

**Lista 3 - Produto de vetores**

Professora Marielle Ap. Silva

*Exercícios de 1 a 21 - Produto Escalar*

**Exercício 1.** Dados os vetores  $\vec{u} = (1, a, -2a - 1)$ ,  $\vec{v} = (a, a - 1, 1)$  e  $\vec{w} = (a, -1, 1)$ , determinar  $a$  de modo que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$ .

**Exercício 2.** Determinar o valor de  $n$  para que o vetor  $\vec{v} = \left(n, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$  seja unitário.

**Exercício 3.** Dados os pontos  $A = (1, 0, -1)$ ,  $B = (4, 2, 1)$  e  $C = (1, 2, 0)$ , determinar o valor de  $m$  para que  $|\vec{v}| = 7$ , sendo  $\vec{v} = m\vec{AC} + \vec{BC}$ .

**Exercício 4.** Calcular o perímetro do triângulo de vértices  $A = (0, 1, 2)$ ,  $B = (-1, 0, -1)$  e  $C = (2, -1, 0)$ .

**Exercício 5.** Os pontos  $A, B$  e  $C$  são vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede 10 cm. Calcular o produto escalar dos vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{AC}$ .

**Exercício 6.** Determinar os ângulos do triângulo de vértices  $A = (2, 1, 3)$ ,  $B = (1, 0, -1)$  e  $C = (-1, 2, 1)$ .

**Exercício 7.** Dados os vetores  $\vec{a} = (2, 1, \alpha)$ ,  $\vec{b} = (\alpha + 2, -5, 2)$  e  $\vec{c} = (2\alpha, 8, \alpha)$ , determinar o valor de  $\alpha$  para que o vetor  $\vec{a} + \vec{b}$  seja ortogonal ao vetor  $\vec{c} - \vec{a}$ .

**Exercício 8.** Determinar o vetor  $\vec{v}$ , paralelo ao vetor  $\vec{u} = (1, -1, 2)$ , tal que  $\vec{v} \cdot \vec{u} = -18$ .

**Exercício 9.** Prove que os pontos  $(5, 1, 5)$ ,  $B = (4, 3, 2)$  e  $C = (-3, -2, 1)$  são vértices de um triângulo retângulo.

**Exercício 10.** Qual o valor de  $\alpha$  para que os vetores  $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$  e  $\vec{b} = (\alpha + 1)\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$  sejam ortogonais?

**Exercício 11.** Os ângulos diretores de um vetor podem ser  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{\pi}{2}$ ?

**Exercício 12.** Determinar o vetor  $\vec{v}$ , sabendo que  $|\vec{v}| = 5$ ,  $\vec{v}$  é ortogonal ao eixo  $z$ ,  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6$  e  $\vec{w} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$ .

**Exercício 13.** Determine um vetor de módulo 5 paralelo ao vetor  $\vec{v} = (1, -1, 2)$ .

**Exercício 14.** O vetor  $\vec{v}$  é ortogonal aos vetores  $\vec{u} = (2, -1, 3)$  e  $\vec{w} = (1, 0, -2)$  e forma ângulo agudo com o vetor  $\vec{j}$ . Calcule  $\vec{v}$ , sabendo que  $|\vec{v}| = 3\sqrt{6}$ .

**Exercício 15.** Determine a projeção do vetor  $\vec{u} = (1, 2, -3)$  na direção de  $\vec{v} = (2, 1, -2)$ .

**Exercício 16.** Qual o comprimento do vetor projeção de  $\vec{u} = (3, 5, 2)$  sobre o eixo dos  $x$ ?

**Exercício 17.** Mostre que se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores tais que  $\vec{u} + \vec{v}$  é ortogonal a  $\vec{u} - \vec{v}$ , então  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ .

**Exercício 18.** Mostre que se  $\vec{u}$  for ortogonal a  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ ,  $\vec{u}$  também será ortogonal a  $\vec{v} + \vec{w}$ .

**Exercício 19.** Calcule o módulo dos vetores  $\vec{u} + \vec{v}$  e  $\vec{u} - \vec{v}$ , sabendo que  $|\vec{u}| = 4$ ,  $|\vec{v}| = 3$  e o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é de  $\frac{\pi}{3}$ .

**Exercício 20.** Sabendo que  $|\vec{u}| = 2$ ,  $|\vec{v}| = 3$  e que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  formam um ângulo de  $\frac{3\pi}{4}$  rad, determinar  $|(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})|$ .

**Exercício 21.** Determine  $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ , sabendo que  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ ,  $|\vec{u}| = 2$ ,  $|\vec{v}| = 3$  e  $|\vec{w}| = \sqrt{5}$ .

### *Exercícios de 22 a 32 - Produto Vetorial*

**Exercício 22.** Dados os vetores  $\vec{u} = (2, -1, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, -1, 0)$  e  $\vec{w} = (-1, 2, 2)$ , calcule:

- $\vec{w} \times \vec{u}$
- $\vec{v} \times (\vec{w} - \vec{u})$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$
- $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$
- $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

**Exercício 23.** Determinar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores  $2\vec{a} + \vec{b}$  e  $\vec{b} - \vec{a}$ , sendo  $\vec{a} = (3, -1, -2)$  e  $\vec{b} = (1, 0, -3)$ .

**Exercício 24.** Determinar o valor de  $m$  para que o vetor  $\vec{w} = (1, 2, m)$  seja simultaneamente ortogonal aos vetores  $\vec{v}_1 = (2, -1, 0)$  e  $\vec{v}_2 = (1, -2, -1)$ .

