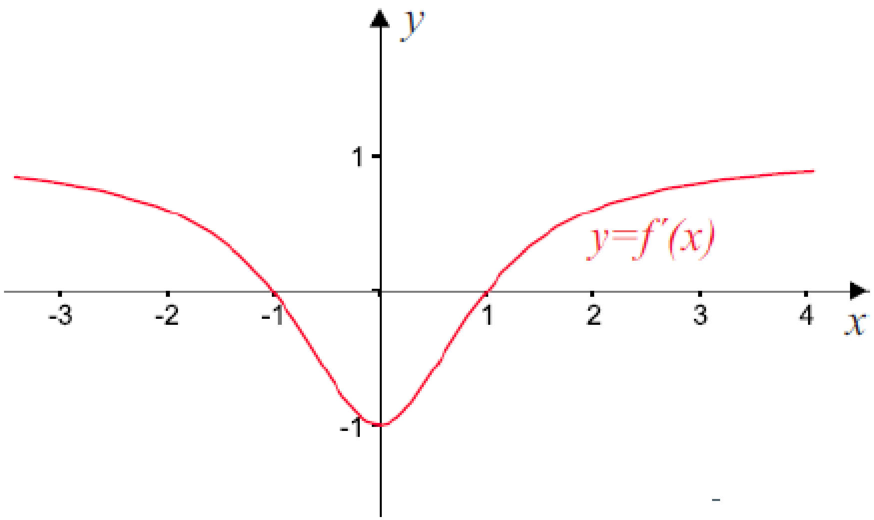
Exemplo:

Esboce o gráfico de uma função $f(x)$, contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, sabendo que f tem três raízes reais, que $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x] = -3$, $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x] = 3$ e que o gráfico da primeira derivada de f está representado na figura a seguir.



Dados:

f possui 3 raízes $\Longrightarrow f(x_i) = 0, i = 1{,}2{,}3$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = -3 \rightarrow b_1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - x) = 3 \rightarrow b_2 \end{cases} \qquad k = 1$$

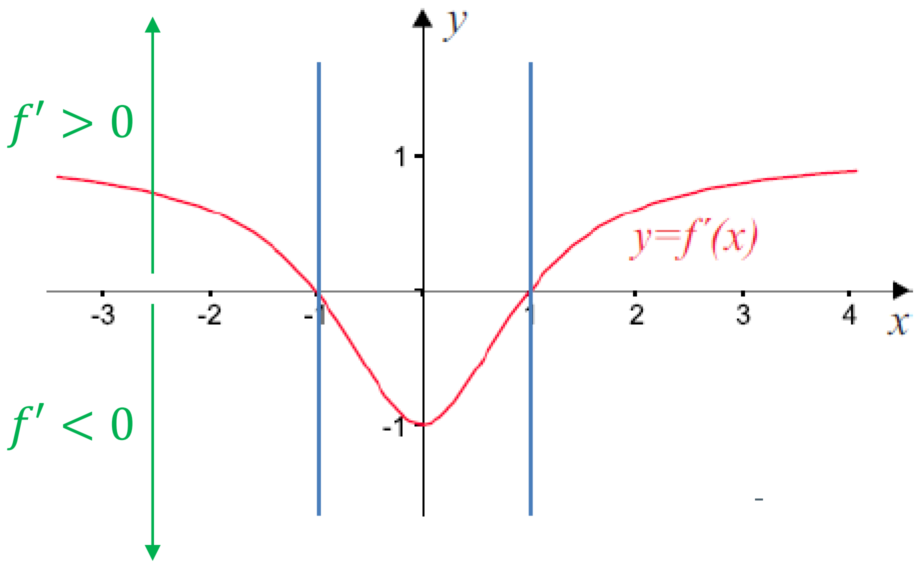
Comparando esses limites com $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = b$, temos que:

A reta:

$$\begin{cases} y = x - 3 \Longrightarrow \text{é assíntota oblíqua para } x \to +\infty \\ y = x + 3 \Longrightarrow \text{é assíntota oblíqua para } x \to -\infty \end{cases}$$

Exemplo:

Esboce o gráfico de uma função $f(x)$, contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, sabendo que f tem três raízes reais, que $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=-3$, $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=3$ e que o gráfico da primeira derivada de f está representado na figura a seguir.

