TEG

Gilmário B. Santos

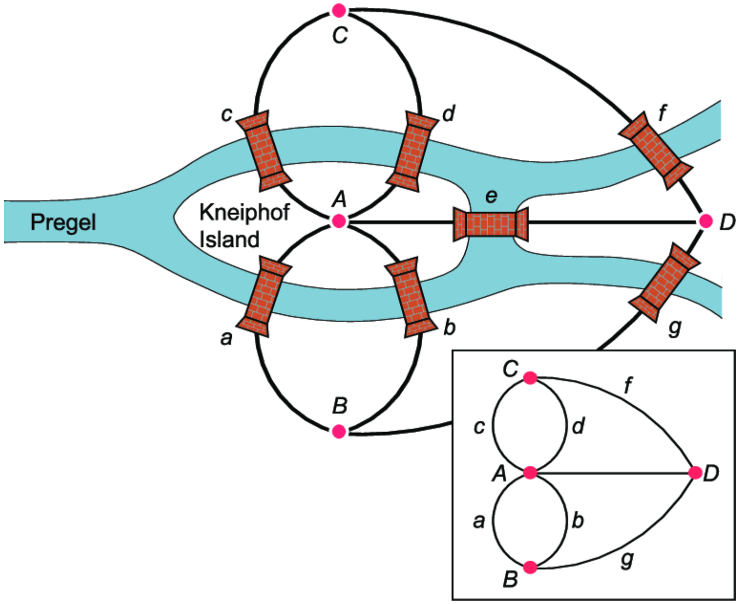
gilmario.santos@udesc.br

http://www.joinville.udesc.br/portal/pagina/gilmario

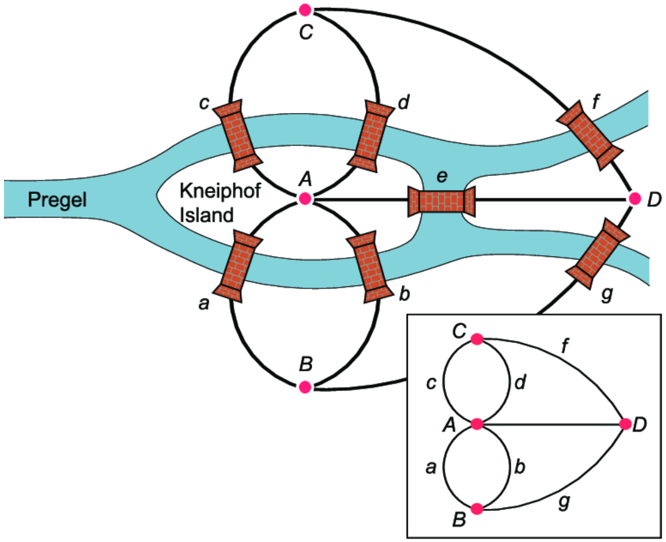
Onde você já viu um grafo?

Um pouco da história oficial:
Um dos primeiros registros históricos da utilização de grafos surgiu do problema das Pontes de Königsberg. A cidade de Königsberg é a antiga capital da Prússia Oriental, conhecida atualmente pelo nome de Kaliningrado.

A cidade é dividida em 4 zonas criadas pelo percurso do rio Pregel, no séc. XVII essas zonas estavam ligadas por sete pontes conforme a figura.



Um pouco da história oficial:



Por muito tempo os habitantes da cidade questionavam se era possível cruzar as sete pontes numa caminhada contínua sem passar duas vezes por qualquer uma delas!

Em 1736, o matemático Leonhard Euler demonstrou que não existe tal trajeto, ele utilizou um modelo em grafos para uma generalização deste problema. Através desse modelo ele verificou as condições necessárias e suficientes para o trajeto desejado, ele só ocorreria quando e somente quando em cada região concorresse um número par de pontes.

Na verdade o problema consiste na determinação de um caminho Euleriano, ou seja, um trajeto que usa cada ponte exatamente uma vez...

Formalmente:

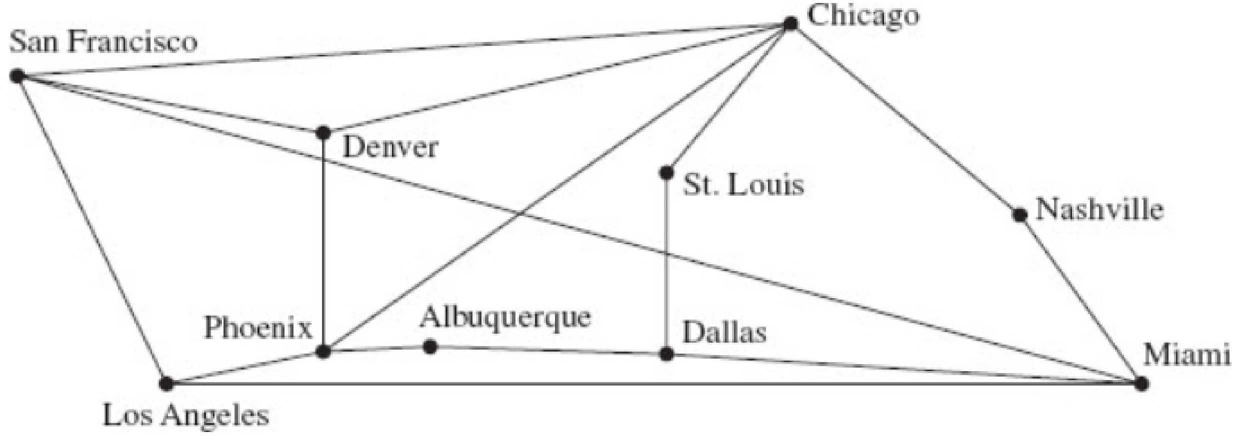
Um grafo representam relações entre objetos.

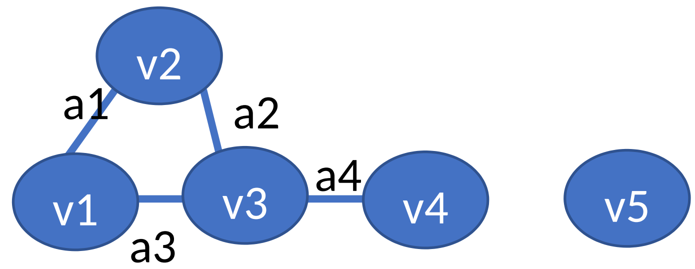
Grafo: um conjunto finito e não vazio ‘N’ de nós/vértices e uma família finita ‘A’ de arcos/arestas constituída de pares não ordenados de elementos de ‘N’, ou seja, cada arco/aresta conecta dois nós/vértices.

