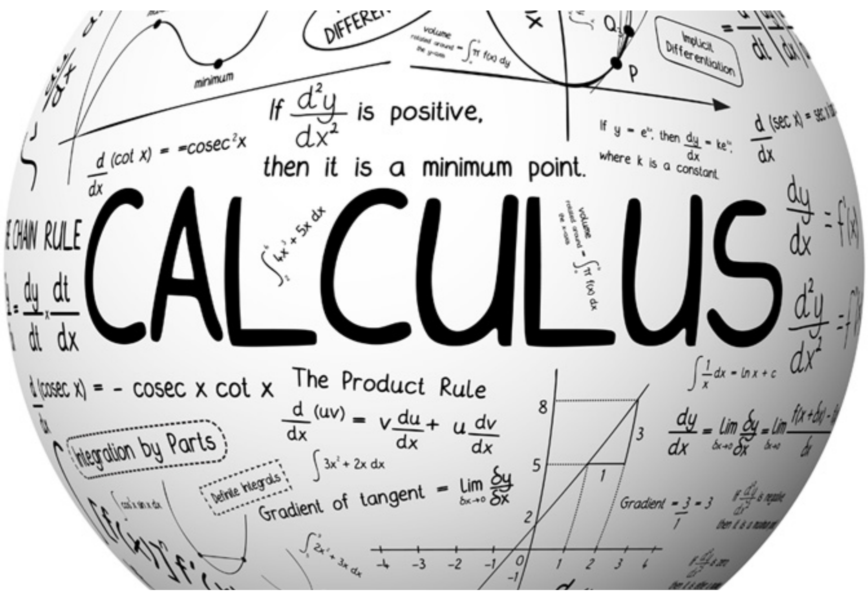
Apostila de

Cálculo Diferencial e Integral I



Fonte: shorturl.at/rtQT8. Acesso em: 13 fev 2020.

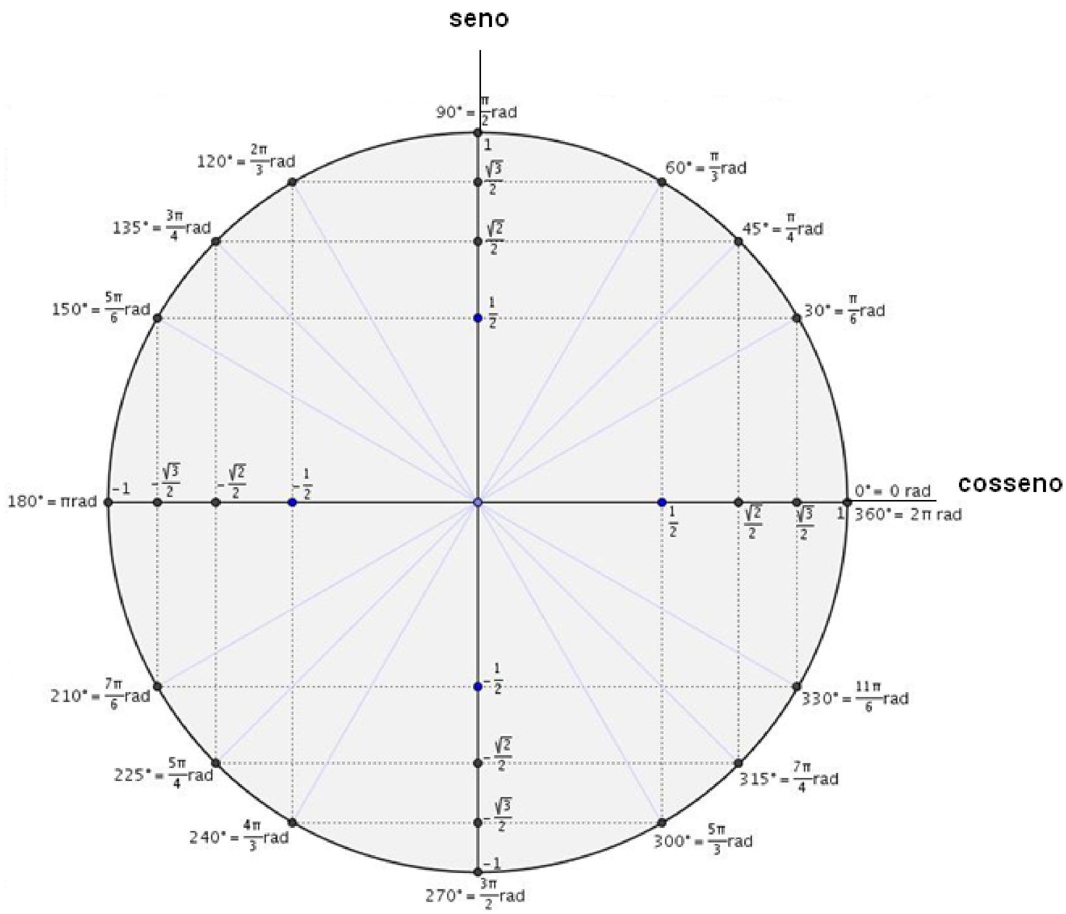
Apostila editada pela Profa. Eliane Bihuna de Azevedo, com contribuições dos Profs. Dario Nolli, Elisandra Bar de Figueiredo e Helder Geovane Gomes de Lima.

Joinville, fevereiro de 2020.

-

Formulário

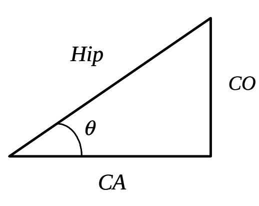
Círculo Trigonométrico:



Adaptado de: *http://tipo10.blogspot.com/2008/09/crculo-trigonomtrico.html*

Acesso: *15/12/2011.*

Funções trigonométricas:



1. **Seno:** $\text{sen}(\theta) = \dfrac{CO}{Hip}$;
2. **Cosseno:** $\cos(\theta) = \dfrac{CA}{Hip}$;
3. **Tangente:** $\text{tg}(\theta) = \dfrac{CO}{CA} = \dfrac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Relações Trigonométricas:

1. $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1;$
2. $\text{tg}^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta);$
3. $1+\text{cotg}^2(\theta) = \text{cossec}^2(\theta);$
4. $\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}(a)\cos(b) \pm \text{sen}(b)\cos(a);$
5. $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \text{sen}(a)\ \text{sen}(b);$
6. $\text{sen}(2\theta) = 2\ \text{sen}(\theta)\cos(\theta);$
7. $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta);$
8. $\text{sen}^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta);$
9. $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta);$

Propriedades de Logarítmos:

1. $\log_a(a) = 1;$
2. $\log_a 1 = 0;$
3. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c;$
4. $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c;$
5. $\log_a(b^c) = c\log_a b;$
6. $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b};$

Propriedades de Exponenciais:

1. $a^{b+c} = a^b.a^c;$
2. $a^{bc} = \left(a^b\right)^c = (a^c)^b;$
3. $\sqrt[c]{a^b} = a^{\frac{b}{c}};$
4. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b};$
5. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$
6. $a^{\log_a b} = b.$

Funções Hiperbólicas:

1. **Seno Hiperbólico:** $\text{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2};$
2. **Cosseno Hiperbólico:** $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}.$

Relações para Funções Hiperbólicas:

1. $\cosh^2(x) - \text{senh}^2(x) = 1;$
2. $\text{senh}(x) + \cosh(x) = e^x;$
3. $\cosh(x) - \text{senh}(x) = e^{-x};$

4. $1-\ \text{tgh}^2(x) = \text{sech}^2(x)$;

5. $\text{cotgh}^2(x) - 1 = \text{cossech}^2(x)$;

6. $\text{senh}(x+y) = \text{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\ \text{senh}(y)$;

7. $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \text{senh}(x)\ \text{senh}(y)$;

8. $\text{senh}(2x) = 2\ \text{senh}(x)\cosh(x)$;

9. $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2(x)$;

10. $\text{senh}^2 x = \dfrac{\cosh(2x) - 1}{2}$;

11. $\cosh^2 x = \dfrac{\cosh(2x) + 1}{2}$.

Função Par: $f(x) = f(-x)$

Função ímpar: $f(-x) = -f(x)$

Função Periódica: $f(x+T) = f(x)$

Limites Notáveis:

1. $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{\text{sen}(u)}{u} = 1$;
2. $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{1-\cos(u)}{u} = 0$;
3. $\displaystyle\lim_{u\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$;
4. $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{a^u - 1}{u} = \ln a$.

Formas Indeterminadas ou Indeterminações:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ +\infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty \text{ e } \infty^0.$$

Definição de Derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Aproximação Linear Local:

$$f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x.$$

Tabela de Derivadas

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções deriváveis e $n \in \mathbb{R}$.

Função	**Derivada**
1. $y = u^n$	$y' = nu^{n-1}u';$
2. $y = uv$	$y' = u'v + v'u;$
3. $y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2};$
4. $y = a^u$, $a > 0$ e $a \neq 1$	$y' = u'.a^u \ln a;$
5. $y = e^u$	$y' = u'e^u;$
6. $y = \log_a u$, $a > 0$ e $a \neq 1$	$y' = \frac{u'}{u} \log_a e;$
7. $y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u};$
8. $y = \mathrm{sen}(u)$	$y' = u' \cos u;$
9. $y = \cos u$	$y' = -u'\mathrm{sen}(u);$
10. $y = \mathrm{tg}(u)$	$y' = u' \sec^2(u);$
11. $y = \mathrm{cotg}(u)$	$y' = -u'\mathrm{cossec}^2(u);$
12. $y = \sec(u)$	$y' = u'\mathrm{tg}(u)\sec(u);$
13. $y = \mathrm{cossec}(u)$	$y' = -u'\mathrm{cossec}(u)\mathrm{cotg}(u);$
14. $y = \mathrm{senh}(u)$	$y' = u' \cosh(u);$
15. $y = \cosh u$	$y' = u'\mathrm{senh}(u);$
16. $y = \mathrm{tgh}(u)$	$y' = u'\mathrm{sech}^2(u);$
17. $y = \mathrm{cotgh}(u)$	$y' = -u'\mathrm{cossech}^2(u);$
18. $y = \mathrm{sech}(u)$	$y' = -u'\mathrm{sech}(u)\mathrm{tgh}(u);$
19. $y = \mathrm{cossech}(u)$	$y' = -u'\mathrm{cossech}(u)\mathrm{cotgh}(u);$
20. $y = \mathrm{arcsen}(u)$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$
21. $y = \arccos u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
22. $y = \mathrm{arctg}(u)$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2};$
23. $y = \mathrm{arccotg}(u)$	$y' = -\dfrac{u'}{1+u^2};$
24. $y = \mathrm{arcsec}\, u$, $\lvert u\rvert \geq 1$	$y' = \dfrac{u'}{\lvert u\rvert \sqrt{u^2-1}}$, $\lvert u\rvert > 1;$
25. $y = \mathrm{arccossec}(u)$, $\lvert u\rvert \geq 1$	$y' = -\dfrac{u'}{\lvert u\rvert \sqrt{u^2-1}}$, $\lvert u\rvert > 1;$
26. $y = \mathrm{argsenh}(u)$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}};$
27. $y = \mathrm{argcosh}(u)$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$, $u > 1;$
28. $y = \mathrm{argtgh}(u)$	$y' = \dfrac{u'}{1-u^2}$, $\lvert u\rvert < 1;$
29. $y = \mathrm{argcotgh}(u)$	$y' = \dfrac{u'}{1-u^2}$, $\lvert u\rvert > 1;$
30. $y = \mathrm{argsech}(u)$	$y' = -\dfrac{u'}{u\sqrt{1-u^2}}$, $0 < u < 1;$
31. $y = \mathrm{argcossech}(u)$	$y' = -\dfrac{u'}{\lvert u\rvert \sqrt{1+u^2}}$, $u \neq 0.$

Tabela de Integrais Imediatas

1. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1;$
2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c;$
3. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1;$
4. $\int e^u du = e^u + c;$
5. $\int \sin(u)\, du = -\cos u + c;$
6. $\int \cos(u)\, du = \sin u + c;$
7. $\int \sec^2(u)\, du = \mathrm{tg}(u) + c;$
8. $\int \mathrm{cossec}^2(u)\, du = -\mathrm{cotg}(u) + c;$
9. $\int \sec(u)\, du = \ln|\sec(u) + \mathrm{tg}(u)| + c;$
10. $\int \mathrm{cossec}(u)\, du = \ln|\mathrm{cossec}(u) - \mathrm{cotg}(u)| + c;$
11. $\int \dfrac{du}{u^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\left(\dfrac{u}{a}\right) + c.$

Capítulo 1

Números Reais, Intervalos e Funções

Objetivos

- Identificar os conjuntos numéricos;
- Conhecer e aplicar as propriedades relativas à adição e multiplicação de números reais;
- Utilizar as propriedades relacionadas com as desigualdades estritas e não estritas;
- Operar com equações e inequações com e sem valor absoluto;
- Determinar o campo de definição de uma função;
- Operar com funções;
- Obter funções compostas;
- Identificar funções pares, ímpares e periódicas;
- Determinar a inversa de uma função;
- Esboçar gráficos de funções usando translação;
- Reconhecer os tipos de funções: polinomiais; racionais; irracionais; potenciais; exponenciais; logarítmicas; trigonométricas; hiperbólicas; e hiperbólicas inversas;

1.1 Números

Os primeiros números conhecidos foram os *Números Contáveis*, ou seja, o conjunto dos *Números Naturais*, representado por $\mathbb{N}$, isto é:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

As operações com os números naturais foram responsáveis pela criação dos números negativos, assim:

$$x + a = b \Rightarrow x = b - a,$$

onde a e b são números naturais.

Estes números, juntamente com os números naturais formam o conjunto dos *Números Inteiros*, representado por $\mathbb{Z}$, isto é:

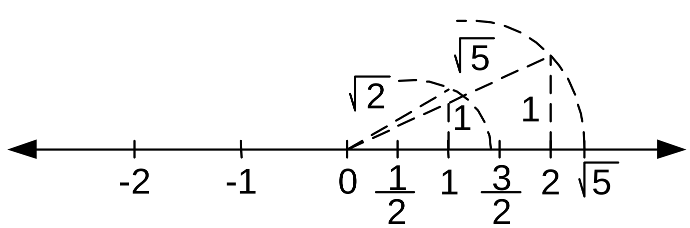
$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

A resolução de equações do tipo

$$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a},$$

com a e b números inteiros onde a não é nulo, pode levar ao surgimento de números não inteiros. Desta forma, os números da forma $\frac{b}{a}$ com a e b números inteiros e $a \neq 0$ formam um conjunto de números, denominado *Números Racionais*, representado por $\mathbb{Q}$. E os números (frações) decimais infinitos não periódicos são denominados *Números Irracionais*, representados por $\Im$. São exemplos de números irracionais: π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ...

Observando a reta numerada, vemos que a todos os pontos foram atribuídos números. Temos, então que, a reunião dos números racionais com os números irracionais se denomina conjunto dos *Números Reais*, representado por $\mathbb{R}$.



Como o cálculo envolve números reais, vejamos algumas definições e propriedades fundamentais destes números, embora não tenhamos interesse em mostrar como estas propriedades são tiradas dos axiomas e teoremas.

Definição 2: $\begin{array}{l} \textit{Soma: } \forall a, b \in \mathbb{R}, \exists\, (a + b) \in \mathbb{R} \\ \textit{Produto: } \forall a, b \in \mathbb{R}, \exists\, (a.b) \in \mathbb{R} \end{array}$, satisfazendo as propriedades:

1. **Comutativa:** $\forall a, b \in \mathbb{R}, \begin{cases} a + b = b + a \\ a.b = b.a \end{cases}$;

2. **Associativa:** $\forall a,b,c \in \mathbb{R}, \begin{cases} a+(b+c)=(a+b)+c \\ a.(b.c)=a.(b.c) \end{cases}$;

3. **Existência de elemento neutro:** $\begin{cases} \forall a \in \mathbb{R}, \exists 0 \in \mathbb{R}\ , a+0=0+a=a \\ \forall a \in \mathbb{R}, \exists 1 \in \mathbb{R},\ a.1=1.a=a \end{cases}$;

4. **Elemento oposto:** $\forall a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R}\ ,\ a+(-a)=(-a)+a=0$;

5. **Elemento inverso:** $\forall a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $\exists\ a^{-1} \in \mathbb{R}\ , a.(a^{-1})=(a^{-1}).a=1$;

6. **Distributiva**: $\forall a,b,c \in \mathbb{R}, a.(b+c)=a.b+a.c$.

Definição 3: *Subtração:* $\forall a,b \in \mathbb{R}, \exists (a-b) \in \mathbb{R}$.

Definição 4: *Divisão:* $\forall a,b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, $\exists\ \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$.

1.2 Desigualdades

Axioma de Ordem: No conjunto dos números reais, existe um subconjunto, $\mathbb{R}_+^*$, dito reais positivos, tais que:

1. se $a \in \mathbb{R}$, exatamente uma das três afirmações é verdadeira: $a=0$, a é positivo ou $-a$ é positivo;

2. a soma e o produto de reais positivos é um número real positivo;

Definição 5: O número real a é *negativo* se, e somente se, $-a$ é positivo.

Definição 6: *Desigualdade Estrita*
Os símbolos $<$ (menor que) e $>$ (maior que) são definidos por:

i. $a < b$ se, e somente se, $b-a$ é positivo;
ii. $a > b$ se, e somente se, $a-b$ é positivo.

Definição 7: *Desigualdade Não Estrita*
Os símbolos $\leq$ (menor ou igual) e $\geq$ (maior ou igual) são definidos por:

i. $a \leq b$ se, e somente se, $a < b$ ou $a=b$;
ii. $a \geq b$ se, e somente se, $a > b$ ou $a=b$.

As desigualdades definidas acima, satisfazem as propriedades:

1. $a > 0$ se, e somente se, a é positivo;

2. $a < 0$ se, e somente se, a é negativo;

3. $a > 0$ se, e somente se, $-a$ é negativo;

4. $a < 0$ se, e somente se, $-a$ é positivo;
5. *Transitiva:* Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$;
6. Se $a < b$ e $c \in \mathbb{R}$, então $a + c < b + c$;
7. Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$;
8. Se $a < b$ e $c \in \mathbb{R}^*_+$, então $a.c < b.c$;
9. Se $a < b$ e $c \in \mathbb{R}^*_-$, então $a.c > b.c$;
10. Se $0 < a < b$ e $0 < c < d$, então $a.c < b.d$;
11. Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$;
12. Se $a > b$ e $c \in \mathbb{R}$, então $a + c > b + c$;
13. Se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$;
14. Se $a > b$ e $c \in \mathbb{R}^*_+$, então $a.c > b.c$;
15. Se $a > b$ e $c \in \mathbb{R}^*_-$, então $a.c < b.c$;
16. Se $a > b > 0$ e $c > d > 0$, então $a.c > b.d$;
17. Se $a < b$, com ambos positivos ou negativos, então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Definição 8:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^* &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \\
\mathbb{R}_+ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \\
\mathbb{R}^*_+ &= \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \\
\mathbb{R}_- &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \\
\mathbb{R}^*_- &= \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}
\end{aligned}$$

1.3 Intervalos

Definição 9: *Intervalos* são conjuntos infinitos de números reais. Geometricamente, correspondem a segmentos de reta sobre um eixo coordenado. Por exemplo, se $a < b$, então o *intervalo aberto* de a a b, denotado por (a, b), é o segmento de reta que se estende de a até b, excluindo-se os extremos; e o *intervalo fechado* de a até b, denotado por $[a, b]$, é o segmento de reta que se estende de a até b, incluindo-se os extremos. Estes intervalos podem ser expressos na notação de conjuntos como

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\}; \\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\}.
\end{aligned}$$

.

Um intervalo pode incluir um extremo, mas não outro. Estes intervalos são chamados *semi-abertos* (ou, algumas vezes, *semi-fechados*). Além disso, é possível um intervalo estender-se indefinidamente em uma ou em outra direção, escrevemos $+\infty$ no lugar do extremo direito, e para indicar que o intervalo se estende indefinidamente na direção negativa, escrevemos $-\infty$, no lugar do extremo esquerdo. Os intervalos que se estendem entre dois números reais são chamados de *intervalos de comprimento finito*, enquanto que os que se estendem indefinidamente em uma ou em ambas as direções são chamados de *intervalos de comprimento infinito.*

Observação: Na tabela a seguir, leia-se *finito* por *comprimento finito* e *infinito* por *comprimento infinito.*

Notação de Intervalo	Notação de Conjuntos	Classificação
(a,b)	$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	Finito; aberto
$[a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	Finito; fechado
$[a,b)$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	Finito; semi-aberto à direita ou semi-fechado à esquerda
$(a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	Finito; semi-aberto à esquerda ou semi-fechado à direita
$(-\infty,b]$	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$	Infinito; fechado
$(-\infty,b)$	$\{x \in \mathbb{R} : x < b\}$	Infinito; aberto
$[a,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$	Infinito; fechado
$(a,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$	Infinito; aberto
$(-\infty,+\infty)$	$\mathbb{R}$	Infinito; aberto e fechado

Exemplo 2: Determinar os valores de x que satisfazem as desigualdades:

1. $x^2 - 3x \leq 10$;

   <u>**Solução:**</u>

   Subtraindo-se 10 de ambos os lados, obtém-se a inequação:

   $$x^2 - 3x - 10 \leq 0. \qquad (1)$$

   As raízes da equação $x^2 - 3x - 10 = 0$ são -2 e 5.

   Estas raízes dividem o eixo coordenado em três intervalos abertos: $(-\infty,-2)$, $(-2,5)$ e $(5,+\infty)$.

   Analisando os sinais de $x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$ em cada intervalo, temos que:

Intervalo	Ponto de teste	Sinal de $(x+2)(x-5)$ no ponto de teste
$(-\infty,-2)$	-3	$(-)(-) = +$
$(-2,5)$	0	$(+)(-) = -$
$(5,+\infty)$	6	$(+)(+) = +$

   Portanto, a solução da desigualdade (1) é $S = [-2,5]$.

   Observação: O procedimento acima, de testar o sinal da expressão em apenas um ponto do intervalo e concluir que ele será o mesmo em todo o intervalo só funciona devido a uma propriedade chamada de continuidade, a qual será estudada no próximo capítulo.

2. $2x - 5 < \frac{1}{x-1}$ $\qquad (*)$

<u>**Solução:**</u>

Condição de existência de solução: $x - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1$.

Observe que $x - 1$ pode ser positivo ou negativo. Assim, temos 2 casos a serem analisados:

1° ***Caso:*** Para $x - 1 < 0$, ou seja, $x < 1$, temos que:

Multiplicando $(*)$ por $x - 1$, temos que:

$2x - 5 < \frac{1}{x-1} \;\; \Rightarrow \;\; (2x-5)(x-1) > 1 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 7x + 4 > 0. \qquad (**)$

Resolvendo a equação $2x^2 - 7x + 4 = 0$ conclui-se $\frac{7+\sqrt{17}}{4} = 2.780\,8$ e $\frac{7-\sqrt{17}}{4} = 0.719\,22$ são suas raízes

Analisando os intervalos $\left(-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{4}\right)$, $\left(\frac{7-\sqrt{17}}{4}, \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right)$ e $\left(\frac{7+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$, obtém-se que a solução da desigualdade $(**)$ é $I_1 = \left(-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{7+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$.

Dessa forma, neste intervalo, a solução é $S_1 = I_1 \cap (-\infty, 1) \quad \Rightarrow \quad S_1 = \left(-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{4}\right)$.

2° ***Caso:*** Para $x - 1 > 0$, temos que:

Multiplicando $(*)$ por $x - 1$, temos que:

$2x - 5 < \frac{1}{x-1} \;\; \Rightarrow \;\; (2x-5)(x-1) < 1 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 7x + 4 < 0.$

A solução dessa desigualdade é $I_2 = \left(\frac{7-\sqrt{17}}{4}, \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Logo, neste intervalo a solução é $S_2 = I_2 \cap (1, +\infty) \;\; \Rightarrow \;\; S_2 = \left(1, \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Portanto, a solução da desigualdade é a união das soluções acima, ou seja, $S = S_1 \cup S_2 \quad \Rightarrow \quad S = \left(-\infty, \frac{7-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(1, \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right)$.

1.4 Valor Absoluto

Definição 10: O *valor absoluto* ou *módulo* de um número real x é representado e definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$

Vemos que o valor absoluto de um número real nunca é negativo. Geometricamente, o valor absoluto de um número real x é sua distância do ponto de origem, independentemente de sua direção.

Exemplo 1: $|7-4| = |3| = 3$ *e* $|4-7| = |-3| = 3$.
Vemos que $|7-4| = |4-7|$ é a distância entre 4 e 7 sem a preocupação com qual dos números é maior.

Definição 11: Seja $x \in \mathbb{R}$. A *raiz quadrada de* x, denotada por $\sqrt{x}$, é o (único) número real não negativo cujo quadrado é x.

Exemplos:

- $\sqrt{25} = 5$, pois $5^2 = 25$;
- $\sqrt{(-6)^2} = 6$, pois $6^2 = 36$.

1.4.1 Propriedades do Valor Absoluto

Sejam x e y dois números reais.

1. $|x| \geq 0$;
2. $|x| \geq x$;
3. $|-x| = |x|$;

   A demonstração da cada uma das propriedades acima, decorre diretamente da definição.

4. $|x|^2 = x^2$e $|x| = \sqrt{x^2}$;

   Demonstração:

   (a) *Se $x \geq 0$, então da definição vem que, $|x| = x$ que verifica a proposição;*

   (b) *Se $x < 0$, então da definição vem que, $|x| = -x$ e $(-x)^2 = x^2$, de onde $|x|^2 = x^2$e, por conseguinte, $|x| = \sqrt{x^2}$.*

5. $|xy| = |x| \,.\, |y|$;

   Demonstração:

   Pela propriedade 4, temos que: $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2}.\sqrt{y^2} = |x| \,.\, |y|$.

6. **Desigualdade triangular:** $|x+y| \leq |x| + |y|$;

   Demonstração:

   Pela propriedade 4, temos que:

   $|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2\,|xy| + y^2$

   $\Rightarrow |x+y|^2 \leq |x|^2 + 2\,|xy| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$

   $\Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$.

7. $|x| - |y| \leq |x - y|$;
<u>*Demonstração*</u>*:*
Fazendo $x = x + y - y$ *e da propriedade* 6, *segue que:*

$$|x| = |x + y - y| \leq |x - y| + |y| .$$

Somando $-|y|$ *a ambos os lados, temos que:*

$$|x| - |y| \leq |x - y| .$$

8. $|x| - |y| \leq |x + y|$;
<u>*Demonstração*</u>*:*
Fazendo $x = x + y - y$ *e da propriedade 6 vem que*

$$|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y| .$$

Somando $-|y|$ *a ambos os lados, temos que:*

$$|x| - |y| \leq |x + y| .$$

9. $|x - y| \leq |x| + |y|$;
<u>*Demonstração*</u>*:*
Observe que:

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| \leq |x| + |y| .$$

10. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, com $y \neq 0$.
<u>*Demonstração*</u>*:*
Note que:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \left|x.\frac{1}{y}\right| = |x| . \left|\frac{1}{y}\right| = |x| . \frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$$

11. Seja a um número real positivo, então:

    (a) $|x| < a$ se, e somente se, $-a < x < a$;
    (b) $|x| \leq a$ se, e somente se, $-a \leq x \leq a$
    (c) $|x| > a$ se, e somente se, $x < -a$ ou $x > a$;
    (d) $|x| \geq a$ se, e somente se, $x \leq -a$ ou $x \geq a$.

<u>*Demonstração*</u>*: Somente do caso (a)*

Inicalmente, provaremos que $|x| < a$ *se* $-a < x < a$*:*

i. Se $x > 0 \;\Rightarrow\; |x| = x$*, uma vez que* $x < a$ *teremos* $|x| < a$*;*
ii. Se $x < 0 \;\Rightarrow\; |x| = -x$ *, mas uma vez que* $x < a$ *teremos* $-x < a$*, mas* $|-x| = x$*, então* $|x| < a$*.*

Portanto $|x| < a$ *se* $-a < x < a$*.*

Agora, mostraremos que $|x| < a$ *somente se* $-a < x < a$*:*

i. Se $x \geq 0$*, como* $|x| = x$*, teremos* $x < a$*, como* $a > 0$ *e* $-a < 0$*, então* $-a < 0 < x < a$ *de onde vem que* $-a < x < a$*.*

ii.Se $x < 0 \;\Rightarrow\; |x| = -x$ *, como* $|x| < a$ *teremos que* $-x < a$ *e com* $-x > 0$*, então* $-a < 0 \leq -x < a$ *ou* $-a < -x < a$*, de onde vem que* $-a < x < a$*.*

Portanto, $|x| < a$ *se, e somente se,* $-a < x < a$*.*

Observação 1: A demonstração dos casos (b), (c) e (d) é análoga.

Exemplo 2: Resolva a equação $|x-3|^2 - 4\,|x-3| = 12$.
<u>**Solução:**</u>
Definindo $u = |x-3|$, temos que a equação acima pode ser escrita como

$$u^2 - 4u - 12 = 0 \qquad (1)$$

As raízes da equação (1) são -2 e 6.

$\star$ Para $u = -2$, segue que: $|x-3| = -2$. *Absurdo!!!!*
Por propriedade de módulo $|x| \geq 0$.

$\star$ Para $u = 6$, segue que: $|x-3| = 6 \qquad (2)$
Pela definição de módulo, temos que
$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{se } x \geq 3 \\ -(x-3), & \text{se } x < 3 \end{cases}$.

1º Caso: Se $x \geq 3$, temos que:
$x - 3 = 6 \Longrightarrow x = 9$
Como $9 \in [3, +\infty)$, segue que uma solução é $S_1 = \{9\}$.

2º Caso: Se $x < 3$, temos que:
$-x + 3 = 6 \Longrightarrow x = -3$
Como $-3 \in (-\infty, 3]$, segue que uma solução é $S_2 = \{-3\}$.
Portanto, a solução é $S = \{-3, 9\}$.

Exemplo 3: Determine todos os valores de x que satisfazem a desigualdade

$$|x-5| < |x+1|.$$

<u>**Solução 1:**</u>
Elevando ao quadrado ambos os lados e usando a propriedade 4, temos que:

$|x-5|^2 < |x+1|^2 \quad \Rightarrow \quad (x-5)^2 < (x+1)^2$
$\Rightarrow \quad x^2 - 10x + 25 < x^2 + 2x + 1$
$\Rightarrow \quad 12x > 24$, ou seja, $x > 2$.

Solução 2:
Pela definição de módulo, temos que:

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, & \text{se } x \geq 5 \\ -x+5, & \text{se } x < 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad |x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1, & \text{se } x < -1 \end{cases}.$$

1° *Caso:* Se $x < -1$, temos que:
$|x-5| < |x+1| \quad \Rightarrow \quad -x+5 < -x-1 \quad \Rightarrow \quad 5 < -1.$ *Absurdo!!!*
Logo, não há solução para $x < -1$, isto é, $S_0 = \{\}$.

2° *Caso:* Se $-1 \leq x < 5$, temos que:
$|x-5| < |x+1| \quad \Rightarrow \quad -x+5 < x+1 \quad \Rightarrow \quad -2x < -4 \quad \Rightarrow \quad x < 2.$
Logo, a solução neste intervalo é $S_1 = (2,5)$.

3° *Caso:* Se $x \geq 5$, temos que:
$|x-5| < |x+1| \quad \Rightarrow \quad x-5 < x+1 \quad \Rightarrow \quad -5 < 1.$
Como a desigualdade é satisfeita para qualquer $x \geq 5$, temos que a solução é todo $x \in [5, +\infty)$, ou seja, $S_2 = [5, +\infty)$.

Portanto, a solução da desigualdade é a união das soluções acima, ou seja, $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2 = (2, +\infty)$.

Exemplo 4: Determine todos os valores de x que satisfazem a desigualdade

$$|2x-1| < \tfrac{1}{x-2}. \qquad (*)$$

Solução:
Condição de existência de solução: $x \neq 2$
Pela definição de módulo, temos que:

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ -(2x-1), & \text{se } x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Observe que $x-2$ pode ser positivo ou negativo. Assim, temos 3 casos a serem analisados:

1° ***Caso:*** Se $x < \frac{1}{2}$, temos que:

Para $x < \frac{1}{2}$, temos que $x-2 < 0$. Assim, multiplicando $(*)$ por $x-2$, temos que:
$|2x-1| < \frac{1}{x-2} \quad \Rightarrow \quad -(2x-1)(x-2) > 1 \quad \Rightarrow \quad -2x^2 + 5x - 3 > 0.$
Resolvendo a inequação $-2x^2 + 5x - 3 > 0. \qquad (**)$
Observe que $x = 1$ e $x = \frac{3}{2}$ são raízes da equação $-2x^2 + 5x - 3 = 0$. Dessa forma, analisando os intervalos $(-\infty, 1)$, $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$, conclui-se que a solução da inequação $(**)$ é $I_1 = \left(1, \frac{3}{2}\right)$.
Logo, neste intervalo não há solução, pois $I_1 \cap \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) = \{\}$.

