Álgebra Linear (ALI0001 – CCI-192-02U)

Diagonalização de Matrizes
Aplicações da Diagonalização

Professor: Marnei Mandler

Aula de ALI do dia 28 de junho de 2023.

UDESC

Revisão Diagonalização

Uma breve revisão dos principais conceitos:

Definição: Um operador linear $T: V \to V$ é dito diagonalizável se existir uma base β para V formada por autovetores de T.
Quando isso ocorre, $[T]_\beta^\beta = D$ é uma matriz diagonal, com os autovalores de T situados na diagonal principal.

Quando T é diagonalizável, existe uma matriz invertível P tal que

$$P \cdot D = [T] \cdot P,$$

ou seja,

$$D = P^{-1} \cdot [T] \cdot P.$$

P é chamada de matriz diagonalizadora de $[T]$. As colunas de P são as coordenadas dos autovetores.

Teorema: Autovetores de um operador $T: V \to V$ que estão associados a autovalores distintos são linearmente independentes (LI).

Teorema: Se $\dim(V) = n$ e $T: V \to V$ possuir exatamente n autovalores distintos, então existe uma base para V formada por autovetores *de T e o operador é diagonalizável.*

Questão: o que ocorre quando não há autovalores distintos para um operador? Ou seja, quando existem autovalores repetidos?

Exemplo Resolvido

Exemplo 1: Determine a lei do operador $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que admite os autovetores

$$v_1 = (1,1,1) \quad v_2 = (0,1,-1) \quad \text{e} \quad v_3 = (-1,0,-1)$$

associados, respectivamente, aos autovalores

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 5.$$

A seguir, determine a matriz canônica de T e a matriz $[T]_\beta^\beta$ onde $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Solução: Pela definição de autovetor e autovalor, temos que

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1 \quad \Rightarrow \quad T(1,1,1) = -3(1,1,1) = (-3,-3,-3)$$

$$T(v_2) = \lambda_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad T(0,1,-1) = 2(0,1,-1) = (0,2,-2)$$

$$T(v_3) = \lambda_3 v_3 \quad \Rightarrow \quad T(-1,0,-1) = 5(-1,0,-1) = (-5,0,-5)$$

Como $\beta = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,1,1); (0,1,-1); (-1,0,-1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$ (são LI - exercício), conhecemos as imagens, por T, dos elementos de uma base para o domínio da transformação.

Com isso, para $v = (x,y,z)$ temos que existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = a(1,1,1) + b(0,1,-1) + c(-1,0,-1)$$

e com isso chegamos no sistema linear:

Exemplo Resolvido

$$\begin{cases} a - c = x \\ a + b = y \\ a - b - c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = a - x \\ b = y - a \\ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ a - (y - a) - (a - x) = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -2x + y + z \\ b = x - z \\ a = -x + y + z \end{cases}$$

Portanto,

$$(x, y, z) = (-x + y + z)(1,1,1) + (x - z)(0, 1, -1) + (-2x + y + z)(-1, 0, -1).$$

Aplicando a transformação T em ambos os lados e usando a sua linearidade, obtemos que

$$T(x, y, z) = (-x + y + z)T(1,1,1) + (x - z)\,T(0, 1, -1) + (-2x + y + z)\,T(-1, 0, -1).$$

Substituindo as imagens obtidas anteriormente, obtemos que

$$T(x, y, z) = (-x + y + z)(-3, -3, -3) + (x - z)(0, 2, -2) + (-2x + y + z)(-5, 0, -5)$$

$$= (3x - 3y - 3z + 10x - 5y - 5z, 3x - 3y - 3z + 2x - 2z, 3x - 3y - 3z + \\ -2x + 2z + 10x - 5y - 5z)$$

$$= (13x - 8y - 8z, 5x - 3y - 5z, 11x - 8y - 6z).$$

Portanto, a matriz canônica de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} 13 & -8 & -8 \\ 5 & -3 & -5 \\ 11 & -8 & -6 \end{bmatrix}.$$

Com a lei de T, é possível tirar uma “prova real”, verificando que
$T(v_1) = -3v_1$,
$T(v_2) = 2v_2$
$T(v_3) = 5v_3$.

