Superfícies Cônicas e Cilíndricas (Teoria)

Estrutura desta apresentação

- Superfície cônica
  - Definição
  - Cones quádricos
  - Traços
  - Esboço do gráfico
- Superfícies cilíndricas
  - Definição
  - Restrições
  - Esboço do gráfico

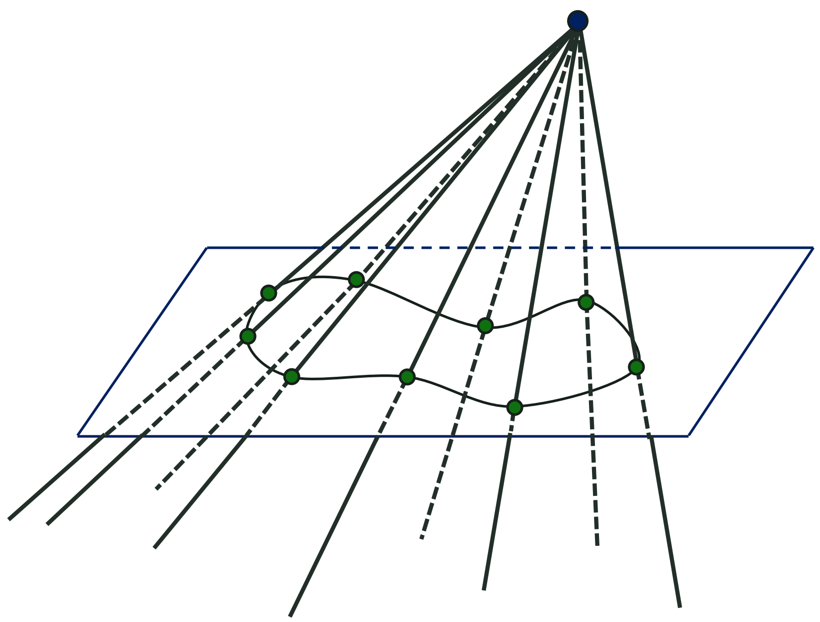
Superfícies cônicas

Definição

Uma **superfície cônica**, ou **cone**, é uma superfície obtida fazendo uma reta se mover apoiada numa curva plana qualquer, passando sempre por um ponto fixo não situado no plano da curva.

Ou seja, três elementos estão presentes:

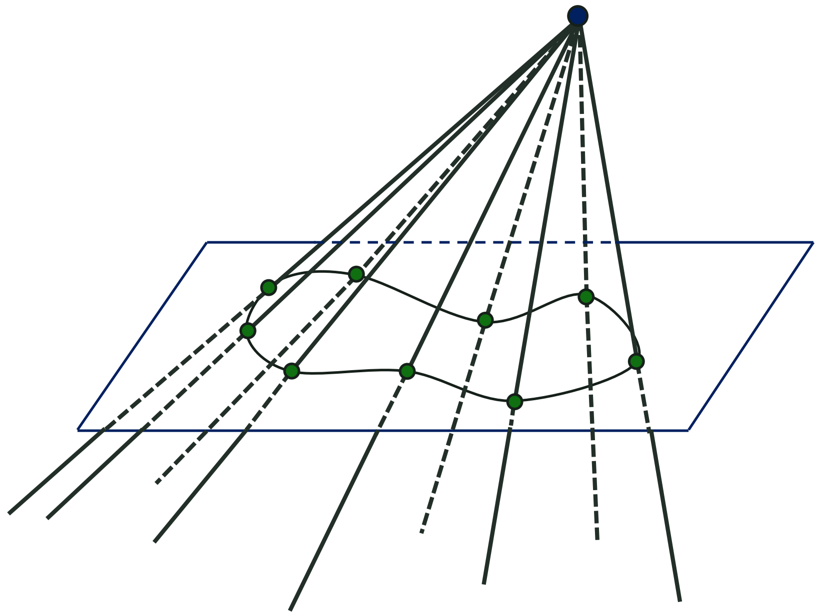
- Um **vértice** (o ponto fixo pelo qual a reta sempre passa);
- Uma curva **diretriz** (a curva plana que fornece a direção pela qual a reta passa);
- Uma reta **geratriz** (a reta que gera a superfície ao se locomover).