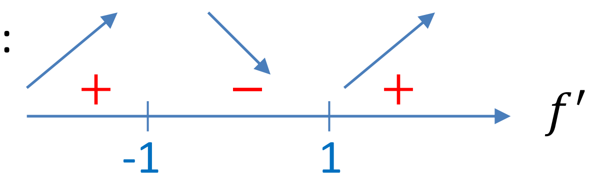


Extraindo os dados do gráfico de f':

Pontos críticos:

$$\begin{cases} f'(-1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Rightarrow$$ -1 e 1 são pontos críticos

Sinais de f':



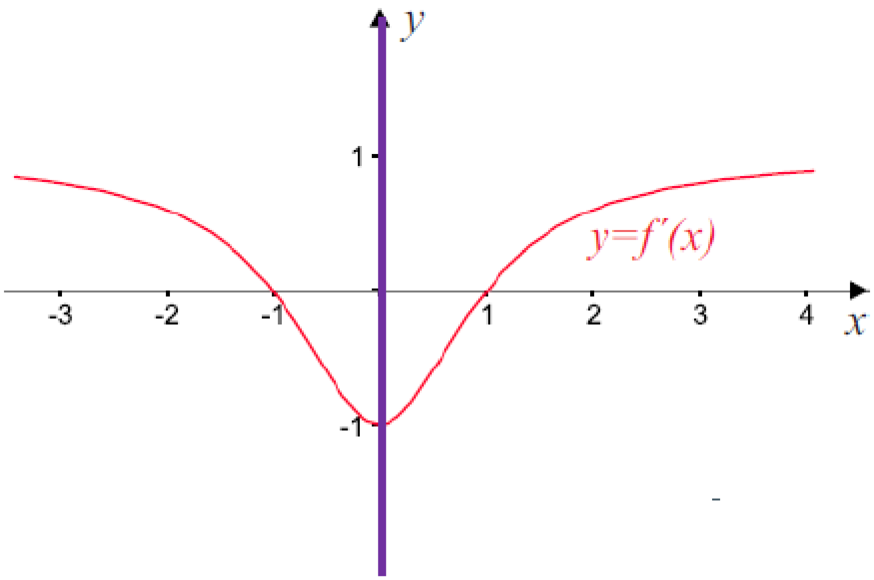
✓ $f'(x_0) > 0, \forall x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \Longrightarrow f$ é crescente $\forall x \in (-\infty,-1)] \cup [1,+\infty)$

✓ $f'(x_0) < 0, \forall x \in (0,3) \Longrightarrow f$ é decrescente $\forall x \in [-1,1]$

Pelo teste da 1ª derivada: $\begin{cases} \text{-1 é um máximo local} \\ \text{1 é um mínimo local} \end{cases}$

Exemplo:

Esboce o gráfico de uma função $f(x)$, contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, sabendo que f tem três raízes reais, que $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=-3$, $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=3$ e que o gráfico da primeira derivada de f está representado na figura a seguir.



Pontos de inflexão:

c tal que há mudança de concavidade.

$\Downarrow$

sinal de f''

✓ f' decrescente $\Longrightarrow$ f'' é negativa

✓ f' crescente $\Longrightarrow$ f'' é positiva

✓ f' decresce $\forall x \in (-\infty, 0) \Longrightarrow f''(x) < 0,\ \forall x \in (-\infty, 0)$

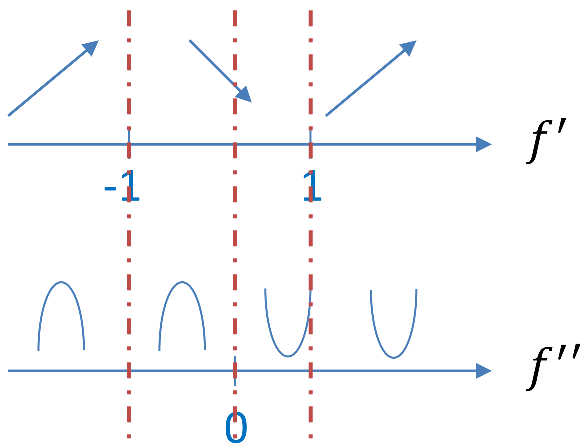
✓ f' cresce $\forall x \in (0,+\infty) \Longrightarrow f''(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty,0)$

