Álgebra Linear **(ALI0001 – CCI-192-02U)**

Transformações Lineares – exemplos e propriedades

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula do dia 08 de maio de 2023.

UDESC

Revisão:

Definição: Sejam U e V espaços vetoriais.

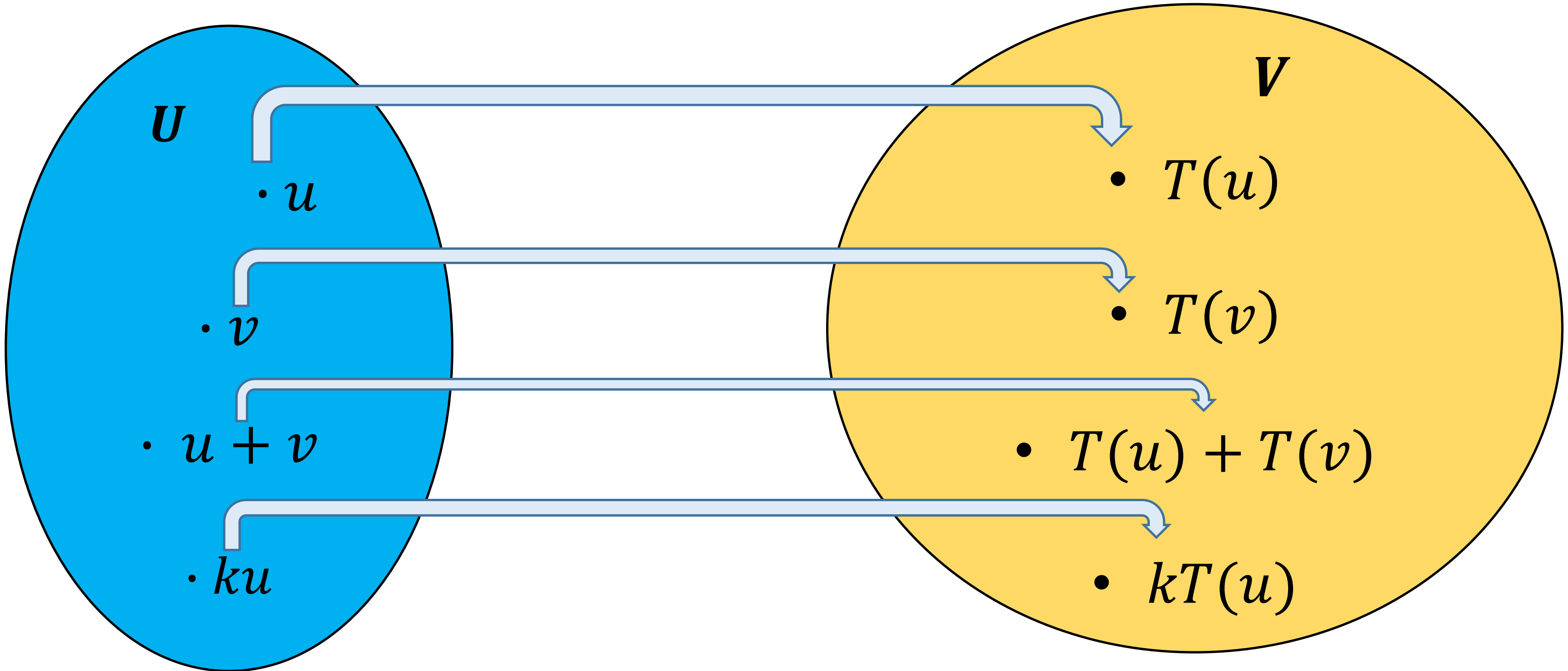
Uma função vetorial $T: U \to V$ é chamada de uma transformação linear entre U e V se e somente se

T preservar a adição e a multiplicação por escalar,

isto é, se e somente se:

i) Para todos $u, v \in U$ tivermos que $T(u+v) = T(u) + T(v)$;

ii) Para todo $k \in \mathbb{R}$ e para todo $u \in U$ tivermos que $T(ku) = kT(u)$.