Definição

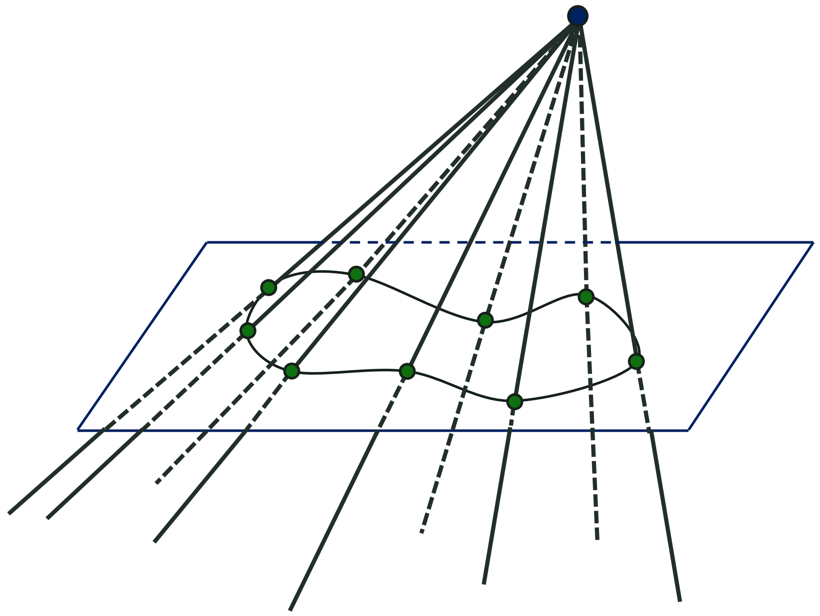
O vértice separa a superfície cônica em duas partes distintas, denominadas **folhas** e que são opostas pelo vértice. Isso ocorre pois a geratriz (uma reta) não é um segmento finito, continuando além do vértice.

Observação: Em algumas situações (como na figura ao lado), em nome da simplificação, os cones são representados apenas com uma folha. Deve-se sempre admitir, porém, a existência das duas folhas.



Definição

Sendo a diretriz uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole, ter-se-á respectivamente uma superfície cônica parabólica, elíptica ou hiperbólica. Quando a diretriz for uma reta, a superfície cônica se degenera num plano.



Cones quádricos

Devido à forma abstrata com a qual é definida uma superfície cônica (uma vez que qualquer curva plana pode ser estabelecida como diretriz), não são todas superfícies cônicas que se enquadram como superfícies quádricas ou que apresentam interesse prático para a disciplina.

Como o enfoque deste tópico são as superfícies quádricas, foca-se portanto no chamado **cone quádrico**. Trata-se da superfície quádrica formada pelos pontos cujas coordenadas satisfazem umas das equações a seguir:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Esta é uma superfície cônica em que:

- O vértice está na origem do sistema;
- A curva diretriz é uma elipse e encontra-se num plano paralelo a um dos planos coordenados, ou seja, trata-se de uma superfície cônica elíptica;
- O eixo (reta que passa pelo centro da curva diretriz e pelo vértice) é um dos eixos coordenados.

Para apresentar um exemplo de esboço do gráfico desta superfície, escolhe-se a primeira das equações apresentadas no slide anterior. Ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Os demais casos serão análogos.

Observação: Lembre-se que é sempre possível deslocar o vértice da origem do sistema por intermédio de uma translação de eixos.

Cones quádricos

Cone quádrico:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

- Plano xOz $(y=0)$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Isolando x,

$$x^2=\frac{a^2}{c^2}z^2 \Rightarrow x=\pm\frac{a}{c}z$$

Ou seja, o traço são **duas retas**.

