Álgebra Linear (ALI0001 – CCI-192-02U)

Operador Rotação em torno da origem
Operadores no Espaço
Operadores Rotação em torno do eixo z

Professor: Marnei Mandler

Aula de ALI do dia 07 de junho de 2023.

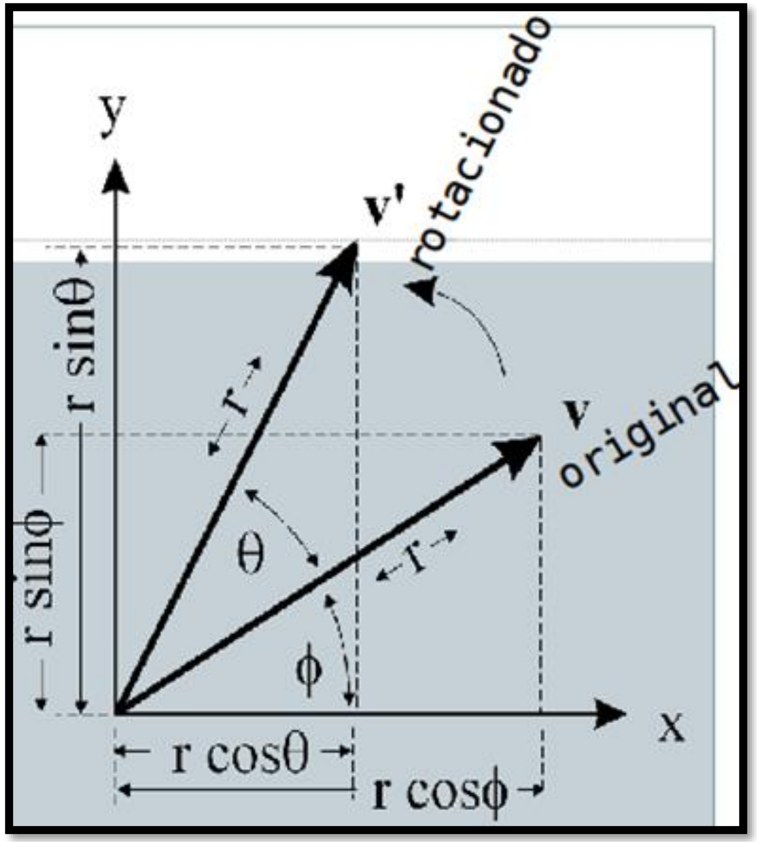
UDESC

Operador Rotação em torno da Origem

Operador Rotação: O operador linear no plano que representa uma rotação anti-horária de ângulo θ em torno da origem é o operador linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x,y) = \big(x\cos(\theta) - y\,\mathrm{sen}(\theta), x\,\mathrm{sen}(\theta) + y\cos(\theta)\big).$$

- Interpretação Geométrica



Interpretação Algébrica:

Para $v = (x,y)$ supomos que $T(v) = (x', y') = v'$.

Se ϕ é o ângulo entre v e o eixo x e $r = |v| = |T(v)|$ temos:

