# Álgebra Linear (ALI0001 – CCI-192-02U)

## Operadores no espaço: rotações em torno dos eixos coordenadas; projeção e reflexão em torno de uma reta

**Professor:** Marnei Mandler

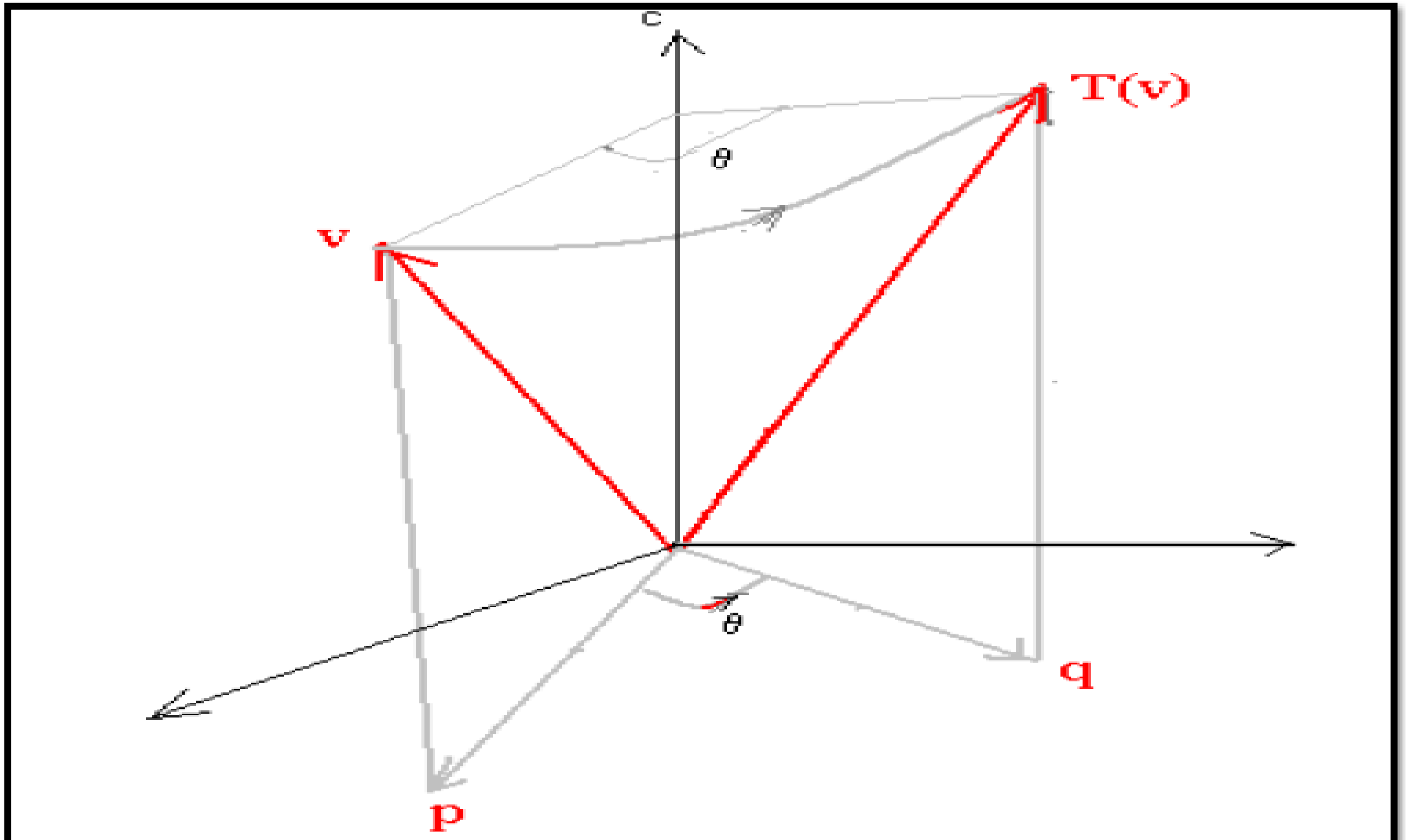
Aula de ALI do dia 12 de junho de 2023.

