Departamento de Ciência da Computação - DCC
Prof. Ricardo Martins
Site: https://ricardofm.com
Email: ricardo.martins@udesc.br
Ramal: 3481-7823
Sala: Bloco F – 2º piso (sala 8)

LINGUAGENS FORMAIS E AUTÔMATOS

LFA0001:
Ciência da Computação
3ª fase

AUTÔMATOS FINITOS NÃO-DETERMINÍSTICOS

- **Não-Determinismo**
  - generalização dos modelos de máquinas
  - de fundamental importância
    - teoria da computação
    - linguagens formais
  - nem sempre aumenta o poder computacional
    - de uma classe de autômatos
  - em particular
    - qq AF não-determinístico
    - pode ser simulado por um AFD

AUTÔMATOS FINITOS NÃO-DETERMINÍSTICOS

- **Ideia básica**
  - o processamento de uma entrada
    - * resulta em um conjunto de novos estados
- **Visto como uma máquina**
  - fita + unidade de controle + função programa
  - assume um conjunto de estados **alternativos**
    - * “multiplicação” da unidade de controle
    - * uma para cada **alternativa**
  - processamento de um caminho
    - * não influi nos demais caminhos alternativos
    - * estado, símbolo lido e posição da cabeça (caminhos “independentes”)

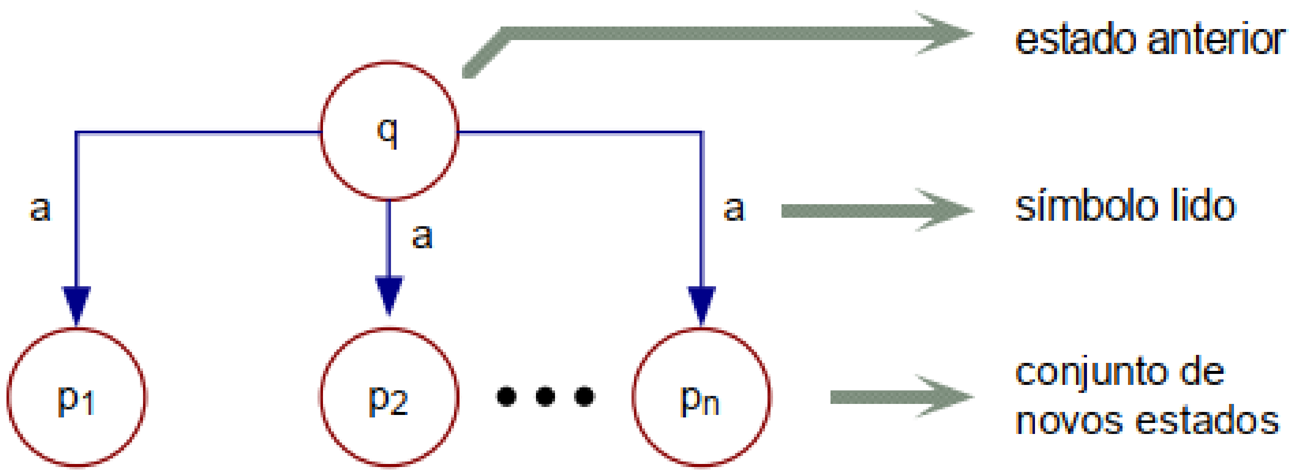
AUTÔMATOS FINITOS NÃO-DETERMINÍSTICOS

Definição

- Simplesmente... AFN
- 5-upla $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$
- Σ: alfabeto (símbolos de entrada)
- Q : conjunto de estados (finito)
- δ: função programa (ou função de transição)
  - $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$
  - função parcial
- q_0 : estado inicial do AFN, tal que $q_0 \in Q$
- F : conjunto de estados finais, tal que $F \subseteq Q$

AUTÔMATOS FINITOS NÃO-DETERMINÍSTICOS

- **Função programa**
  - Pode ser interpretada como um grafo finito direto



AUTÔMATOS FINITOS NÃO-DETERMINÍSTICOS

- **Processamento**
  - união dos resultados da função programa, aplicada a cada estado alternativo
  - definição formal do comportamento
    - é necessário estender a função programa
    - argumento: um conjunto finito de estados e uma palavra
- **Função Programa Estendida**
  - Seja $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ um AFN
  - $\underline{\delta}: 2^Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ é indutivamente definida
    - $\underline{\delta}(P, \varepsilon) = P$
    - $\underline{\delta}(P, aw) = \underline{\delta}(\cup_{q \in P} \delta(q, a), w)$
  - portanto: $\underline{\delta}(\{q_1, q_2,\ldots, q_n\}, a) = \delta(q_1, a) \cup \delta(q_2, a) \cup \ldots \cup \delta(q_n, a)$