- Plano yOz $(x=0)$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

O processo é análogo ao anterior, obtendo de novo **duas retas**:

$$y^2=\frac{b^2}{c^2}z^2 \Rightarrow y=\pm\frac{b}{c}z$$

Traços

Traços

Cone quádrico:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

- Plano xOy ($z=0$)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

Dois termos quadráticos somados e igualados a zero só apresentam uma solução: $x=y=0$. Ou seja, o traço no plano perpendicular ao eixo é a **origem**.

- Plano $z=z_0$

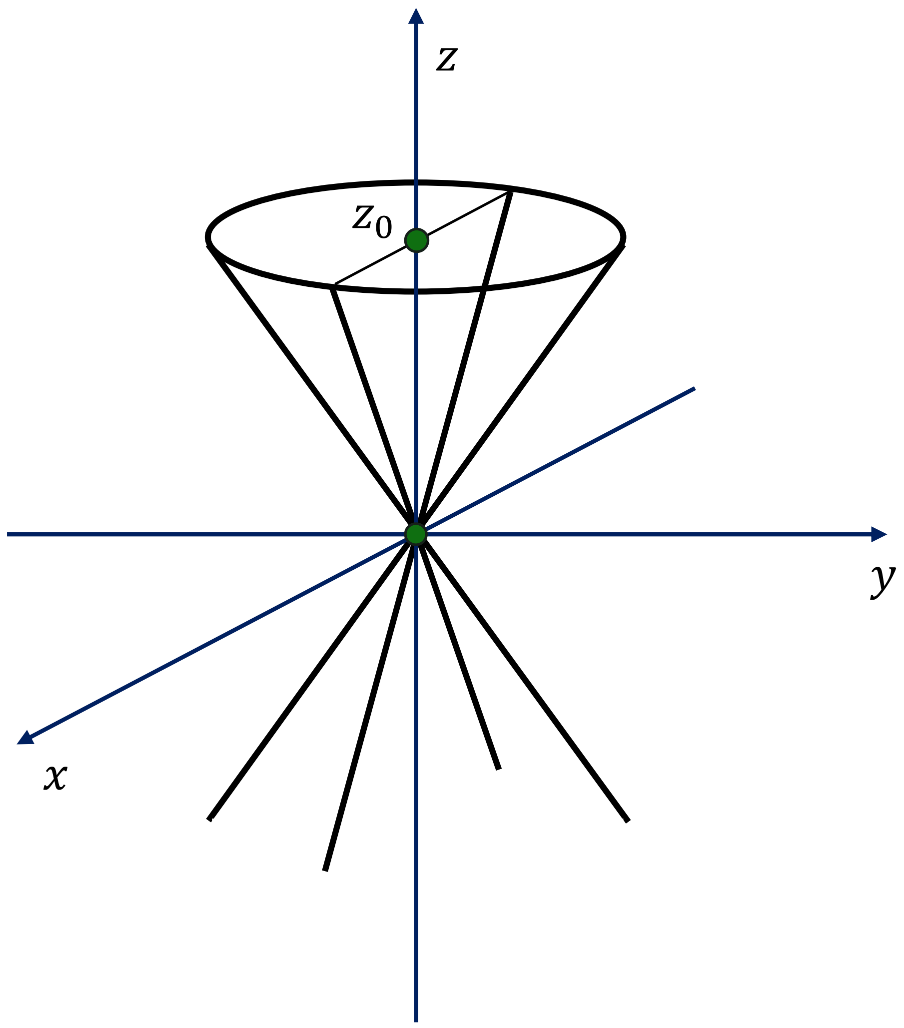
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2}$$

Se

- $z_0=0$, tem-se o ponto $P(0,0,0)$.
- $z_0\neq 0$, tem-se uma elipse.