**Exercício 25.** Determinar um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores  $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$  e  $\vec{v}_2 = (2, -1, 3)$ . Nas mesmas condições, determinar um vetor de módulo 5.

**Exercício 26.** Sabendo que  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{2}$  e que  $\frac{\pi}{4}$  é o ângulo entre  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , calcular  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ .

**Exercício 27.** Se  $|\vec{u} \times \vec{v}| = 3\sqrt{3}$ ,  $|\vec{u}| = 3$  e  $\frac{\pi}{3}$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , determinar  $|\vec{v}|$ .

**Exercício 28.** Calcular a área do paralelogramo definido pelos vetores  $\vec{u} = (3, 1, 2)$  e  $\vec{v} = (4, -1, 0)$ .

**Exercício 29.** Mostre que o quadrilátero cujos vértices são os pontos  $A = (1, -2, 3)$ ,  $B = (4, 3, -1)$ ,  $C = (5, 7, -3)$  e  $D = (2, 2, 1)$  é um paralelogramo e calcular sua área.

**Exercício 30.** Calcular a área do triângulo de vértices:

- $A = (-1, 0, 2)$ ,  $B = (-4, 1, 1)$  e  $C = (0, 1, 3)$

b)  $A = (1, 0, 1)$ ,  $B = (4, 2, 1)$  e  $C = (1, 2, 0)$

**Exercício 31.** Calcular a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto  $A = (3, 2, 1)$  e uma diagonal de extremidades  $B = (1, 1, -1)$  e  $C = (0, 1, 2)$ .

**Exercício 32.** Encontre o valor de  $x$ , sabendo que  $A = (x, 1, 1)$ ,  $B = (1, -1, 0)$  e  $C = (2, 1, -1)$  são vértices de um triângulo de área  $\frac{\sqrt{29}}{2}$ .

*Exercícios de 33 a 37 - Produto Misto*

**Exercício 33.** Verificar se são coplanares os seguintes pontos:

a)  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (-2, -1, -3)$ ,  $C = (0, 2, -2)$  e  $D = (-1, 0, -2)$ ?

b)  $A = (1, 0, 2)$ ,  $B = (-1, 0, 3)$ ,  $C = (2, 4, 1)$  e  $D = (-1, -2, 2)$ ?

c)  $A = (2, 1, 3)$ ,  $B = (3, 2, 4)$ ,  $C = (-1, -1, -1)$  e  $D = (0, 1, -1)$ ?

**Exercício 34.** Para que valor de  $m$  os pontos  $A = (m, 1, 2)$ ,  $B = (2, -2, -3)$ ,  $C = (5, -1, 1)$  e  $D = (3, -2, -2)$  são coplanares?

**Exercício 35.** Determinar o valor de  $k$  para que os seguintes vetores sejam coplanares:

a)  $\vec{a} = (2, -1, k)$ ,  $\vec{b} = (1, 0, 2)$  e  $\vec{c} = (k, 3, k)$ ?

b)  $\vec{a} = (2, 1, 0)$ ,  $\vec{b} = (1, 1, -3)$  e  $\vec{c} = (k, 1, -k)$ ?

c)  $\vec{a} = (2, k, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, 2, k)$  e  $\vec{c} = (3, 0, -3)$ ?

**Exercício 36.** Calcular o valor de  $m$  para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{v} = 6\vec{i} + m\vec{j} - 2\vec{k}$  e  $\vec{w} = -4\vec{i} + \vec{k}$  seja igual a 10.

**Exercício 37.** Calcular o volume do tetraedro  $ABCD$ , sendo dados:

a)  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$ ,  $C = (0, 0, 1)$  e  $D = (4, 2, 7)$

b)  $A = (-1, 3, 2)$ ,  $B = (0, 1, -1)$ ,  $C = (-2, 0, 1)$  e  $D = (1, -2, 0)$

**Gabarito:**

1.  $a = 2$

2.  $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$

3. 3 ou  $-\frac{13}{5}$

4.  $2(\sqrt{11} + \sqrt{3})$

5. 50

6.  $\arccos(\frac{10}{3\sqrt{28}})$ ,  $\arccos(\frac{2\sqrt{6}}{9})$ ,  $\arccos(\frac{2}{\sqrt{42}})$

7. 3 ou -6

8.  $(-3, 3, -6)$

10. -3 ou 2

11. Não
12.  $(4, 3, 0)$  ou  $(-4, 3, 0)$
13.  $(\pm \frac{5}{\sqrt{6}}, \pm \frac{5}{\sqrt{6}}, \pm \frac{10}{\sqrt{6}})$
14.  $(2, 7, 1)$
15.  $\frac{10}{9}(2, 1, -1)$
16. 3
19.  $\sqrt{37}$  e  $\sqrt{13}$
20.  $26 + 15\sqrt{2}$
21. -9
22. a)  $(2, 2, -1)$  b)  $(-1, -1, 0)$  c)  $(-2, -2, 2)$  d) 3 e)  $(4, -1, 3)$
23.  $x(3, 7, 1)$ , sendo  $x \in \mathbb{R}$
24. -5
25.  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$  ou  $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$  e  $5(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$  ou  $5(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$
26. 3
27. 2
28.  $\sqrt{117}$
29.  $\sqrt{89}$
30. a)  $\sqrt{6}$  b)  $\frac{7}{2}$
31.  $\sqrt{74}$
32. 3 ou  $\frac{1}{5}$
33. a) Sim b) Não c) Sim
34.  $m = 4$
35. a) 6 b)  $\frac{3}{2}$  c) 2 ou -3
36. 6 ou -4
37. a) 2 b) 4