Um grafo ‘G’ é representado por uma tripla ordenada (N, A, g) [Gersting, 2004], onde:

N = um conjunto não vazio de nós (vértices)
A = um conjunto de arcos (arestas), que correspondem a pares não ordenados.
g = uma função que associa a cada arco um par não ordenado x-y de nós, chamados de extremidades de a.
|N| = numero de vértices
|A| = número de arestas

Você pode interpretar um mapa rodoviário como um grafo: os vértices são cidades e os arcos são estradas, portanto a relação de adjacência entre vértices desse grafo é determinada pela acessibilidade pela via rodoviária.





N={v1,v2,v3,v4,v5}
A={a1,a2,a3,a4}

Onde: a1=(v1,v2), a2=(v2,v3), a3=(v1,v3) , a4=(v3,v4)

Ou seja, g(a1) estabelece a aresta entre v1 e v2 e assim sucessivamente...

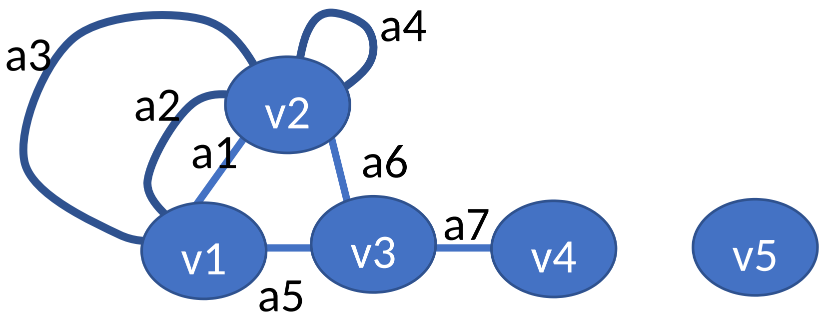
Se *v1* e *v2* são vértices nas extremidades de uma mesma aresta, dizemos então que eles são vizinhos ou adjacentes. O mesmo ocorre para *v2* e *v3; v1* e *v3; v3* e *v4*

v5 é um vértice isolado;

A ordem de um grafo G é o número de vértices de G.

Utilizando n = |N| e m = |A|. O tamanho de um grafo G é soma n + m.

Um grafo trivial é aquele com um único vértice (n = 1).



N={v1,v2,v3,v4,v5}
A={a1,a2,a3,a4,a5,a6}
Onde: a1=(v1,v2), a2=(v1,v2), a3=(v2,v1), a4=(v2,v2) , a5=(1,3), a6=(2,3), a7=(3,4)
Ou seja, g(a1) estabelece a aresta entre v1 e v2 e assim sucessivamente...

Note que:
a4 é um laço;

a1, a2 e a3 são uma repetição da mesma aresta entre vértice 1 e vértice 2. Nesse caso se diz que são arestas múltiplas.

v5 é um vértice isolado,

Outro exemplo:

V = { V1,V2,V3,V4,V5} E = {e1,e2,e3,e4,e5}

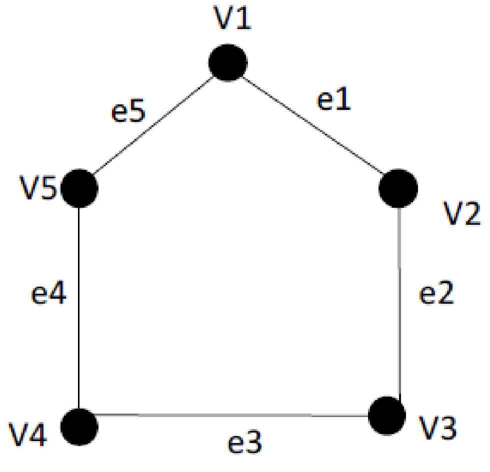
E1 → {V1,V2}

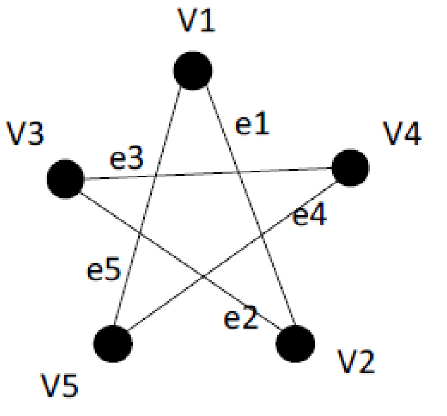
E2 → {V2,V3}

E3 → {V3,V4}

E4 → {V4,V5}

E5 → {V5,V1}





Os grafos acima apresentam as mesmas relações entre vértices

Digrafo:

Se os arcos de um grafo começam em um nó e terminam em outro, então temos um grafo *direcionado* ou Digrafo [Gersting, 2004]. O digrafo também é uma tripla ordenada (N, A, g), onde:

N = um conjunto não vazio de nós (vértices)

A = um conjunto de arcos (arestas), que correspondem a pares não ordenados.

|N| = numero de vértices e |A| = número de arestas

Porém:

g = uma função que associa a cada arco um par ordenado x-y de nós, em que *x* é o **ponto inicial (extremidade inicial)** e *y* é o **ponto final (extremidade final)** de *a*.

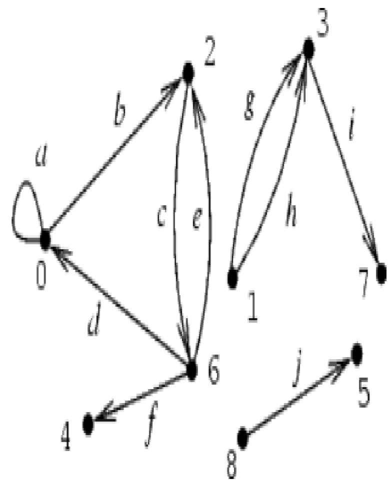
Nesse caso, a família de arestas é ordenada: a aresta (Vi,Vj) é diferente da aresta (Vj,Vi).

Boa parte da nomenclatura e dos conceitos é análoga entre grafos e digrafos.