$$x = r\cos(\phi) \quad \text{e} \quad y = r\,\mathrm{sen}(\phi).$$

Como o ângulo formado entre v' e o eixo x é dado por

$$\phi + \theta,$$

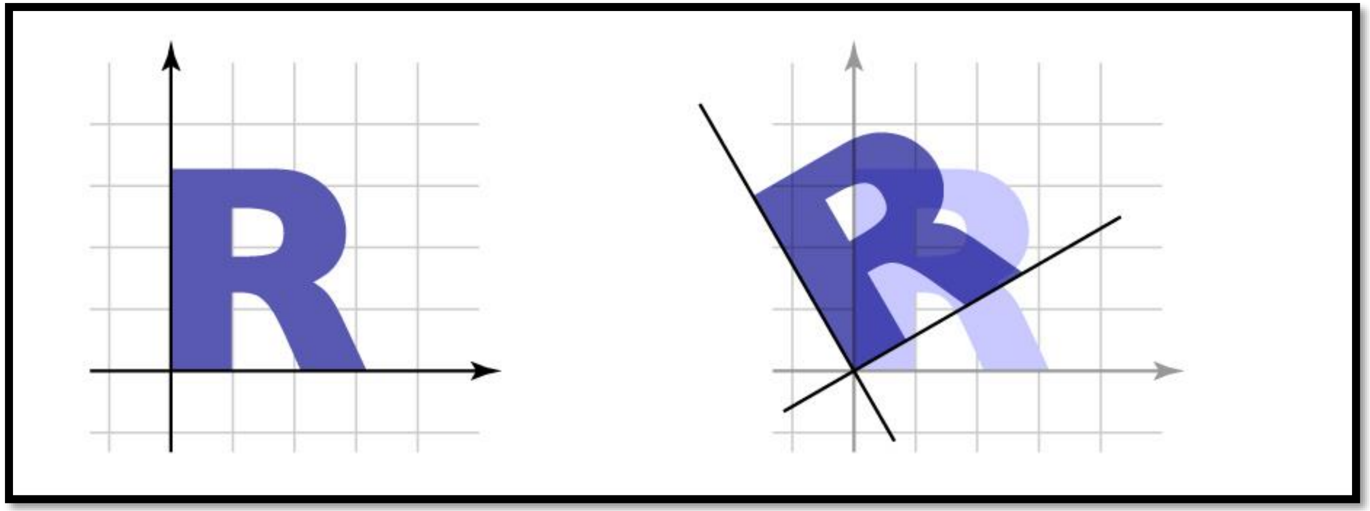
obtemos que

$$x' = r\cos(\phi+\theta) = r\cos(\phi)\cos(\theta) - r\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$= x\cos(\theta) - y\,\mathrm{sen}(\theta).$$

$$y' = r\,\mathrm{sen}(\phi+\theta) = r\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta) + r\cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$= y\cos(\theta) + x\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Operador Rotação

Exemplo 4: Para uma rotação de ângulo $\theta = \frac{\pi}{6}$, temos a seguinte ação:



Note que a matriz canônica de $T(x,y) = (x\cos(\theta) - y\,\mathrm{sen}(\theta), x\,\mathrm{sen}(\theta) + y\cos(\theta))$ é

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Como $\det([T]) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \neq 0$, uma rotação sempre é invertível e

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\mathrm{sen}(-\theta) \\ \mathrm{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}.$$

Assim, a inversa de uma rotação de ângulo θ é uma rotação de ângulo $-\theta$.
O sinal negativo do ângulo indica que o sentido da rotação foi invertido.

Exercício

Exercício 1) Determine a lei do operador linear no plano que efetuação uma rotação de ângulo $\frac{\pi}{2}$ em torno da origem.

Solução: O exercício foi resolvido durante a aula.

Exercício 2) Determine a lei do operador linear no plano que representa um cisalhamento horizontal de fator 6, seguido de uma rotação de ângulo $\frac{\pi}{3}$ em torno da origem, seguido de uma dilatação de fator 4 e de um cisalhamento vertical de fator -1.

Esse operador é invertível? Se sim, qual a sua inversa?

Solução: O exercício foi resolvido durante a aula.

Exemplo Resolvido

Exemplo 1: Determine a lei do operador linear no plano que representa um cisalhamento vertical de fator 3, seguido de uma rotação de ângulo $\frac{\pi}{3}$ em torno da origem, seguido de uma dilatação de fator 2 e de um cisalhamento horizontal de fator 1. Esse operador é invertível? Qual a sua inversa?

Solução: Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador desejado. Denotando o cisalhamento vertical por C_V, a rotação por $R_{\frac{\pi}{3}}$, a dilatação por D e o cisalhamento horizontal por C_H, temos que T é dado pela seguinte composição dos operadores:

$$T = C_H \circ D \circ R_{\frac{\pi}{3}} \circ C_V.$$

Note a importância de escrever os operadores da direita para a esquerda, para manter a ordem com que o vetor é transformado. Usando a representação matricial de todos esses operadores (e substituindo os respectivos fatores de cisalhamento e de dilatação, temos

$$[T] = \left[\, C_H \circ D \circ R_{\frac{\pi}{3}} \circ C_V \right] = [\, C_H][D]\left[R_{\frac{\pi}{3}}\right][C_V]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) & cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Assim:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fazendo a multiplicação das matrizes, obtemos que

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} (1 - 3\sqrt{3})/2 & -\sqrt{3}/2 \\ (3 + \sqrt{3})/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 2\sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Interpretando a matriz de T, obtemos que

$$T(x, y) = \left((4 - 2\sqrt{3})x + \left(1 - \sqrt{3}\right)y, \left(3 + \sqrt{3}\right)x + y\right).$$

Como

$$\begin{aligned} \det([T]) &= 4 - 2\sqrt{3} - \left(1 - \sqrt{3}\right).\left(3 + \sqrt{3}\right) \\ &= 4 - 2\sqrt{3} - \left(3 - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} - 3\right) \\ &= 4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4 \neq 0 \end{aligned}$$

temos que T é invertível.

