Séries de Taylor

Séries de Taylor

Motivação

Suponhamos que uma função $f(x)$ possa ser escrita como uma série de potências centrada em c. Como encontrar seus coeficientes?

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.(x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

$onde\ x \in]c-r; c+r[;$

$a_k = ?$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$
$$\Rightarrow$$
$$f(c) = a_0 + a_1(c-c) + a_2(c-c)^2 + a_3(c-c)^3 + \cdots$$
$$\Rightarrow$$
$$f(c) = a_0$$

$\boldsymbol{a_0 = f(c)}$

$$f'(x) = (a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots)'$$
$$\Rightarrow$$
$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 \ldots$$
$$\Rightarrow$$
$$f'(c) = a_1 + 2a_2(c-c) + 3a_3(c-c)^2 + 4a_4(c-c)^3 \ldots$$
$$\Rightarrow$$
$$f'(c) = a_1$$

$$\boldsymbol{a_1 = f'(c)}$$

$$f''(x) = (c + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots)''$$
$$\Rightarrow$$
$$f''(x) = 2a_2 + 3.2a_3(x-c) + 4.3a_4(x-c)^2 + 5.4a_5(x-c)^3 \ldots$$
$$\Rightarrow$$
$$f''(c) = 2a_2 + 3.2a_3(c-c) + 4.3a_4(c-c)^2 + 5.4a_5(c-c)^3 \ldots$$
$$\Rightarrow$$
$$f''(c) = 2a_2$$

$$\boldsymbol{a_2 = \frac{f''(c)}{2}}$$

$$f'''(x) = (a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots)'''$$

$$\Rightarrow$$

$$f'''(x) = 3.2a_3 + 4.3.2a_4(x-c) + 5.4.3a_5(x-c)^2 + 6.5.4a_6(x-c)^3 \ldots$$

$$\Rightarrow$$

$$f'''(c) = 3.2a_3 + 4.3.2a_4(c-c) + 5.4.3a_5(c-c)^2 + 6.5.4a_6(c-c)^3 \ldots$$

$$\Rightarrow$$

$$f'''(c) = 3.2a_3$$

$$\boldsymbol{a_3 = \frac{f'''(c)}{3.2} = \frac{f'''(c)}{3!}}$$

$$f^{(4)}(x) = (a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots)^{(4)}$$

$$\Rightarrow$$

$$f^{(4)}(x) = 4.3.2a_4 + 5.4.3.2a_5(x-c) + 6.5.4.3a_6(x-c)^2 + 7.6.5.4a_7(x-c)^3 \ldots$$

$$\Rightarrow$$

$$f^{(4)}(c) = 4.3.2a_4 + 5.4.3.2a_5(c-c) + 6.5.4.3a_6(c-c)^2 + 7.6.5.4a_7(c-c)^3 \ldots$$

$$\Rightarrow$$

$$f^{(4)}(c) = 4.3.2a_4$$

$$\boldsymbol{a_4 = \frac{f^{(4)}(c)}{4.3.2} = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}}$$

$$f^{(5)}(x) = 5.4.3.2a_5 + 6.5.4.3.2a_6(x-c) + 7.6.5.4.3a_7(x-c)^2 + \cdots$$
$$\Rightarrow$$
$$f^{(5)}(c) = 5.4.3.2a_5$$

$$\boldsymbol{a_5 = \frac{f^{(5)}(c)}{5.4.3.2} = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}}$$

Pode-se mostrar que, para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\boldsymbol{a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}}$$

Assim (se $f(x)$ pode ser escrito como uma série de potências):

$$f(x) = fc) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-c)^4 + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}.(x-c)^k$$

Se f tem derivadas de todas as ordens em x_0, chamaremos de série de Taylor centrada em x_0 à série:

$$T(f) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}.(x-c)^k$$

Caso $c = 0$, a série de Taylor é também chamada de série de MacLaurin, a qual é escrita como:

$$T(f) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k$$

Uma função que pode ser escrita como uma série de potências num ponto x_0 é chamada de analítica neste. A série de uma função analítica coincide com a sua série de Taylor.

