Álgebra Linear (ALI0001 – CCI-192-02U)

Base e Dimensão de Espaços Vetoriais

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula do dia 12 de abril de 2023.

UDESC

Base de um Espaço Vetorial

- A ideia de base de um espaço vetorial é um dos principais conceitos da Álgebra Linear.
- Intuitivamente, uma base consiste no "alicerce" da estrutura algébrica denominada Espaço Vetorial V, no sentido de que todos os infinitos elementos de V podem ser "construídos" a partir dos elementos fixados pertencentes à base.
- Dessa forma, uma base para um Espaço Vetorial V consiste em um conjunto finito que contém a menor quantidade de elementos que são necessários para gerar todo o espaço V.
- Portanto, uma base para V deve ser formada por elementos geradores de V, de modo com que nenhum desses geradores possa ser considerado "descartável".
- Isso significa que uma base para V deve ser constituída por elementos geradores de V que sejam linearmente independentes (LI). Isso nos leva à seguinte definição:

Definição: Seja V um espaço vetorial. Dizemos que um conjunto finito

$$\beta = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \subset V$$

é **uma base** para V se e somente se forem válidas as seguintes condições:

i) β gera V.

ii) β é LI.

Exercício

Exercício 1) Verifique se, com as operações usuais, os conjuntos dados abaixo são ou não bases do espaço vetorial V.

a) Em $V = \mathbb{R}^2, \beta = \{(1,-2),(-3,7)\}$.

b) Em $V = \mathbb{R}^2, \beta = \{(1,-3),(-2,6),(-1,4)\}$.

c) Em $V = \mathbb{R}^3, \beta = \{(1,-1,4),(2,-3,-1),(-1,0,-13)\}$.

d) Em $V = \mathbb{R}^3, \beta = \{(1,1,-2),(2,3,-1),(1,4,8)\}$.

e) Em $V = \mathbb{R}^3, \beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

f) Em $V = P_2, \beta = \{1+x^2, 1+x, 1+x+x^2\}$.

g) Em $V = P_2, \beta = \{1, x, x^2\}$.

Solução: Os itens a, b, c, e, g foram resolvidos durante a aula.

A resolução dos itens d e f, deixados como exercício, estão nas páginas seguintes.

Resolução item d

Resolução do item d do Exercício 1) Em $V = \mathbb{R}^3$, $\beta = \{(1,1,-2),(2,3,-1),(1,4,8)\}$.

Solução: Vamos verificar se β gera todo o $\mathbb{R}^3$ e é LI. Temos que:

i) β gera o $\mathbb{R}^3$? $\mathbb{R}^3 = ger\{(1,1,-2),(2,3,-1),(1,4,8)\}$?

Seja $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Vamos verificar se existem escalares $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = (x,y,z) = a_1(1,1,-2) + a_2(2,3,-1) + a_3(1,4,8).$$

Efetuando as operações, obtemos

$$(x,y,z) = (a_1 + 2a_2 + a_3, a_1 + 3a_2 + 4a_3, -2a_1 - a_2 + 8a_3)$$

que fornece o sistema linear

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 = x \\ a_1 + 3a_2 + 4a_3 = y \\ -2a_1 - a_2 + 8a_3 = z \end{cases}.$$

Escalonando a matriz ampliada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | \, x \\ 1 & 3 & 4 & | \, y \\ -2 & -1 & 8 & | \, z \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 + 2L_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | \, x \\ 0 & 1 & 3 & | \, y - x \\ 0 & 3 & 10 & | \, z + 2x \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - 3L_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | \, x \\ 0 & 1 & 3 & | \, y - x \\ 0 & 0 & 1 & | \, z + 5x - 3y \end{bmatrix}$$

Resolução item d

Com isso, o sistema é possível (SPD), com sua solução dada por

$$a_1 = 28x - 17y + 5z \qquad a_2 = -16x + 10y - 3z \qquad a_3 = 5x - 3y + z.$$

Dessa forma, mostramos que, para todo $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ têm-se que

$$(x, y, z) = (28x - 17y + 5z)(1,1,-2) + (-16x + 10y - 3z)(2,3,-1) + (5x - 3y + z)(1,4,8),$$

o que indica que β gera qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$.

ii) β é LI?