UDESC

# Operadores Rotação em torno dos eixos coordenados

Em $\mathbb{R}^3$ é possível definir os operadores rotação em torno dos três eixos coordenados.
O sentido de rotação deve sempre obedecer à regra da mão direita, com o polegar representando o eixo de rotação.

- Rotação anti-horária em torno de $\overrightarrow{Oz}$:




A rotação "gira" $v$ em um ângulo $\theta$ em torno de $z$. Com isso, $v$ e $T(v)$ possuem sempre a mesma cota $z$. Para obter as duas primeiras componentes de $T(v)$, basta rotacionar, em torno da origem, a projeção de $v$ sobre o plano $xy$.

# Operadores Rotação

Operador Rotação em torno de $\overrightarrow{Oz}$: O operador $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que realiza uma rotação anti-horária de ângulo $\theta$ em torno da origem é definido como

$$T(x, y, z) = (x', y', z),$$

em que $x'$ e $y'$ correspondem à rotação em torno da origem da projeção de $v = (x, y, z)$ sobre o plano $xy$. Como

$$x' = x\cos(\theta) - y\mathrm{sen}(\theta) \quad \text{e} \quad y' = y\cos(\theta) + x\mathrm{sen}(\theta),$$

temos que

$$T(x, y, z) = (x\cos(\theta) - y\mathrm{sen}(\theta), x\mathrm{sen}(\theta) + y\cos(\theta), z).$$

A matriz canônica de uma rotação em torno do eixo $z$ é dada por

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, $\det([T]) = \cos^2(\theta) + \mathrm{sen}^2(\theta) = 1 \neq 0$, a rotação sempre é invertível (bijetora).

Da mesma forma como visto nas rotações no plano, a inversa de uma rotação de ângulo $\theta$ em torno de $z$ é uma rotação de ângulo $-\theta$ em torno de $z$.

# Operador Rotação

- Rotação anti-horária em torno de $\overrightarrow{Ox}$:

A rotação em torno do eixo $\overrightarrow{Ox}$ pode ser definida de forma análoga, bastando rotacionar no sentido anti-horário a projeção sobre o plano $yz$ do vetor $v = (x, y, z)$.

Ao fazer isso, a primeira componente de $v$ fica inalterada e as demais componentes são adaptadas em termos da rotação no plano $yz$.

Com isso, pode-se se obter que a rotação de ângulo $\theta$ em torno de $\overrightarrow{Ox}$ é dada por

$$T(x, y, z) = (x, y', z') = \big(x, y\cos(\theta) - z\mathrm{sen}(\theta), y\mathrm{sen}(\theta) + z\cos(\theta)\big).$$

Com isso, a matriz canônica de uma rotação em torno de $\overrightarrow{Ox}$ é dada por

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Novamente, $\det([T]) = \cos^2(\theta) + \mathrm{sen}^2(\theta) = 1 \neq 0$ e a rotação é invertível (bijetora).

Além disso,

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\theta) & -\mathrm{sen}(-\theta) \\ 0 & \mathrm{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}.$$

