Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral

Função Potência e Composta

Prof. Dani Prestini

UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Função Potência

DEFINIÇÃO Função potência

Função potência é qualquer função que pode ser escrita na forma

$$f(x) = k \cdot x^a,$$

onde k e a são constantes diferentes de zero. Perceba que a constante a é a **potência** (ou o **expoente**), e k é a constante de variação ou constante de proporção. Dizemos que $f(x)$ **varia como** a *a-ésima* potência de x ou que $f(x)$ **é proporcional à** *a-ésima* potência de x.

Nome	Fórmula	Potência ou expoente	Constante de variação
Comprimento da circunferência	$C = 2\pi r$	1	2π
Área de um círculo	$A = \pi r^2$	2	π
Força da gravidade	$F = \dfrac{k}{d^2}$	-2	k
Lei de Boyle	$V = \dfrac{k}{P}$	-1	k

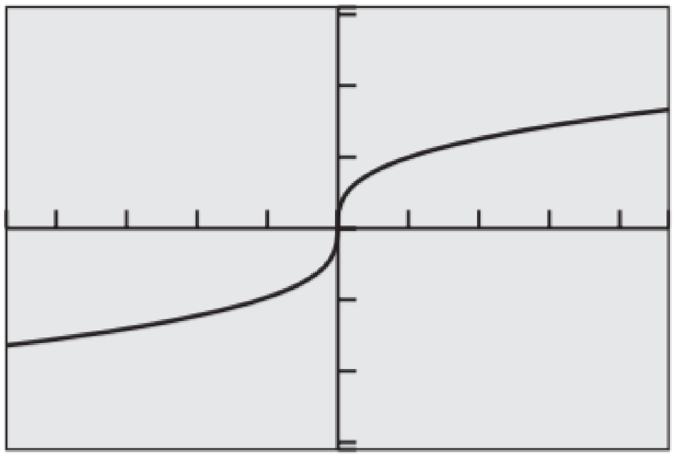
Função Potência

Exemplo 1 – Verifique a potência (ou o expoente) e a constante de variação para cada função, represente-a graficamente e analise-a.

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **(b)** $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

(a) Como $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} = 1 \cdot x^{1/3}$, então seu expoente é $\dfrac{1}{3}$ e sua constante de variação é 1.

O gráfico de f



Domínio: conjunto de todos os números reais.
Imagem: conjunto de todos os números reais.
É contínua.
É crescente para todo x.
É simétrica com relação à origem (uma função ímpar).
Não é limitada nem superior, nem inferiormente.
Não tem extremo local.

Função Potência

Continuação do Exemplo 1

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **(b)** $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

(b) Como $g(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2} = 1 \cdot x^{-2}$, então seu expoente é -2 e sua constante de variação é 1.

O gráfico de g

Domínio: $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Imagem: $]0, +\infty[$.

É contínua sobre seu domínio.

É descontínua em $x = 0$.

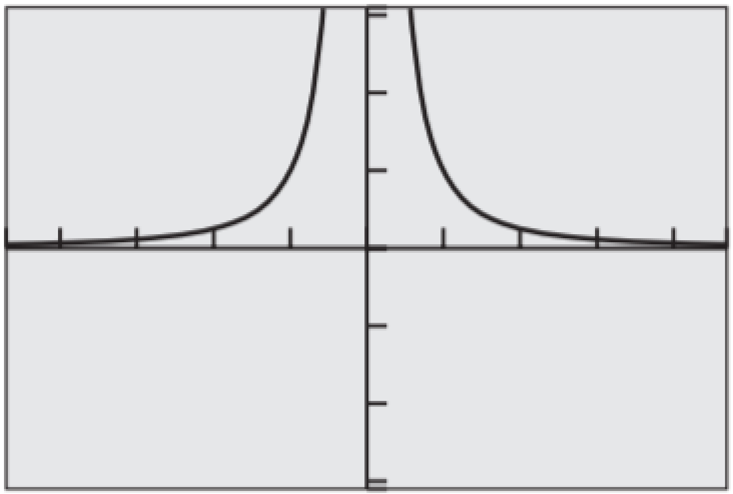
É crescente sobre $]-\infty, 0[$.

É decrescente sobre $]0, +\infty[$.

É simétrica com relação ao eixo y (uma função par).

É limitada inferior, mas não superiormente.

Não tem extremo local.