Basta analisar a combinação nula

$$a_1(1, 1, -2) + a_2(2, 3, -1) + a_3(1, 4, 8) = (0,0,0)$$

que fornece o sistema linear

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + 3a_2 + 4a_3 = 0 \\ -2a_1 - a_2 + 8a_3 = 0 \end{cases}.$$

Tomando $x = y = z = 0$ no sistema anterior, obtém-se que $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0.$

Como o sistema homogêneo admite apenas a solução trivial (é SPD), temos que β é LI!

Portanto $\beta = \{(1, 1, -2), (2, 3, -1), (1, 4, 8)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Resolução item f

Resolução do item f do Exercício 1) Em $V = P_2, \beta = \{1 + x^2, 1 + x, 1 + x + x^2\}$.

Solução: Vamos verificar se β gera todo o $\mathbb{R}^3$ e é LI. Temos que:

i) β gera P_2? $P_2 = ger\{1 + x^2, 1 + x, 1 + x + x^2\}$?

Seja $p(x) = a + bx + cx^2 \in P_2$. Vamos verificar se existem escalares $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(x) = a + bx + cx^2 = a_1(1 + x^2) + a_2(1 + x) + a_3(1 + x + x^2).$$

Efetuando as operações, obtemos

$$a + bx + cx^2 = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_2 + a_3)x + (a_1 + a_3)x^2,$$

que fornece o sistema linear

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = a \\ \quad a_2 + a_3 = b \\ \quad a_1 + a_3 = c \end{cases}.$$

Escalonando a matriz ampliada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | \ a \\ 0 & 1 & 1 & | \ b \\ 1 & 0 & 1 & | \ c \end{bmatrix} L_3 - L_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | \ a \\ 0 & 1 & 1 & | \ b \\ 0 & -1 & 0 & | \ c - a \end{bmatrix} L_3 + L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | \ a \\ 0 & 1 & 1 & | \ b \\ 0 & 0 & 1 & | \ c - a + b \end{bmatrix}$$

Resolução item f

Com isso, o sistema é possível (SPD), com sua solução dada por

$$a_1 = a - b \qquad a_2 = a - c \qquad a_3 = -a + b + c.$$

Dessa forma, mostramos que, para todo $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ têm-se que

$$p(x) = a + bx + cx^2 = (a - b)(1 + x^2) + (a - c)(1 + x) + (-a + b + c)(1 + x + x^2).$$

o que indica que β gera qualquer elemento de P_2.

ii) β é LI?

Basta analisar a combinação nula

$$a_1(1 + x^2) + a_2(1 + x) + a_3(1 + x + x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$

que fornece o sistema linear

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \end{cases}.$$

Tomando $a = b = c = 0$ no sistema anterior, obtém-se que $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$.

Como o sistema homogêneo admite apenas a solução trivial (é SPD), temos que β é LI!

Portanto $\beta = \{\{1 + x^2, 1 + x, 1 + x + x^2\}\}$ é uma base de P_2.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 1) Verifique se $\beta = \{(1,-2),(-3,2)\}$ é uma base de $V = \mathbb{R}^2$.

Solução: Devemos verificar se β é LI e se gera todo o $\mathbb{R}^2$.

i) β é LI?

Tomando a combinação linear nula $a(1,-2) + b(-3,2) = (0,0)$ obtemos que

$$(a-3b,-2a+2b) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a-3b=0 \\ -2a+2b=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} -2a=0 \\ b=a \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a=0 \\ b=0 \end{matrix}$$

Portanto, como $a = b = 0$, temos que o sistema é SPD e β é LI!

ii) β gera o $\mathbb{R}^2$? $\quad \mathbb{R}^2 = ger\{(1,-2),(-3,7)\}$?

