TEG

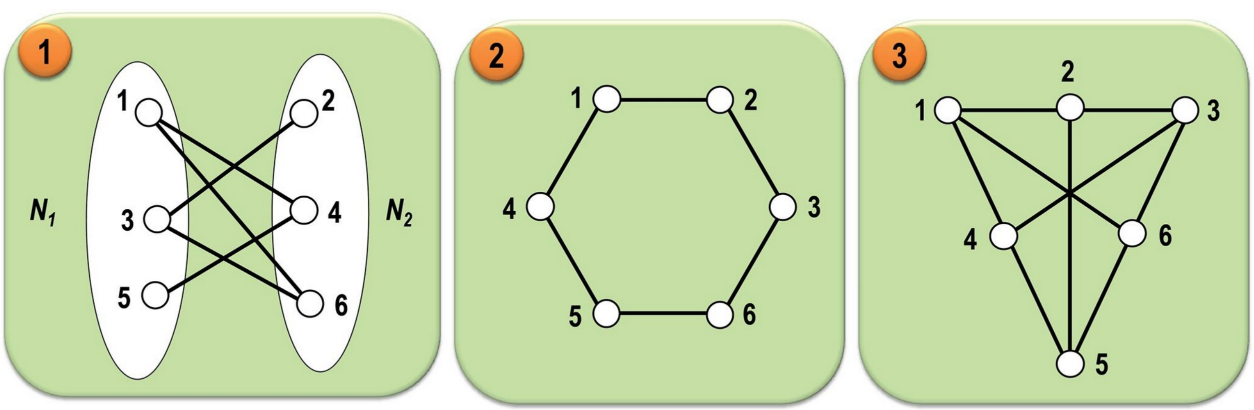
Gilmário B. Santos

gilmario.santos@udesc.br

http://www.joinville.udesc.br/portal/pagina/gilmario

Grafo bipartido

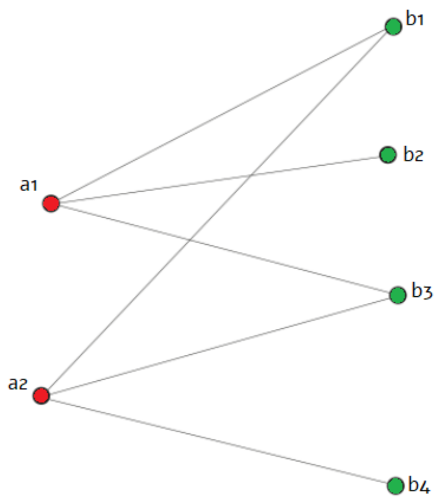
- Um grafo G(V,E) é bipartido quando o seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois subconjuntos disjuntos V1 e V2, tais que toda aresta de G conecta um vértice de V1 a outro de V2 e vice-versa.
  - $V = V1 \cup V2,\ V1 \cap V2 = \phi$
  - Não ocorrem arestas entre vértices de uma mesma partição.
- Exemplos de grafos bipartidos em que os conjuntos de vértices são {1,3,5} e {2,4,6}.



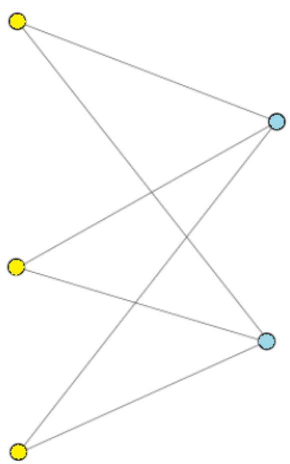
(Goldbarg,2012)

Grafo bipartido

- Um grafo bipartido completo possui uma aresta para cada par de vértices (v1,v2), onde v1 $\in$ V1 e v2 $\in$ V2.
- Se n1 = |V1| e n2 = |V2|, um grafo bipartido completo é denotado por $K_{n1,n2}$ e possui n1*n2 arestas



Grafo bipartido



Grafo bipartido completo K2,3

Grafo bipartido

- Aplicação na alocação de tarefas entre funcionário (*e*) e tarefa (*t*)

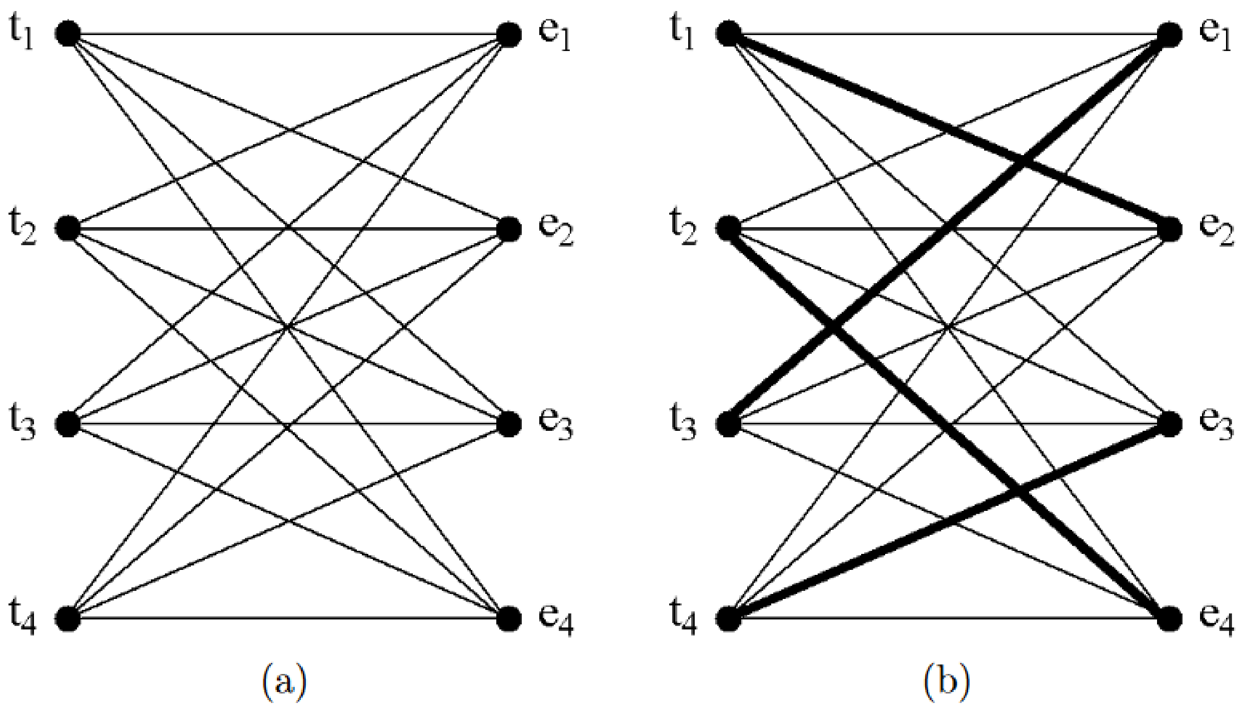
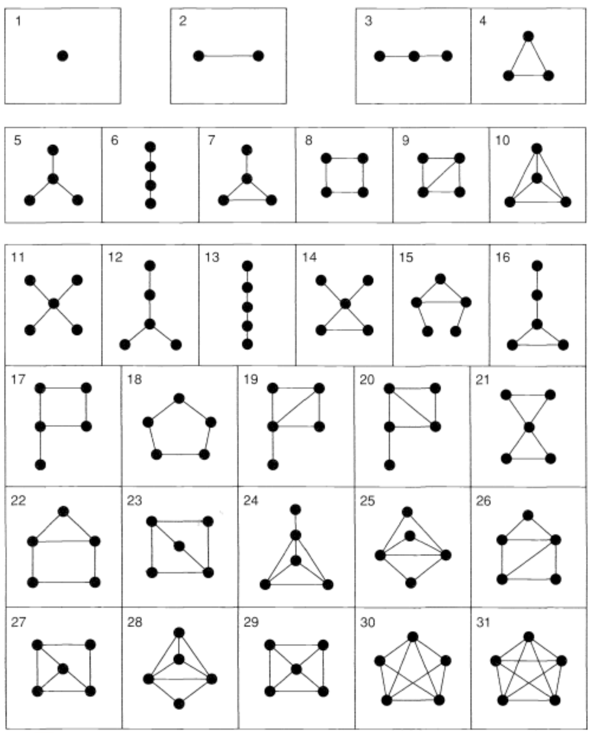


Figura 1.15: Associação de tarefas $t_i \in \mathbf{T}$ aos empregados $e_j \in \mathbf{E}$. (a) todas as associações (b) a associação escolhida, representada por arestas mais grossas.

Grafo bipartido

- Mostre que Q_k onde 1 <= k <= 3 são regulares e bipartidos;
- Quais grafos abaixo são bipartidos?



Dicas sobre o grafo bipartido:

Ele nunca conterá ciclos de comprimento ímpar. Qual é a razão para isso?

Ele nunca conterá K3 como subgrafo. Qual é a razão para isso?

O único grafo completo que pode ser bipartido é o K2.

Todo grafo caminho (Path – Pn) é bipartido.

König, 1936 (Teorema 1.2 em Goldbarg & Goldbar (2012)):

- Um grafo G é bipartido se e somente se todo ciclo em G for par.