Exemplo Resolvido

Por fim, para obter as colunas da matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$ onde $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$, basta aplicar T nos vetores da base β e escrever as imagens obtidas como combinação linear da própria base β. Fazendo isso, obtemos que

$$T(v_1) = -3v_1 = -3v_1 + 0.v_2 + 0.v_3$$

$$T(v_2) = 2v_2 = 0.v_1 + 2.v_2 + 0.v_3$$

$$T(v_3) = 5v_3 = 0.v_1 + 0.v_2 + 5.v_3$$

Portanto

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Observações:

- Note que a matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$ é uma matriz diagonal, com os autovalores de T situados na sua diagonal principal.
- A matriz diagonal $[T]_{\beta}^{\beta}$, onde $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T, é a representação matricial mais simples possível para T.
- Veja que $\det[T] = -30 = \det[T]_{\beta}^{\beta}$.

Exemplo

Exercício 1: Verifique se o operador $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (3x + y, -x + 2y + 3z, 2x + y + z).$$

é diagonalizável ou não.

Solução: O exercício foi resolvido em aula, em que obtivemos que o operador não era diagonalizável.

Multiplicidade Algébrica e Multiplicidade Geométrica de um Autovalor

Definição:

Seja λ um autovalor de um operador $T: V \to V$ e V_λ o seu autoespaço associado.

O número de vezes em que λ é raiz do polinômio característico $p(\lambda)$ é chamado de **multiplicidade algébrica de λ**.

A dimensão do autoespaço V_λ é chamada de **multiplicidade geométrica de λ**.

Note que no Exercício 1, obtivemos que

$$mult.algeb.(1) = 2 \qquad mult.algeb.(4) = 1$$

e

$$mult.geom.(1) = \dim(V_1) = 1 \qquad mult.geom.(4) = \dim(V_4) = 1.$$

Veja que, para $\lambda_1 = 1$ obtivemos que

$$mult.geom.(1) = 1 \neq 2 = mult.algeb.(1)$$

e que o operador T não era diagonalizável.

Esse é um fato geral, dado pelo Teorema a seguir:

Teorema

Teorema: Seja $T: V \to V$ um operador linear e λ um autovalor de T. Então

i) $mult.geom.(\lambda) \leq mult.algeb.(\lambda)$

ii) T é diagonalizável se e somente se

$$mult.geom.(\lambda) = mult.algeb.(\lambda)$$

para todo autovalor λ.

Justificativa:

Para a parte i): Por definição, cada autovalor está associado a pelo menos um autovetor. O que pode ocorrer é que um autovalor seja raiz repetida do polinômio característico, mas não tenha mais de um autovetor associado a ele (como no Exercício).

Por isso, a multiplicidade geométrica (dimensão do autoespaço) é sempre menor ou no máximo igual ao número de vezes que o autovalor é raiz de $p(\lambda)$.

Para a parte ii): O operador $T: V \to V$ é diagonalizável se e somente se existir uma base para V formada por autovetores de T. Se $\dim(V) = n$ sabemos que toda base de V deve ser formada por exatamente n vetores. Como o polinômio característico $p(\lambda)$ tem grau igual a n, existem no máximo n autovalores (distintos ou repetidos) para T.

Por isso, para T ser diagonalizável **é necessário e obrigatório** que a quantidade de autovetores LI associados a cada autovetor (que corresponde à dimensão do autoespaço e à multiplicidade geométrica do autovalor) seja igual à quantidade de vezes que o autovalor é raiz de $p(\lambda)$.

Diagonalização de Matrizes

Definição: Uma matriz quadrada A é diagonalizável se e somente se existir uma matriz invertível P tal que

$$A.P = P.D$$

onde D é uma matriz diagonal.

Observações:

- Se A for diagonalizável então $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ ou, da mesma forma, $A \cdot P = P \cdot D$.
- Se A for diagonalizável, então P é a matriz diagonalizadora de A (com colunas formadas pelos autovetores de A).
- Além disso, D é a matriz diagonal, com os autovalores de A situados na sua diagonal principal.
- Caso exista, P é tal que $\det(P) \neq 0$ e, com isso, $A \cdot P = P \cdot D$ implica que

$$\det(A \cdot P) = \det(P \cdot D) \;\Rightarrow\; \det(A) \cdot \det(P) = \det(P) \cdot \det(D) \;\Rightarrow\; \det(A) = \det(D).$$

- As matrizes A e D são ditas matrizes semelhantes.
- O fato de uma matriz quadrada A ser diagonalizável significa que o operador linear induzido por A é diagonalizável.
- Os autovalores de A são dados pelas raízes do polinômio $p(\lambda) = \det([A - \lambda I])$.

