Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral

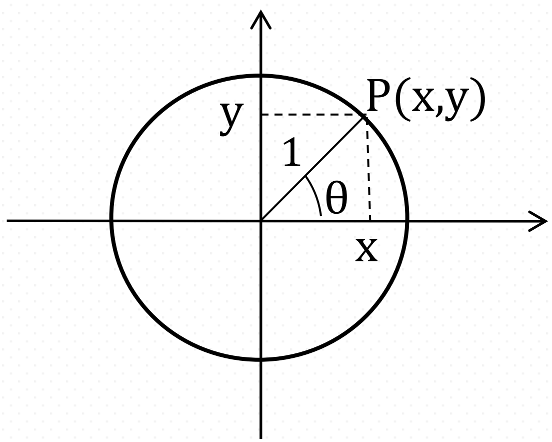
Funções Hiperbólicas

Prof. Dani Prestini

UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

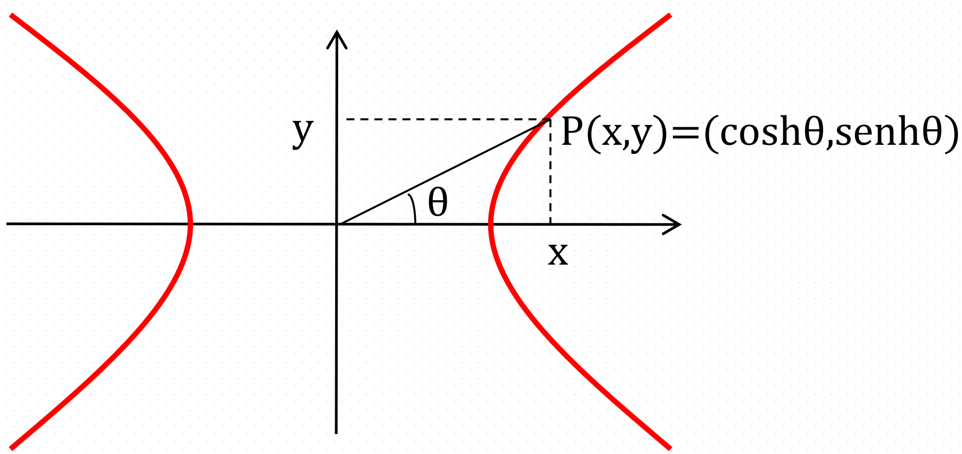
Funções Hiperbólicas

Das funções trigonométricas, temos que $P(x,y)=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$ está sobre uma circunferência de equação $x^2+y^2=1$. .



$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{1} = x \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{y}{1} = y \end{aligned}\right\} \quad x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Para as funções hiperbólicas, temos que $P(x,y)=(\cosh\theta,\operatorname{senh}\theta)$ está sobre uma hipérbole de equação $x^2-y^2=1$.



Funções Hiperbólicas

$$\text{Definições:} \begin{cases} \operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} & \Rightarrow \text{Seno hiperbólico} \\[2ex] \cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} & \Rightarrow \text{Cosseno hiperbólico} \end{cases}$$

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow (\cosh(x))^2 - (\operatorname{senh}(x))^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Funções Hiperbólicas

