Álgebra Linear (ALI0001 – CCI-192-02U)

Operadores no Espaço:
Projeção e Reflexão em torno de planos

Professor: Marnei Mandler

Aula de ALI do dia 14 de junho de 2023.

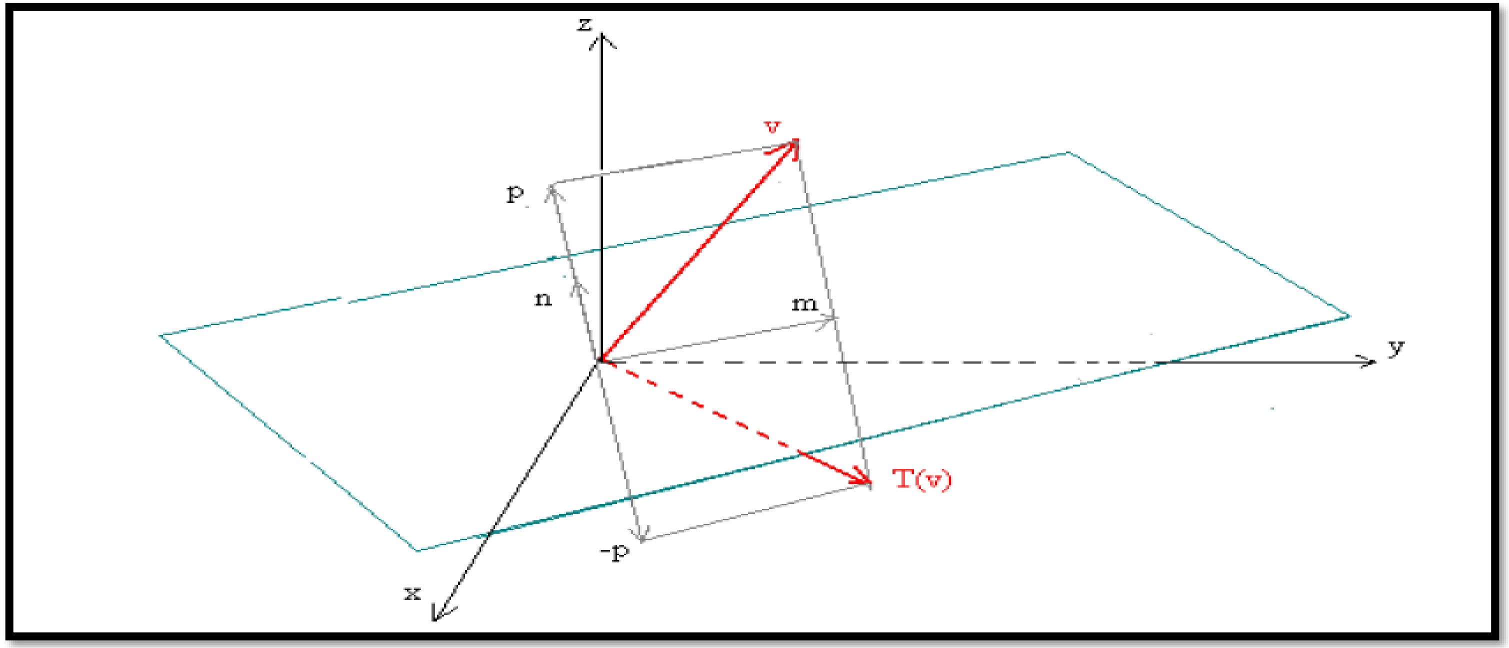
UDESC

Operadores Projeção e Reflexão em torno de um Plano

Operador Projeção em torno de um Plano que passa pela origem: É o operador linear $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$P(v) = v - p$$

em que $p \in \mathbb{R}^3$ é a projeção de v sobre o normal ao plano.



Operador Reflexão em torno de um Plano que passa pela origem: É o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(v) = v - 2p$$

em que $p \in \mathbb{R}^3$ é a projeção de v sobre o normal ao plano.

Se n é o vetor normal do plano, temos que p agora é a projeção de v sobre n:

$$p = proj_n(v) = \frac{n \cdot v}{n \cdot n} n.$$

Além disso, se $P(v) = m$ é a projeção de v sobre o plano, então

$$p + m = v,$$

e a projeção sobre o plano é:

$$P(v) = m = v - p.$$

Além disso, se $T(v)$ é a reflexão sobre o plano, temos:

$$-p + m = T(v).$$

Logo, substituindo m:

$$T(v) = -p + (v - p).$$

Então:

$$T(v) = v - 2p.$$

Exemplo

Exercício 1: Determine a lei do operador linear no espaço que realiza a projeção sobre o plano $-3x + 5y - 2z = 0$.

Esse operador é invertível? Se sim, qual é o seu inverso?

Quem é o núcleo e o conjunto imagem desse operador?

Solução: O exercício foi resolvido durante a aula.

Exercício 2: Determine a lei do operador linear no espaço que realiza a reflexão em torno do plano $-3x + 5y - 2z = 0$.

Esse operador é invertível? Se sim, qual é o seu inverso?