Digrafo:

EXEMPLO 1: Digamos que os vértices de nosso grafo são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e os arcos são *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *j*. Então a seguinte tabela define um grafo:

ponta inicial	0	0	2	6	6	6	1	1	3	8
arco	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
ponta final	0	2	6	0	2	4	3	3	7	5



Se um arco a tem ponta inicial v e ponta final w, dizemos que a vai de v a w. Dizemos também que a sai de v e entra em w.

Um arco com ponta inicial v e ponta final w será denotado por (v,w) ou por v—w ou ainda por vw.

https://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_em_grafos/aulas/grafos.html

Destacamos:

- Além da notação G=(N,A,g), também é usual encontrar na literatura a notação G=(N,A), sem a notação da função g;

- Grafos com arestas múltiplas (paralelas) também são chamados de multigrafos. Multigrafos também podem possuir laços!

- Em geral trataremos grafos não direcionados, sem arestas múltiplas ou laços;

  - Há autores que enfatizam esse aspecto da definição dizendo que o grafo é “simples”;

  - Iremos manter a nomenclatura “grafo” para fazer referência a grafos simples.

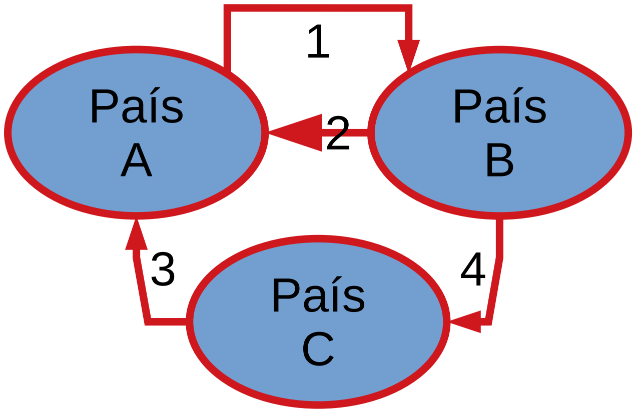
Digrafo versus grafo simples:

É possível a conversão entre um grafo simples e um direcionado, mas é preciso tomar certos cuidados e é tema que não discutiremos muito.

É preciso levar em conta a semântica das relações modeladas! Por exemplo, considere três países com relações comerciais de diversos produtos.

O grafo abaixo representa as relações comercias e o exemplo de um digrafo no qual a aresta x indica exportação entre o nó origem da aresta e o nó final da aresta.

Abaixo temos: A e B têm relações comerciais bilaterais (A exporta para B e B para A). Porém C exporta para A e B exporta para C, não há vendas de bananas de A para C, nem de C para B.



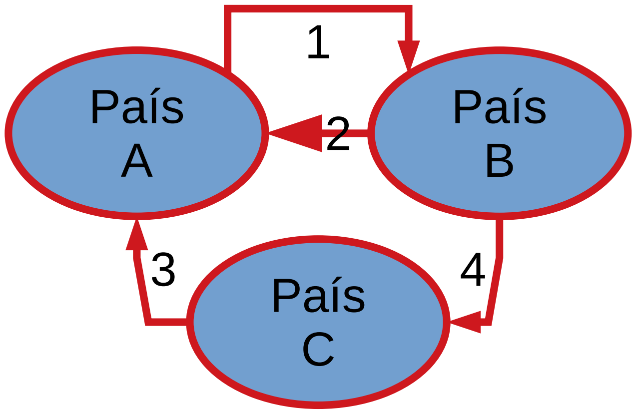
Digrafo versus grafo simples:

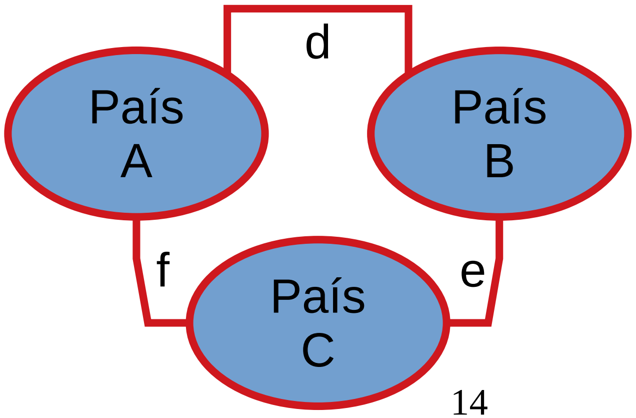
É preciso levar em conta a semântica das relações modeladas!

Abaixo à esquerda temos: A e B têm relações comerciais bilaterais (A exporta para B e B para A). Porém, entre a relação é unilateral entre A e C e entre B e C, não há exportações de A para C, nem de C para B.

A conversão para um grafo não direcionado, como o da direita, representaria uma perda na semântica das relações modeladas pelo digrafo (esquerda).

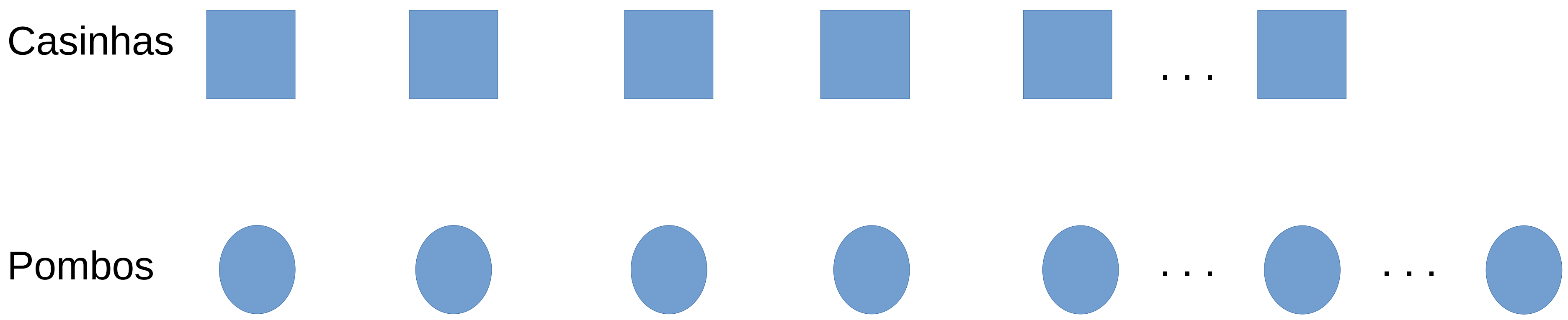
As arestas do grafo simples não apresentam ordenação das extremidades (vértices), assim, o grafo da direta acaba indicando relações comerciais bilaterias entre A, B e C, o que não é real!