Vamos verificar se qualquer vetor $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $v_1 = (1,-2)$ e $v_2 = (-3,2)$. Ou seja, vamos verificar se, para qualquer $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ existem $a,b \in \mathbb{R}$ tais que $v = av_1 + bv_2$, isto é,

$$(x,y) = a(1,-2) + b(-3,2) = (a-3b,-2a+2b).$$

Com isso, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} a-3b=x \\ -2a+2b=y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=x+3b \\ -2(x+3b)+2b=y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=x+3b \\ -2x-6b+2b=y \end{cases}$$

Exemplos Resolvidos

$$\begin{cases} a = x + 3b \\ -2x - 6b + 2b = y \end{cases} \Rightarrow \quad -2x - 4b = y \qquad -4b = 2x + y \qquad b = \frac{-2x - y}{4}$$

$$a = x + 3\left(\frac{-2x - y}{4}\right) = \frac{4x - 6x - 3y}{4} = \frac{-2x - 3y}{4}$$

Assim, qualquer $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como

$$v = (x, y) = \left(\frac{-2x - 3y}{4}\right)(1, -2) + \left(\frac{-2x - y}{4}\right)(-3, 2),$$

que significa que qualquer vetor $v = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ pode ser obtido como combinação linear dos vetores de β e, com isso,

$$\boxed{v = av_1 + bv_2}$$

$$\mathbb{R}^2 = ger\{(1, -2), (-3, 2)\}.$$

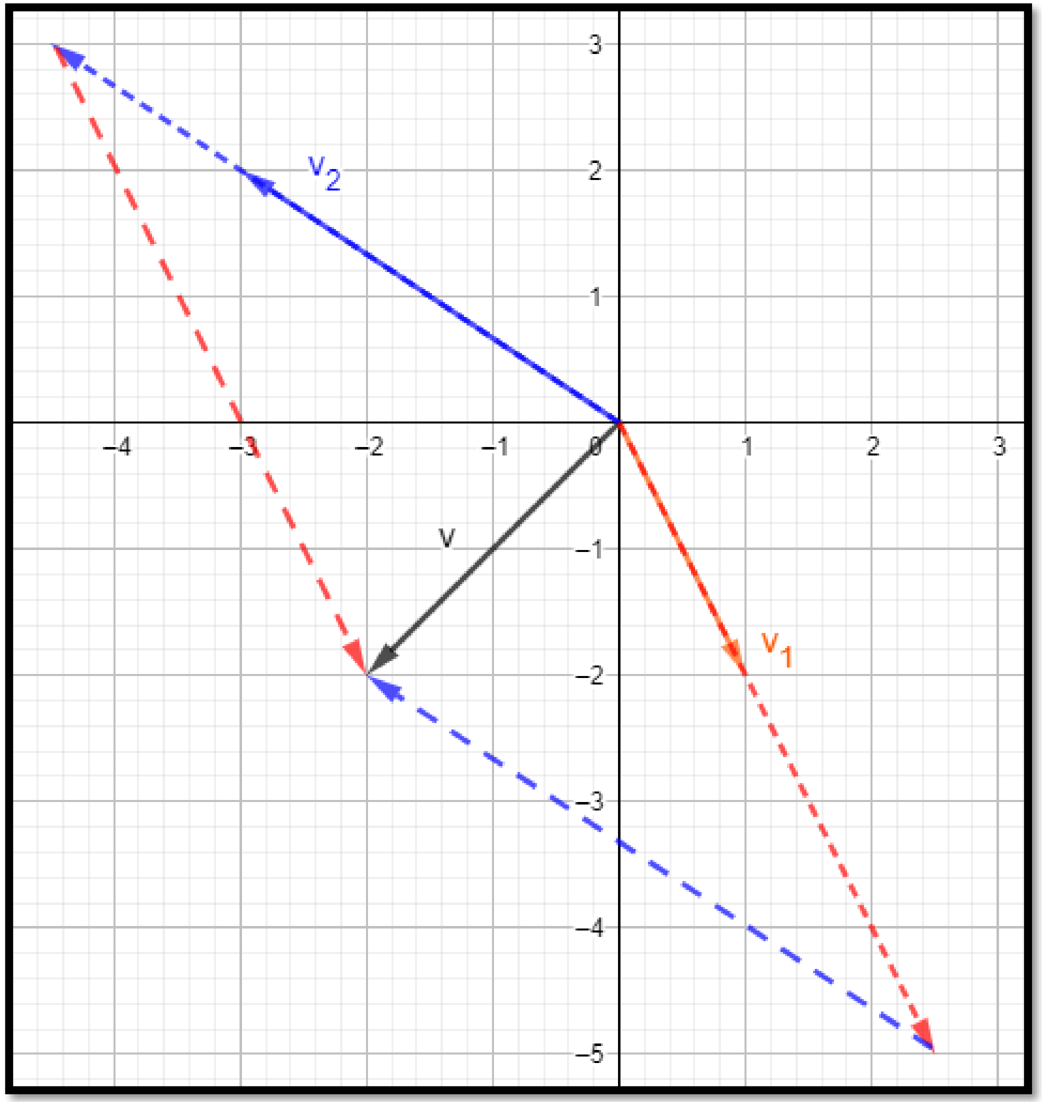
Portanto, $\beta = \{(1, -2), (-3, 2)\}$ é uma base de $V = \mathbb{R}^2$.