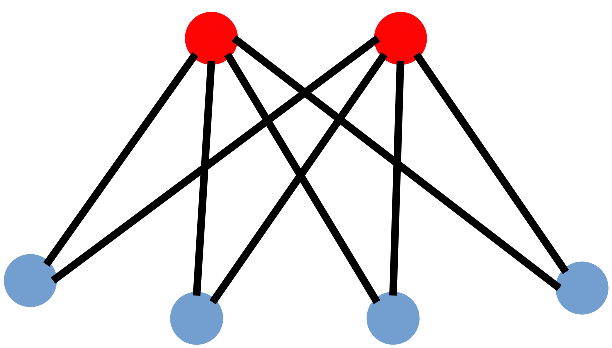
Grafo bipartido

Dicas sobre o grafo bipartido:

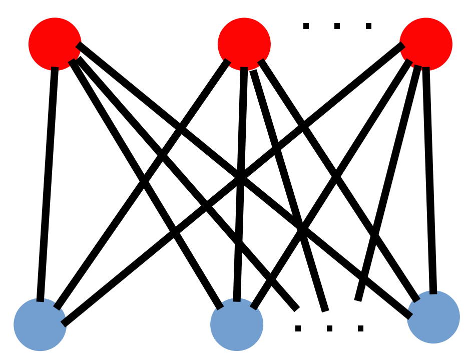
O único grafo completo que pode ser bipartido é o K2.

É possível falar em um grafo bipartido e completo, desde que se considere a “completude” respeitando cada partição do grafo.

Por exemplo, $K_{2,4}$ e $K_{m,n}$ são grafos bipartidos completos, nos quais cada partição apresenta seus vértices com o grau máximo permitido e as partições são respeitadas.



$K_{2,4}$



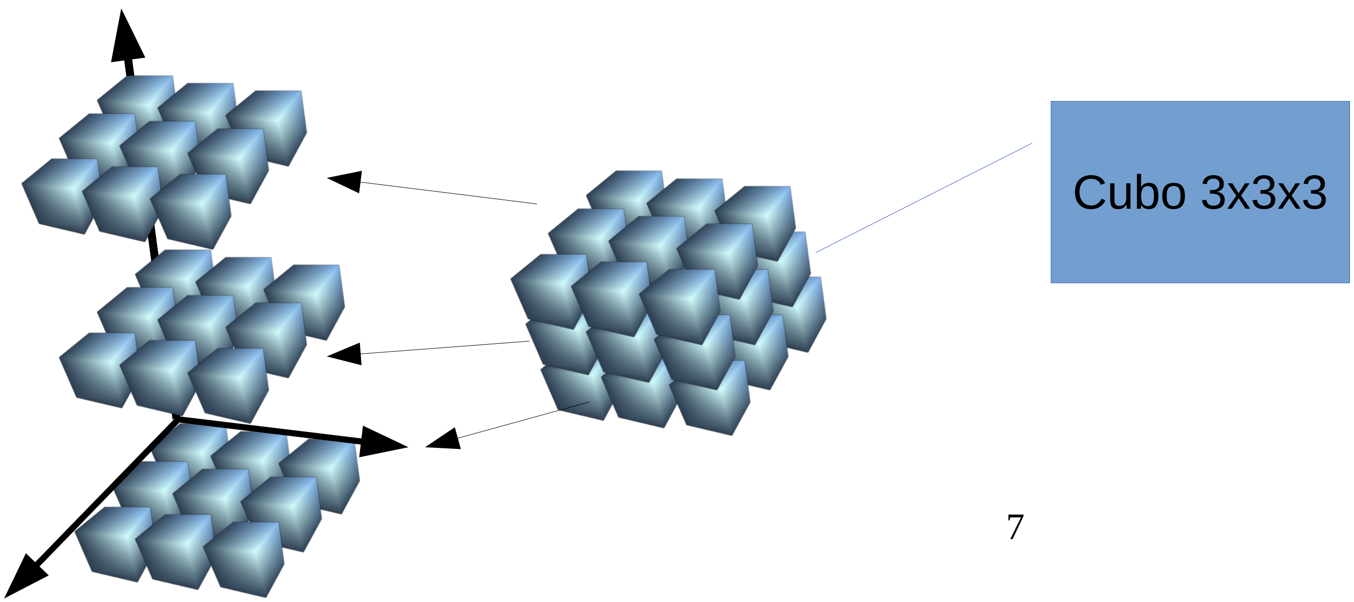
$K_{m,n}$

Grafo bipartido

Um rato come um cubo de 3x3x3 de queijo comendo todo os subcubos de 1x1x1 durante seu caminho. Ele começa num subcubo de um canto, come-o e se move para um subcubo adjacente (que divide uma face de área 1), comendo-o e se movendo para o próximo adjacente.

a) O percurso para o rato comer todos os subcubos do inicial até o final (sem retornar ao primeiro) é um grafo bipartido?
b) É possível ao rato comer todos os subcubos e, após o último ser comido, retornar à posição do primeiro subcubo comido e o grafo (resultante desse percurso) ser bipartido?

Exiba o circuito percorrido pelo rato no processo de comer os subcubos ou prove que é impossível. (Ignore a gravidade.)

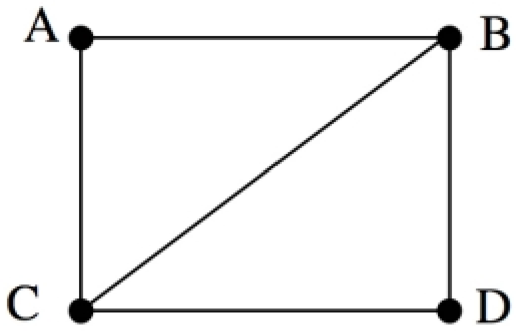


Grafo bipartido

Um emparelhamento M em um grafo G = (V, A) é um subconjunto de arestas, $M \subseteq A$, que não correspondem a laços e que não compartilham vértices entre si.
Portanto duas arestas a_i, $a_j \in A$, onde $a_i = \{v_i, u_i\}$ e $a_j = \{v_j, u_j\}$ e $i \neq j$, pertencem ao emparelhamento M, se $v_i \neq v_j \neq u_i \neq u_j$

Simplificando: um emparelhamento (ou matching, ou acoplamento) em um grafo G é um conjunto de arestas tal que não existem duas arestas adjacentes neste conjunto. Este conjunto também é chamado de conjunto independente de arestas.

Exemplos de emparelhamentos: {(B,C)} e {(A,C),(B,D)}



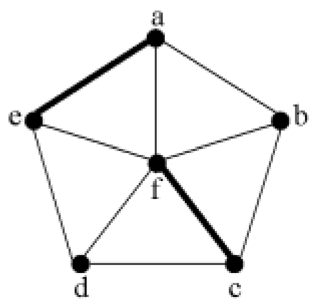
https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/MatematicaAplicada/docentes/socorro/emparelhamentos.pdf
https://www.inf.ufrgs.br/~prestes/Courses/Graph%20Theory/Capitulo%204.pdf

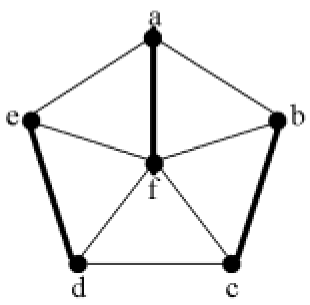
Grafo bipartido

Um emparelhamento é chamado de emparelhamento maximal se nenhuma aresta do grafo puder ser adicionada sem que a propriedade de não-adjacência entre as arestas seja destruída.

Observe que um grafo pode ter vários emparelhamentos maximais. Em geral, estamos interessados no emparelhamento maximal com o maior número possível de arestas, chamado emparelhamento máximo.

Exemplos: à esquerda temos um emparelhamento maximal de tamanho 2 e à direita um emparelhamento máximo de tamanho 3 (todo máximo é maximal mas nem todo maximal é máximo)





https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/MatematicaAplicada/docentes/socorro/emparelhamentos.pdf
https://www.inf.ufrgs.br/~prestes/Courses/Graph%20Theory/Capitulo%204.pdf

Grafo bipartido

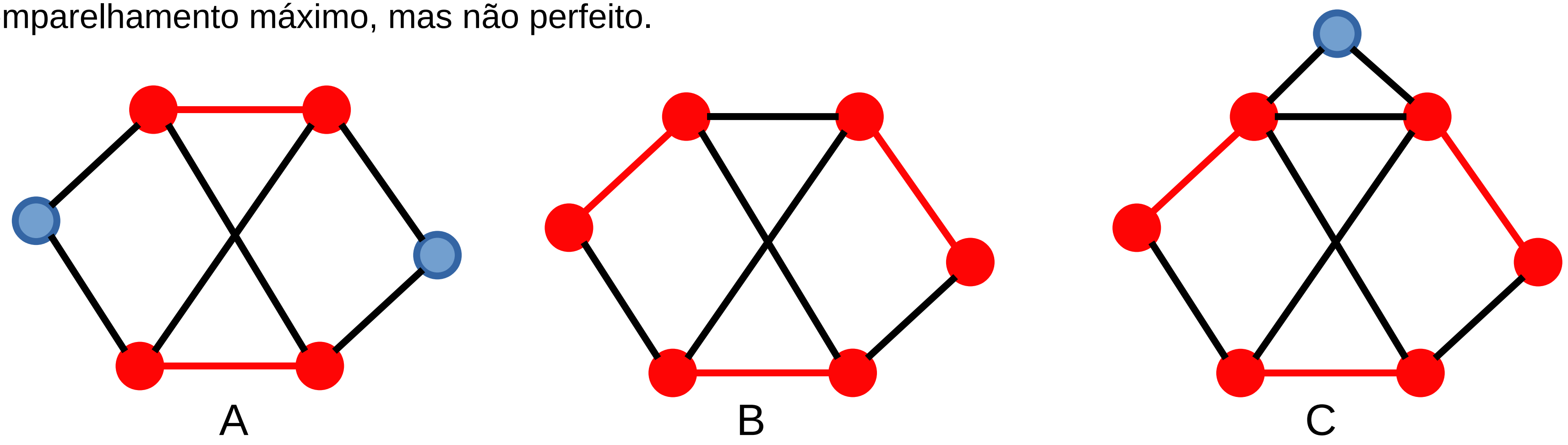
Quando uma aresta do emparelhamento e M é incidente a um vértice v $\in$ V, então dizemos que v é saturado por M.