2° ***Caso:*** Se $\frac{1}{2} \leq x < 2$, temos que:

Para $\frac{1}{2} \leq x < 2$, temos que $x - 2 < 0$. Assim, multiplicando $(*)$ por $x - 2$, temos que:

$|2x-1| < \frac{1}{x-2} \Rightarrow (2x-1)(x-2) > 1 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 1 > 0.$

Resolvendo a inequação $2x^2 - 5x + 1 > 0.$ $(\star\star)$

Observe que $\frac{5+\sqrt{17}}{4}$ e $\frac{5-\sqrt{17}}{4}$ são raízes da equação $2x^2 - 5x + 1 = 0$. Dessa forma, analisando os intervalos $\left(-\infty, \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)$, $\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}, \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)$ e $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$, conclui-se que a solução da inequação $(**)$ é $I_2 = \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$.

Logo, neste intervalo a solução é $S_2 = I_2 \cap \left[\frac{1}{2}, 2\right) \Rightarrow S_2 = \{\}$.

3° ***Caso:*** Se $x > 2$, temos que:

Para $x > 2$, temos que $x - 2 > 0$. Assim, multiplicando $(*)$ por $x - 2$, temos que:

$|2x-1| < \frac{1}{x-2} \Rightarrow (2x-1)(x-2) < 1 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 1 < 0.$

A solução da inequação $2x^2 - 5x + 1 < 0$ é $I_3 = \left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}, \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Logo, neste intervalo é $S_3 = I_3 \cap (2, +\infty) \Rightarrow S_3 = \left(2, \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Portanto, a solução da desigualdade é a união das soluções acima, ou seja, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \Rightarrow S = \left(2, \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Exemplo 5: Determine todos os valores de x que satisfazem a desigualdade

$$\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{|x^2 - 1|} < 4x.$$

<u>**Solução:**</u>

Condição de existência de solução: $x^2 - 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$.

Pela definição de módulo, temos que:

$$\left|x^2 - 1\right| = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ se } x^2 - 1 > 0 \\ -\left(x^2 - 1\right), \text{ se } x^2 - 1 < 0 \end{cases}.$$

Resolvendo a inequação $x^2 - 1 > 0$, obtém-se que:

$$\left|x^2 - 1\right| = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ se } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ -\left(x^2 - 1\right), \text{ se } -1 < x < 1 \end{cases}.$$

Observe que: $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{|x^2 - 1|} = \frac{\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 - 1\right)}{|x^2 - 1|} < 4x.$ $(\#)$

Temos dois casos a serem analisados.

1° ***Caso:*** Se $x^2 - 1 > 0$:

Aplicando a definição de módulo em $(\#)$, temos que:

$$x^2 - 4x - 4 < 0.$$

A solução dessa inequação é $I_1 = \left(2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}\right)$.

Logo, a solução é $S_1 = I_1 \cap [(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)] \Rightarrow S_1 = \left(1, 2 + 2\sqrt{2}\right)$.

2° ***Caso:*** Se $x^2 - 1 < 0$:

Aplicando a definição de módulo em $(*)$, temos que:

$$x^2 + 4x - 4 > 0.$$

A solução dessa inequação é $I_2 = \left(-\infty, -2 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2 + 2\sqrt{2}, +\infty\right)$.

Logo, a solução é $S_2 = I_2 \cap (-1, 1) \quad \Rightarrow \quad S_2 = \left(-2 + 2\sqrt{2}, 1\right)$.

Portanto, a solução da desigualdade é a união das soluções acima, ou seja, $S = S_1 \cup S_2 \quad \Rightarrow \quad S_3 = \left(-2 + 2\sqrt{2}, 1\right) \cup \left(1, 2 + 2\sqrt{2}\right)$.

1.5 Função

Definição 12: Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma *função* $f : A \to B$ é uma lei (ou regra) de correspondência entre dois conjuntos não vazios, tal que a cada elemento de A se associa um único elemento de B. O conjunto A é chamado de *domínio de* f e é denotado por Df, B é chamado de *contradomínio* ou *campo de valores de* f . Denotamos por,

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

Exemplo 6:

1. A área do quadrado (A) é função do comprimento do lado (l), ou seja, $A = l^2$.

2. A distância que alguém percorre (d) depende do tempo gasto (t). Representamos por $d = d(t)$.

Definição 13: Seja $f : A \to B$.

1. Dado $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$ é chamado de *valor* da função f no ponto x ou de *imagem* de x por f.

2. O conjunto de todos os valores assumidos pela função é chamado de *conjunto imagem de* f e é denotado por $\operatorname{Im} f$.

1.5.1 Formas de Expressão das Funções

1. **Forma Tabular:** a correspondência entre os elementos é dada por meio de uma tabela.
   Por exemplo, se $f(x_o) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $\cdots$, $f(x_n) = y_n$.

x	x_o	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

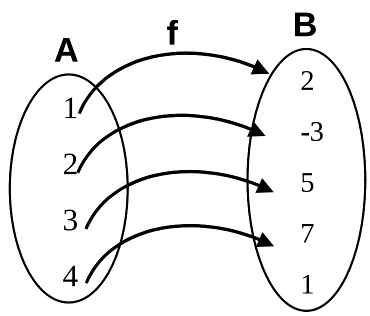
Exemplo 7:

(a) Tábuas de logaritmos;

(b) Tabelas trigonométricas.

2. **Forma Gráfica:** A função pode ser escrita de duas formas:

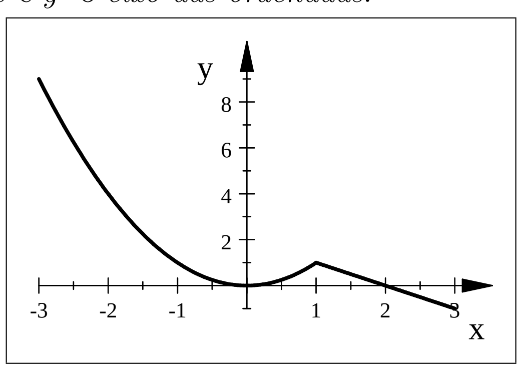
   (a) **Diagrama de Ven-Euler:** As flechas indicam que a correspondência é do conjunto A para o conjunto B.



   Observe que:

   Domínio de f: $Df = A$;
   Contradomínio de f: B;
   Imgem de f : $\operatorname{Im} f = \{2, -3, 5, 7\}$.

   (b) **Diagrama Cartesiano:** As retas x e y são perpendiculares; x é chamado *eixo das abscissas* e y o *eixo das ordenadas.*



3. **Forma Analítica:** A função é escrita, segundo uma lei, denotada por $y = f(x)$. Exemplos:

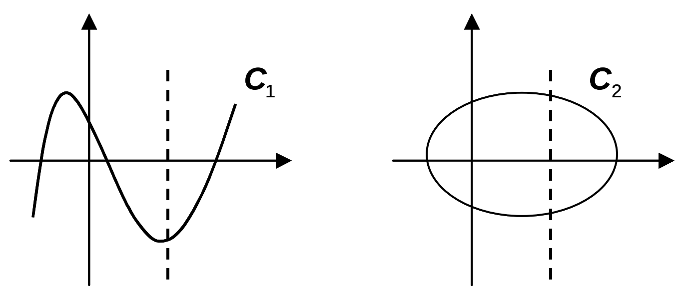
   (a) $f(x) = x^2$;
   Domínio: $Df = \mathbb{R}$;
   Imagem: $\operatorname{Im} f = [0, +\infty)$.

(b) $g(t) = \frac{t}{t^2-4}$;
Domínio: $Dg = \{t \in \mathbb{R} : t \neq \pm 2\} \quad \Rightarrow \quad Dg = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$;
Imagem: $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}$.

(c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
Domínio: $Dh = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} \quad \Rightarrow \quad Dh = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$
$\Rightarrow \quad Dh = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$;
Imagem: $\operatorname{Im} h = [0, +\infty)$.

Na forma analítica, a segunda variável, x, a qual se pode atribuir valores arbitrários dentro dos limites impostos pela natureza do problema, é dita *variável independente* ou *argumento da função*, e a primeira variável y cujo valor é determinado quando se dá valores à variável independente é dita *variável dependente* ou simplesmente *função.*

Observação: Uma maneira rápida de saber se a curva C dada representa ou não uma função é através do *teste da reta vertical.* Sabemos que, se f é uma função, um ponto de seu domínio pode ter somente uma imagem. Assim, C só representa o gráfico de uma função quando qualquer reta vertical corta a curva C no máximo em um ponto. Na figura abaixo, C_1 respresenta o gráfico de uma função, enquanto a curva C_2 não representa.



1.5.2 Operações com Funções

Definição 14: Dadas as funções f e g. As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão são definidas por:

1. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$;
2. $(f.g)(x) = f(x).g(x)$;
3. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, para $g(x) \neq 0$..

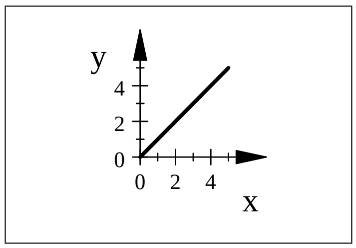
O domínio das funções $f \pm g$ e $f.g$ é a interseção dos domínios de f e g. O domínio de $\frac{f}{g}$ é a interseção dos domínios f e g, excluindo-se os pontos x onde $g(x) = 0$.

Exemplo 8: Sejam $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$. Determine as funções $f \pm g$, $f.g$ e $\frac{f}{g}$ e seus domínios.

Solução: Pela definição acima, temos que:

$(f \pm g)(x) = 2x - 1 \pm \sqrt{x^2 - 5x + 6}$;
$(f.g)(x) = (2x - 1)\sqrt{x^2 - 5x + 6}$;
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$.
Como $Df = \mathbb{R}$ e $Dg = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$, então o domínio de $f \pm g$ e $f.g$ é $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$. O domínio de $\frac{f}{g}$ é $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

Observação: Deve-se tomar cuidado, pois nem sempre a interseção dos domínios das funções é o domínio das funções resultantes. Por exemplo, se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{x}$ o domínio da função $h(x) = (f.g)(x) = x$ é $Dh = Df \cap Dg = [0, +\infty)$ e não $\mathbb{R}$ (que aparentemente seria o domínio da função $h(x)$). O gráfico da função h pode ser observado na próxima figura.



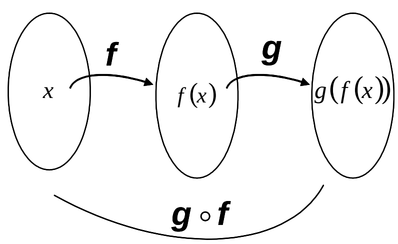
Definição 15: Dadas duas funções f e g, a função composta de g com f, denotada por $g \circ f$ é definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

O domínio de $g \circ f$ é o conjunto de todos os pontos x do domínio de f tais que $f(x)$ está no domínio de g. Simbolicamente,

$$D(g \circ f) = \{x \in Df : f(x) \in Dg\}.$$

O diagrama pode ser visualizado abaixo.



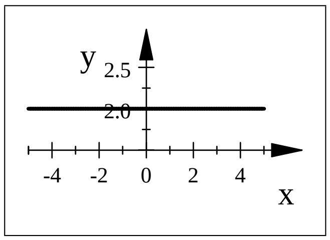
Exemplo 9: Sejam $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Encontre a função $f_1(x) = (g \circ f)(x)$ e $f_2(x) = (f \circ g)(x)$.
<u>**Solução:**</u> Pela definição de função composta, temos que:
$f_1(x) = (g \circ f)(x) = g(x^2 + 3) = \sqrt{x^2 + 3}$;
$f_2(x) = (f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = x + 3$.
Note que, $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemplo 10: Sejam $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = \sin(x^2 + 1)$. Encontre $f_1(x) = (f \circ g)(x)$ e $f_2(x) = (g \circ f \circ h)(x)$.
<u>**Solução:**</u> Pela definição de função composta, temos que:
$f_1(x) = (f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = \ln \sqrt{x} = \frac{\ln x}{2}$.

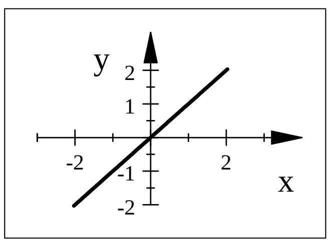
$f_2(x) = (g \circ f \circ h)(x) = g(f(\sin(x^2+1))) = g(\ln(\sin(x^2+1))) = \sqrt{\ln(\sin(x^2+1))}$.
Determine o domínio dessas funções compostas!

1.5.3 Funções Especiais

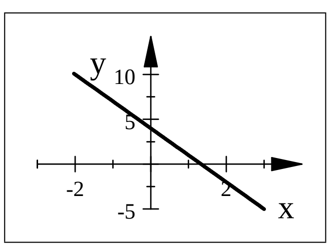
1. **Função constante:** $f : \mathbb{R} \to \{k\}$ definida por $f(x) = k$. Associa a qualquer número real x um mesmo número real k. Graficamente, é uma reta paralela ao eixo das abscissas. Se $k = 2$, o gráfico é



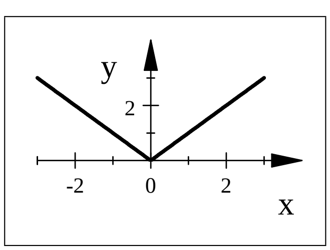
2. **Função Identidade:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. O gráfico é a reta bissetriz do primeiro e do terceiro quadrante.



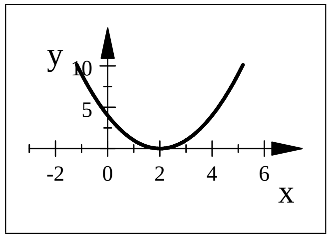
3. **Função Afim:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, onde a e b constantes e $a \neq 0$ são, respectivamente, o *coeficiente angular* e o *coeficiente linear*. O gráfico é uma reta. Se $a > 0$, a reta é crescente; se $a < 0$, a reta é decrescente; e se $b = 0$, a reta passa pela origem do sistema cartesiano. Exemplo: $f(x) = -3x + 4$.



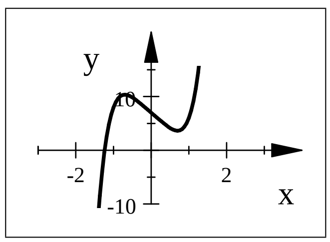
4. **Função Módulo:** $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definida por $f(x) = |x|$.



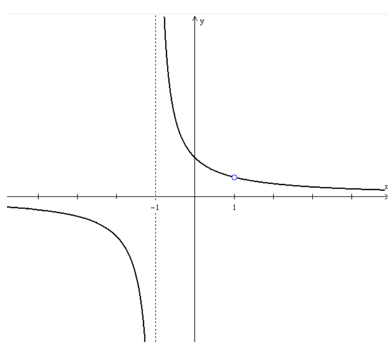
5. **Função Quadrática:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c constantes e $a \neq 0$. O gráfico dessa função é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo dos y. Se $a > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima. Se $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo. Exemplo: $f(x) = x^2 - 4x + 4$



6. **Função polinomial:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, com a_i, $i = 0, 1, \cdots, n$, constantes reais, $a_0 \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ e n é o grau do polinômio. As funções constante, identidade, lineares e quadráticas são exemplos de funções polinomiais. Exemplo: $f(x) = 5x^5 - 6x + 7$.



7. **Função Racional:** função definida como o quociente de duas funções polinomiais, isto é, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $q(x) \neq 0$. O domínio da função racional é o conjunto dos reais excluindo todos os x tais que $q(x) \neq 0$. Exemplo: $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$.



1.5.4 Funções Pares, Ímpares e Periódicas

Definição 16: Uma função $f(x)$ é *par* se, para todo $x \in Df$,

$$f(-x) = f(x).$$

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo dos y.

Definição 17: Uma função $f(x)$ é *ímpar* se, para todo $x \in Df$,

$$f(-x) = -f(x).$$

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Definição 18: Uma função $f(x)$ é *periódica* se existe um número real $T \neq 0$, tal que

$$f(x+T) = f(x).$$

para todo $x \in Df$.

Exemplo 11: Classifique as funções abaixo, como par ou ímpar.

1. $f(x) = x^4 + x^2 - 2$;

   Solução: $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 - 2 = x^4 + x^2 - 2 = f(x).$

   Logo, f é uma função par.

2. $f(x) = 4x^3 + x^2$;

   Solução: $f(-x) = 4(-x)^3 + (-x)^2 = x^2 - 4x^3.$

   Logo, f não é uma função par nem ímpar, pois $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x).$

3. $f(x) = x^7$;

   Solução: $f(-x) = (-x)^7 = -x^7 = -f(x).$

   Logo, f é uma função ímpar.

Exemplo 12: Mostre que a função $f(x) = \sin(2x)$ é periódica de perído $T = \pi$.

Solução: Precisamos mostrar que $f(x+\pi) = f(x)$, para mostrar que $f(x) = \sin(2x)$ é periódica de perído $T = \pi$.

Por propriedades de funções trigonométricas, temos que:
$f(x+\pi) = \sin(2(x+\pi)) = \sin(2x)\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} + \underbrace{\sin(2\pi)}_{=0}\cos(2x) = \sin 2x = f(x).$

Portanto, $f(x) = \sin(2x)$ é periódica com perído $T = \pi$.

Exemplo 13: Mostre que se f e g são funções ímpares, então $f.g$ é uma função par.

Solução:

Seja h a função definida por $h(x) = (f.g)(x) = f(x).g(x)$.

Nosso objetivo é mostrar que h é uma função par, ou seja, mostrar que $h(-x) = h(x)$.

Note que:

$$h(-x) = f(-x).g(-x) \qquad (*)$$

Por hipótese, sabemos que f e g são ímpares, ou seja, que $f(-x) = -f(x)$ e $g(-x) = -g(x)$. Usando estes resultados em $(*)$, segue que:

$$h(-x) = -f(x).[-g(x)] = f(x).g(x) = h(x).$$

Exemplo 14: Se f é uma função par, g é uma função ímpar e não nula, então a igualdade

$$[f(-x)]^2 = \left[g(-x) - \frac{(g(x))^2 - g(-x)f(x)}{g(-x)}\right].f(-x) \qquad (\#)$$

é verdadeira?

Solução:

Para veriificar se a igualdade dada é verdadeira ou não, usaremos as hipóteses, que são:

(i) f é uma função par, ou seja, $f(-x) = f(x)$;

(ii) g é uma função ímpar, ou seja, $g(-x) = -g(x)$.

Partindo pelo lado direito de $(\#)$ e chamando-o de A, temos que:

$$A = \left[g(-x) - \frac{(g(x))^2 - g(-x)f(x)}{g(-x)}\right].f(-x)$$

$$\Rightarrow A \underset{\substack{\downarrow \\ (ii)}}{=} \left[-g(x) - \frac{(g(x))^2 + g(x)f(x)}{-g(x)}\right].f(-x)$$

Colocando em evidência a função $g(x)$, temos que:

$$A = \left\{-g(x) + \frac{g(x)[g(x) + f(x)]}{g(x)}\right\}.f(-x)$$

$$A = [-g(x) + g(x) + f(x)].f(-x) = f(x).f(-x)$$

$$\Rightarrow A \underset{\substack{\downarrow \\ (i)}}{=} f(-x).f(-x) = [f(-x)]^2.$$

Conclusão: A igualdade dada em $(\#)$ é verdadeira.

Exemplo 15: Sejam f e g as funções definidas por

$$f(x) = \frac{3x-3}{x} \text{ e } g(x) = \frac{x}{x-3} - 1.$$

(a) A função $h(x) = (g \circ f)(x)$ é uma função *par*, *ímpar* ou *nem par nem ímpar*? Justifique usando a definição. (b) Determine todos os valores reais de x que satisfazem a inequação $|1 + g(x)| \geq \dfrac{f(x)}{3}$.

Solução:

(a) Temos que:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g\left(\frac{3x-3}{x}\right) = \frac{\dfrac{3x-3}{x}}{\dfrac{3x-3}{x} - 3} - 1 = \frac{3x-3}{-3} - 1 = -x.$$

Verificando se a função h é *par*, *ímpar* ou *nem par nem ímpar*.

$h(-x) = -(-x) = -h(x)$.

Portanto, como $h(x) = -h(x)$ a função h é ímpar.

(b) Usando a definição das funções f e g, temos que:

$$|1 + g(x)| \geq \frac{f(x)}{3} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x}{x-3}\right| \geq \frac{x-1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{|x|}{|x-3|} \geq \frac{x-1}{x} \qquad (1)$$

Resolvendo a inequação (1) :

* Condição de existência de solução: $x \neq 0$ e $x \neq 3$.

Como $|x-3| > 0$, podemos multiplicar a inequação (1) por $|x-3|$ sem que a desigualdade seja alterada.

$$|x| \geq \frac{(x-1)|x-3|}{x} \qquad (2)$$

* Pela definição de módulo, temos que: $|x-3| = \begin{cases} x-3, \text{ se } x \geq 3 \\ 3-x, \text{ se } x < 3 \end{cases}$

* Temos três intervalos a serem anlisados: $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = (0, 3)$ e $I_3 = (3, +\infty)$.

1º Caso: Para $x \in I_1$.

Neste intervalo $x < 0$, então multiplicando por x a inequação (2), temos que:

$x|x| \leq (x-1)|x-3| \quad \Rightarrow \quad -x^2 \leq (x-1)(3-x) \quad \Rightarrow \quad -x^2 \leq -x^2 + 4x - 3$

$\Rightarrow 0 \leq 4x - 3$, cuja solução é $I_4 = \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$.

Solução parcial 1: $S_1 = I_1 \cap I_4 = \{\}$

2º Caso: Para $x \in I_2$:

Neste intervalo $x > 0$, então multiplicando por x a inequação (2), temos que:

$x|x| \geq (x-1)|x-3| \quad \Rightarrow \quad x^2 \geq (x-1)(3-x) \quad \Rightarrow \quad x^2 \geq -x^2 + 4x - 3$

$\Rightarrow 0 \geq -2x^2 + 4x - 3$, cuja solução é $\mathbb{R}$

Solução parcial 2: $S_2 = I_2 \cap \mathbb{R} = (0, 3)$

3º Caso:Para $x \in I_3$:

Neste intervalo $x > 0$, então multiplicando por x a inequação (2), temos que:

$x|x| \geq (x-1)|x-3| \quad \Rightarrow \quad x^2 \geq (x-1)(x-3) \quad \Rightarrow \quad x^2 \geq x^2 - 4x + 3$

$\Rightarrow 0 \geq -4x + 3$, cuja solução é $I_4 = \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$

Solução parcial 3: $S_2 = I_3 \cap I_4 = (3, +\infty)$

Solução final: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = (0, +\infty) - \{3\}}$

1.5.5 Funções Injetoras, Sobrejetoras e Bijetoras

- Quando para quaisquer valores de x_1 e x_2 do domínio de uma função f tais que $x_1 \neq x_2$ tivermos $f(x_1) \neq f(x_2)$, dizemos que a função é *injetora.*
- Quando o conjunto imagem de uma função f for igual ao seu contradomínio, dizemos que a função é *sobrejetora.*
- Quando uma função é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, dizemos que ela é *bijetora.*

Exemplo 16: Considere a função dada pela lei de formação $f(x) = x^2$. Se definirmos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f não será nem injetora e nem sobrejetora. Se definirmos $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, f será injetora mas não será sobrejetora. Se definirmos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, f será sobrejetora, mas não será injetora e se definirmos $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, f será bijetora.

(*Sugestão: construa os gráficos e verifique as afirmações acima*).

Observação: Note que dada uma lei de formação, uma função pode ser bijetora ou não, dependendo do seu campo de definição (domínio) e de seu contradomínio.

1.5.6 Funções Inversas

Seja $y = f(x) = x^3 + 1$. Nesta expressão, temos que y é uma função de x, mas podemos escrever x como uma função de y, ou seja, $x = g(y) = \sqrt[3]{y-1}$. Observe que,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g\left(x^3 + 1\right) = x;\\ (f \circ g)(y) &= f(g(y)) = f\left(\sqrt[3]{y-1}\right) = y.\end{aligned}$$

Neste exemplo, compondo as funções f e g obtivemos as funções identidades. Os pares de funções com essas duas propriedades são chamadas de funções inversas.

Definição 19: Se as funções f e g satisfazem as duas condições

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= x, \forall x \in Df,\\ (f \circ g)(y) &= y, \forall y \in Dg,\end{aligned}$$

então, dizemos que f e g são *funções inversas*. Além disso, chamamos f *uma inversa de* g e g *uma inversa de* f.

Definição 20: Seja $y = f(x)$ uma função ou $f : A \to B$. Se, para cada $y \in B$, existir exatamente um valor de $x \in A$ tal que $y = f(x)$, então podemos definir uma função $g : B \to A$. A função g definida desta maneira é chamada de inversa de f.

Exemplo 17: As funções $f(x) = x^3 + 1$ e $g(y) = \sqrt[3]{y-1}$ são funções inversas.

Uma função não pode ter duas inversas. Assim, se uma função f tiver uma inversa, a inversa é única. A inversa de uma função é comumente denotada por f^{-1} (lê-se: *inversa de* f). Sabemos que, função está determinada pela relação que estabelece entre suas entradas e saídas e não pela letra usada para variável independente. Assim, no exemplo 13, temos que $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ é a função inversa de f.

Se usarmos a notação f^{-1}, em vez de g, na definição 15, e se usarmos x como variável independente, temos que se f e f^{-1} são inversas, então:

$$\begin{aligned}\left(f^{-1} \circ f\right)(x) &= x, \forall x \in Df,\\ \left(f \circ f^{-1}\right)(x) &= x, \forall x \in Df^{-1}.\end{aligned}$$

ATENÇÃO: f^{-1} *é apenas uma notação para a função inversa,* $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

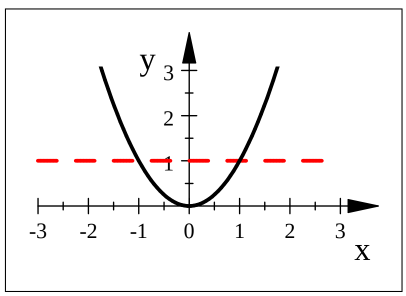
Exemplo 18:

1. A função $f : \left[\frac{2}{3}, +\infty\right) \to \mathbb{R}_+$ definida por $y = f(x) = \sqrt{3x - 2}$ tem como função inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$, definida por $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2)$.

2. A função $f : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$ definida por $y = f(x) = \frac{x-1}{3-x}$ tem como função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{3\}$, definida por $f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{x+1}$.

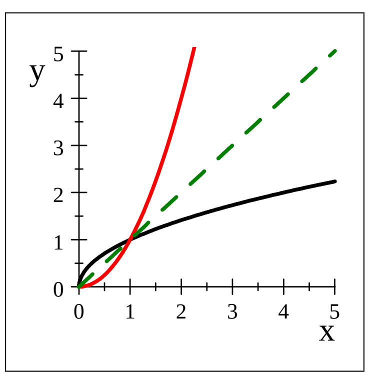
Uma maneira de determinar as funções inversas é resolvendo $y = f(x)$ para x como uma função de y e, a seguir, substituir y por x na fórmula final para f^{-1}.

Nem toda função tem uma função inversa. Graficamente, podemos determinar se uma função admite inversa. Passando uma reta paralela ao eixo dos x, esta deve cortar o gráfico em apenas um ponto. Este é o *teste da reta horizontal.* A função $f(x) = x^2$ não possui função inversa, mas fazendo uma restrição conveniente no domínio, essa mesma função pode admitir inversa.



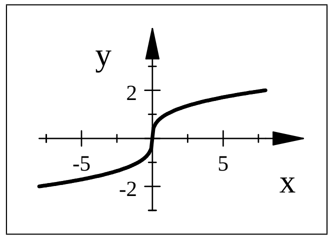
Para fazermos o gráfico da função inversa basta traçarmos a reta $y = x$ e observarmos a simetria.

Exemplo 19: Se $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $f(x) = x^2$ tem como inversa a função $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

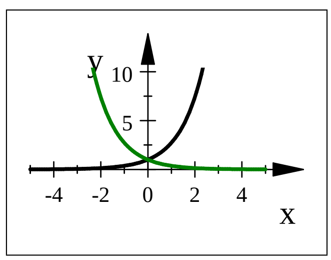


1.5.7 Algumas Funções Elementares

1. **Função Potencial:** função definida por $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{R}$. Exemplo: $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$



2. **Função Exponencial:** $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ definida por $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$. Com relação ao gráfico dessa função, podemos afirmar que:
   (a) está acima do eixo das abscissas;
   (b) corta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$;
   (c) f é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

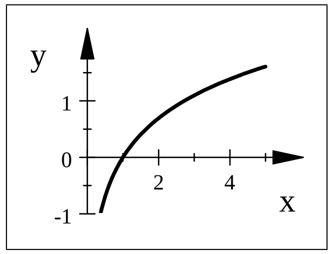


3. **Função Logarítmica:** $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$, com $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$. Com relação ao gráfico dessa função, podemos afirmar que:
   (a) está todo a direita eixo das ordenadas;
   (b) corta o eixo das abcissas no ponto $(1, 0)$;
   (c) f é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.
   (d) é simétrico ao gráfico da função $g(x) = a^x$ em relação à reta $y = x$ (ou seja, funções exponenciais e logarítmicas são inversas uma da outra).

   Observação: Quando a base for o número e o logaritmo é dito *logaritmo natural* ou *neperiano*, escrevemos $f(x) = \ln x$.

   Exemplo 20: Seja g a função definida por $g(x) = \ln\left(\sqrt{2 - 2x}\right)$. Encontre a função inversa de g, o domínio e a imagem da função da função g^{-1}

   Solução:



Sabemos que para que exista inversa uma função deve ser bijetora. Consequentemente, $Dg = \operatorname{Im} g^{-1}$ e $\operatorname{Im} g = Dg^{-1}$.

* Domínio de g: $Dg = \{x \in \mathbb{R} : 2 - 2x > 0\} = (-\infty, 1)$

* Determinando g^{-1} :

$y = g(x) = \ln\left(\sqrt{2-2x}\right) \quad \Rightarrow \quad e^y = \sqrt{2-2x} \quad \Rightarrow \quad e^{2y} = 2 - 2x$

$\Rightarrow e^{2y} - 2 = -2x \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{2 - e^{2y}}{2}.$

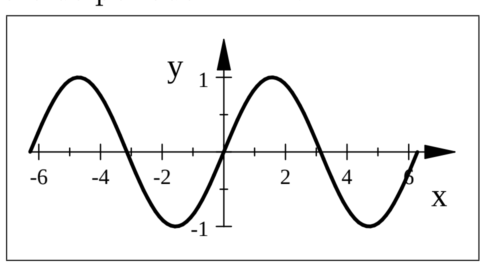
Logo, a função inversa de g é $g^{-1}(x) = \dfrac{2 - e^{2x}}{2}$.

E ainda, $Dg^{-1} = \mathbb{R}$.

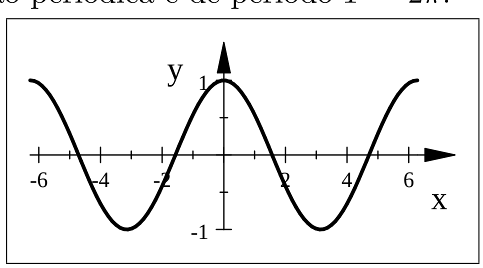
Portanto, $g^{-1} : \mathbb{R} \to (-\infty, 1)$ e $\boxed{g^{-1}(x) = \dfrac{2 - e^{2x}}{2}.}$

4. **Funções Trigonométricas:**

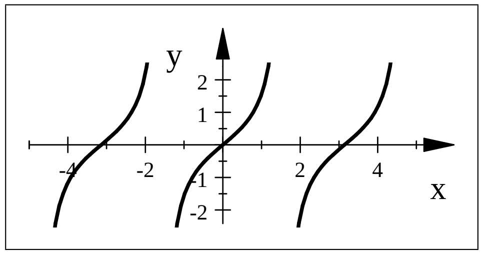
   (a) **Função Seno:** $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ definida por $f(x) =$sen x. A função seno é uma função periódica e de período $T = 2\pi$.