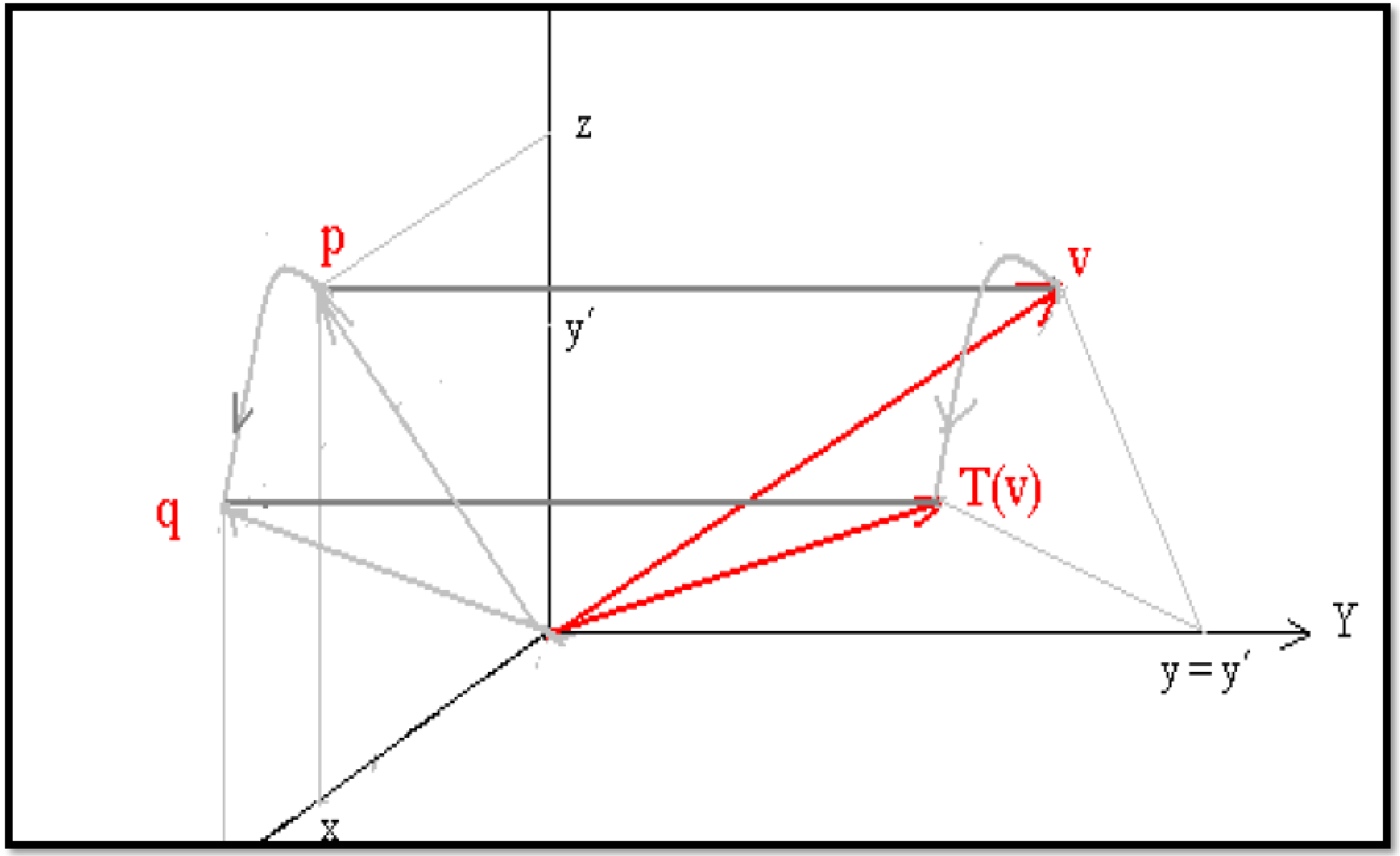
# Operador Rotação

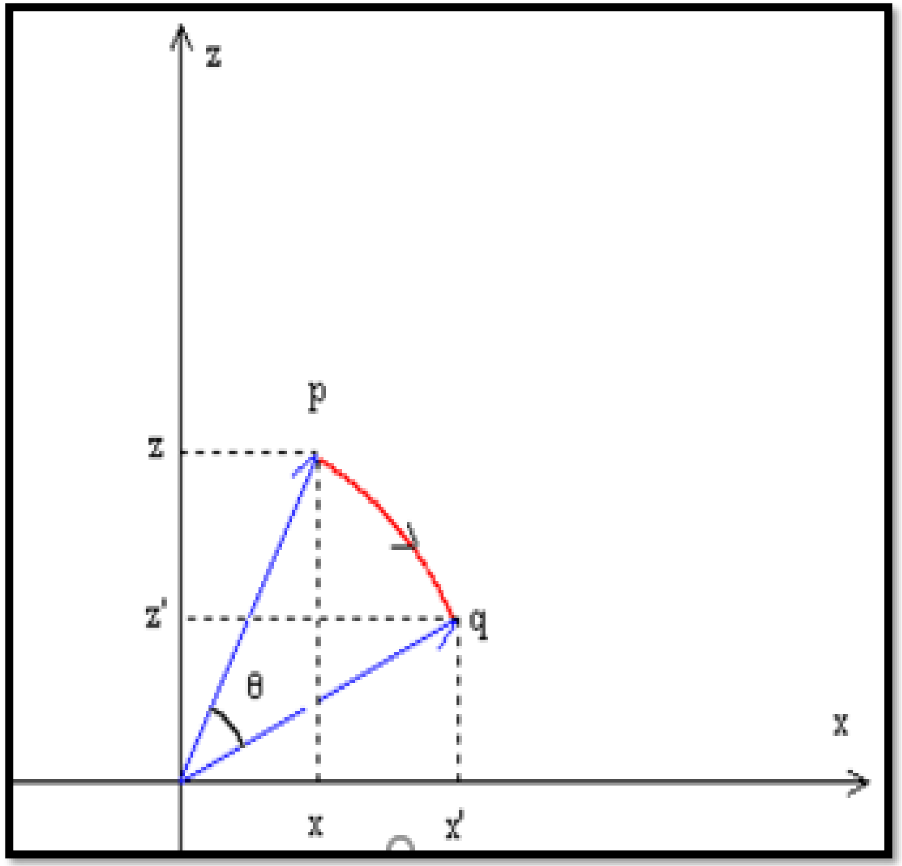
Rotação em torno de $\overrightarrow{Oy}$:

A rotação em torno do eixo $\overrightarrow{Oy}$ pode ser definida de forma análoga.

A única diferença nesse caso diz respeito à regra da mão direita.

Como o polegar representa o eixo $y$, a rotação da projeção do vetor sobre o plano $xz$ deve ocorrer do eixo $z$ para o eixo $x$, ou seja, no sentido horário no plano $xz$:



# Rotação em $\overrightarrow{Oy}$

Por isso, para considerar a rotação anti-horária na projeção, devemos tomar o ângulo com sinal negativo.

Assim, como a segunda componente permanece inalterada, obtemos:

$$T(x,y,z) = (x',y,z') = \left(x\cos(-\theta) - z\operatorname{sen}(-\theta), y, x\operatorname{sen}(-\theta) + z\cos(-\theta)\right).$$

Usando o fato que $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ e $\operatorname{sen}(-\theta) = \operatorname{sen}(\theta)$, encontramos

$$T(x,y,z) = (x',y,z') = \left(x\cos(\theta) + z\operatorname{sen}(\theta), y, -x\operatorname{sen}(\theta) + z\cos(\theta)\right).$$

Com isso, obtemos a matriz canônica da rotação em torno do *eixo y*:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & 0 & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}(-\theta) & 0 & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Note que a matriz da rotação em $\overrightarrow{Oy}$ é a única em que o seno aparece com sinal negativo abaixo da diagonal principal.

Novamente,

$$\det([T]) = \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1 \neq 0$$

e a rotação em $\overrightarrow{Oy}$ é invertível (bijetora).

# Exemplo:

Exercício 1: Determine a lei do operador linear no espaço que representa uma rotação de ângulo $\frac{\pi}{3}$ em torno do eixo $\overrightarrow{Oy}$, seguido de uma rotação de ângulo $\frac{\pi}{4}$ em torno do eixo $\overrightarrow{Ox}$, seguido de uma uma rotação de ângulo $\frac{\pi}{6}$ em torno do eixo $\overrightarrow{Oz}$.

Esse operador é invertível? Qual sua inversa?