Exercícios

Exercício 1) Verifique se $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ dada por

$$T(a,b,c) = (3a+4b-c) + (5a-b+c)x + 2cx^2$$

é uma transformação linear.

Exercício 2) Verifique se $T: M(2,2) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+2b-3c, c-2d,\ a+5c-d)$$

é uma transformação linear.

Exercício 3) Verifique se $T: P_2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(a+bx+cx^2) = (a-b+2c, -ac)$$

é uma transformação linear.

Exercício 4) Verifique se $S: M(n,n) \to M(n,n)$ dada por

$$S(A) = -7A + 3A^t$$

é uma transformação linear.

Solução: Todos os exercícios foram resolvidos em aula.

Exercícios

Exercício 5) Seja $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$ munido das operações não usuais dadas por

$$(x, y) + (a, b) = (xa, yb) \qquad \text{e} \qquad k(x, y) = \left(x^k, y^k\right).$$

Verifique se $T: V \to V$ dada por

$$T(x, y) = (x^4, \sqrt{y})$$

é uma transformação linear.

Exercício 6) Seja $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$ munido das operações não usuais dadas por

$$(x, y) + (a, b) = (xa, y + b) \qquad \text{e} \qquad k(x, y) = \left(x^k, ky\right).$$

Verifique se são lineares as funções:

a) $T: V \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (3\ln(x), -y)$

b) $T: \mathbb{R}^2 \to$ V dada por $T(x, y) = (e^{-x}, 2x + y)$

Solução: Todos os exercícios foram resolvidos em aula.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 1) Verifique se $T: M(2,2) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + 7b - 5c, 3c + 2d, -a + 9b - d)$$

é uma transformação linear.

Solução: Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M(2,2)$. Temos que

$$T(A+B) = T\left(\begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{bmatrix}\right)$$

$$= ((a+x) + 7(b+y) - 5(c+z), 3(c+z) + 2(d+t), -(a+x) + 9(b+y) - (d+t))$$

$$= (a + x + 7b + 7y - 5c - 5z, 3c + 3z + 2d + 2t, -a - x + 9b + 9y - d - t)$$

$$= (a + 7b - 5c, 3c + 2d, -a + 9b - d) + (x + 7y - 5z, 3z + 2t, -x + 9y - t)$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) = T(A) + T(B).$$

T preserva a adição!

E também, para qualquer $k \in \mathbb{R}$

$$T(kA) = T\left(\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}\right) = (ka + 7kb - 5kc, 3kc + 2kd, -ka + 9kb - kd)$$

Exemplos Resolvidos

$$= k(a + 7b - 5c, 3c + 2d, -a + 9b - d) = kT\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = kT(A).$$

T preserva a multiplicação por escalar!

Portanto, T é uma transformação linear.

Exemplo 2) Verifique se $S: M(2,2) \to M(2,2)$ dada por $S(A) = -5A + 6A^t$ é uma transformação linear.

Solução: Sejam A e $B \in M(2,2)$. Temos que

$$S(A + B) = -5(A + B) + 6(A + B)^t = -5A - 5B + 6(A^t + B^t)$$

$$= -5A - 5B + 6A^t + 6B^t = (-5A + 6A^t) + (-5B + 6B^t)$$

$$= S(A) + S(B).$$

S preserva a adição!

E para qualquer $k \in \mathbb{R}$

$$S(kA) = -5(kA) + 6(kA)^t = -5kA + 6(kA^t)$$

$$= -5kA + 6kA^t = k(-5A + 6A^t)$$

$$= kS(A).$$

S preserva a multiplicação por escalar!

Portanto, S é uma transformação linear.

Exemplos

Exemplo 3) Verifique se $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ dada por

$$T(a,b,c) = (a - 2b + c) + (3a + b - c)x + 5cx^2$$

é uma transformação linear.