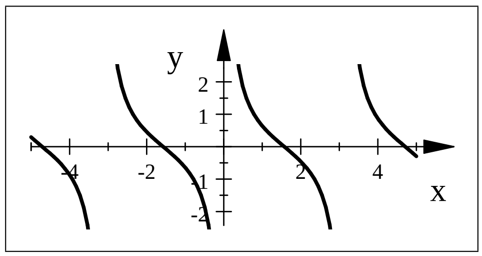
   (b) **Função Cosseno:** $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ definida por $f(x) = \cos x$. A função cosseno é uma função periódica e de período $T = 2\pi$.



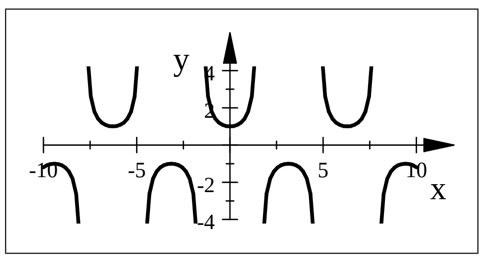
   (c) **Função Tangente:** definida por $f(x) =$tg$(x) = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$, para todo x tais que $\cos x \neq 0$, isto é, para $x \neq \frac{(2k+1)}{2}\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. A função tangente é uma função periódica e de período $T = \pi$.



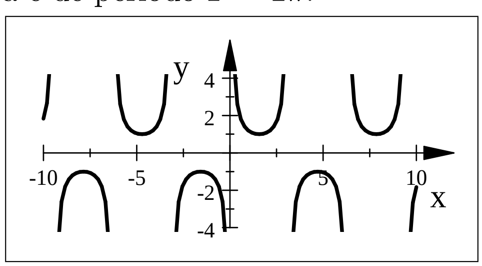
(d) **Função Cotangente:** definida por $f(x) = \text{cotg}(x) = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$, para todo x tais que sen $x \neq 0$, isto é, para $x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. A função cotangente é uma função periódica e de período $T = \pi$.



(e) **Função Secante:** definida por $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, para todo x tais que $\cos x \neq 0$, isto é, para $x \neq \frac{(2k+1)}{2}\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. A função secante é uma função periódica e de período $T = 2\pi$.



(f) **Função Cossecante:** definida por $f(x) = \text{cossec}(x) = \frac{1}{\text{sen } x}$, para todo x tais que sen $x \neq 0$, isto é, para $x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. A função cossecante é uma função periódica e de período $T = 2\pi$.



Exemplo 21: Detemine o domínio da função $f(x) = e^{\sqrt{1-x^2}\ \ln(\text{sen}(x))}$.

<u>**Solução:**</u>

Definindo $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ e $f_2(x) = \ln(\text{sen}(x))$, temos que: $f(x) = e^{f_1(x).f_2(x)}$.

* Domínio de $f : Df = Df_1 \cap Df_2$.

* Determinando o domínio das funções f_1 e f_2 :

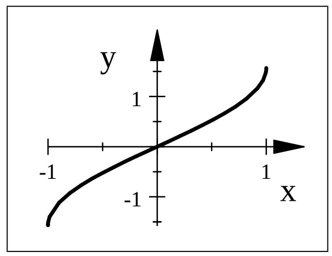
Domínio de $f : Df_1 = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$

Domínio de $f_2 : Df_2 = \{x \in \mathbb{R} : \text{sen}\,(x) > 0\} = (2k\pi, (2k+1)\,\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$.

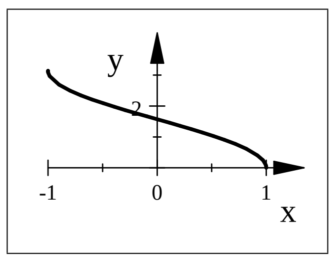
<u>Conclusão:</u> $\boxed{Df = (0,1].}$

5. **Funções Trigonométricas Inversas:** como as funções trigonométricas são periódicas é impossível definir funções inversas das trigonométricas em todo o seu domínio. Portanto, para definirmos a funções trigonométricas inversas necessitamos restringir os domínios.

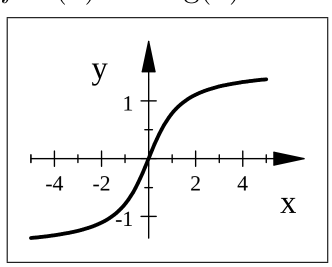
   (a) **Função Arco Seno:** Seja $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ a função definida por $f(x) = \text{sen}\ x$. A função inversa de $f(x)$ é chamada de arcsen x e denotada por $f^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, onde $f^{-1}(x) = \arcsin x$.



   (b) **Função Arco Cosseno:** Seja $f : [0,\pi] \to [-1,1]$ a função definida por $f(x) = \cos x$. A função inversa de $f(x)$ é chamada de $\arccos x$ e denotada por $f^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$, onde $f^{-1}(x) = \arccos x$.

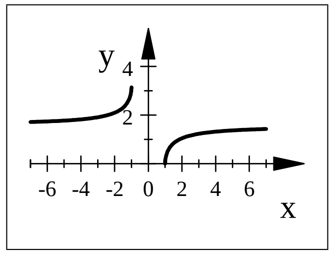


   (c) **Função Arco Tangente:** Seja $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \text{tg}\ x$. A função inversa de $f(x)$ é chamada de arctg x e denotada por $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, onde $f^{-1}(x) = \text{arctg}(x)$.

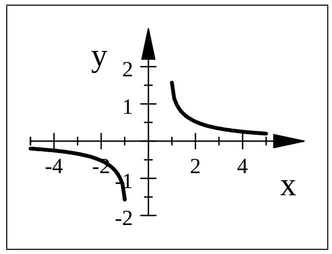


   (d) **Função Arco Cotangente:** $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$ definifa por $f^{-1}(x) = \text{arccotg}(x)$.

   (e) **Função Arco Secante:** definida por $f^{-1}(x) = \text{arcsec}\,(x)$, cujo domínio é $Df^{-1} = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ e imagem $\text{Im}\, f^{-1} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.



(f) **Função Arco Cossecante:** definida por $f^{-1}(x)$ =arcossec(x), cujo domínio é $Df^{-1} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ e imagem $\text{Im}\, f^{-1} = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

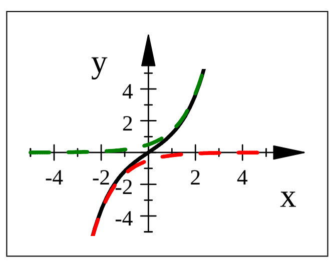


6. **Funções Hiperbólicas:** As funções exponenciais

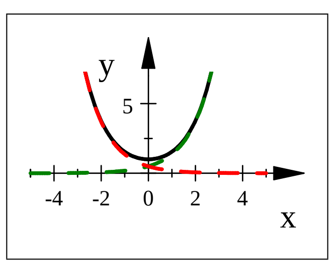
$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{e + e^{-x}}{2},$$

ocorrem freqüentemente na Matemática Aplicada. Estas expressões definem as funções *seno hiperbólico* e *cosseno hiperbólibo* de x, respectivamente. O comportamento dessas funções nos leva a fazer uma analogia com as funções trigonométricas.

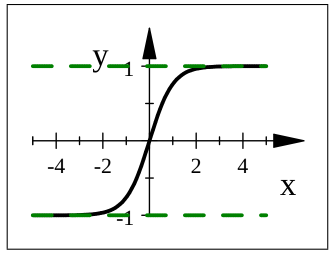
(a) **Seno Hiperbólico:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. O gráfico dessa função pode ser obtido pelo método chamado adição de coordenadas. Para usar esta técnica, esboçamos os gráficos das funções $\frac{1}{2}e^x$ e $-\frac{1}{2}e^{-x}$ (tracejados) e somamos as respectivas ordenadas.



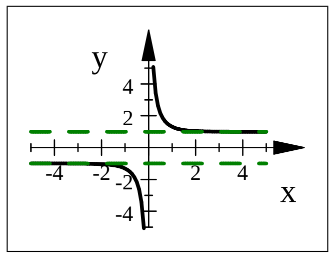
(b) **Cosseno Hiperbólico:** $f : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ definida por $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.



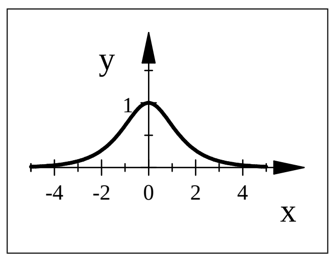
(c) **Tangente Hiperbólica:** $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ definida por $f(x)=\text{tgh}(x)=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.



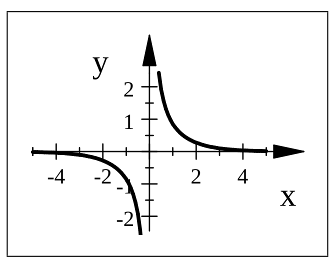
(d) **Cotangente Hiperbólica:** $f:\mathbb{R}^*\to[(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)]$ definida por $f(x)=\frac{1}{\text{tgh}(x)}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.



(e) **Secante Hiperbólica:** $f:\mathbb{R}\to(0,1]$ definida por $f(x)=\frac{1}{\cosh x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$.



(f) **Cossecante Hiperbólica:** $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ definida por $f(x)=\frac{1}{\sinh x}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$.



Observação: Muitas identidades análogas às conhecidas para funções trigonométricas são válidas para as funções hiperbólicas. Algumas identidades das funções hiperbólicas estão abaixo relacionadas:

i. $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$;

ii. $\sinh x+\cosh x=e^x$;

iii. $\cosh x-\sinh x=e^{-x}$;

iv. $1-\text{tgh}^2(x)=\text{sech}^2(x)$;

v. $\text{cotgh}^2(x)-1=\text{cossech}^2(x)$;

vi. $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$;

vii. $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$;

viii. $\sinh(2x)=2\sinh x\cosh x$;

ix. $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$;

x. $\sinh^2 x = \dfrac{\cosh(2x) - 1}{2}$;

xi. $\cosh^2 x = \dfrac{\cosh(2x) + 1}{2}$.

Exemplo 22: Considere as funções $f_1(x) = 1 - x$, $f_2(x) = |-x^2 + 5x - 4|$, $f_3(x) =$senh(x) e $f_4(x) = \ln x$. Determine o domínio da função F, sendo que: $F(x) = f_4[f_3(f_1(x) + f_2(x))]$.

Solução:

Sabemos que F é definida por $F(x) = f_4[f_3(f_1(x) + f_2(x))]$. Então:

$F(x) = f_4[f_3(1 - x + |-x^2 + 5x - 4|)] = f_4[\text{senh}(1 - x + |-x^2 + 5x - 4|)]$

$\Rightarrow \quad F(x) = \ln(\text{senh}(1 - x + |-x^2 + 5x - 4|))$.

Domínio de F : $DF = \{x \in \mathbb{R} : \text{senh}(1 - x + |-x^2 + 5x - 4|) > 0\}$.

Sabemos que: senh$(u) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad u > 0$

Dessa forma:

senh$(1 - x + |-x^2 + 5x - 4|) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x + |-x^2 + 5x - 4| > 0$

Pela definição de módulo, temos que:

$$|-x^2 + 5x - 4| = \begin{cases} -x^2 + 5x - 4, \text{ se } 1 \le x \le 4 \\ x^2 - 5x + 4, \text{ se } x < 1 \text{ ou } x > 4 \end{cases}$$

- Para $x \in [1, 4]$, temos que:

  $1 - x - x^2 + 5x - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 + 4x - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (1, 3)$ Solução parcial 1: $S_1 = [1, 4] \cap (1, 3) \quad \Rightarrow \quad S_1 = (1, 3)$

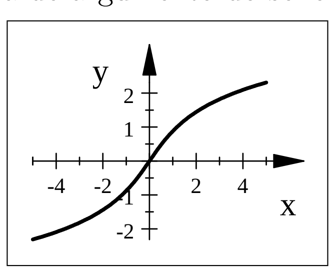
- Para $x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$, temos que:

  $1 - x + x^2 - 5x + 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6x + 5 > 0$, Solution is: $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$
  Solução parcial 2: $S_2 = (-\infty, 1) \cup (5, \infty)$

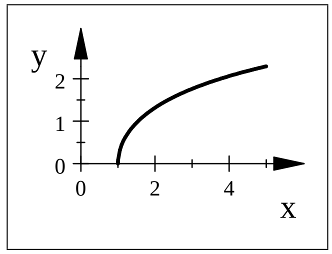
  Conclusão: $DF = S_1 \cup S_2 = ((-\infty, 3) - \{1\}) \cup (5, \infty)$.

7. **Funções Hiperbólicas Inversas:**

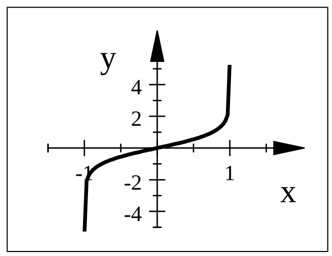
   (a) **Inversa do Seno Hiperbólico:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arg\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, chamada de argumento do seno hiperbólico.



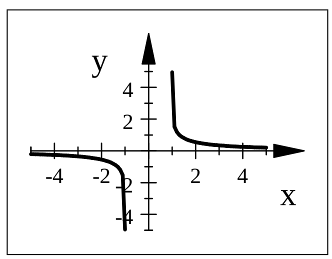
(b) **Inversa do Cosseno Hiperbólico:** $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $f(x) = \arg\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, chamada de argumento do cosseno hiperbólico.



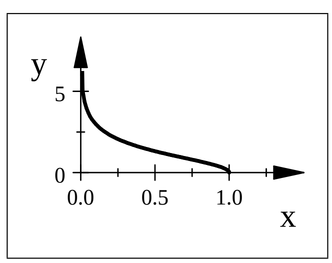
(c) **Inversa da Tangente Hiperbólica:** $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{argtgh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$, chamada de argumento da tangente hiperbólica.



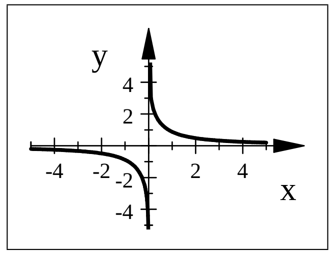
(d) **Inversa da Cotangente Hiperbólica:** $f : (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}^*$ definida por $f(x) = \text{argcotgh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.



(e) **Inversa da Secante Hiperbólica:** $f : (0, 1] \to \mathbb{R}^*$ definida por $f(x) = \text{argsech}(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$.



(f) **Inversa da Cossecante Hiperbólica:** $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ definida por $f(x) = \text{argcossech}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$.



Exemplo 23: Mostrar que o $\arg\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.
Solução: Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $y = \arg\sinh x$
Como a função argumento do seno hiperbólico é a função inversa do seno, temos que:
$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \Rightarrow \quad e^y - 2x - e^{-y} = 0.$
Multiplicando ambos os lados por e^y, temos que:
$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$
Resolvendo essa equação quadrática, segue que:
$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$
Como $e^y > 0$, $\forall\ y$, a solução envolvendo o sinal negativo deve ser descartada. Portanto,
$e^y = x + \sqrt{x^2+1}.$
Aplicando o neperiano em ambos os membros, obtemos que:
$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \Rightarrow \quad \arg\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$

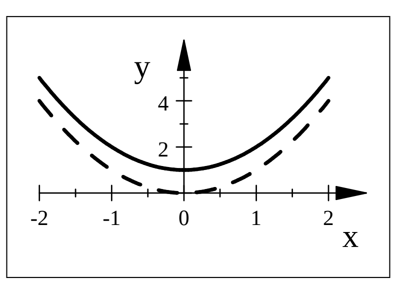
1.6 Translações

Exemplo 23: Seja f a função definida por $f(x) = x^2$. A partir do gráfico de f construa o gráfico das funções: $g_1(x) = x^2 + 1$, $g_2(x) = x^2 + 4x + 4$ e $g_3(x) = x^2 + 4x + 5$.

Solução:
Reescrevendo as funções, temos que:

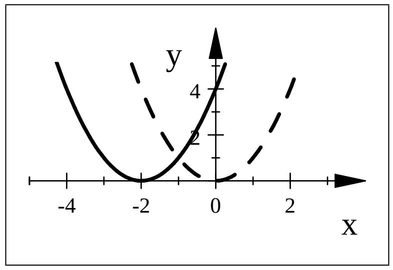
- $g_1(x) = f(x) + 1.$

Observe que para cada valor de x a imagem de g_1 é igual a uma unidade a mais que a imagem da função f para o mesmo valor de x. Note ainda que o gráfico de f é uma parábola com vértice no ponto $(0,0)$ e o gráfico de g também é uma parábola, mas com o vértice no ponto $(0,1)$.



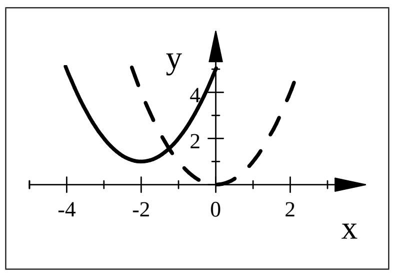
- $g_2(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = f(x+2)$.

Neste caso, note que a variável x de g_2 corresponde a 2 unidades a mais que de f. Graficamente, g_2 é uma parábola com vértice no ponto $(0,-2)$.



- $g_3(x) = x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x+2)^2 + 1 = f(x+2) + 1$.

  Reescrevendo a função g_3 e comparando com o que já foi estudado sobre as funções g_2 e g_3, podemos concluir que o vértice da parábola g_3 é o ponto $(-2,1)$.



Generalizando, a partir do gráfico de uma função f para construir o gráfico de uma função:

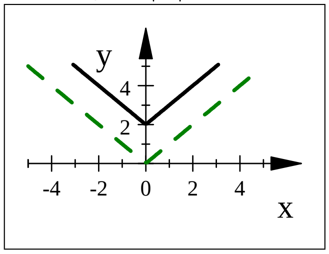
- $g(x) = f(x) + k$ basta deslocar k unidades para cima, se $k > 0$, ou para baixo, se $k < 0$, o gráfico de f . Dizemos que o gráfico de g é uma *translação vertical* do gráfico de f;

- $g(x) = f(x-c)$ basta deslocar c unidades para a direita, se $k > 0$, ou para a esquerda , se $k < 0$, o gráfico de f . Dizemos que o gráfico de g é uma *translação horizontal* do gráfico de f;

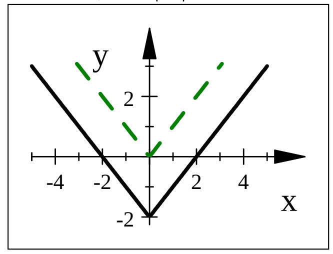
- $g(x) = f(x-c) + k$ basta deslocar horintalmente c unidades (para a direita ou esquerda) e verticalmente k unidades (para cima ou para baixo) o gráfico da função f.

Exemplo 24: Se $y = f(x) = |x|$, então:

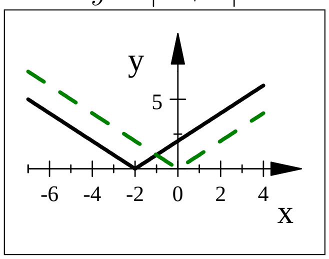
$y = |x| + 2$



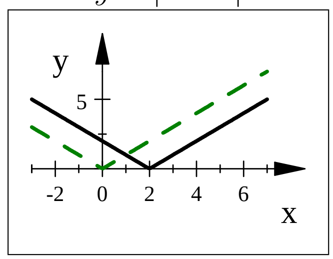
$y = |x| - 2$



$y = |x+2|$

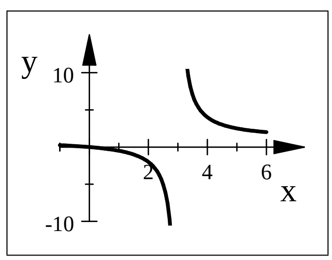


$y = |x-2|$



Exemplo 25: Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-x-6}$.

__**Solução:**__ Note que, $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-x-6} = \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{x}{x-3} = \frac{x-3+3}{x-3} = 1 + 3\frac{1}{x-3}$. Podemos esboçar o gráfico dessa função, observando que $f(x) = 1 + 3g(x-3)$, onde $g(x) = \frac{1}{x}$. O gráfico de f é obtido através de uma translação paralela ao eixo x, do gráfico de g em três unidades direção positiva, e ainda, há uma translação de uma unidade, na direção positiva, paralela ao eixo y. Assim,



1.7 Exercícios*

1. Determine o conjunto solução das inequações:

   (a) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}(6x-9) > \dfrac{x-2}{2}$

   (b) $\dfrac{1}{x+7} > -1$

   (c) $\dfrac{2}{3-x} < x$

   (d) $\dfrac{1}{3x+2} \leq \dfrac{3}{x-1}$

   (e) $\dfrac{2x+1}{2x} > \dfrac{x-3}{x+2}$

   (f) $\dfrac{3-x}{\sqrt{x-1}} \leq 1$

   (g) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x} > 0$

   (h) $0 < \dfrac{x-1}{2x-1} < 2$

   (i) $\dfrac{x+1}{2-x} - \dfrac{x}{3+x} < 0$

2. Obtenha o conjunto solução das equações modulares:

   (a) $|7x| = 4 - x$

   (b) $x + 1 - |2x-4| + |5-x| = 0$

   (c) $\left|x - \frac{1}{x}\right| = \frac{8}{3}$

3. Determine o conjunto solução das inequações:

   (a) $\dfrac{1}{|x+1|\,|x+3|} \geq \frac{1}{5}$

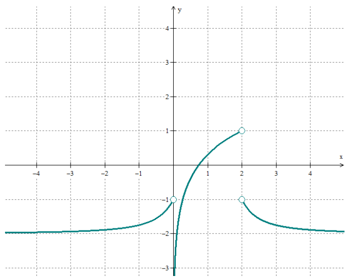
   (b) $1 + |x| < \dfrac{2}{|x|}$

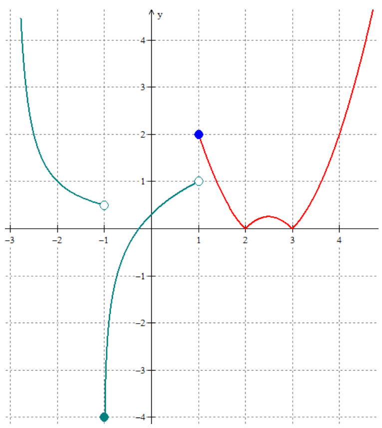
   (c) $\dfrac{|x|}{x-1} > \dfrac{2-x}{|x|}$

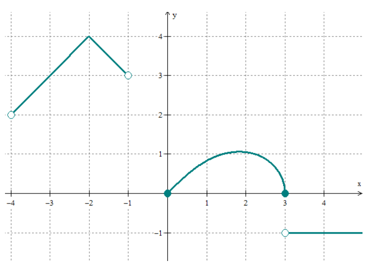
   (d) $\left|\dfrac{1-x}{x}\right| \geq \dfrac{2-x}{|x-2|}$

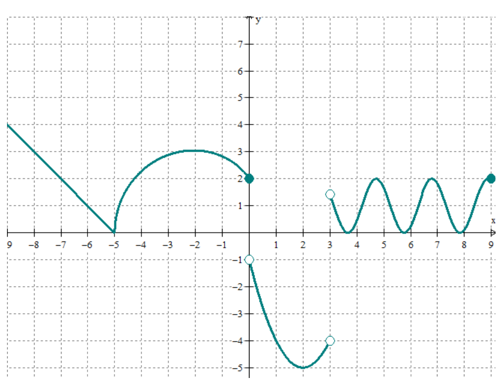
* *Agradeço a monitora Bruna Tizoni Francisco por ter contribuído na reestruturação da lista de exercícios.*

4. Determine o domínio e a imagem das funções abaixo ilustradas.

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

5. Represente geometricamente as funções abaixo. A seguir, determine o domínio e a imagem.

(a) $f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{l} 3,\text{ se } x\leq -1\\ -2x,\text{ se } -1<x\leq 2\\ x-6,\text{ se } x>2\end{array}\right.$

(b) $f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c} -2+\left|x-1\right|,\text{ se } x\leq 3\\ 1,\text{ se } 3<x<5\\ 2x-5,\text{ se } 5\leq x<8\end{array}\right.$

(c) $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } -6 \leq x \leq -2 \\ \sqrt{x+2}, \text{ se } -2 < x < 0 \\ 3 - \sqrt{x}, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

6. Em cada um dos itens abaixo use translação para representar geometricamente cada uma das funções dadas.

   (a) $f(x) = -2x^2$;
      i. $g_1(x) = f(x) + 3$; ii. $g_2(x) = f(x+2)$; iii. $g_3(x) = f(x+2) + 3$;

   (b) $f(x) = -\sqrt{x}$;
      i. $g_1(x) = f(x) + 4$; ii. $g_2(x) = f(x-1)$; iii. $g_3(x) = f(x-1) + 4$;

   (c) $f(x) = x^3$
      i. $g_1(x) = f(x) - 2$; ii. $g_2(x) = f(x+1)$; iii. $g_3(x) = f(x+1) - 2$;

   (d) $f(x) = -\frac{1}{x}$
      i. $g_1(x) = f(x) - 3$; ii. $g_2(x) = f(x-2)$; iii. $g_3(x) = f(x-2) - 3$;

   (e) $f(x) = |x|$
      i. $g_1(x) = f(x) + 5$; ii. $g_2(x) = f(x+3)$; iii. $g_3(x) = f(x+3) + 5$.

7. Use translação para representar geometricamente as funções:

   (a) $y = -x^2 - 10x - 22$;
   (b) $y = 3x^2 + 9x$;
   (c) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$;
   (d) $f(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$.

8. Determine a função $f(x)$ de primeiro grau que satisfaz $f(1) = 1$ e $f(-1) = -7$.

9. Determine o domínio e construa o gráfico das seguintes funções. A seguir identifique como estão relacionados os gráficos das funções do mesmo tipo.

   (a) $f(x) = 4 - x^2$
   (b) $g(x) = -4 + x^2$
   (c) $h(x) = 4 - (x-1)^2$
   (d) $p(x) = 6 - (x-1)^2$
   (e) $f(x) = x^3$
   (f) $g(x) = (x+1)^3$
   (g) $h(x) = (x+1)^3 + 1$
   (h) $p(x) = \dfrac{x^3}{4}$
   (i) $q(x) = 2x^3$
   (j) $f(x) = \sqrt{x}$
   (k) $g(x) = \sqrt{x} + 1$
   (l) $h(x) = \sqrt{x+1}$
   (m) $f(x) = \log x$
   (n) $g(x) = \log(x-2)$
   (o) $h(x) = \log x - 2$
   (p) $p(x) = \ln x$
   (q) $f(x) = 2^x$
   (r) $g(x) = -2^x$
   (s) $h(x) = 2^{-x}$
   (t) $p(x) = 2^x + 1$
   (u) $q(x) = e^x$
   (v) $f(x) = x^{-1}$
   (w) $h(x) = x^{-2}$
   (x) $p(x) = x^{-\frac{1}{2}}$
   (y) $f(x) = \sin(2x)$
   (z) $h(x) = 2\sin x$

10. Seja $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$. Determine os valores indicados sendo a um número real.

(a) $f(1/a)$

(b) $1/f(a)$

(c) $f(a^2)$

(d) $[f(a)]^2$

(e) $f(\sqrt{a})$

(f) $\sqrt{f(a)}$

(g) $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, com $h \neq 0$

11. Se $f(x) = 2^x$, mostre que $f(x+3) - f(x-1) = \frac{15}{2} f(x)$.

12. Se $f(x) = e^x$, verifique que $f(x)f(y) = f(x+y)$.

13. Se $f(x) = \ln x$, verifique que:

(a) $f(x) + f(y) = f(xy)$ (b) $f(x^2) = 2f(x)$ (c) $f(\dfrac{u}{v}) + f(\dfrac{v}{u}) = 0$

14. Em cada caso, escreva a função pedida na forma mais simples e dê o domínio da função resultante

(a) Se $f(x) = \dfrac{1-x}{x+1}$, então

i. $f\left(\frac{1}{1+x}\right)$;

ii. $(f \circ f)(x)$.

(b) Se $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2+1}$, então

i. $g(x) = 2f(x) - f(2x)$

ii. $g(x) = \frac{1}{2} f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)$

iii. $f(-x-1)$

iv. $f\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$

(c) Se $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, então encontre $h(x) = f(x+h) - f(x)$.

(d) Se $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$, então obtenha $g(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

(e) Se $f(\theta) = \frac{\theta-1}{\theta+1}$, então $g(\theta) = \dfrac{f(\theta)-f(-\theta)}{1+f(\theta)f(-\theta)}$.

(f) Se $f(x) = \sin^2(2x)$, então $f\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

(g) Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^3$, então

i. $(f \circ g)(x)$

ii. $(g \circ f)(x)$

15. Use a definição de módulo para reescrever as funções abaixo e a seguir esboce seu gráfico.

(a) $f(x) = |x| + |2x-1| + |x-1|$

(b) $f(x) = |9 - x^2|$

16. Sejam $f(x) = 2^x$ e $g(x) = f(2x+1)$, determine uma relação entre a e b para que $g(a) = g(b)$.

17. Considere as funções $f(x) = x+2$, $g(x) = x+3$, $h(x) = |x|$ e $F(x) = f(x)\,g(x)$. Encontre todos os valores de $x \in \Re$ que satisfazem a inequação

$$(h \circ F)(x) < (h(x))^2 - 6.$$

18. Determine o domínio das funções:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{|x|}{x+1}}$

(b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x|}{x+1}}$

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{5x-2}{x+1}}$

(d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x-2}}{\sqrt{x+1}}$

(e) $f(x) = \sqrt{x - |x^2 + x - 2|}$

(f) $f(x) = \sqrt{2 + \frac{1}{|x|} - x}$

(g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{x}{|9-x^2|}}$

19. Determine quais das funções abaixo, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, são injetoras e quais são sobrejetoras. Justifique suas respostas.

(a) $y = x + 2$

(b) $y = x^2 - 5x + 6$

(c) $y = 2^x$

(d) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

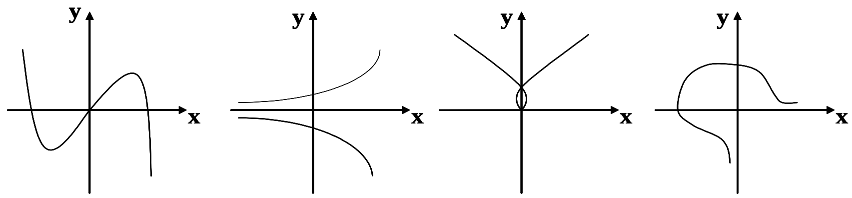
20. Sejam f e g duas funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ assim definidas:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq 0 \\ -x+1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \quad g(x) = 3x - 2.$$

Determine $f \circ g$ e $g \circ f$.

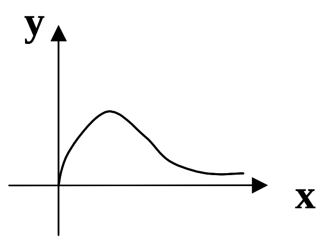
21. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 0 \\ 1-2x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$. Determine $f \circ f$.

22. Determine, nas figuras abaixo, se o gráfico é simétrico em relação ao eixo x, ao eixo y, à origem ou nenhum dos procedentes.



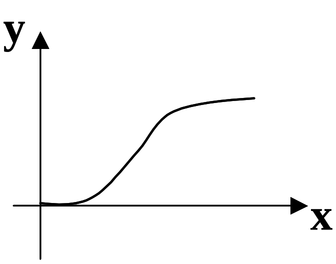
23. A figura em anexo mostra a parte de um gráfico. Complete o gráfico de forma que ele seja simétrico com relação:

(a) ao eixo x; (b) ao eixo y; (c) à origem.

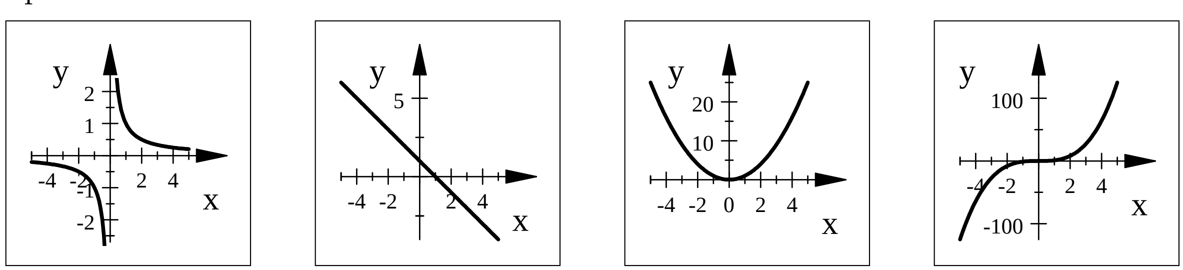


24. A figura em anexo mostra a parte de um gráfico. Complete os gráficos supondo que:

(a) f é uma função par; (b) f é uma função ímpar.