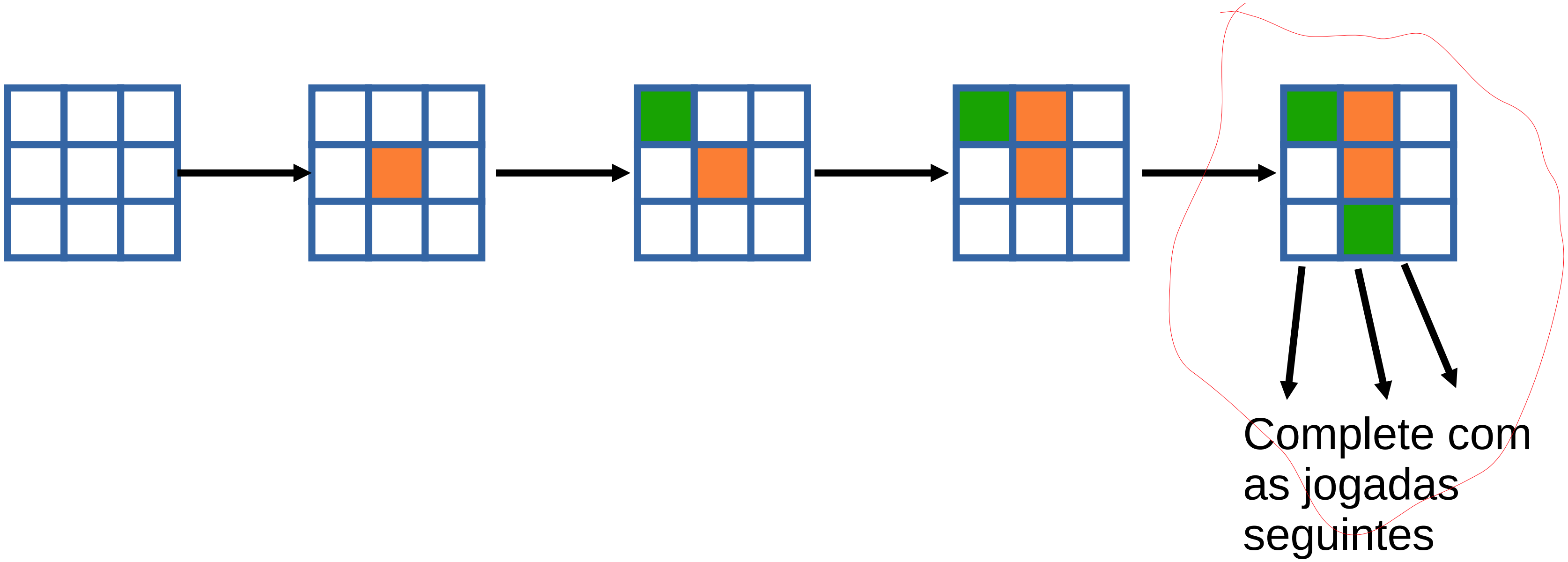
Suponha a existência de *m* casinhas e *n* pombos, sendo n > m. Em caso de chuva, cada pombo procura uma casinha.

Nesse caso, demonstre via grafos que pelo menos uma casa irá conter mais de um pombo.



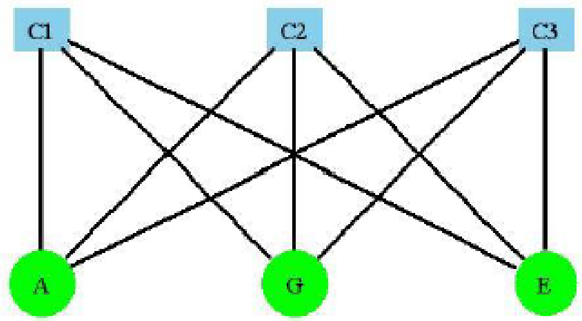
Solução: grafo bipartido, se n>m, n pombos ocuparão casas individuais e e pelo menos 1 pombo (se n=m+1) irá para uma casinha já ocupada

Complemente o grafo abaixo para as jogadas seguintes ao estado representado pelo nó em destaque:



Exemplo_3: Considere 3 casas (C1, C2 e C3), cada uma com três utilidades: água (A), gás (G) e eletricidade (E). As utilidades estão conectadas às residências por meio de fios elétricos e tubos de PVC.

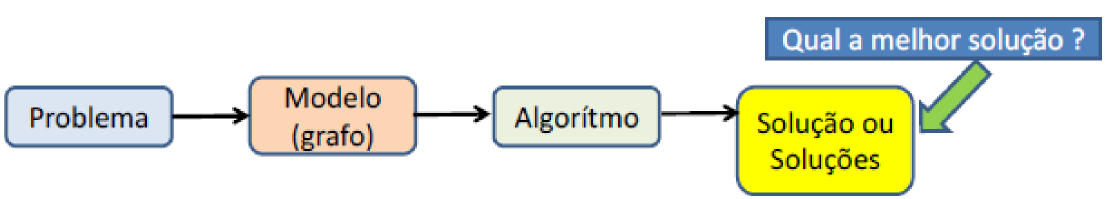
Considerando que todos os fios e canos estão no mesmo plano, é possível fazer as instalações sem cruzá-los ?



$K_{3,3}$ não é planar!

Dado um problema qualquer, é possível expressar o problema na forma de um grafo (ou modelo), e a partir do grafo criado pode-se construir um algoritmo a fim de alcançar a solução do problema.

Muitos problemas podem ser resolvidos com o mesmo algoritmo



Exercícios:

1. Discuta qual seria o melhor estilo de grafo para modelar a situação abaixo, seria um digrafo, multigrafo, multigrafo com com laço(s) ou grafo simples?

Faça um desenho que esquematize a predação entre cavalo, urso, koala, coelho, mosquito, cenoura, palmeira, eucalipto, alga. Na predação, indivíduos de uma espécie (predadores) matam e se alimentam de indivíduos de outra espécie (presa).

Considerando que a sua escolha foi o digrafo, discuta sobre uma possível conversão desse digrafo para um grafo simples.