Gráficos

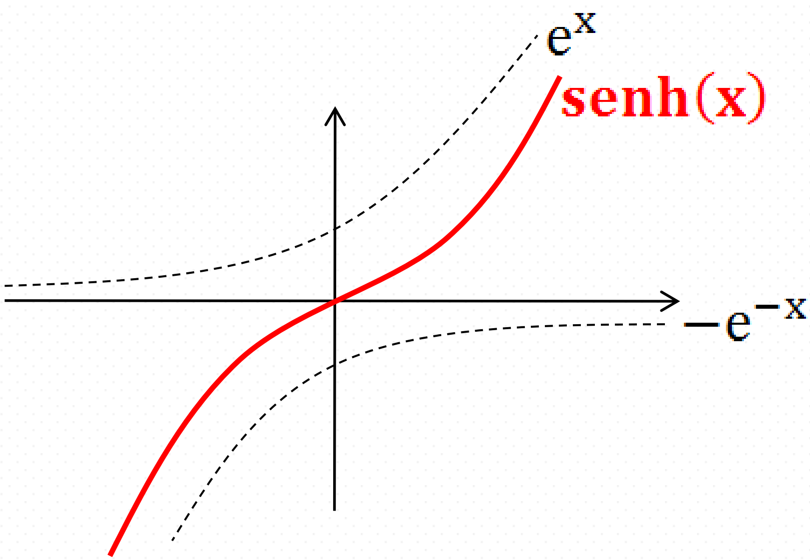


gráfico de $\mathbf{f(x) = senh(x)}$

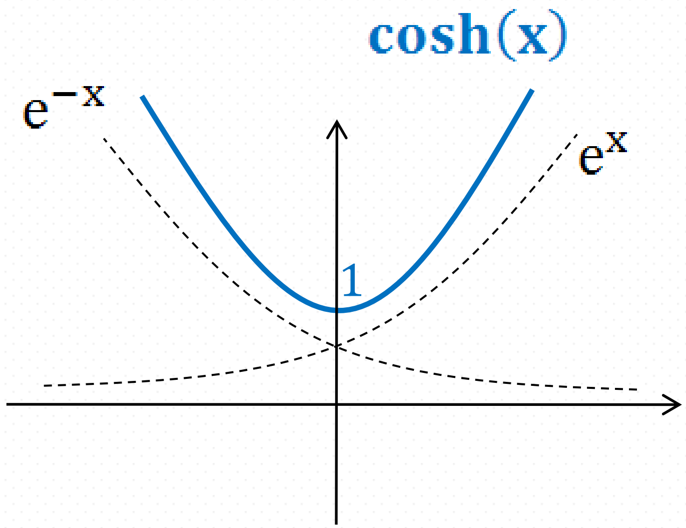


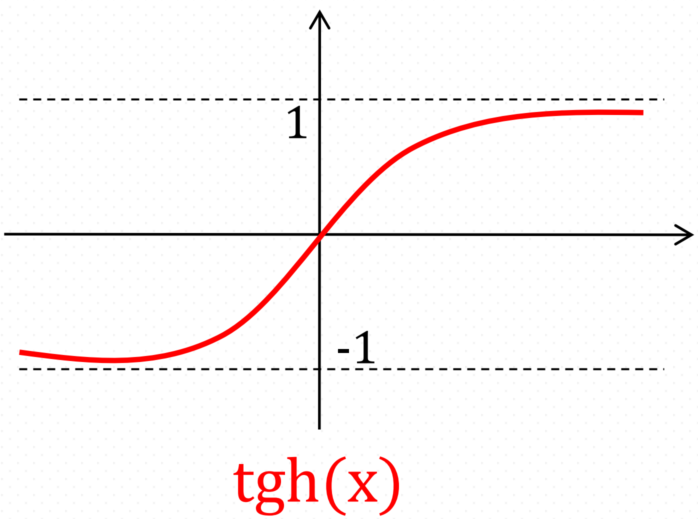
gráfico de $\mathbf{f(x) = cosh(x)}$

Outras Funções Hiperbólicas

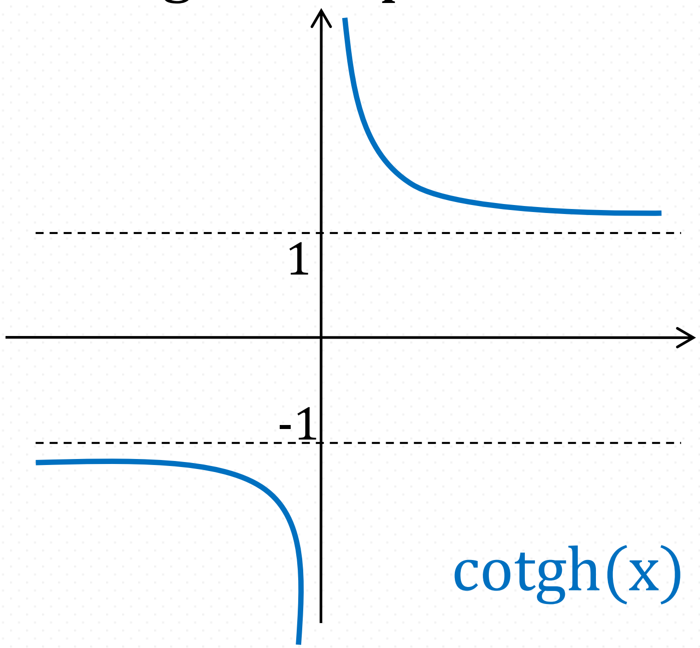
$$\mathrm{tgh}(x) = \frac{\mathrm{senh}(x)}{\cosh(x)}$$