Solução: O exercício foi resolvido durante a aula.

# Exemplo Resolvido

Exemplo 1: Determine a lei do operador linear no espaço que representa uma rotação de ângulo $\frac{\pi}{4}$ em torno do eixo $\overrightarrow{Ox}$, seguido de uma rotação de ângulo $\frac{\pi}{6}$ em torno do eixo $\overrightarrow{Oz}$, seguido de uma uma rotação de ângulo $\frac{\pi}{3}$ em torno do eixo $\overrightarrow{Oy}$.

Esse operador é invertível? Qual sua inversa?

Solução: Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador desejado. Temos que $T$ é dado pela seguinte composição :

$$T = R_{\frac{\pi}{3}y} \circ R_{\frac{\pi}{6}z} \circ R_{\frac{\pi}{4}x}$$

Assim, usando a representação matricial das respectivas rotações, obtemos:

$$[T] = [R_{\frac{\pi}{3}y} \circ R_{\frac{\pi}{6}z} \circ R_{\frac{\pi}{4}x}] = [R_{\frac{\pi}{3}y}] \cdot [R_{\frac{\pi}{6}z}] \cdot [R_{\frac{\pi}{4}x}]$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & 0 & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) & 0 \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$$

# Exemplo:

Logo

$$[T] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -3/4 & \sqrt{3}/4 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{3}/4 & -\sqrt{2}/8 + \sqrt{6}/4 & \sqrt{2}/8 + \sqrt{6}/4 \\ 1/2 & \sqrt{6}/4 & -\sqrt{6}/4 \\ -3/4 & -\sqrt{6}/8 + \sqrt{2}/4 & -\sqrt{6}/8 + \sqrt{2}/4 \end{bmatrix}.$$

Como $[T] \neq [T]^t$, temos que $T$ não é simétrico/autoadjunto

# Exemplo:

Portanto, a lei do operador desejado é

$$T(x,y,z)=\left(\begin{array}{c}\frac{\sqrt{3}}{4}x+\left(\frac{-\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)y+\left(\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)z,\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{6}}{4}y-\frac{\sqrt{6}}{4}z,\\ \frac{-3}{4}x+\left(\frac{-\sqrt{6}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)y+\left(\frac{-\sqrt{6}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)z\end{array}\right).$$

Como $[T]=\left[R_{\frac{\pi}{3}y}\right].\left[R_{\frac{\pi}{6}z}\right].\left[R_{\frac{\pi}{4}x}\right]$ temos que

$$det[T]=det\left[R_{\frac{\pi}{3}y}\right].\left[R_{\frac{\pi}{6}z}\right].\left[R_{\frac{\pi}{4}x}\right]$$

$$=det\left[R_{\frac{\pi}{3}y}\right].det\left[R_{\frac{\pi}{6}z}\right].det\left[R_{\frac{\pi}{4}x}\right]=1.1.1=1\neq 0,$$

e $T$ é invertível.

Para obter sua inversa, é mais prudente utilizar propriedades da inversa de um produto e encontrar que

$$[T^{-1}]=[T]^{-1}=\left(\left[R_{\frac{\pi}{3}y}\right].\left[R_{\frac{\pi}{6}z}\right].\left[R_{\frac{\pi}{4}x}\right]\right)^{-1}=\left(\left[R_{\frac{\pi}{4}x}\right]\right)^{-1}.\left(\left[R_{\frac{\pi}{6}z}\right]\right)^{-1}.\left(\left[R_{\frac{\pi}{3}y}\right]\right)^{-1}$$

# Exemplo:

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) & -\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) & 0 \\ \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & 0 & \text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) & 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{6}/4 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/4 & -\sqrt{6}/4 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

# Exemplo

Portanto

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/_4 & 1/_2 & -3/_4 \\ -\sqrt{2}/_8 + \sqrt{6}/_4 & \sqrt{6}/_4 & \sqrt{6}/_8 + \sqrt{2}/_4 \\ -\sqrt{2}/_8 + \sqrt{6}/_4 & -\sqrt{6}/_4 & \sqrt{6}/_8 + \sqrt{2}/_4 \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos que a inversa do operador é dado por

$$T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{4}z, \left(\frac{-\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)x + \frac{\sqrt{6}}{4}y + \left(\frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)z, \left(\frac{-\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)x - \frac{\sqrt{6}}{4}y\left(\frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)z\right).$$

Note que, devido a composição efetuada, temos que $T^{-1} \neq T$.