Solução: O exercício foi resolvido durante a aula.

Exercício 3: Determine a lei do operador linear no espaço que realiza a reflexão em torno do plano yz. Esse operador é invertível? Se sim, qual é o operador inverso?

Solução: O exercício foi resolvido durante a aula, e obtivemos a lei $T(x, y, z) = (-x, y, z)$.

Note que, para o operador reflexão em torno do plano xy, vale que:

$$T(0,1,1) = (0,1,1) = 1(0,1,1)$$
$$T(1,0,0) = (-1,0,0) = -1(1,0,0).$$

Note que as imagens desses vetores é um múltiplo do próprio vetor! Com isso, diremos que eles são autovetores do operador T.

Exemplo Resolvido

Exemplo 1: Determine a lei do operador linear no espaço que realiza a projeção em torno do plano $x + 2y - 3z = 0$. Esse operador é invertível? Se sim, qual é o seu inverso?

Solução: Inicialmente precisamos obter o vetor normal do plano $x + 2y - 3z = 0$. De acordo com GAN, tal normal é dado por $n = (1, 2, -3)$. Tomando $v = (x, y, z)$, obtemos que

$$p = proj_n(v) = \frac{n \cdot v}{n \cdot n} n = \frac{(1,2,-3)\cdot(x,y,z)}{(1,2,-3)\cdot(1,2,-3)}(1,2,-3)$$

$$= \frac{x + 2y - 3z}{1 + 4 + 9}(1,2,-3) = \frac{1}{14}(x + 2y - 3z, 2x + 4y - 6z, -3x - 6y + 9z).$$

Com isso, a lei do operador projeção em torno do plano $x + 2y - 3z = 0$ é dada por

$$P(x, y, z) = P(v) = v - p$$

$$= (x, y, z) - \frac{1}{14}(x + 2y - 3z, 2x + 4y - 6z, -3x - 6y + 9z).$$

$$= \frac{14}{14}(x, y, z) - \frac{1}{14}(x + 2y - 3z, 2x + 4y - 6z, -3x - 6y + 9z).$$

Exemplo Resolvido

Ou seja,

$$P(x,y,z) = \frac{14}{14}(x,y,z) - \frac{1}{14}(x+2y-3z, 2x+4y-6z, -3x-6y+9z)$$

$$= \left(\frac{14x - x - 2y + 3z}{14}, \frac{14y - 2x - 4y + 6z}{14}, \frac{14z + 3x + 6y - 9z}{14}\right)$$

$$= \left(\frac{13x - 2y + 3z}{14}, \frac{-2x + 10y + 6z}{14}, \frac{3x + 6y + 5z}{14}\right).$$

Com isso, sua matriz canônica é dada por

$$[P] = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 13 & -2 & 3 \\ -2 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Note que a matriz acima é simétrica (P é autoadjunto) e que

$$\det(P) = \left(\frac{1}{14}\right)^3 . \big(650 - 36 - 36 - (90 + 20 + 468)\big) = 0.$$

Assim, T *não* é invertível. Ainda $n = (1,2,-3) \in N(P)$ e $Im(P)$ é o plano $x + 2y - 3z = 0.$

Exemplo Resolvido

Exemplo 2: Determine a lei do operador linear no espaço que realiza a reflexão em torno do plano $2x - 3y + 4z = 0$. Esse operador é invertível? Se sim, qual é o seu inverso?

Solução: Inicialmente precisamos obter o vetor normal do plano $2x - 3y + 4z = 0$.
De acordo com GAN, tal normal é dado por $n = (2, -3, 4)$.
Tomando $v = (x, y, z)$, obtemos que

$$p = proj_n(v) = \frac{n \cdot v}{n \cdot n} n = \frac{(2,-3,4) \cdot (x,y,z)}{(2,-3,4) \cdot (2,-3,4)} (2,-3,4)$$

$$= \frac{2x - 3y + 4z}{4 + 9 + 16}(2,-3,4) = \frac{1}{29}(4x - 6y + 8z, -6x + 9y - 12z, 8x - 12y + 16z).$$

Com isso, a lei do operador reflexão em torno do plano $2x - 3y + 4z = 0$ é dada por

$$T(x,y,z) = T(v) = v - 2p$$

$$= (x,y,z) - \frac{2}{29}(4x - 6y + 8z, -6x + 9y - 12z, 8x - 12y + 16z)$$

$$= \frac{29}{29}(x,y,z) - \frac{1}{29}(8x - 12y + 16z, -12x + 18y - 24z, 16x - 24y + 32z).$$

Exemplo Resolvido

Ou seja,

$$T(x,y,z) = \frac{29}{29}(x,y,z) - \frac{1}{29}(8x - 12y + 16z, -12x + 18y - 24z, 16x - 24y + 32z)$$

$$= \left(\frac{29x - 8x + 12y - 16z}{29}, \frac{29y + 12x - 18y + 24z}{29}, \frac{29z - 16x + 24y - 32z}{29}\right)$$

$$= \left(\frac{21x + 12y - 16z}{29}, \frac{12x + 11y + 24z}{29}, \frac{-16x + 24y - 3z}{29}\right).$$

Com isso, sua matriz canônica é dada por

$$[T] = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 21 & 12 & -16 \\ 12 & 11 & 24 \\ -16 & 24 & -3 \end{bmatrix}$$

Note que a matriz acima é simétrica (T é autoadjunto) e que

$$\det([T]) = \left(\frac{1}{29}\right)^3 .(-24389) = -1 \neq 0.$$

Portanto, T é um operador invertível (bijetor).