$$\mathrm{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\mathrm{senh}(x)}$$

Tangente hiperbólica



Cotangente hiperbólica

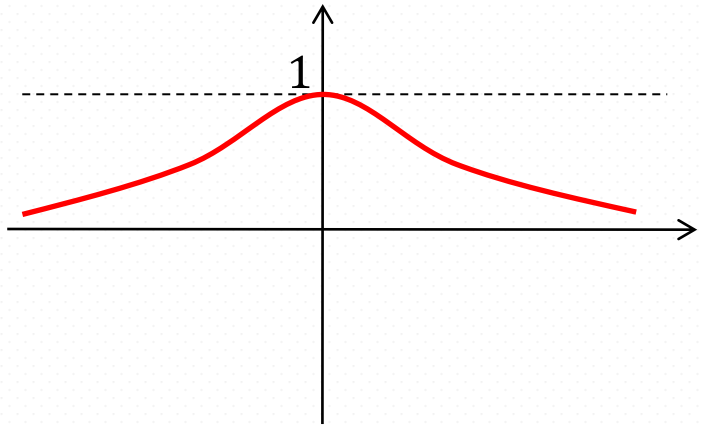


Outras Funções Hiperbólicas

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

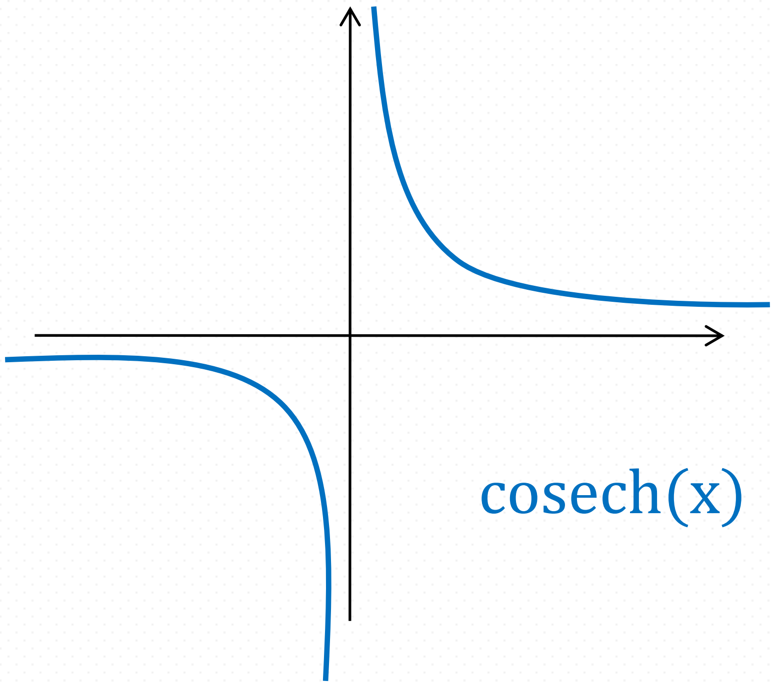
$$\operatorname{cossech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}$$