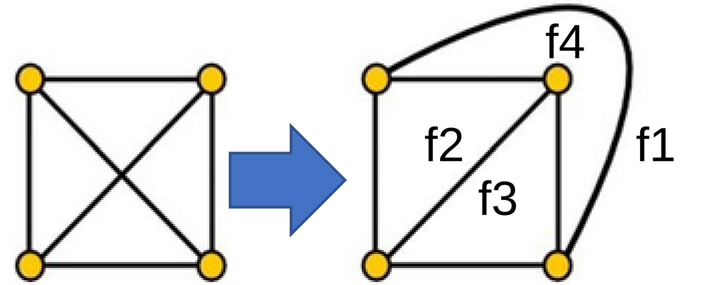
OBS: Predação é uma interação na qual um organismo, o predador, come parte ou todo o corpo de um outro organismo, a presa. Herbivoria é uma forma de predação na qual a presa é uma planta. Populações de predadores e presas influenciam mutuamente a dinâmica umas das outras [LINK].

https://pt.wikipedia.org/wiki/Isomorfismo_de_grafos

Exercícios:

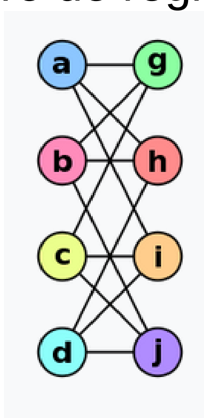
3. Abaixo, G1 pode ser redesenhado sem a ocorrência de cruzamento de linhas: G1 é planar.
Qualquer representação planar de um certo grafo dividirá o plano no mesmo número *R* de regiões (número de Euler): $R = |E| - |V| + 2$.
No caso abaixo $R=6-4+2=4$

G1

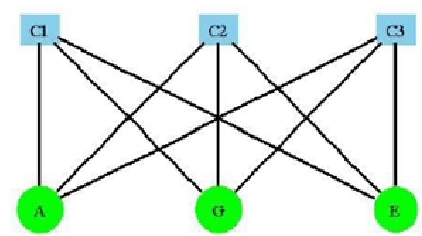


Tente redesenhar os grafos G2 e G3, sem cruzar linhas.
Calcule o número de regiões para cada grafo planar obtido.

G2



G3



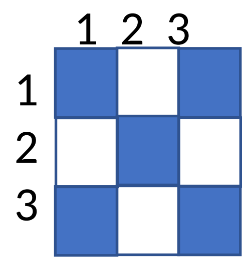
https://pt.wikipedia.org/wiki/Isomorfismo_de_grafos

Exercícios:

4. Considerando que os vértices são as casas de um *tabuleiro de xadrez,* há um arco de x para y se um cavalo do jogo pode ir de x a y em um só movimento.

- Faça uma figura do grafo que representa os movimentos de um cavalo sobre um tabuleiro de xadrez 3-por-3.

  É possível visitar todas as posições do tabuleiro?



- Faça uma figura do grafo que representa os movimentos de um cavalo sobre um tabuleiro de xadrez 4-por-4.
  - É possível visitar todas as posições do tabuleiro?

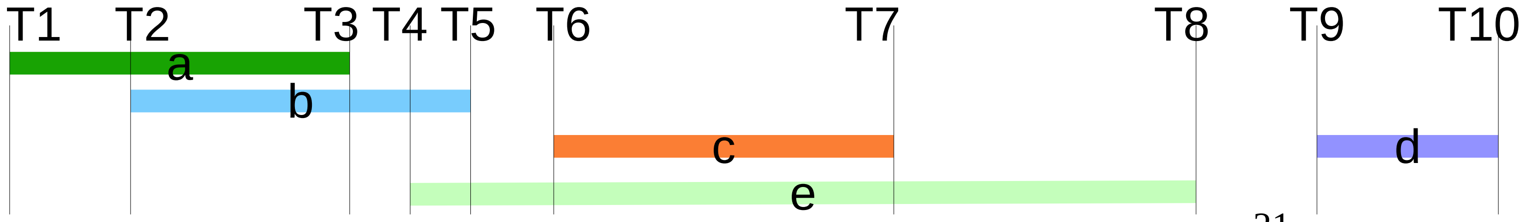
- Discuta possíveis versões desses grafo na forma de multigrafo e digrafo?

Exercícios:

5. Faça um desenho do seguinte grafo de 10 vértices: cada vértice é um conjunto com exatamente dois dos números 1, 2, 3, 4, 5. Há um arco de um conjunto a outro se eles são disjuntos.

6. Discuta a implementação de um algoritmo para tratar o seguinte problema. Considere o grafo cujos vértices são todas as palavras de 6 letras em português. Há um arco de uma palavra a outra se e só se as duas palavras diferem em exatamente uma posição. É possível sair de girafa e chegar em cavalo andando pelo arcos do grafo?

7. Abaixo, cada linha colorida representa um evento ocorrendo em um programa de palestras nos intervalos de tempo exibidos (exemplo: *a* ocorre entre *T1* e *T3*). Construa um grafo para representar os eventos que não apresentam choque de horários.

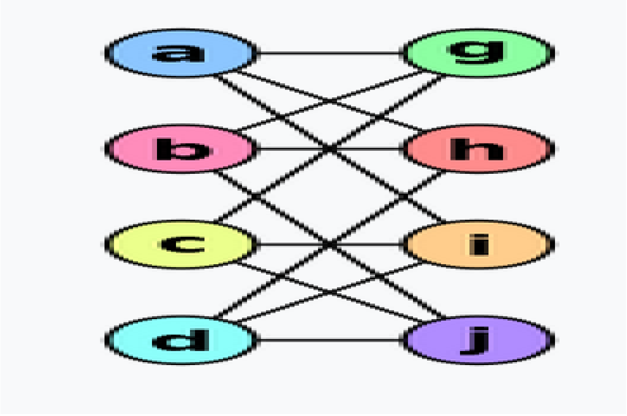


Grau

Define-se grau de um vértice v $\in$ N , denotado por grau(v), como sendo o número de vértices adjacentes a v.

Se for o caso, o laço conta duas vezes no cômputo do grau de um vértice.

Um grafo é regular de grau r, quando todos os seus vértices possuírem o mesmo grau r. Por exemplo, o grafo da figura abaixo é regular de grau 3 [Szwarcfiter, Jaime].