25. Classifique as funções cujos gráficos estão na figura abaixo em anexo, como pares, ímpares ou nenhum dos dois casos.



26. Determine quais das funções abaixo são pares ou ímpares.

(a) $f(x) = 5x^3 - 2x$; (b) $f(s) = s^2 + 2s + 2$;

(c) $f(t) = |t|$; (d) $f(v) = \frac{a^v + a^{-v}}{2}$;

(e) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$; (f) $f(u) = \ln \frac{1+u}{1-u}$.

27. Mostre que se f e g são funções ímpares, então $(f+g)$ e $(f-g)$ também são funções ímpares.

28. Mostre que se f e g são funções ímpares, então $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ são funções pares.

29. Mostre que a função $\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ é par e que a função $\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ é ímpar.

30. Prove que qualquer função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ pode ser expressa como a soma de uma função par com uma função ímpar.

31. Considere as funções $g(x)=x^2-1+|x-1|$ e $h(x)=\frac{1}{x-2}$.

    (a) A função g é uma função par, ímpar ou nem par nem ímpar? Justifique com argumentos consistentes.

    (b) Determine o conjunto solução da inequação $g(x-1)\,h(x)<h^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

32. Determine o domínio das funções:

    (a) $f(x)=\sqrt{\log_a(4-x)}$

        i. Para $a>1$;

        ii. Para $0<a<1$.

    (b) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)$

    (c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\ln(x^2+1)}}$

    (d) $f(x)=\dfrac{\ln(e^x-1)+3}{x^x}$

    (e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{e^{5x-1}-1}}{\ln(1-|2x-5|)}$

    (f) $f(x)=\sqrt{\ln\left(2+|x|-\dfrac{1}{x-1}\right)}$

33. O acidente nuclear que ocorreu em Goiânia, no ano de 1987, começou quando uma cápsula de chumbo contendo por volta de 20 gramas de cloreto de césio-137 (CsCl) foi removida de um aparelho de radioterapia abandonado.

    Suponha que a quantidade remanescente de uma substância radiativa é obtida pela função $f(t)=ke^{ct}$, onde k e c são constantes a serem determinadas, e é um número irracional conhecido como número de Euler e t é o tempo. Sabendo que a meia-vida do CsCl, o tempo necessário para que sua atividade radiativa caia pela metade, é de trinta anos, explicitando todo o seu raciocínio, determine:

    (a) a função que representa a quantidade remanescente de CsCl em Goiânia;

    (b) quanto tempo levará para que 95% da quantidade de CsCl que causou o acidente em Goiânia tenha se desintegrado.

34. O crescimento de uma cultura de bactérias pode ser obtido pela função $f(t) = ke^{ct}$, onde k e c são constantes a serem determinadas, e é um número irracional conhecido como número de Euler e t é o tempo. Sabendo que inicialmente haviam B_0 bactérias e que após uma hora o número de bactérias aumentou em 50%, explicite seu raciocínio para determinar:

    (a) a função que representa o crescimento desta cultura de bactérias;

    (b) quanto tempo levará para que o número de bactérias seja cem vezes maior que a quantidade inicial.

35. Pela lei do resfriamento de Newton, a temperatura de um corpo em um determinado instante de tempo t é descrita pela função $f(t) = t_m + ce^{kt}$, onde t_m é a temperatura do meio, e é um número irracional conhecido como número de Euler, c e k são constantes a serem determinadas.

    Suponha que, após ter sido coado, a temperatura do café é de $90°C$, após 1 minuto a temperatura do café é de $80°C$ e que este café será mantido em um ambiente climatizado cuja temperatura é constante e igual a $20°C$. Explicitando todos os seus cálculos, resolva os itens dados a seguir.

    (a) Determine a função que representa o resfriamento do café;

    (b) Sabe-se que para um café ser ingerido sem queimar a boca de uma pessoa, é necessário que a temperatura do mesmo seja de no máximo $60°C$. Determine quanto tempo levará para que este café possa ser ingerido.

36. Nos itens abaixo determine a função inversa e construa o gráfico de f e f^{-1}.

    (a) $f(x) = \sqrt{x-1},\ \ x \geq 1$

    (b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$

    (c) $f(x) = x^2 + 2x - 1,\ \ x \leq -1$

37. Seja $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sqrt{x+1}$. Classifique a função $h(x) = g^{-1}(x) \cdot (g \circ f)(x)$ como função par ou ímpar.

38. Sejam f e g as funções definidas por $f(x) = \dfrac{3x-3}{x}$ e $g(x) = \dfrac{x}{x-3} - 1$.

    (a) Verifique se a função $h(x) = (g \circ f)(x)$ é par ou ímpar.

    (b) Determine todos os valores reais de x que satisfazem a inequação

    $$|1 + g(x)| \geq \frac{f(x)}{3}.$$

39. Seja g a função definida por $g(x) = \ln(\sqrt{2-2x})$. Determine a inversa da função $g(x)$ e o domínio e imagem desta.

40. Considere a função definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{se } x > 2 \\ 1, & \text{se } x = 2 \\ \frac{1}{x-2}, & \text{se } x < 2 \end{cases}$.

    (a) Construa o gráfico de $f(x)$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é bijetora? Justifique.

(c) Determine $f^{-1}(x)$, restringindo domínio e contradomínio se necessário, e construa o seu gráfico.

41. Considere a função definida por $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & \text{se } x \geq 0 \\ -e^x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

(a) Construa o gráfico de $f(x)$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é bijetora? Justifique.

(c) Determine $f^{-1}(x)$, restringindo domínio e contradomínio se necessário, e construa o seu gráfico.

42. Seja $f(x) = 2\cos(x)$. Determine:

(a) o período de $f(x)$.

(b) $f^{-1}(x)$ com restrição de domínio e imagem.

(c) o gráfico de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$.

43. Seja $f(x) = \sin(2x)$. Determine:

(a) o período de $f(x)$.

(b) $f^{-1}(x)$ com restrição de domínio e imagem.

(c) o gráfico de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$.

44. Considere as funções f e $f \circ g$ definidas por $f(x) = \ln(x^3) - 2$ e $(f \circ g)(x) = \sqrt{x+1}$. Determine as funções g e g^{-1}. A seguir determine o domínio e a imagem de g^{-1}.

45. Seja $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(a) Prove que se $f(a) = f(b)$, então $a = b$.

(b) Prove que dado $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

(c) Determine $D(f^{-1})$, $Im(f^{-1})$ e a lei de f^{-1}.

Respostas:

1. -

   (a) $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$
   (b) $(-7, \infty) \cup (-\infty, -8)$
   (c) $(1, 2) \cup (3, \infty)$
   (d) $\left[-\frac{7}{8}, -\frac{2}{3}\right) \cup (1, \infty)$
   (e) $\left(-2, -\frac{2}{11}\right) \cup (0, \infty)$
   (f) $[2, \infty)$
   (g) $(-\infty, 0) \cup (1, 3) \cup (4, \infty)$
   (h) $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, \infty)$
   (i) $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$

2. -

   (a) $\left\{-0,67; \frac{1}{2}\right\}$
   (b) $\{-1\} \cup [5, +\infty)$
   (c) $\left\{-3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 3\right\}$

3. -

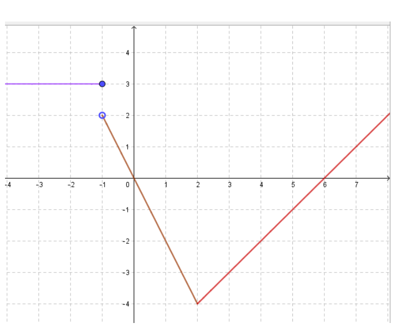
   (a) $\left[-\sqrt{6} - 2, \sqrt{6} - 2\right) - \{-3, -1\}$
   (b) $(0, 1) \cup (-1, 0)$
   (c) $(1, \infty)$
   (d) $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup [2, \infty)$

4. -

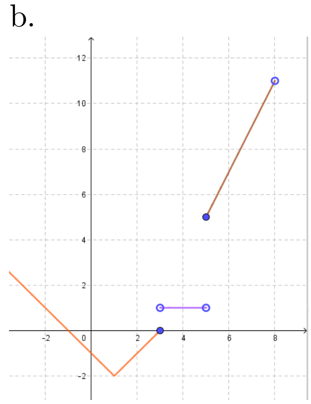
   (a) $D(f) = \mathbb{R} - \{0, 2\}$; $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 1)$
   (b) $D(f) = \mathbb{R}$; $\mathrm{Im}(f) = [-4, +\infty)$
   (c) $D(f) = (-4, -1) \cup [0, +\infty)$; $\mathrm{Im}(f) = \{-1\} \cup [0, 1] \cup (2, 4]$
   (d) $D(f) = (-\infty, 9]$; $\mathrm{Im}(f) = [-5, -1) \cup [0, +\infty)$

5. -

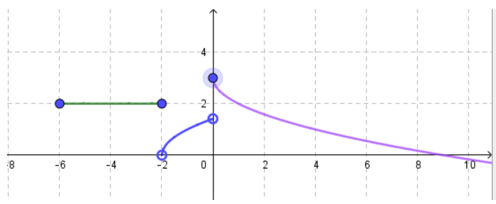
a.



b.



c.



6. Use algum software gráfico, como o GeoGebra, para verificar sua resposta.

7. -

   (a) Translação horizontal de 5 unidades para a esquerda e translação vertical de 3 unidades para cima do gráfico de $f(x) = -x^2$.

   (b) Translação horizontal de $\frac{3}{2}$ unidades para a esquerda e translação vertical de $\frac{27}{4}$ unidades para baixo do gráfico de $f(x) = 3x^2$.

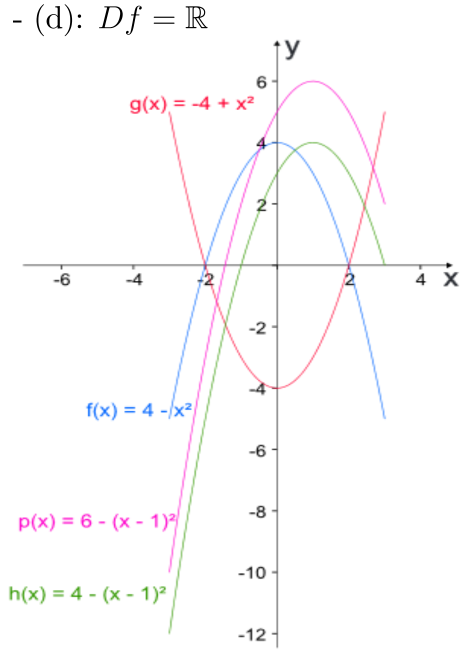
   (c) Translação horizontal de 1 unidade para a esquerda e translação vertical de 1 unidades para cima do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.

   (d) Translação horizontal de 1 unidade para a direita e translação vertical de 1 unidade para baixo do gráfico de $f(x) = -\frac{3}{x}$.

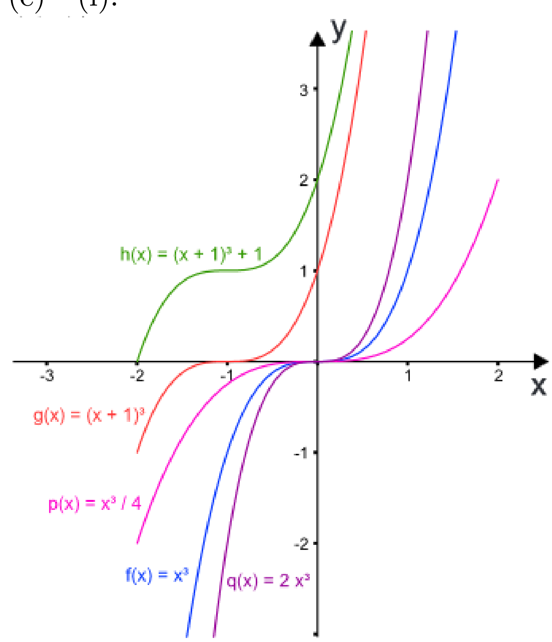
8. $f(x) = 4x - 3$

9. Respostas em grupo.

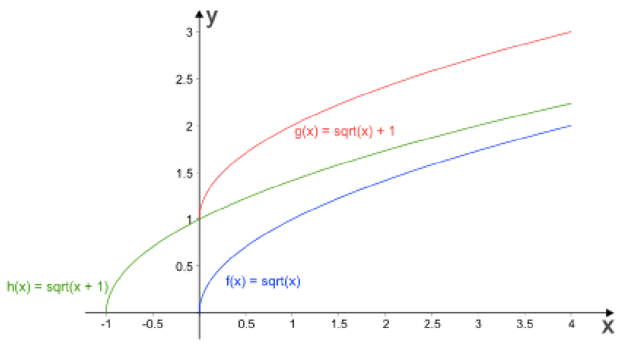
(a) - (d): $Df = \mathbb{R}$



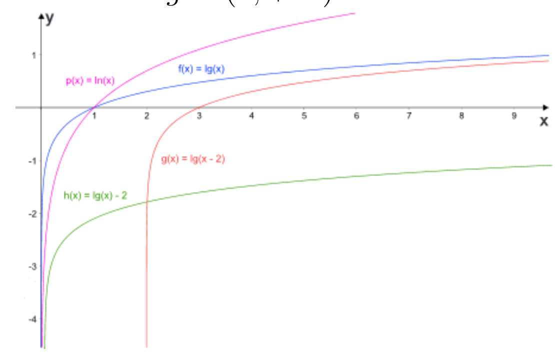
(e) - (i):



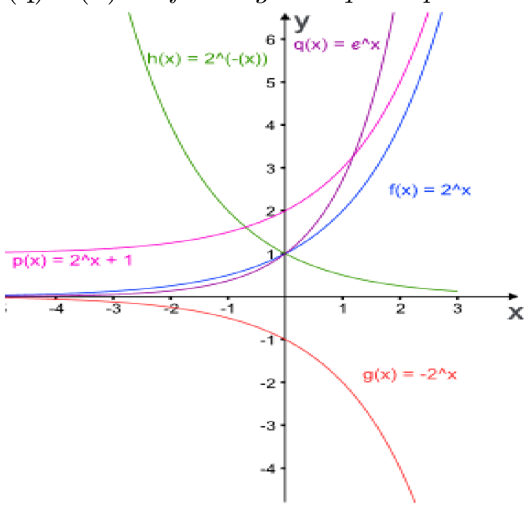
(j) - (l): $Df = Dg = [0, +\infty)$; $Dh = [-1, +\infty)$



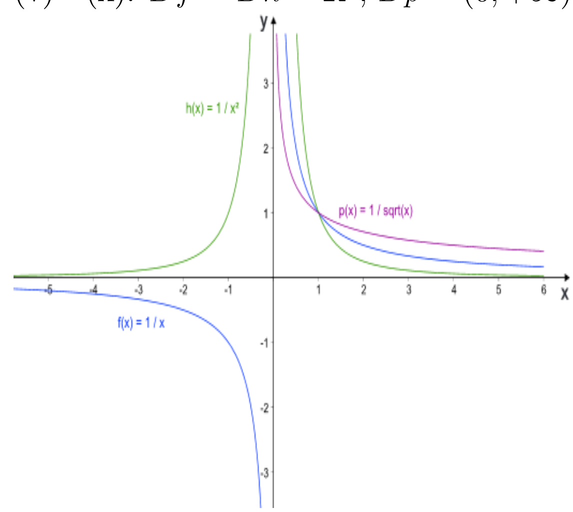
De (m)-(p): $Df = Dh = Dp = (0, +\infty)$; $Dg = (2, +\infty)$



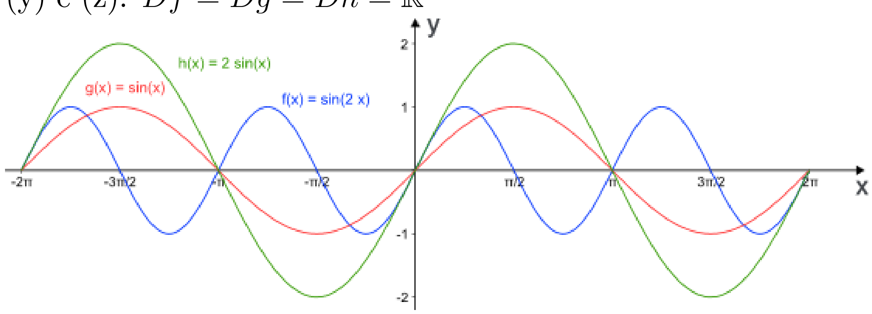
(q) - (u): $Df = Dg = Dq = Dp = Dh = \mathbb{R}$



(v) - (x): $Df = Dh = \mathbb{R}^*$; $Dp = (0, +\infty)$



(y) e (z): $Df = Dg = Dh = \mathbb{R}$



10. .

(a) $\dfrac{a^2}{1+4a^2}$

(b) $a^2 + 4$

(c) $\dfrac{1}{a^4+4}$

(d) $\dfrac{1}{(a^2+4)^2}$

(e) $\dfrac{1}{a+4}$

(f) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+4}}$

(g) $-\dfrac{2a+h}{[(a+h)^2+4](a^2+4)}$

11. -

12. Igualdade verdadeira-

13. a) Verdadeira; b) Verdadeira; c) Verdadeira.

14. -

(a) (i) $\frac{x}{2+x}$; (ii) x

(b) (i) $-\frac{4x^4-9x^2-1}{(x^2+1)(4x^2+1)}$; (ii) $\frac{4x^4-9x^2-4}{2(x^2+1)^2}$; (iii) $-\frac{x(2+x)}{x^2+2x+2}$; (iv) $-\frac{2n}{n^2+1}$

(c) $4xh+2h^2-3h$

(d) $8a+4h-3$

(e) $-\frac{2\theta}{\theta^2-1}$

(f) $\operatorname{sen}^2(2\alpha)$

(g) (i) $3\ln x$; (ii) $\ln^3 x$

15. -

(a) $\dfrac{a^2}{1+4a^2}$

(b) a^2+4

(c) $\dfrac{1}{a^4+4}$

(d) $\dfrac{1}{(a^2+4)^2}$

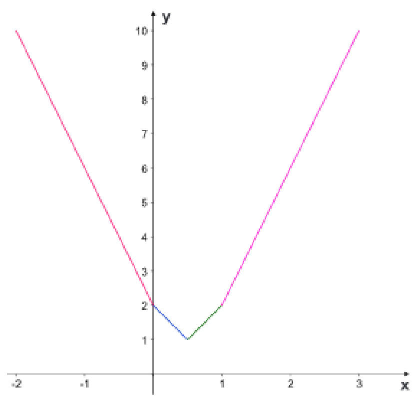
(e) $\dfrac{1}{a+4}$

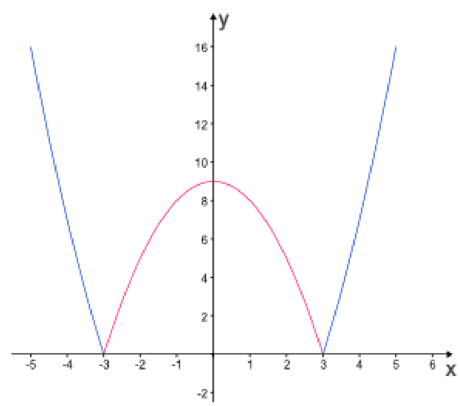
(f) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+4}}$

(g) $-\dfrac{2a+h}{[(a+h)^2+4](a^2+4)}$.

(h) $f(x)=\begin{cases} -4x+2, & \text{se } x<0 \\ -2x+2, & \text{se } 0\le x<\frac{1}{2} \\ 2x, & \text{se } \frac{1}{2}\le x<1 \\ 4x-2, & \text{se } x\ge 1 \end{cases}$

(i) $f(x)=\begin{cases} 9-x^2, & \text{se } x\in[-3,3] \\ x^2-9, & \text{se } x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty) \end{cases}$





16. $a=b$

17. $|x^2+5x+6|<x^2-6$, Solution is: $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)$

18. -

(a) $\mathbb{R}-\{-1\}$

(b) $(-1,+\infty)$

(c) $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{2}{5},\infty\right)$

(d) $\left(\frac{2}{5},\infty\right)$

(e) $\left[\sqrt{3}-1,\sqrt{2}\right]$

(f) $(-\infty,0)\cup\left(0,\sqrt{2}+1\right]$

(g) $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[3,\infty)$

(h) $S = (-\infty,\ -8) \cup (-7,\ +\infty)$
(i) $S = (-2,\ -\frac{2}{11}) \cup (0,\ +\infty)$
(j) $S = [2,\ +\infty)$
(k) $S = (0,\ 1)$
(l) $S = (-\infty,\ \frac{1}{3}) \cup (1,\ +\infty)$
(m) $S = (-\infty,\ 0) \cup (1, 3) \cup (4,\ +\infty)$
(n) $S = (-\infty,\ \frac{2}{3}] \cup [10,\ +\infty)$
(o) $S = [\frac{9}{11},\ \frac{5}{3}]$
(p) $S = (-1,\ 0)$
(q) $S = (-4,\ -3] \cup (3,\ 4)$
(r) $S = (1,\ +\infty)$
(s) $S = [0,\ \frac{3-\sqrt{5}}{2})$
(t) $S = (-\infty,\ +\infty) - \{-3,\ -1\}$

19. .

(a) Bijetora
(b) Nem injetora nem sobrejetora
(c) Injetora
(d) Bijetora
(e) $\dfrac{a^2}{1+4a^2}$
(f) a^2+4
(g) $\dfrac{1}{a^4+4}$
(h) $\dfrac{1}{(a^2+4)^2}$
(i) $\dfrac{1}{a+4}$
(j) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+4}}$
(k) $-\dfrac{2a+h}{[(a+h)^2+4](a^2+4)}$

20. -

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 3x-1, & \text{se } x \geq \frac{2}{3} \\ -3x+3, & \text{se } x < \frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{e} \quad (g \circ f)(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{se } x \geq 0 \\ -3x+1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

21. $(f \circ f)(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x \leq -1 \\ -2x-1, & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ -1+4x, & \text{se } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2-2x, & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$.

22. origem; eixo x; eixo y; não há simetria..

23. -

24. -

25. a) ímpar; b) nem par nem ímpar; c) par; d) ímpar.

(a) $g(x) = \dfrac{x}{x+2}$ e $D_g = \mathbb{R} - \{-1,\ -2\}$ (b) $h(x) = x$ e $D_h = \mathbb{R} - \{-1\}$

26. -

a) ímpar b) nem par nem ímpar c) par
d) par e) nem par nem ímpar f) ímpar

(a) $h(x) = 3\ln x$ e $D_h = \mathbb{R}_+^*$ (b) $u(x) = \ln^3 x$ e $D_u = \mathbb{R}_+^*$

27. Use a definição.

28. Use a definição.

29. Use a definição.

30. Para provar o que foi solicitado, use o fato de que: $f\,(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ $+\dfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$.

31. -

   (a) Nem par nem ímpar

   (b) $x^2 - 2x + |x-2| < 5$, Solution is: $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{21} + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{29} + \frac{1}{2}\right)$

32. -

   (a) i) $D\,(f) = (-\infty, 3]\,;\quad$ ii) $D\,(f) = [3, 4)$

   (b) $D\,(f) = (-1, 0) \cup (1, \infty)$

   (c) $D\,(f) = \mathbb{R}^*$

   (d) $D\,(f) = (0, +\infty) - \{1\}$

   (e) $D\,(f) = (2, 3) - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

   (f) $D\,(f) = (-\infty, 1) \cup \left[\sqrt{2}, \infty\right)$

33. -

   (a) $f\,(t) = 20e^{-0{,}023105t}$;

   (b) Aproximadamente 130 anos.

34. .

   (a) $f\,(t) = B_0 e^{-0{,}40547t}$

   (b) Aproximadamente 11 horas e 20 minutos.

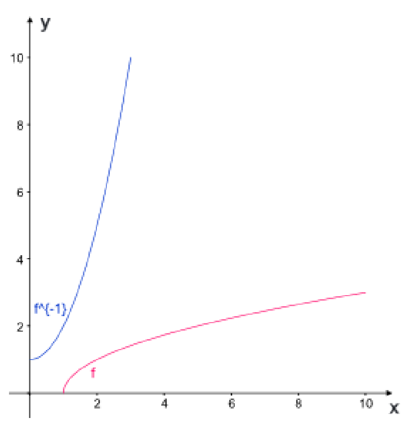
35. -

   (a) $f\,(t) = 20 + 70e^{-0.154\,15t}$

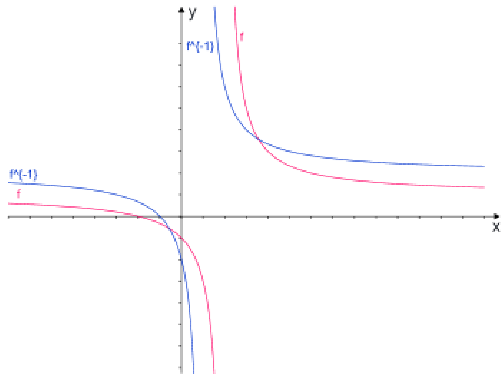
   (b) Aproximadamente 3 minutos e 36 segundos.

36. .

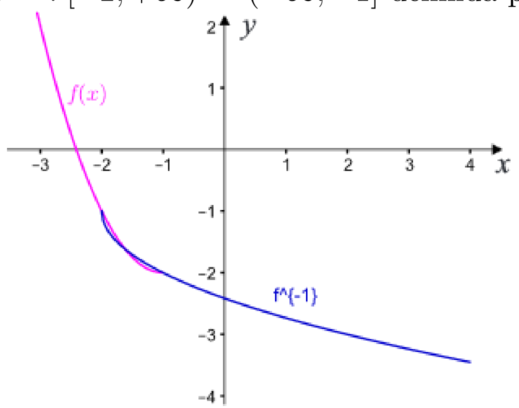
   (a) $f^{-1} : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ definida por $f^{-1}(x) = x^2 + 1$



(b) $f^{-1}: \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{2\}$ definida por $f^{-1}(x) = \frac{2(x+1)}{x-1}$



(c) $f^{-1}: [-2, +\infty) \to (-\infty, -1]$ definida por $f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{x+2}$



37. h é uma função par.

38. -

    (a) h é uma função ímpar.

    (b) $S = (0,\ +\infty) - \{3\}$

39. $g^{-1}(x) = \dfrac{2 - e^{2x}}{2}$, $D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$ e $Im(g^{-1}) = (-\infty,\ 1)$.

40. Temos que f é injetora, porém não é sobrejetora (Justifique!),

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3}, & \text{se } x > 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \\ \frac{1}{x} + 2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

41. Temos que f é injetora, porém não é sobrejetora (Justifique!),

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} e^x - 1, & \text{se } x \geq 0 \\ \ln(-x), & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$$

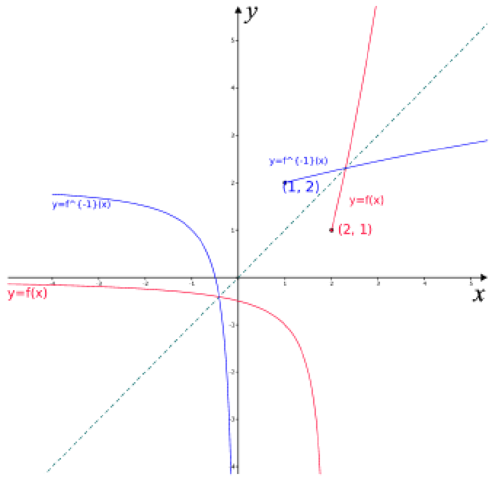


Figura 1: Exercício 40

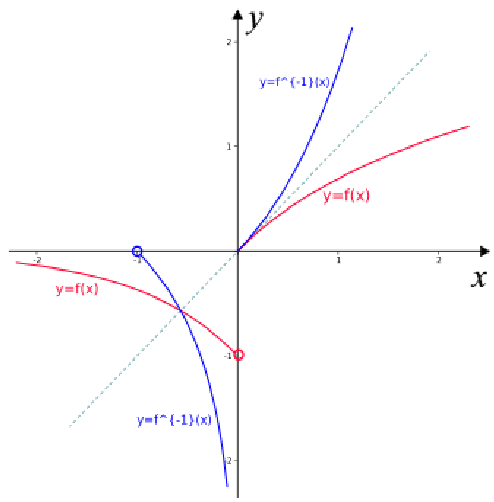


Figura 2: Exercício 41

42. $T = 2\pi,\ \ f^{-1} : [-2,\ 2] \to [0,\ \pi]$ dada por $f^{-1}(x) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right).$

43. $T = \pi,\ \ f^{-1} : [-1,\ 1] \to \left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$ dada por $f^{-1}(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{2}.$

44. $g(x) = e^{\frac{\sqrt{x+1}+2}{3}};\ \ g^{-1}(x) = (3\ln(x) - 2)^2 - 1;\ \ g^{-1} : [e^{\frac{2}{3}}, +\infty) \to [-1, +\infty).$

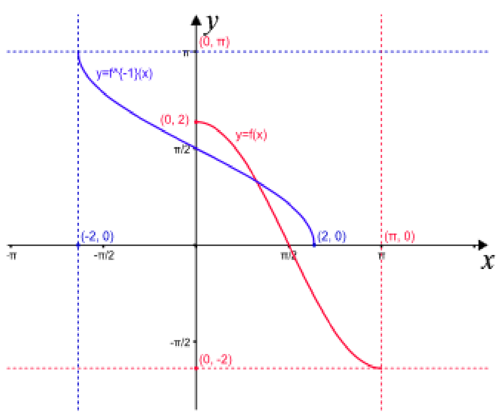


Figura 3: Exercício 42

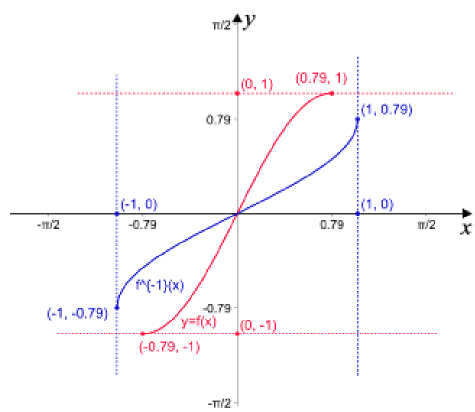


Figura 4: Exercício 43

45. $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$

Capítulo 2

Limite e Continuidade de uma Função

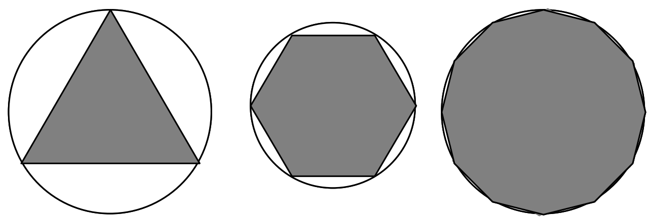
Objetivos

- Interpretar geometricamente a definição de limite;
- Provar os limites, pela definição;
- Determinar limites geometricamente (usando os limites bilaterais);
- Calcular limites através de propriedades;
- Encontrar limites utilizando os limites notáveis;
- Estudar a continuidade de uma função;
- Classificar as descontinuidades de uma função;
- Aplicar o teorema do Valor Intermediário.

2.1 Limite de uma Variável

A idéia de uma variável aproximando-se de um valor limite aparece de forma clara quando se procura estabelecer a fórmula que representa a área de um círculo.

Assim, considerando a área de um polígono regular de n lados inscrito no círculo, vemos que a medida que n cresce a área do polígono se aproxima da área do círculo.



Fazendo n crescer indefinidamente, a área do polígono tende a um *limite* e este é definido como a área do círculo. Neste exemplo, observamos geometricamente a ideia de limite.

Agora, vamos construir a noção de limite trabalhando com o conjunto dos $\mathbb{R}$. Analisemos os seguintes exemplos de sucessões numéricas:

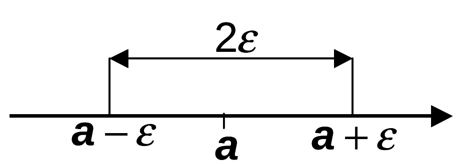
1. $\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$;
2. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots\right\}$;
3. $\{1, 0, -1, -2, -3, \cdots\}$;
4. $\left\{1, \frac{3}{2}, 3, \frac{5}{4}, 5, \frac{7}{6}, 7, \cdots\right\}$.