Secante hiperbólica



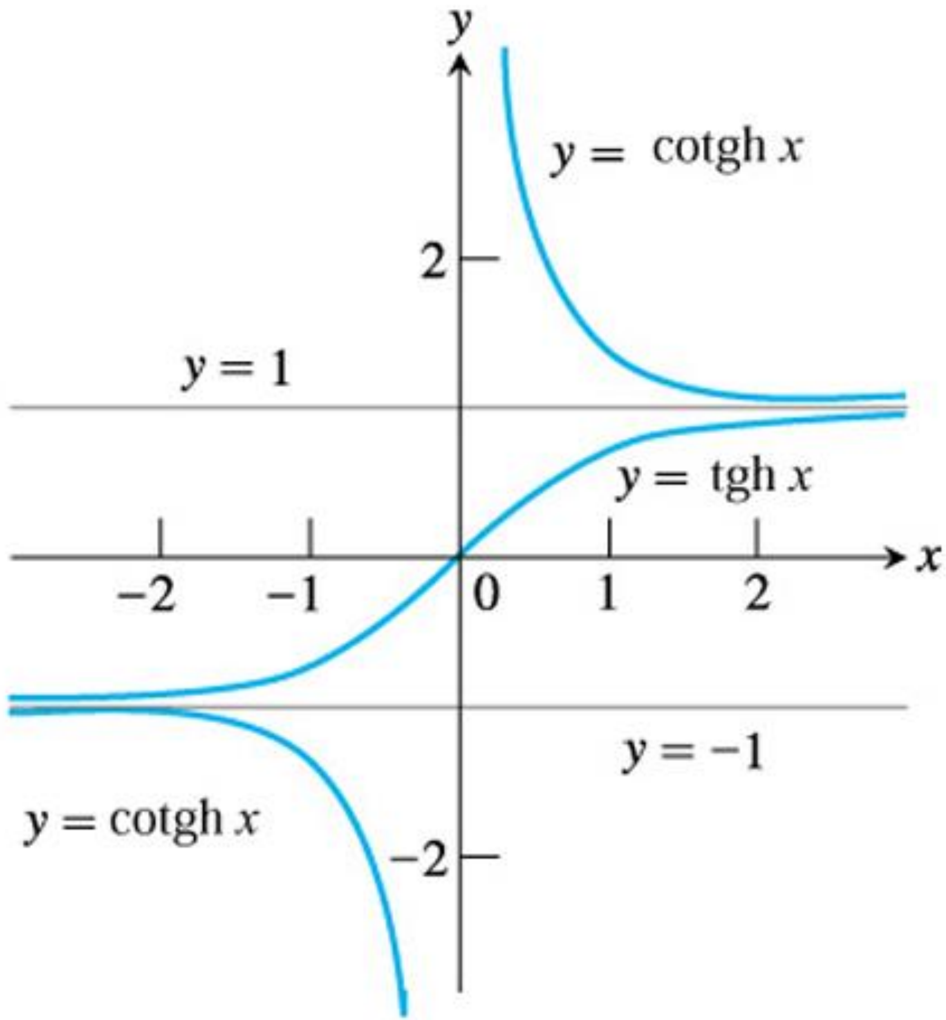
sech(x)

Cossecante hiperbólica



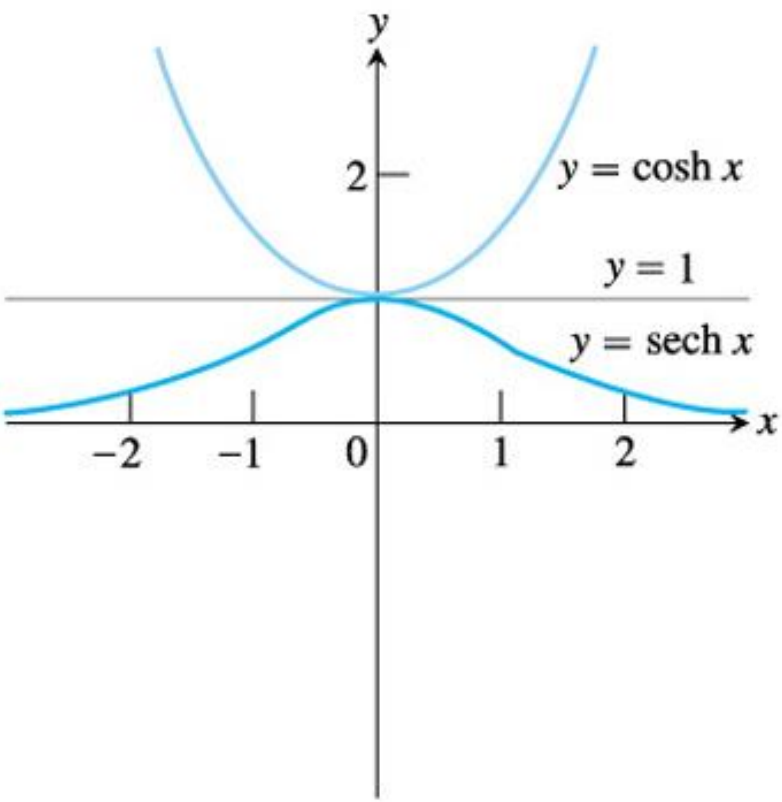
cosech(x)

