

Lista Complementar – 1

1. Qual é a condição para um grafo multipartido completo $K_{m, n, p, q, \dots, \dots}$ ser regular?

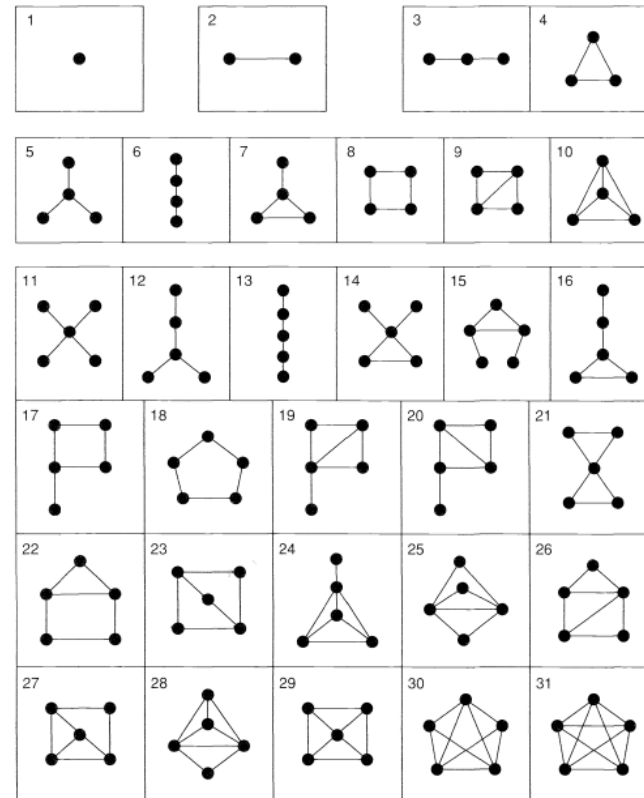
Pense inicialmente em algo simples, um $K_{m,n}$ onde $m \gg n$, por exemplo.

2. Qual é o menor grau e o maior grau de um grafo “multipartido” completo $K_{m, n, p, q, \dots, \dots}$ qualquer?

3. Qual é o maior número de arestas possível para um $K_{m, n, p, q}$ cujas partições são de mesmo tamanho igual a k ?

4. Mostre que Q_k onde $1 \leq k \leq 3$ são regulares e bipartidos:

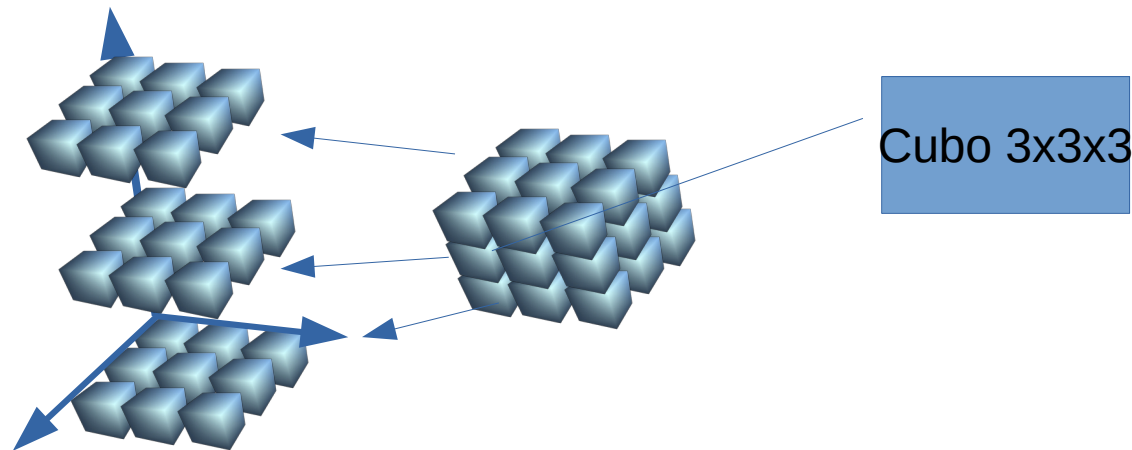
5. Quais grafos ao lado são bipartidos?
Justifique a sua resposta utilizando as propriedades do bipartido.



