3 3

Aplicando a montagem do grafo obtido:

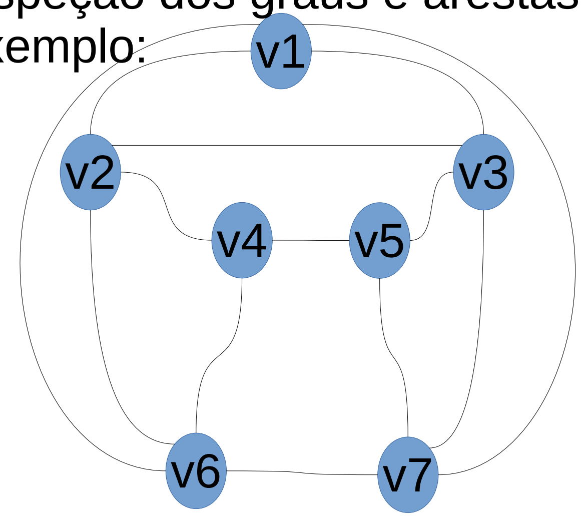


vértices	a	b	c	d	e	f	g
graus	4	4	4	4	4	3	3

Aplicando a montagem do grafo obtido:

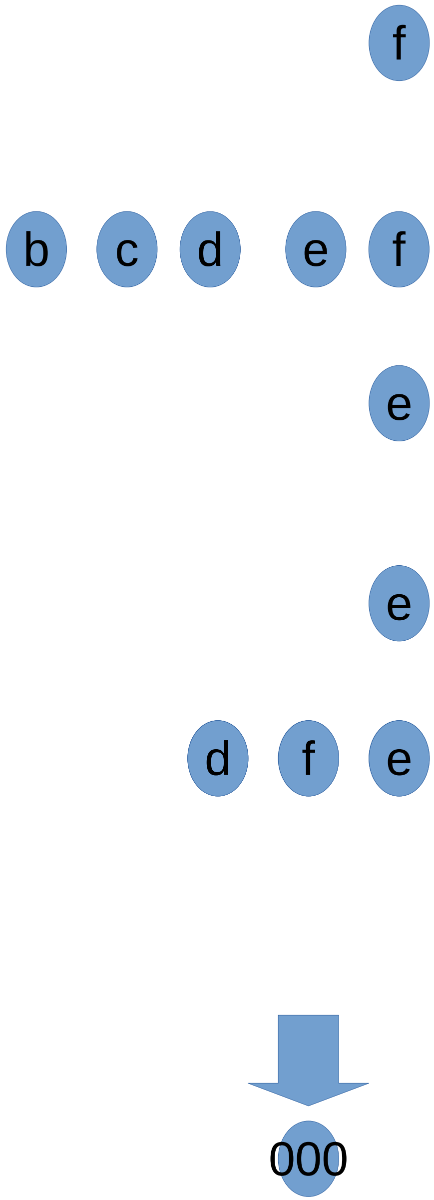


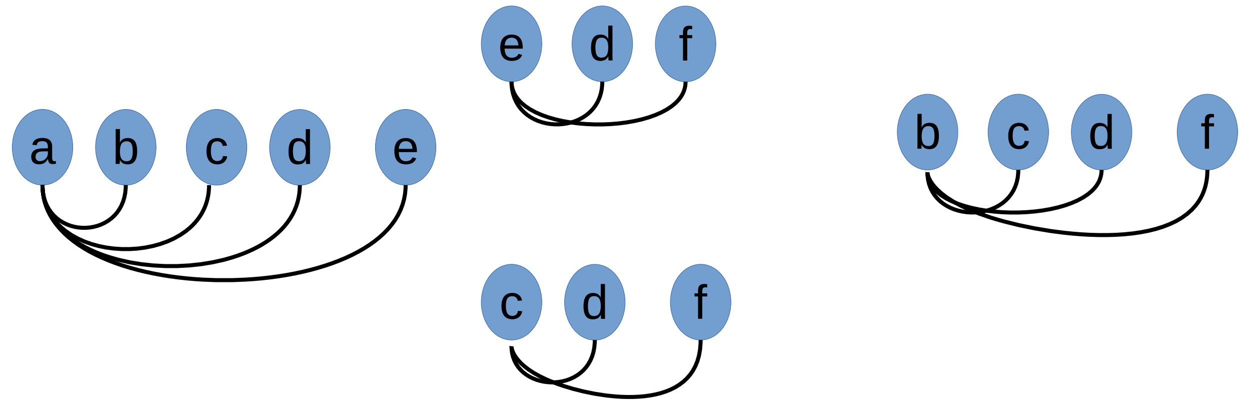
A mesma sequência de graus pode gerar um outro grafo por mera inspeção dos graus e arestas, por exemplo:



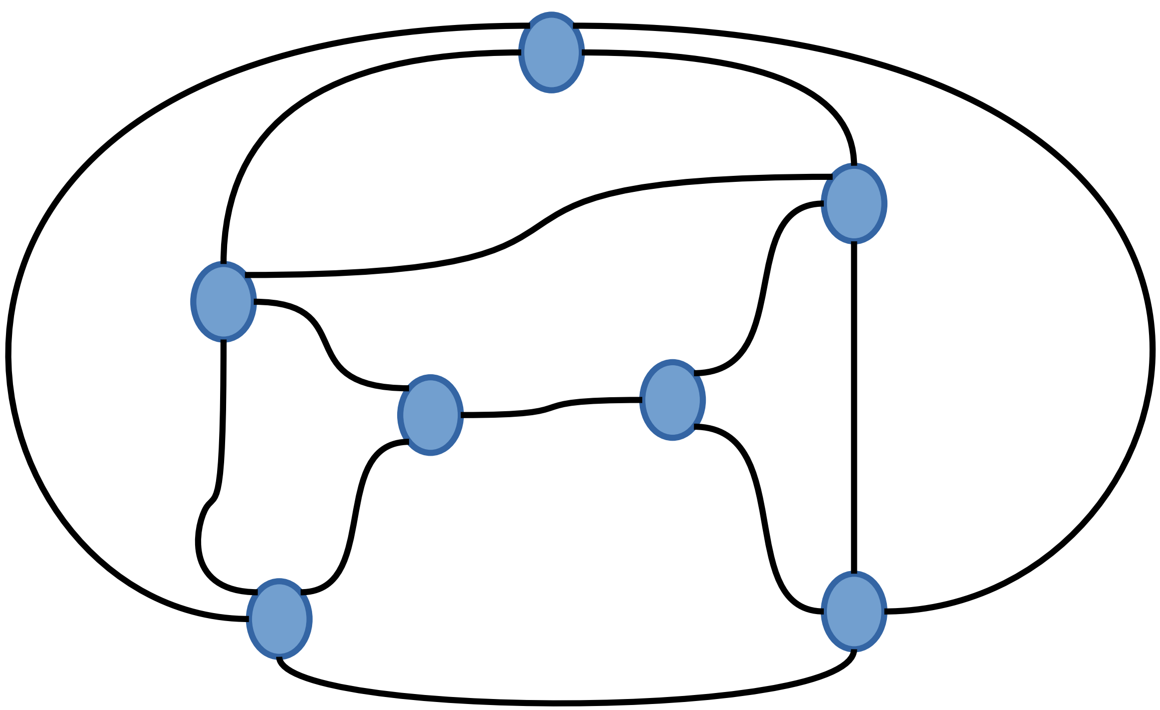
Grafo da sequência

	a	b	c	d	e	f	g
graus	4	4	4	4	4	3	3





Grafo da sequência 4 4 4 4 4 3 3



Referências:

Cardoso, DM et al. Algoritmo 12.1 in: “Matemática Discreta Combinatória, Teoria dos Grafos e Algoritmos” . 2009
URL: https://core.ac.uk/download/pdf/15564607.pdf

Aulas do prof. Meidanis (UNICAMP)
URL: https://www.ic.unicamp.br/~meidanis/courses/mo405/2002s2/mo405.html