Funções Hiperbólicas

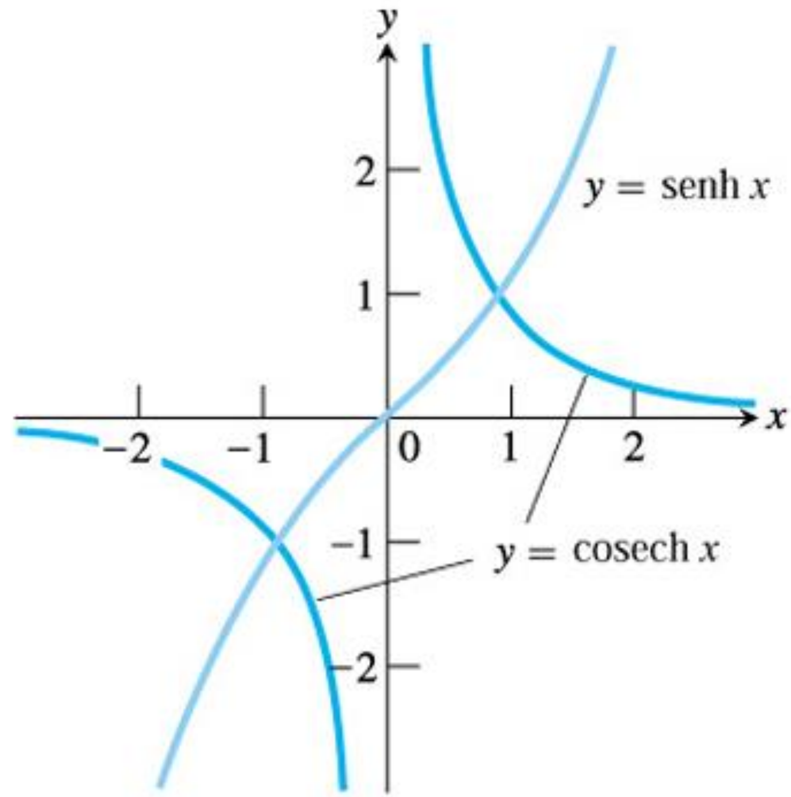


(c) Os gráficos de $y = \text{tgh}\, x$ e
$y = \text{cotgh}\, x = 1/\text{tgh}\, x$

Funções Hiperbólicas



(d) Os gráficos de $y = \cosh x$ e $y = \text{sech}\, x = 1/\cosh x$



(e) Os gráficos de $y = \text{senh}\, x$ e $y = \text{cosech}\, x = 1/\text{senh}\, x$

Funções Hiperbólicas

Funções Hiperbólicas Básicas

Cosseno Hiperbólico: $\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

Seno Hiperbólico: $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

Tangente Hiperbólico: $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

Cotangente Hiperbólico: $\operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$

Secante Hiperbólica: $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^{x} + e^{-x}}$

Cossecante Hiperbólica: $\operatorname{cossech} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{2}{e^{x} - e^{-x}}$