Aplicação de Diagonalização: Potências de uma Matriz

Definição: Sejam $A_{n\times n}$ uma matriz quadrada e $k \in \mathbb{N}$.
Define-se a $k-ésima$ potência da matriz A como a operação tal que

$$A^k = \begin{cases} I_{n\times n}, & \text{se } k = 0 \\ \underbrace{A.A.A \dots .A}_{k \text{ fatores}}, & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

Observação: Para valores “pequenos” de k pode-se obter A^k por meio da multiplicação matricial, ainda que isso exija alguns cálculos:

Exemplo: Para $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ e tomando $k = 5$, temos que A^5 é dada por

$$A^5 = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -16 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -16 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 209 & -416 \\ -208 & 417 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1041 & 2084 \\ 1042 & -2083 \end{bmatrix}.$$

Potências de uma Matriz

Exemplo 2: Para $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ encontre A^{2023}.

Vamos aplicar a teoria de diagonalização para simplificar os cálculos:

Suponhamos que a matriz $A_{n\times n}$ seja diagonalizável. Logo existe P invertível tal que

$$A \cdot P = P \cdot D,$$

onde P é a matriz diagonalizadora de A, com colunas formadas pelos autovetores de A e onde D é uma matriz diagonal, com os autovalores de A na sua diagonal principal.

Com isso, multiplicando por P^{-1} à direita de cada membro da equação matricial

$$A \cdot P = P \cdot D$$

obtemos que

$$A \cdot P \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

ou seja

$$A \cdot I = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

Assim

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

Conseguimos isolar A em função da sua matriz diagonalizadora e da sua forma diagonal.

Potências de uma Matriz

Portanto, se A é uma matriz diagonalizável, então existem P e D tais que

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

Agora vamos obter algumas potências de A. Note que

$$\begin{aligned} A^2 = A \cdot A = (P \cdot D \cdot P^{-1}).(P \cdot D \cdot P^{-1}) \\ &= (P \cdot D) \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot (D \cdot P^{-1}) \\ &= (P \cdot D) \cdot I \cdot (D \cdot P^{-1}) = P \cdot D \cdot D \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot D^2 \cdot P^{-1}. \end{aligned}$$

Da mesma forma

$$\begin{aligned} A^3 = A \cdot A^2 = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D^2 \cdot P^{-1}) \\ &= (P \cdot D) \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot (D^2 \cdot P^{-1}) \\ &= (P \cdot D) \cdot I \cdot (D^2 \cdot P^{-1}) = P \cdot D \cdot D^2 \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot D^3 \cdot P^{-1}. \end{aligned}$$

De forma geral, pode-se mostrar (pelo método de indução matemática) que, para $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}.$$

Potências de uma Matriz

Agora, como D é uma matriz diagonal, com os autovalores de A situados na diagonal principal, temos que

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Logo obtemos que

$$D^2 = D \cdot D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix}.$$

Veja como é simples obter as potências da matriz diagonal D!

$$D^3 = D^2 \cdot D = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^3 \end{bmatrix}.$$

Potências de uma Matriz

De forma análoga, é possível obter que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, a potência D^k é dada por:

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix},$$

que também é muito simples de ser obtida, bastando elevar cada autovalor de A no expoente k desejado.

Portanto, se A é diagonalizável então

$$A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$$

Expressão para a potência A^k de uma matriz diagonalizável A.

em que $k \in \mathbb{N}$, P é a matriz diagonalizadora de A e cada λ_i é um autovalor (simples ou repetido) de T.

Exemplo

Com essa teoria, podemos voltar para o Exemplo e calcular facilmente o expoente:

Exemplo 2: Para $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ encontre A^{2023}.

Solução: Se A é uma matriz diagonalizável podemos aplicar toda a teoria já estudada.

A matriz dada é a matriz canônica do operador $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ estudado no Exemplo 1 do material da aula do dia 26 de junho, em que encontramos o polinômio característico

$$p(\lambda) = \det([A - \lambda I]) = det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = (3-\lambda)[\lambda^2 - 8\lambda + 12\,]$$

e os autovalores de A (raízes de $p(\lambda)$ dados por $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 6$.

Além disso, obtivemos que o autovetor associado a $\lambda_1 = 3$ é $(1,1,1)$; que o autovetor associado a $\lambda_2 = 2$ é $(-1,0,1)$ e que o autovetor associado a $\lambda_3 = 6$ é $(1,-2,1)$. Assim, concluímos que A é diagonalizável, pois admite três autovalores distintos, e que sua matriz diagonalizadora é

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ com inversa } P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Ainda, a forma diagonal de A é a matriz