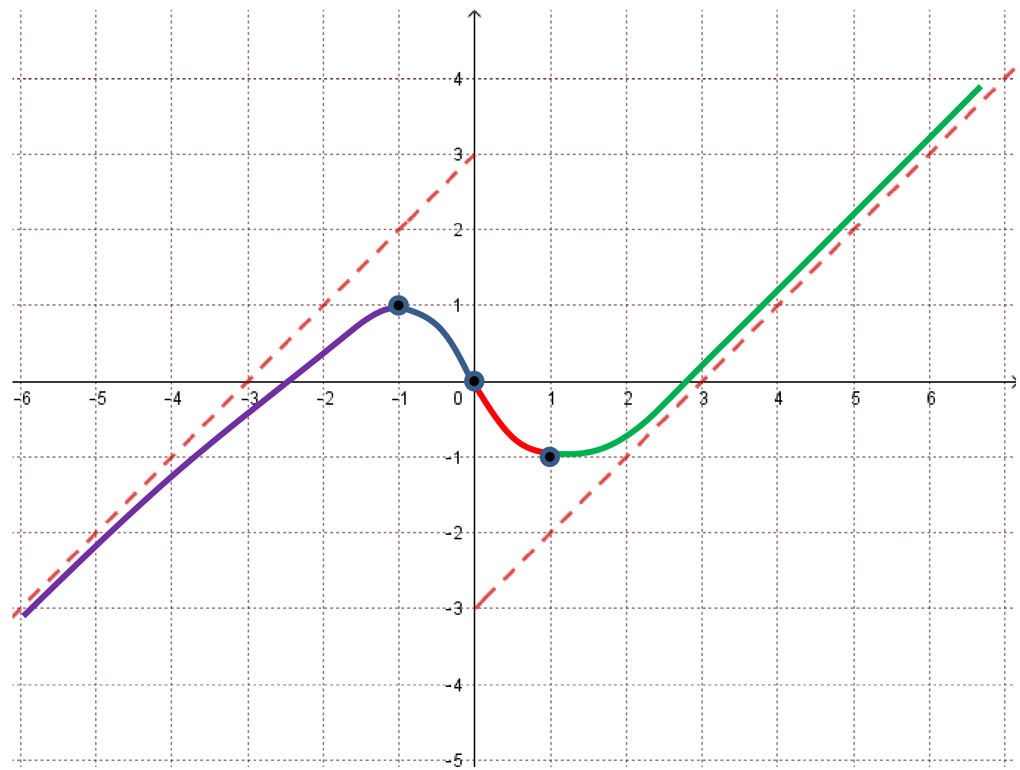
✓ $c = 0$ é um ponto de inflexão.

Exemplo:

Esboce o gráfico de uma função $f(x)$, contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, sabendo que f tem três raízes reais, que $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=-3$, $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=3$ e que o gráfico da primeira derivada de f está representado na figura a seguir.

Esboço do gráfico:





Assíntotas:

$$\begin{cases} y = x - 3, \text{ p/ } x \to +\infty \\ y = x + 3, \text{ p/ } x \to -\infty \end{cases}$$

Exemplo.

Esboce o gráfico da função f, contínua em $\mathbb{R}-\{2\}$, que satisfaz as seguintes condicões:

i. $f'(0) = 0$ e $f'(-1)$ não existe;

ii. $f'(x) > 0$ para todo $x \in (0,2) \cup (2,+\infty)$;

iii. $P(0,-3)$ é um ponto de mínimo local;

iv. $Q(-1,0)$ é um ponto de inflexão;

v. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = -2$

vi. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$.

