

*Coordenadas Polares*

**Exercício 1.** Transforme os pontos, dados em coordenadas cartesianas, para coordenadas polares, representando-os graficamente.

- |               |                     |                |
|---------------|---------------------|----------------|
| a) $A(1, 1)$  | c) $C(\sqrt{3}, 1)$ | e) $E(0, -3)$  |
| b) $B(2, -2)$ | d) $D(4, 0)$        | f) $F(-1, -1)$ |

**Exercício 2.** Usar

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| (i) $r > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$  | (iii) $r > 0$ e $-2\pi < \theta \leq 0$ |
| (ii) $r < 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ | (iv) $r < 0$ e $-2\pi < \theta \leq 0$  |

para descrever os pontos  $P_1(\sqrt{3}, -1)$  e  $P_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  em coordenadas polares.

**Exercício 3.** Transforme os pontos, dados em coordenadas polares, para coordenadas cartesianas.

- |  |                                       |                    |
|--|---------------------------------------|--------------------|
| a) $A\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$    | c) $C\left(3, \frac{-5\pi}{3}\right)$ | e) $E(7, \pi)$     |
| b) $B\left(-2, \frac{49\pi}{6}\right)$ | d) $D\left(0, \frac{\pi}{9}\right)$   | f) $F(-1, -30\pi)$ |

**Exercício 4.** Determine as equações polares das curvas abaixo, dadas em coordenadas cartesianas.

- |                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| a) $x^2 + y^2 = 4$       | d) $y = 2$              |
| b) $x + 2y = 4$          | e) $y + x = 0$          |
| c) $x^2 + (y + 1)^2 = 3$ | f) $x^2 + y^2 - 2x = 0$ |

**Exercício 5.** Determine as equações cartesianas das curvas abaixo, dadas em coordenadas polares, e represente-as geometricamente.

- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| a) $r \cos \theta = 3$             | d) $r = 2 \cos \theta$                           |
| b) $r = 2$                         | e) $\sin \theta = \cos \theta$                   |
| c) $r = \frac{1}{2} + \cos \theta$ | f) $r = \frac{2}{3 \sin \theta - 5 \cos \theta}$ |

**Exercício 6.** Identifique as curvas abaixo, desenhe a região  $R$  do plano simultaneamente interior às curvas e determine os pontos de interseção.

- |  |                                      |
|--|--------------------------------------|
| a) $r = 4\sqrt{3} \cos \theta$ e $r = 4 \sin \theta$ | c) $r = 3$ e $r = 3 \cos(2\theta)$   |
| b) $r = 4$ e $r = 4 \cos \theta$                     | d) $r = 2 + 2 \sin \theta$ e $r = 2$ |

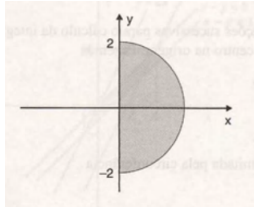
e)  $r = \cos(3\theta)$  e  $r = \sin(3\theta)$

g)  $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$  e  $r = \sqrt{\sin(2\theta)}$

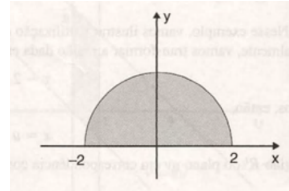
f)  $r = 3 \cos \theta$  e  $r = 1 + \cos \theta$

h)  $r = 2(1 + \sin \theta)$  e  $r = 2(1 + \cos \theta)$

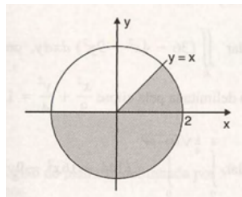
**Exercício 7.** Descreva as regiões hachuradas abaixo em coordenadas polares:



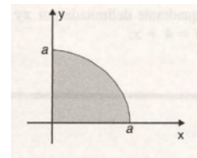
a)



b)



c)



d)

### *Coordenadas cilíndricas e esféricas*

**Exercício 8.** Determinar as coordenadas cilíndricas dos seguintes pontos, dados em coordenadas cartesianas:

a)  $A(0, 1, 1)$

c)  $C(1, -2, 2)$

e)  $E(8, -4, 1)$

b)  $B(0, -2, -2)$

d)  $D(6, 3, 2)$

**Exercício 9.** Determinar as coordenadas esféricas do problema anterior.

**Exercício 10.** Transforme os pontos, dados em coordenadas cilíndricas, para coordenadas cartesianas.

a)  $A\left(6, \frac{2\pi}{3}, -2\right)$

c)  $C\left(4, \frac{\pi}{4}, 2\right)$

b)  $B\left(1, \frac{11\pi}{6}, -2\right)$

d)  $D\left(8, \frac{2\pi}{3}, 3\right)$

e)  $E\left(6, \frac{\pi}{6}, -3\right)$

**Exercício 11.** Transforme os pontos, dados em coordenadas esféricas, para coordenadas cartesianas.

a)  $A\left(4, \frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$

c)  $C\left(6, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$

e)  $E\left(2, \pi, \frac{\pi}{2}\right)$

b)  $B\left(3, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$

d)  $D\left(5, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$

**Exercício 12.** Escreva as seguintes superfícies, dadas em coordenadas cartesianas, em coordenadas cilíndricas e esféricas.