Exemplo Resolvido

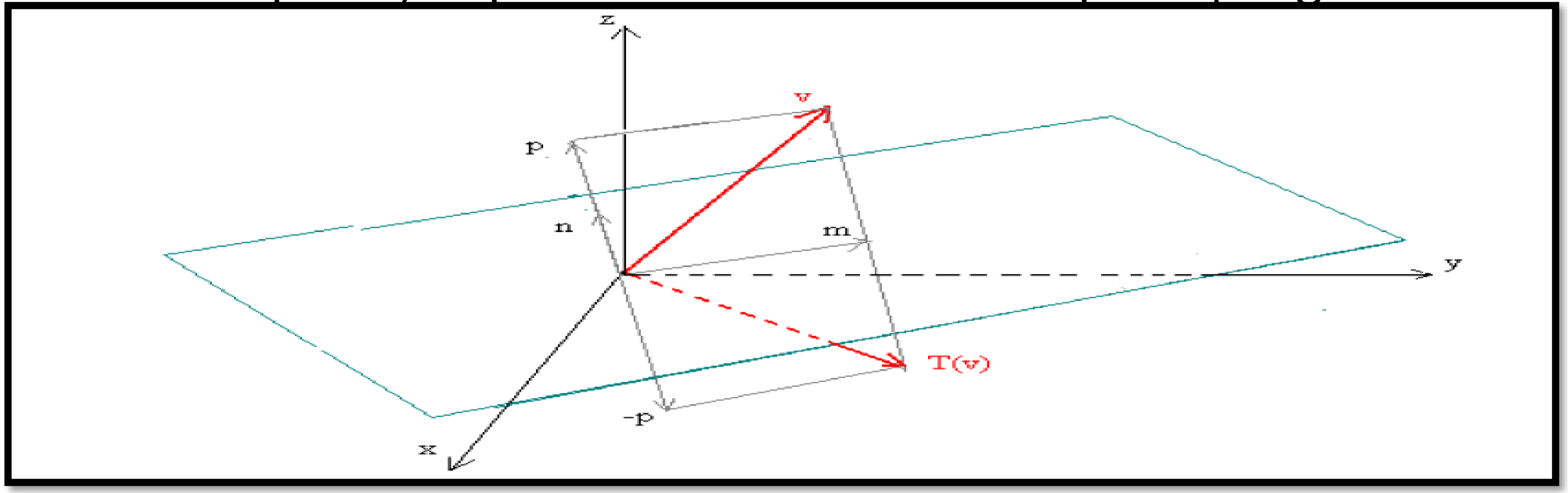
Além disso, temos que

$$[T].[T] = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 21 & 12 & -16 \\ 12 & 11 & 24 \\ -16 & 24 & -3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 21 & 12 & -16 \\ 12 & 11 & 24 \\ -16 & 24 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{29^2}\begin{bmatrix} 841 & 0 & 0 \\ 0 & 841 & 0 \\ 0 & 0 & 841 \end{bmatrix} = I.$$

Com isso, $[T]^{-1} = [T]$ e assim $T^{-1} = T$ e T é ortogonal. Além disso

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 21 & 12 & -16 \\ 12 & 11 & 24 \\ -16 & 24 & -3 \end{bmatrix} = [T].$$

Dessa forma, vemos que a inversa da reflexão em torno de um plano é a própria reflexão em torno desse mesmo plano, o que está de acordo a interpretação geométrica.



Exemplo

Exemplo 4: Determine a lei do operador linear no espaço que realiza a reflexão em torno do plano xz Esse operador é invertível? Se sim, qual é o operador inverso?

Solução: O vetor normal ao plano xz é dado por $n = (0,1,0)$.
Tomando $v = (x,y,z)$, obtemos que

$$p = proj_n(v) = \frac{n \cdot v}{n \cdot n} n = \frac{(0,1,0)\cdot(x,y,z)}{(0,1,0)\cdot(0,1,0)}(0,1,0) = \frac{y}{1}(0,1,0) = (0,y,0).$$

Com isso, a lei do operador reflexão em torno do plano xz é dada por

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T(v) = v - 2p \\ &= (x,y,z) - 2(0,y,0) = (x, y-2y, z) = (x,-y,z). \end{aligned}$$

Com isso, sua matriz canônica é dada por $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Como $\det[T] = -1 \neq 0$, T é invertível (e bijetora!). Ainda,

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [T] = [T]^t \qquad \text{e } T^{-1} = T^t = T.$$

Por isso, T é um operador ortogonal. Veja que os vetores colunas são ortonormais (ortogonais e unitários!).