Observe que, na sucessão (1) os termos tornam-se cada vez maiores sem atingir um *limite*; em (2), os temos estão se aproximando de 1, ou seja, 1 é seu limite; em (3), os termos da sucessão decrescem indefinidamente sem atingir um limite; e, em (4), os termos estão oscilando, não havendo um limite.

Vamos estabelecer agora, a definição de limite de uma variável.

Definição 1: Seja x uma variável, diz-se que x tende a uma constante a, ou que o limite de x é a, se para um número qualquer positivo ε, por pequeno que seja, os valores sucessivos de x se aproximam de a de tal modo que a diferença $x - a$ em valor absoluto seja menor que ε , isto é, $|x - a| < \varepsilon$. Matematicamente, $\lim x = a$ ou $x \to a$. Lê-se: x *tende* para a.

Geometricamente, a desigualdade $|x - a| < \varepsilon$, estabelecida definição 1, significa que, qualquer $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ tem limite a, isto é, tende para a.



Exemplo 1: Se $a = 3$, então $x \in (3-\varepsilon, 3+\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad 3-\varepsilon < x < 3+\varepsilon \quad \Rightarrow$ $|x-3| < \varepsilon$.

Se $\varepsilon = 0,001$, então $2,999 < x < 3,001 \quad \Rightarrow \; \lim x = 3 \quad \Rightarrow \quad x \to 3$.

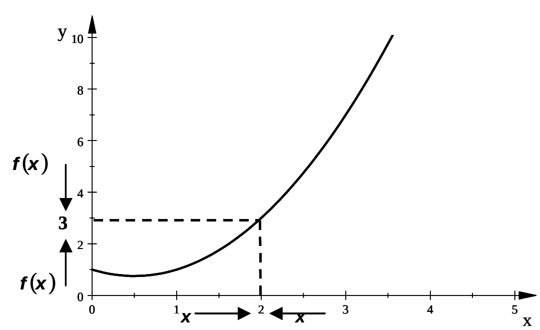
Estudaremos agora o limite de uma função de uma variável real com todas as suas interpretações.

2.2 Limite de uma Função

2.2.1 Noção Intuitiva

O uso básico de limites é descrever como uma função se comporta quando a variável independente tende a um dado valor.

Exemplo 2: Examinemos o comportamento da função $f(x) = x^2 - x + 1$, quando x se aproxima de 2.



Representando f na forma tabular, temos que:

x	$1,99$	$1,995$	$1,999$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2,001$	$2,005$	$2,05$
$f(x)$	$2,8525$	$2,9701$	$2,985025$	$\cdots$		$\cdots$	$3,003001$	$3,015025$	$3,1525$

Observando a tabela e o gráfico é fácil constatar que o limite de $x^2 - x + 1$ quando x tende a 2 é 3 por qualquer um dos lados de 2, ou seja, $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - x + 1) = 3$.

Note que, na análise precedente estivemos preocupados com os valores de f próximos do ponto $x = 2$ e não com o valor de f em $x = 2$.

Informalmente, temos que se os valores de $f(x)$ puderem ser tomados tão próximos quanto quisermos de b, fazendo x suficientemente próximo de a (não igual a a), então escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \text{ ou } f(x) \to b \text{ se } x \to a.$$

Observação: No exemplo anterior, a função $f(x)$ estava definida em $x = 2$ (ponto de interesse), mas quando falamos em limite nos interessa saber o comportamento da função na vizinhança de um certo a, não necessita que a função f esteja definida no ponto a ser analisado. Observe isso, no exemplo a seguir.

Exemplo 3: Seja $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$. Verifique que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\right) = 2$.
Solução: Observe a tabela abaixo:

x	$-0,001$	$-0,0001$	$-0,00001$	$\cdots$	0	$\cdots$	$0,00001$	$0,0001$	$0,001$
$f(x)$	$1,9995$	$1,99995$	$1,999995$	$\cdots$		$\cdots$	$2,000005$	$2,00005$	$2,0005$

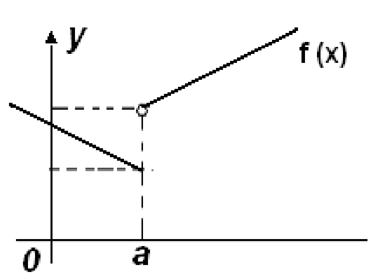
Por evidências numéricas estamos sendo induzidos a concluir que

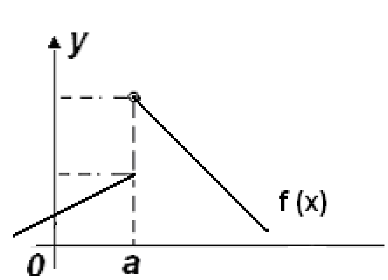
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\right) = 2.$$

Podemos confirmar este resultado por manipulações algébricas. Veja:
$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}.\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \sqrt{x+1}+1$, se $x \neq 0$.
A partir daí, é evidente que $f(x) \to 2$, quando $x \to 0$

2.2.2 Limites Laterais

Nem sempre uma função tem limites iguais quando se aproxima pela *direita* ou pela *esquerda* de um número real a. Vamos analisar agora, funções que estão definidas em intervalos onde existem pontos nos quais o gráfico da função dá um salto. Assim,

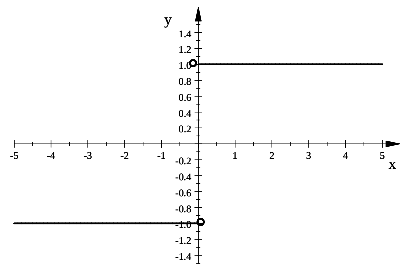




Isto pode ser observado no próximo exemplo.

Exemplo 4: Se $f(x) = \frac{|x|}{x}$.
Solução:

Note que: $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0; \\ -1, \text{ se } x < 0. \end{cases}$



Graficamente, temos que:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \text{ e } \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1.$$

Com esta notação, o índice superior $+$ indica um *limite à direita* e o índice superior $-$ indica um *limite à esquerda*.

Definição 2: Se a função $f(x)$ tende a b_1, finito ou não, quando x tende a a por valores inferiores ao a, então dizemos que b_1 é o *limite à esquerda* de $f(x)$ no ponto a, ou seja

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b_1.$$

Definição 3: Se a função $f(x)$ tende a b_2, finito ou não, quando x tende a a por valores superiores ao a, então dizemos que b_2 é o *limite à direita* de $f(x)$ no ponto a, ou seja

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b_2.$$

Estes limites laterais podem ser:

i. iguais, isto é, $b_1 = b_2$;

ii. diferentes, isto é, $b_1 \neq b_2$;

iii. pode existir um e outro não;

iv. ambos não existirem.

Relação entre limites laterais e bilaterais

O *limite bilateral* existe se, e somente se, existirem os limites laterais e forem iguais. Escrevemos,

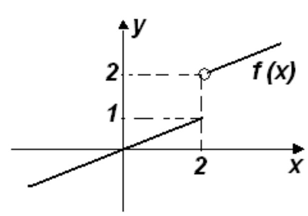
$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)\ .$$

Exemplo 4: Determine o limite (limite bilateral) das funções abaixo.

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}\,, \text{ se } x \leq 2; \\ \frac{x}{2} + 1, \text{ se } x > 2. \end{cases}$

   Solução:

   O gráfico de f é:

   Graficamente, os limites laterais são:

   $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(\frac{x}{2}\right) = 1;$

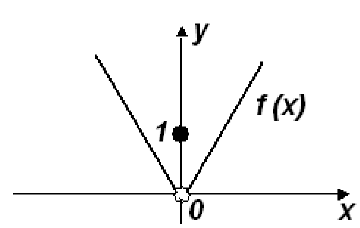
   $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2.$

   Conclusão, como o $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, então não existe o $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ (limite bilateral).

2. $f(x) = \begin{cases} x\,, \text{ se } x > 0; \\ 1, \text{ se } x = 0; \\ -x, \text{ se } x < 0; \end{cases}$

   Solução:

   O gráfico de f é:

   Graficamente, os limites laterais são:

   $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0;$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0.$

Conclusão, como o $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, então existe o limite bilateral e $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0.$

3. $f(x) = \begin{cases} 6x+7\,, \text{ se } x \leq -2; \\ 4-x, \text{ se } x > -2. \end{cases}$

   Solução:

   Graficamente, os limites laterais são:

   $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} (6x+7) = -5;$

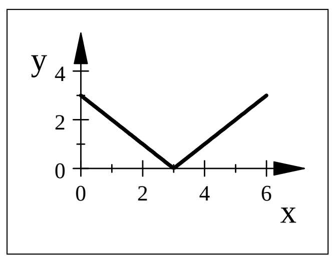
   $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (4-x) = 6.$

   Conclusão, como o $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, então limite bilateral não existe.

4. $f(x) = |x-3|\,.$

   Solução:

   O gráfico de f é:

   .

   Graficamente, os limites laterais são:

   $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (-x+3) = 0;$

   $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (x-3) = 0.$

   Conclusão, como o $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, então $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0.$

5. $f(x) = \begin{cases} x^2-3, \text{ se } x > 2; \\ 1, \text{ se } x = 2; \\ \frac{1}{x-2}, \text{ se } x < 2. \end{cases}$

   Solução:

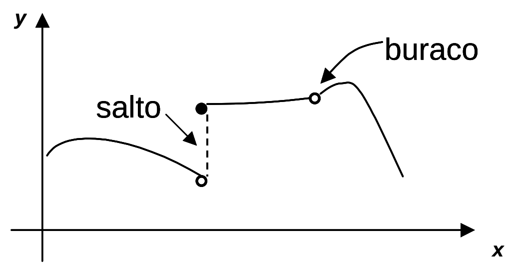
   Graficamente, os limites laterais são:

   $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(\frac{1}{x-2}\right) = -\infty;$

   $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2-3) = 1.$

   Conclusão, como o $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, então não existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Observação: Intuitivamente, dizemos que uma curva é *contínua* quando não apresenta *quebras* ou *buracos*. Estas quebras ou buracos são chamados de descontinuidades.



2.2.3 Limites pela definição

Introdução

Inicialmente, suponhamos que uma família pretende disciplinar o uso da água em sua residência. Admitimos que o custo do m^3 de água seja $R\$ \ 1,20$ e que esta família decide gastar $R\$ \ 90,00$ por mês com uma tolerância de $R\$ \ 6,00$ para mais ou para menos. A questão que se põe é: qual a faixa de consumo em m^3 de água para que o custo fique dentro do padrão estabelecido?

<u>**Solução:**</u>
Sejam

x : o número de m^3 de água a serem consumidos;
p : o valor pago pela água em $R\$$.

É fácil ver que a função que relaciona o valor a pagar com o consumo é

$$p(x) = 1,2x.$$

Como foi decidido gastar $R\$ \ 90,00$ por mês com uma tolerância de $R\$ \ 6,00$ para mais ou para menos, conclui-se que o valor a ser pago deve pertencer ao intervalo $[84, 96]$.

Na seqüência, é necessário estabelecer o intervalo de consumo. Para isso, determinamos os valores de a e b tais que

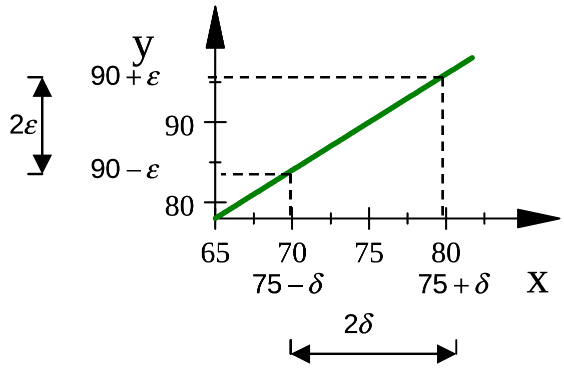
$$p(a) = 84 \ \text{ e } p(b) = 96.$$

Ou seja,

$$\begin{array}{l} p(a) = 84 \quad \Rightarrow \quad 1,2a = 84 \quad \Rightarrow \quad a = 70; \\ p(b) = 96 \quad \Rightarrow \quad 1,2b = 96 \quad \Rightarrow \quad b = 80. \end{array}$$

Conclusão: Para que os gastos fiquem no intervalo $[84, 96]$ o consumo deve ficar entre $70m^3$ e $80m^3$ de água, isto é, pertencer ao intervalo $[70, 80]$.

Ao estudarmos limites das funções, o valor $p(x) = 90$ é denominado limite de $p(x)$ quando x tende a 75, a tolerância $R\$ \ 6,00$ é denominado ε e a margem 5 m^3 em torno de 75 é denominado δ. O gráfico a seguir retrata esta situação.



A próxima questão que se põe é: existe uma relação entre a tolerância admitida em torno do valor monetário fixado como referência ($R\$ \ 90,00$) e a margem em torno do valor central de consumo (75 m^3)? Isto, é, dado $\varepsilon > 0$ é possível encontrar $\delta > 0$ tal que δ dependa de ε? A resposta é sim e, o procedimento, para determinar esta relação consiste em estabelecer a relação entre as desigualdades

$$|p(x) - 90| < \varepsilon \text{ e } |x - 75| < \delta\,.$$

Desse modo,

$$|p(x) - 90| = |1,2x - 90| = 1,2 \ \ |x - 75| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Por outro lado,

$$|x - 75| < \delta. \qquad (2)$$

Das relações (1) e (2), podemos admitir a relação

$$1,2\delta = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\varepsilon}{1,2}.$$

Portanto, para cada tolerência de gastos ε podemos encontrar a margem de consumo δ.

Vejamos os valores de δ para alguns valores de ε.

Valor de ε	Valer de δ	Intervalo de gastos	Intervalo de consumo
6	5	$[84, 96]$	$[70, 80]$
5	$4,1667$	$[85, 95]$	$[70.833, 79.617]$
4	$3,3333$	$[86, 94]$	$[71.667, 79.333]$
3	$2,5$	$[84, 93]$	$[72.5, 77.5]$
2	$1,6667$	$[88, 92]$	$[73.833, 76.16666]$
$1,2$	1	$[89, 91]$	$[74, 76]$

Generalizando

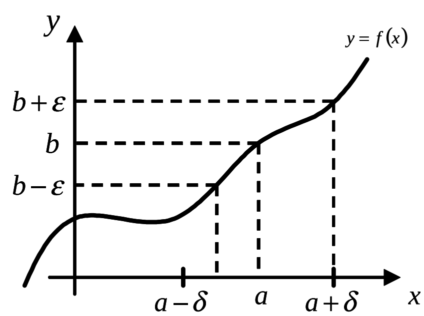
Consideremos $y = f(x)$ uma função definida em uma determinada vizinhança do ponto a ou para certos pontos desta vizinhança.

Definição 4: A função $y = f(x)$ tende ao limite b, quando x tende para a, se para todo e qualquer número positivo ε, por pequeno que seja, é possível indicar um número positivo δ tal que, para todo e qualquer $x \neq a$ que satisfaz $0 < |x - a| < \delta$ se verificará a desigualdade $|f(x) - b| < \varepsilon$. Escreve-se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \text{ ou } f(x) \to b \text{ se } x \to a.$$

Interpretação Geométrica

Se $x \to a$, então $f(x) \to b$, no gráfico de $y = f(x)$ se interpreta:

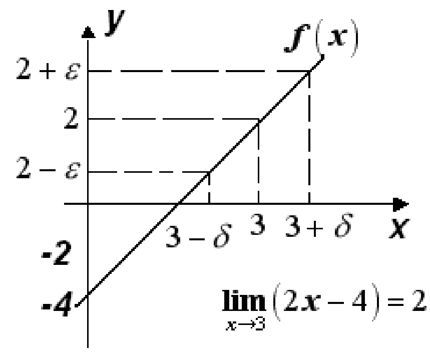


Uma vez que da desigualdade $0 < |x - a| < \delta$ se deduz $|f(x) - b| < \varepsilon$, então, todos os pontos P, no gráfico de $f(x)$, correspondentes aos valores de x que se encontram a uma distância não maior que δ do ponto a, se localizarão dentro de uma faixa de largura 2ε, limitada pelas retas $y = b - \varepsilon$ e $y = b + \varepsilon$. Isto é, para um dado $\varepsilon > 0$ e arbitrário, $f(x)$ faz corresponder um número $\delta > 0$ tal que $a - \delta < x < a + \delta$ sempre que $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$.

Podemos resumir a definição 4, usando símbolos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \text{ se } 0 < |x - a| < \delta, \text{ então } |f(x) - b| < \varepsilon \ .$$

Exemplo 5: Seja $f(x)$ uma função dada por $f(x) = 2x - 4$.



Graficamente, observamos que $\lim\limits_{x\to 3}(2x-4)=2$, pois:

x	$2,99$	$2,999$	3	$3,01$	$3,001$
$f(x)$	$1,98$	$1,998$		$2,02$	$2,002$

A medida que x se aproxima de 3 por valores menores ou maiores, $f(x)$ se aproxima de 2. Podemos tomar $|f(x)-2|$ tão pequeno quanto quisermos, bastando para isto, escolhermos x bem próximo de 3. Vejamos agora, como determinar δ em função de um dado ε.

Temos $f(x)=2x-4$ e $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$. Usando a definição 4, temos que:

Dado qualquer $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, se $0<|x-3|<\delta$, então:

$$
\begin{aligned}
& |f(x)-2|<\varepsilon \\
\Rightarrow\quad & |(2x-4)-2|<\varepsilon \\
\Rightarrow\quad & |2x-6|<\varepsilon \\
\Rightarrow\quad & 2|x-3|<\varepsilon \\
\Rightarrow\quad & |x-3|<\tfrac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

Escolhendo $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, a definição se verifica.
Por exemplo, se $\varepsilon=0,01$, então $\delta=0,005$.

Outra forma de provar o limite usando a definição é através da resolução das inequações modulares, da seguinte forma:
Dado qualquer $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ se $0<|x-3|<\delta$, então $|f(x)-2|<\varepsilon$.
Note que:

$$|f(x)-2|<\varepsilon \Rightarrow \quad |2x-6|<\varepsilon \Rightarrow \quad -\varepsilon<2x-6<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{-\varepsilon}{2}<x-3<\tfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \quad |x-3|<\tfrac{\varepsilon}{2}=\delta.$$

<u>*Conlusão:*</u> escolhendo $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ o limite está provado.

Exemplo 6: Mostre que $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$.

<u>**Solução:**</u> Vamos mostrar que, para qualquer $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tal que $|f(x)-4|<\varepsilon$ se $0<|x-2|<\delta$.

Dado qualquer $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ se $0<|x-2|<\delta$, então

$$
\begin{array}{ll}
 & |f(x)-4|<\varepsilon \\
\Rightarrow & \left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon \\
\Rightarrow & \left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}-4\right|<\varepsilon \\
\Rightarrow & |x-2|<\varepsilon
\end{array}
$$

Escolhendo $\delta=\varepsilon$, a definição se verifica.

Exemplo 7: Mostre que $\lim\limits_{x\to 4}x^2=16$.

<u>**Solução:**</u> Vamos mostrar que, para qualquer $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, se $0<|x-4|<\delta$, então $|f(x)-16|<\varepsilon$.

Interpretação geométrica:

- 2/Apostila de Cálculo 1/Q5NFGX2C.wmf

Dado qualquer $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, se $0<|x-4|<\delta$, então
$|f(x)-16|<\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x^2-16|<\varepsilon$
Observe que,

$$|f(x)-16|=|x^2-16|=|(x-4)(x+4)|=|x-4|\,|x+4|. \qquad (1)$$

Precisamos substituir $|x+4|$ por um valor constante. Neste caso, vamos supor que $0<\delta\leq 1$, então $0<|x-4|<\delta$, seguem as seguintes desigualdades equivalentes:

$|x-4| < \delta \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |x-4| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x-4 < 1 \;\Rightarrow \quad 3 < x < 5$
$\;\Rightarrow \quad 3 < x < 5 \Rightarrow \quad 7 < x+4 < 9.$

Logo, $|x+4| < 9.$

Assim, por (1), temos que

$$|f(x) - 16| < 9\,|x-4|$$

Como, pela definição, deve ocorrer que $|x-4| < \delta$, temos que

$$|f(x) - 16| < 9\delta.$$

Escolhendo $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{9}\right\}$, obtém-se que

$$|f(x) - 16| \leq 9.\frac{\varepsilon}{9} = \varepsilon.$$

Resolvendo novamente fazendo o uso de inequações:
Se $\quad 0 < |x-4| < \delta$, então:
$|f(x) - 16| < \varepsilon \quad \Rightarrow \qquad |x^2 - 16| < \varepsilon$
$\Rightarrow \qquad |x^2 - 16| < \varepsilon \Rightarrow \qquad -\varepsilon < x^2 - 16 < \varepsilon \qquad (1)$
$\Rightarrow \qquad -\varepsilon < x^2 - 16$ e $x^2 - 16 < \varepsilon.$

Resolvendo a primeira inequação:
$-\varepsilon < x^2 - 16 \Rightarrow \quad 0 < x^2 - 16 + \varepsilon$
$\Rightarrow \qquad S_1 = \left(-\infty, -\sqrt{16-\varepsilon}\right) \cup \left(\sqrt{16-\varepsilon}, +\infty\right)$, para $\varepsilon \in (0, 16)$.

Resolvendo a segunda inequação:
$x^2 - 16 < \varepsilon \Rightarrow \quad x^2 - 16 - \varepsilon < 0$
$\Rightarrow \qquad S_2 = \left(-\sqrt{16+\varepsilon}, \sqrt{16+\varepsilon}\right)$,para $\varepsilon > 0$.

Logo, a solução da inequação (1) é $S = S_1 \cap S_2$
$\Rightarrow \qquad S = \left(-\sqrt{16+\varepsilon}, -\sqrt{16-\varepsilon}\right) \cup \left(\sqrt{16-\varepsilon}, \sqrt{16+\varepsilon}\right)$, para $\varepsilon \in (0, 16)$.

Como $x \to 4$ e $4 \in \left(\sqrt{16-\varepsilon}, \sqrt{16+\varepsilon}\right)$, iremos usar somente este intervalo para encontrar δ.

Temos que:
$x \in \left(\sqrt{16-\varepsilon}, \sqrt{16+\varepsilon}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{16-\varepsilon} < x < \sqrt{16+\varepsilon}$

Subtraindo 4 em todas as desigualdades, segue que:
$\sqrt{16-\varepsilon} - 4 < x - 4 < \sqrt{16+\varepsilon} - 4$

Observe que como $\varepsilon \in (0, 16)$, então o número $\sqrt{16-\varepsilon} - 4$ é negativo. Logo, devemos considerar seu valor absoluto na escolha do δ, pois, pela definição, δ deve ser positivo.

Conlusão:
Escolhendo $\delta = \min\left\{\left|\sqrt{16-\varepsilon} - 4\right|, \sqrt{16+\varepsilon} - 4\right\}$ o limite está provado.

Teorema da Unicidade: Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b_1$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b_2$, então $b_1 = b_2$.
Demonstração: *Note que,*
$|b_1 - b_2| = |b_1 - f(x) + f(x) - b_2| = |-(f(x) - b_1) + (f(x) - b_2)|$

Pela desigualdade triangular, temos que:
$$|b_1 - b_2| \leq |-(f(x) - b_1)| + |f(x) - b_2| = |f(x) - b_1| + |f(x) - b_2| \qquad (*)$$
Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b_1$ *e* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b_2$, *pela definição de limites, dado* $\varepsilon > 0$,

$\exists \delta_1 > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta_1$, então $|f(x) - b_1| < \varepsilon$;
$\exists \delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_2$, então $|f(x) - b_2| < \varepsilon$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. *Então, em* $(*)$, *segue que*

$$|b_1 - b_2| < 2\varepsilon.$$

Se escolhermos $\varepsilon = \frac{|b_1 - b_2|}{2}$, *obtém-se que*

$$|b_1 - b_2| < |b_1 - b_2|, \text{ sempre que } |x - a| < \delta. \text{ Contradição!!!}$$

Logo, $b_1 = b_2$.

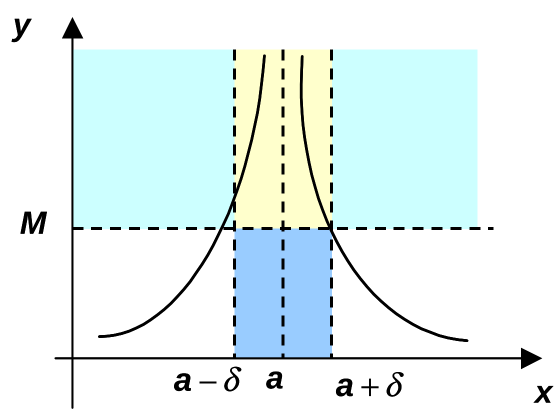
Voltemos agora a analisar a definição de limite. Convém enfatizar que, em limites, não é necessário que a função seja definida em $x = a$ para que o limite desta função exista quando $x \to a$.

2.2.4 Limites Infinitos

Definição 5: Uma função $f(x)$ torna-se *infinitamente grande positivamente* quando $x \to a$ se o valor de $f(x)$ se torna e permanece maior do que qualquer número positivo M devidamente escolhido, por maior que seja. Isto é,

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0,\ \exists \delta > 0,\ \text{se } 0 < |x - a| < \delta, \text{ então } f(x) > M.$$

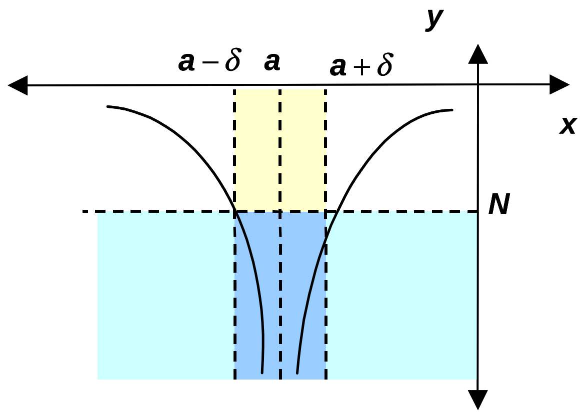
Geometricamente:



Definição 6: Uma função $f(x)$ torna-se *infinitamente grande negativamente* quando $x \to a$ se o valor de $f(x)$ se torna e permanece menor do que qualquer número positivo N devidamente escolhido, por menor que seja. Isto é,

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall N < 0,\ \exists \delta > 0,\ \text{se } 0 < |x - a| < \delta, \text{ então } f(x) < N.$$

Geometricamente:



Exemplo 8: Mostre que $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

<u>Solução:</u> Dado um número $M > 0$ para que $\exists\delta > 0$, se $0 < |x-1| < \delta$, então $f(x) > M$.

Seja $M > 0$. Assim,

$f(x) > M$ se $0 < |x-1| < \delta$

$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > M$, se $0 < |x-1| < \delta$

$\Rightarrow \quad (1-x)^2 < \frac{1}{M}$, se $0 < |x-1| < \delta$.

Por propriedade de valor absoluto, temos que:

$\Rightarrow \quad |1-x|^2 < \frac{1}{M}$, se $0 < |x-1| < \delta$.

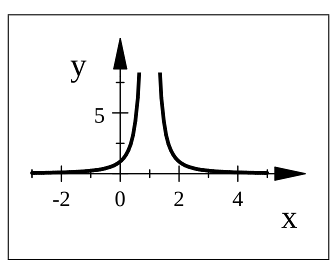
Como $|1-x| = |x-1|$, temos que:

$\Rightarrow \quad |x-1|^2 < \frac{1}{M}$, se $0 < |x-1| < \delta$

$\Rightarrow \quad |x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Logo, escolhendo $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ tem-se o resultado.

Se $M = 9$, então $\delta = \frac{1}{3}$.



Resolvendo através de inequações:

Dado um número $M > 0$ para que $\exists\delta > 0$, se $0 < |x-1| < \delta$, então $f(x) > M$

$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} > M$, se $0 < |x-1| < \delta$

Como ambos os membros da primeira inequação são positivos, então podemos reescrever esta desigualdade como

$\Rightarrow \frac{1}{M} > (1-x)^2 \Rightarrow 0 > (1-x)^2 - \frac{1}{M} \qquad (1)$

Resolvendo a equação associada:
$\frac{1}{M} = (1-x)^2 \Rightarrow 1 - x = \pm\frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow x = 1 \mp \frac{1}{\sqrt{M}}$

Após fazer o estudo do sinal de $(1-x)^2 - \frac{1}{M}$ conclui-se que a solução de (1) é:

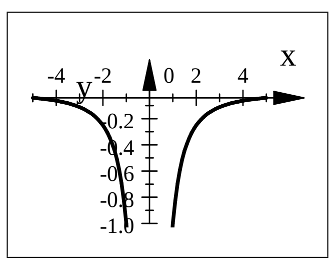
$x \in \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} < x < 1 + \frac{1}{\sqrt{M}}$
$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{M}} < x - 1 < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta.$

Conlusão:
Escolhendo $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, o limite está provado.

Exemplo 9: Mostre que $\lim\limits_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$.

Solução: Dado um número $N < 0$ para que $\exists \delta > 0$, se $|x - 0| < \delta$, então $f(x) < M$.
Seja $N < 0$. Assim,
se $0 < |x| < \delta$,então $f(x) < N$
$\Rightarrow \quad f(x) = -\frac{1}{x^2} < N \Rightarrow \quad -x^2 > \frac{1}{N} \Rightarrow \quad x^2 < -\frac{1}{N}$
Por propriedade de valor absoluto, temos que:
$\Rightarrow \quad |x|^2 < \frac{1}{-N} \Rightarrow \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{-N}}$.
Logo, escolhendo $\delta = \frac{1}{\sqrt{-N}}$ obtém-se o resultado.

Se $N = -4$, então $\delta = \frac{1}{2}$.



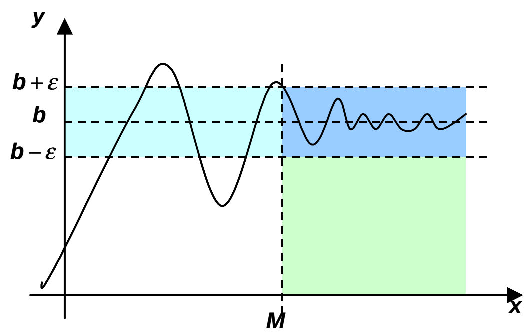
Observação: Encontramos com muita freqüencia gráficos que se aproximam de *uma reta* à medida que x cresce ou decresce. Estas retas são chamadas de *assíntotas*. No exemplo 8, temos duas assíntotas: $x = 1$ e $y = 0$. A primeira é chamada de *assíntota vertical*; a segunda, *assíntota horizontal.*

2.2.5 Limites no Infinito

Definição 7: Uma função $f(x)$ tem limite b quando x tende ao infinito positivamente, se para qualquer número ε positivo por pequeno que seja, é possível indicar um M positivo, tal que, para todo x que satisfaz $x > M$ se verifica $|f(x) - b| < \varepsilon$. Isto é,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists M > 0, \text{ se } x > M, \text{ então } |f(x) - b| < \varepsilon\ .$$

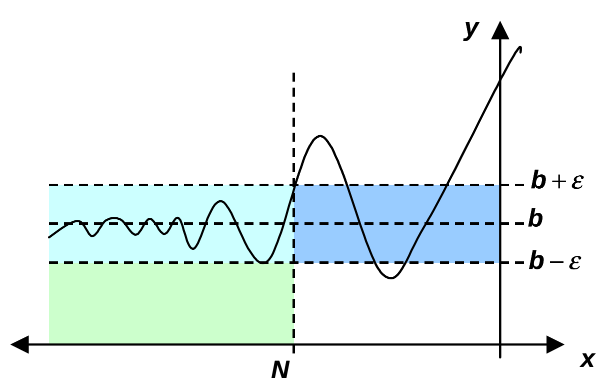
Geometricamente:



Definição 8: Uma função $f(x)$ tem limite b quando x tende ao infinito negativamente, se para qualquer número ε positivo por pequeno que seja, é possível indicar um N negativo, tal que, para todo x que satisfaz $x < N$ se verifica $|f(x) - b| < \varepsilon$. Isto é,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists N < 0, \text{ se } x < N, \text{ então } |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Geometricamente:

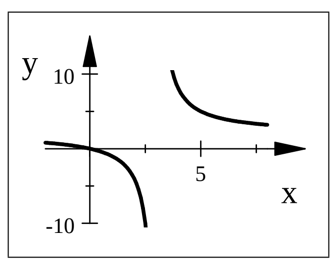


Exemplo 10: Mostre que $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x-3}=2.$

<u>Solução:</u> Pela definição de limite, sabemos que
$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x-3}=2$ se, e somente se, dado qualquer $\varepsilon>0$, existe um número $N<0$ tal que se $x<N$

$$\begin{array}{ll}
 & |f(x)-2|<\varepsilon \\
\Rightarrow & \left|\frac{2x}{x-3}-2\right|<\varepsilon \\
\Rightarrow & \left|\frac{2(x-3+3)}{x-3}-2\right|<\varepsilon \\
\Rightarrow & \left|2+\frac{6}{x-3}-2\right|<\varepsilon \\
\Rightarrow & \frac{6}{|x-3|}<\varepsilon \\
\Rightarrow & |x-3|>\frac{6}{\varepsilon}
\end{array}$$

Por propriedade de módulo, temos que
$x-3<-\frac{6}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad x<3-\frac{6}{\varepsilon}.$
ou:
$x-3>\frac{6}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad x>3+\frac{6}{\varepsilon} \rightsquigarrow$ desprezada, pois, pela definição de limite x deve ser menor que um número N.
Escolhendo $N=3-\frac{6}{\varepsilon}$ com $\varepsilon\in(0,2)$, o limite está provado.
Se $\varepsilon=0,05$, então $N=-117$.