a)  $5x + 4y = 0$

c)  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

e)  $z = 4$

b)  $-x^2 - y^2 + z^2 = 4$

d)  $x^2 + y^2 = 9$

f)  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

**Exercício 13.** As superfícies a seguir estão expressas em coordenadas cilíndricas. Referi-las ao sistema cartesiano ortogonal e identificá-las.

a)  $r^2 + 3z^2 = 36$

c)  $r^2 + z^2 = 16$

e)  $\theta = \frac{\pi}{4}$

b)  $r = a \sen \theta, a \in \mathbb{R}$

d)  $r^2 - z^2 = 1$

**Exercício 14.** As superfícies a seguir estão expressas em coordenadas esféricas. Transformá-las em coordenadas retangulares e identificá-las.

a)  $\rho = 5a \cos \phi, a \in \mathbb{R}$

c)  $\rho \sen \phi = a, a \in \mathbb{R}$

b)  $\theta = \frac{\pi}{3}$

d)  $\rho = 4$

**Gabarito:**

1. a)  $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

c)  $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

e)  $\left(3, \frac{3\pi}{2}\right)$

b)  $\left(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$

d)  $(4, 0)$

f)  $\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$

2. a)  $P_1\left(2, \frac{11\pi}{6}\right); P_2\left(2, \frac{5\pi}{4}\right)$

c)  $P_1\left(2, \frac{-\pi}{6}\right); P_2\left(2, \frac{-3\pi}{4}\right)$

b)  $P_1\left(-2, \frac{5\pi}{6}\right); P_2\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$

d)  $P_1\left(-2, \frac{-7\pi}{6}\right); P_2\left(-2, \frac{-7\pi}{4}\right)$

3. a)  $(0, 1)$

c)  $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

d)  $(0, 0)$

b)  $(-\sqrt{3}, -1)$

e)  $(-7, 0)$

f)  $(-1, 0)$

4. a)  $r = \pm 2$

d)  $r \sen \theta = 2$

b)  $r(\cos \theta + 2 \sen \theta) = 4$

e)  $\theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

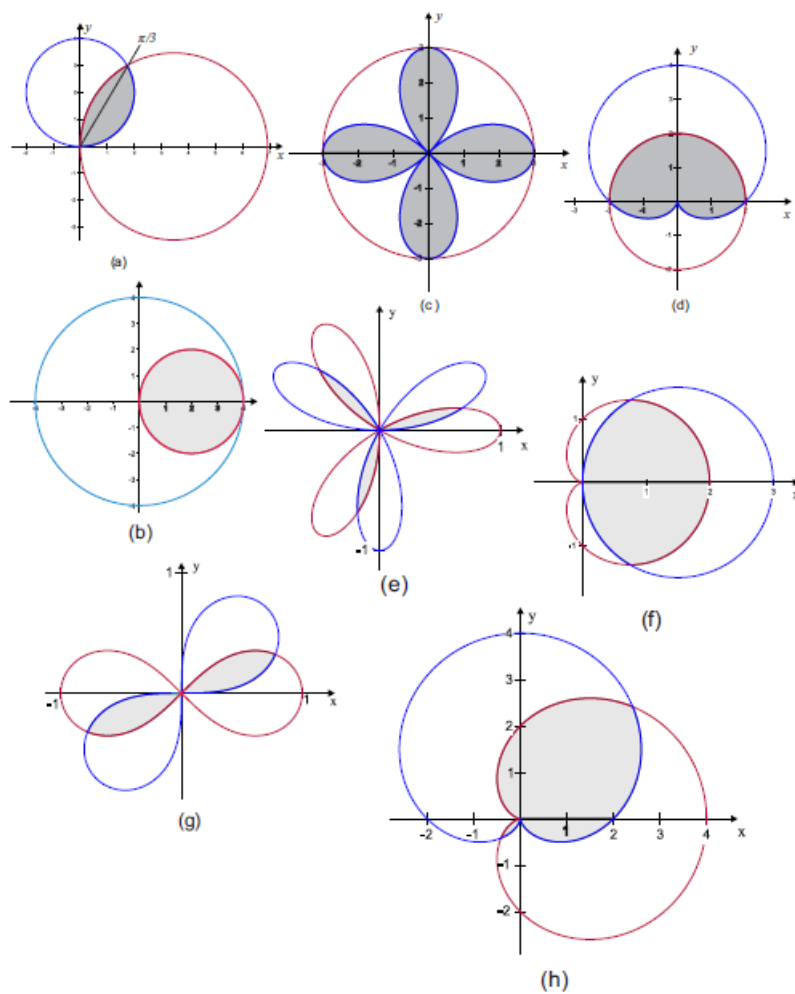
c)  $r^2 + 2r \sen \theta - 2 = 0$

f)  $r = 2 \cos \theta$

5.