Exemplo

Outra forma de calcular o determinante é utilizando propriedades:

$$\begin{aligned}\det[T]\,[T] &= \det\left([\,C_H]\cdot[D]\cdot\left[R_{\frac{\pi}{3}}\right]\cdot[C_V]\right)\\ &= \det([\,C_H])\cdot(\det[D])\cdot\left(\det\left[R_{\frac{\pi}{3}}\right]\right)\cdot\ \det[C_V]\\ &= \det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\det\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\det\begin{bmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{bmatrix}\cdot\ \det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}\\ &= 1\cdot 4\cdot 1\cdot 1 = 4\neq 0.\end{aligned}$$

Além disso, a inversa é tal que

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -(1-\sqrt{3})\\ -(3+\sqrt{3}) & 4-2\sqrt{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/4 & (-1+\sqrt{3})/4\\ (-3-\sqrt{3})/4 & (4-2\sqrt{3})/4\end{bmatrix}.$$

Portanto, interpretando a matriz de T^{-1}, obtemos que

$$T^{-1}(x,y) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{(-1+\sqrt{3})}{4}y, \frac{(-3-\sqrt{3})}{4}x + \frac{(4-2\sqrt{3})}{4}y\right).$$

Operadores Lineares no Espaço

Definição: Um operador linear no espaço é uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Exemplo: A transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (2x - 3y + 5z, -3x + 7y - 4z, 5x - 4y + z)$$

é um operador linear no espaço. Sua matriz canônica é

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 7 & -4 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tomando sua transposta, obtemos que

$$[T]^t = [T].$$

Por isso, dizemos que T é um operador simétrico ou auto adjunto.

Veja que, para $u = (-1, -3, -2)$ e $v = (4, 0, -1)$ temos que

$$T(u) = (-3, -10, 5) \quad \text{e} \quad T(v) = (3, -8, 19).$$

Assim

$$u.T(v) = (-1, -3, -2).(3, -8, 19) = -3 + 24 - 38 = -17$$

e $$T(u).v = (-3, -10, 5).(4, 0, -1) = -12 + 0 - 5 = -17.$$

Para operadores $T: V \to V$ **simétricos** (ou auto adjuntos) sempre é válido que