Por exemplo, para $v = (-2, -2)$ temos que

$$(-2, -2) = \left(\frac{4 + 6}{4}\right)(1, -2) + \left(\frac{4 + 2}{4}\right)(-3, 2) = \frac{5}{2}(1, -2) + \frac{3}{2}(-3, 2).$$

Exemplos Resolvidos

A figura abaixo mostra o elemento $v = (-2, -2)$ escrito como combinação linear dos vetores da base β:



$\beta = \{(1, -2), (-3, 2)\}$:

$$v = \frac{5}{2}(1, -2) + \frac{3}{2}(-3, 2)$$

$$= \frac{5}{2} v_1 + \frac{3}{2} v_2.$$

Ainda, a figura mostra que $v_1 = (1, -2)$ e $v_2 = (-3, 2)$ não são colineares (logo, são LI).

Exemplos Resolvidos

Exemplo 2) Verifique se $\beta = \{(-5,3),(10,-6)\}$ é uma base de $V = \mathbb{R}^2$.

Solução: Vamos verificar se β é LI e se gera todo o $\mathbb{R}^2$. Temos que:

i) β é LI?

Tomando a combinação linear nula $a(-5,3) + b(10,-6) = (0,0)$ obtemos que

$$(-5a + 10b, 3a - 6b) = (0,0)$$

Logo $\begin{cases} -5a + 10b = 0 \\ 3a - 6b = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a = 2b \quad \Rightarrow \quad -10b + 10b = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 0 = 0 \\ a = 2b \end{matrix} \quad b \in \mathbb{R}.$

O sistema homogêneo é possível e indeterminado (SPI). Logo β é LD!

Portanto, nem precisamos verificar se β gera $\mathbb{R}^2$, pois a definição de base já não está satisfeita. Concluímos que β não é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 3) Verifique se $\alpha = \{(1,0),(0,1)\} = \{\vec{i},\vec{j}\}$ é uma base de $V = \mathbb{R}^2$.

Solução: Tomando a combinação linear nula:

i) $a(1,0) + b(0,1) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad a = 0$ e $b = 0$. Logo, α é LI.

ii) Dado $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, vemos facilmente que $v = (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$.

Portanto, α é uma base de $V = \mathbb{R}^2$.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 4) Verifique se $\beta = \{(1,0),(0,-3),(-5,1)\}$ é uma base de $V = \mathbb{R}^2$.

Solução: Devemos verificar se β é LI e se gera todo o $\mathbb{R}^2$.

i) β é LI?

Tomando a combinação linear nula $a(1,0)+b(0,-3)+c(-5,1)=(0,0)$ obtemos que

$$(a-5c,-3b+c)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} a-5c=0 \\ -3b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=15b \\ c=3b \end{matrix} \Rightarrow b \in \mathbb{R}.$$

Portanto, como o sistema é SPI, os vetores de β são LD e β não forma uma base para $\mathbb{R}^2$!

Para obter uma base a partir de β, note que o elemento associado à variável livre b pode ser descartado.