Cone quádrico:

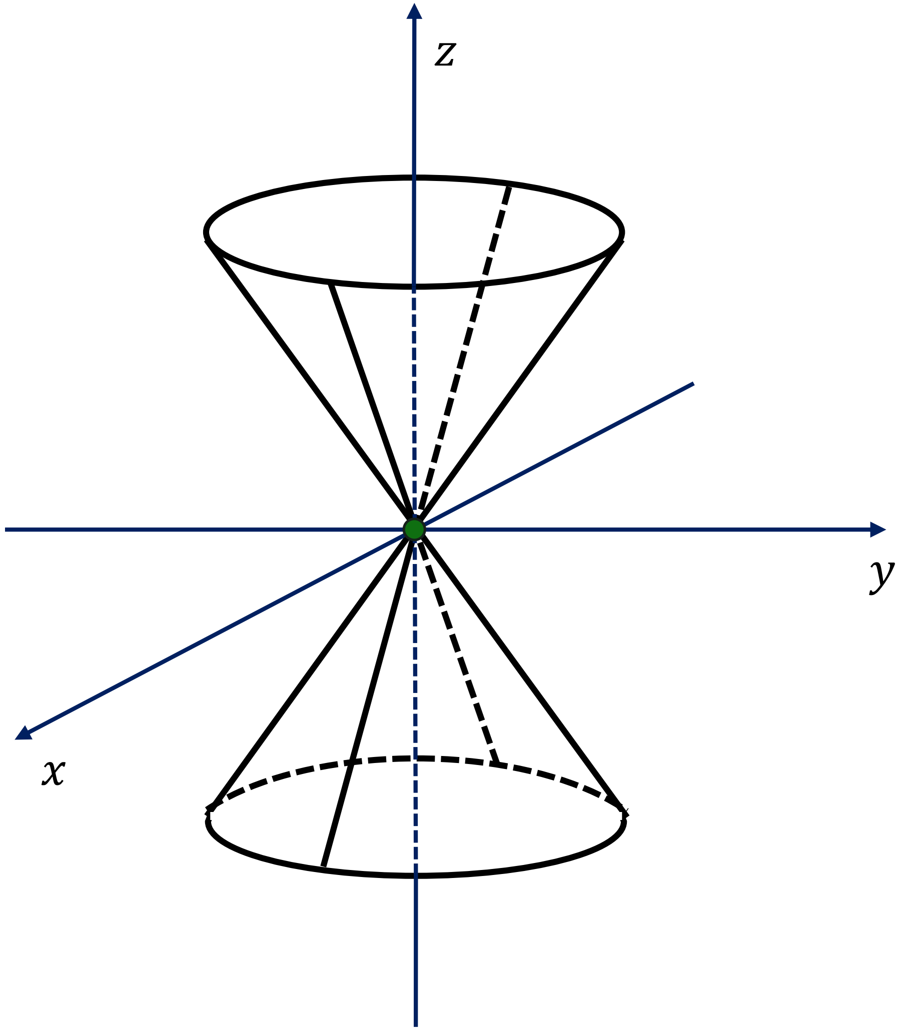
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Esboço do gráfico