Funções Monomiais e seus Gráficos

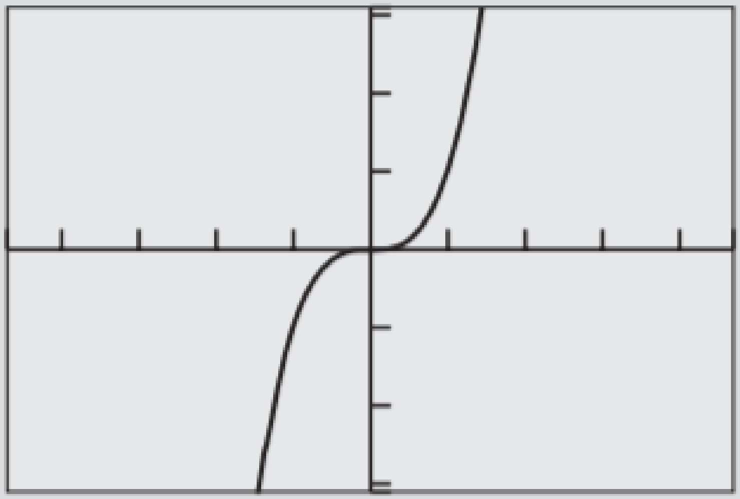
DEFINIÇÃO Função monomial

Função monomial é qualquer função que pode ser escrita como:

$$f(x) = k \text{ ou } f(x) = k \cdot x^n,$$

onde k é uma constante e n é um número inteiro positivo.

Vamos analisar a função cúbica



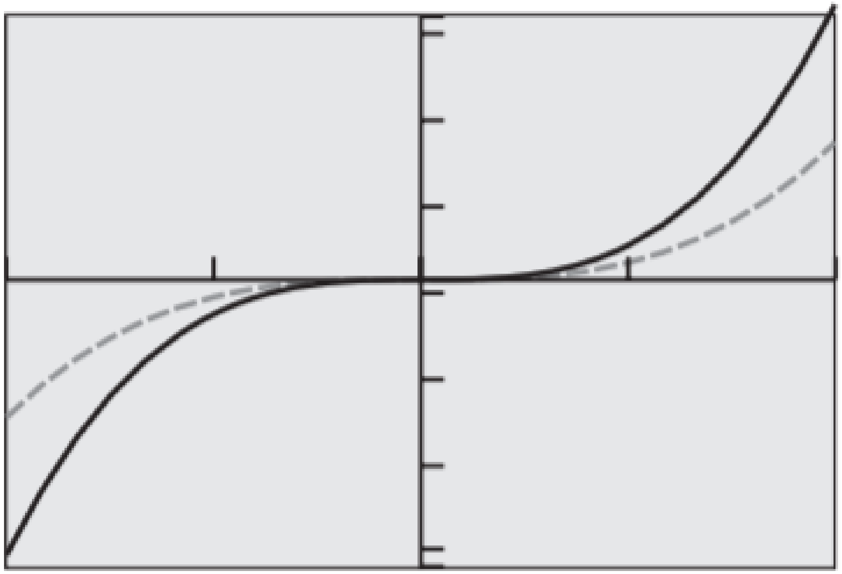
$f(x) = x^3, x \in \mathrm{IR}$
Domínio: conjunto de todos os números reais.
Imagem: conjunto de todos os números reais.
É contínua.
É crescente para todo x.
É simétrica com relação à origem (uma função ímpar).
Não é limitada nem superior, nem inferiormente.
Não tem extremo local.

Funções Monomiais e seus Gráficos

Exemplo 2 – Descreva como obter o gráfico das funções dadas a partir do gráfico de $g(x) = x^n$ (observe que o valor do expoente das funções é mantido). Você pode esboçar o gráfico e conferir com uma calculadora apropriada. Verifique a potência (ou o expoente) e a constante de variação para cada função, represente-a graficamente e analise-a.

(a) $f(x) = 2x^3$ **(b)** $f(x) = -\frac{2}{3}x^4$

(a) Obtemos o gráfico de $f(x) = 2x^3$ "esticando" verticalmente o gráfico de $g(x) = x^3$ por meio da multiplicação pelo fator 2. Ambas são funções ímpares.