6. Um rato come um cubo de $3 \times 3 \times 3$ de queijo comendo todos os subcubos de $1 \times 1 \times 1$ durante seu caminho. Ele começa num subcubo de um canto, come-o e se move para um subcubo adjacente (que divide uma face de área 1), comendo-o e se movendo para o próximo adjacente.

- O percurso para o rato comer todos os subcubos do inicial até o final (sem retornar ao primeiro) é um grafo bipartido?
- É possível ao rato comer todos os subcubos e, após o último ser comido, retornar à posição do primeiro subcubo comido e o grafo (resultante desse percurso) ser bipartido?

Exiba o circuito percorrido pelo rato no processo de comer os subcubos ou prove que é impossível. (Ignore a gravidade)



7. Suponha que existam 4 pessoas, p_1 , p_2 , p_3 e p_4 disponíveis para preencher 6 funções vagas, f_1, \dots, f_6 . As pessoas p_1 , p_2 e p_4 são qualificadas para exercer a função f_2 ou f_5 . A pessoa p_3 é qualificada para exercer a função f_1 , f_2 , f_3 , f_4 ou f_6 .

Desenhe o grafo que representa as qualificações para as vagas.

- Vértices: pessoas e funções vagas;
- Arestas: existe uma aresta ligando uma pessoa às funções para as quais ela esta habilitada.

Será possível empregar todas as pessoas de tal forma que cada pessoa desempenhe a função para a qual esta qualificada? Se a resposta é não, qual é o maior número de vagas que podem ser preenchidas?

8. Dois jogadores X e Y se alternam escolhendo vértices de um grafo bipartido. Primeiro X escolhe um vértice v_0 , a seguir Y escolhe um vértice v_1 adjacente v_0 e assim por diante.

A escolha de X é sempre um vértice distinto dos escolhidos anteriormente.

A escolha Y é sempre um vértice adjacente a v_i e distinto dos escolhidos anteriormente.

O jogador que não puder fazer uma escolha de vértice na sua vez, perde o jogo.

Quais as condições para que Y sempre vença?

Quais as condições para X sempre vencer?

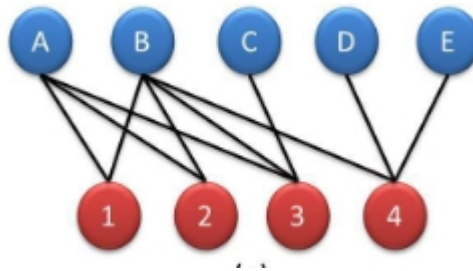
9. Seja $G(V,A)$ um grafo bipartido completo com:

1. $|V|=|V_1|+|V_2| = n$ vértices;

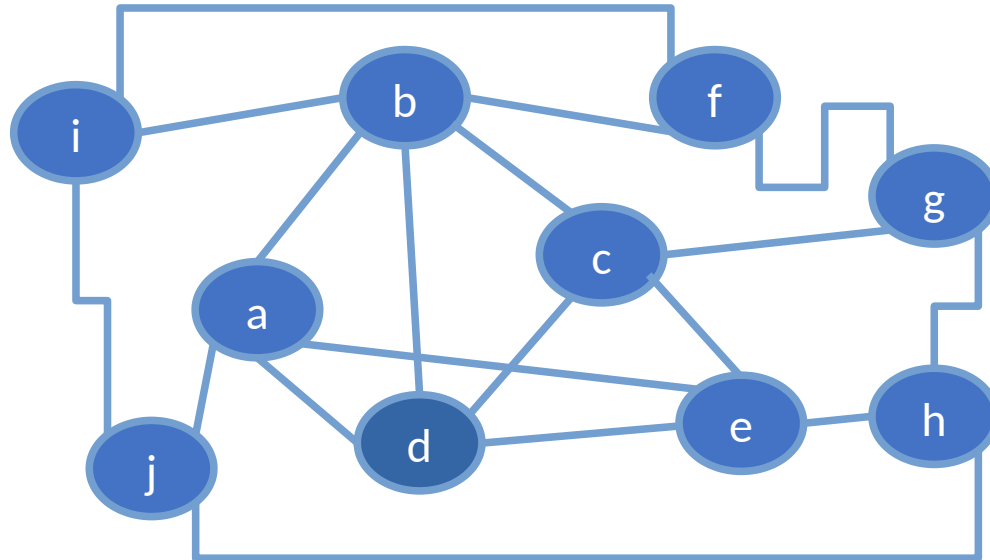
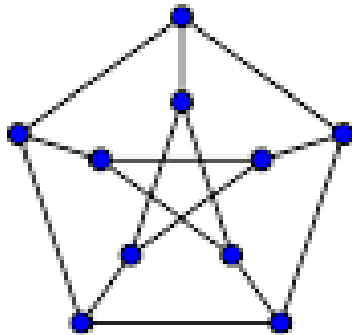
2. $|V_1| = |V_2|$.