Interpretando os dados:

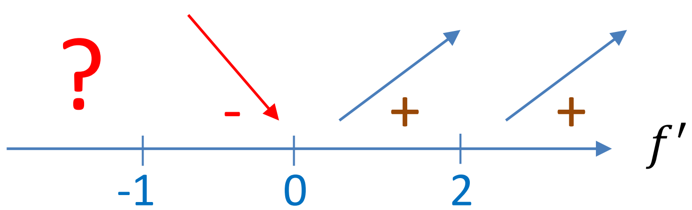
Esboce o $\boxed{\text{gráfico da função } f, \text{ contínua em } \mathbb{R}-\{2\}}$, que satisfaz as seguintes condicões:

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = f(c), \forall c \in \mathbb{R}-\{2\}}$$

i. $f'(0) = 0$ e $f'(-1)$ não existe;

- 0 e -1 são pontos críticos de f;
- 0 e -1 são candidatos a pontos extremos relativos de f.

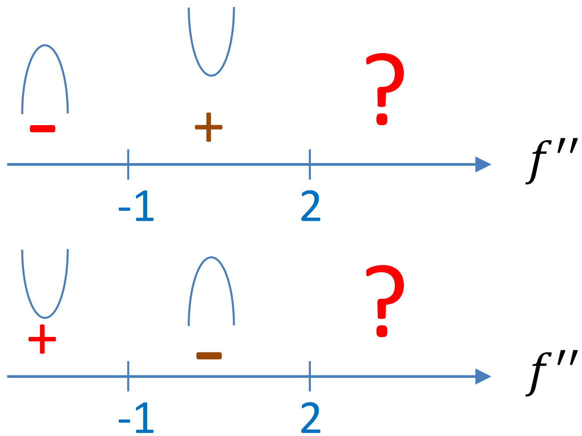
ii. $f'(x) > 0$ para todo $x \in (0,2) \cup (2,+\infty)$;



- f é uma função crescente $\forall x \in [-1,+\infty)$

iii. $P(0,-3)$ é um ponto de mínimo local;

iv. $Q\,(-1,0)$ é um ponto de inflexão;



v. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-2$

A reta $y = kx + b$, é uma assíntota oblíqua se ambos os limites

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f\,(x)}{x} \quad \text{e} \quad b=\lim_{x\to\infty}\left(f\,(x)-kx\right).$$

Comparando o limite que resulta b com o limite dado, temos que:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\underbrace{(1)}_{k}x)=-2=b \Rightarrow$$

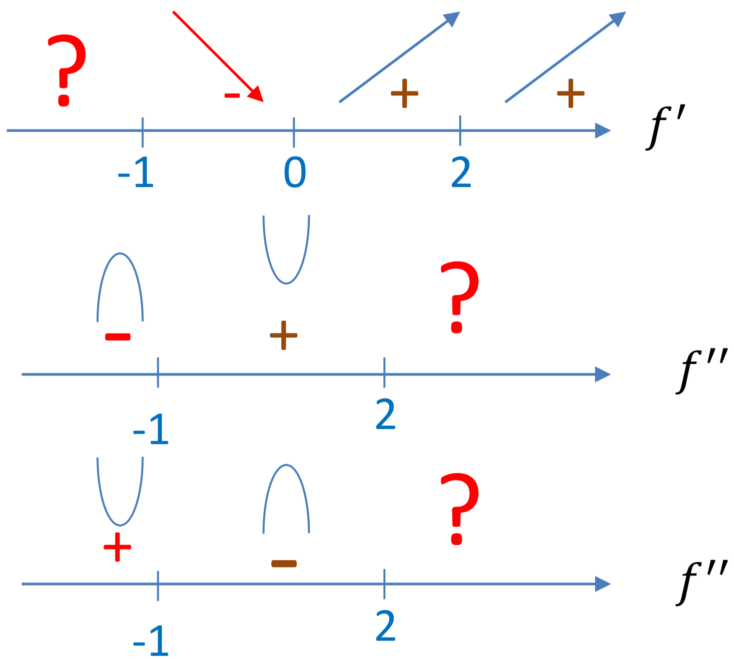
A reta $y = x - 2$ é assíntota oblíqua para $x \longrightarrow +\infty$.

vi. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1.$ ⇨ O limite lateral pela esquerda existe e é igual a 1.