Um emparelhamento máximo é chamado de emparelhamento perfeito se todo vértice do grafo é extremidade de alguma aresta do emparelhamento.

Outra forma de definir emparelhamento perfeito é: o emparelhamento é perfeito quando satura todos os vértices do grafo.

A e B: emparelhamento maximal e máximo que satura todos os vértices, portanto um emparelhamento perfeito para o mesmo grafo;

C: emparelhamento máximo, mas não perfeito.



https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/MatematicaAplicada/docentes/socorro/emparelhamentos.pdf
https://www.inf.ufrgs.br/~prestes/Courses/Graph%20Theory/Capitulo%204.pdf

Grafo bipartido

Emparelhamentos estão definidos para **qualquer tipo de grafo**, mas são estudados mais amplamente no contexto de grafos bipartidos.

Exemplo:

Suponha que existam 4 pessoas, a1, a2, a3 e a4 disponíveis para preencher 6 funções vagas, p1,. . ., p6.

As pessoas a1, a2 e a4 são qualificadas para exercer a função p2 ou p5. A pessoa a3 é qualificada para exercer a função p1, p2, p3, p4 ou p6.

Será possível empregar todas as pessoas de tal forma que cada pessoa desempenhe a função para a qual esta qualificada? Se a resposta é não, qual é o maior número de vagas que podem ser preenchidas? Como representar este problema através de um grafo?

Vértices: pessoas e funções vagas;

Arestas: existe uma aresta ligando uma pessoa às funções para as quais ela esta habilitada.

https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/MatematicaAplicada/docentes/socorro/emparelhamentos.pdf
https://www.inf.ufrgs.br/~prestes/Courses/Graph%20Theory/Capitulo%204.pdf

Grafo bipartido

Dois jogadores X e Y se alternam escolhendo vértices de um grafo bipartido k-regular. Primeiro X escolhe um vértice v_0, a seguir Y escolhe um vértice v_1 adjacente v_0 e assim por diante.

A escolha v_i é sempre um vértice distinto dos escolhidos anteriormente.

A escolha v_{i+1} é sempre um vértice adjacente a v_i e distinto dos escolhidos anteriormente.

O jogador que não puder fazer um movimento na sua vez, perde o jogo.

Por que Y tem uma estratégia vencedora?

Qual seria uma condição para X sempre vencer?

https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/MatematicaAplicada/docentes/socorro/emparelhamentos.pdf
https://www.inf.ufrgs.br/~prestes/Courses/Graph%20Theory/Capitulo%204.pdf

Grafo bipartido

Seja G um grafo bipartido completo com *n* vértices igualmente divididos entre as duas partições, prove que G tem a seguinte quantidade de arestas:

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

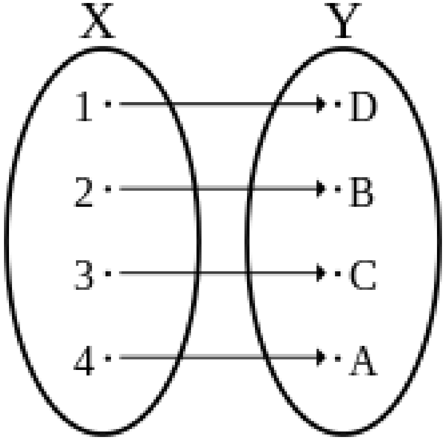
Mostre que um grafo bipartido completo com *n* vértices pode ter no máximo a quantidade de arestas da questão acima.

https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/MatematicaAplicada/docentes/socorro/emparelhamentos.pdf
https://www.inf.ufrgs.br/~prestes/Courses/Graph%20Theory/Capitulo%204.pdf

Função Bijetora

Relembrando:

- Sejam X e Y conjuntos e f : X → Y uma função de X a Y.
- A função f é bijetora quando associa cada elemento de X a um único de Y e vice-versa: a cada elemento de Y, um único de X.



Isomorfismo

Um isomorfismo entre dois grafos G1 e G2 é uma bijeção *f* de vértices de G1 (V(G1)) em vértices de G2 (V(G2)), tal que dois vértices *v* e *w* são adjacentes em G1 se e somente se *f*(v) e *f*(w) são adjacentes em G2.

Formalmente: dois grafos G1 = (V1, A1) e G2 = (V2, A2) são isomorfos, i.e., G1 ~= G2, se existe uma função bijetora f : V1 $\rightarrow$ V2, tal que (u, v) $\in$ A1 se e só se (f (u), f (v)) $\in$ A2.

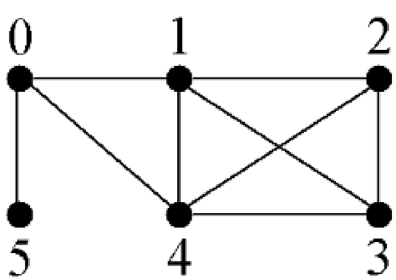
Importante destacar:

- G e G’ são isomorfos se e somente se existir uma função bijetiva entre V e V’ (conjuntos de vértices), que preserve suas relações de adjacência (Netto, P.O.B. e Jurkiewicz, S.,2017)

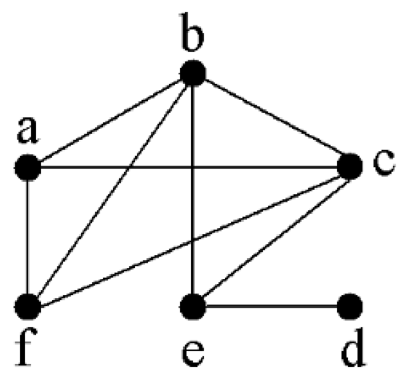
- |V(G)| = |V(G’)| e |E(G)| = |E(G’)|.

Na verdade, além das adjacências, outras propriedades também são preservadas pelo isomorfismo, tais como a mesma sequência de graus…

Os grafos abaixo são isomorfos pela bijeção da tabela:



(a)



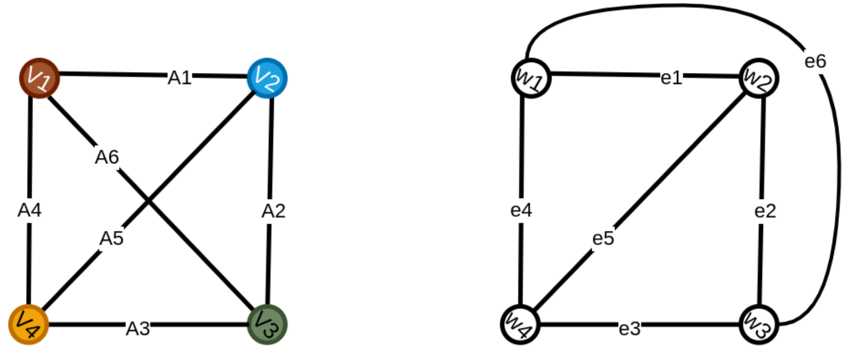
(b)

V_1	V_2
0	e
1	b
2	a
3	f
4	c
5	d

Isomorfismo

Para decidir se dois grafos G1 e G2 são isomorfos, basta examinar as possíveis bijeções de V1 em V2.

- Dados G1(V1,E1) e G2(V2,E2) com V1 = {v1,v2,v3,v4} V2={w1,w2,w3,w4}, a seguinte bijeção *f* determina um isomorfismo entre *G1 e G2*:
- f(v1)=w3; f(v3)=w1; f(v2)=w2; f(v4)=w4
  - (v1,v3) ∈ E1 ↔ (f(v1), f(v3)) = (w3,w1) ∈ E2: (v1,v3) → (w3,w1)
  - (v1,v2) ∈ E1 ↔ (f(v1), f(v2)) = (w3,w2) ∈ E2: (v1,v2) → (w3,w2)
  - (v1,v4) ∈ E1 ↔ (f(v1), f(v4)) = (w3,w4) ∈ E2: (v1,v4) → (w3,w4)
  - (v2,v3) ∈ E1 ↔ (f(v2), f(v3)) = (w2,w1) ∈ E2: (v2,v3) →(w2,w1);
  - (v2,v1) ∈ E1 ↔ (f(v2), f(v1)) = (w2,w3) ∈ E2:(v2,v1) → (w2,w3);
  - (v2,v4) ∈ E1 ↔ (f(v2), f(v4)) = (w2,w4) ∈ E2:(v2,v4) → (w2,w4)



Isomorfismo

Para decidir se dois grafos G e H são isomorfos, basta examinar as possíveis bijeções de V(G) em V(H), mas se cada um dos grafos tem *n* vértices, esse algoritmo pode chegar a consumir tempo proporcional a *n!*.