Exemplo 11: Mostre que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+5}{x+4}=1.$

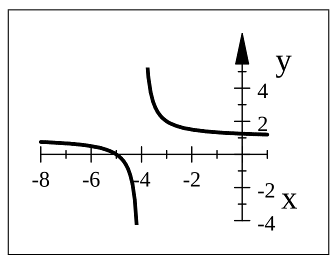
<u>Solução:</u> Pela definição de limite, sabemos que

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+5}{x+4}=1$ se, e somente se, dado qualquer $\varepsilon>0$, existe um número $M>0$ tal que se $\quad x>M$

$$\begin{array}{ll} & |f(x)-1|<\varepsilon \\ \Rightarrow & \left|\frac{x+5}{x+4}-1\right|<\varepsilon \\ \Rightarrow & \left|\frac{(x+4)+1}{x+4}-1\right|<\varepsilon \\ \Rightarrow & \left|1+\frac{1}{x+4}-1\right|<\varepsilon \\ \Rightarrow & \frac{1}{|x+4|}<\varepsilon \\ \Rightarrow & |x+4|>\frac{1}{\varepsilon} \end{array}$$

Por propriedade de módulo, temos que
$x+4<-\frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad x<-4-\frac{1}{\varepsilon} \rightsquigarrow$ desprezada, pois, pela definição de limite x deve ser maior que um número N.
ou:
$x+4>\frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad x>-4+\frac{1}{\varepsilon}.$

Logo, escolhendo $M=-4+\frac{1}{\varepsilon}>0$ se, e somente se $\varepsilon \in \left(0,\frac{1}{4}\right)$, o limite está provado.



2.2.6 Limites Infinitos no Infinito

Definição 9: Uma função $f(x)$ torna-se infinitamente grande positivamente quando x tende ao infinito positivamente se, para cada número M positivo qualquer (tão grande quando se queira) pudermos determinar um número m positivo, tal que para todo x que satisfaz $x>m$ verifica $f(x)>M$. Isto é,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M>0,\ \exists m>0, \text{ se } x>m, \text{ então } f(x)>M\ .$$

Analogamente, nos demais casos, temos que:

Definição 10: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \ \forall N < 0, \exists m > 0$, se $x > m$, então $f(x) < N$.

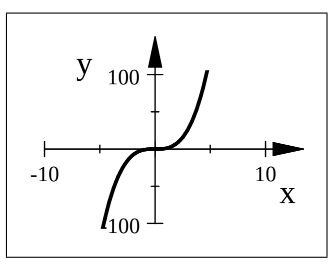
Definição 11: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \ \forall M > 0, \exists n < 0$, se $x < n$, então $f(x) > M$.

Definição 11: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \ \forall N < 0, \exists n < 0$, se $x < n$, então $f(x) < M$.

Observação: Convém esclarecer que $+\infty$ e $-\infty$ não são números, dizer que $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ indica o comportamento da variável x. Este fato não tem o mesmo significado que, por exemplo, $x \to 10$ ou $x \to -10$. Neste caso, dizemos que o limite da função não existe.

Exemplo 12: Determine os limites no infinito de $f(x) = x^3$.
<u>Solução:</u> Geometricamente, é fácil concluir que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$



2.3 Propriedades de Limites

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções para as quais existe $\lim f(x)$ e $\lim g(x)$. Assim:

1. $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$;

   Lê-se: o limite de uma soma e/ou diferença de funções é igual a mesma soma e/ou diferença dos limites destas funções.

2. $\lim [k.f(x)] = k \lim f(x)$;

   Lê-se: o limite do produto de uma constante k por uma função é igual ao produto desta constante pelo limite da função.

3. $\lim [f(x).g(x)] = \lim f(x) . \lim g(x)$;

   Lê-se: o limite de um produto de duas funções é igual ao produto dos limites destas duas funções.

4. $\lim \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, se $\lim g(x) \neq 0$;

   Lê-se: o limite de um quociente de funções, se existir, é igual ao quociente dos limites destas funções.

5. $\lim [f(x)]^n = (\lim f(x))^n$, com $n \in \mathbb{N}$;

   Lê-se: o limite da potência de uma função é igual a potência do limite desta função.

6. $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$;

   Lê-se: o limite da raiz n-ésima de uma função é igual a raiz n-ésima do limite desta função.

7. $\lim (\ln f(x)) = \ln (\lim f(x))$, se $\lim f(x) > 0$;

8. $\lim (\cos f(x)) = \cos (\lim f(x))$;

9. $\lim (\sin f(x)) = \sin (\lim f(x))$;

10. $\lim e^{f(x)} = e^{(\lim f(x))}$;

11. O limite de uma função polinomial inteira quando $x \to \pm\infty$ é igual ao limite de seu termo de mais alto grau, isto é, se $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, então

    (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, \text{ se } a_0 > 0 \\ -\infty, \text{ se } a_0 < 0 \end{cases}$;

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, se $\begin{cases} a_0 > 0 \text{ e } n \text{ par} \\ a_0 < 0 \text{ e } n \text{ ímpar} \end{cases}$;

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, se $\begin{cases} a_0 > 0 \text{ e } n \text{ ímpar} \\ a_0 < 0 \text{ e } n \text{ par} \end{cases}$.

12. *Propriedade do Confronto:* Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ e se $h(x)$ é um função para a qual $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, então $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$.

13. *Propriedade da Conservação do Sinal:* Se o $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \neq 0$, então existe uma vizinhança do ponto $x = a$ na qual $f(x)$ conserva o sinal de b.

14. Se $f(x)$ assume somente valores não negativos e se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, então b será um número não negativo.

15. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq k$, com $k \in \mathbb{R}_+^*$, então $\lim\limits_{x\to a} [f(x) . g(x)] = 0$.

Observações:

(i) Em outras palavras, dizer que $|g(x)| \leq k$, com $k \in \mathbb{R}_+^*$, significa que g é uma função limitada.

(ii) As demonstrações das propriedades acima ficam como exercício.

2.4 Cálculo de Limites

No cálculo do limite de uma função, quando obtivermos uma das sete formas,

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0.(\pm\infty), +\infty - \infty, 0^0, 1^{\pm\infty} \text{ e } (\pm\infty)^0,$$

conhecidas como *formas indeterminadas*, nada se poderá concluir de imediato sem um estudo mais profundo de cada caso, estudo esse feito em geral com auxílio da equivalência entre funções.

Exemplo 13: Calcule os limites:

1. $\lim\limits_{x\to 8}\left(3x^2+\sqrt[3]{x-7}+xe^{x-9}+2\right)$

<u>**Solução:**</u> Pelas propriedades de limites, temos que:

$\lim\limits_{x\to 8}\left(3x^2+\sqrt[3]{x-7}+xe^{x-9}+2\right)=$

$=3\lim\limits_{x\to 8}(x^2)+\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 8}(x-7)}+\lim\limits_{x\to 8}x.\lim\limits_{x\to 8}e^{x-9}+\lim\limits_{x\to 8}2$

$=3\lim\limits_{x\to 8}(x^2)+\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 8}x-\lim\limits_{x\to 8}7}+\left(\lim\limits_{x\to 8}x\right).e^{\left(\lim\limits_{x\to 8}(x-9)\right)}+\lim\limits_{x\to 8}2$

$=3\,(8)^2+\sqrt[3]{8-7}+(8)\,.e^{\left(\lim\limits_{x\to 8}x-\lim\limits_{x\to 8}9\right)}+2$

$=3*64+1+8e^{8-9}+2$

$=8e^{-1}+195.$

Observação: Note que, escrevendo passo a passo todas as propriedades de limites, o cálculo do limite torna-se trabalhoso. Com a experiência, é possível aplicar diretamente estas propriedades.

2. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x+3}=\frac{0}{0};$

<u>**Solução:**</u> Devemos eliminar a indeterminação, para isso, usaremos manipulações algébricas.

$\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-2)}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}(x-2)=-5.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\frac{0}{0};$

<u>**Solução:**</u> Multiplicando e dividindo pelo conjugado de $\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)$, temos que:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}.$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}.$

<u>**Solução:**</u> Definindo $x=t^6$, e observando que se $x\to 1$, então $t\to 1$, temos que:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{t^2-1}{t^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{t+1}{t^2+t+1}=\dfrac{2}{3}.$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+5}{5x^2+3x}=\dfrac{\infty}{\infty};$

<u>**Solução 1:**</u>

Pela propriedade (11), temos que: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2}{5x^2}=-\dfrac{2}{5}.$

<u>**Solução 2:**</u>

Colocando x^2 em evidência no numerador e denominador, temos que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+5}{5x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(-2+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(5+\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2+\frac{5}{x^2}}{5+\frac{3}{x}}=-\frac{2}{5},$$

pois $\frac{5}{x^2}$ e $\frac{3}{x}$ tendem a zero quando $x\to\infty$

Observação: *Quando temos* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *estamos denotando os limites no infinito, ou seja, queremos calcular* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2x^2y+2x^3y^2}{4-3xy-2y^3x^3}=\frac{\infty}{\infty}$

Solução: Pela propriedade (11), temos que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2x^2y+2x^3y^2}{4-3xy-2y^3x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3y^2}{-2y^3x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{y^2}{-y}=-\tfrac{1}{y}.$$

7. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x^2-a^2}=\frac{0}{0};$

Solução: Fatorando o numerador, temos que:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-a^2)(x^2+a^2)}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}(x^2+a^2)=2a^2.$$

8. $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{(x-a)^n-x^n}{a}=\frac{0}{0};$

Solução: Pela forma binomial, temos que:

$$L=\lim_{a\to 0}\frac{(x-a)^n-x^n}{a}=\lim_{a\to 0}\frac{x^n-nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)x^{n-2}a^2}{2!}+\cdots+(-a)^n-x^n}{a}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{a\to 0}\left(-nx^{n-1}+\tfrac{n(n-1)x^{n-2}a}{2!}+\cdots+(-a)^{n-1}\right)=-nx^{n-1}.$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+5}}{6x-8}=\frac{\infty}{\infty};$

Solução: Colocando x^2 em evidência no numerador e x no denominador, temos que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+5}}{6x-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{5}{x^2}\right)}}{x\left(6-\frac{8}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}}{x\left(6-\frac{8}{x}\right)}$$

Analisando os limites no infinito, temos que:

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+5}}{6x-8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}}{x\left(6-\frac{8}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}}{\left(6-\frac{8}{x}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$L_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+5}}{6x-8}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}}{x\left(6-\frac{8}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}}{x\left(6-\frac{8}{x}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=\infty-\infty;$

<u>**Solução:**</u> Multiplicando e dividindo pelo conjugado do númerador, temos que:

$L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=$

$\Rightarrow L=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}\right)\right]$

$\Rightarrow L=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}$

Assim,

$L_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x}{x\left(\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=$ 2.

$L_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=$ -2.

11. $\lim\limits_{x\to3}\frac{|2x-6|}{x^2-9}=\frac{0}{0}.$

<u>**Solução:**</u> Temos que, $f(x)=\frac{|2x-6|}{x^2-9}=2\frac{|x-3|}{(x-3)(x+3)}$

Pela definição de módulo, temos que:

$$|x-3|=\begin{cases}x-3, \text{ se } x\geq 3\\ 3-x, \text{ se } x<3\end{cases}.$$

Reescrevendo a função, temos que:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x+3}, \text{ se } x\geq 3\\ -\frac{2}{x+3}, \text{ se } x<3\end{cases}.$$

Assim, para determinar $\lim\limits_{x\to3}f(x)$, analisemos os limites laterais:

$\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\frac{2}{x+3}=\frac{1}{3}.$

$\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\left(-\frac{2}{x+3}\right)=-\frac{1}{3}.$

Como $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to3^-}f(x)$, então $\lim\limits_{x\to3}f(x)$ não existe.

12. $\lim\limits_{x\to2}f(x)$, onde $f(x)=\begin{cases}x^2+1, \text{ se } x<2\\ 6\text{ , se } x=2\\ 9-2x, \text{ se } x>2\end{cases}.$

<u>**Solução:**</u> Como $f(x)$ é uma função definida por partes, para determinar $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ devemos analisar os limites laterais.

$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(9-2x)=5.$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2+1) = 5.$

Como $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, então $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5.$

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

<u>**Solução:**</u> Note que não sabemos qual é o valor de $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}(x)$, mas sabemos que

$$-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad |\operatorname{sen}(x)| \leq 1.$$

Sabemos também que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

Escolhendo as funções f e g da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ e } g(x) = \operatorname{sen}(x),$$

pela propriedade de limites número 15, resulta que

$$\lim_{x\to\infty} [f(x).g(x)] = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 0$$

Exemplo 14: Se $f(x) = \dfrac{1}{x}$, mostre que $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{f(x+a)-f(x)}{a} = -\dfrac{1}{x^2}.$

<u>**Solução:**</u>

$\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{f(x+a)-f(x)}{a} = \lim\limits_{a\to 0} \dfrac{\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}}{a} = \lim\limits_{a\to 0} \dfrac{-1}{x(x+a)} = -\dfrac{1}{x^2}.$

Exemplo 15: Determine o valor da constante a para que exista $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-(1+ax)}{x^2}.$

<u>**Solução:**</u> Definindo $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-(1+ax)}{x^2}.$

Se:

$L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-(1+ax)}{x^2} = \frac{0}{0}$

$\Rightarrow L = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{1+x}-(1+ax)}{x^2} * \dfrac{\sqrt{1+x}+(1+ax)}{\sqrt{1+x}+(1+ax)} \right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x-(1+ax)^2}{x^2\left(\sqrt{1+x}+(1+ax)\right)}$

$\Rightarrow L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-2ax+a^2x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x}+(1+ax)\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-2a)+a^2x}{x\left(\sqrt{1+x}+(1+ax)\right)} = \dfrac{1-2a}{0}.$

Então, observe que, para que este limite exista é necessário que $1-2a=0$, isto é, que $\boxed{a = \frac{1}{2}}$.

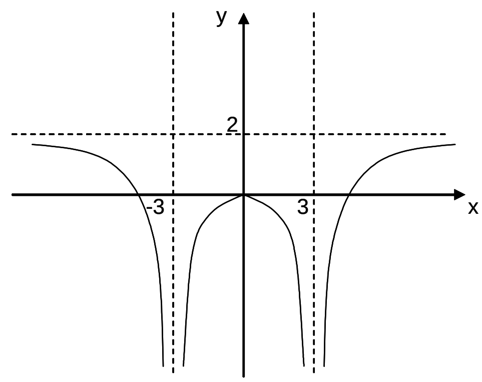
Para este valor de a, segue que:

$L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1/2)^2}{\sqrt{1+x}+\left(1+\frac{1}{2}x\right)} = \dfrac{1}{8}.$

Exemplo 16: Represente geometricamente uma função f que satisfaça as seguintes condições: $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$ e f é uma função par.

<u>**Solução:**</u>

Pelas informações dadas no comando da questão, uma representação geométrica de f é:

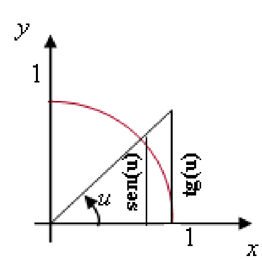


2.5 Limites Notáveis

Desenvolveremos aqui, alguns limites, cujas generalizações serão de grande utilidade no cálculo dos limites de funções que assumem uma das indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$, 1^∞ e ∞^0.

Proposição 1: $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\text{sen }(u)}{u} = 1$

<u>*Demonstração*</u>*:*



Do gráfico, teremos que:

$\text{sen }(u) < u < tg(u) \quad \Rightarrow \quad \text{sen } u < u < \frac{\text{sen}(u)}{\cos(u)}$.

Sabemos que $\text{sen}(u) > 0$ *e* $\cos(u) > 0$ *para* $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. *Assim, dividindo tudo por* $\text{sen}(u)$, *obtém-se que:*

$1 < \frac{u}{\text{sen}(u)} < \frac{1}{\cos(u)}$.

Por propriedades de desigualdades não estrita, temos que:

$1 > \frac{\text{sen } (u)}{u} > \cos(u)$.

Tomando o limite para $u \to 0$, segue que:

$\lim\limits_{u\to 0} 1 < \lim\limits_{u\to 0} \frac{\text{sen } (u)}{u} < \lim\limits_{u\to 0} \cos(u) \quad \Rightarrow \quad 1 < \lim\limits_{u\to 0} \frac{\text{sen } (u)}{u} < 1.$

Pela propriedade do confronto, obtemos que:

$\lim \frac{\text{sen } (u)}{u} = 1.$

Exemplo 17: Calcule os limites:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx} = \frac{0}{0}$.

   Solução: Multiplicando e dividindo por $\frac{1}{x}$, temos que:

   $$L = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx} . \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\text{sen } ax}{x}}{\frac{\text{sen } bx}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{a\text{sen } ax}{ax}}{\frac{b\text{sen } bx}{bx}}$$

   $$\Rightarrow L = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{a\text{sen } ax}{ax}}{\frac{b\text{sen } bx}{bx}} = \frac{a \lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen } ax}{ax}}{b \lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen } bx}{bx}} = \frac{a}{b}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}(x)}{x} = \frac{0}{0}$.

   Solução: Reescrevendo a função, temos que:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} . \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} . \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} (x.\text{cossec}(3x)) = 0.\infty$.

   Solução: Reescrevendo a função, temos que:

   $$\lim_{x\to 0} (x.\text{cossec}(3x)) = \lim_{x\to 0} \left(x. \frac{1}{\text{sen}(3x)} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{3\text{sen}(3x)} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\text{sen}(3x)} = \frac{1}{3}.$$

Proposição 2: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0.$

Demonstração:

Usando a identidade trigonométrica $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$, *para* $\theta = \frac{x}{2}$, *temos que:*

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} . \lim_{x\to 0} \left(\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \right) = 1 * 0 = 0.$$

Exemplo 18: Calcule os limites:

1. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos(x-\pi)}{\sin(x-\pi)}=\frac{0}{0}$

<u>**Solução:**</u> Definindo $t=x-\pi$. Se $x\to\pi$, então $t\to 0$. Assim,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos(x-\pi)}{\sin(x-\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\cos t}{t}}{\frac{\sin t}{t}}=\frac{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}=0.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(4x)}{x\sin(4x)}=\frac{0}{0}$.

<u>**Solução:**</u> Multiplicando e divindindo pelo conjugado do numerador, temos que:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(4x)}{x\sin(4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(4x)}{x\sin(4x)(1+\cos(4x))}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(4x)}{x\sin(4x)(1+\cos(4x))}$$

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{x(1+\cos(4x))}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{4x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(4x)}=4.1.\tfrac{1}{2}=2.$$

Proposição 3: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, onde $e\approx 2.7183$ é o número irracional neperiano.

Exemplo 19: Calcule os limites:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}$.

<u>**Solução:**</u> Definindo $u=\frac{1}{x}$. Se $x\to 0$, então $u\to\infty$. Assim,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=1^{\infty}$.

<u>**Solução:**</u> Definindo $y=\frac{a}{x}$. Se $x\to\infty$, então $y\to 0$. Assim,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{a}{y}}=\left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^a=e^a.$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=1^{\infty}$.

<u>**Solução:**</u> Reescrevendo a função, temos que:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+1+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}.$$

Definindo $\frac{4}{x-1}=\frac{1}{v}$. Se $x\to\infty$, então $v\to\infty$. Assim,

$$L=\lim_{v\to\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^{4v+4}=\left(\lim_{v\to\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^v\right)^4\lim_{v\to\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^4=e^4.$$

Proposição 4: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, onde $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

Demonstração: Definindo $u = a^x - 1$.

Aplicando logaritmo neperiano em ambos os lados, temos que:

$$\ln(u+1) = \ln a^x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\ln(u+1)}{\ln a}.$$

Se $x \to 0$, *então* $u \to 0$. *Dessa forma,*

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\frac{\ln(u+1)}{\ln a}} = \ln a.\ \lim_{u \to 0} \frac{u}{\ln(u+1)} = \ln a.\ \lim_{u \to 0} \frac{1}{\frac{\ln(u+1)}{u}}$$

$$\Rightarrow L = \ln a.\ \frac{1}{\lim\limits_{u \to 0}\left(\frac{\ln(u+1)}{u}\right)} = \ln a.\ \frac{1}{\ln\left(\lim\limits_{u \to 0}(u+1)^{\frac{1}{u}}\right)} = \ln a.\frac{1}{\ln e} = \ln a.$$

Exemplo 20: Calcule os limites:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{5x} - 1} = \frac{0}{0}$.

   Solução: Multiplicando e dividindo por $\frac{1}{x}$, temos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{5x} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^{2x}-1}{x}}{\frac{e^{5x}-1}{x}} = \frac{2\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x}}{5\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{5x}-1}{5x}} = \frac{2\ln e}{5\ln e} = \frac{2}{5}.$$

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{7^x - 49}{x - 2} = \frac{0}{0}$.

   Solução: Reescrevendo a função, temos que:

$$L = \lim_{x \to 2} \frac{7^x - 49}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{7^x - 7^2}{x - 2} = 7^2 \lim_{x \to 2} \frac{7^{x-2} - 1}{x - 2}.$$

   Definindo $u = x - 2$. Se $x \to 2$, então $u \to 0$.

$$L = 49 \lim_{u \to 0} \frac{7^u - 1}{u} = 49 \ln 7.$$

3. $L = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{e^{(x-\pi)^2} - 1}{1 - \cos(x - \pi)} = \frac{0}{0}$

   Solução: Definindo $u = x - \pi$, temos que:

$$L = \lim_{u \to 0} \frac{e^{u^2} - 1}{1 - \cos(u)} = \lim_{u \to 0} \frac{\left(e^{u^2} - 1\right)(1 + \cos(u))}{1 - \cos^2(u)} = \lim_{u \to 0} \left(\frac{e^{u^2} - 1}{\text{sen}^2(u)}(1 + \cos(u))\right)$$

$$\Rightarrow L = \frac{\overbrace{\lim_{u\to 0}\frac{e^{u^2}-1}{u^2}}^{\ln e}}{\left(\underbrace{\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}}_{1}\right)^2} * \underbrace{\lim_{u\to 0}(1+\cos(u))}_{2} \Rightarrow \boxed{L=2}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x} = \frac{0}{0}$.

<u>**Solução:**</u> Multiplicando e dividindo a função por $a\ln(1+x)$, temos que:

$L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^a-1}{a\ln(1+x)}.\dfrac{a\ln(1+x)}{x}\right)$

$\Rightarrow L = a\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^a-1}{a\ln(1+x)}\right)$

$\Rightarrow L = a\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^a-1}{a\ln(1+x)}\right)$

$\Rightarrow L = a\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^a-1}{a\ln(1+x)}\right)$

$\Rightarrow L = a\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^a-1}{a\ln(1+x)}\right)$

Definindo: $u=(1+x)^a$, então $\ln u = a\ln(1+x)$.

Se $x\to 0$, então $u\to 1$. Assim,

$L = a\lim\limits_{u\to 1}\left(\dfrac{u-1}{\ln u}\right)$. $\qquad (*)$

Definindo: $y=u-1$. Se $u\to 1$, então $y\to 0$. Dessa forma, em $(*)$, temos que:

$L = a\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)} = a.\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = a\dfrac{1}{\ln\left(\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)} = a\dfrac{1}{\ln e} = a.$

5. $\lim\limits_{x\to 2^+}\left((x-2)\dfrac{\ln(2\cos(x-2)-1-\cos(2x-4))-\ln(x^2-4x+4)}{10^x-100}\right) = 0\frac{-\infty+\infty}{0}$

<u>**Solução:**</u>

$L = \lim\limits_{x\to 2}\left((x-2)\dfrac{\ln(2\cos(x-2)-1-\cos(2x-4))-\ln(x^2-4x+4)}{10^x-100}\right)$

$L = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\ln\left(\frac{2\cos(x-2)-1-\cos(2(x-2))}{(x-2)^2}\right)}{100\frac{10^{x-2}-1}{x-2}}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2}\ln\left(\frac{2\cos(x-2)-1-\cos(2(x-2))}{(x-2)^2}\right)}{\lim\limits_{x\to 2}100\frac{10^{x-2}-1}{x-2}} = \dfrac{\ln\left(\frac{0}{0}\right)}{\frac{0}{0}}$

Definindo $u=x-2$.

Se $x\to 2$ então $u\to 0$, temos que:

$$L=\frac{\lim\limits_{u\to0}\ln\left(\frac{2\cos(u)-1-\cos(2u)}{u^2}\right)}{100\underbrace{\lim\limits_{u\to0}\frac{10^u-1}{u}}_{\ln 10}}=\tfrac{1}{100\ln 10}\ln\left(\lim_{u\to0}\frac{2\cos(u)-1-\cos^2(u)+\operatorname{sen}^2(u)}{u^2}\right)$$

$$L=\tfrac{1}{100\ln 10}\ln\left(\lim_{u\to0}\frac{-\left(1-\cos(u)\right)^2+\operatorname{sen}^2(u)}{u^2}\right)$$

$$L=\tfrac{1}{100\ln 10}\ln\left(\underbrace{-\lim_{u\to0}\frac{\left(1-\cos(u)\right)^2}{u^2}}_{0}+\underbrace{\lim_{u\to0}\frac{\operatorname{sen}^2(u)}{u^2}}_{1}\right)\Rightarrow\boxed{L=0}$$

2.6 Continuidade de uma Função

Ao estudar $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ analisa-se o comportamento da função $f(x)$ para valores de x próximos de a, pois o $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ pode existir sem mesmo a função estar definida no ponto $x=a$. No momento em que se analisa o valor de $f(a)$ é igual ou não ao valor do limite bilateral estuda-se continuidade de f em a.

Definição 12: Uma função f é *contínua no ponto* em que $x=a$ se, e somente se,

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

Os pontos em que f não é contínua diz-se que f é descontínua. As descontinuidades podem ser classificadas como:

- **Removível:** se $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$, mas L é diferente de $f(a)$, então $x=a$ é uma descontinuidade removível de f .
- **Primeira Espécie ou Salto:** se ambos os limites laterais existem, porém são distintos, ou seja, o limite bilateral não existe. Reescrevendo, se $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=L_1$ e $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=L_2$, com $L_1\neq L_2$,então a descontinuidade é do tipo salto.
- **Segunda Espécie ou Infinita:** se f tender a $\pm\infty$ no ponto considerado.

Exemplo 21: Verifique se as funções f e g são contínuas no ponto em que $x = 1$.

a. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$; b. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}, \text{ se } x \neq 1 \\ 3 \text{ , se } x = 1 \end{cases}$

<u>**Solução:**</u> Observe que as duas funções são idênticas, exceto no ponto $x = 1$. Assim,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 2) = 3.$$

Logo, o limite bilateral das funções f e g existe.
Conclusões:

a. Note que $x = 1 \notin Df$, então f não é contínua em $x = 1$.Como $f(1)$ não está definida e $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe, então a descontinuidade é do tipo removível.

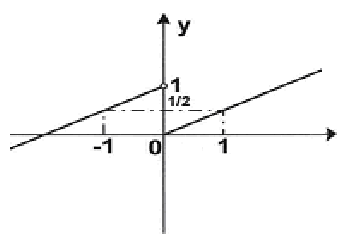
c. Como $g(1) = 3$ e $g(1) = \lim_{x \to 1} g(x)$, então a função g é contínua em $x = 1$.

Exemplo 22: Estude a continuidade das funções:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \text{ , se } x \geq 0 \\ \frac{x}{2} + 1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$;

<u>**Solução:**</u>

Observe que o domínio de f é $Df = \mathbb{R}$ e seu gráfico é:



Graficamente, pode se concluir que f não é contínua em todo o seu domínio, pois a função apresenta um salto no ponto $x = 0$.

Agora, respondendo a questão de forma analítica, usando a definição de continuidade:

(a) $f(0) = 0$;

(b) Os limites laterais são:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{2}\right) = 0;$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{x}{2}+1\right) = 1.$

Logo, como o $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, então não existe o $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (limite bilateral).

Para provar que f é contínua nos demais pontos, basta mostrar que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$, para todo $c \in \mathbb{R}^{*}$.

Conclusão: A função f não é contínua em $x = 0$, pois o limite bilateral não existe. A descontinuidade é do tipo salto ou de primeira espácie.

2. $f(x) = \begin{cases} |2x+5|, & \text{se } x \neq -\frac{5}{2} \\ 3 \quad , & \text{se } x = -\frac{5}{2} \end{cases};$

Solução: Aplicando a definição de módulo, podemos reescrever $f(x)$ como:

$$f(x) = \begin{cases} -(2x+5), & \text{se } x < -\frac{5}{2} \\ 3 \quad , & \text{se } x = -\frac{5}{2} \\ 2x+5, & \text{se } x > -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

Observe que as sentenças (primeira e terceira) que definem a f são contínuas, pois $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$, para todo $c \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{2}\right\}$. Dessa forma, o único ponto que talvez a função f, cujo domínio é $Df = \mathbb{R}$,não seja contínua ocorro no ponto em que $x = \frac{-5}{2}$. Usando a definição de continuidade nesse ponto, temos qe:

(a) $f\left(-\frac{5}{2}\right) = 3;$

(b) Limites laterais:

$\lim\limits_{x\to -\frac{5}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{5}{2}^-} (-2x-5) = 0;$

$\lim\limits_{x\to -\frac{5}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{5}{2}^+} (2x+5) = 0;$

Como os limites laterias são iguais, então $\lim\limits_{x\to -\frac{5}{2}} f(x) = 0.$

Conclusão: Como $\lim\limits_{x\to -\frac{5}{2}} f(x) \neq f\left(-\frac{5}{2}\right)$, então f não é contínua apenas em $x = -\frac{5}{2}$. A descontinuidade é do tipo removível.

Exercício 23: Mostre que a função $f(x) = |x|$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

Solução: Pela definição de módulo, temos que: $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$

Sabe-se que o domínio de f é $Df = \mathbb{R}$. Observe que a função muda de definição em $x = 0$. Logo, é necessário analisar com cuidado somente o ponto em que $x = 0$, pois nos demais pontos pertencentes ao domínio, tem-se que:

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = |c| = f(c)$, para qualquer $c \in Df \Rightarrow f$ é contínua para todo $c \in \mathbb{R}^{*}$.

Em $x = 0$, tem-se que:
* $f(0) = 0$

* Limites laterais: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x) = 0 \end{cases}$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Logo, f é contínua em $x = 0$.

Conclusão: f é função contínua em todo o seu domínio.

Exemplo 24: Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{, se } x \leq -3 \\ -x-1 & \text{, se } -3 < x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{, se } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{2} - (x-2)^2 & \text{, se } x > 2 \end{cases}$$

.

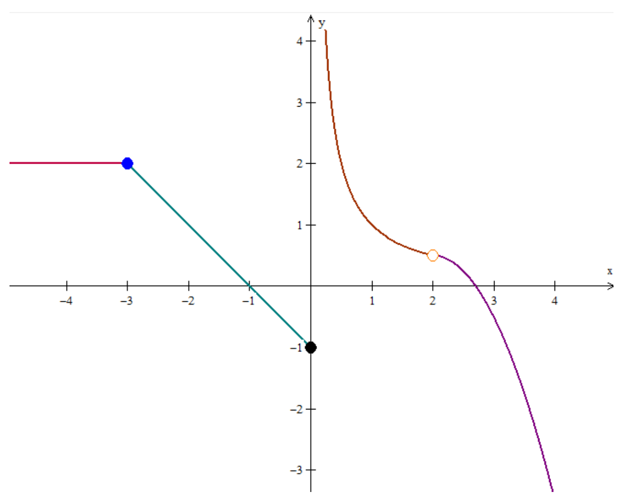
(a) Represente geometricamente o gráfico da função f.