Cone quádrico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

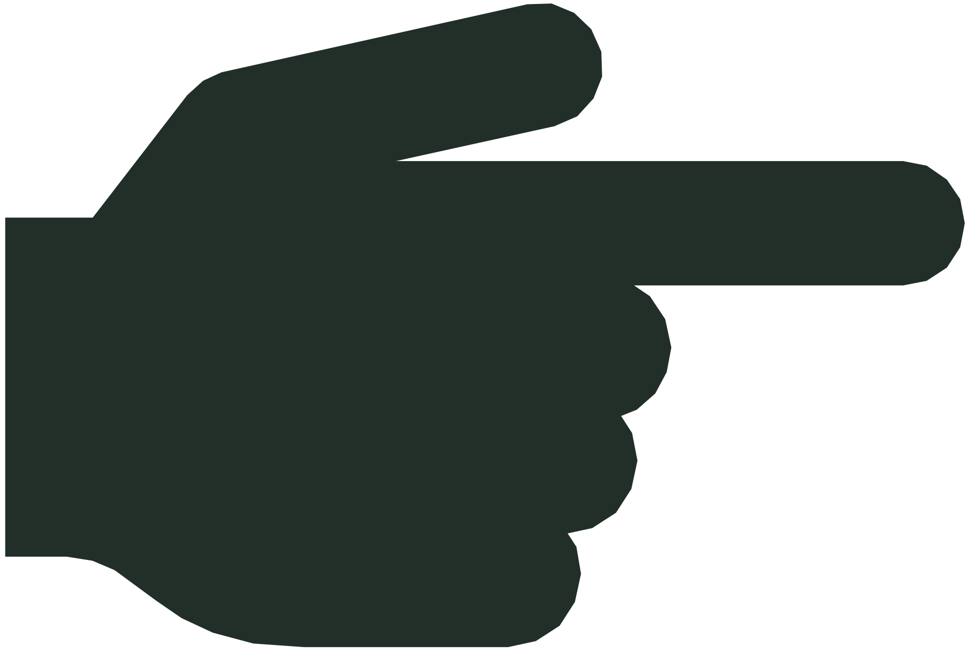


Esboço do gráfico

Cone quádrico:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Observação



Se o traço que representa uma elipse for no caso uma circunferência, a superfície cônica será dita de **revolução**. Ela recebe um nome particular neste caso – trata-se de uma superfície cônica **circular reta**.

Vale relembrar que esta não é a primeira vez na disciplina em que se discute superfícies cônicas. No início do tópico de cônicas, utilizou-se os traços em uma superfície cônica circular reta para definir as seções cônicas.

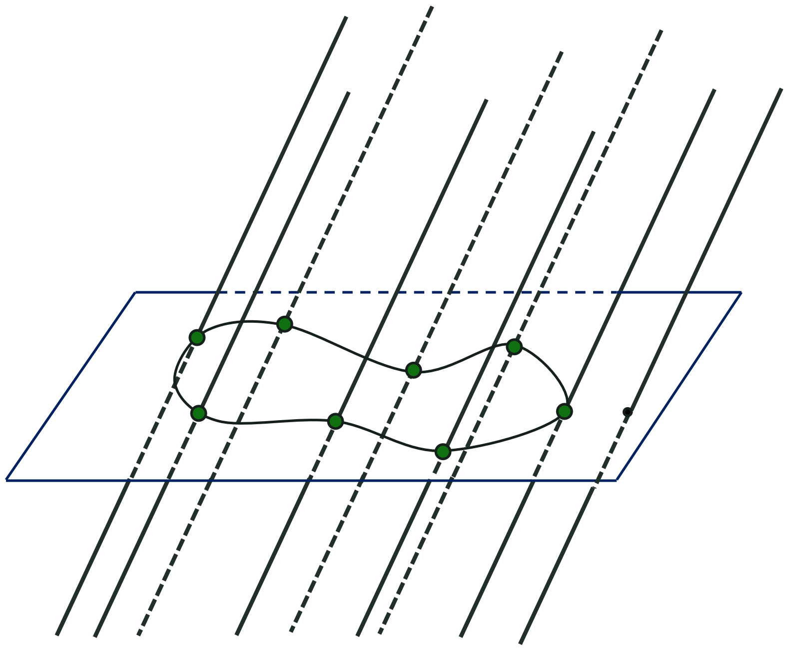
Superfícies cilíndricas

Definição

Uma **superfície cilíndrica**, ou **cilindro**, é uma superfície gerada por uma reta móvel que se desloca ao longo de uma curva plana qualquer mantendo-se paralela a uma reta fixa não pertencente ao plano da curva.

Ou seja, dois elementos estão presentes:

- Uma curva **diretriz** (a curva plana que fornece a direção pela qual a reta passa);
- Uma reta **geratriz** (a reta que gera a superfície ao se locomover).



Restrições

Novamente, devido à forma abstrata com a qual é definida a superfície (uma vez que qualquer curva plana pode ser estabelecida como diretriz), não são todas superfícies cilíndricas que se enquadram como superfícies quádricas ou que apresentam interesse prático para a disciplina.