Juntando as informações:

⇨ $f(c)$ é uma função contínua para $\forall c \in \mathbb{R} - \{2\}$

⇨ 0 e -1 são pontos críticos de f;



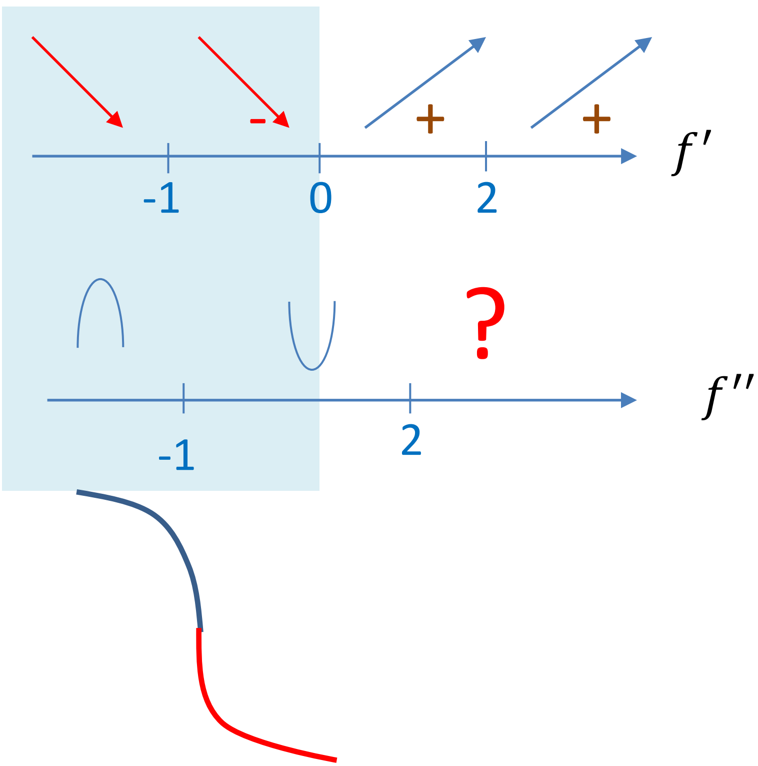
⇨ A reta $y = -x + 2$ é assíntota oblíqua para $x \longrightarrow +\infty$.

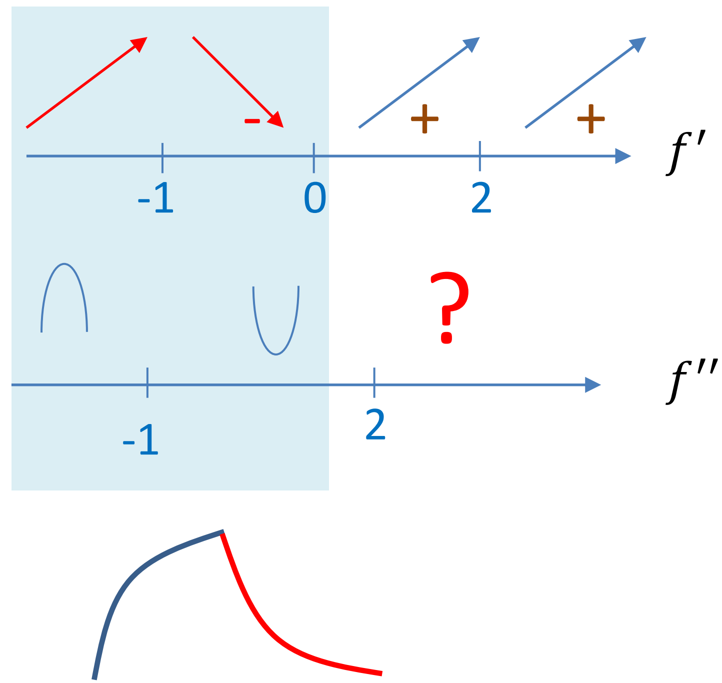
vi. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1.$ ➡ O limite lateral pela esquerda existe e é igual a 1.