- a)  $x = 3$   
 b)  $x^2 + y^2 = 4$   
 c)  $x^2 + y^2 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} + x$   
 d)  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$   
 e)  $y = x$   
 f)  $3y - 5x = 2$

6. a) Duas circunferências;  $(0, 0)$  e  $\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$   
 b) Duas circunferências;  $(4, 0)$   
 c) Uma circunferência e uma rosácea de 4 pétalas;  $(3, 0)$ ,  $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $(3, \pi)$  e  $\left(3, \frac{3\pi}{2}\right)$   
 d) Um cardioide e uma circunferência;  $(2, 0)$  e  $(2, \pi)$   
 e) Duas rosáceas de 3 pétalas;  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{12}\right)$ ,  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{12}\right)$  e  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$   
 f) Uma circunferência e um cardioide;  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$  e  $\left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$   
 g) Duas lemniscatas;  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$  e  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{9\pi}{8}\right)$   
 h) Dois cardioides;  $\left(2 + \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$  e  $\left(2 - \sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$



7. a)  $0 \leq r \leq 2$  e  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

- b)  $0 \leq r \leq 2$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$   
 c)  $0 \leq r \leq 2$  e  $-\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$   
 d)  $0 \leq a \leq 2$  e  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
8. Considerando  $\theta \in [0, 2\pi)$ :
- a)  $A\left(1, \frac{\pi}{2}, 1\right)$  ou  $A\left(-1, \frac{3\pi}{2}, 1\right)$   
 b)  $B\left(2, \frac{3\pi}{2}, -2\right)$  ou  $B\left(-2, \frac{\pi}{2}, -2\right)$   
 c)  $C(\sqrt{5}, \theta_1, 2)$  ou  $C(-\sqrt{5}, \theta_2, 2)$ ;  $\theta = \arctg(-2)$ ;  $\theta_1 \in 4^\circ$  quadrante e  $\theta_2 \in 2^\circ$  quadrante.  
 d)  $D(3\sqrt{5}, \theta_1, 2)$  ou  $D(-3\sqrt{5}, \theta_2, 2)$ ;  $\theta = \arctg\left(\frac{1}{2}\right)$ ;  $\theta_1 \in 1^\circ$  quadrante e  $\theta_2 \in 3^\circ$  quadrante.  
 e)  $E(4\sqrt{5}, \theta_1, 1)$  ou  $E(-4\sqrt{5}, \theta_2, 1)$ ;  $\theta = \arctg\left(-\frac{1}{2}\right)$ ;  $\theta_1 \in 4^\circ$  quadrante e  $\theta_2 \in 2^\circ$  quadrante.
9. Considerando  $\rho \geq 0$ ;  $\theta \in [0, 2\pi)$  e  $\phi \in [0, \pi]$ :
- a)  $A\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$   
 b)  $B\left(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$   
 c)  $C\left(3, \theta, \arccos\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ ;  $\theta = \arctg(-2)$ ;  $\theta \in 4^\circ$  quadrante.  
 d)  $D\left(7, \theta, \arccos\left(\frac{2}{7}\right)\right)$ ;  $\theta = \arctg\left(\frac{1}{2}\right)$ ;  $\theta \in 1^\circ$  quadrante.  
 e)  $E\left(9, \theta, \arccos\left(\frac{1}{9}\right)\right)$ ;  $\theta = \arctg\left(-\frac{1}{2}\right)$ ;  $\theta \in 4^\circ$  quadrante.
10. a)  $A(-3, 3\sqrt{3}, -2)$       c)  $C(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2)$       e)  $E(3\sqrt{3}, 3, -3)$   
 b)  $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -2\right)$       d)  $D(-4, 4\sqrt{3}, 3)$
11. a)  $A(-\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3})$       c)  $C\left(-\frac{9}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}, 3\right)$       e)  $E(-2, 0, 0)$   
 b)  $B\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{9}{4}, -\frac{3}{2}\right)$       d)  $D\left(-\frac{5\sqrt{3}}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$
12. A primeira expressão está em coordenadas cilíndricas e a segunda em coordenadas esféricas.
- a)  $\tan \theta = -\frac{5}{4}$ ;  $\tan \theta = -\frac{5}{4}$       d)  $r = 3$ ;  $\rho \sin \phi = 3$   
 b)  $-r^2 + z^2 = 4$ ;  $\rho^2(-\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = 4$       e)  $z = 4$ ;  $\rho \cos \phi = 4$   
 c)  $r = z$ ;  $\phi = \frac{\pi}{4}$       f)  $r^2 + z^2 = 25$ ;  $\rho = 5$
13. a)  $x^2 + y^2 + 3z^2 = 36$ ; elipsoide de revolução  
 b)  $x^2 + y^2 = ay$ ; cilindro circular reto se  $a \neq 0$  ou reta se  $a = 0$   
 c)  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ; esfera  
 d)  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ; hiperboloide de uma folha  
 e)  $y = x$ ; plano

14. a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 5az$ ; esfera se  $a \neq 0$  ou ponto se  $a = 0$   
b)  $y = \sqrt{3}x$ ; plano  
c)  $x^2 + y^2 = a^2$ ; cilindro circular reto  
d)  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ; esfera