

Autômato com Pilha

♦ Classe das LLC

- pode ser associada a um formalismo do tipo autômato
- denominado *Autômato com Pilha*

♦ Autômato com Pilha (AP)

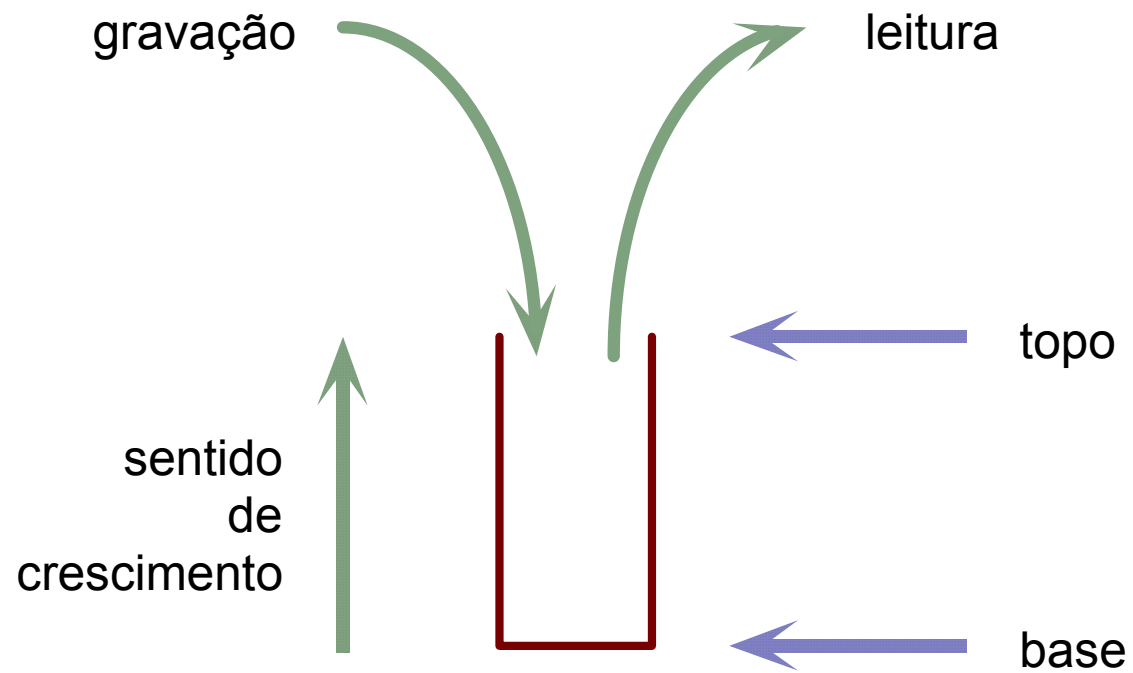
- análogo ao Autômato Finito incluindo
 - * não-determinismo
 - * estrutura de pilha
- *não-determinismo* \times AP
 - * importante e necessária
 - * aumenta o poder computacional

* exemplo: o reconhecimento da linguagem

$\{ww^r \mid w \text{ é palavra sobre } \{a, b\}\}$

só é possível por um AP não-determinístico

- *pilha*
 - * memória auxiliar
 - * independente da fita de entrada
 - * não possui limite máximo de tamanho ("infinita")
- estrutura de uma pilha:
 - * último símbolo gravado é o primeiro a ser lido
 - * *base*: é fixa e define o seu início
 - * *topo*: é variável e define a posição do último símbolo gravado



♦ Poder computacional do AP

- muito superior ao do Autômato Finito
- mas ainda é restrito
- exemplo: não reconhece

$\{ww \mid w \text{ é palavra sobre } \{a, b\}\}$

$\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

♦ AP × Número de estados

- qq LLC pode ser reconhecida por um AP com somente
 - * *um estado* ou
 - * *três estados*
 - * dependendo da definição
- a pilha é suficiente como única memória

- * os estados não são necessários para "memorizar" informações passadas
- * poderiam ser excluídos sem reduzir o poder computacional

Definição do Autômato com Pilha

♦ AP

- duas definições universalmente aceitas
- diferem no critério de parada do autômato