Grau

- A literatura costuma representar o menor grau de um grafo com o delta minúsculo $\delta(G)$

- Bem como o maior grau de um grafo com o delta maiúsculo

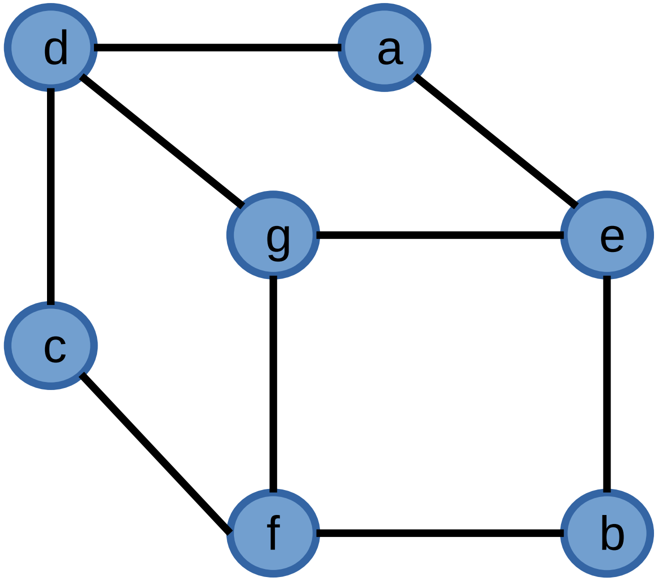
$$\Delta(G)$$

- Para um grafo regular $\delta(G) = \Delta(G)$

Grau

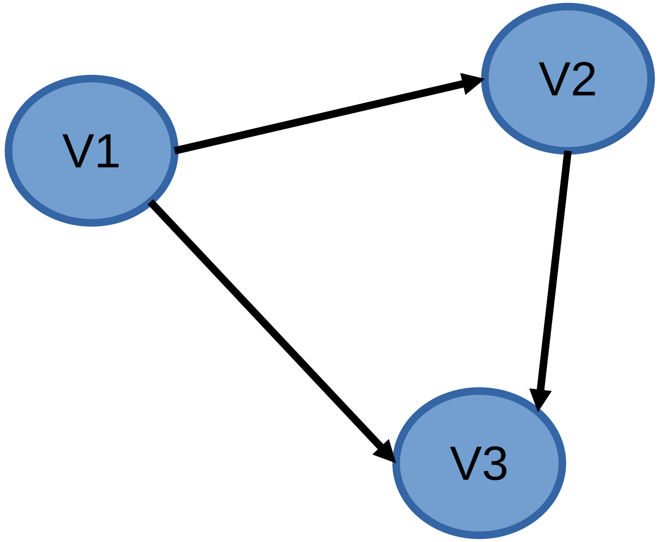
- Dado um grafo G(V,E), V = {v1,v2, ... ,vn}, a sequência ordenada dos graus de G é chamada sequência gráfica.

  Abaixo, a sequência de graus do grafo G é (2, 2, 2, 3, 3, 3, 3). Temos que $\delta(G) = 2$ e $\Delta(G) = 3$.



Grau

- Observação: para grafos direcionados há os conceitos grau de saída e o grau de entrada no vértice.



	Grau de saída	Grau de entrada
v1	2	0
v2	1	1
v3	0	2

Primeiros teoremas

>A soma dos graus do grafo é o dobro do número de arestas (quantidade par):

- Em cada vértice v_i incide um total de arestas equivalente ao grau(v_i) e
- Cada aresta a_j incide em 2 vértices.

Portanto, cada aresta contribui com exatamente duas unidades na soma dos graus de um grafo, ou seja, o somatório dos graus dos vértices em um grafo G(V,E) é igual ao dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V} grau(v) = 2|E|$$

Primeiros teoremas

> Alguns autores costumam se referir a este resultado como o “Teorema do Aperto de mãos”

$$\sum_{v \in V} grau(v) = 2|E|$$

Primeiros teoremas

> > O número total de vértices com grau ímpar é sempre par

- Seja G(V,E) um grafo e $V=V_1 \cup V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, tal que V_1 contém os vértices de graus pares e V_2 contém os vértices de graus ímpares.
- Sabe-se que (i)

$$\sum_{v\in V} grau(v) = 2|E|$$

$$\Rightarrow \sum_{v\in V_1} grau(v) + \sum_{v\in V_2} grau(v) = 2|E| \text{ é uma quantidade par}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{v\in V_1} grau(v)}_{A} + \underbrace{\sum_{v\in V_2} grau(v)}_{B} \text{ é uma quantidade par}$$

Primeiros teoremas

(ii)

$$\underbrace{\sum_{v \in V_1} grau(v)}_{A} + \underbrace{\sum_{v \in V_2} grau(v)}_{B} \text{ é uma quantidade par}$$

Por definição do problema, V_1 contém os vértices de graus pares, portanto, a parcela *A* em *ii* será sempre par, independente de $|V_1|$.

Dessa forma, para *A+B* ser par, a parcela *B* também tem que ser par.

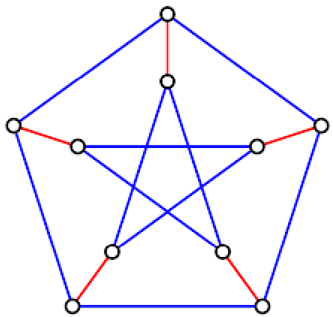
$$B = \underbrace{\sum_{v \in V_2} grau(v)}_{par}$$

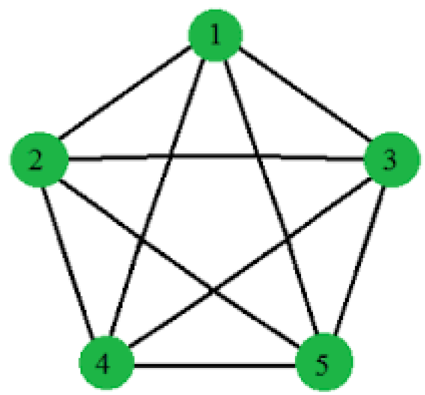
Por definição do problema, V_2 contém os vértices de graus ímpares. Portanto, para *B* ser par é preciso que a quantidade de vértices em V2 seja par (a soma de uma quantidade par de números ímpares resulta em valor par).

