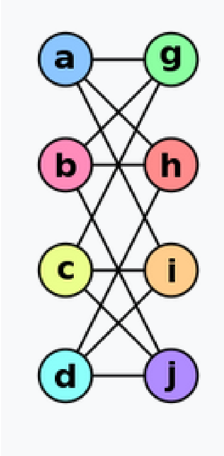
Lista de Exercícios #1

Exercícios:

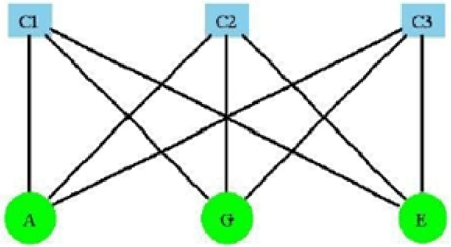
1) Faça um desenho de um grafo da predação entre algumas espécies, no qual: cada vértice é uma *espécie animal* (cavalo, urso, koala, coelho, mosquito, etc.) ou *vegetal* (cenoura, palmeira, eucalipto, alga, etc.). Há um arco de *x* para *y* se a espécie *x* se alimenta da espécie *y*.

2) Tente redesenhar os grafos G2 e G3, sem cruzar linhas. Calcule o número de regiões para cada grafo planar obtido.

G2



G3

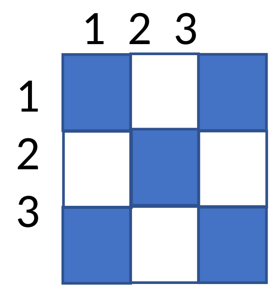


Exercícios:

3) Considerando que os vértices são as casas de um *tabuleiro de xadrez,* há um arco de *x* para *y* se um cavalo do jogo pode ir de *x* a *y* em um só movimento.

- Faça uma figura do grafo que representa os movimentos de um cavalo sobre um tabuleiro de xadrez 3-por-3.

  É possível visitar todas as posições do tabuleiro?



- Faça uma figura do grafo que representa os movimentos de um cavalo sobre um tabuleiro de xadrez 4-por-4.
  - É possível visitar todas as posições do tabuleiro?

4. O grafo das palavras é definido assim: cada vértice é uma palavra da língua portuguesa e duas palavras são adjacentes se diferem em exatamente uma posição. Por exemplo, rato e ralo são adjacentes, enquanto ralo e rota não são. Faça uma figura da parte do grafo definida pelas palavras abaixo:

caiado cavado cavalo girafa girava ralo ramo rata rato remo reta reto rota vaiado varado virada virado virava

5. O k-cubo, denotado Qk, é o grafo (simples) cujos vértices são todas as sequências de 0's e 1's com k dígitos, de tal modo que dois vértices são adjacentes se e somente se as sequências correspondentes diferem em exatamente uma posição. Ex: 001---101---111

(a) Desenhe os grafos Q1, Q2, Q3 e Q4;
(b) Quantos vértices e arestas tem um k-cubo?
(c) Quais são os valores de Δ e δ para um grafo cubo? Mostre que um k-cubo é um grafo regular;

6. Seja G(V,E) um grafo simples, onde V é o conjunto de todos os subconjuntos de {1, 2, 3, 4, 5} que têm exatamente 2 elementos. Uma aresta de G conecta apenas os subconjuntos (de dois elementos) disjuntos. Ou seja, v e w são adjacentes se $v \cap w = \varnothing$. Essa relação de adjacência sobre V define um grafo clássico. Pede-se: a) Desenhe G. b) Qual é o número de vértices e arestas de de G?

7. Dado um grafo G(V,A) e seu complementar $\overline{G}$(W,E). Sabendo que |A|=15 e |E| =13, qual é a cardinalidade do conjunto de vértices (|V|) de G ?

8. Demonstre que o maior número de arestas (m) de um grafo em um conjunto de n=|N| vértices é igual a:

$$\binom{n}{2} = \frac{(n(n-1))}{2}$$

9. Desenhe todos os grafos (simples) com: 1, 2, 3 e 4 vértices

10. Desenhe o grafo G(V,E), onde $V=\{v_0,v_1,\ldots,v_{n-1}\}$, $|V|>=3$. Note que o primeiro vértice de G é o v_0 (i=zero). Existe aresta entre v_i e v_j quando j = (i+1) % |V| (% representa o resto da divisão inteira).
Quais são os valores de Δ e δ para esse grafo? Qual é o número de arestas desse grafo?

11. Desenhe o grafo G(V,E), onde $V=\{v_0,v_1,\ldots,v_{n-1}\}$ no qual há n-1 vértices de grau 1 e um vértice v_i com grau n-1. Quais são os valores de Δ e δ para esse grafo? Qual é o número de arestas desse grafo?

12. Desenhe o grafo G(V,E) desconexos G1 e G2 (dois subgrafos desconectados um do outro) com |V|=|V1|+|V2|=2n, no qual contenha G1 e G2 como subgrafos:

a) G1 apresenta 2 vértices de grau 1 e n-2 vértices de grau 2;

b) G2 apresenta 1 vértice de grau n-1 e n-1 vértices de grau 3;

c) Para G1: quais são os valores de Δ e δ e qual é o número de arestas desse grafo?

d) Para G2: quais são os valores de Δ e δ para G2 e qual é o número de arestas desse grafo?

13. Desenhe e descreva o número de arestas, o grau máximo, o grau mínimo, cintura (Girth) e a planaridade dos seguintes grafos:
a) Roda (wheel-graph): Wn
b) Estrela (star-graph): Sn
c) Petersen
d) Ciclo: Cn
e) Caminho: Pn

14. É possível obter os grafos simples G(V,E) com os respectivos conjuntos de vértices $V=\{v_1, v_2, v_3,\dots , v_n\}$ a partir das respectivas sequências de graus $\{g(v_1), g(v_2), g(v_3,),\dots , g(v_n)\}$, abaixo listadas? (verifique as propriedades referentes a graus e se necessário aplique procedimento de seq. gráfica)

a) 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6
b) 1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 9
c) 3, 3, 2, 2, 1, 1
d) 7, 6, 4, 3, 3, 2
e) 3, 3, 1, 1
f) 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1

15. Um grafo G é regular se todos os seus vértices apresentam o mesmo grau. Se $\delta(G)$ é o grau mínimo em G e $\Delta(G)$ o seu grau máximo, prove ou forneça contraexemplo: se $\delta(G)= \Delta(G)$ então G é regular. Prove ou forneça contraexemplo: se G é regular então $\delta(G)= \Delta(G)$.

16. O grafo multipartido completo $K_{p1,p1,p3,\ldots,ps}$ consiste de *s* conjuntos de vértices de tamanhos p_i , $1 \leq p_i \leq s$, com arestas unindo dois vértices se e somente se pertencem a conjuntos distintos:

a) Qual é a cardinalidade do conjunto de todos os vértices do grafo?

b) Qual é a cardinalidade do conjunto de todas as arestas do grafo?

c) Qual é o grafo complemento de $K_{p1,p1,p3,\ldots,ps}$ *?*