♦ *Estados Finais*

- valor inicial da pilha é vazio
- AP pára aceitando ao atingir um estado final

♦ *Pilha Vazia*

- pilha contém, inicialmente, um símbolo especial denominado símbolo inicial da pilha
- não existem estados finais

- AP pára aceitando quando a pilha estiver vazia

♦ As duas definições são equivalentes

- possuem o mesmo poder computacional
- é fácil modificar um AP para satisfazer a outra definição
- adotamos o modelo com estados finais

♦ AP ou AP Não-Determinístico

- *Fita*
- *Pilha*
- *Unidade de controle*
 - * *Cabeça de fita*
 - * *Cabeça da pilha*
- *Programa ou Função de Transição*

◆ *Fita*

- Análoga à do Autômato Finito

♦ *Pilha*

- **memória auxiliar**
- pode ser usada livremente para **leitura e gravação**
- dividida em células
- cada célula
 - * um símbolo de um **alfabeto auxiliar**
 - * pode ser igual ao alfabeto de entrada
- leitura ou gravação
 - * sempre na mesma extremidade
 - * *topo*
- **não possui tamanho fixo e nem máximo**
- tamanho corrente
 - * tamanho da palavra armazenada

- valor inicial: vazio

♦ *Unidade de Controle*

- reflete o estado corrente da máquina
- possui
 - * *cabeça de fita*
 - * *cabeça de pilha*

♦ *Cabeça de Fita*

- unidade de leitura
- acessa uma célula da fita de cada vez
- movimenta-se exclusivamente para a direita
- pode-se **testar se leu toda a entrada**

♦ *Cabeça da Pilha*

- unidade de *leitura* e *gravação*
- *leitura*
 - * move para a direita ("para baixo")
 - * acessa um símbolo de cada vez: topo
 - * exclui o símbolo lido
 - * é possível **testar se a pilha está vazia**

- *gravação*

- * move para a esquerda ("para cima")
- * é possível *armazenar* uma *palavra* composta por mais de um símbolo
- * neste caso, o *símbolo* do *topo* é o *mais à esquerda* da palavra gravada

♦ Programa ou Função de Transição

- programa
 - * comanda a leitura da fita
 - * comanda a leitura e gravação da pilha
 - * define o estado da máquina
- dependendo
 - * estado corrente
 - * símbolo lido da fita
 - * símbolo lido da pilha
- determina
 - * novo estado
 - * palavra a ser gravada
- movimento vazio

- * análogamente ao Autômato Finito
- * pode mudar de estado sem ler da fita ou da pilha