Esse tipo de algoritmo é computacionalmente insatisfatório na prática.

É desconhecido se existe ou não algum algoritmo eficiente para o problema geral da determinação de isomorfismo entre grafos.

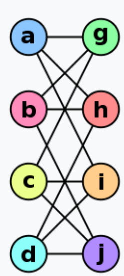
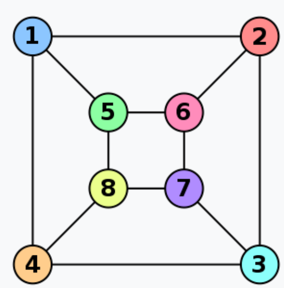
O problema não é conhecido por ser solucionável em tempo polinomial nem por ser NP-completo e, portanto, pode estar na classe de complexidade computacional NP-intermediária.

https://mathworld.wolfram.com/IsomorphicGraphs.html

Isomorfismo

Em suma: dois grafos são isomorfos se é possível alterar os nomes dos vértices de um deles de tal modo que os dois grafos fiquem iguais.

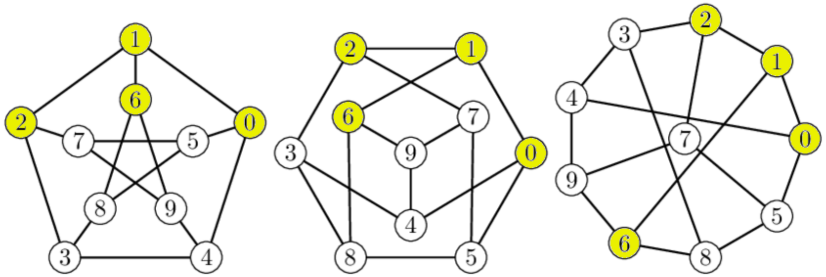
G e H abaixo podem se tornar coincidentes pela função *f* indicada na figura, eles são isomorfos entre si [Schwarzfitter,Jaime].

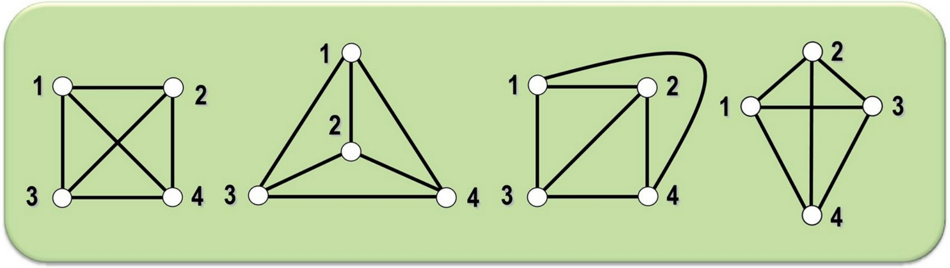
Grafo G	Grafo H	Um isomorfismo entre G e H
		$f(a) = 1$ $f(b) = 6$ $f(c) = 8$ $f(d) = 3$ $f(g) = 5$ $f(h) = 2$ $f(i) = 4$ $f(j) = 7$

Isomorfismo

Uma classe isomórfica de grafos é uma classe de equivalência (propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva) de grafos regida por uma relação de isomorfismo.

Exemplos de classes isomórficas para o grafo de Petersen e para o K_4;

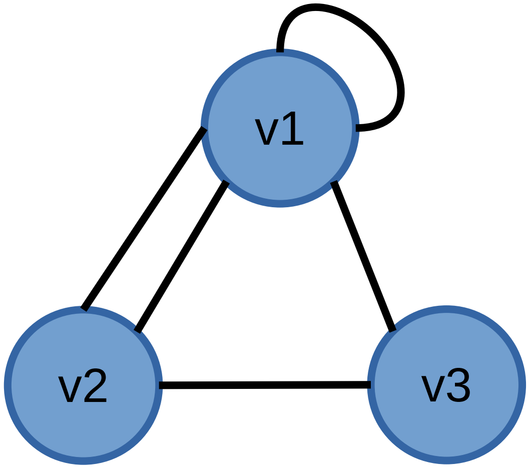




(Goldbarg, 2012)

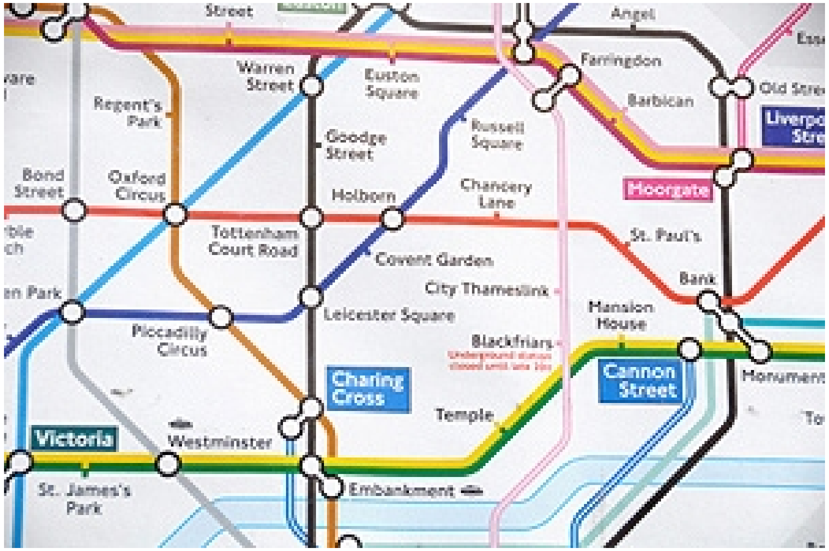
Isomorfismo

- Tente encontrar um isomorfo ao grafo abaixo, o que você conclui



https://math.stackexchange.com/questions/3201645/expanding-definition-of-simple-graph-isomorphism-to-include-multigraphs

Isomorfismo - Aplicações

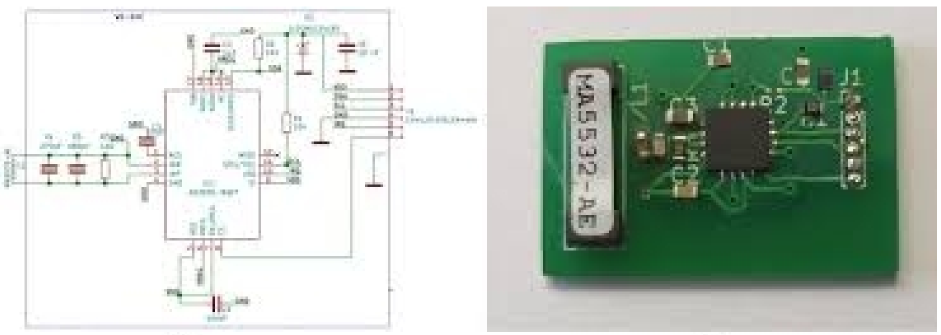


O mapa de estações de metrô tem uma aparência geométrica e simplista quando comparado ao mapa desenhado com precisão, no qual as estações são georreferenciadas. No entanto, os grafos correspondentes (vértices são estações e linhas são arestas) são isomorfos: a bijeção mapeia a coordenada de uma estação de um mapa para outro, por fim, cada vértice e cada aresta de um gráfico exatamente a um vértice ou aresta no outro (e vice-versa), de forma a preservar a conectividade do grafo (qual vértice está vinculado a qual).

https://plus.maths.org/content/maths-minute-graph-isomorphism-problem

Isomorfismo - Aplicações

Verificar se os diagramas originais do projeto estão coerentes com o layout do circuito eletrônico físico.