Então: **O número total de vértices com graus ímpares é sempre par**

Grafo Regular

- Um grafo é regular quando todos os seus vértices têm o mesmo grau ou seja o mesmo número de adjacências. Exemplos:





4 Regular

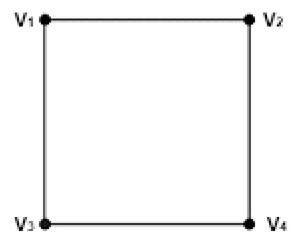


Fig:2-Regular Graph

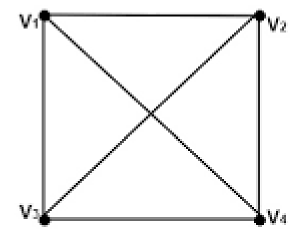
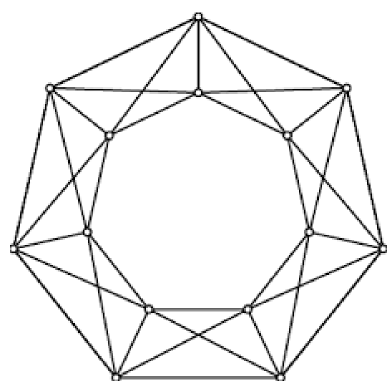
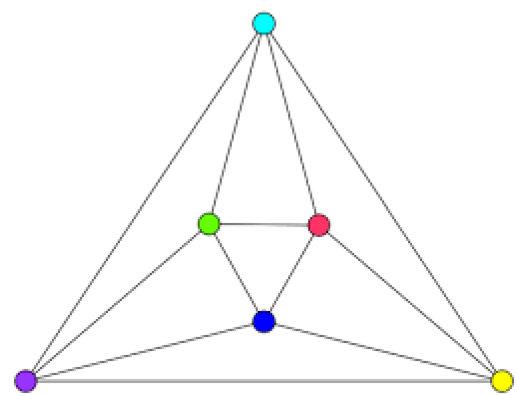


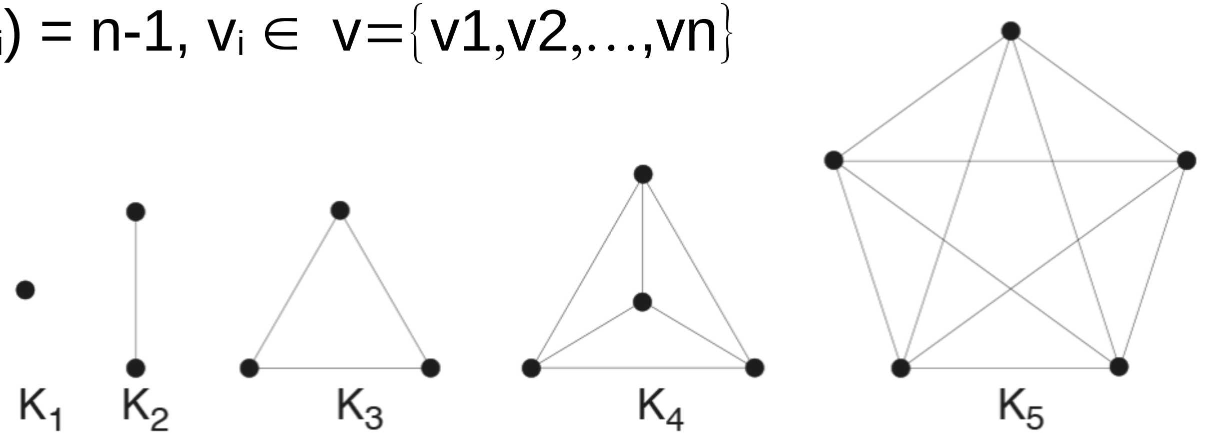
Fig:Regular Graph





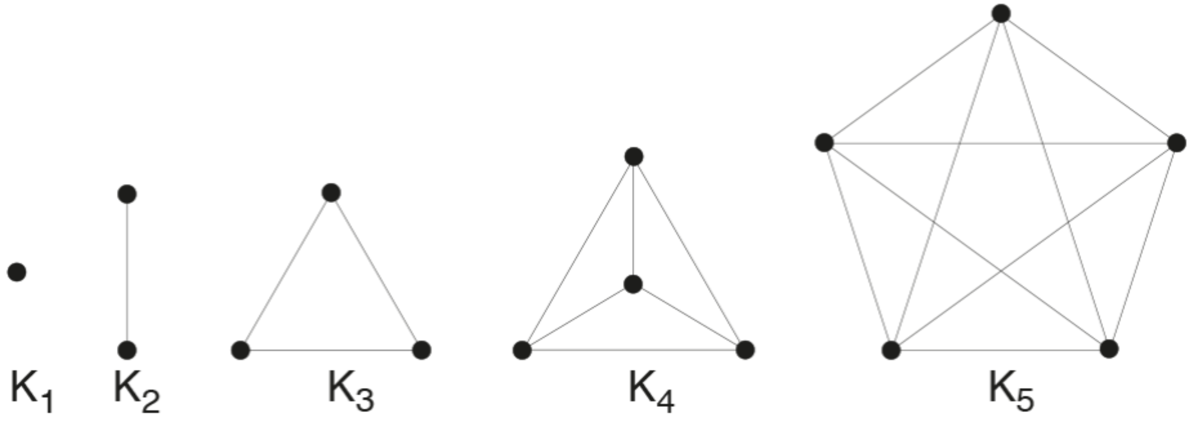
Grafo completo

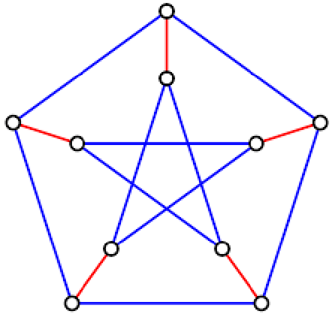
- Um grafo é completo quando existe uma aresta entre cada par de seus vértices;
- O grafo completo não é orientado, nem possui arestas múltiplas ou laços;
- Utiliza-se a notação K_n para designar um grafo completo com *n* vértices;
  - $grau(v_i) = n-1,\ v_i \in\ v=\{v1,v2,\ldots,vn\}$



Grafo completo

- Atenção: todo grafo completo é regular, mas nem todo grafo regular é completo





Ex: Petersen é regular mas não é completo

Algumas propriedades do Kn

O grafo completo K_n apresenta o maior número de arestas (A) para um grafo de n vértices.