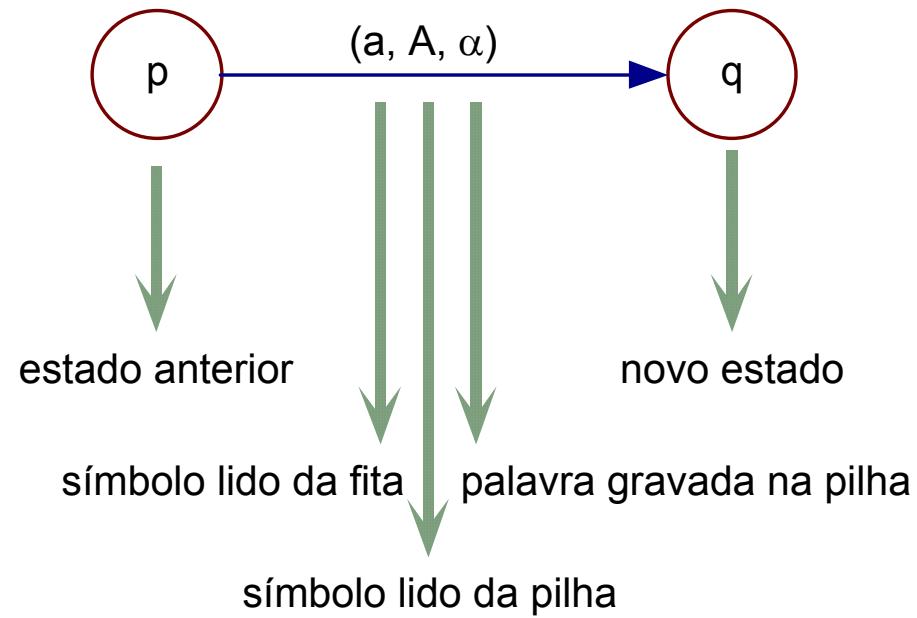
♦ *Definição: Autômato com Pilha*

- *Autômato com Pilha Não-Determinístico* (APN)
ou simplesmente *Autômato com Pilha* (AP)
- $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F, V)$
 - * Σ alfabeto de *símbolos de entrada*
 - * Q conjunto finito de *estados*
 - * δ *função programa* ou *função de transição*
 $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon, ?\}) \times (V \cup \{\epsilon, ?\}) \rightarrow 2^{Q \times V^*}$
função *parcial*
 - * q_0 *estado inicial* do autômato tq $q_0 \in Q$
 - * F conjunto de *estados finais* tq $F \subseteq Q$
 - * V *alfabeto auxiliar* ou *alfabeto da pilha*

♦ Características da Função Programa

- a função pode não ser total
- "?" indica teste de
 - * toda palavra de entrada lida
 - * pilha vazia
- " ϵ "
 - * leitura: movimento vazio da fita ou da pilha
 - * gravação: nenhuma gravação é realizada na pilha
- Exemplo: $\delta(p, ?, \epsilon) = \{(q, \epsilon)\}$
 - * no estado p
 - * se a entrada foi completamente lida
 - * não lê da pilha
 - * assume o estado q
 - * não grava na pilha

- representação como um grafo direto



♦ *Processamento de um AP, para uma palavra de entrada*

- sucessiva aplicação da função programa até ocorrer uma condição de parada
- é possível que um AP nunca atinja uma condição de parada
 - * ciclo ou "loop" infinito
 - * exemplo: empilha e desempilha um mesmo símbolo indefinidamente, sem ler da fita

♦ Parada de um AP

- pára aceitando
 - * um dos caminhos alternativos assume um estado final
- pára rejeitando
 - * todos os caminhos alternativos rejeitam

- loop infinito
 - * pelo menos um caminho alternativo está em "loop"
 - * os demais rejeitam ou também estão em "loop" infinito

♦ Notações

- **ACEITA(M)** ou **L(M)**
 - * conj das palavras de Σ^* aceitas por **M**
- **REJEITA(M)**
 - * conj das palavras de Σ^* rejeitadas por **M**
- **LOOP(M)**
 - * conj das palavras de Σ^* para as quais **M** fica processando indefinidamente

♦ As seguintes afirmações são verdadeiras

- $\text{ACEITA(M)} \cap \text{REJEITA(M)} \cap \text{LOOP(M)} = \emptyset$
- $\text{ACEITA(M)} \cup \text{REJEITA(M)} \cup \text{LOOP(M)} = \Sigma^*$