(b) A função f é contínua em $x = -3$, $x = 0$ e $x = 2$? Use a definição de continuidade para justificar sua resposta. E ainda, nos pontos em que f for descontínua, classifique as descontinuidades.

(c) Encontre o $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Solução:

(a) Representação geométrica de f:



(b) Pela definição, uma função f é contínua em um ponto cuja abscissa é a se, e somente se, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

* Em $x = -3$, observe que $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = f(-3) = 2$. Logo, f é contínua em $x = 3$.

* Em $x = 0$, a função f não é contínua, pois o limite bilateral não existe, pois $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. A descontinuidade de segunda espécie ou infinita.

* Em $x = 2$, note que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{2}$, mas como $f(2)$ não está definida, então f não é contínua em $x = 2$. A descontinuidade é do tipo removível.

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Exemplo 25: Use a definição de continuidade para decidir se a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{3\sin x}}{\sin(2x)}, & \text{se } x > 0 \\ \\ \frac{x-3}{2}, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$. Caso conclua que a função não é contínua em $x = 0$, classifique essa descontinuidade.

<u>**Solução:**</u> Pela definição de continuidade em um ponto, f é contínua em $x = 0$ se, e somente se, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

(i) $f(0) = -\frac{3}{2}$;

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x-3}{2} = -\frac{3}{2}$;

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-e^{3\sin x}}{\sin(2x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-e^{3\sin x}}{2\sin x\cos x} = -\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{3\sin x}-1}{\sin x} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2\cos x}$

Definindo $u = \sin x$. Se $x \to 0$ então $u \to 0$. Assim,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{1}{2} \lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{(e^3)^u - 1}{u} = -\frac{1}{2}\ln e^3 = -\frac{3}{2}$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\frac{3}{2}$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

<u>Conclusão:</u> f é contínua em $x = 0$.

Exemplo 26: Sejam f e g as funções definidas por

$$f^{-1}(x) = 1 + \ln(x+b) \quad \text{e } g(x) = \begin{cases} \dfrac{a\mathrm{sen}(x^2-4)}{x+2}, \text{ se } x < -2 \\ \\ f(1), \text{ se } x = -2 \\ \\ (3a-2b)\dfrac{\mathrm{senh}(x+2)}{x+2}, \text{ se } x > -2 \end{cases}.$$

Use a definição de continuidade para determinar o valor das constante a e b para que a função g seja contínua em $x = -2$.

<u>**Solução:**</u>

Pela definição de continuidade, g é contínua em $x = -2$ se, e somente se,

$$\lim_{x\to -2} g(x) = g(-2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L_1 = \lim\limits_{x\to -2^-} g(x) = g(-2) \\ L_2 = \lim\limits_{x\to -2^+} g(x) = g(-2) \end{cases} \qquad (*)$$

Encontrando $\left(f^{-1}\right)^{-1}(x) = f(x)$:
$y = 1 + \ln(x+b) \quad \Rightarrow \quad y - 1 = \ln(x+b)$
$\Rightarrow \quad e^{y-1} = e^{\ln(x+b)} \quad \Rightarrow \quad x = e^{y-1} - b$
Logo, temos que: $f(x) = e^{x-1} - b$

Reescrevendo a função g, temos que:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{a\mathrm{sen}\left(x^2-4\right)}{x+2}, \text{ se } x < -2 \\ 1-b, \text{ se } x = -2 \\ (3a-2b)\dfrac{\mathrm{senh}\,(x+2)}{x+2}, \text{ se } x > -2 \end{cases}.$$

Determinando os limites laterais:

$$L_1 = \lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{a\mathrm{sen}\left(x^2-4\right)}{x+2} = \lim_{x\to-2^-}\left(\frac{a\mathrm{sen}\left(x^2-4\right)}{x+2}\frac{(x-2)}{(x-2)}\right)$$

$$\Rightarrow L_1 = a\lim_{x\to-2^-}\frac{\mathrm{sen}\left(x^2-4\right)}{x^2-4}\underbrace{\lim_{x\to-2^-}(x-2)}_{=-4} \underset{\text{Definindo } v=x+2}{\overset{\downarrow}{=}} -4a\underbrace{\lim_{v\to0^-}\frac{\mathrm{sen}\,(v)}{v}}_{=1}$$

$$\Rightarrow \boxed{L_1 = -4a}$$

$$L_2 = \lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+}\frac{(3a-2b)\,\mathrm{senh}\,(x+2)}{x+2} = \tfrac{0}{0}$$

$$\Rightarrow L_2 = (3a-2b)\lim_{x\to-2^+}\frac{e^{x+2}-e^{-(x+2)}}{x+2} \underset{\text{Definindo } x=x+2}{\overset{\downarrow}{=}} (3a-2b)\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-e^{-u}}{u}$$

$$\Rightarrow L_2 = (3a-2b)\lim_{u\to0^+}\frac{e^{-u}\left(e^u-1\right)}{u} = (3a-2b)\underbrace{\lim_{u\to0^+}e^{-u}}_{=1}\underbrace{\lim_{u\to0^+}\frac{\left(e^u-1\right)}{u}}_{=\ln e}$$

$$\Rightarrow \boxed{L_2 = 3a-2b}$$

Por $(*)$, temos que:

$$\begin{cases} L_1 = g(-2) \\ L_2 = g(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a = 1-b \\ 3a-2b = 1-b \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = -2 \\ b = -7 \end{cases}.}$$

2.7 Continuidade em Intervalos

Uma função é contínua em um intervalo quando é contínua para todo x deste intervalo. Assim, Definição 13: Dizemos que f é *contínua à direita em a* se, e somente se,

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Definição 14: Dizemos que f é *contínua à esquerda em b* se, e somente se,

$$f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x).$$

Definição 15: Uma função $f(x)$ é dita *contínua em um intervalo fechado* $[a, b]$, se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) f é contínua em (a, b);

(ii) f é contínua à direita em a;

(iii) f é contínua à esquerda em b.

Exemplo 27: Verificar se $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é contínua em $[-2, 2]$.
Solução:
Sabemos que o domínio de f é $Df = [-2, 2]$. Verifiquemos se as condições da definição 15 são satisfeitas.

(i) Para qualquer $c \in (-2, 2)$, temos que $f(c) = \sqrt{4 - c^2} = \lim_{x \to c} f(x)$. Logo, f é contínua em (a, b).

(ii) $\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \left(\sqrt{4 - x^2}\right) = 0 = f(-2)$. Então, f é contínua à direita em a.

(iii) $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \left(\sqrt{4 - x^2}\right) = 0 = f(2)$. Então, f é contínua à esquerda em a.

Conclusão: $f(x)$ é contínua no intervalo fechado $[-2, 2]$.

2.8 Propriedades das Funções Contínuas

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas em c, então:

(i) $f(x) \pm g(x)$ é uma função contínua em c;

(ii) $f(x).g(x)$ é uma função contínua em c;

(iii) $\frac{f(x)}{g(x)}$ é uma função contínua em c se $g\left(c\right) \neq 0$ e tem uma descontinuidade em c se $g\left(c\right) = 0$.

Teorema: Todo polinômio é uma função contínua.

Demostração: *Queremos mostrar que* $\lim\limits_{x \to c} p\left(x\right) = p\left(c\right)$, *onde* $p\left(x\right)$ *é um polinômio de grau* n.
Seja $p\left(x\right) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$.

Tomando o limite para $x \to c$, *temos que:*

$$\begin{aligned}\lim_{x \to c} p\left(x\right) &= \lim_{x \to c} \left(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n\right) \\ &= \lim_{x \to c} \left(a_0 x^n\right) + \lim_{x \to c} \left(a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n\right) \\ &= a_0 \lim_{x \to c} x^n + \lim_{x \to c} \left(a_1 x^{n-1}\right) + \lim_{x \to c} \left(a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n\right)\end{aligned}$$

Aplicando-se sucessivamente as propriedades de limites, segue que:
$\lim\limits_{x \to c} p\left(x\right) = a_0 c^n + a_1 c^{n-1} + \cdots + a_{n-1} c + a_n = p\left(c\right)$.
Portanto, $\lim\limits_{x \to c} p\left(x\right) = p\left(c\right)$.

Continuidade de Funções Racionais

Uma função racional é contínua em todo seu domínio.

Exemplo 28: Para quais valores de x a função $f\left(x\right) = \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x + 6}$ é contínua?

Solução: Como $f\left(x\right)$ é uma função racional, então é contínua em todo seu domínio, ou seja, em todos os pontos, exceto onde o denominador se anula. Logo, f é contínua em $\mathbb{R} - \{2, 3\}$.

Continuidade de Funções Compostas

Se $f(x)$ é contínua em $x = c$ e $g(x)$ é contínua em $f(c)$ então, a função composta $(g \circ f)(x)$ é também contínua em c, isto é:

$$\lim_{x \to c} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right) = g(f(a)).$$

Exemplo 29: Sejam $f(x) = \cos x$ e $g(x) = 2^x$. Então a função $g \circ f$ é contínua em $x = 0$?

<u>**Solução:**</u> Como $\lim_{x \to 0} g(f(x)) = \lim_{x \to 0} g(\cos x) = g(0) = 1 = g(f(0))$, então $g \circ f$ é contínua em $x = 0$.

Exemplo 30: Investigue se a função $f(x) = \dfrac{\sin(x) + \cos(2x)}{\ln(\sin x)}$ é contínua em $x = \frac{\pi}{6}$.

<u>**Solução:**</u> Note que $f(x)$ pode ser escrita como:

$$f(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{f_3(f_2(x))},$$

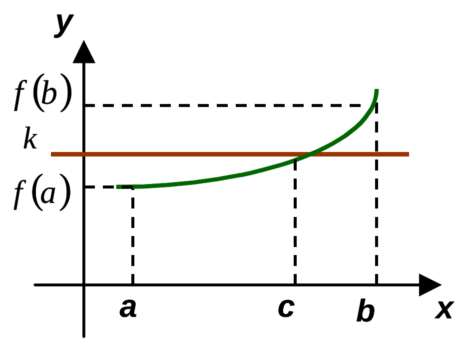
onde $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos 2x$ e $f_3(x) = \ln x$.
Em $x = \frac{\pi}{6}$, temos que:

- $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} f_1(x) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = f_1\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \Rightarrow \quad f_1$ é contínua;
- $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} f_2(x) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = f_2\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \Rightarrow \quad f_2$ é contínua;
- $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} f_3(f_2(x)) = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} f_3\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) = \ln\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) = -\ln 2 = f_3\left(f_2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad f_3 \circ f_2$ é contínua.

Pelas propriedades (i) e (iii) de funções contínuas, concluímos que f é contínua em $x = \frac{\pi}{6}$.

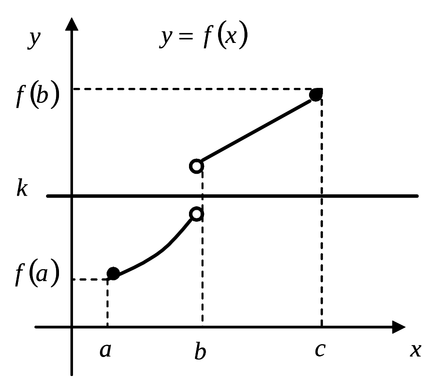
Teorema do Valor Intermediário

A figura abaixo, mostra o gráfico de uma função que é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, sugere que se traçarmos uma reta horizontal $y = k$, onde k está entre $f(a)$ e $f(b)$ então essa reta irá interceptar a curva $y = f(x)$ pelo menos uma vez em $[a, b]$.



Teorema do Valor Intermediário: Se f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e k é um número real tal que $f(a) \leq k \leq f(b)$ ou $f(a) \geq k \geq f(b)$, então existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.

No figura abaixo pode ser observado que se $f(a) < f(b)$, mas não existe nenhuma constante $c \in (0, b)$ tal que $f(c) = k$. Isto não contradiz o teorema do valor intermediário, pois a função $y = f(x)$ apresentada na fugura abaixo não satisfaz uma das hipóteses do teorema anterior, pois f não é contínua em todo o intervalo $[a, b]$.



O próximo teorema é uma consequência do Teorema do Valor Intermediário.

Teorema de Bolzano ou do Anulamento: Se f é contínua em $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, então existe pelo menos um número c entre a e b tal que $f(c) = 0$.

Em outras palavras, o teorema do anulamento nos diz que se f é contínua em um intervalo fechado e se f aplicada nos extremos do intervalo tem sinais opostos, então existe pelo menos uma raiz pertencente a este intervalo.

Exemplo 31:

1. Seja $f(x) = x^2 + x - 2$. Existe alguma raiz de f no intervalo $[0, 2]$?

   Solução: Temos que $f(0) = -2$ e $f(2) = 4$. Como f é contínua em $[0, 2]$, $f(0) < 0$ e $f(2) > 0$, então pelo teorema do valor intermediário, existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

   Determine este c!

2. Verifique se a função $f(x) = e^x - 2\cos(x)$ possui alguma raiz no intervalo $[0, \pi]$. Justifique sua resposta com argumentos consistentes.

   Solução:

   Note que a função f é contínua em $[0, \pi]$, pois é a diferença de funções contínuas e, além disso, $f(0) = -1 < 0$ e $f(\pi) = e^\pi + 2 > 0$. Pelo teorema de Bolzano, existe $c \in (0, \pi)$ tal que $f(c) = 0$.

   Observe que, através do teorema de Bolzano, garantimos a existência de uma raiz no intervalo $[0, \pi]$ da função f, porém para determinar os valores em que $f(x) = 0$, ou seja, $e^x = 2\cos(x)$ é necessário utilizar técnicas que serão estudadas em Cálculo Numérico.

2.9 Exercícios

1. Considere a função $f(x)$ dada na Figura 1 e determine:

   (a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$
   (b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
   (c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
   (d) $f(1)$
   (e) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$
   (f) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

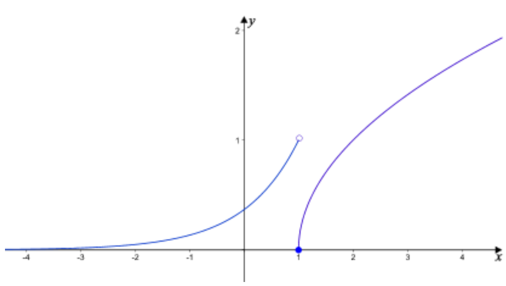


Figura 1: Exercício 1

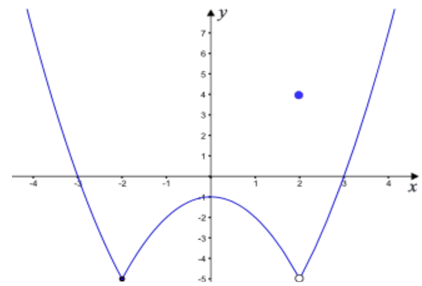


Figura 2: Exercício 2

2. Considere a função $f(x)$ dada na Figura 2 e determine:

   (a) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$
   (b) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$
   (c) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$
   (d) $f(-2)$
   (e) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
   (f) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$
   (g) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
   (h) $f(2)$
   (i) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$
   (j) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

3. Considere a função $f(x)$ dada na Figura **??** e determine:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$
   (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
   (d) $f(0)$
   (e) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$
   (f) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

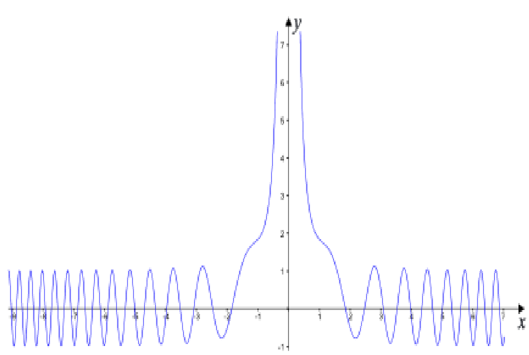


Figura 3: Exercício 3

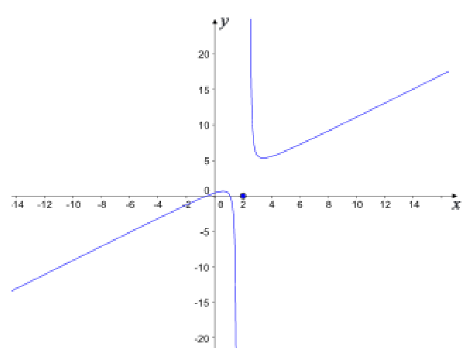


Figura 4: Exercício 4

4. Considere a função $f(x)$ dada na Figura 4 e determine:

   (a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
   (b) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$
   (c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
   (d) $f(2)$
   (e) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$
   (f) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

5. Considere a função $f(x)$ dada na Figura 5 e determine:

(a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

(d) $f(-1)$

(e) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

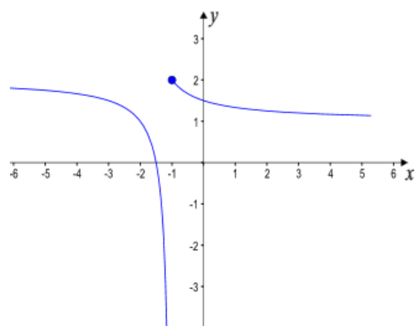


Figura 5: Exercício 5

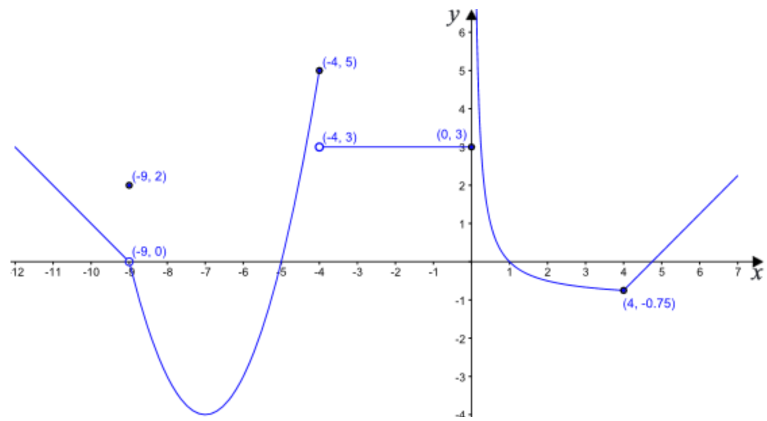


Figura 6: Exercícios 10 e 11.

6. Em cada item determine o valor de δ que satisfaz a relação

$$0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-L| < \epsilon,$$

dados:

(a) $f(x) = 2x+3,\ \ a=1,\ \ L=5\ \text{ e }\ \epsilon = 0,2$

(b) $f(x) = x^2+2,\ \ a=1,\ \ L=3\ \text{ e }\ \epsilon = 0,1$

(c) $f(x) = \ln(x+1),\ \ a=0,\ \ L=0\ \text{ e }\ \epsilon = 0,5$

(d) $f(x) = x^2+2x+1,\ \ a=-1,\ \ L=0\ \text{ e }\ \epsilon = 0,16$

(e) $f(x) = x^2+2x+1,\ \ a=0,\ \ L=1\ \text{ e }\ \epsilon = 1$

(f) $f(x) = \sqrt{x+2},\ \ a=2,\ \ L=2\ \text{ e }\ \epsilon = 1$

7. Use a definição de limite para provar que:

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{x^2-5x+6}{2x-6}\right) = \dfrac{1}{2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \left(4x^2-16x+16\right) = 0$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(x^2+2\right) = 3$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x+1) = 0$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2+2x+1) = 1$

(f) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x+2} = 2$

(g) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{2}$

(h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{2-x} = 0$

(i) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$

(j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-1}{x^2-3x+2} = 0.$

8. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ e tal que, para todo x, é válida a inequação

$$|f(x)-3| \leq 3|x-1|.$$

Determine $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ e justifique sua resposta usando a definição de limite.

9. Seja f uma função definida para $x \in \mathbb{R}$, com $f(1) = 2$ e tal que, para todo x,

$$|f(x) - 2| < \frac{|x-1|^2}{4}.$$

Use a definição de limite para provar que f é contínua em $x = 1$.

10. Considere a função $f(x)$ dada na Figura 6.

(a) Para quais valores de $x_0 \in \mathbb{R}$ existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$? Justifique.

(b) Para quais valores de $x_0 \in \mathbb{R}$ $f(x)$ é contínua? Justifique.

11. Seja $f(x)$ a função representada na Figura 6 e $g(x)$ representada na Figura 7.

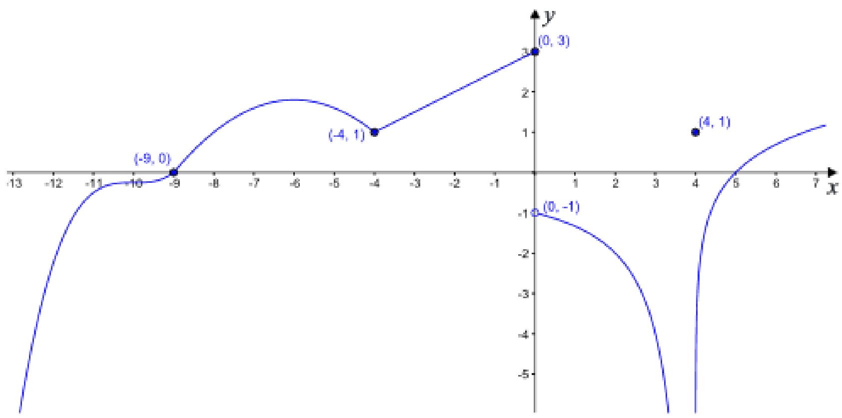


Figura 7: Exercícios 11.

Determine:

(a) $\lim\limits_{x \to -9} (f+g)(x)$

(b) $(f+g)(-9)$

(c) $\lim\limits_{x \to -9} \left(\frac{g}{f}\right)(x)$

(d) $\left(\frac{g}{f}\right)(-9)$

(e) $\lim\limits_{x \to -4^-} (f-g)(x)$

(f) $\lim\limits_{x \to -4^+} (f-g)(x)$

(g) $\lim\limits_{x \to -4} (f-g)(x)$

(h) $\lim\limits_{x \to 0^-} (f+g)(x)$

(i) $\lim\limits_{x \to 0^+} (f+g)(x)$

(j) $\lim\limits_{x \to 0} (f+g)(x)$

(k) $(f+g)(0)$

(l) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{g}{f}\right)(x)$

(m) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{g}{f}\right)(x)$

(n) $\left(\frac{g}{f}\right)(0)$

(o) $\lim\limits_{x \to 4^-} (f+g)(x)$

(p) $\lim\limits_{x \to 4^+} (f+g)(x)$

(q) $\lim\limits_{x \to 4} (f+g)(x)$

(r) $(f+g)(4)$

(s) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f+g)(x)$

(t) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f+g)(x)$

(u) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x)$

(v) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f \cdot g)(x)$

(w) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{g}{f}\right)(x)$

12. Dados $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -4$ e $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 0$. Obtenha os limites abaixo justificando seu raciocínio usando as propriedades de limites.

(a) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + 2g(x)]$

(b) $\lim\limits_{x \to a} [h(x) - 3g(x) + 1]$

(c) $\lim\limits_{x \to a} [g(x)]^2$

(d) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[3]{6 + f(x)}$

(e) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{7g(x)}{2f(x) + g(x)}$

(f) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{3f(x) - 8g(x)}{h(x)}$

13. Determine para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ a função $f(x)$ dada a seguir é contínua.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x-4}, \text{ se } x \neq 4 \\ 1, \text{ se } x = 4 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1+x, \text{ se } x \leq -2 \\ 2-x, \text{ se } -2 < x < 2 \\ 2x-1, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } x < 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ x, \text{ se } x > 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x+3}, \text{ se } x \neq -3 \\ 1, \text{ se } x = -3 \end{cases}$

(e) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x^3}$

(f) $f(x) = \dfrac{|3x^2+2x|}{x}$

14. Determine o(s) valor(es) da constante k, se existir(em), para que a função

$$f(x) = \begin{cases} 2kx, \text{se} x \leq 1 \\ x+k, \text{se} 1 < x < 2 \\ \dfrac{2}{kx}, \text{se} x \geq 2 \end{cases}$$

seja contínua em $\mathbb{R}$.

15. Considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} x^2+2ax+b+15, \text{se} x < -1 \\ 5, \text{se} x = -1 \\ bx^3 - ax^2, \text{se} x > -1 \end{cases}$.

Determine os valores de a e b para que a função $f(x)$ seja contínua em $\mathbb{R}$.

16. Considere as funções g e h definidas por $g(x) = x^2 - 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e $h(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{|x|}, \text{se} x \neq 0 \\ a+1, \text{se} x = 0 \end{cases}$.

(a) Determine $f(x) = (g \circ h)(x)$.

(b) Determine o valor de a para que a função $f(x)$ seja contínua em $x = 0$.

17. Calcule os limites.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$;

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

3. $\lim\limits_{t\to -2}\dfrac{t^3+8}{t+2}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+x-6}$

6. $\lim\limits_{s\to -\infty}\dfrac{s^6-2s^3-5s+1}{4s^4-3s}$

7. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\ln(1+x)-\ln x\right]$

8. $\lim\limits_{y\to -\infty}\dfrac{y-2}{y^2+2y+1}$

9. $\lim\limits_{u\to +\infty}\sqrt[3]{\dfrac{3u^2-4u^5}{2u^7+1}}$

10. $\lim\limits_{y\to -\infty}\dfrac{\sqrt{5y^2-2}}{y+3}$

11. $\lim\limits_{u\to -\infty}\dfrac{u^2-8}{\sqrt{3u^4+u}}$

12. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x+8}{x+3}$

13. $\lim\limits_{s\to 6}\dfrac{s-6}{s^2-36}$

14. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-x}{x^2-2x-8}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x}{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x+3}}$

17. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36}$

18. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^4-16}{h}$

19. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2+bt}-a}{t}$, $a>0$

20. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$, $a,\, b>0$

21. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+h}-2}{h}$

22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

24. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

25. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

26. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+3x-10}{x^3}$

27. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

28. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

29. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{2}x\right)$

30. $\lim\limits_{y\to +\infty}\dfrac{3-y}{\sqrt{5+4y^2}}$

31. $\lim\limits_{y\to -\infty}\frac{3-y}{\sqrt{5+4y^2}}$

32. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^3-x^2+x-1}{x^4+x^3-x+1}$

33. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x^2-1}$

34. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|2x^2-11x+12|}{x^2-16}$

18. Calcule os seguintes limites, usando os limites notáveis sempre que for possível.

(a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin x-\sin 2}{x-2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen}(a-x)}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x.\operatorname{cotg}(x)}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

(e) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{sen}\ x}{x-\pi}$

(f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(x)-\operatorname{sen}\ x}{x^3}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

(j) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln x-\ln 3}{x-3}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\operatorname{tg}^2(x)\right)^{\operatorname{cotg}^2(x)}$

(l) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^x-e^3}{x-3}$

(m) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2-x)}{x-1}$

(n) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^3-3x^2-x+3}$

(o) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3^{\frac{x+2}{7}}-1}{x+2}$

(p) $\lim\limits_{x\to \infty}\left[x\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$

(q) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$

(r) $\lim\limits_{x\to -4}\sqrt[x+4]{(x+5)^2}$

(s) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[5+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^2$

(t) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e^{x-1}-a^{x-1}}{x^2-1}\right)$

(u) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{(2x-2)}-1}{e^{(5x-5)}-1}$

(v) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\operatorname{sen}^2 x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right)$

(w) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-5^x}{\operatorname{sen}(2x)-\operatorname{sen}x}$

(x) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

(y) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x\left(\ln(x-1)-\ln x\right)\right]$

(z) $\lim\limits_{x\to \infty}\left[10+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}\right]$

19. Calcule os seguintes limites, usando os limites notáveis sempre que for possível.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3\operatorname{sen}\ x}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2\cos x+\cos(2x)}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{sen}\ x}-1}{\sin(2x)}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\operatorname{sen}(2x)-\operatorname{sen}x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{\frac{x-1}{4}}-1}{\sin[5(x-1)]}$

(g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}(x)}{\cos x-\sin x}$

(h) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2}$

(i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{sen}^2 x+2\cos^2 x\right)^{\sec^2 x}$

(j) $\lim\limits_{x\to \infty}\left[x\left(\sqrt[x]{e}-1\right)\right]$

(k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

(l) $\lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]$

20. Sejam f e g duas funções definidas por $g(x)=x-2$ e $f(x)=\dfrac{(x-4)^2}{e^x-e^4}\operatorname{cosec}(x-4)$. Determine $\lim\limits_{x\to 6}h(x)$., sendo $h(x)=(f\circ g)(x)$.

21. Sejam $f(x) = \ln\sqrt{2-2x}$, para todo $x < 1$, e $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x$. Encontre, se possível, o valor da constante c para que $f^{-1}(0) = k$.

22. Considere a função $f(x)$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x}\sin(2x) + (x+1)\,b, & \text{se } x < 0 \\ a\left(x^2+1\right) + 3b, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.
Encontre, se possível, uma relação entre as constantes a e b de tal forma que a função $f(x)$ seja contínua em 0.

23. Obtenha $\lim\limits_{x\to-1} F(x)$, sabendo que $F(x) = h\left(f\left(g^{-1}(x)\right)\right)$ com $f(x) = e^x$, $g(x) = e^x - 2$ e $h(x) = \dfrac{1-\cos(x-1)}{x-1}$

24. Sejam $f(x) = \sqrt[3]{\ln(2x-1+|1-x|)}$ e $g(x) = e^{x^3}$.

    (a) Determine o domínio da função f.

    (b) Estude a continuidade da função $h(x)$, sabendo que

    $$h(x) = \begin{cases} g(f(x)) & \text{, se } x \in Df \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{\sin(2x)}{x} - 2, & \text{se } x \in \mathbb{R}^* - \{Df\} \end{cases}.$$

    Caso a função h não seja contínua em todos os pontos, classifique a(s) descontinuidade(s).

25. Use a definição de continuidade para decidir se a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{3\sin x}}{\sin(2x)}, & \text{se } x \leq 0 \\ x - \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x+1}\right), & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$. Caso conclua que a função não é contínua em 0 classifique essa descontinuidade.

26. Sejam $f(x) = \sin(5x)$, $g(x) = x^2 - 1$ e $h(x) = \ln(x-1)$. Determine $\lim\limits_{x\to1} F(x)$, sabendo que $F(x) = \dfrac{f(g(x))}{g(x).h\left(h^{-1}(x-3)\right)}$.

27. Considere a função f, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\left(e^{bx^2}-1\right)}{5-5\cos^2 x}, & \text{se } x < 0 \\ a, & \text{se } x = 0 \\ (x+1)^{(\ln 5)/x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$.
Encontre, se possível, o valor das constante a e b para que a função $f(x)$ seja contínua em 0.

28. Determine o valor dos seguintes limites, justificando sua resposta.

(a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+\cos(x)}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0} xq(x)$, sendo $q(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, \text{ se} x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$

(c) $\lim_{x\to-\infty} e^x \sin(x)$

29. Temos que

- $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ para todo $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$
- $\tan(x) \leq x \leq \sin(x)$ para todo $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$

Use o Teorema do confronto para provar que $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin(x)} = 1$.

30. Seja f definida em $\mathbb{R}$ tal que para todo $x \neq 1$ tem-se que

$$-x^2 + 3x \leq f(x) \leq \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$ justificando sua resposta.

Respostas:

1. .

(a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$
(b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$
(c) $\lim_{x\to 1} f(x)$ não existe
(d) $f(1) = 0$
(e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$
(f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

2. .

(a) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -5$
(b) $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -5$
(c) $\lim_{x\to -2} f(x) = -5$
(d) $f(-2) = -5$
(e) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -5$
(f) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -5$
(g) $\lim_{x\to 2} f(x) = -5$
(h) $f(2) = 4$
(i) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$
(j) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

3. .

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$
(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
(c) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$
(d) $f(0)$ não existe
(e) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ não existe
(f) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ não existe

4. .

(a) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$
(b) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$
(c) $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe
(d) $f(2) = 0$
(e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$
(f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

5. .

(a) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$
(b) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 2$
(c) $\lim_{x\to -1} f(x)$ não existe
(d) $f(-1) = 2$
(e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$
(f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

6. .
(a) $\delta = 0,1$
(b) $\delta = 0,04$
(c) $\delta = 0,4$
(d) $\delta = 0,4$
(e) $\delta = 0,4$
(f) $\delta = 3$

7. .