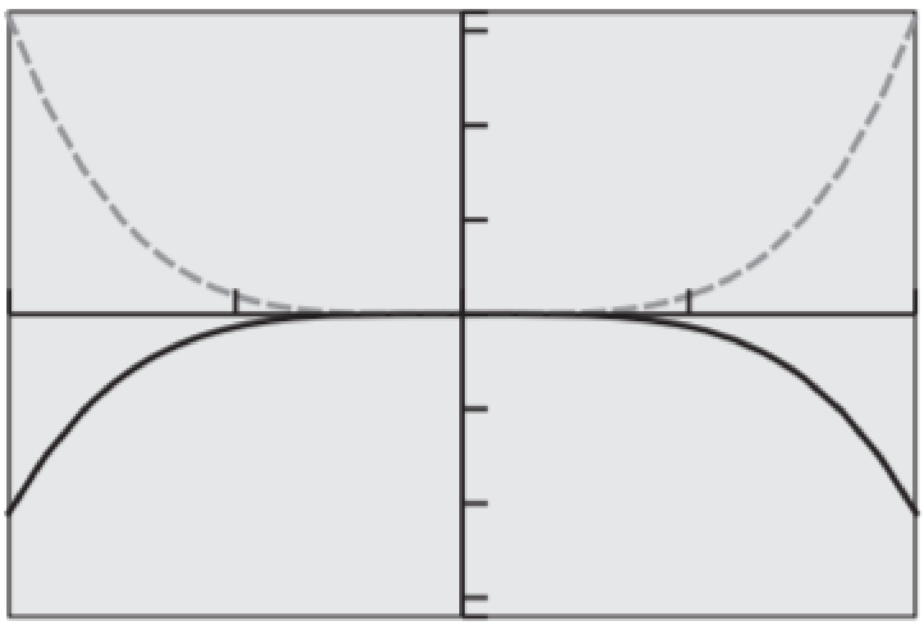


Funções Monomiais e seus Gráficos

Continuação do Exemplo 2

(a) $f(x) = 2x^3$ **(b)** $f(x) = -\dfrac{2}{3}x^4$

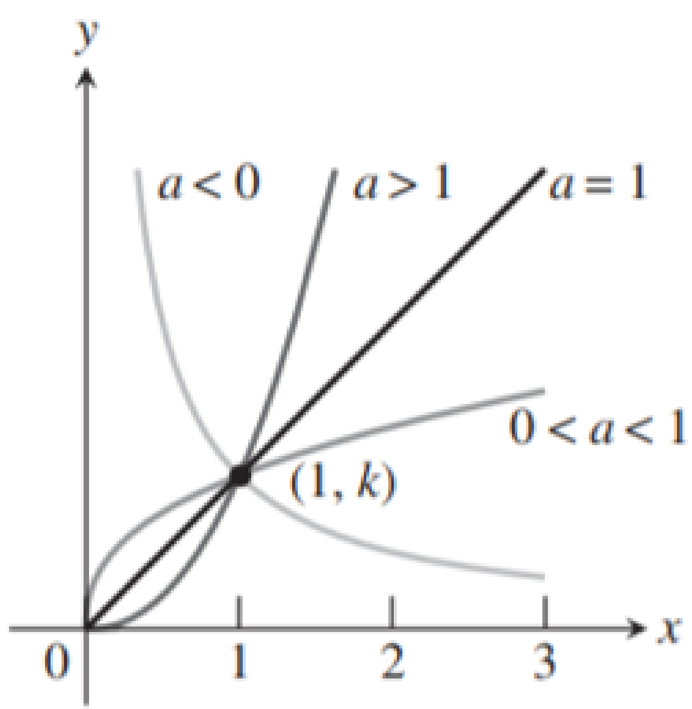
(b) Obtemos o gráfico de $f(x) = -\left(\dfrac{2}{3}\right)x^4$ "encolhendo" verticalmente o gráfico de $g(x) = x^4$ por meio da multiplicação pelo fator $\dfrac{2}{3}$ e, então, refletindo-o com relação ao eixo x por causa do sinal negativo. Ambas são funções pares.

