Álgebra Linear (ALI0001 – CCI-192-02U)

Operadores Lineares no Plano

Professor: Marnei Mandler

Aula de ALI do dia 31 de maio de 2023.

UDESC

Operadores Lineares

- Um operador linear é um caso particular de transformação linear, que ocorre quando o domínio e o contradomínio são iguais a um mesmo espaço vetorial V:

Definição: Um operador linear é uma transformação linear da forma $T: V \to V$.

- Exemplo 1: A transformação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$T(x, y) = (7x - 4y, -2x + 3y)$$
é um operador linear, pois seu domínio e seu contradomínio são ambos iguais a $V = \mathbb{R}^2$.

- Observação 1: Como operadores lineares consistem em um caso particular de transformações lineares, toda a teoria já desenvolvida pode ser aplicada à operadores lineares.

- Observação 2: Dessa forma, sabemos obter o núcleo e a imagem de operadores lineares, determinar se um operador linear é injetor, sobrejetor, bijetor (isomorfismo) e/ou invertível, assim como obter a matriz canônica de um operador linear, que sempre será dada por uma matriz quadrada de ordem $\dim(V) \times \dim(V)$.

Operadores Lineares no Plano

- Vamos nos dedicar a estudar operadores lineares definidos no plano ($T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) e no espaço ($T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$), pois alguns desses operadores possuem interpretações geométricas que nos permitirão estabelecer aplicações da teoria de transformações lineares já estudada.
- Começaremos com os operadores lineares no plano:

Definição: Um operador linear no plano é uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

- A vantagem dos operadores $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ consiste em representar geometricamente, em um mesmo referencial, tanto os elementos do domínio quanto suas respectivas imagens no contradomínio.
- Dentre os operadores lineares no plano, vamos destacar aqueles que representam transformações geométricas especiais, como
- Dilatações e contrações;
- Projeções e Reflexões;
- Cisalhamentos;
- Rotações.

Dilatação e Contração no Plano

- O operador linear no plano que representa uma dilatação (expansão) ou uma contração (retração) é o operador cujas imagens de $v \in \mathbb{R}^2$ correspondem a um múltiplo do próprio elemento v, ou seja, é dado por $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que
$$T(v) = kv \quad \text{para algum } k \in \mathbb{R},\ k \neq 0.$$

- Dessa forma, para $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos a seguinte representação algébrica:

Operador Dilatação/Contração: É o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por
$$T(x, y) = k(x, y) = (kx, ky)$$
com $k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$.

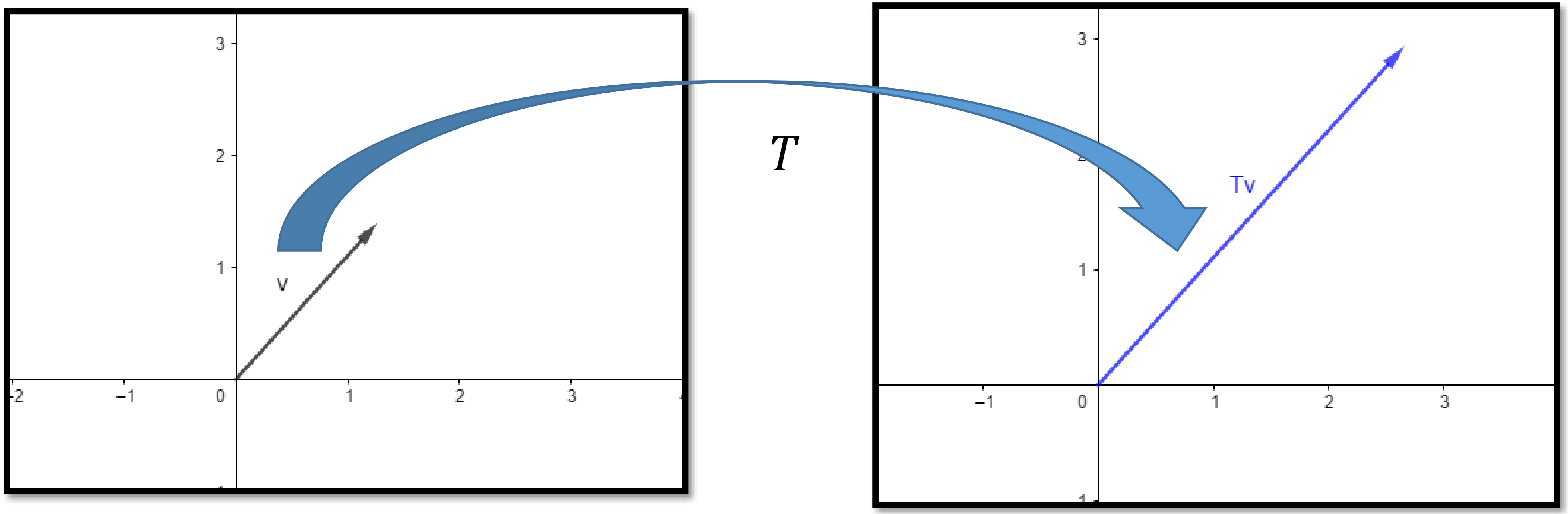
- Tomando a matriz canônica de T, obtemos a representação matricial de um operador dilatação/contração:
$$[T] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}.$$