Fazendo isso, obtemos que $\alpha = \{(1,0),(-5,1)\}$ é LI e que α gera o $\mathbb{R}^2$, pois

$$(x,y)=a(1,0)+b(-5,1)=(a-5b,b).$$

implica que

$$\begin{cases} a-5b=x \\ b=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=x+5y \\ b=y \end{cases}$$

Logo

$$(x,y)=(x+5y)(1,0)+y(-5,1).$$

Portanto,
$\alpha = \{(1,0),(-5,1)\}$
é *base para* $\mathbb{R}^2$.

Dimensão de um Espaço Vetorial

Observações:

- Os exemplos anteriores nos mostram que existe mais de uma base para um mesmo espaço vetorial V.
- De fato, qualquer conjunto formado por elementos geradores e LI é uma base para V.
- No entanto, todas as bases para V devem possuir a mesma quantidade de vetores.
- A quantidade de elementos de uma base nos fornece uma ideia sobre o "tamanho" do espaço vetorial V, que chamamos de dimensão de V.
- Isso nos leva à seguinte definição:

Definição: Seja $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V.

Como a base β é composta por n elementos, dizemos que V é um espaço $n-dimensional$ e que a dimensão de V é igual a n.

Notação: Para indicar que a dimensão de V é igual a n, ou seja, que qualquer base para V é constituída por n elementos, denotamos:

$$\dim(V) = n.$$

Exemplos Resolvidos

Exemplo 5) Verifique se $\beta = \{(2,0,-1),(4,0,7),(-1,1,4)\}$ é uma base de $V = \mathbb{R}^3$.

Solução: Vamos verificar se β é LI e se gera todo o $\mathbb{R}^3$. Temos que:

i) β é LI?

Analisando a combinação linear nula dos vetores de β:

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad a(2,0,-1) + b(4,0,7) + c(-1,1,4) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \quad (2a + 4b - c, \;\; c, \;\; -a + 7b + 4c) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b - c = 0 \\ c = 0 \\ -a + 7b + 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} a = -2b \\ c = 0 \\ 2b + 7b = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} a = 0 \\ c = 0. \\ b = 0 \end{array}$$

Como o sistema homogêneo admite apenas a solução trivial (é SPD), temos que β é LI!

ii) β gera o $\mathbb{R}^3$? $\mathbb{R}^3 = ger\{(2,0,-1),(4,0,7),(-1,1,4)\}$?

Seja $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Vamos verificar se existem escalares a, b, c tais que

$$a(2,0,-1) + b(4,0,7) + c(-1,1,4).$$

Efetuando as operações, obtemos:

$$(x,y,z) = (2a + 4b - c, c, -a + 7b + 4c),$$

Exemplos Resolvidos

E obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2a + 4b - c = x \\ c = y \\ -a + 7b + 4c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a + 11b + 3c = x + z \\ c = y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = x + z - 3y - 11b \\ c = y \end{matrix}$$

Substituindo na terceira equação, obtemos

$$-(x + z - 3y - 11b) + 7b + 4y = z \Rightarrow -x - z + 7y + 18b = z \Rightarrow b = \frac{x - 7y + 2z}{18}.$$

E voltando na equação

$$a = x + z - 3y - 11b = x + z - 3y - 11\frac{x - 7y + 2z}{18} = \frac{7x + 23y - 4z}{18}.$$

Como o sistema é SPD, encontramos que

$$(x, y, z) = \frac{7x + 23y - 4z}{18}(2,0,-1) + \frac{x - 7y + 2z}{18}(4,0,7) + y(-1,1,4).$$

Portanto, qualquer elemento $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ pode ser obtido como combinação linear dos elementos de β, ou seja, β gera todo o $\mathbb{R}^3$.

Concluímos que β é uma base do $\mathbb{R}^3$ e que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 6) Verifique se $\alpha = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma base de $V = \mathbb{R}^3$.

Solução: Temos que:

i) $a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (0,0,0) \quad \Rightarrow \quad a = 0,\ b = 0,\ c = 0.$

Logo, α é LI.

ii) Dado $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, vemos facilmente que

$$v = (x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Logo, α gera todo o $\mathbb{R}^3$.