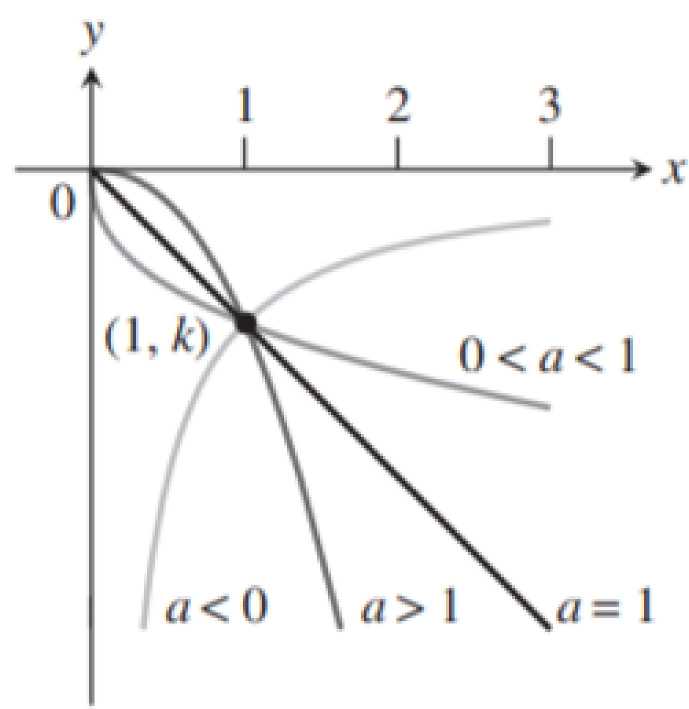


Gráficos de Funções Potência

Observe que o gráfico de f sempre contém o ponto (1, k). As funções que apresentam expoentes positivos também passam pelo ponto (0, 0). Aquelas com expoentes negativos são assintóticas para os dois eixos, isto é, não cruzam nenhum deles.

Quando $k > 0$, temos o gráfico no primeiro quadrante, mas quando $k < 0$, o gráfico está no quarto quadrante.





Gráficos de Funções Potência

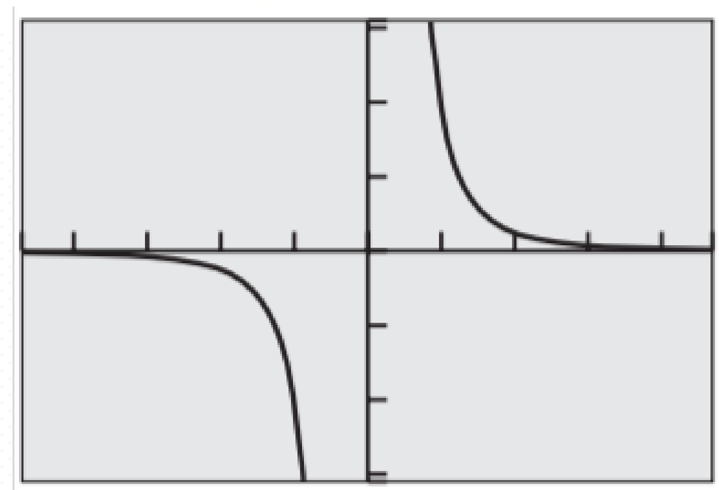
Exemplo 3 – Encontre os valores das constantes k e a. Descreva a parte da curva que está no primeiro ou no quarto quadrante. Determine se f é par, ímpar ou indefinida para $x < 0$. Descreva o restante da curva nos demais quadrantes. Esboce o gráfico para verificar a descrição.

(a) $f(x) = 2x^{-3}$ **(b)** $f(x) = -0{,}4x^{1,5}$ **(c)** $f(x) = -x^{0,4}$

(a) Como $k = 2$ é positivo e $a = -3$ é negativo, então o gráfico passa pelo par ordenado $(1, 2)$ e é assintótico em ambos os eixos. O gráfico é de uma função decrescente no primeiro quadrante. A função f é ímpar porque:

$$f(-x) = 2(-x)^{-3} = \frac{2}{(-x)^3} = -\frac{2}{x^3} = -2x^{-3} = -f(x)$$

Assim, o gráfico é simétrico com relação à origem.



Gráficos de Funções Potência

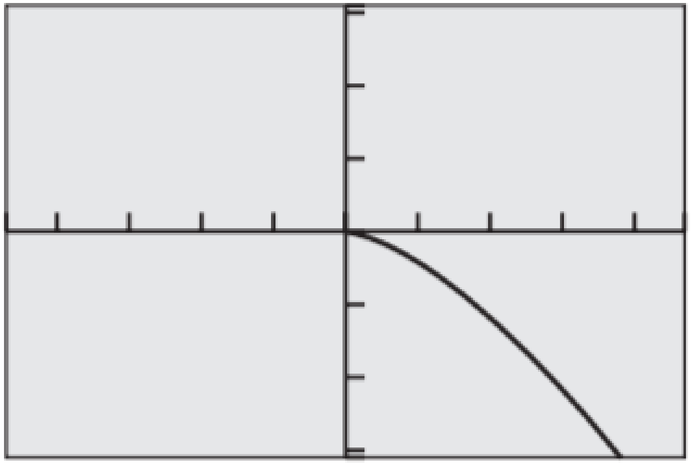
Continuação do Exemplo 3

(a) $f(x) = 2x^{-3}$ **(b)** $f(x) = -0{,}4x^{1{,}5}$ **(c)** $f(x) = -x^{0{,}4}$