Solução: Sejam $u = (a,b,c)$ e $v = (d,e,f) \in \mathbb{R}^3$. Temos que:

$$T(u+v) = T(a+d, b+e, c+f)$$

$$= [(a+d) - 2(b+e) + (c+f)] + [3(a+d) + (b+e) - (c+f)]x + 5(c+f)x^2$$

$$= [a + d - 2b - 2e + c + f] + [3a + 3d + b + e - c - f]x + (5c + 5f)x^2$$

$$= [(a - 2b + c) + (d - 2e + f)] + [(3a + b - c) + (3d + e - f)]x + 5cx^2 + 5fx^2$$

$$= [(a - 2b + c) + (3a + b - c)x + 5cx^2] + [(d - 2e + f) + (3d + e - f)x + 5fx^2]$$

$$= T(a,b,c) + T(d,e,f) = T(u) + T(v).$$

T preservou a adição!

E para qualquer $k \in \mathbb{R}$:

$$T(ku) = T(ka, kb, kc) = (ka - 2kb + kc) + (3ka + kb - kc)x + 5kcx^2$$

$$= k[(a - 2b + c) + (3a + b - c)x + 5cx^2] = kT(a,b,c) = kT(u).$$

Então, T é uma transformação linear.

T preserva a multiplicação por escalar!

Exemplos

Exemplo 4) Verifique se $T: P_2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b - c, bc)$$

é uma transformação linear.

Solução: Sejam $p(x) = a + bx + cx^2$ e $q(x) = d + ex + fx^2 \in P_2$. Temos que:

$$\begin{aligned}
T(p + q) &= T\big((a + d) + (b + e)x - (c + f)x^2\big) \\
&= ((a + d) + (b + e) - (c + f)\,, (b + e)(c + f)) \\
&= (a + d + b + e - c - f\,, bc + ec + bf + ef) \\
&= \big((a + b - c) + (d + e - f), bc + ef + bf + ec\big) \\
&= (a + b - c, bc) + (d + e - f, ef) + (0, bf + ec) \\
&= T(a + bx + cx^2) + T(d + ex + fx^2) + (0, bf + ec) \\
&= T(p(x)) + T(q(x)) + (0, bf + ec) \\
&\neq T\big(p(x)\big) + T\big(q(x)\big).
\end{aligned}$$

T NÃO preserva a adição!

Portanto, T não é uma transformação linear.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 5) Seja $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$ munido das operações não usuais dadas por

$$(x, y) + (a, b) = (xa, yb) \quad \text{e} \quad k(x, y) = \left(x^k, y^k\right).$$

Verifique se $T: V \to V$ dada por $T(x, y) = \left(x^4, \sqrt{y}\right)$ é uma transformação linear.

Solução: Sejam $u = (x, y)$ e $v = (a, b) \in V$. Temos que, por um lado

$$T(u + v) = T(xa, yb) = \left((xa)^4, \sqrt{yb}\right) = \left(x^4a^4, \sqrt{y}\sqrt{b}\right)$$

Por outro lado, temos que

$$T(u) + T(v) = T(x, y) + T(a, b) = (x^4, \sqrt{y}) + \left(a^4, \sqrt{b}\right) = \left(x^4a^4, \sqrt{y}\sqrt{b}\right)$$

Comparando, vemos que

$$T(u + v) = T(u) + T(v).$$

Além disso, para todo $k \in \mathbb{R}$:

$$T(ku) = T\big(k(x, y)\big) = T\left(x^k, y^k\right) = \left(\left(x^k\right)^4, \sqrt{y^k}\right) = \left((x^4)^k, (\sqrt{y})^\wedge k\right) = k(x^4, \sqrt{y})$$

$$= kT(x, y) = kT(u).$$

Portanto, T é linear, pois preserva a adição e multiplicação por escalar não usuais.