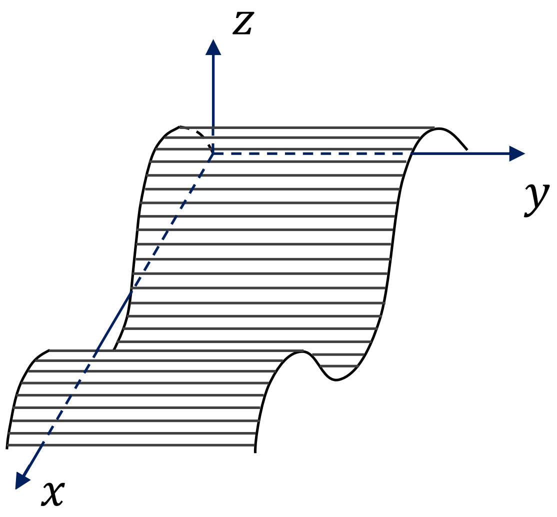
Apesar de em algumas situações pontuais nesta disciplina aparecer algumas superfícies cilíndricas distintas, o principal enfoque estará naquelas em que:

Restrições

1. A curva diretriz encontra-se em um dos planos coordenados e a reta geratriz é paralela ao eixo coordenado que é perpendicular ao plano que contém a diretriz.

Isto garante que a equação da superfície cilíndrica é a **MESMA** da diretriz. Ou seja, vai conter somente duas das três variáveis (a variável que não aparecer vai indicar a qual eixo a reta geratriz é paralela).

Este detalhe torna o esboço do gráfico bem mais simples, não sendo necessário o cálculo de todos traços. Basta representar a diretriz e deslocá-la ao longo do eixo que é paralelo à geratriz.



Restrições

2. A curva diretriz é uma das cônicas estudadas (isto garantirá que se trata de uma quádrica);

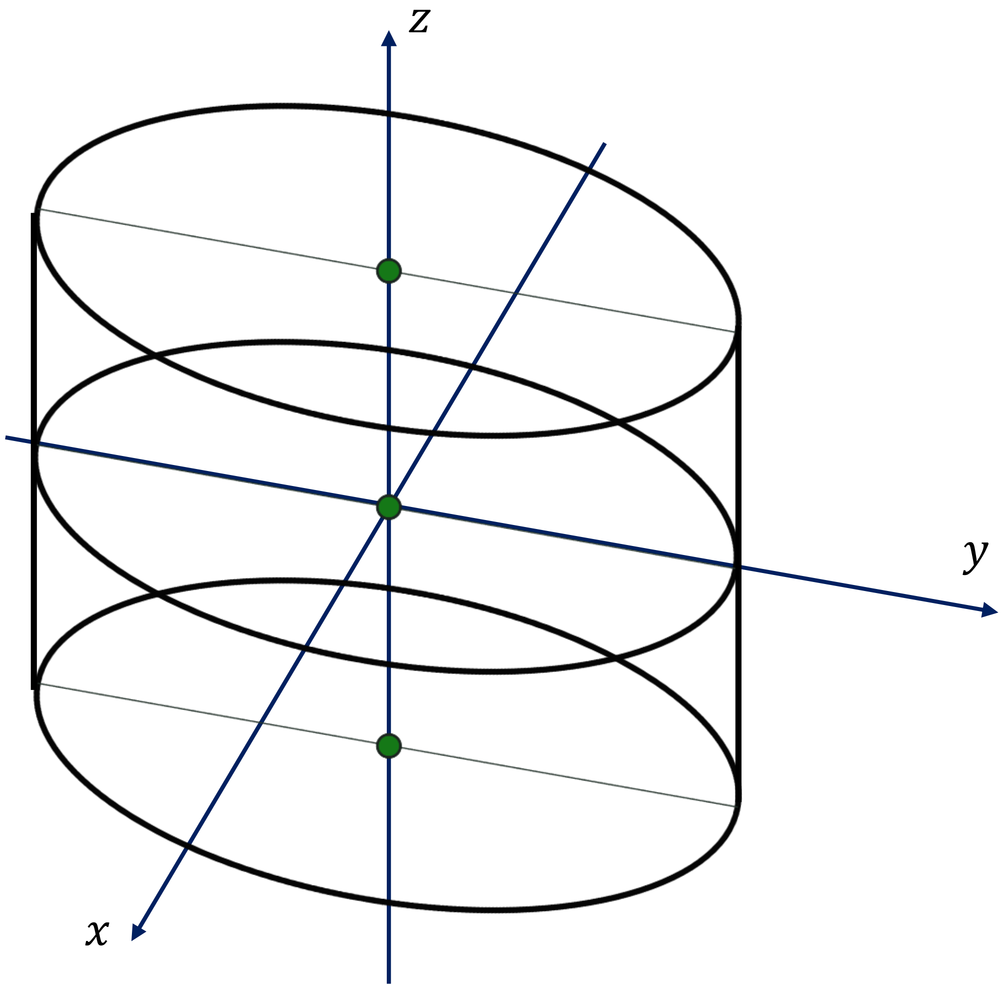
Assim, de acordo com a diretriz, a superfície cilíndrica é chamada:

- **quádrica cilíndrica circular;**
- **quádrica cilíndrica elíptica;**
- **quádrica cilíndrica hiperbólica;** ou
- **quádrica cilíndrica parabólica**.

Observação: Se a diretriz for uma reta, a superfície cilíndrica degenera-se para um plano.

Cilindro elíptico com geratriz paralela ao eixo dos z:

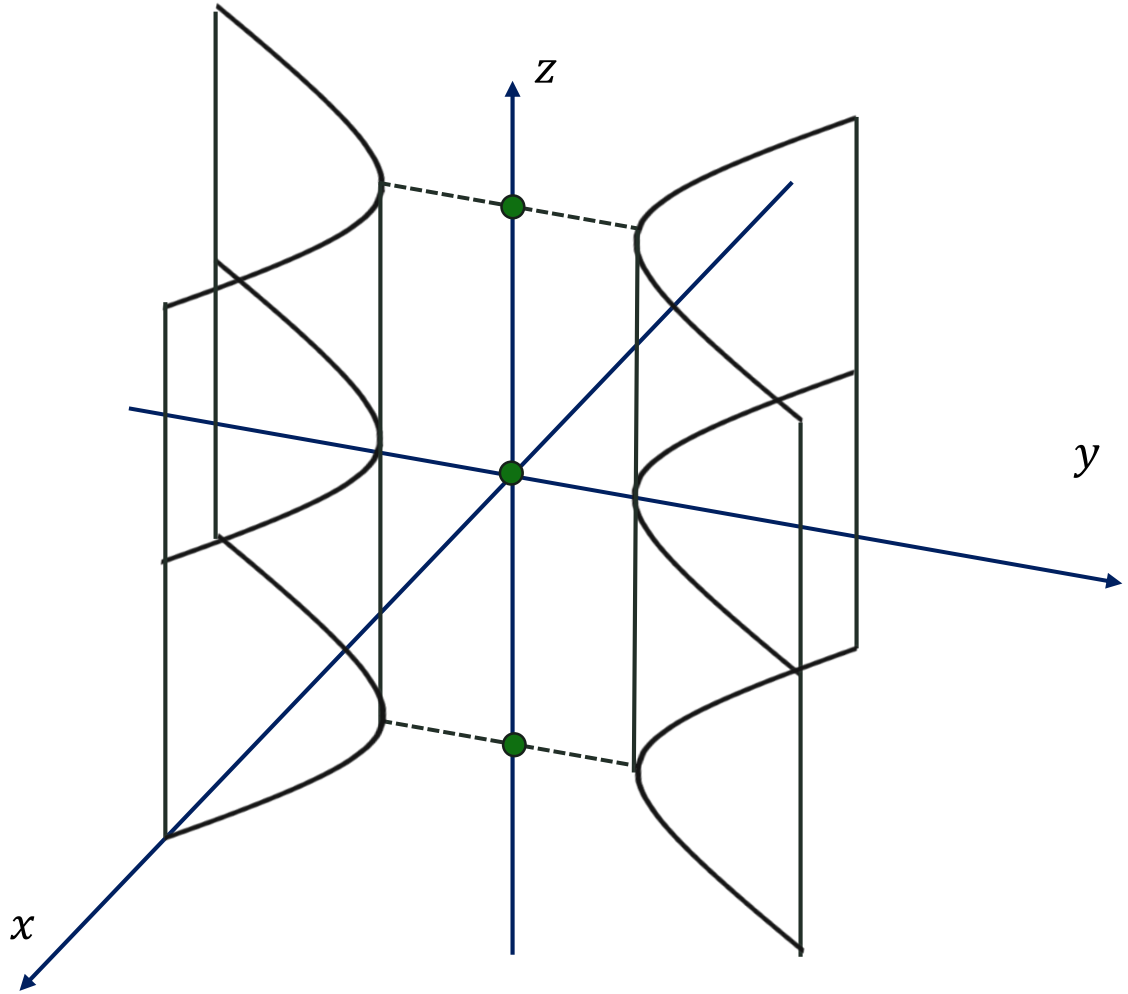
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