– A quantidade de arestas de K_n corresponde à combinação de n vértices dois a dois, ou seja:

$$|A| = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

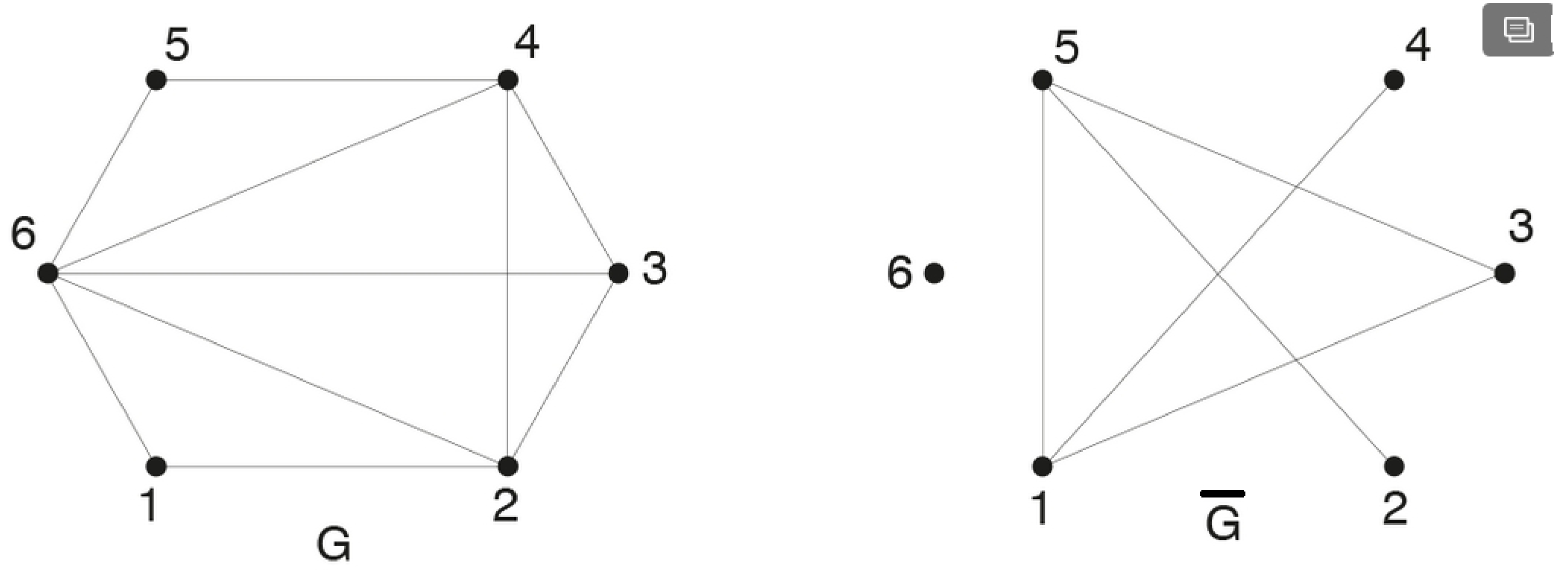
– Ou, se você preferir, pode aplicar o teorema do "aperto de mãos" e determinar |A| de um grafo completo K_n:

$$\sum_{v \in V} grau(v) = 2|A| \Rightarrow n(n-1) = 2|A|$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = |A|$$

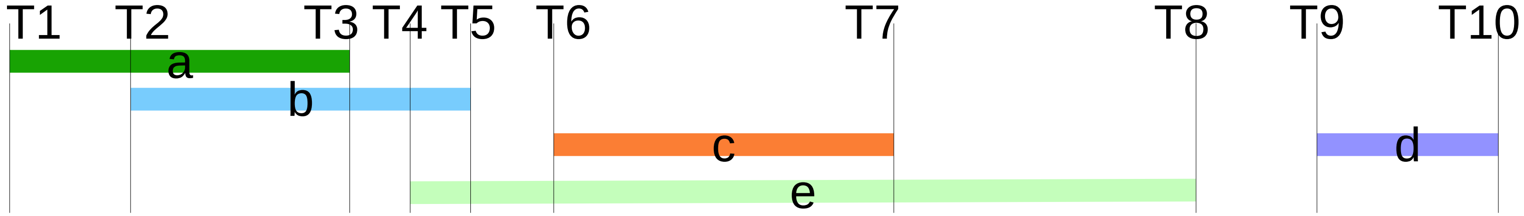
Grafo complemento

- O grafo $\overline{G}$ é o complemento de um grafo G(V,E) se:
  - Possuir o mesmo conjunto V de vértices de G e
  - Para todo par de vértices distintos v,w $\in$ V, a aresta (v,w) pertencerá a $\overline{G}$ se e somente se não pertencer a G.
- $\overline{G}$ complementa o grafo G em relação ao grafo completo com o mesmo número de vértices de G.



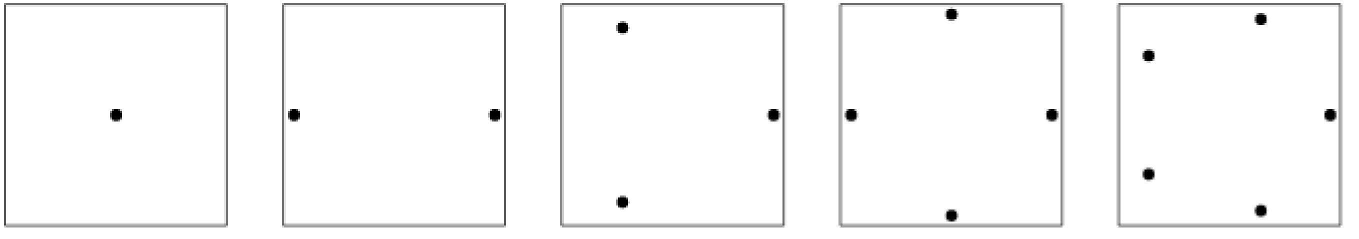
Grafo complemento

- Desenhe o grafo G1 que corresponde aos eventos que não apresentam choques de horários;
- Desenhe o grafo G2 que corresponde aos eventos que apresentam choques de horários;
- Compare G1 e G2, o que você observa em termos da complementariedade de grafos?



Grafo Vazio como complemento

- O grafo vazio (*empty graph*) apresenta *n* vértices isolados, ou seja, não apresenta arestas;
  - O grafo vazio com com *n* vértices corresponde ao complementar do grafo completo Kn;
- Curiosidades:
  - O grafo vazio com um nó é chamado de *singleton-graph;*
  - Certos autores podem designar o grafo vazio como um grafo-nulo (*null-graph*), o que pode gerar confusão pois tal designação também é utilizada para um grafo sem vértices;



https://mathworld.wolfram.com/EmptyGraph.html