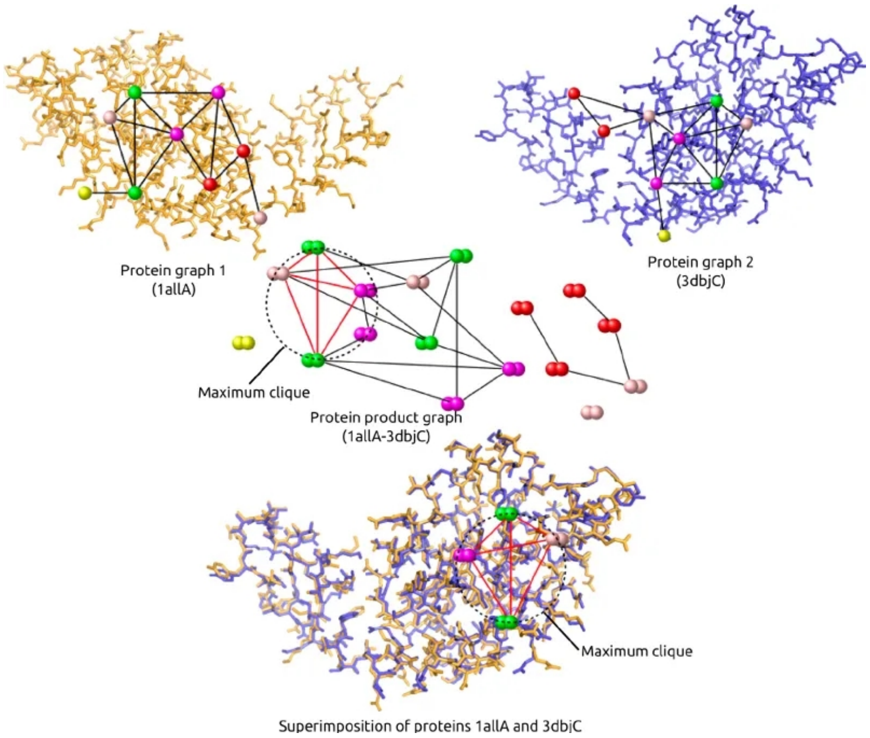


(a) (b)

Verificar se um chip de um fornecedor contém propriedade intelectual de um fornecedor diferente.

Isomorfismo - Aplicações

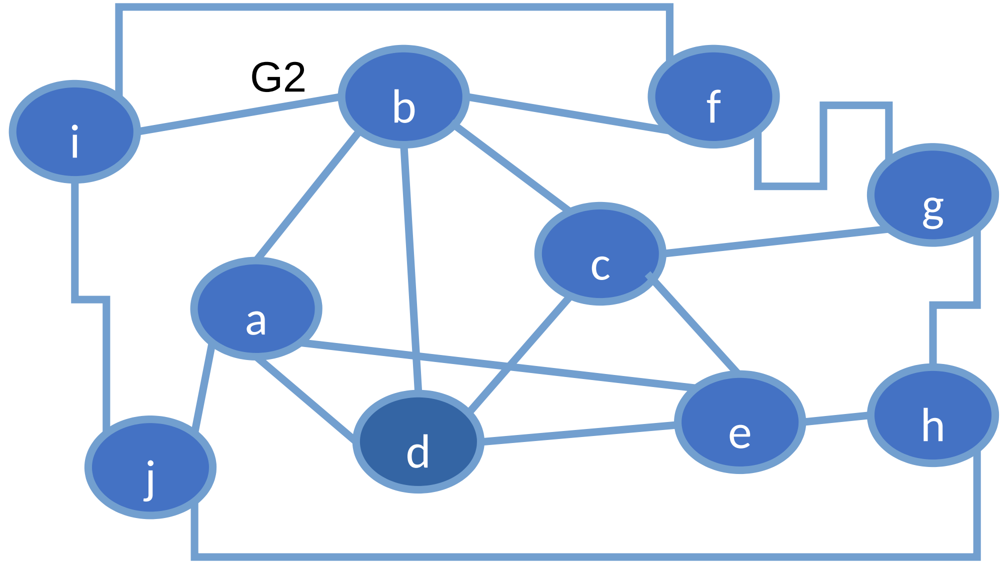
Verificar estruturas proteicas: as estruturas proteicas podem ser representadas por redes de grafos cujos nós representam proteínas e as arestas representam ligações. Usando o isomorfismo de grafos, importantes semelhanças ou diferenças entre estruturas de proteínas podem ser identificadas.



Determine se os pares de grafos abaixo são isomorfos:

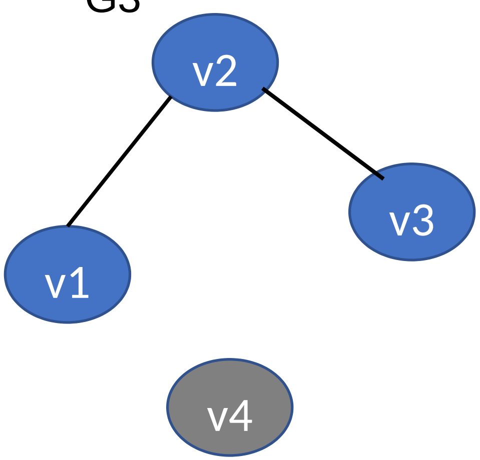
1) G1= Grafo de Petersen

G2

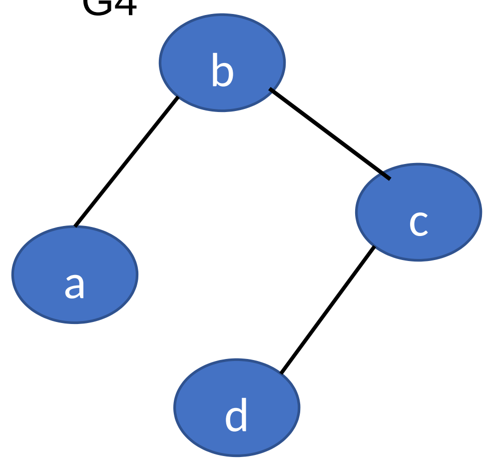


2)

G3



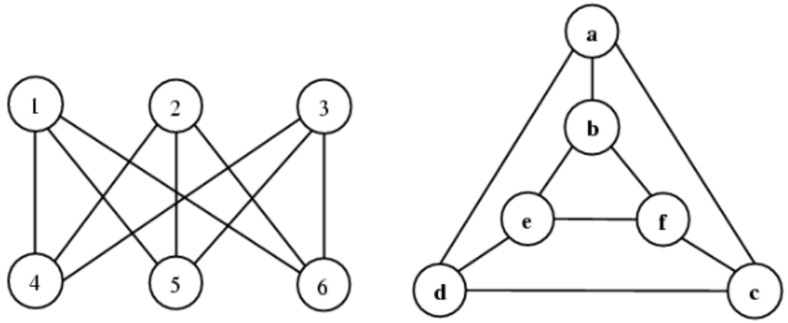
G4



Note que G1 é regular e que G3 é desconexo

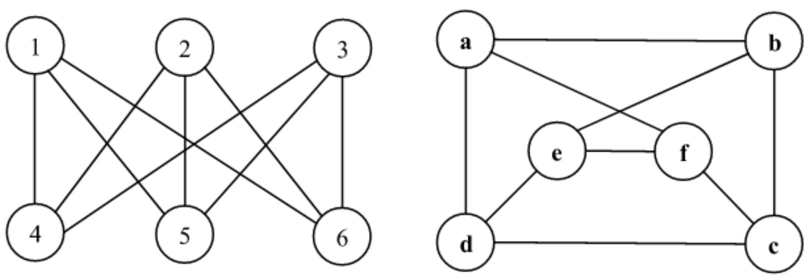
(Prudente, Edson UFRGS):

3)



G **G’**

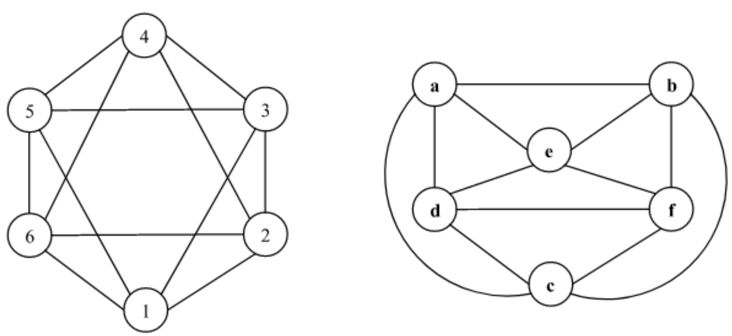
4)



G G'

V(G)	V(G')
1	a
2	e
3	c
4	b
5	d
6	f

5)



G G'

V(G)	V(G')
1	d
2	a
3	e
4	b
5	f
6	c

(Prestes, Edson UFRGS):

Isomorfismo

Note que algumas condições emergem:

Grafos isomorfos apresentam:

- O mesmo número de vértices e arestas;
- A mesma sequência gráfica;
- Se o primeiro grafo usa os vértices "v1, v2, v3,.... vk" para criar um ciclo de comprimento k, então outro gráfico também deve usar "f(v1), f(v2), f(v3),... f(vk)" para criar um ciclo de mesmo comprimento k.

