MDI0002 – Matemática Discreta
Videoaula 11
Relação de Equivalência

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2020

- reflete uma noção de igualdade semântica
- entidades com formas diferentes (sintaticamente diferentes)
- podem ser equivalentes (“igualadas”)
- exemplo: $\leftrightarrow$

Propriedades que caracterizam equivalência

Considerando a noção semântica de igualdade

- Reflexividade. Qualquer elemento é sempre "igual" a si mesmo
- Transitividade. Intuitiva em qualquer noção de "igualdade"
- Simetria. O que mais caracteriza a "igualdade" (e diferencia da ordem)

Definição (Relação de Equivalência)

$R \subseteq A^2$ é uma Relação de Equivalência se, e somente se, R é uma endorrelação reflexiva, simétrica e transitiva.

Partição

Importante resultado de uma relação de equivalência:
$R : A \to A$ induz uma única partição do conjunto A

- subconjuntos disjuntos e não-vazios, denominados *classes de equivalência*
- união de todas as classes de equivalência resulta no conjunto original

... e toda partição induz uma relação de equivalência.

Notação para classe de equivalência:

- Tome-se $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ uma partição de A
- ou seja, cada A_i (com $i = 1, \ldots, n$) é um subconjunto de A
- É usual denotar cada partição por um elemento representativo da classe
- Para $a_1 \in A_1$,...,$a_n \in A_n$, teremos $[a_1] = A_1$,...,$[a_n] = A_n$

Exemplos

- $\langle A, = \rangle$
- $\langle 2^A, = \rangle$
- $A^2 : A \to A$
- $\langle \mathbb{N}, R_{mod2} \rangle$ onde $R_{mod2} = \{ \langle a, b \rangle \mid a\%2 = b\%2 \}$

* $x\%y=$ resto da divisão inteira de x por y

R_{mod2} induz uma partição de $\mathbb{N}$

- $[0]$, a classe de equivalência dos número pares (resto zero)
- $[1]$, a classe de equivalência dos número ímpares (resto um)

Definição (Conjunto Quociente)

Dada a relação de equivalência $R : A \to A$, o **conjunto quociente**, é

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

onde para qualquer $a \in A$, temos que $[a]_R = \{b \in A \mid aRb\}$

O conjunto quociente é a partição de A induzida pela relação de equivalência R.

Conjunto Quociente: $\mathbb{Q}$

Sejam os conjuntos $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} - \{0\}$ (naturais não nulos) e $F = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ (frações).

Seja a relação de equivalência

$$R = \{\langle\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\rangle \in F^2 \mid \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\}$$

Portanto, $\mathbb{Q}$ é o conjunto quociente F/R

$$\mathbb{Q} = F/R$$

Cada número racional é uma classe de equivalência de frações

- $[0]_R = \{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \ldots\}$
- $[\frac{1}{2}]_R = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots\}$
- $[\frac{-5}{4}]_R = \{\frac{-5}{4}, \frac{-10}{8}, \frac{-15}{12}, \ldots\}$