- Note que $[T]$ é uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal principal são ambos iguais a k.

- Dizemos que k é o "fator de dilatação ou contração".

Dilatação ou Contração no Plano

- A representação geométrica da dilatação é dada por:



Note que, para $T(x, y) = (kx, ky)$ temos que:

Se $k > 0$, então $T(x, y)$ tem a mesma direção e sentido que $v = (x, y)$.

Se $k < 0$, então $T(x, y)$ tem a mesma direção que $v = (x, y)$ mas sentido contrário a v.

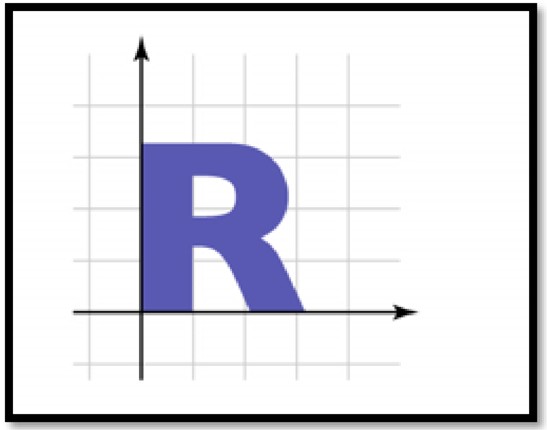
Se $|k| > 1$, então $T(x, y)$ é uma dilatação/expansão do elemento $v = (x, y)$.

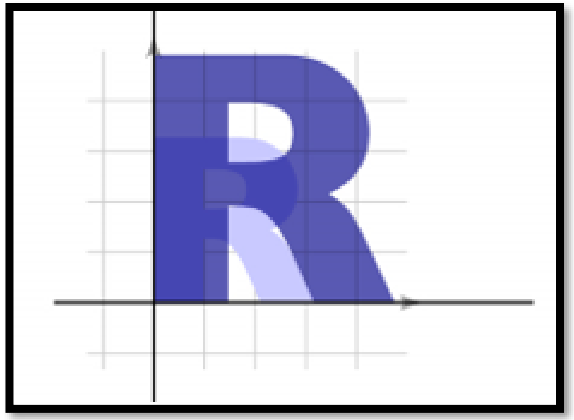
Se $0 < |k| < 1$, então $T(x, y)$ é uma contração/retração do elemento $v = (x, y)$.

Se $k = 1$, então $T(x, y) = (x, y)$ é o operador identidade.

Dilatação ou Contração no Plano

- Do ponto de vista prático, uma dilatação é o operador linear aplicado em uma figura ou imagem digital quando efetuamos um *"zoom in"*:

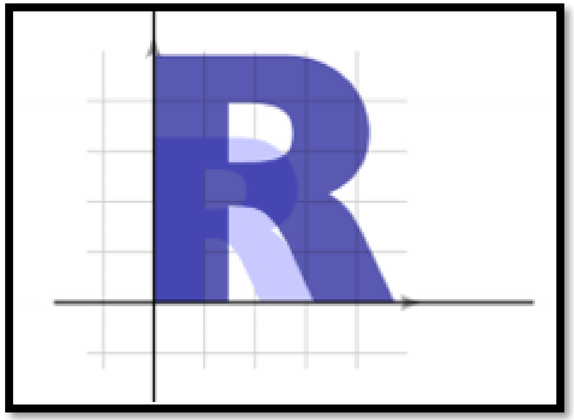


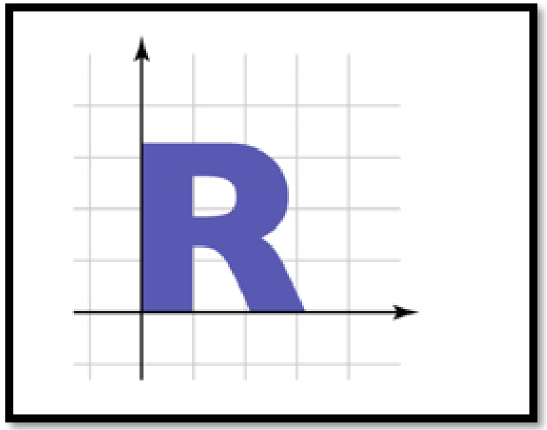


$$[T] = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Representação geométrica de uma dilatação de fator $k = \frac{3}{2}$.

- Da mesma forma, uma contração é o operador linear aplicado em uma figura ou imagem digital quando efetuamos um *"zoom out"*.





$$[T] = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Representação geométrica de uma contração de fator $k = \frac{2}{3}$.

Dilatação ou Contração no Plano

Como a matriz canônica de uma dilatação/contração T, dada por $[T] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ é tal que

$$\det([T]) = k^2 \neq 0,$$

temos que $[T]$ é sempre invertível (e portanto é bijetora/isomorfismo.
Além disso, obtemos que

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \frac{1}{k^2}\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}.$$

Assim

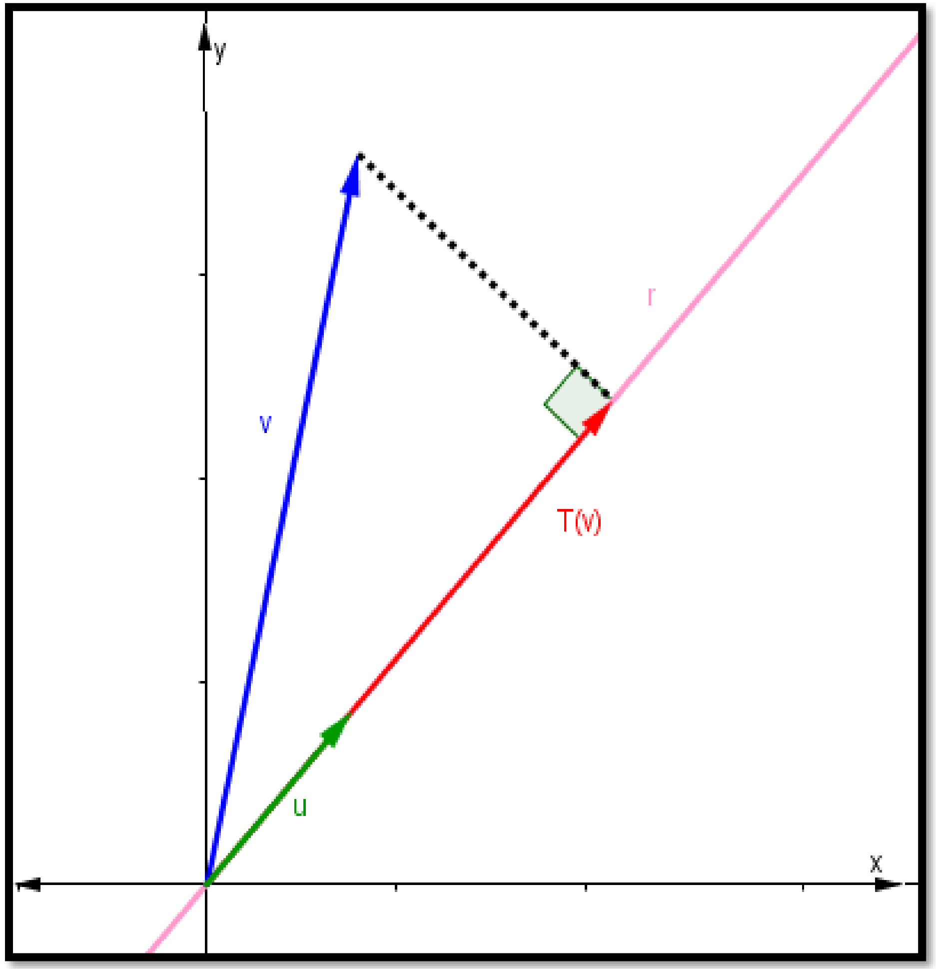
$$T^{-1}(x,y) = \left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) = \frac{1}{k}(x,y).$$

- Se $|k| > 1$ temos que $0 < \left|\frac{1}{k}\right| < 1$ e então a inversa de uma dilatação de fator k é uma contração de fator $\frac{1}{k}$.
- Se $0 < |k| < 1$ temos que $\left|\frac{1}{k}\right| > 1$ e então a inversa de uma contração de fator k é uma dilatação de fator $\frac{1}{k}$.