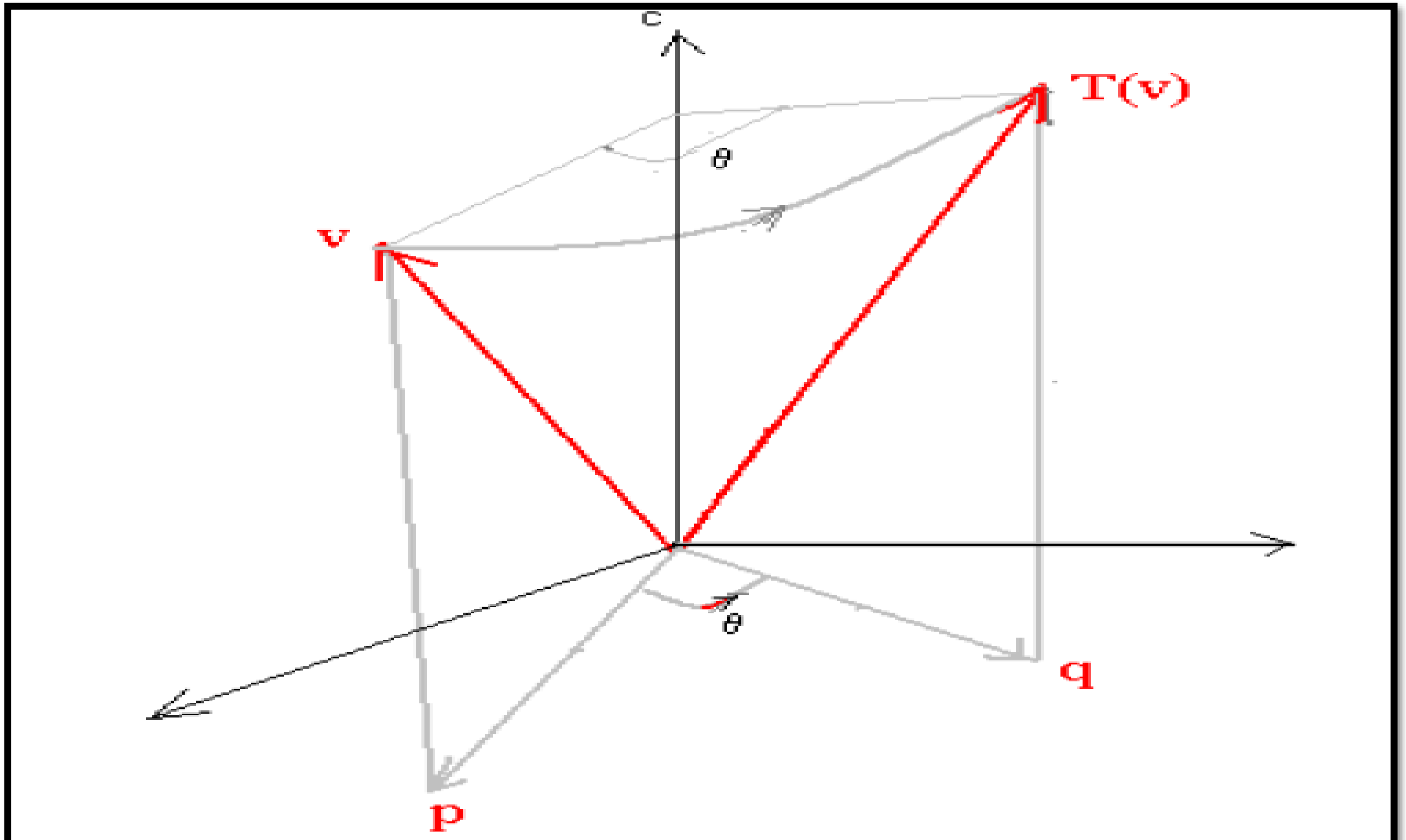
$$u.T(v) = T(u).v$$

para todos $u, v \in V$.

Operadores Rotação em torno dos eixos coordenados

Em $\mathbb{R}^3$ é possível definir os operadores rotação em torno dos três eixos coordenados.
O sentido de rotação deve sempre obedecer à regra da mão direita, com o polegar representando o eixo de rotação.

- Rotação anti-horária em torno de $\overrightarrow{Oz}$:



A rotação "gira" v em um ângulo θ em torno de z. Com isso, v e $T(v)$ possuem sempre a mesma cota z. Para obter as duas primeiras componentes de $T(v)$, basta rotacionar, em torno da origem, a projeção de v sobre o plano xy.

Operadores Rotação

Operador Rotação em torno de $\overrightarrow{Oz}$: O operador $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que realiza uma rotação anti-horária de ângulo θ em torno da origem é definido como

$$T(x, y, z) = (x', y', z),$$

em que x' e y' correspondem à rotação em torno da origem da projeção de $v = (x, y, z)$ sobre o plano xy. Como

$$x' = x\cos(\theta) - y\text{sen}(\theta) \quad \text{e} \quad y' = y\cos(\theta) + x\text{sen}(\theta),$$

temos que

$$T(x, y, z) = (x\cos(\theta) - y\text{sen}(\theta), x\text{sen}(\theta) + y\cos(\theta), z).$$

A matriz canônica de uma rotação em torno do eixo z é dada por

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, $\det([T]) = \cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1 \neq 0$, a rotação sempre é invertível (bijetora). Da mesma forma como visto nas rotações no plano, a inversa de uma rotação de ângulo θ em torno de z é uma rotação de ângulo $-\theta$ em torno de z.

Exemplo:

Exemplo 2: Determine a lei do operador linear no espaço que representa uma rotação de de ângulo $\frac{\pi}{6}$ em torno do eixo $\overrightarrow{Oz}$. Esse operador é invertível? Qual sua inversa?

Solução: Aplicando o ângulo na matriz de rotação obtida, temos que

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) & 0 \\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a lei do operador desejado é

$$T(x,y,z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, z\right)$$

Além disso, como $\det[T] = 1 \neq 0$, T é invertível e tal que

$$[T^{-1}][T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) & -\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) & 0 \\ \mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Assim, obtemos que a inversa do operador é dado por

$$T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, z\right).$$