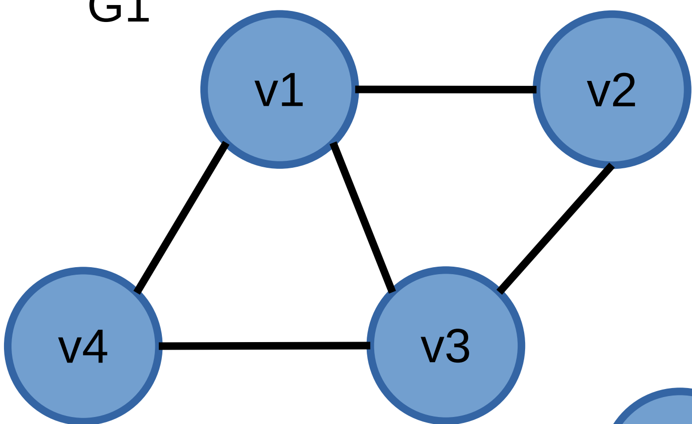
Porque essas condições são necessárias mas não são suficientes?

https://testbook.com/maths/graph-isomorphism

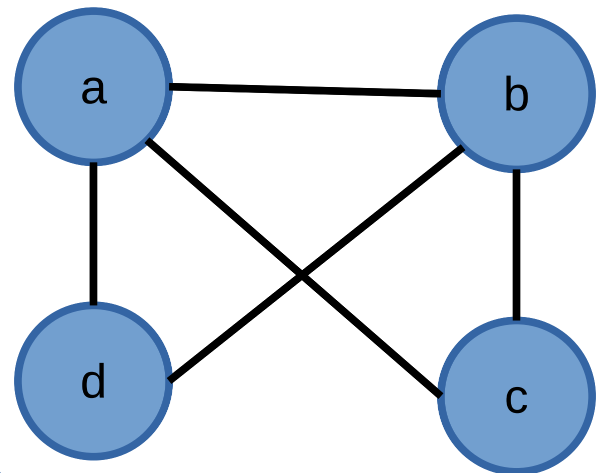
Isomorfismo

Utilize as condições anteriores para determinar o isomorfismo ou não entre os grafos baixo:

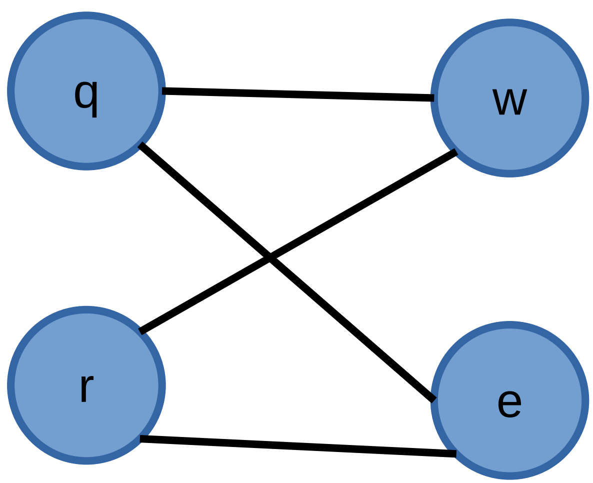
G1



G2



G3



Isomorfismo

Aqui precisamos do conceito de Matriz de Adjacências: uma matriz que modela as relações de adjacências (arestas) entre vértices;

OBS: não é a única forma de representação de um grafo, voltaremos a tratar sobre isso...

O que falar sobre o isomorfismo e a Matriz de Adjacências?

Teorema:

Sejam G1 e G2 dois grafos e A1 e A2 suas matrizes de adjacência respectivamente.

φ: V(G1) → V(G2) é um isomorfismo se e somente se $P(A1)(P^{-1}) = A2$
$(PA1 = A2P)$, onde P é uma matriz de permutação representando φ.

Isomorfismo

Verifique se há isomorfismo abaixo:

A1

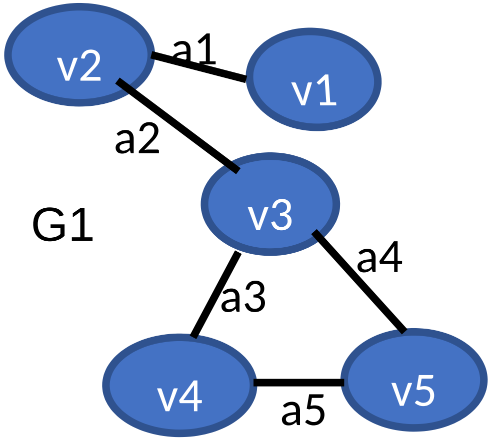
	v1	v2	v3	v4	v5
v1	0	1	0	0	0
v2	1	0	1	0	0
v3	0	1	0	1	1
v4	0	0	1	0	1
v5	0	0	1	1	0

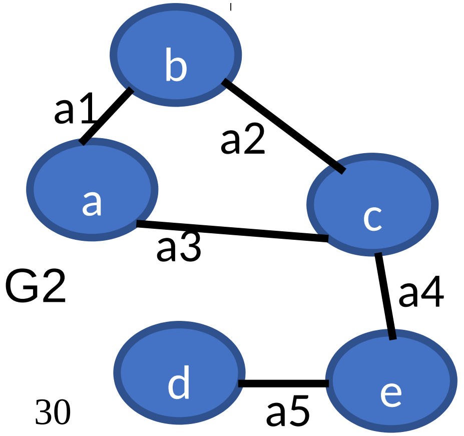
P

	a	b	c	d	e
v1	0	0	0	1	0
v2	0	0	0	0	1
v3	0	0	1	0	0
v4	0	1	0	0	0
v5	1	0	0	0	0

A2

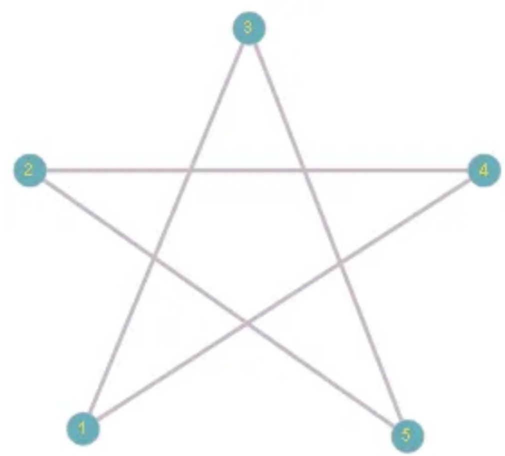
	a	b	c	d	e
a	0	1	1	0	0
b	1	0	1	0	0
c	1	1	0	0	1
d	0	0	0	0	1
e	0	0	1	1	0

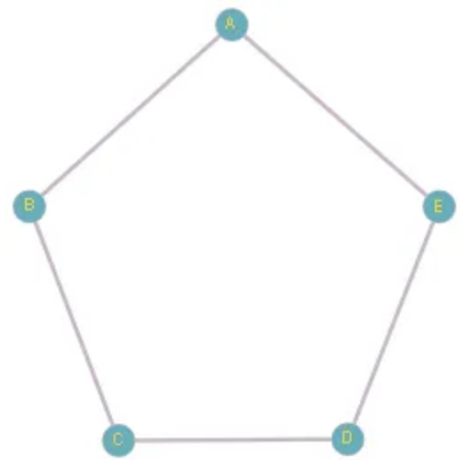




Isomorfismo

G1





G2

Sejam G1 e G2, eles são isomorfos pelo teorema apresentado?

https://medium.com/@oaydin/graph-theory-graph-isomorphisms-and-adjacency-matrix-735a6db97296

Automorfismo

Um automorfismo de um grafo G é um isomorfismo de G para si próprio.

Dessa forma, um automorfismo é um mapeamento dos vértices do grafo G de volta aos vértices dele mesmo de modo que o grafo resultante seja isomórfico com G.

https://mathworld.wolfram.com/GraphAutomorphism.html

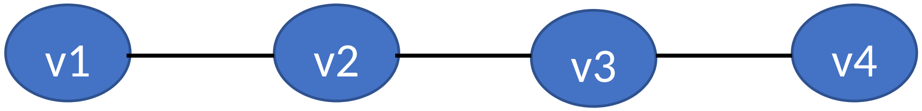
Automorfismo

As matrizes de adjacências entre dois grafos G e G’ são iguais se houver automorfismo entre eles.

Verifique via matriz de adjacências, se os mapeamentos são automorfismos para o grafo abaixo:

a) v1 → v4; v4 → v1; v2 → v2; v3 → v3

b) v1 → v4; v4 → v1; v2 → v3; v3 → v2

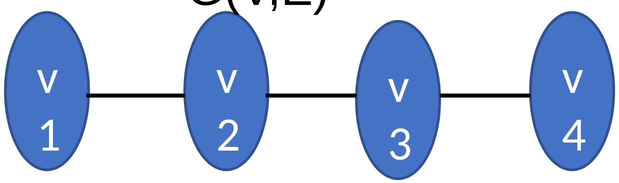


(Prestes, Edson UFRGS):

Automorfismo

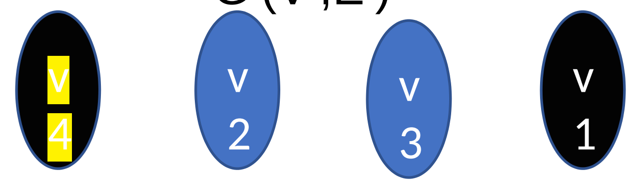
a) *v1→v4; v4→v1; v2→ v2; v3→v3* é um automorfismo de G?