Portanto, α é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Observação: Note que os cálculos do Exemplo 6 foram praticamente imediatos, muito mais simples do que os cálculos do Exemplo 5. Isso ocorreu devido ao fato da base α ser muito "mais simples" do que a base β.

Na verdade, dentre todas as bases existentes para o $\mathbb{R}^3$, a base α (do Exemplo 6) consiste na "melhor" base para trabalharmos em $\mathbb{R}^3$, no sentido de que ela gera os cálculos mais simples/imediatos.

Chamaremos essa "melhor" base de "base canônica de $\mathbb{R}^3$".

Bases Canônicas

- Todo espaço vetorial admite uma base canônica. Vamos encontrar a base canônica de alguns exemplos clássicos de espaços vetoriais:

Exemplo 7) Qual a base canônica de $\mathbb{R}^n$?

Solução: Dado um vetor $v = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, vemos facilmente que

$$v = x_1(1,0,0,\dots,0) + x_2(0,1,0,\dots,0) + x_3(0,0,1,\dots,0) + \cdots + x_n(0,0,0,\dots,1)$$

Isso significa que $\mathbb{R}^n$ é gerado por

$$\alpha = \{(1,0,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),(0,0,1,\dots,0),\dots,(0,0,0,\dots,1)\}$$

Além disso, é fácil verificar que α também é LI (faça isso como exercício).

Portanto, α é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

E ainda,

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

Exemplo 8) Qual a base canônica de P_n?

Solução: Dado um polinômio $p(x) \in P_n$ temos que

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n.$$

Exemplos de bases canônicas

Assim, vemos que

$$p(x) = a_0.1 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 + \cdots + a_n.x^n$$

que significa que qualquer polinômio de P_n pode ser escrito como uma combinação linear dos polinômios do conjunto

$$\alpha = \{1,\ x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}.$$

Com isso, o conjunto α gera todo o P_n.

Além disso, é fácil verificar que α também é LI (faça isso como exercício).

Portanto, α é a base canônica de P_n. Ainda, como α é composta por n +1 elementos, temos que

$$\boxed{\dim(P_n) = n + 1.}$$

Exemplo 9) Qual a base canônica de $M(3,2)$?

Solução: Dada uma matriz $A \in M(3,2)$ temos que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$.

Note que podemos escrever

$$A = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + f\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplos de bases canônicas

Isso significa que qualquer matriz 3×2 pode ser escrita como uma combinação linear dos elementos do conjunto

$$\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ou seja, α gera todo o espaço $M(3,2)$.

Além disso, é fácil verificar que α também é LI (faça isso como exercício!)

Portanto, α é a base canônica de $M(3,2)$.

E ainda, como α é composta por seis elementos, temos que

$$\boxed{\dim(M(3,2)) = 6 = 3 \times 2.}$$

Generalização: A base canônica de $M(m,n)$ é dada por um conjunto com $m \times n$ matrizes, em que cada matriz possui exatamente uma única entrada igual a 1 e todas as demais iguais a zero; com a entrada igual a 1 variando em todas as $m \times n$ posições da matriz.

Portanto

$$\boxed{\dim(M(m,n)) = m \times n.}$$

Exemplos Resolvidos

Exemplo 10) Verifique se $\beta = \{2-x, 1+x^2, x-x^3\}$ é uma base de $V = P_3$.

Solução: Vamos verificar se β é LI e se gera todo o P_3. Temos que:

i) β é LI?

Como

$$a(2-x) + b(1+x^2) + c(x-x^3) = \vec{0}$$

implica que

$$(2a+b) + (-a+c)x + bx^2 - cx^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2a+b=0 \\ -a+c=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} b=-2a \\ a=c \\ b=0 \\ c=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} b=0 \\ a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{array}.$$

Como o sistema homogêneo admite apenas a solução trivial (é SPD), temos que β é LI!

ii) β gera o P_3? $P_3 = ger\{2-x, 1+x^2, x-x^3\}$?

Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3$. Vamos verificar se existem escalares a, b, c tais que

$$p(x) = a(2-x) + b(1+x^2) + c(x-x^3).$$

Ou seja

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a(2-x) + b(1+x^2) + c(x-x^3)$$
$$= (2a+b) + (-a+c)x + bx^2 - cx^3.$$

Isto é

$$\begin{cases} 2a+b = a_0 \\ -a+c = a_1 \\ b = a_2 \\ c = a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} b = a_0 - 2a \\ a = a_3 - a_1 \\ b = a_2 \\ c = a_3 \end{array} \Rightarrow a_2 = a_0 - 2(a_3 - a_1)$$

Portanto, chegamos que o sistema linear admite solução se e somente se

$$a_2 = a_0 - 2a_3 + 2a_1 \quad \Rightarrow \quad a_0 + 2a_1 - a_2 - 2a_3 = 0.$$

Portanto, o subespaço gerado por β é dado por

$$ger\{\beta\} = \{a_0 + a_1x + x^2 + a_3x^3 \in P_3;\ a_0 + 2a_1 - a_2 - 2a_3 = 0\}.$$

Como obtemos que

$$ger\{\beta\} \neq P_3,$$

concluímos que β **NÃO** gera todo o P_3 e, por isso, não é base de P_3.

Outra solução: Como $\dim(P_3) = 3 + 1 = 4$, sabemos que toda base de P_3 deve ser composta por quatro polinômios. Como em β temos apenas três polinômios, β não é base!

Base e Dimensão de Subespaços Vetoriais

TEOREMA 1: Seja V um espaço vetorial. Se U é um subespaço vetorial de V então

$$\dim(U) \leq \dim(V).$$

Além disso, temos que $U = V$ se e somente se $\dim(U) = \dim(V)$.

Justificativa: Se U é um subespaço vetorial de V, temos que $U \subset V$ e, por isso, o "tamanho" de U é no máximo igual ao "tamanho" de V, ou seja, $\dim(U) \leq \dim(V)$.
Ainda, temos que $U = V$ se e somente se U e V tiverem o mesmo "tamanho", ou seja, se e somente se $\dim(U) = \dim(V)$.

Exemplo 11) Seja $V = \mathbb{R}^3$. Se U é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, então temos que

$$\dim(U) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3.$$

Portanto $\dim(U) \in \{0, 1, 2, 3\}$ e podemos afirmar que:

Se $\dim(U) = 0$ então $U = \{\overrightarrow{0_V}\}$. Nesse caso, a base de U é vazia: $\beta = \{\,\} = \phi$.

Se $\dim(U) = 1$ então U é uma reta que passa pela origem.

Se $\dim(U) = 2$ então Ué um plano que passa pela origem.

Se $\dim(U) = 3$ então $U = \mathbb{R}^3$.

Exercício semelhante ao resolvido no final da aula

Exercício 2) Considerando as operações usuais, determine uma base e a dimensão para o seguinte subespaço vetorial:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ \ 7x + y - 3z = 0\ \}.$$

Para obter uma base para W, precisamos obter um conjunto que gera U e que seja LI.

Começamos obtendo os geradores de U. Seja $u = (x, y, z) \in U$. Logo

$$7x + y - 3z = 0$$

e podemos obter que

$$y = -7x + 3z$$

com $x, z \in \mathbb{R}$. Portanto, substituindo em u e evidenciando as variáveis livres, obtemos

$$u = (x, y, z) = (x, -7x + 3z, z) = x(1, -7, 0) + z(0, 3, 1).$$

u é uma combinação linear dos dois elementos em vermelho, que são os geradores de U.

Assim, U é gerado por $(1, -7, 0)$ e $(0, 3, 1)$.

Além disso, esses geradores são LI, pois analisando a combinação nula

$$a(1, -7, 0) + b(0, 3, 1) = (0,0,0)$$

obtêm-se que $a = 0$, $b = 0$. Portanto,

$$\beta_U \ = \{(1, -7, 0), (0, 3, 1)\}$$

é uma base de U e $\dim(U) = 2$.