Série de Taylor de algumas funções

Série de Taylor (centrada em zero) da função e^x

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow f''(x) = e^x \Rightarrow f'''(x) = e^x$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(x) = e^x$$
$$\Rightarrow$$
$$\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

$$T(f) = f(0) + f'(0)x + \frac{f'(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \ldots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Série de Taylor (centrada em zero) da função e^x

e^x é $uma\ função\ analítica\ em\ zero, logo$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Exemplo 1

Expresse a função $f(x) = e^{x^2}$ como uma série de potências centrada em zero.

Solução

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$f(x) = e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^4}{4!} + \frac{(x^2)^5}{5!} + \cdots$$

$$= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \cdots += \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$$

Exemplo 2

Calcule $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$

Solução

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.2!} + \frac{x^7}{7.3!} + \frac{x^9}{9.4!} + \cdots \Big|_0^1$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5.2!} + \frac{1}{7.3!} + \frac{1}{9.4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1).k!}$$

Série de Taylor (centrada em zero) da função $\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{x})$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x \Rightarrow f'''(x) = -\cos x$$
$$\Rightarrow f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(5)}(x) = \cos x$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\left(\frac{k}{2}\right)} \sin x & se\ k\ \text{é}\ par \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cos x & se\ k\ \text{é}\ impar \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & se\ k\ \text{é}\ par \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} & se\ k\ \text{é}\ impar \end{cases}$$

$$T(f) = 0 + x - \frac{0.x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{0.x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{0.x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{0.x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$\sin x$ é *também analítica em zero, logo*:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Série de Taylor (centrada em zero) da função cos($\boldsymbol{x}$)

$$(\sin x)' = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k)!}\right)'$$

$\Rightarrow$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Exemplo 3

Mostre que a série numérica $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{2k!}$ converge e calcule sua soma

Solução

$$Provar\ que \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{2k!}\ converge \quad \rightarrow \quad \text{Exercício}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{2k!} = 1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \frac{\pi^8}{8!} - \cdots = \cos \pi = -1$$

Exemplo 4

Escreva a função $f(x) = x - \sin x$ *como uma série de potências centrada em zero.*

Solução

$$f(x) = x - \sin x = x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} + \cdots = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

Exemplo 5

Escreva a função $f(x) = e^x + \cos x$ *como uma série de potências centrada em zero.*

Solução

Exercício

Exemplo 6

$$Calcule \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

Solução

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots}{x}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} + \cdots$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} + \cdots dx$$

Exemplo 6

$$= x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} - \frac{x^7}{7.7!} + \frac{x^9}{9.9!} + \cdots \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3.3!} + \frac{1}{5.5!} - \frac{1}{7.7!} + \frac{1}{9.9!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!}$$

Exemplo 7

Encontre um valor aproximado para a integral $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ utilizando os quatro primeiros termos da série encontrada no exemplo anterior.

Solução

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{3.3!} + \frac{1}{5.5!} - \frac{1}{7.7!} + \frac{1}{9.9!} + \cdots \approx 1 - \frac{1}{3.3!} + \frac{1}{5.5!} - \frac{1}{7.7!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} \approx 1 - 0{,}0555 + 0{,}0017 - 0{,}0003 = 0{,}9459$$

Exercícios

1. Descreva a série de Taylor, centrada em $x_0 = 0$, das seguintes funções:
   a. $f(x) = e^{x^3}$;
   b. $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$;
   c. $f(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}$;
   d. $f(x) = \cos(\sqrt{x})$

2. Encontre um valor aproximado (soma dos cinco primeiros termos da suas séries) para as seguintes integrais:

$a. \int_0^3 \frac{\sin x}{x} dx$

$b. \int_0^1 \cos x^2 \, dx$

$c. \int_{-1}^1 \frac{1-\cos x}{x} dx$

$d. \int_1^2 x^2 e^{\frac{1}{x}} dx$

3. Calcule a soma das seguintes séries:

$a.\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$b.\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

$c.\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$

$d.\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\pi^2)^k}{4^{2k}(2k)!}$

$e.\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!}$