(b) Como $k = -0{,}4$ é negativo e $a = 1{,}5 > 1$, então o gráfico contém o par ordenado $(0, 0)$ e passa pelo par ordenado $(1; -0{,}4)$. O gráfico é de uma função decrescente no quarto quadrante. A função f não está definida para $x < 0$ porque:

$$f(x) = -0{,}4x^{1{,}5} = -\frac{2}{5}x^{3/2} = -\frac{2}{5}(\sqrt{x})^3$$

Repare que a função raiz quadrada não está definida para $x < 0$. Assim, o gráfico de f não tem pontos no segundo e no terceiro quadrantes.



Gráficos de Funções Potência

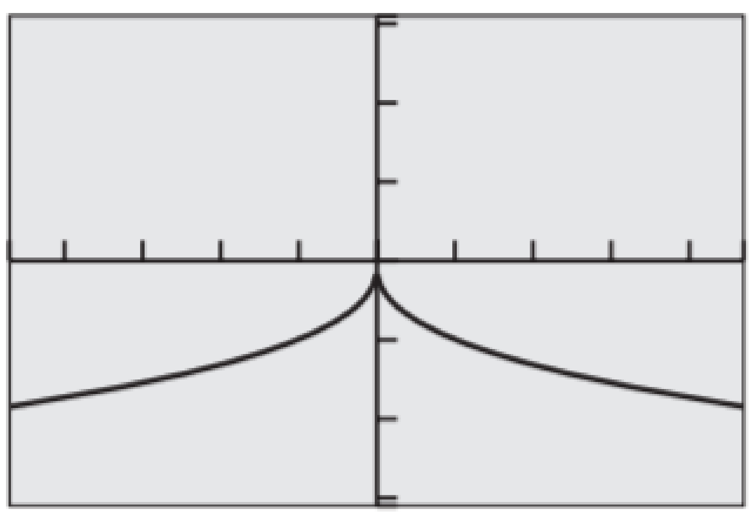
Continuação do Exemplo 3

(a) $f(x) = 2x^{-3}$ **(b)** $f(x) = -0{,}4x^{1{,}5}$ **(c)** $f(x) = -x^{0{,}4}$

(c) Como $k = -1$ é negativo e $0 < a < 1$, então o gráfico contém o par ordenado (0, 0) e passa pelo par ordenado (1, −1). O gráfico é de uma função decrescente no quarto quadrante. A função f é par porque:

$$f(-x) = -(-x)^{0,4} = -(-x)^{2/5} = -(\sqrt[5]{-x})^2 = -(-\sqrt[5]{x})^2$$
$$= -(\sqrt[5]{x})^2 = -x^{0,4} = f(x)$$

Assim, o gráfico de f é simétrico com relação ao eixo vertical y.