Além disso, $[T^{-1}] \neq [T]^t$ e $T$ não é ortogonal.

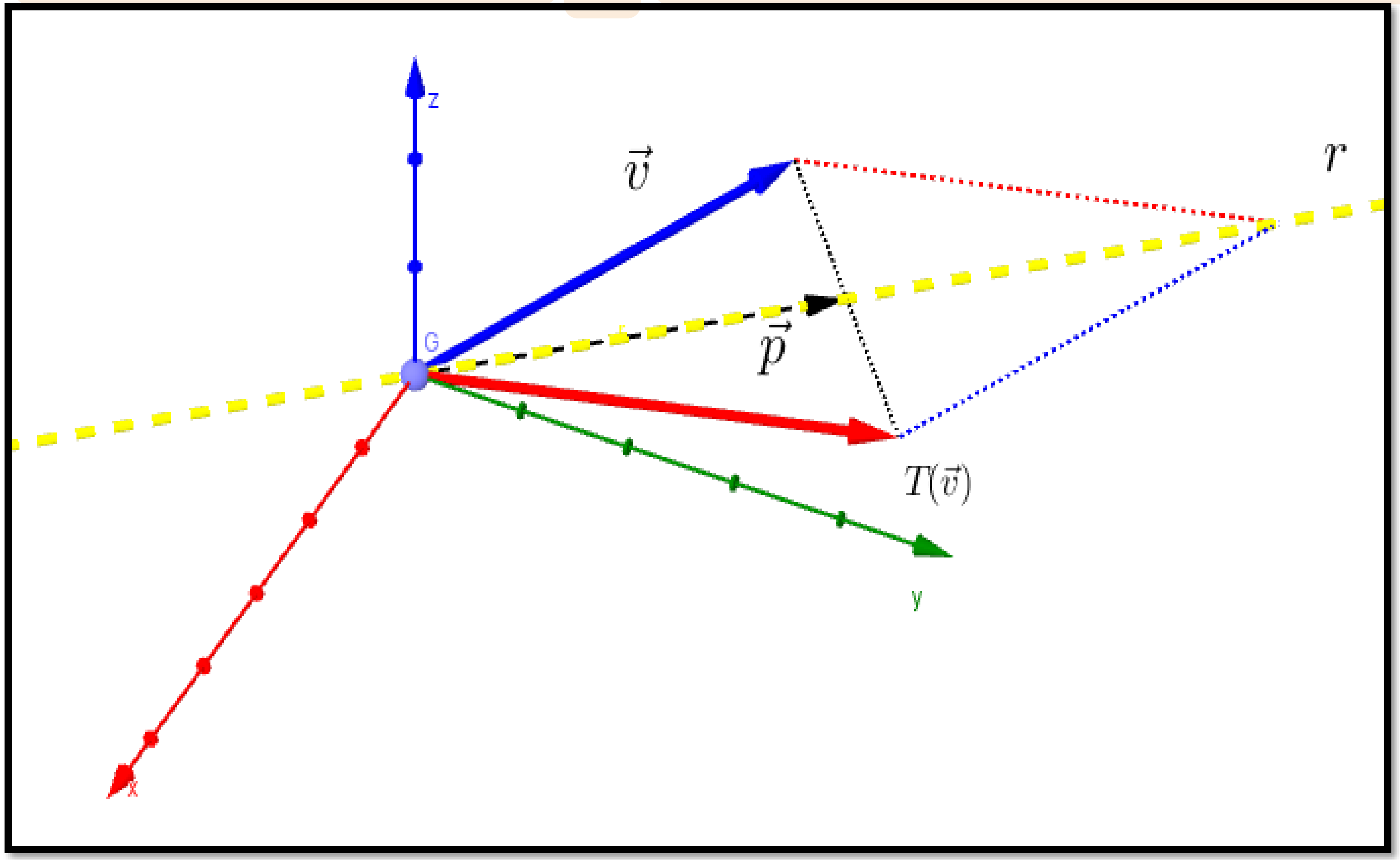
# Projeção e Reflexão em torno de uma reta em $\mathbb{R}^3$