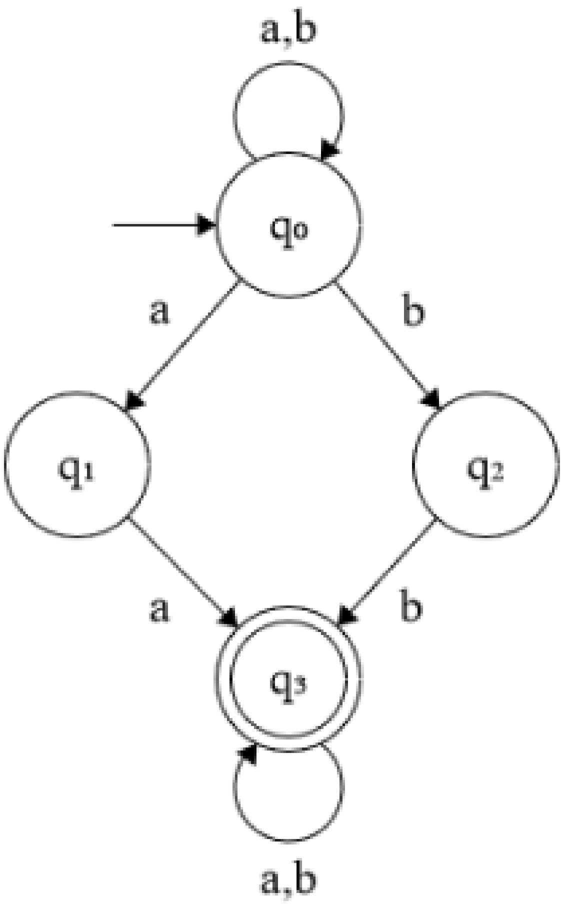
AUTÔMATOS FINITOS NÃO-DETERMINÍSTICOS

- **Linguagem Aceita / Rejeitada**
  - w ∈ ACEITA(M)
    - pelo menos UM caminho alternativo aceita w
  - w ∈ REJEITA(M)
    - todas as alternativas rejeitam w

AUTÔMATOS FINITOS NÃO-DETERMINÍSTICOS

- Exemplo: L_5 = {w | w possui aa ou bb como sub-palavra}
  - $M_5 = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \delta_5, q_0, \{q_3\})$

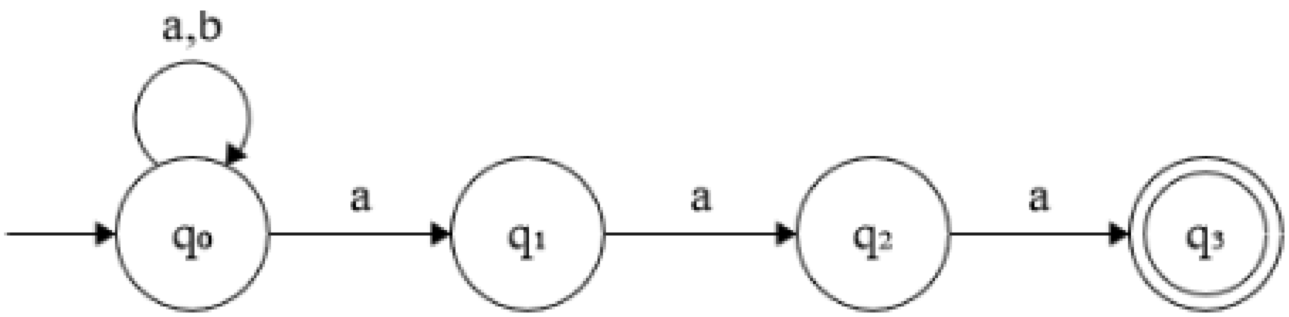
δ_5	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
q_1	$\{q_3\}$	-
q_2	-	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$



AUTÔMATOS FINITOS NÃO-DETERMINÍSTICOS

- Exemplo: L_6 = {w | w possui aaa como sufixo}
  - $M_6 = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \delta_6, q_0, \{q_3\})$

δ_6	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	-
q_2	$\{q_3\}$	-
q_3	-	-



AUTÔMATOS FINITOS NÃO-DETERMINÍSTICOS

- **Determinismo** x **Não-Determinismo**
  - não-determinismo
    - aparentemente, um significativo acréscimo ao poder computacional de um AF
    - na verdade, **não** aumenta o poder computacional
  - para cada AFN
    - é possível construir um AFD equivalente
    - que realiza o mesmo processamento
    - (o contrário também é verdadeiro)

AUTÔMATOS FINITOS NÃO-DETERMINÍSTICOS

- **Teorema: a classe dos AFD é equivalente à classe dos AFN**
  - uma linguagem é regular sse é aceita por um AFN
  - A capacidade de reconhecimento dos AFN é a mesma dos AFD
- **Prova**
  - mostrar que
    - a partir de um AFN M qualquer
    - é possível construir um AFD M'
    - que realiza o mesmo processamento
    - (ou seja, M' simula M)

AUTÔMATOS FINITOS NÃO-DETERMINÍSTICOS

- **Teorema: a classe dos AFD é equivalente à classe dos AFN**
  - uma linguagem é regular sse é aceita por um AFN
  - A capacidade de reconhecimento dos AFN é a mesma dos AFD
- **Prova**
  - AFN → AFD
    - estados de M' que simulam as diversas combinações de estados alternativos de M
    - demonstração de que M' simula M: **indução** no tamanho da palavra
  - AFD → AFN
    - decorre trivialmente das definições...

