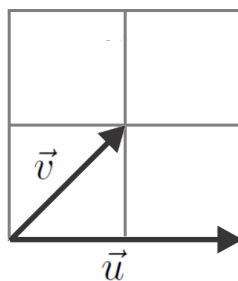


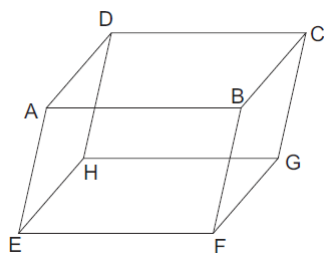
Disciplinas: ALGA001 e GAN0001
Prof. Bruno Terêncio do Vale

Primeira Lista de Exercícios
Tópico: Vetores

1. Dados os vetores \vec{u} e \vec{v} da figura, mostrar, num gráfico, um representante do vetor:

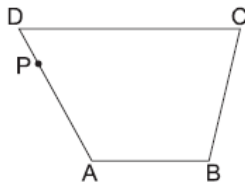


- (a) $\vec{u} - \vec{v}$
(b) $\vec{v} - \vec{u}$
(c) $-\vec{v} - 2\vec{u}$
(d) $2\vec{u} - 3\vec{v}$
2. Com base no paralelepípedo representado a seguir, determine os seguintes vetores usando H como origem.

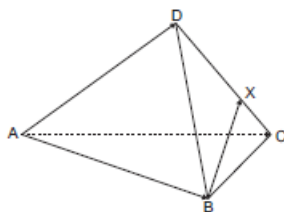


- (a) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$
(b) $-(G - B) + (B - A)$

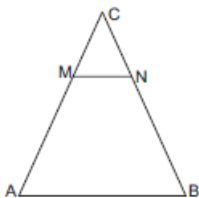
3. Dado o trapézio $ABCD$ em que $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = 2\vec{b}$ e $\overrightarrow{DP} = \frac{\overrightarrow{DA}}{4}$, expressar \overrightarrow{BD} e \overrightarrow{CP} em função de \vec{a} e \vec{b} .



4. Considere o tetraedro $ABCD$ dado a seguir, em que $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ e $\overrightarrow{CX} = -\frac{\overrightarrow{DC}}{3}$. Escreva o vetor \overrightarrow{BX} em função dos vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} .



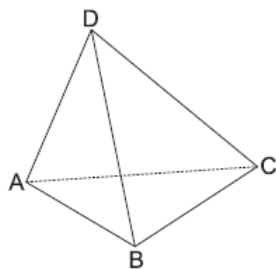
5. Na figura abaixo tem-se $\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA}}{3}$ e $\overrightarrow{CN} = \frac{\overrightarrow{CB}}{3}$. Prove que os segmentos \overline{MN} e \overline{AB} são paralelos, e que o comprimento do primeiro é $\frac{1}{3}$ do comprimento do segundo.



6. Sabendo que o ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} é de 60° , determinar o ângulo formado pelos vetores:
- \vec{u} e $-\vec{v}$
 - $-\vec{u}$ e \vec{v}
 - $-\vec{u}$ e $-\vec{v}$
 - $2\vec{u}$ e $3\vec{v}$
7. Determinar a extremidade do segmento que representa o vetor $\vec{v} = (2, -5)$, sabendo que sua origem é o ponto $A(-1, 3)$.
8. Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-1, 2)$, determinar o vetor \vec{w} tal que
- $4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{w}$
 - $3\vec{w} - (2\vec{v} - \vec{u}) = 2(4\vec{w} - 3\vec{u})$
9. Dados os pontos $A(-1, 3)$, $B(2, 5)$ e $C(3, -1)$, calcular $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$ e $3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB}$.