Prove que G tem a seguinte quantidade de arestas: $n^2/4$

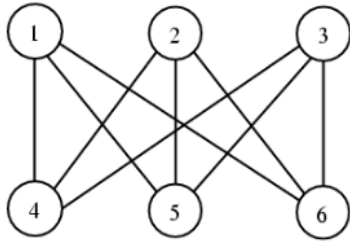
10. No grafo abaixo, as letras identificam autores e os números identificam artigos científicos. Realize as projeções ponderadas sobre as partições envolvidas e por meio da análise da(s) projeção(ões). Identifique qual é o autor que apresenta a maior intermediação com os demais autores



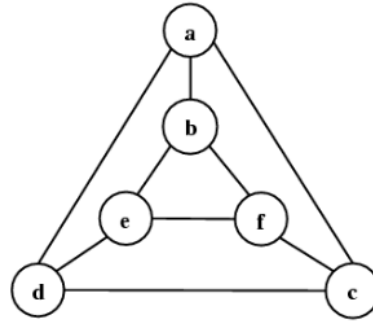
11. Os grafos abaixo são isomorfos?



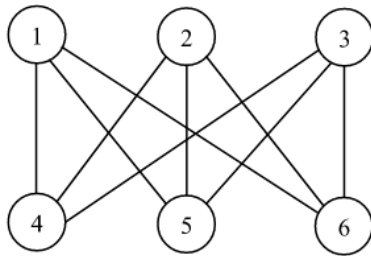
12. Os grafos abaixo são isomorfos?



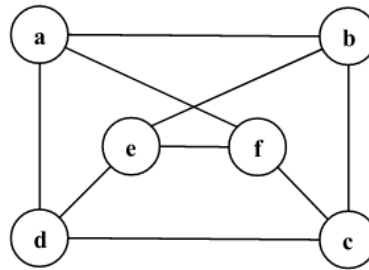
G



G'

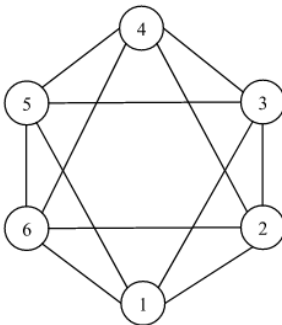


G

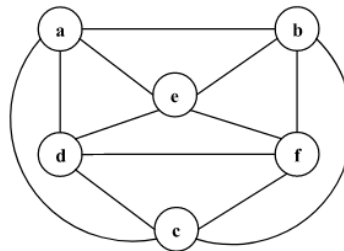


G'

V(G)	V(G')
1	a
2	e
3	c
4	b
5	d
6	f



G



G'

V(G)	V(G')
1	d
2	a
3	e
4	b
5	f
6	c

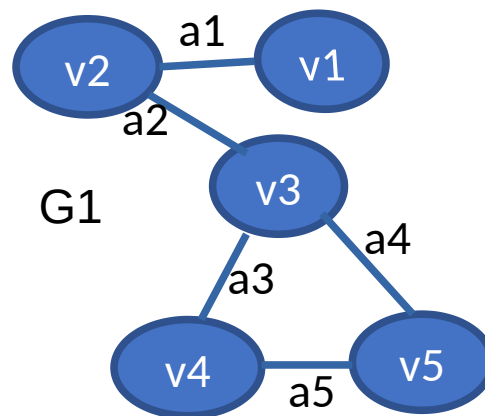
13. Dados P e $A1$ forneça o grafo $G2$, isomorfo a $G1$, por meio da matriz de permutação P e desenhe o grafo $G2$.