Operador Reflexão em torno de uma reta $r$ que passa pela origem:

É o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(v) = 2p - v$$

onde $p = proj_u(v) = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u$ é a projeção de $v$ sobre o diretor $u$ da reta $r$ considerada.




Se $u$ é o vetor gerador da reta $r$, temos que $p$ é a projeção ortogonal de $v$ sobre $u$.

Logo

$$p = proj_u(v) = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u$$

Assim, pela resultante:

$$v + T(v) = 2p.$$

Então

$$T(v) = 2p - v.$$

# Reflexão e Projeção em torno de uma Reta

Observação: A definição do operador que realiza uma reflexão em torno de uma reta no espaço é igual à definição do operador reflexão em torno de uma reta no plano.

Da mesma forma, a expressão do vetor projeção (que define o operador projeção sobre $r$) é análoga à utilizada na aula de operadores no plano. A única diferença é que os vetores $v$ e $p$ terão agora três componentes. A forma de obtê-los é essencialmente a mesma.

Exemplo 2: Determine a lei do operador linear no espaço que realiza a reflexão em torno da reta

$$r: \begin{cases} y = 5x \\ z = -3x \end{cases}.$$

Esse operador é invertível? Se sim, qual é a sua inversa?

Solução: Inicialmente precisamos obter o vetor gerador (diretor) da reta $r$. Para isso, note que se $w = (x, y, z) \in r$ então temos que

$$w = (x, 5x, -3x) = x(1, 5, -3).$$

Portanto, o vetor diretor gerador da reta $r$ é $u = (1, 5, -3)$.

Com isso, a projeção de $v = (x, y, z)$ sobre $u = (1, 5, -3)$ é dada por:

$$p = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u = \frac{(1, 5, -3) \cdot (x, y, z)}{(1, 5, -3) \cdot (1,5, -3)} (1, 5, -3) = \frac{x + 5y - 3z}{1 + 25 + 9} (1, 5, -3).$$

# Exemplo Resolvido

Ou seja

$$p = \frac{x+5y-3z}{35}(1,5,-3) = \left(\frac{x+5y-3z}{35}, \frac{5x+25y-15z}{35}, \frac{-3x-15y+9z}{35}\right)$$

Com isso, obtemos a lei do operador que realiza a reflexão em torno da reta:

$$T(x,y,z) = T(v) = 2p - v$$

$$= 2.\left(\frac{x+5y-3z}{35}, \frac{5x+25y-15z}{35}, \frac{-3x-15y+9z}{35}\right) - (x,y,z)$$

$$= \left(\frac{2x+10y-6z}{35}, \frac{10x+50y-30z}{35}, \frac{-6x-30y+18z}{35}\right) - \frac{35}{35}(x,y,z)$$

$$= \left(\frac{2x+10y-6z-35x}{35}, \frac{10x+50y-30z-35y}{35}, \frac{-6x-30y+18z-35z}{35}\right)$$

$$= \left(\frac{-33x+10y-6z}{35}, \frac{10x+15y-30z}{35}, \frac{-6x-30y-17z}{35}\right).$$