G(V,E)



v	f(v)
v1	v4
v4	v1
v2	v2
v3	v3

G'(V',E')



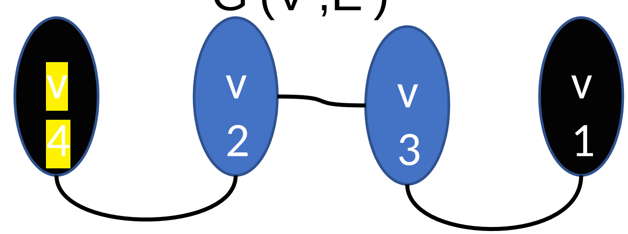
Em termos das arestas sabemos que:

(v1,v2) ∈ E→ (f(v1),f(v2))=(v4,v2) ∈ E'

(v2,v3) ∈ E→ (f(v2),f(v3))=(v2,v3) ∈ E'

(v3,v4) ∈ E→ (f(v3),f(v4))=(v3,v1) ∈ E'

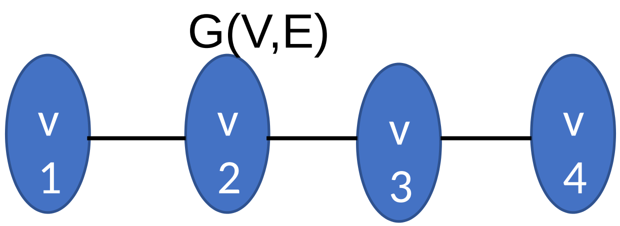
G'(V',E')



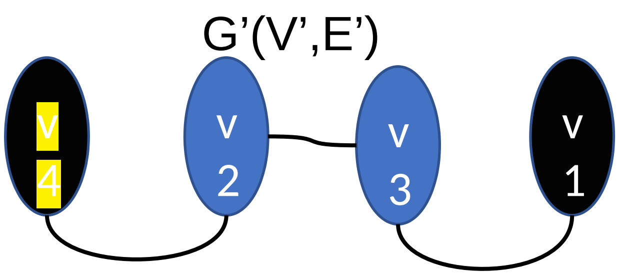
(Prestes, Edson UFRGS):

Automorfismo

a) G' é um automorfismo de G?



	v1	v2	v3	v4
v1		1		
v2	1		1	
v3		1		1
v4			1	



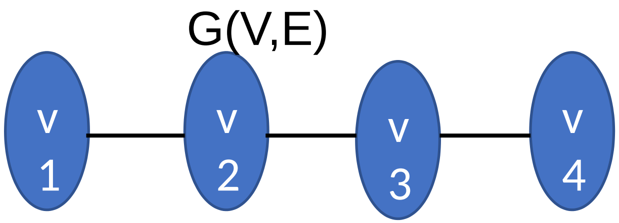
	v1	v2	v3	v4
v1			1	
v2			1	1
v3	1	1		
v4		1		

As matrizes de adjacências não são iguais, não existe um automorfismo da bijeção proposta

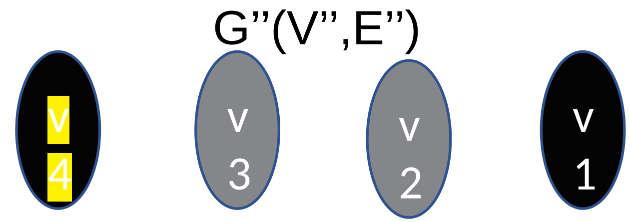
(Prestes, Edson UFRGS):

Automorfismo

b) v1 → v4; v4 → v1; v2 → v3; v3 → v2 é um automorfismo de G?



v	f(v)
v1	v4
v4	v1
v2	v3
v3	v2

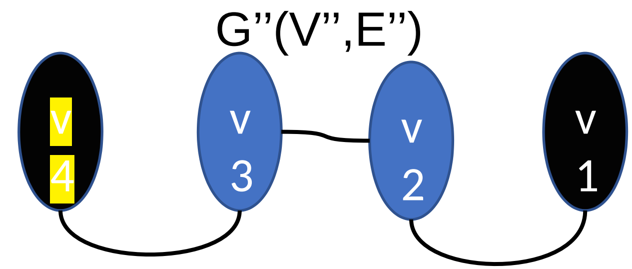


Em termos das arestas sabemos que:

(v1,v2) ∈ E → (f(v1),f(v2))=(v4,v3) ∈ E''

(v2,v3) ∈ E → (f(v2),f(v3))=(v3,v2) ∈ E''

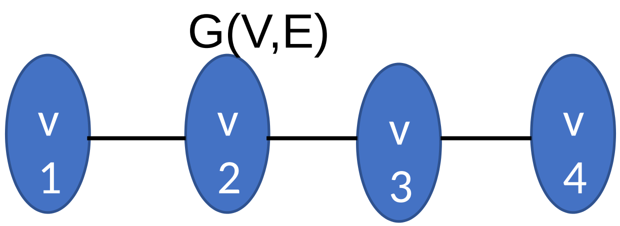
(v3,v4) ∈ E → (f(v3),f(v4))=(v2,v1) ∈ E''



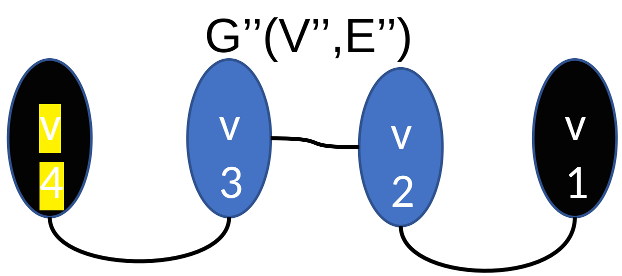
(Prestes, Edson UFRGS):

Automorfismo

b) G'' é um automorfismo de G?



	v1	v2	v3	v4
v1		1		
v2	1		1	
v3		1		1
v4			1	



	v1	v2	v3	v4
v1		1		
v2	1		1	
v3		1		1
v4			1	

As matrizes de adjacências são iguais, existe um automorfismo da bijeção proposta

(Prestes, Edson UFRGS):

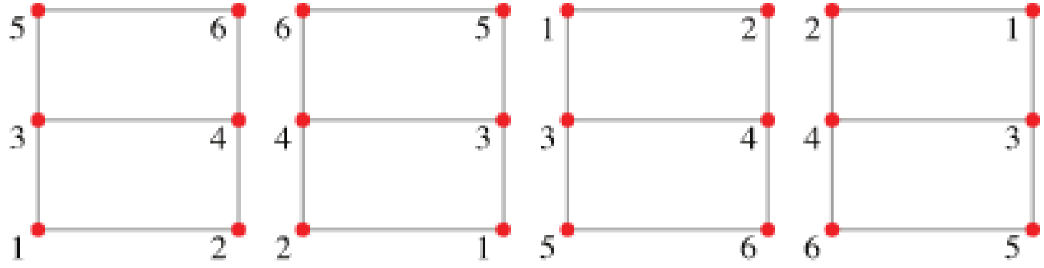
Grupo de Automorfismo

O conjunto de automorfismos define um grupo de permutação conhecido como o grupo de automorfismo do grafo.

Os grupos de automorfismo de um grafo caracterizam suas simetrias e são muito úteis na determinação de algumas de suas propriedades.

Por exemplo, o grafo do tipo grade $G_{2,3}$ tem quatro automorfismos: (1, 2, 3, 4, 5, 6), (2, 1, 4, 3, 6, 5), (5, 6, 3 , 4, 1, 2) e (6, 5, 4, 3, 2, 1). Eles correspondem: ao próprio G, G invertido da esquerda para a direita, G invertido de cima para baixo e G invertido da esquerda para a direita e de cima para baixo.

https://mathworld.wolfram.com/GraphAutomorphism.html



Grupo de Automorfismo

Não existe nenhum algoritmo polinomial conhecido para teste de isomorfismo entre grafos.

A determinação de automorfismos é um problema de complexidade equivalente ao problema de isomorfismo de grafos.

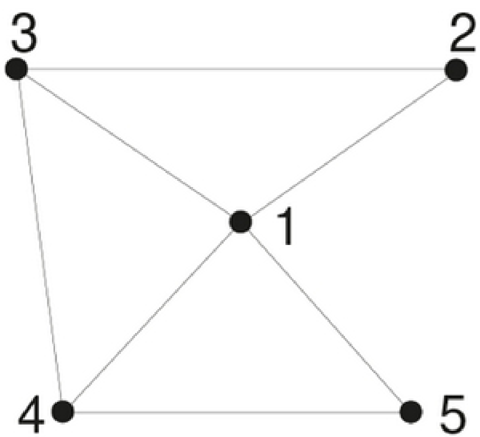
Na verdade, o problema de identificação de grafos isomórficos parece cair numa fenda entre P e NP-completo[1].