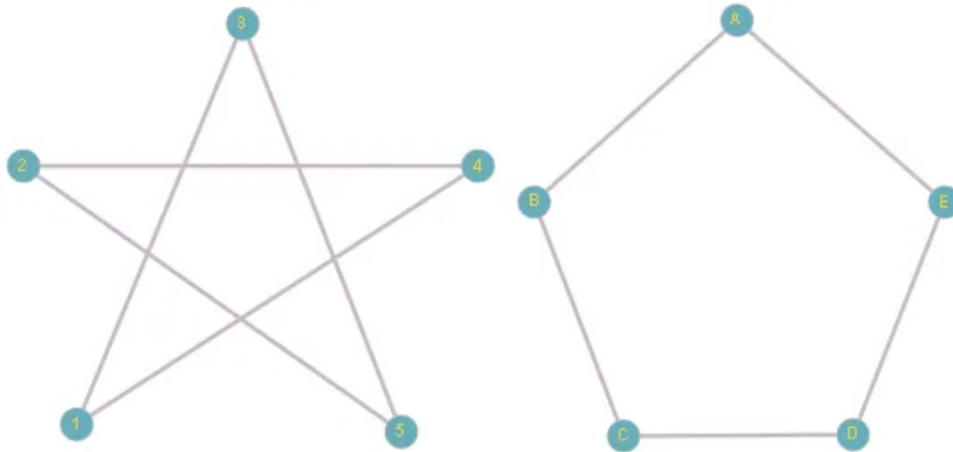
$A1:$

	v1	v2	v3	v4	v5
v1	0	1	0	0	0
v2	1	0	1	0	0
v3	0	1	0	1	1
v4	0	0	1	0	1
v5	0	0	1	1	0

$P:$

	a	b	c	d	e
v1	0	0	0	1	0
v2	0	0	0	0	1
v3	0	0	1	0	0
v4	0	1	0	0	0
v5	1	0	0	0	0





14. Sejam G_1 e G_2 , proponha uma permutação e verifique o isomorfismo pelo uso da matriz de permutação?

Exiba as matrizes de adjacências.

15. Avalie o isomorfismo entre XY e XZ, teste inicialmente por meio dos os autovalores das matrizes usando Python (numpy):

X

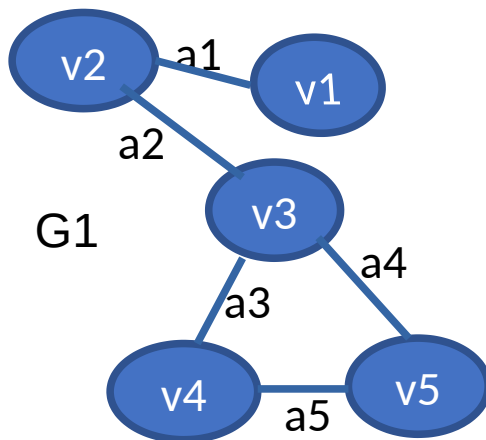
	v1	v2	v3	v4	v5
v1	0	1	0	0	0
v2	1	0	1	0	0
v3	0	1	0	1	1
v4	0	0	1	0	1
v5	0	0	1	1	0

Y

	a	b	c	d	e
a	0	1	1	0	0
b	1	0	1	0	0
c	1	1	0	1	0
d	0	0	1	0	1
e	0	0	0	1	0

Z

	a	b	c	d	e
v1	0	1	0	0	1
v2	1	0	1	0	0
v3	0	1	0	1	1
v4	0	0	1	0	1
v5	0	0	1	1	0



16. Discuta as complexidades de espaço das representações computacionais:

Matriz de adjacência

Matriz de incidência

Lista de adjacências