MDI0002 – Matemática Discreta
Aula 03
Indução Matemática (2)

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2020

Mesma coisa, só que diferente ;-)

- No *passo* da indução
- considera **todos** os resultados anteriores à $p(k)$ para concluir $p(k+1)$

Definição (Primeiro Princípio da Indução Matemática)

Seja $p(n)$ uma proposição sobre $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m \wedge m \in \mathbb{N}\}$.
Se

(Base) $p(m)$ é verdadeira

(Passo) Para qualquer k, vale $p(k) \to p(k+1)$

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in M$.

Segundo Princípio da Indução Matemática

Definição (Segundo Princípio da Indução Matemática)

Seja $p(n)$ uma proposição sobre $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m \,\wedge\, m \in \mathbb{N}\}$.
Se

(Base) $p(m)$ é verdadeira

(Passo) Para qualquer k, vale
$$\boldsymbol{p(m) \wedge p(m+1) \wedge \ldots \wedge p(k)} \rightarrow p(k+1)$$

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in M$.

Versão 2.0

Definição (Segundo Princípio da Indução Matemática)

Seja $p(n)$ uma proposição sobre $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m \wedge m \in \mathbb{N}\}$ e $t \in \mathbb{N}$. Se

(Base) $\boldsymbol{p(m), p(m+1), \ldots, p(m+t)}$ são verdadeiras

(Passo) Para qualquer k com $k \geq m + t$, vale
$\boldsymbol{p(m) \wedge p(m+1) \wedge \ldots \wedge p(k)} \rightarrow p(k+1)$

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in M$.

- Prova os t primeiros casos em separado para verificar a base da indução.

Aplicação usual do Segundo Princípio

- Definição e prova de propriedades de
  - expressões
  - fórmulas
  - árvores
  - ...
- Também denominado **Indução Estruturada**

Exemplo

Suponha que A é uma fórmula lógica a qual contém exclusivamente os conectivos $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$. Se o valor verdade de todos os átomos de A é V, então o valor verdade de A é V.

Prova: por indução no número de átomos de A.

Base: Seja $k = 1$. Então:

- A é um átomo
- logo A é V.

Exemplo

Hipótese: Suponha que, para algum $k \in \mathbb{N}$, e para qualquer $u \in \mathbb{N}$ tal que $u \leq k$

- se o número de átomos de A é u, então o valor verdade de A é V.

Passo: Seja A uma fórmula com $k + 1$ átomos.

- A pode ser reescrita como (sendo B e C fórmulas que possuem, individualmente, no máximo k átomos e conjuntamente $k + 1$ átomos)
  - $B \wedge C$
  - $B \vee C$
  - $B \rightarrow C$
- pela **hipótese** de indução, B e C são V
- analisando cada um dos três casos, A é V.

Qualquer valor de postagem igual ou maior do que R$12,00 pode ser formado usando exclusivamente selos de R$4,00 e R$5,00.

Prova:

Base: Seja $k \in \{12, 13, 14, 15\}$

- R$12,00: 3 selos de R$4,00
- R$13,00: 2 selos de R$4,00 e 1 selo de R$5,00
- R$14,00: 1 selo de R$4,00 e 2 selos de R$5,00
- R$15,00: 3 selos de R$5,00

Exemplo

Hipótese: Suponha que, para algum $k \in \mathbb{N}$ e para qualquer $u \in \mathbb{N}$ tal que $15 \leq u \leq k$

- se o valor é u, então ele pode ser formado usando selos de R$4,00 e R$5,00.

Passo: Seja uma postagem cujo valor é $k + 1$ reais. Tal postagem pode ser formada usando:

- uma postagem de $k - 3$ reais
- mais um selo de R$4,00.

O Princípio da Indução Matemática pode ser usado em **definições**

Definição Indutiva ou Definição Recursiva

- Base de indução
  - explicita os caos elementares (os mais simples)
- Passo de indução/recursão:
  - demais casos são definidos em termos dos anteriores

Exemplo

Fórmula da Lógica Proposicional

Base:

- qualquer proposição atômica (incluindo V e F) é uma fórmula

Passo: Se B e C são fórmulas, então

- $(\neg B)$ é fórmula
- $(B \wedge C)$ é fórmula
- $(B \vee C)$ é fórmula
- $(B \rightarrow C)$ é fórmula