1 https://mathworld.wolfram.com/GraphIsomorphismComplete.html

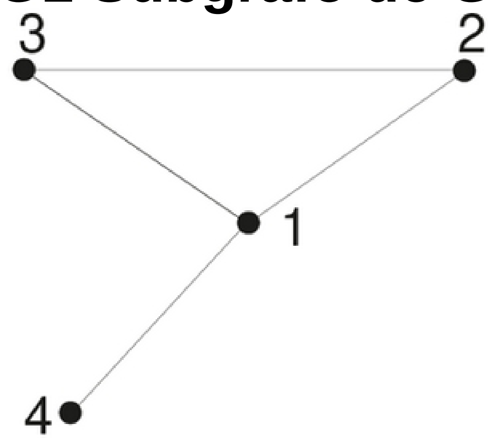
Subgrafo

- Um subgrafo G1(V1,E1) de um grafo G(V,E) é um grafo tal que $V1 \subseteq V$ e $E1 \subseteq E$;

G



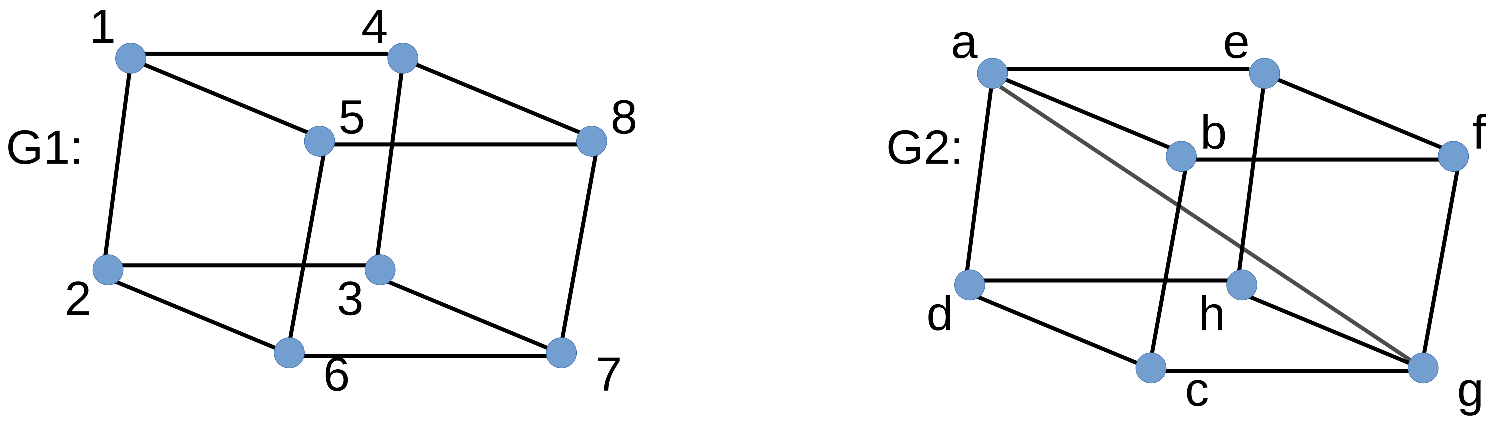
G1 Subgrafo de G



Subgrafo

- Um subgrafo G1(V1,E1) de um grafo G(V,E) é um grafo tal que V1 $\subseteq$ V e E1 $\subseteq$ E;
- Dois grafos não são isomorfos se um deles contém um subgrafo que não pertence ao outro (Goldbarg,2012)

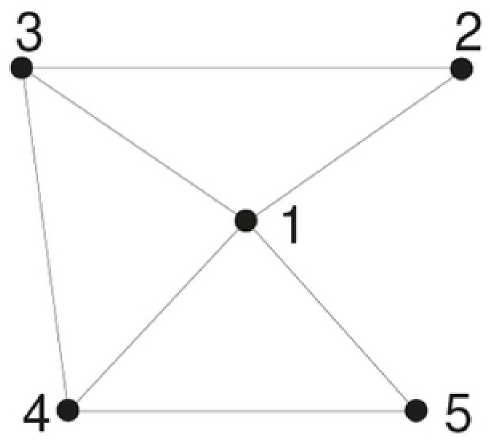
O subgrafo de G2, com vértices {a,g}, não está contido em G1. Portanto, G2 não pode ser um isomorfo de G1



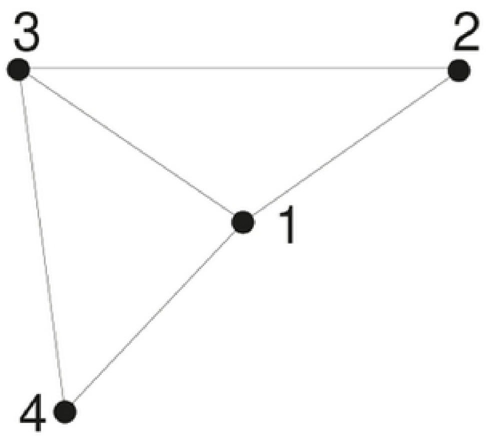
Subgrafo Induzido

- Um subgrafo G1(V1,E1) de um grafo G(V,E) é um grafo tal que V1 $\subseteq$ V e E1 $\subseteq$ E. Além disso, se para cada vértice v $\in$ V1 e w $\in$ V1, temos que a aresta (v,w) $\in$ E e (v,w) $\in$ E1, então o subgrafo G1 é induzido por G.
- Informalmente, um subgrafo induzido por um conjunto de vértices W mantém todas as arestas originais de G que possuem seus dois extremos em W.

G

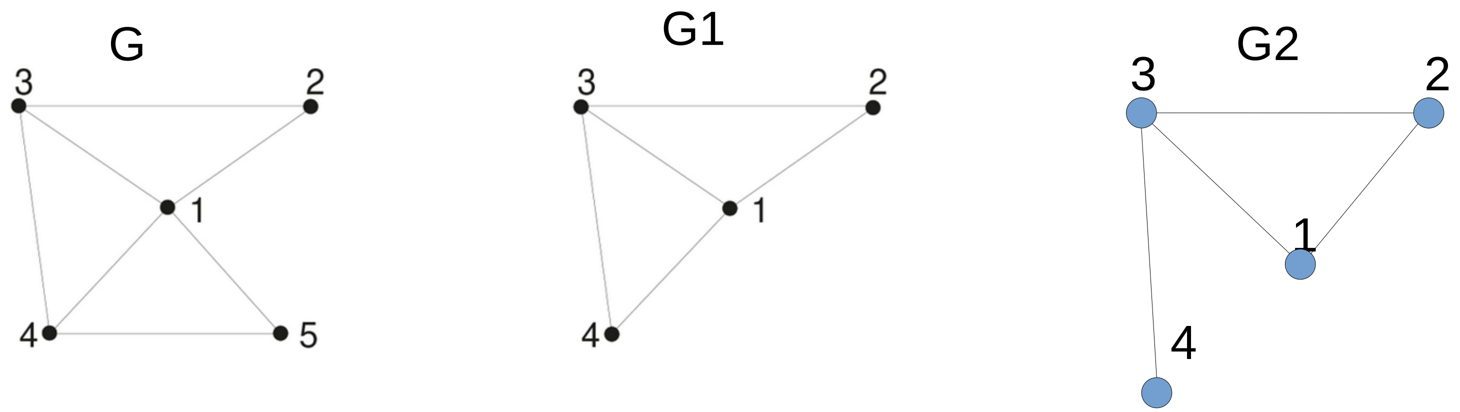


G1 subgrafo induzido de G:
Todo par de vértices de G1 que tenha aresta em G, este par também terá aresta em G1



Subgrafo Induzido

- G1 subgrafo induzido de G: todo par de vértices de G1 que tenha aresta em G, este par também terá aresta em G1

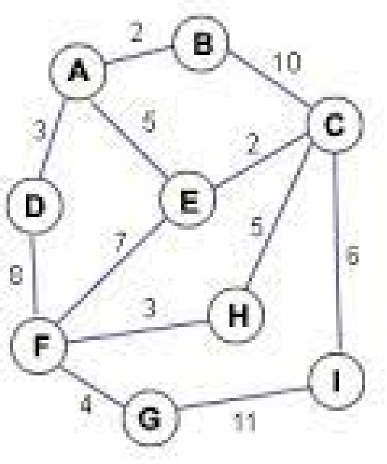


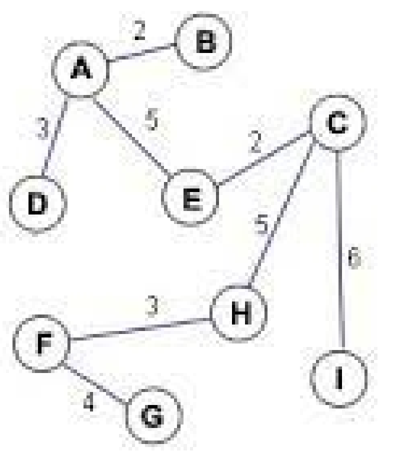
Todo par (u,v) de G1 tem arestas em G e em G1, portanto, G1 é subgrafo induzido de G.

(1,4) é um vértice de G2 que possui aresta em G mas não em G2, desa forma, G2 não é subgrafo induzido de G.

Subgrafo Gerador

- Um subgrafo gerador ("spanning subgraph") de G é um subgrafo H de G tal que V (H) = V (G). Em outras palavras, H tem os mesmos vértices de G, mas não necessariamente todas as arestas de G.
- Exemplo: G (esquerda) e uma árvore geradora de G (direita)





Goldbarg, Marco. Grafos. Disponível em: Minha Biblioteca, Grupo GEN, 2012.

Netto, P.O.B. e Jurkiewicz, S.. Grafos: introdução e prática. Disponível em: Minha Biblioteca, (2nd edição). Editora Blucher, 2017.

Prestes, Edson. https://www.inf.ufrgs.br/~prestes/Courses/Graph%20Theory/Livro/LivroGrafos.pdf

Szwarcfiter, J.L. Teoria computacional de grafos: Os algoritmos

Wilson, R.J. Introduction to Graph Theory