10. Dados os pontos $A(-1, 2, 3)$ e $B(4, -2, 0)$, determinar o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$
11. Determinar a e b de modo que os vetores $\vec{u} = (4, 1, -3)$ e $\vec{v} = (6, a, b)$ sejam paralelos.
12. Verificar se são colineares os pontos:
 - (a) $A(-1, -5, 0)$, $B(2, 1, 3)$ e $C(-2, -7, -1)$
 - (b) $A(2, 1, -1)$, $B(3, -1, 0)$ e $C(1, 0, 4)$
13. Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{w} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$, expresse \vec{w} como combinação linear de \vec{u} e \vec{v} .
14. Sejam os vetores $\vec{u} = (2, -3, 2)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 4)$ em \mathbb{R}^3 .
 - (a) Escrever o vetor $\vec{w} = (7, -11, 2)$ como combinação linear de \vec{u} e \vec{v} .
 - (b) Para que valor de k o vetor $(-8, 14, k)$ é combinação linear de \vec{u} e \vec{v} ?
 - (c) Determinar uma condição entre a , b e c para que o vetor (a, b, c) seja uma combinação linear de \vec{u} e \vec{v} .
15. Sabendo que a distância entre os pontos $A(-1, 2, 3)$ e $B(1, -1, m)$ é 7, determine os possíveis valores de m .
16. Dados os vetores $\vec{u} = (1, a, -2a - 1)$, $\vec{v} = (a, a - 1, 1)$ e $\vec{w} = (a, -1, 1)$, determinar a de modo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$.
17. Dados os pontos $A(-1, 0, 2)$, $B(-4, 1, 1)$ e $C(0, 1, 3)$, determinar o vetor \vec{x} tal que $2\vec{x} - \overrightarrow{AB} = \vec{x} + (\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}) \overrightarrow{AC}$.
18. Dados os pontos $A(1, 2, 3)$, $B(-6, -2, 3)$ e $C(1, 2, 1)$, determinar o versor do vetor $3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$
19. Determinar o valor de n para que o vetor $\vec{v} = \left(n, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ seja unitário.
20. Seja o vetor $\vec{v} = (m + 7)\vec{i} + (m + 2)\vec{j} + 5\vec{k}$. Calcular m para que $|\vec{v}| = \sqrt{38}$.
21. Prove que o triângulo cujos vértices são $A(1, 2, 0)$, $B(4, 0, -1)$ e $C(2, -1, 2)$ é equilátero.
22. Determine os pontos do plano xz cuja distância ao ponto $A(1, 1, 0)$ é 2 e ao ponto $B(2, 0, 1)$ é 3.
23. Obter um ponto P do eixo das abscissas equidistante dos pontos $A(2, -3, 1)$ e $B(-2, 1, -1)$.
24. Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, m + 2)$ é $\frac{\pi}{3}$, determinar m .
25. Determinar o vetor \vec{v} ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2, -3, -12)$ e colinear ao vetor $\vec{w} = (-6, 4, -2)$.
26. Provar que os pontos $A(5, 1, 5)$, $B(4, 3, 2)$ e $C(-3, -2, 1)$ são vértices de um triângulo retângulo.
27. Os ângulos diretores de um vetor são 45° , 60° e γ . Determinar γ .
28. Determinar o vetor projeção do vetor $\vec{u} = (1, 2, -3)$ na direção de $\vec{v} = (2, 1, -2)$.
29. Qual o comprimento do vetor projeção de $\vec{u} = (3, 5, 2)$ sobre o eixo dos x ?
30. Os pontos $A(2, 1, -1)$, $B(-1, 3, 1)$ e $C(0, -1, 2)$ formam um triângulo.
 - (a) Determine a projeção do lado AB sobre o lado CA .
 - (b) Obtenha, se possível, o valor de c para que o vetor $\vec{v} = (3c + 4, -2, 9)$ seja colinear ao vetor projeção.
31. Mostrar que se \vec{u} e \vec{v} são vetores, tal que $\vec{u} + \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u} - \vec{v}$, então $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.
32. Calcule o ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} , sabendo-se que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $|\vec{w}| = 4$.

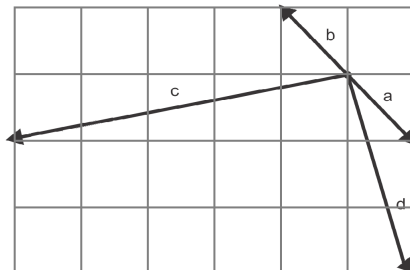
33. Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ e $-\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, sabendo-se que $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, e \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} são mutuamente ortogonais.
34. Calcule o valor de a para que o vetor $\vec{v} = \left(-28, 0, -\frac{7}{2}\right)$ seja mutuamente ortogonal aos vetores $\vec{w} = a\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$ e $\vec{u} = (a-1)\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.
35. Determine o vetor unitário ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, 3, -1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 2)$.
36. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (-1, 2, 2)$, calcular:
- $\vec{w} \times \vec{v}$
 - $\vec{v} \times (\vec{w} - \vec{u})$
 - $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$
 - $(2\vec{u}) \times (3\vec{v})$
 - $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$
 - $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ e $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
 - $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ e $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$
 - $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$
37. Sabendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ e 45° é o ângulo entre \vec{a} e \vec{b} , calcular $|\vec{a} \times \vec{b}|$.
38. Calcular a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u} = (3, 1, 2)$ e $\vec{v} = (4, -1, 0)$.
39. Calcular a área do triângulo de vértices
- $A(-1, 0, 2)$, $B(-4, 1, 1)$ e $C(0, 1, 3)$
 - $A(1, 0, 1)$, $B(4, 2, 1)$ e $C(1, 2, 0)$
 - $A(2, 3, -1)$, $B(3, 1, -2)$ e $C(-1, 0, 2)$
 - $A(-1, 2, -2)$, $B(2, 3, -1)$ e $C(0, 1, 1)$
40. Calcular a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto $A(3, 2, 1)$ e uma diagonal de extremidades $B(1, 1, -1)$ e $C(0, 1, 2)$.
41. Sendo \vec{u} e \vec{v} vetores no espaço, com $\vec{v} \neq \vec{0}$:
- Determinar o número real r tal que $\vec{u} - r\vec{v}$ seja ortogonal a \vec{v}
 - Mostrar que $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{v} \times \vec{u}$.
42. Verificar se são coplanares os seguintes vetores:
- $\vec{u} = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = (1, 2, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 3, 4)$
 - $\vec{u} = (2, -1, 0)$, $\vec{v} = (3, 1, 2)$ e $\vec{w} = (7, -1, 2)$
43. Para que valor de m os pontos $A(m, 1, 2)$, $B(2, -2, -3)$, $C(5, -1, 1)$ e $D(3, -2, -2)$ são coplanares?
44. Considere o tetraedro $ABCD$, ilustrado a seguir, cujos vértices da base são: $A(2, 2, -1)$, $B(3, 2, 1)$ e $C(2, 1, 0)$. Calcular as coordenadas do vértice D , considerando que ele está no eixo x , de forma que o volume do tetraedro seja 8 unidades de volume.



45. Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{v}_1 = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v}_2 = 6\vec{i} + m\vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{v}_3 = -4\vec{i} + \vec{k}$ seja igual a 10.
46. Os vetores $\vec{a} = (2, -1, -3)$, $\vec{b} = (-1, 1, -4)$ e $\vec{c} = (m + 1, m, -1)$ determinam um paralelepípedo de volume 42. Calcular m .
47. Calcular o volume do tetraedro $ABCD$, sendo dados:
- (a) $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ e $D(4, 2, 7)$
 - (b) $A(-1, 3, 2)$, $B(0, 1, -1)$, $C(-2, 0, 1)$ e $D(1, -2, 0)$. Para este, calcular também a medida da altura traçada do vértice A .
48. Calcule a área do paralelogramo construído sobre os vetores $2\vec{u} - 3\vec{v}$ e \vec{w} , sabendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$, o ângulo formado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} é $\frac{\pi}{4}$ rad e que \vec{w} é a projeção do vetor \vec{u} sobre o vetor \vec{v} .

Respostas dos Exercícios

1. Vetores:



2. (a) \overrightarrow{HF}

(b) \overrightarrow{HB}

3. $\overrightarrow{BD} = -(\vec{a} + 2\vec{b})$ e $\overrightarrow{CP} = \frac{\vec{a} - 7\vec{b}}{4}$

4. $\overrightarrow{BX} = -\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

5. Dica: use soma de vetores.

6. (a) 120°

(b) 120°

(c) 60°

(d) 60°

7. $(1, -2)$

8. (a) $\vec{w} = \left(-\frac{15}{2}, \frac{15}{2}\right)$

(b) $\vec{w} = \left(\frac{23}{5}, -\frac{11}{5}\right)$

9. $(-4, 1), (2, 5), (-5, -30)$

10. $P(14, -10, -6)$

11. $a = \frac{3}{2}$ e $b = -\frac{9}{2}$

12. (a) Sim

(b) Não

13. $\vec{w} = -2\vec{u} + 6\vec{v}$

14. (a) $\vec{w} = 3\vec{u} - \vec{v}$

(b) $k = 12$

(c) $16a + 10b - c = 0$

15. $m = 9$ ou $m = -3$

16. $a = 2$

17. $\vec{x} = (-17, -13, -15)$

18. $\left(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$
19. $n = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$
20. $m = -4$ ou -5
21. Prove que $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$.
22. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$
23. $P(1, 0, 0)$
24. $m = -4$
25. $\vec{v} = t(3, -2, 1), t \in \mathbb{R}$
26. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
27. $\gamma = 60^\circ$ ou 120°
28. $\frac{10}{9}(2, 1, -2)$
29. 3
30. (a) $\left(-\frac{16}{17}, -\frac{16}{17}, \frac{24}{17}\right)$
(b) Não existe valor de c .
31. Resultado de $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$
32. Aproximadamente $75,52^\circ$
33. 60°
34. $a = \frac{1}{2}$
35. $\pm \left(\frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}}\right)$
36. (a) $(2, 2, -1)$
(b) $(-1 - 1, 0)$
(c) $(-2, -2, 2)$
(d) $(6, 6, -6)$
(e) 3
(f) -1 e -1
(g) $(4, -1, 3)$ e $(1, -4, -6)$
(h) 1
37. 3
38. $\sqrt{117}$
39. (a) $\sqrt{6}$
(b) $\frac{7}{2}$
(c) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

(d) $2\sqrt{6}$

40. $\sqrt{74}$

41. (a) $r = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}$

(b) Obtido usando as propriedades do produto vetorial.

42. (a) Não

(b) Sim

43. $m = 4$

44. $D\left(\frac{51}{2}, 0, 0\right)$ ou $D\left(-\frac{45}{2}, 0, 0\right)$

45. $m = 6$ ou -4

46. $m = 2$ ou $-\frac{8}{3}$

47. (a) 2

(b) 4 e $\frac{8}{\sqrt{10}}$

48. $A = 9$ u.a.