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a teoria estudada para a matriz

$$A = P.D.P^{-1},$$

obtemos que

$$A^{2023} = P \cdot D^{2023} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3^{2023} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2023} & 0 \\ 0 & 0 & 6^{2023} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot 3^{2023} & 2.3^{2023} & 2 \cdot 3^{2023} \\ (-3) \cdot 2^{2023} & 0 & 3 \cdot 2^{2023} \\ 6^{2023} & (-2) \cdot 6^{2023} & 6^{2023} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 \cdot 3^{2023} + 3 \cdot 2^{2023} + 6^{2023} & 2 \cdot 3^{2023} + (-2) \cdot 6^{2023} & 2 \cdot 3^{2023} - 3 \cdot 2^{2023} + 6^{2023} \\ 2 \cdot 3^{2023} + (-2).6^{2023} & 2 \cdot 3^{2023} + 4 \cdot 6^{2023} & 2 \cdot 3^{2023} + (-2) \cdot 6^{2023} \\ 2 \cdot 3^{2023} + (-3) \cdot 2^{2023} + 6^{2023} & 2 \cdot 3^{2023} - 2 \cdot 6^{2023} & 2 \cdot 3^{2023} + 3 \cdot 2^{2023} + 6^{2023} \end{bmatrix}$$

Exemplo

Por fim, para efetuar a multiplicação pelo escalar 1/6, observamos que

$$\frac{1}{6} = 6^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 3} = (2 \cdot 3)^{-1} = 2^{-1} \cdot 3^{-1}$$

e utilizando propriedades de potenciação, obtemos que

$$A^{2023} = \begin{bmatrix} 3^{2022} + 2^{2022} + 6^{2022} & 3^{2022} - 2 \cdot 6^{2022} & 3^{2022} - 2^{2022} + 6^{2022} \\ 3^{2022} - 2.6^{2022} & 3^{2022} + 4 \cdot 6^{2022} & 3^{2022} - 2 \cdot 6^{2022} \\ 3^{2022} - 2^{2022} + 6^{2022} & 3^{2022} - 2 \cdot 6^{2022} & 3^{2022} + 2^{2022} + 6^{2022} \end{bmatrix}.$$

Com esse resultado, podemos observar que o operador linear induzido pela matriz A, dado por $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (3x - y + z,\ -x + 5y - z,\ x - y + 3z)$ é tal que

$$T^{2023}(x, y, z) = ((3^{2022} + 2^{2022} + 6^{2022})x + (3^{2022} - 2 \cdot 6^{2022})y + (3^{2022} - 2^{2022} + 6^{2022})z;$$

$$(3^{2022} - 2 \cdot 6^{2022})x + (3^{2022} + 4 \cdot 6^{2022})y + (3^{2022} - 2 \cdot 6^{2022})z;$$

$$(3^{2022} - 2^{2022} + 6^{2022})x + (3^{2022} - 2 \cdot 6^{2022})y + (3^{2022} + 2^{2022} + 6^{2022})z).$$

Exemplo

Exercício 3: Para $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ encontre A^{2023}.

Solução: O exercício foi resolvido em aula, com a obtenção dos autovalores e autovetores de T, a matriz diagonal D e a matriz diagonalizadora P e sua inversa P^{-1}, e a seguir, aplicomos a relação

$$A^{2023} = P \cdot D^{2023} \cdot P^{-1}.$$

Exemplo

Exemplo 3: Para $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ determine A^{900} .

Solução: A matriz A induz o operador $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-x + 4y, 2x - 3y)$.

No Exemplo 1 do material da aula do dia 21 de junho, vimos que T é diagonalizável, com

$$\beta = \{(2,1), (1,-1)\}$$

sendo a base para $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T, associados aos autovalores

$$\lambda_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = -5.$$

Portanto, A é diagonalizável e podemos escrever

$$A = P.D.P^{-1},$$

com

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Portanto, tomando $k = 900$ e aplicando a teoria anterior, obtemos que

$$A^{900} = P \cdot D^{900} \cdot P^{-1}.$$

Exemplo

Com isso, obtemos que

$$A^{900} = P.D^{900}.P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1^{900} & 0 \\ 0 & (-5)^{900} \end{bmatrix} . \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Usando propriedades da multiplicação de uma matriz por um escalar e o fato de que um número negativo, elevado a um expoente par, resulta sempre em valor positivo, obtemos:

$$A^{900} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & +5^{900} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5^{900} & 2.(5^{900}) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + 5^{900} & 2 + 2.(5^{900}) \\ 1 - (5^{900}) & 1 - 2.(5^{900}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{2 + 5^{900}}{3} & \dfrac{2 + 2.(5^{900})}{3} \\ \dfrac{1 - (5^{900})}{3} & \dfrac{1 - 2.(5^{900})}{3} \end{bmatrix}.$$