Esboço

Cilindro hiperbólico com geratriz paralela ao eixo dos z:

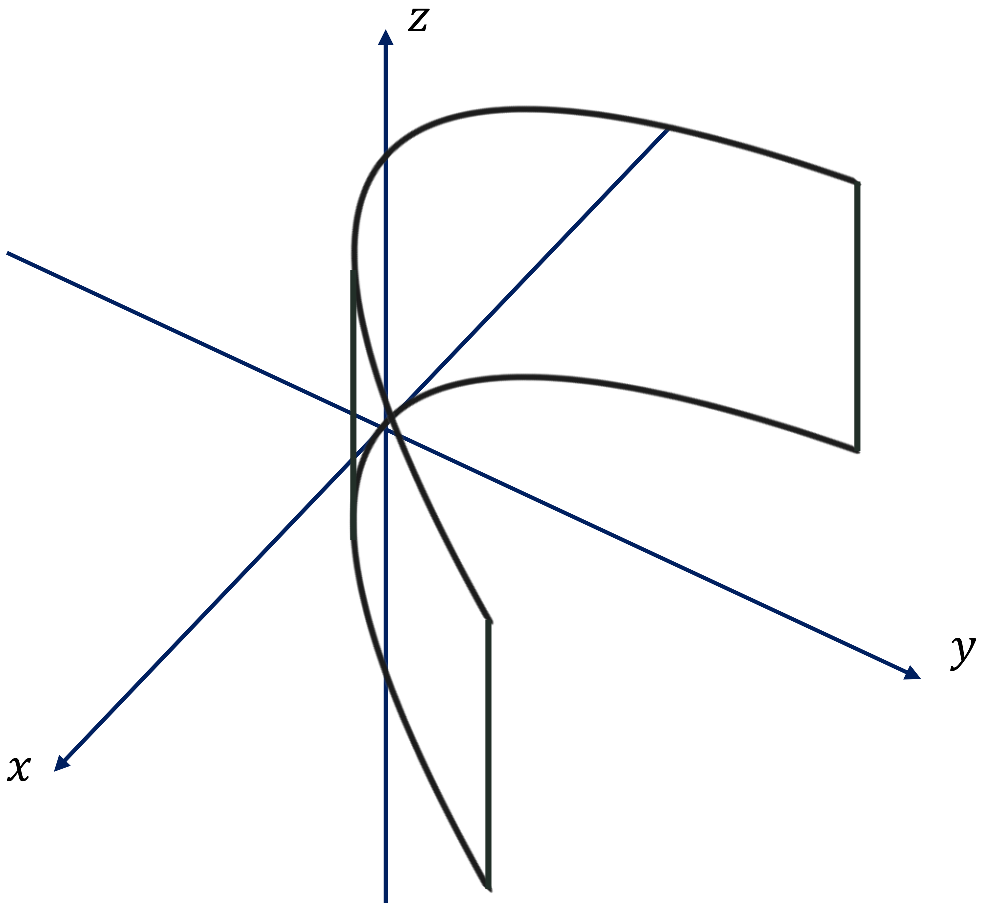
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



Esboço

Cilindro parabólico com geratriz paralela ao eixo dos z:

$$x^2 = 2py, p > 0$$



Esboço