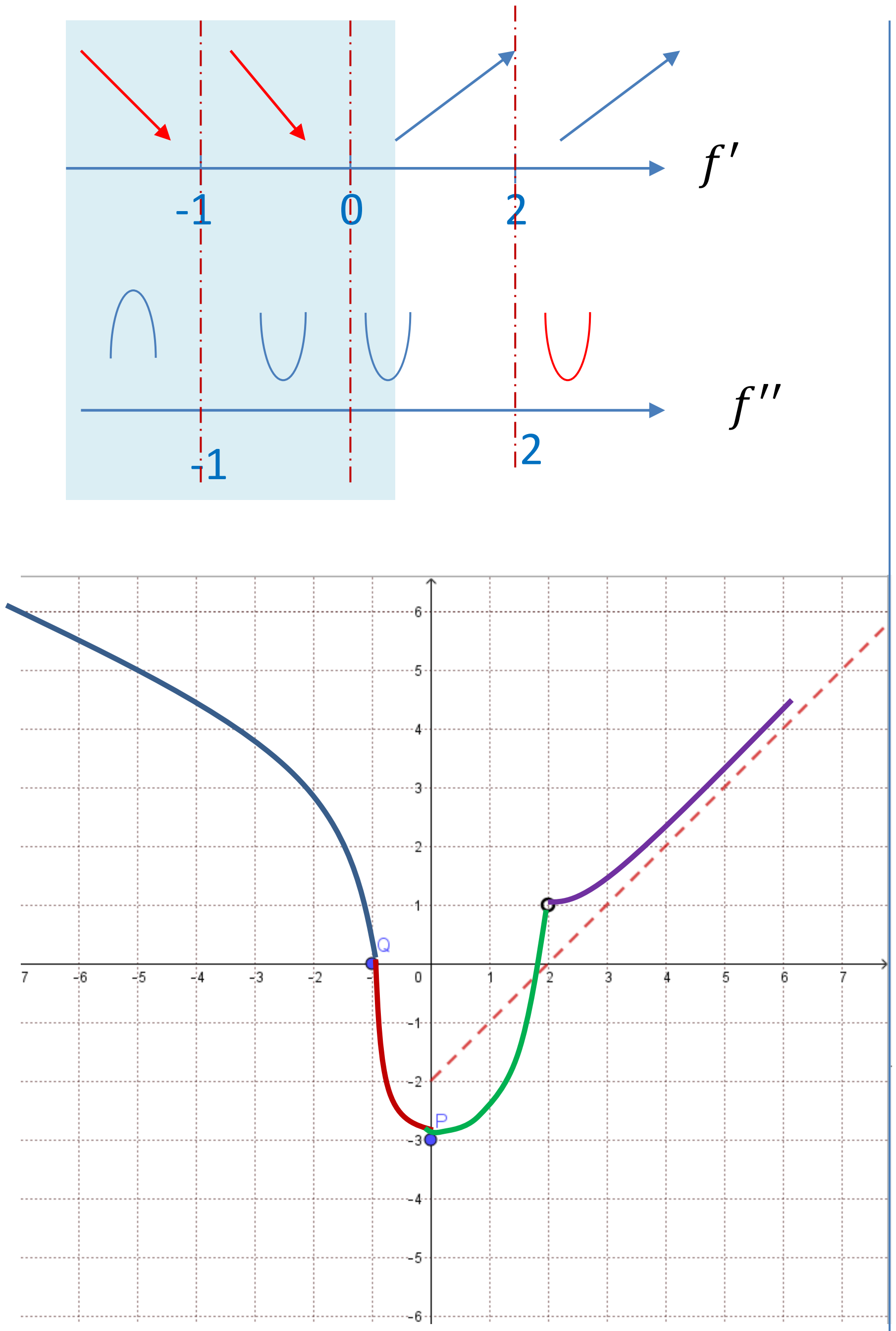
Juntando as informações:

➡ $f(c)$ é uma funçãocontínua para $\forall c \in \mathbb{R} - \{2\}$

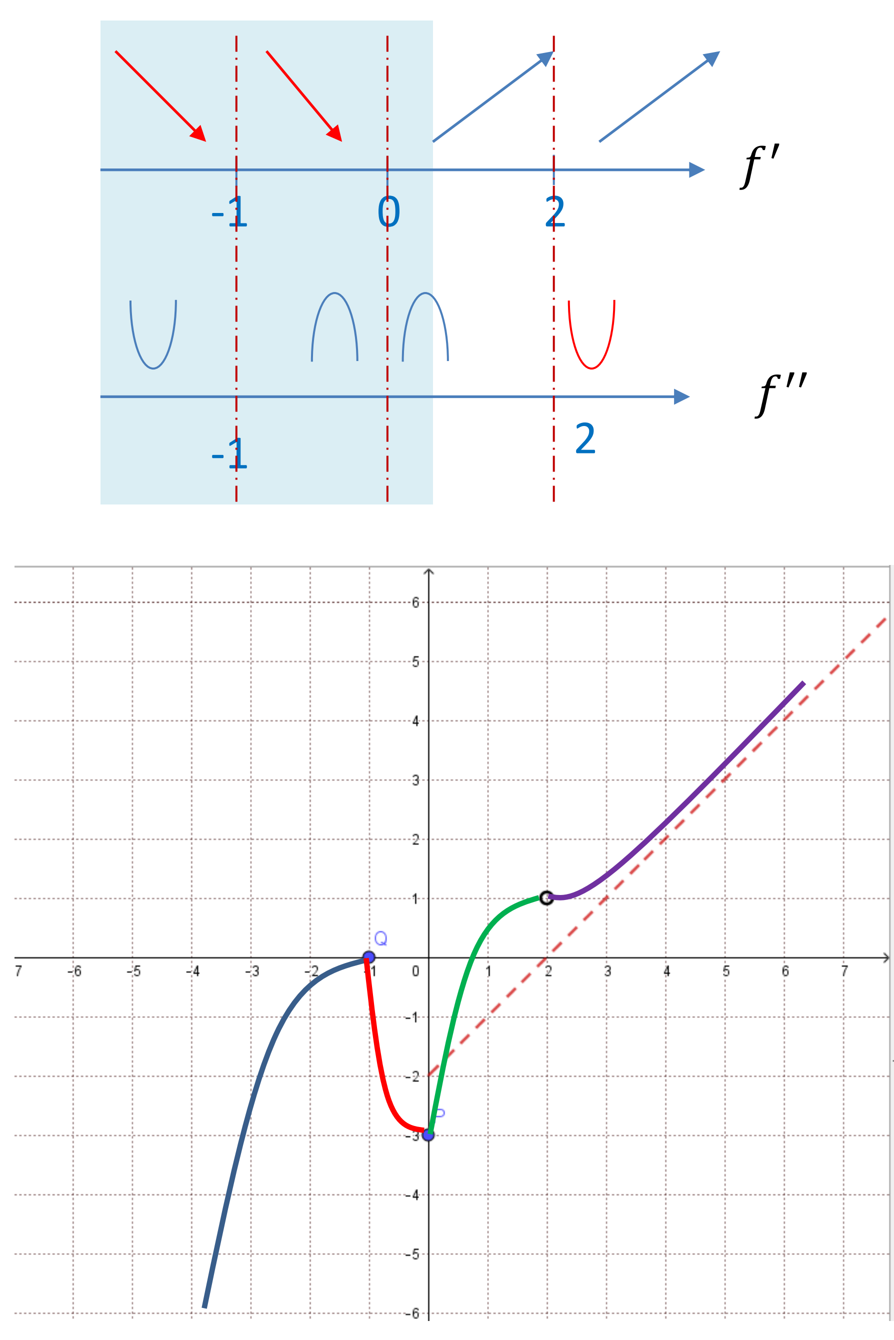
➡ 0 e -1 são pontos críticos de f;







f'
-1
0
2
f''
-1
2
Q
P



f'
-1
0
2
f''
-1
2
Q
P