Projeção ortogonal sobre uma reta

- Quando efetuamos a projeção ortogonal de um elemento de $\mathbb{R}^2$ sobre uma reta que passa pela origem, obtemos um operador linear.
- Por GAN, sabemos que a projeção ortogonal de um elemento v sobre uma reta r coincide com a projeção ortogonal de v sobre o diretor u da reta, conforme mostra a figura:
- Utilizando a fórmula para a projeção, que envolve o produto escalar, obtemos que o operador $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que realiza a projeção sobre a reta gerada por u é dado por

$$T(v) = proj_u(v) = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u.$$



Projeção sobre uma Reta que passa pela origem:

É o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(v) = proj_u(v) = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u$$

onde $u \in \mathbb{R}^2$ é o vetor gerador (ou diretor) da reta considerada.

Exercício

Exercício 1) Encontre a lei do operador linear no plano que realiza a projeção sobre a reta

$$r: \ 3x + y = 0.$$

A seguir, determine:

a) A matriz canônica do operador. Como ela pode ser classificada?
b) O operador é invertível? Se sim, encontre sua inversa.
c) Uma base para o núcleo e para o conjunto imagem do operador.
d) Interprete geometricamente o núcleo e o conjunto imagem.
e) Verifique se

$$N(T) \oplus Im(T) = \mathbb{R}^2.$$

Solução: Todos os itens foram resolvidos durante a aula.

Exemplo

Exemplo 2: Encontre a lei do operador linear no plano que realiza a projeção sobre a reta

$$r:\ \ 4x + y = 0.$$

Qual a matriz canônica desse operador? Ele é invertível?

Solução: A equação da reta r é dada por $y = -4x$. Assim, se $w = (a, b) \in r$ temos que

$$w = (a, b) = (a, -4a) = a(1, -4).$$

Com isso, vemos que a reta é gerada por $u = (1, -4)$, que é o vetor diretor da reta r.
Assim, a lei do operador no plano que realiza a projeção sobre r é dado por

$$T(x, y) = T(v) = proj_u(v) = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u = \frac{(1, -4) \cdot (x, y)}{(1, -4) \cdot (1, -4)} (1, -4)$$

$$= \frac{x - 4y}{1 + 16}(1, -4) = \frac{1}{17}(x - 4y, -4x + 16y) = \left(\frac{x - 4y}{17}, \frac{-4x + 16y}{17}\right).$$

A matriz canônica desse operador é $[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{17} & \frac{-4}{17} \\ \frac{-4}{17} & \frac{16}{17} \end{bmatrix} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix}$.

Como $\det([T]) = \frac{16}{17^2} - \frac{16}{17^2} = 0$, temos que o operador não é invertível.

Note que $[T]$ é uma matriz simétrica.

Por isso, T é dito um operador simétrico ou auto adjunto.

Operador Projeção sobre uma Reta

De forma geral, para o operador T que representa uma projeção sobre uma reta r que passa pela origem, temos que

$$w \in Im(T) \quad \Leftrightarrow \quad w = T(v) = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u \ = ku$$

em que u é o vetor diretor da reta r. Logo,

$$Im(T) = ger\{u\} \ = r$$

$$\dim\big(Im(T)\big) = 1 \ \neq 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$$

e T não é sobrejetora. O núcleo de T é tal que

$$v \in N(T) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}.$$

Logo, obtemos que $u \cdot v = 0$, ou seja,

$$N(T) = \{v \in \mathbb{R}^2; v \text{ é perpendicular a } u\} = s,$$

onde s é a reta perpendicular a r que passa pela origem.

Assim:

$$\dim(N(T)) = 1 \quad \text{e} \quad N(T) \neq \{\vec{0}_{\mathbb{R}^2}\}$$

e T não é injetora.

Em particular, um operador projeção nunca é invertível.