

Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral

Polinômios e Fatoração

Prof. Dani Prestini

Polinômios

Definição:

um polinômio na variável x é toda expressão que pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Onde:

- a) n é um número natural e $a_n \neq 0$.
- b) os números $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ são números reais chamados de coeficientes.
- c) o maior expoente da variável define o grau do polinômio.

Polinômios

Adição e Subtração de Polinômios

Nesta operação devemos adicionar ou subtrair somente os termos semelhantes (termos com a mesma parte variável).

Exemplos:

$$\begin{aligned} a) (2x^2 + 3x - 2) + (3x^2 - 2x + 6) &= \\ &= (2x^2 + 3x^2) + (3x - 2x) + (-2 + 6) \\ &= (5x^2) + (1x) + (4) \\ &= 5x^2 + x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (-3x^2 + 5x - 8) - (x^3 + 5x^2 - 6) &= \\ &= (0x^3 - x^3) + (-3x^2 - 5x^2) + (5x - 0x) + (-8 + 6) \\ &= (-x^3) + (-8x^2) + (5x) + (-2) \\ &= -x^3 - 8x^2 + 5x - 2 \end{aligned}$$

Polinômios

Multiplicação de Polinômios

Nesta operação devemos multiplicar todos os termos de um polinômio por todos os termos do outro polinômio.

Exemplos:

$$\begin{aligned} a) (2x^2 - 2) \cdot (-2x + 6) &= \\ &= (2x^2) \cdot (-2x) + (2x^2) \cdot (6) + (-2) \cdot (-2x) + (-2) \cdot (6) \\ &= (-4x^3) + (12x^2) + (4x) + (-12) \\ &= -4x^3 + 12x^2 + 4x - 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (-3x^4 + 5x^3 - 8) \cdot (x^2 - 6) &= \\ &= (-3x^4) \cdot (x^2) + (-3x^4) \cdot (-6) + (5x^3) \cdot (x^2) + (5x^3) \cdot (-6) + (-8) \cdot (x^2) + (-8) \cdot (-6) \\ &= (-3x^6) + (18x^4) + (5x^5) + (-30x^3) + (-8x^2) + (48) \\ &= -3x^6 + 5x^5 + 18x^4 - 30x^3 - 8x^2 + 48 \end{aligned}$$

Polinômios

Produtos Notáveis

São regras que simplificam algumas multiplicações algébricas.

Caso 1) Quadrado da soma de dois termos:

$$(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

De maneira geral: $\Rightarrow (1^{\circ} + 2^{\circ})^2 = (1^{\circ})^2 + 2 \cdot (1^{\circ}) \cdot (2^{\circ}) + (2^{\circ})^2$

Exemplo: $(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot (2) + (2)^2$

$$= 9x^2 + 12x + 4$$

Caso 2) Quadrado da diferença de dois termos:

$$(x - y)^2 = (x - y) \cdot (x - y) = x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

De maneira geral: $\Rightarrow (1^{\circ} - 2^{\circ})^2 = (1^{\circ})^2 - 2 \cdot (1^{\circ}) \cdot (2^{\circ}) + (2^{\circ})^2$

Exemplo: $(x - 2)^2 = (x)^2 - 2 \cdot (x) \cdot (2) + (2)^2$

$$= x^2 - 4x + 4$$

Polinômios

Produtos Notáveis

Caso 3) Produto da soma pela diferença de dois termos:

$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$$

De maneira geral: $\Rightarrow (1^0 + 2^0) \cdot (1^0 - 2^0) = (1^0)^2 - (2^0)^2$

Exemplo: $(x + 2) \cdot (x - 2) = (x)^2 - (2)^2 = x^2 - 4$

Alguns produtos notáveis

Sejam u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas.

- | | |
|--|---|
| 1. Produto de uma soma e de uma diferença: | $(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$ |
| 2. Quadrado de uma soma de dois termos: | $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ |
| 3. Quadrado de uma diferença de dois termos: | $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$ |
| 4. Cubo de uma soma de dois termos: | $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ |
| 5. Cubo de uma diferença de dois termos: | $(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$ |

Polinômios

Produtos Notáveis

Exemplos:

$$a) (5y - 4)^2 = 25y^2 - 40y + 16$$

$$b) (-2x - 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$c) (y + 4)^2 = y^2 + 8y + 16$$

$$d) (x - 2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$$

$$e) (3x + 8) \cdot (3x - 8) = 9x^2 - 64$$

Polinômios

Fatoração

Fatoração é o processo pelo qual escrevemos um polinômio como um produto de outros polinômios. Os casos mais comuns são:

Caso 1) Colocação dos fatores comuns em evidência:

Exemplos: $a) 2x^3 + 2x^2 - 6x$
 $= 2x(x^2 + x - 3)$

$b) u^3v + uv^3$
 $= uv(u^2 + v^2)$

Caso 2) Fatoração da diferença de dois quadrados:

Exemplos: $a) 25x^2 - 36$
 $= (5x)^2 - (6)^2$
 $= (5x + 6) \cdot (5x - 6)$

$b) 4y^2 - 25x^4$
 $= (2y)^2 - (5x^2)^2$
 $= (2y + 5x^2) \cdot (2y - 5x^2)$

Polinômios

Fatoração

Caso 3) Fatoração dos trinômios quadrados perfeitos:

Exemplos: $a) 9x^2 + 6x + 1$
 $= (3x + 1)^2$

$b) 4x^2 - 12xy + 9y^2$
 $= (2x - 3y)^2$

Caso 4) Fatoração de trinômios:

Fatorar o trinômio $ax^2 + bx + c$ como um produto de binômios com coeficientes inteiros requer fatorar os inteiros a e c , isto é, transformá-los em produtos de 2 números.

$$ax^2 + bx + c = (\square x + \square)(\square x + \square)$$

Fatores de a

Fatores de c

Polinômios

Fatoração

Caso 4) Fatoração de trinômios:

Exemplo: a) $x^2 + 5x - 14$

$a = 1 \Rightarrow 1 \quad e \quad 1$	$= (x + 1) \cdot (x - 14)$	$= x^2 - 13x - 14$
$a = 1 \Rightarrow -1 \quad e \quad -1$	$= (-x + 1) \cdot (-x - 14)$	$= x^2 + 13x - 14$
	$= (x - 1) \cdot (x + 14)$	$= x^2 + 13x - 14$
	$= (-x - 1) \cdot (-x + 14)$	$= x^2 - 13x - 14$
$c = -14 \Rightarrow 1 \quad e \quad -14$	$= (x + 2) \cdot (x - 7)$	$= x^2 - 5x - 14$
$c = -14 \Rightarrow -1 \quad e \quad 14$	$= (-x + 2) \cdot (-x - 7)$	$= x^2 + 5x - 14$
$c = -14 \Rightarrow 2 \quad e \quad -7$	$= (x - 2) \cdot (x + 7)$	$= x^2 + 5x - 14$
$c = -14 \Rightarrow -2 \quad e \quad 7$	$= (-x - 2) \cdot (-x + 7)$	$= x^2 - 5x - 14$

Polinômios

Fatoração

Caso 5) Fatoração por agrupamento:

Exemplos:

$$\begin{aligned} a) \quad 3x^3 + x^2 - 6x - 2 &= x^2(3x + 1) - 2(3x + 1) \\ &= (3x + 1) \cdot (x^2 - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad 2ac - 2ad + bc - bd &= 2a(c - d) + b(c - d) \\ &= (c - d) \cdot (2a + b) \end{aligned}$$