# Exemplo Resolvido

Como

$$T(x,y,z) = \left(\frac{-33x + 10y - 6z}{35}, \frac{10x + 15y - 30z}{35}, \frac{-6x - 30y - 17z}{35}\right)$$

a matriz canônica de $T$ é dada por

$$[T] = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} -33 & 10 & -6 \\ 10 & 15 & -30 \\ -6 & -30 & -17 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz $[T]$ é simétrica, $T$ é auto adjunto. Além disso, temos que

$$\det([T]) = \left(\frac{1}{35}\right)^3 .42875 = 1 \neq 0$$

e $T$ é um operador invertível (bijetor)! Como

$$[T].[T] = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} -33 & 10 & -6 \\ 10 & 15 & -30 \\ -6 & -30 & -17 \end{bmatrix}.\frac{1}{35}\begin{bmatrix} -33 & 10 & -6 \\ 10 & 15 & -30 \\ -6 & -30 & -17 \end{bmatrix} = \frac{1}{35^2}\begin{bmatrix} 1225 & 0 & 0 \\ 0 & 1225 & 0 \\ 0 & 0 & 1225 \end{bmatrix} = I$$

temos que $$[T]^{-1} = [T].$$

# Exemplo Resolvido

Assim

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = [T] = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} -33 & 10 & -6 \\ 10 & 15 & -30 \\ -6 & -30 & -17 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, vemos que a inversa da reflexão é a própria reflexão:

$$T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{-33x+10y-6z}{35}, \frac{10x+15y-30z}{35}, \frac{-6x-30y-17z}{35}\right) = T(x,y,z)$$

Observação: Toda reflexão é tal que $[T^{-1}] = [T] = [T]^t$.

Por isso, dizemos que uma reflexão, além de ser simétrica, é um operador ortogonal.

Note que os vetores situados nas colunas de $[T]$ (que correspondem à imagem da base canônica de $\mathbb{R}^3$) , dados por

$$u_1 = \frac{1}{35}(-33,10,-6), \quad u_2 = \frac{1}{35}(10,15,-30), \quad u_3 = \frac{1}{35}(-6,-30,-17)$$

são tais que

$$u_1 \cdot u_2 = \frac{1}{35^2}(-330+150+180) = 0$$

$$u_1 \cdot u_3 = \frac{1}{35^2}(198-300+102) = 0$$

$$u_2 \cdot u_3 = \frac{1}{35^2}(-60-450+510) = 0$$

$$|u_1| = \frac{1}{35}\sqrt{1089+100+36} = \frac{1}{35}\sqrt{1225} = 1$$

# Exemplo Resolvido

Ainda:

$$|u_2| = \frac{1}{35}\sqrt{100 + 225 + 900} = \frac{1}{35}\sqrt{1225} = 1,$$

$$|u_3| = \frac{1}{35}\sqrt{36 + 900 + 289} = \frac{1}{35}\sqrt{1225} = 1.$$

Portanto, as colunas de $[T]$ formam vetores unitários, que são mutuamente ortogonais entre si, e que por isso são LI e formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$.

Além disso, para qualquer operador ortogonal (tal que $[T^{-1}] = [T]^t$), temos que $[T].[T]^t = I$ e então

$$\det([T].[T]^t) = \det(I)$$

$$\det([T]).\det([T]^t) = 1$$

$$\det([T]).\det([T]) = 1$$

$$\det([T])] = \pm 1.$$

É possível verificar que um operador ortogonal, ou seja, tal que

$$[T]^{-1} = [T]^t$$

preserva o produto escalar e o módulo:

$$T(u) \cdot T(v) = u.v$$

$$|T(u)| = |u|.$$

# Exercício resolvido em aula

Exercício 2: Seja $r$ a reta de interseção entre os planos

$$2x - 3y + 4z = 0 \quad \text{e} \quad -3x + 5y - 3z = 0.$$

Determine a lei do operadores lineares no espaço que realizam, respectivamente:

a) a projeção em torno de $r$.

b) a reflexão em torno de $r$.

Esses operadores são invertíveis? Se sim, qual suas inversas?

Solução: Todos os itens foram resolvidos durante a aula