Propriedades de Transformações Lineares

- Propriedade 1: Se $T\colon\ U \ \rightarrow\ V$ é uma transformação linear então a imagem do vetor nulo de U é o vetor nulo de V, isto é,

$$T\left(\vec{0}_U\right) = \vec{0}_V.$$

Justificativa: Se $T\colon\ U \rightarrow V$ é uma transformação linear, temos que $T(ku) = kT(u)$ é válido para todo $k \in \mathbb{R}$ e todo $u \in U$. Em particular, para $k = 0$, é válido que

$$T(0u) = 0.T(u)$$

ou seja,

$$T\left(\vec{0}_U\right) = \vec{0}_V.$$

Observação: A contraposição da Propriedade 1 indica que

Se $T\colon\ U \rightarrow V$ é tal que $T\left(\vec{0}_U\right) \neq \vec{0}_V$ então T NÃO é uma transformação linear.

Por exemplo, $T(x, y) = (xy, x + y + 2, x^2)$ é tal que

$$T\left(\vec{0}_{\mathbb{R}^2}\right) = T(0,0) = (0.0, 0 + 0 + 2, 0^2) = (0,2,0) \neq (0,0,0) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3},$$

o que indica que T não é uma transformação linear.

Propriedades de Transformações Lineares

Atenção: A recíproca da Propriedade 1 não é verdadeira, ou seja, se $T(\vec{0}_U) = \vec{0}_V$ então não podemos garantir que T é uma transformação linear.

No Exemplo 4, $T: P_2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(a + bx + cx^2) = (a + b - c, bc)$ é tal que

$$T(\vec{0}_{P_2}) = T(0 + 0x + 0x^2) = (0 + 0 - 0, 0.0) = (0,0) = \vec{0}_{\mathbb{R}^2},$$

porém, vimos que T não é linear!

Portanto, não basta ocorrer $T(\vec{0}_U) = \vec{0}_V$ para que T seja linear.

Exemplo 6: A transformação $T: \mathbb{R}^2 \to P_2$ dada por

$$T(a,b) = (a + b - 1) + (2a - 3b)x + ax^2$$

é tal que

$$T(\vec{0}_{\mathbb{R}^2}) = T(0,0) = (0 + 0 - 1) + (0 - 0)x + 0x^2 = 1 \neq 0 + 0x + 0x^2 = \vec{0}_{P_2}.$$

Portanto, T não é linear.

Propriedades de Transformações Lineares

- Propriedade 2: Se $T: U \to V$ é uma transformação linear então para todos $u, v, w \in U$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$ têm-se que

$$T(au + bv + cw) = aT(u) + bT(v) + cT(w)$$

ou seja, a imagem de uma combinação linear de elementos em U é igual à combinação linear das imagens desses elementos em V, com exatamente os mesmos coeficientes.

Justificativa: Se $T: U \to V$ é uma transformação linear, sabemos que T preserva a adição e a multiplicação por escalar. Assim, para todos $u, v, w \in U$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T(au + bv + cw) &= T\big(au + (bv + cw)\big) \\ &= T(au) + T(bv + cw) \\ &= T(au) + T(bv) + T(cw) \\ &= aT(u) + bT(v) + cT(w). \end{aligned}$$

Propriedades de Transformações Lineares

- Propriedade 3: Uma transformação linear $T: U \to V$ fica unicamente determinada conhecendo-se as imagens dos vetores de uma base do domínio U.

Justificativa: Se $T: U \to V$ é uma transformação linear e $\alpha = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base do espaço vetorial U, temos que para qualquer $u \in U$ existem $a_i \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n.$$

Assim, pela linearidade de T, temos que

$$\begin{aligned} T(u) &= T(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n) \\ &= a_1 T(u_1) + a_2 T(u_2) + \cdots + a_n T(u_n), \end{aligned}$$

e com isso, se conhecermos as imagens dos vetores da base, dadas por

$$T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n),$$

conseguimos determinar unicamente a imagem de qualquer vetor $u \in U$, uma vez que os coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ estão unicamente determinados (pois são as coordenadas de u em relação à base α do domínio U.