AUTÔMATOS FINITOS NÃO-DETERMINÍSTICOS

- **Prova** AFN $\rightarrow$ AFD
  - seja M = (Σ, Q, δ, q_0, F) um AFN qualquer...
  - AFD M' = (Σ, Q', δ', <q_0>, F')
  - Q'
    - todas as combinações de estados de Q
    - denotadas por <$q_1 q_2 ... q_n$>
    - a ordem dos elementos <u>não</u> identifica mais combinações... <$q_u q_v$> = <$q_v q_u$>
  - δ'
    - $\delta'(<q_1...q_n>, a) = <p_1...p_m>$ sse $\delta(\{q_1,...,q_n\}, a) = \{p_1,..., p_m\}$
  - <q_0>
    - estado inicial
  - F'
    - conjunto <$q_1 q_2 ... q_n$> $\in$ Q' tal que alguma componente $q_i \in F$

AUTÔMATOS FINITOS NÃO-DETERMINÍSTICOS

AFD M' simula AFN M?

- indução no tamanho da palavra
- deve-se mostrar que: $\delta'(<q_0>, w) = <q_1 \ldots q_u>$ sse $\delta(\{q_0\}, w) = \{q_1, \ldots, q_u\}$
- Base de indução: $| w | = 0$
  - $\delta'(<q_0>, \varepsilon) = <q_0>$ sse $\delta(\{q_0\}, \varepsilon) = \{q_0\}$
  - ✓ VERDADEIRO (por definição... função programa estendida)
- Hipótese de indução: $| w | = n, n \geq 1$
  - suponha que $\delta'(<q_0>, w) = <q_1 \ldots q_u>$ sse $\delta(\{q_0\}, w) = \{q_1, \ldots, q_u\}$
- Passo de indução: $| wa | = n + 1, n \geq 1$
  - $\delta'(<q_0>, wa) = <p_1 \ldots p_v>$ sse $\delta(\{q_0\}, wa) = \{p_1, \ldots, p_v\}$
  - ➢ o que equivale, pro hipótese de indução...

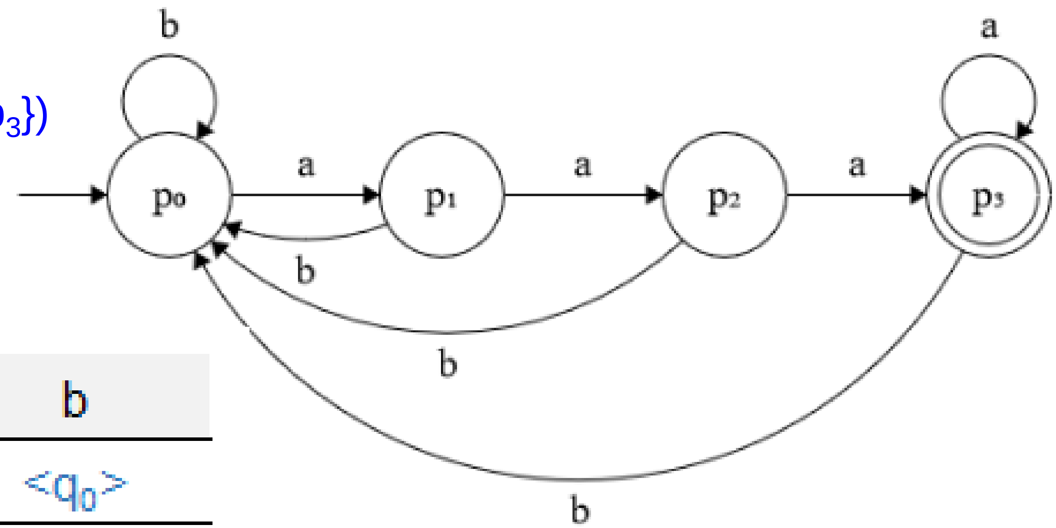
  $\delta'(<q_1 \ldots q_u>, a) = <p_1 \ldots p_v>$ sse $\delta(\{q_1, \ldots, q_u\}, a) = \{p_1, \ldots, p_v\}$

✓ **Logo, M' simula M para qq w**

AUTÔMATOS FINITOS NÃO-DETERMINÍSTICOS

- Exemplo: $M_6 = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \delta_6, q_0, \{q_3\})$
  - exemplo anterior (AFN)
  - $M_6' = (\{a, b\}, \{p_0, p_1, p_2, p_3\}, \delta_6', p_0, \{p_3\})$

AFD



	δ_6'	a	b
p_0	$<q_0>$	$<q_0q_1>$	$<q_0>$
p_1	$<q_0q_1>$	$<q_0q_1q_2>$	$<q_0>$
p_2	$<q_0q_1q_2>$	$<q_0q_1q_2q_3>$	$<q_0>$
p_3	$<q_0q_1q_2q_3>$	$<q_0q_1q_2q_3>$	$<q_0>$

AFN