Funções Hiperbólicas

Identidades

$$
\begin{aligned}
\operatorname{senh}(-x) &= -\operatorname{senh}\ x \\
\cosh(-x) &= \cosh(x) \\
\operatorname{senh}\ 2x &= 2\operatorname{senh}\ x\ \cosh\ x \\
\cosh\ 2x &= \cosh^2\ x + \operatorname{senh}^2\ x \\
\operatorname{senh}(x+y) &= \operatorname{senh} x\ \cosh y + \cosh x\ \operatorname{senh} y \\
\cosh(x+y) &= \cosh x\ \cosh y + \operatorname{senh} x\ \operatorname{senh} y \\
\cosh^2\ x &= \frac{\cosh\ 2x + 1}{2} \\
\operatorname{senh}^2\ x &= \frac{\cosh\ 2x - 1}{2} \\
\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= 1 \\
\operatorname{tgh}^2\ x &= 1 - \operatorname{sech}^2 x \\
\operatorname{cotgh}^2\ x &= 1 + \operatorname{cossech}^2\ x
\end{aligned}
$$

Funções Hiperbólicas

Exemplo 1

Determine x sabendo que $\underbrace{senh(x)}$ $= 3/4$.

$$e^x = y$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$e^x - e^{-x} = \frac{3}{2}$$

$$e^x - \frac{1}{e^x} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{(e^x)^2 - 1}{e^x} = \frac{3}{2}$$

$$2e^{2x} - 2 = 3e^x$$

$$2y^2 - 2 = 3y$$

$$2y^2 - 3y - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4}$$

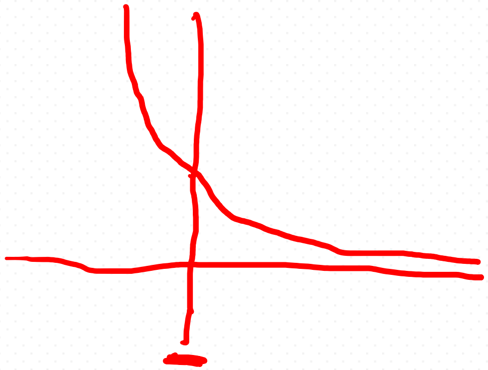
$$y = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$y' = 2$$

$$y'' = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Funções Hiperbólicas

Continuação do Exemplo 1



$$e^x = y$$

$$e^x = 2$$

$$\ln(e^x) = \ln(2)$$

$$x \cdot \cancel{\ln(e)} = \ln(2)$$

$$x = \ln(2) \quad *$$

$$e^x = -\frac{1}{2}$$

$$\nexists$$

Funções Hiperbólicas

Exemplo 2

Resolva a equação $2\cosh(2x) + 10senh(2x) = 5$.

$$\cancel{2}\cdot\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{\cancel{2}}\right) + \overset{5}{\cancel{10}}\cdot\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\cancel{2}}\right) = 5$$

$$e^{2x}+e^{-2x}+5.e^{2x}-5.e^{-2x}=5$$

$$6.e^{2x}-4e^{-2x}=5$$

$$\frac{6.e^{2x}}{1}-\frac{4}{e^{2x}}=\frac{5}{1}$$

$$\frac{6.e^{4x}-4}{\cancel{e^{2x}}} = \frac{5.e^{2x}}{\cancel{e^{2x}}}$$

$$6.e^{4x}-5e^{2x}-4=0$$

Funções Hiperbólicas

Continuação do Exemplo 2

$$6.e^{4x} - 5.e^{2x} - 4 = 0$$

$$\underline{e^{2x} = y}$$

$$6.y^2 - 5.y - 4 = 0$$

$$\Delta = 25 + 96 = 121$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{12}$$

$$y = \frac{5 \pm 11}{12}$$

$$y' = \frac{4}{3}$$

$$y'' = -\frac{1}{2}$$

$$e^{2x} = \frac{4}{3}$$

$$\ln(e^{2x}) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$2x = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right) \underline{= 0,1438}$$

$$e^{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$\nexists$$

Exercícios

1) Lista de Exercícios postada no Moodle.

Obrigado