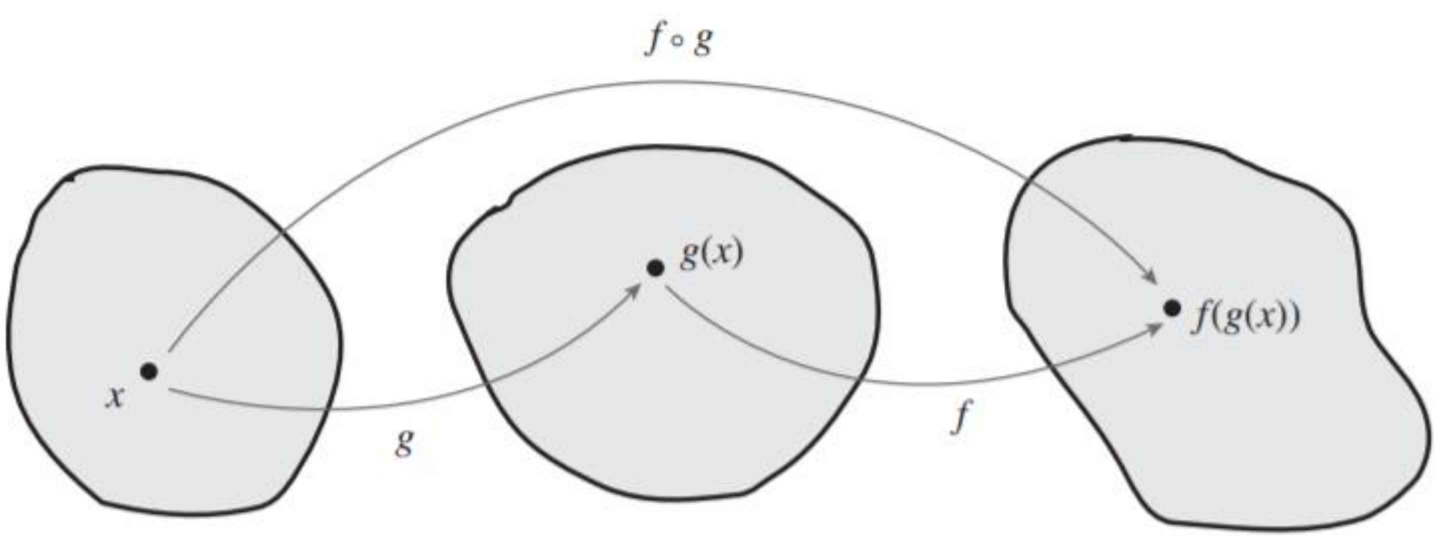
Funções Compostas

DEFINIÇÃO Composição de funções

Sejam f e g duas funções tais que o domínio de f intersecciona com a imagem de g. A **composição f de g**, representada por $f \circ g$, é definida pela regra:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

O domínio de $f \circ g$ consiste em todos os valores de x que estão no domínio de g, cujo valor $g(x)$ está no domínio de f.



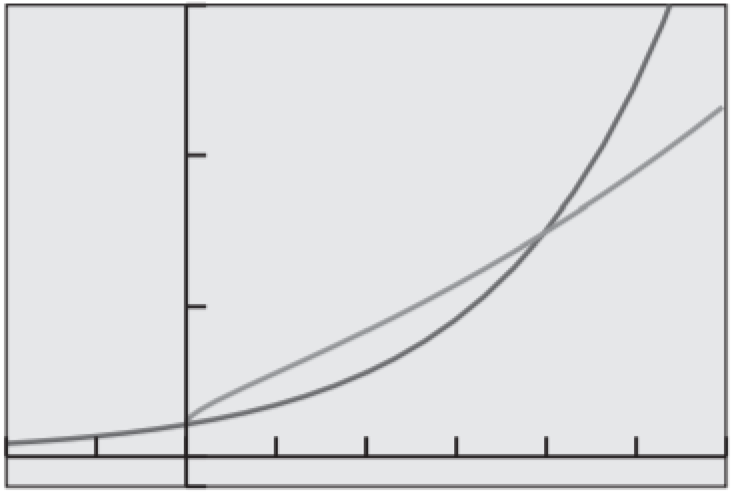
x precisa estar no domínio de g e $g(x)$ precisa estar no domínio de f

Funções Compostas

Exemplo 1 – Sejam $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Encontre as funções $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$. Verifique se essas funções não são as mesmas.

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(\sqrt{x}) = e^{\sqrt{x}}$$
$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(e^x) = \sqrt{e^x}$$

Uma forma de verificar que essas funções não são as mesmas é concluindo que não têm domínios iguais: $f \circ g$ é definida somente para $x \geq 0$, enquanto $g \circ f$ é definida para todos os números reais.



Funções Compostas

Exemplo 2 – Sejam $f(x) = 3x + 2$ e $f\big(g(x)\big) = x^2 + 5x$. Encontre a função $g(x)$.

$$f(x) = 3x + 2$$

$$f(g(x)) = 3 \cdot g(x) + 2$$

$$x^2 + 5x = 3 \cdot g(x) + 2$$

$$x^2 + 5x - 2 = 3 \cdot g(x)$$

$$g(x) = \frac{x^2 + 5x - 2}{3}$$

$$f(g(x)) = 3 \cdot g(x) + 2$$

$$= \cancel{3} \cdot \left(\frac{x^2 + 5x - 2}{\cancel{3}} \right) + 2$$

$$= x^2 + 5x - 2 + 2$$

$$= x^2 + 5x$$

verificação

Exercícios

1) Livro Texto: páginas 111 à 113 – Exercícios do 1 ao 58

2) Livro Texto: página 185 – Exercícios do 1 ao 26

página 186 – Exercícios 40, 41, 43 e 44

Obrigado