- o complemento de

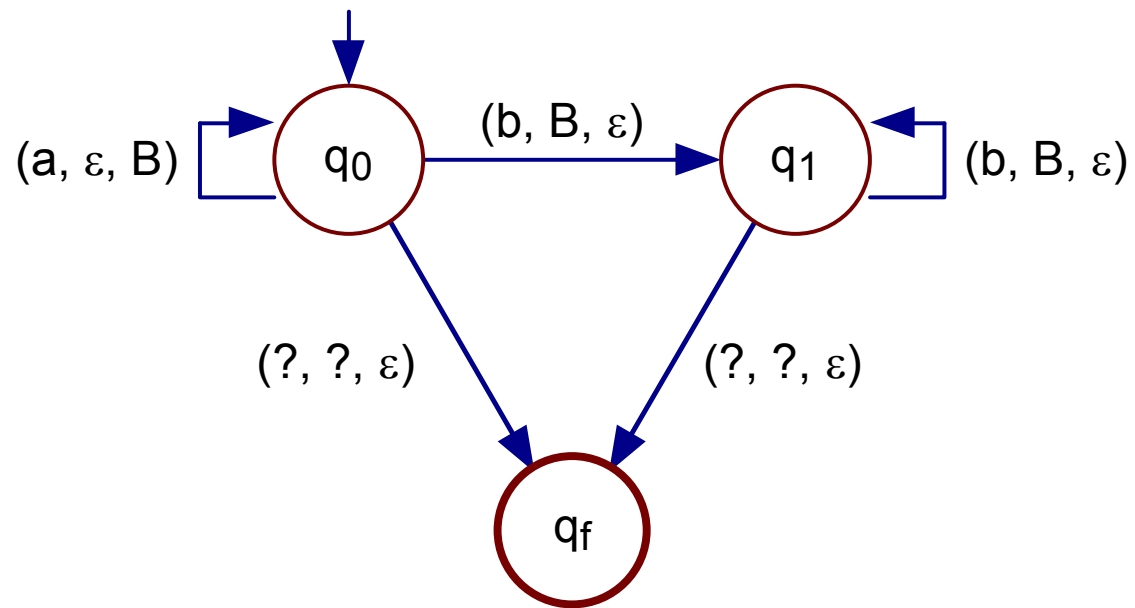
$ACEITA(M)$ é $REJEITA(M) \cup LOOP(M)$

$REJEITA(M)$ é $ACEITA(M) \cup LOOP(M)$

$LOOP(M)$ é $ACEITA(M) \cup REJEITA(M)$

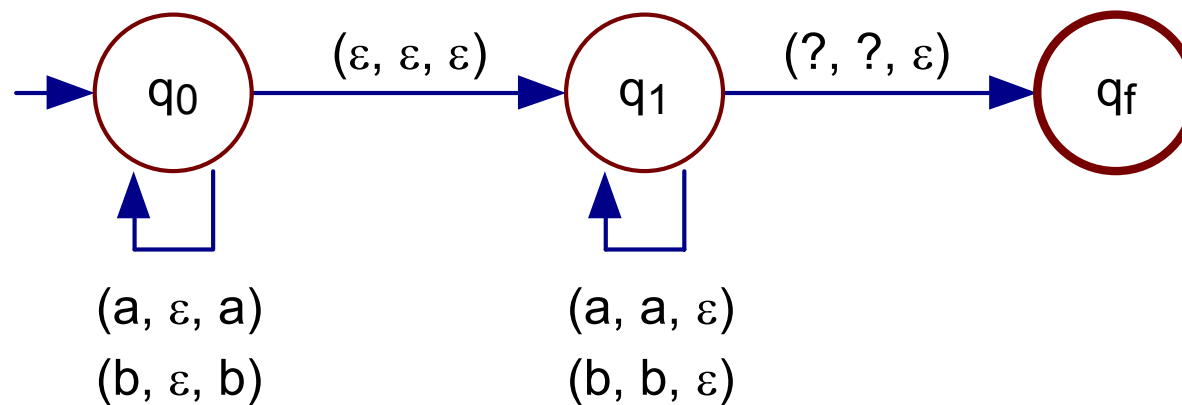
◆ Exemplo: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

- um AP determinístico
- $M_1 = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_f\}, \delta_1, q_0, \{q_f\}, \{B\})$
 - * $\delta_1 (q_0, a, \varepsilon) = \{(q_0, B)\}$
 - * $\delta_1 (q_0, b, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
 - * $\delta_1 (q_0, ?, ?) = \{(q_f, \varepsilon)\}$
 - * $\delta_1 (q_1, b, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
 - * $\delta_1 (q_1, ?, ?) = \{(q_f, \varepsilon)\}$

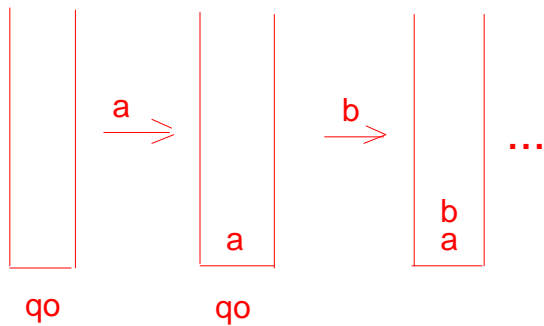


♦ Exemplo: $\{ww^r \mid w \in \{a, b\}^*\}$

- um AP não-determinístico



abaaba



♦ Exemplo: $\{a^n b^m a^{n+m} \mid n \geq 0, m \geq 0\}$