(a) $\delta = 2\epsilon$
(b) $\delta = \dfrac{\sqrt{\epsilon}}{2}$
(c) $\delta = \min\{|\sqrt{1-\epsilon} - 1|,\ \sqrt{1+\epsilon} - 1\},\ \ \epsilon \in (0,1)$
(d) $\delta = \min\{|e^{-\epsilon} - 1|,\ e^{\epsilon} - 1\}$
(e) $\delta = \min\{|\sqrt{1-\epsilon} - 1|,\ \sqrt{1+\epsilon} - 1\},\ \ \epsilon \in (0,1)$
(f) $\delta = \min\{|(2-\epsilon)^2 - 4|,\ (2+\epsilon)^2 - 4\},\ \ \epsilon \in (0,2)$

(g) $\delta = \min\left\{\left(\dfrac{2}{1-2\epsilon}\right)^2 - 4,\ \left|\left(\dfrac{2}{1+2\epsilon}\right)^2 - 4\right|\right\},\ \ \epsilon \in (0, 1/2)$

(h) $N = 2 - \dfrac{1}{\epsilon},\ \ \epsilon \in (0, 1/2)$ ou N pode ser qualquer número negativo se $\epsilon > \frac{1}{2}$

(i) $\delta = \dfrac{1}{M}$

(j) $N = 2 + \dfrac{1}{\epsilon}$

8. Use a definição de limite e mostre que dado $\epsilon > 0$ basta escolher $\delta = \epsilon/3$ para provar que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.

9. Use a definição de continuidade num ponto e a definição de limite.

10. (a) $x_0 \in \mathbb{R} - \{-4,\ 0\}$ (b) $x_0 \in \mathbb{R} - \{-9,\ -4,\ 0\}$

11. .

(a) 0
(b) 2
(c) $\dfrac{0}{0}$ (indeterminação)
(d) 0
(e) 4
(f) 2
(g) não existe
(h) 6
(i) $+\infty$
(j) não existe
(k) 6
(l) 1
(m) 0
(n) 1
(o) $-\infty$
(p) $-\infty$
(q) $-\infty$
(r) $0,25$
(s) $+\infty$
(t) $+\infty - \infty$ (indeterminação)
(u) $+\infty$
(v) $-\infty$
(w) $\frac{-\infty}{+\infty}$ (indeterminação)

12. (a) -6 (b) 13 (c) 16 (d) 2 (e) $\pm\infty$ (f) $\pm\infty$

13. (a) $\mathbb{R} - \{4\}$ (b) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ (c) $\mathbb{R} - \{0\}$ (d) $\mathbb{R} - \{3\}$ (e) $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ (f) $\mathbb{R} - \{0\}$

14. Não existe valor para k para que f seja contínua.

15. $a = 2$ e $b = -7$

16. (a) $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2, \text{ se } x \neq 0 \\ a^2 + 2a - 1, \text{ se } x = 0 \end{cases}$ (b) $a = -1$

17. .

1. 1	2. 32
3. 12	4. $-\frac{4}{5}$
5. 0	6. $+\infty$
7. 0	8. 0
9. 0	10. $-\sqrt{5}$
11. $\frac{\sqrt{3}}{3}$	12. $\pm\infty$
13. $\frac{1}{12}$	14. $-\frac{1}{6}$

15. $\frac{1}{4}$
16. $-20\sqrt{3}$
17. 1
18. 32
19. $\frac{b}{2a}$
20. $\frac{a\left(1-\sqrt{2}\right)}{b-\sqrt{a^2+b^2}}$
21. $\frac{1}{12}$
22. $\frac{4}{3}$
23. $\frac{1}{9}$
24. $-\frac{1}{3}$
25. 0
26. 0
27. 1
28. -1
29. $+\infty$
30. $-\frac{1}{2}$
31. $\frac{1}{2}$
32. 0
33. $\frac{1}{8}$
34. $-\frac{5}{8}$, se $x \to 4^-$ e $\frac{5}{8}$, se $x \to 4^+$

18. .

(a) $\cos 2$
(b) $2\cos a$
(c) 1
(d) e^{-1}
(e) -1
(f) $\sqrt{3}$
(g) $\dfrac{1}{2}$
(h) a
(i) $a-b$
(j) $\dfrac{1}{3}$
(k) e^3
(l) e^3
(m) -1
(n) $-\frac{1}{2}$
(o) $\dfrac{1}{7}\ln 3$
(p) 1
(q) e^{-2}
(r) e^2
(s) $(e+5)^2$
(t) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln a$
(u) $\dfrac{2}{5}$
(v) $\dfrac{1}{2}$
(w) $\ln\left(\dfrac{2}{5}\right)$
(x) $\dfrac{1}{2}$
(y) -1
(z) $e+10$

19. .

(a) -3
(b) -1
(c) 0
(d) $\dfrac{1}{2}$
(e) 1
(f) $\dfrac{1}{20}\ln 3$
(g) $\sqrt{2}$
(h) e^4
(i) e
(j) 1
(k) $\sqrt{2}$, se $x \to 0^+$; $-\sqrt{2}$, se $x \to 0^-$
(l) $\frac{2}{\pi}$

20. e^{-4}

21. $c = -\ln(\sqrt{2})$

22. $a = 2b$

23. 0

24. (a) $(0, +\infty)$ (b) $h(x)$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}^*$

25. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{3}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{1}{2}$; descontinuidade essencial em $x = 0$.

26. $-\frac{5}{2}$

27. $a = 5$ e $b = \frac{25}{2}$

28. Todos os limites dão zero.

29. -

30. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

Capítulo 3

Derivada e Diferencial

Objetivos

- Determinar a equação de retas tangentes a uma curva em um determinado ponto;
- Resolver problemas que envolvam retas paralelas e normais à reta tangente de uma curva em ponto;
- Calcular derivadas pela definição;
- Derivar qualquer função, usando as regras de derivação;
- Determinar as derivadas laterais;
- Derivar funções compostas (regra da cadeia);
- Derivar implicitamente uma função;
- Encontrar a derivada de funções parametrizadas;
- Determinar derivadas de ordem superior;
- Interpretar geométrica e fisicamente derivadas e diferenciais;
- Resolver problemas que envolvam diferenciais.

3.1 Introdução

O Cálculo Diferencial é o ramo da matemática que tem como foco o estudo do movimento e da variação deste movimento. Seu objeto de estudo são as funções. As idéias que usaremos aqui foram introduzidas no século XVII por Newton e Leibnitz.

A intenção de Cálculo Diferencial é o de medir os incrementos ou variações de grandezas, isto é, problemas do tipo: dada uma função, medir o seu incremento.

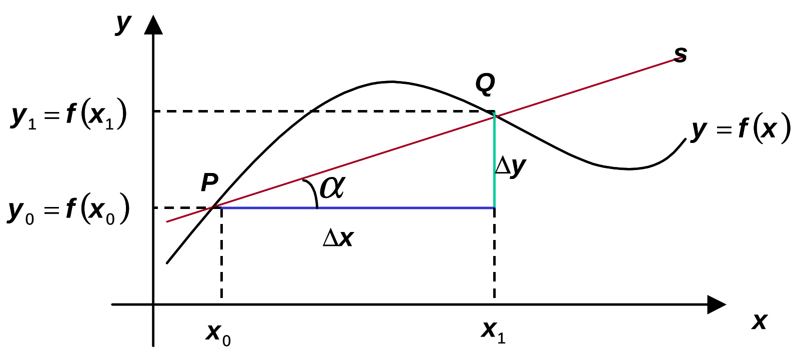
Exemplo 1:

a. A velocidade é a variação da distância em relação ao tempo, isto é, o incremento da distância na unidade de tempo é a velocidade.

b. O peso de um animal aumenta regularmente 5 quilos por mês, isto é, o seu incremento em quilos por mês é 5.

3.2 Reta Tangente

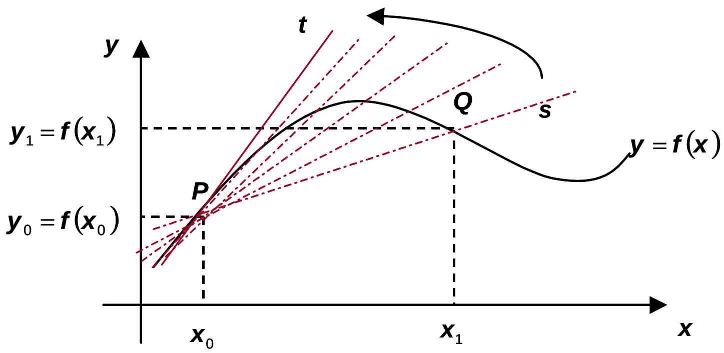
Sejam $y = f(x)$ uma curva do $\mathbb{R}^2$. Sejam P e Q dois pontos distintos desta curva, cujas coordenadas são $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, respectivamente.



A inclinação da reta secante s, que passa pelos pontos P e Q, é

$$m_s = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Supondo que o ponto P se mantém fixo e Q se move sobre a curva na direção de P. Assim, a inclinação da reta secante irá variar. À medida que Q se aproxima de P a inclinação da reta secante varia cada vez menos até atingir uma posição limite. Este limite é chamade de inclinação da reta tangente (t) à curva no ponto P.



Definição 1: Dada uma curva $y = f(x)$, seja $P(x_0, f(x_0))$ um ponto sobre ela. A *inclinação da reta tangente* à curva em P é dada por

$$m_t = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

quando este limite existe.

Definindo $x_1 = x_0 + \Delta x$. Se $x_1 \to x_0$, então $\Delta x \to 0$. Assim, podemos reescrever o coeficiente angular da reta tangente como

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Sabemos que a equação geral de uma reta é

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

onde m é o coeficiente angular da reta.

Dessa forma, podemos escrever a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é

$$y - f(x_0) = m_t(x - x_0).$$

Exemplo 2:

1. Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 + 6x + 9$, no ponto $P(x_0, y_0)$.

   Solução: Pela definição 1, sabemos que a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 + 6x + 9$ no ponto $P(x_0, y_0)$ é

   $m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2 + 6(x_0+\Delta x) + 9 - \left(x_0^2 + 6x_0 + 9\right)}{\Delta x} =$

   $m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 6\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + (\Delta x) + 6) = 2x_0 + 6.$

   Logo, o coeficiente angular da reta tangente é $2x_0 + 6$.

2. Determine a equação da reta tangente à curva $y = 3x^2 + 5$, no ponto cuja abcissa é 4.

<u>**Solução:**</u> Sabemos que, a equação da reta tangente à curva $y = f(x) = 3x^2 + 5$, no ponto de abcissa 4, é

$$y - f(4) = m_t (x - 4),$$

onde:

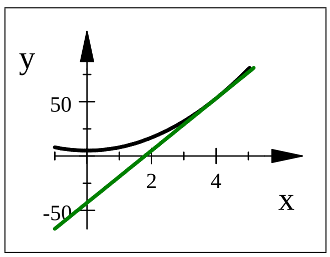
$f(4) = 3(4)^2 + 5 = 53;$

$m_t = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3(4+\Delta x)^2 + 5 - 53}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3\left(16 + 8\Delta x + (\Delta x)^2\right) - 48}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{24\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = 24.$

Logo, a equação da reta tangente é

$y - 53 = 24(x - 4) \quad \Rightarrow \quad y = 24x - 43.$

Geometricamente,



3. Considere à curva $y = \sqrt{x}$. Determine a equação da reta tangente a curva e paralela à reta $r: 18x - 3y + 3 = 0$.

<u>**Solução:**</u> Seja t a reta tangente à curva $y = f(x) = \sqrt{x}$ e paralela à reta $r: y = 6x + 1$.

Como as retas t e s são paralelas, então $m_t = m_s = 6$. (1)

Por outro lado, a inclinação da reta tangente é

$m_t = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x}$

Resolvendo-se o limite acima, obtém-se: $m_t = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. (2)

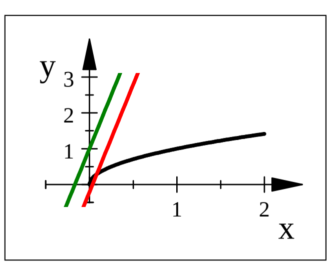
Comparando (1) e (2), tem-se:

$\frac{1}{2\sqrt{x_0}} = 6 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{1}{144}.$

Logo, a equação da reta tangente no ponto $P\left(\frac{1}{144},\ f\left(\frac{1}{144}\right)\right)$ é

$t: y - \frac{1}{12} = 6\left(x - \frac{1}{144}\right) \quad \Rightarrow \quad t: \ y = 6x + \frac{1}{8}.$

Geometricamente,



4. Determine a equação da reta normal à curva $y = x^3$ no ponto $P(1,1)$.

<u>**Solução:**</u> Sejam s e t as retas normal e tangente, respectivamente, à curva $y = x^3$ no ponto $P(1,1)$.

Como as retas t e s são perpendiculares, então $m_t.m_s = -1$. (1)

Por outro lado, a inclinação da reta tangente em P é

$m_t = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^3-1}{\Delta x}$

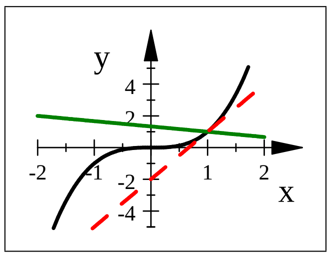
Resolvendo-se o limite acima, obtém-se: $m_t = 3$. (2)

Substituindo (2) em (1), tem-se que: $m_s = -\frac{1}{3}$.

Dessa forma, a equação da reta normal no ponto $P(1,1)$ é

$s: y - 1 = -\frac{1}{3}(x-1) \quad \Rightarrow \quad s: \ y = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x.$

,



3.3 Derivadas

Derivada de uma função num ponto

Definição 2: A derivada de uma função $f(x)$ num ponto x_0, denotada por $f'(x_0)$ é definida pelo limite

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

quando este limite existe.

Lembrando que: $x_1 = x_0 + \Delta x$, podemos escrever $f'(x_0)$ como

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Geometricamente, $f'(x_0)$ representa a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$.

Derivada de uma função

Definição 3: A derivada de uma função $y = f(x)$, denotada por $f'(x)$ tal que seu valor em qualquer $x \in Df$ é definido por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

quando este limite existe.

Dizemos que f é *derivável* quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.

Observações:

(i) Da definição 2**,** temos que o coeficiente angular da reta tangente a uma curva $y = f(x)$, em um ponto $P(x_0, f(x_0))$, é $m_t = f'(x_0)$.

(ii) Na definição 3, o quociente $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ é chamado *Quociente de Newton.*

Outras notações de derivada:

$$f'(x) = y' = D_x f = \frac{dy}{dx}.$$

Exemplo 4: Seja $f(x) = x^2 + 1$. Determine $f'(3)$.

<u>**Solução:**</u> Pela definição de derivada de uma função num ponto, em $x_0 = 3$, temos que:

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left((3+\Delta x)^2+1\right)-\left(3^2+1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10+6\Delta x+(\Delta x)^2-10}{\Delta x} = 6.$$

Portanto, $f'(3) = 6$.

Exemplo 5: Determine a derivada de cada uma das funções:

1. $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$;

   <u>**Solução:**</u> Pela definição de derivada, temos que:

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(x+\Delta x)-2}{(x+\Delta x)+3} - \frac{x-2}{x+3}}{\Delta x}$$
   $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x-2)(x+3)-(x-2)(x+\Delta x+3)}{\Delta x(x+3)(x+\Delta x+3)}$$
   $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x(x+3)(x+\Delta x+3)}$$
   $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5}{(x+3)(x+\Delta x+3)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{5}{(x+3)^2}.$$

2. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

<u>**Solução:**</u> Pela definição de derivada, temos que:

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{\Delta x} = \frac{0}{0}$

Definindo $u^3 = x + \Delta x$ e $a^3 = x$. Se $\Delta x \to 0$, então $u \to a$. Dessa forma,

$f'(x) = \lim\limits_{u \to a} \frac{u-a}{u^3 - a^3} = \lim\limits_{u \to a} \frac{1}{u^2 + au + a^2} = \frac{1}{3a^2}$,

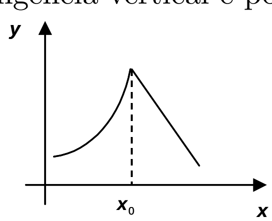
mas $a = \sqrt[3]{x}$, então:

$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

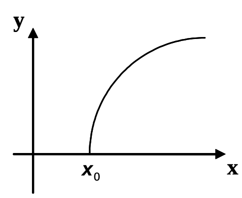
3.4 Diferenciabilidade

Como a definição de derivadas envolve limites, a derivada de uma função existe quando o limite da definição 3 existe. Esses pontos são chamado *pontos de diferenciabilidade* para f, e os pontos onde este limite não existe são chamados de *pontos de não-diferenciabilidade* para f.

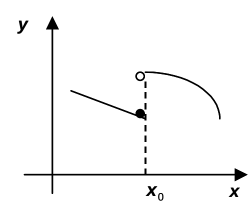
Geometricamente, os pontos de diferenciabilidade de f são aqueles onde a curva $y = f(x)$ tem uma reta tangente,e os pontos de não-diferenciabilidade são aqueles onde a curva não tem reta tangente. De modo informal, os pontos de não-diferenciabilidade mais comumente encontrados podem ser classificados como: picos, pontos de tangência vertical e pontos de descontinuidade.



Ponto anguloso (bico)

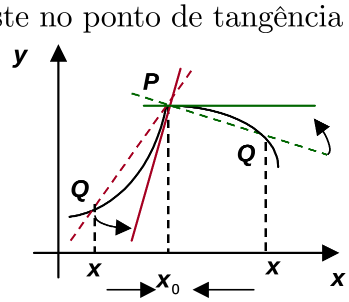


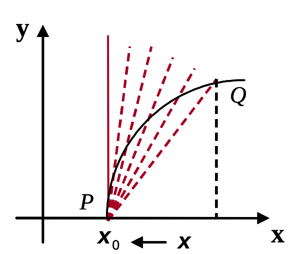
Ponto de tangência vertical



Ponto de descontinuidade

Intuitivamente, os picos são pontos de não-diferenciabilidade, uma vez que não há como desenhar uma única reta tangente em tal ponto. Por um ponto de tangência vertical entendemos um lugar na curva onde a reta secante tende a uma posição limite vertical. Neste pontos, o único candidato razoável para a reta tangente é uma reta vertical naquele ponto. Mas as retas verticais tem inclinação infinita; logo, a derivada (se existisse) teria um valor finito real lá, o que explicaria intuitivamente por que a derivada não existe no ponto de tangência vertical.





Exercício 6: Prove que a função $f(x) = |x|$ não é diferenciável em $x = 0$.

Solução: Pela definição de derivada de uma função em um ponto, temos que:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

$$f'(0) = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0 \\ -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}.$$

Como os limites laterais são diferentes, dizemos que o limite $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ não existe. Conseqüentemente, $f'(0)$ não existe.

Observação: A função $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$ e no entanto não é derivável em $x = 0$.

Continuidade de funções deriváveis

Vejamos um teorema que nos garante a continuidade da função nos pontos em que esta é derivável.

Teorema: Se uma função $y = f(x)$ é derivável em $x = a$, então é contínua em $x = a$.

Demonstração:

Devemos mostrar que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, *ou seja, que* $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$.

Note que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} . \Delta x \right)$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} . \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x}_{=0}.$$

Por hipótese, f é derivável então $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ *existe e é igual a* $f'(x_0)$. *Dessa forma,*

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) = 0.$$

Por propriedades de limites, tem-se que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0).$$

Definindo $x = x_0 + \Delta x$. *Se* $\Delta x \to 0$, *então* $x \to x_0$. *Portanto,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Observações:

(i) Convém notar que o recíproco deste teorema não é necessariamente correto, isto é, uma função $y = f(x)$ pode ser contínua em $x = a$ e, no entanto, não derivável em $x = a$. Pode-se observar isso, no exemplo 6.

(ii) O teorema acima nos garante que nos pontos de descontinuidade a função não pode ter derivada. Embora com isto não se queira dizer que
nos demais exista.

Exemplo 7: A função $y = \sqrt{x}$ é definida e contínua para todo $x \in \mathbb{R}_+$, mas $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ não é definida para $x = 0$. Portanto, não existe y' para $x \in \mathbb{R}_-^*$.

3.5 Derivadas Laterais

Definição 4: Seja $y = f(x)$ uma função definida em $x = x_0$, então *a derivada à direita* de $f(x)$ em x_0 indica por $f'_+(x_0)$ é definida por

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

caso o limite exista.

Definição 5: Seja $y = f(x)$ uma função definida em $x = x_0$, então *a derivada à esquerda* de $f(x)$ em x_0 indica por $f'_-(x_0)$ é definida por

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

caso o limite exista.

Do teorema da unicidade dos limites teremos que, se

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0),$$

então f é derivável em x_0.

Exemplo 8: Seja $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ se } x < 3 \\ 8 - x, \text{ se } x \geq 3 \end{cases}$, calcule a derivada em $x = 3$.

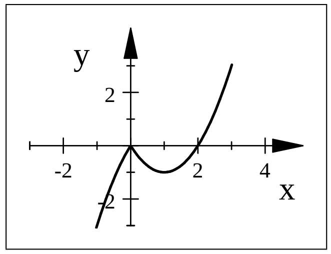
Solução: Sabemos que $f'(3)$ existe se as derivadas laterais existirem e forem iguais.

As derivadas laterais são:
$f'_-(3) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{6+2\Delta x - 6}{\Delta x} = 2;$
$f'_+(3) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{8-3-\Delta x - 8+3}{\Delta x} = -1.$
Como $f'_+(3) \neq f'_-(3)$, então f não é derivável em $x = 3$

Exemplo 9: Seja $f(x) = (x - 2)|x|$. Encontre $f'(0)$.
Solução: Aplicando a definição de módulo, podemos reescrever f como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -(x^2 - 2x), & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

O gráfico de f é:



Geometricamente, concluímos f não é derivável em $x = 0$, pois apresenta um pico neste ponto.

Mostremos analiticamente que $f'(0)$ não existe.

As derivadas laterais são:

$f'_{+}(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{(0+\Delta x)^2-2(0+\Delta x)-0}{\Delta x} = -2;$

$f'_{-}(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^{-}} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^{-}} \frac{-(0+\Delta x)^2+2(0+\Delta x)-0}{\Delta x} = 2.$

<u>Conclusão:</u> $f'(0)$ não existe, pois $f'_{+}(0) \neq f'_{-}(0)$.

3.6 Regras de Derivação

A derivada de uma função é definida como um limite e usamos este limite para calcular alguns casos simples. Vamos desenvolver agora alguns teoremas importantes, que possibilitarão calcular derivadas de forma mais eficiente.

Derivada de uma função constante

Teorema: Se $f(x) = k$, com $k \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = 0$.

<u>Demostração</u>: Pela definição de derivada, temos que:

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{k-k}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$

Exemplo 10: Se $f(x) = 10$, então $f'(x) = 0$.

Regra da Potência

Teorema: Se $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

<u>Demostração</u>: Pela definição de derivada, temos que:

$$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \qquad (1)$$

Pelo binômio de Newton, sabemos que

$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n.$

Substituindo em (1), segue que:

$$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x}$$

$$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x) + \cdots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1} \right) = nx^{n-1}.$$

Portanto, $f'(x) = nx^{n-1}$.

Exemplo 11:

(a) Se $f(x) = x^7$, então $f'(x) = 7x^6$.

(b) Se $f(x) = x$, então $f'(x) = 1$.

Observação: Se $n \in \mathbb{Q}^*$, o teorema acima continua verdadeiro.

Derivada do produto de uma constante por uma função

Teorema: Se f for uma função diferenciável em x e c for um número real constante, então cf também é diferenciável em x e

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{df(x)}{dx}.$$

Demonstração: Defina $g(x) = cf(x)$. *Pela definição de limite, temos que:* $g'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x} = c \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.
Como f *é diferenciável em* x, *então* $f'(x)$ *existe. Assim,*

$$g'(x) = cf'(x)$$

Portanto,

$$(cf(x))' = cf'(x).$$

Exemplo 12:

(a) Se $f(x) = 3x^4$, então $f'(x) = 12x^3$.

(b) Se $f(x) = \frac{x^3}{\pi}$, então $f'(x) = \frac{3}{\pi}x^2$.

Derivada de soma e diferença de funções

Teorema: Se f e g forem funções diferenciáveis em x, então $f \pm g$ também é diferenciável em x e

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx}.$$

Demonstração: Definindo $h(x) = f(x) + g(x)$. *Pela definição de limite, temos que:*
$h'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x}$.
Reagrupando os termos e aplicando a propriedade do limite da soma de funções, tem-se que:

$h'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}.$

Como f e g são funções diferenciáveis, segue que

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Portanto, a derivada da soma é a soma das derivadas, ou seja,

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Exemplo 13: Se $f(x) = 6\sqrt[3]{x} + 3x^2 + 7$. Determine $f'(x)$.

Solução: Aplicando a propriedade da derivada da soma, temos que:

$f'(x) = (6\sqrt[3]{x} + 3x^2 + 7)' = (6\sqrt[3]{x})' + (3x^2)' + (7)'.$

Pelas propriedades da derivada de uma constante por uma função e da derivada de uma função constante, segue que:

$f'(x) = 6\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + 3(x^2)' + 0.$

Aplicando a regra da potência, obtém-se:

$f'(x) = 6.\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} + 3.2x^{2-1} = 6x + \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} = 6x + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}.$

Regra do Produto

Teorema: Se f e g forem funções diferenciáveis em x, então $f.g$ também é diferenciável em x e

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x)\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\frac{df(x)}{dx}.$$

Demonstração: Definindo $h(x) = f(x).g(x)$. Pela definição de limite, temos que:

$h'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x)-f(x).g(x)}{\Delta x}$

Somando e subtraindo $f(x).g(x+\Delta x)$, segue que:

$h'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x)-\mathbf{f}(x).\mathbf{g}(x+\Delta x)+\mathbf{f}(x).\mathbf{g}(x+\Delta x)-f(x).g(x)}{\Delta x}.$

Rearranjando os termos e aplicando a propriedade do limite da soma de funções, tem-se que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x)-f(x).g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x).g(x+\Delta x)-f(x).g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)(f(x+\Delta x)-f(x))}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)(g(x+\Delta x)-g(x))}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade do produto de limites, temos que:

$h'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) . \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) . \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}.$

Como f e g são funções diferenciáveis, segue que:

$$h'(x) = g(x).f'(x) + f(x).g'(x).$$

Exemplo 14: Se $f(x) = x^2\sqrt{x}$. Determine $f'(x)$.
Solução 1: Pela regra do produto, temos que:
$f'(x) = (x^2)'\sqrt{x} + x^2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = 2x\sqrt{x} + x^2\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

Solução 2: Reescrevendo f, temos que: $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$.
Pela regra do produto, obtemos que:
$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

Observação: O teorema anterior é válido para mais de duas funções, vejamos para três. Se $f(x) = u(x).v(x).w(x)$, então

$$f'(x) = u'(x).v(x).w(x) + v'(x).u(x).w(x) + w'(x).u(x).v(x)$$

e assim sucessivamente.

Regra do Quociente

Teorema: Se f e g forem funções diferenciáveis em x e $g(x) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ também é diferenciável em x e

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Demonstração: Definindo $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. *Pela definição de limite, temos que:*
$h'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x).f(x+\Delta x)-g(x+\Delta x)f(x)}{\Delta x.g(x).g(x+\Delta x)}\right)$.
Somando e subtraindo $f(x).g(x)$, *segue que:*
$h'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x).f(x+\Delta x)+\mathbf{f}(x).\mathbf{g}(x)-\mathbf{f}(x).\mathbf{g}(x)-g(x+\Delta x)f(x)}{\Delta x.g(x).g(x+\Delta x)}\right)$
Rearranjando os termos e aplicando a propriedade do limite da soma de funções, tem-se que:
$h'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)(.f(x+\Delta x)-f(x))}{g(x).g(x+\Delta x)\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)(-g(x)+g(x+\Delta x))}{g(x).g(x+\Delta x)\Delta x}$
$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)}.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{.f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)}{g(x).g(x+\Delta x)}.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$
Como f *e* g *são funções diferenciáveis, segue que:*
$h'(x) = \frac{1}{g(x)}.f'(x) - \frac{f(x)}{(g(x))^2}g'(x) = \frac{g(x).f'(x)-f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$.
Portanto,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Exemplo 15: Se $f(x) = \frac{x^2+2}{3x-1}$. Determine $f'(x)$.
Solução: Pela regra do quociente, temos que:
$f'(x) = \frac{(3x-1).\left(x^2+2\right)'-\left(x^2+2\right)(3x-1)'}{(3x-1)^2} = \frac{(3x-1).2x-\left(x^2+2\right)3'}{(3x-1)^2} = \frac{3x^2-2x-6}{(3x-1)^2}$.

Exemplo 16: Seja $f(x) = \dfrac{2 + x^2 h(x)}{x^3}$. Se $h(x)$ é derivável, $h(1) = -2$ e $h'(1) = 10$. Calcule $f'(1)$. A função f é contínua em $x = 1$? Justifique.

Solução:

Como h é derivável então existe $h'(x)$. Assim, pela regra do quociente, temos que

$$f'(x) = \frac{x^3.\left(2 + x^2 h(x)\right)' - \left(2 + x^2 h(x)\right).3x^2}{x^6}$$

$$\Rightarrow \ f'(x) = \frac{x.\left(2xh(x) + x^2 h'(x)\right) - \left(2 + x^2 h(x)\right).3}{x^4}.$$

Em $x = 1$, temos que
$f'(1) = 2h(1) + h'(1) - 6 - 3h(1) = h'(1) - 3h(1) - 6.$

Sabemos que $h(1) = -2$ e $h'(1) = 10$, temos que
$f'(1) = 10 - 3(-2) - 6 = 10.$

Como $f'(1)$ existe, f é derivável em 1 então, por teorema, f é contínua em $x = 1$.

Regra da Cadeia

Teorema: Sejam $y = f(u)$ e $u = g(x)$, duas funções deriváveis. A derivada da função y em relação a x é igual ao produto da derivada da função y em relação a u pela derivada da função u em relação a x, isto é,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \text{ ou } \frac{dy}{dx} = f'(g(x)).g'(x).$$

Demonstração: Formemos separadamente o quociente de Newton em ambas as funções, assim:

$$y + \Delta y = f(u + \Delta u) \Rightarrow \Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) \Rightarrow \tfrac{\Delta y}{\Delta u} = \tfrac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}; \quad (1)$$

$$u + \Delta u = g(x + \Delta x) \Rightarrow \Delta u = g(x + \Delta x) - g(x) \Rightarrow \tfrac{\Delta u}{\Delta x} = \tfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}. \quad (2)$$

Notemos que, os primeiros membros de (1) e (2), nos dão uma razão entre o acréscimo de cada função e o acréscimo da correspondente variável. Os segundos membros de (1) e (2), nos dão as mesmas razões de outra forma.

Escolhemos os primeiros membros por ser uma notação mais conveniente e façamos o produto, assim:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}.\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Fazendo $\Delta x \to 0$, então $\Delta u \to 0$ pois, $u(x)$ é derivável e portanto contínua. De onde vem que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Da definição de derivadas vem:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \text{ ou } \frac{dy}{dx}=f'\left(g(x)\right).g'\left(x\right).$$

Portanto,

$$\left(\left(f\circ g\right)(x)\right)'=f'\left(g(x)\right).g'\left(x\right).$$

Exemplo 17: Determine as derivadas das funções abaixo:

(a) $y=\sqrt{5x+2}$;

<u>**Solução:**</u> Definindo $u=5x+2$. Então, $y=\sqrt{u}$.

Assim, $\frac{dy}{du}=\frac{1}{2\sqrt{u}}$ e $\frac{du}{dx}=5$.

Pela regra da cadeia, temos que:

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}.5 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{5}{2\sqrt{5x+2}}.$

(b) $y=\sqrt[3]{\sqrt{2x^2-x}}$;

<u>**Solução:**</u> Definindo $v=2x^2-x,\ \ u=\sqrt{v}$ e $y=\sqrt[3]{u}$.

Pela regra da cadeia, temos que: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ (1)

mas, $\frac{du}{dx}=\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$.

Temos que:

$\frac{dv}{dx}=4x-1;\ \ \frac{du}{dv}=\frac{1}{2\sqrt{v}};\ \ \ \frac{dy}{dx}=\frac{2}{3\sqrt[3]{u^2}}.$

Assim, substituindo em (1), segue que:

$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3\sqrt[3]{u^2}}.\left(\frac{1}{2\sqrt{v}}.(4x-1)\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{4x-1}{6\sqrt[3]{2x^2-x}\sqrt{2x^2-x}}=\frac{4x-1}{6(2x^2-x)^{\frac{5}{6}}}.$

(c) $y=\left(2x^2-x\right)^4.\left(\frac{x^2+2}{3x-1}\right)$;

<u>**Solução:**</u> Pela regra do produto, temos que:

$y'=\left(\left(2x^2-x\right)^4\right)'\left(\frac{x^2+2}{3x-1}\right)+\left(\frac{x^2+2}{3x-1}\right)'\left(2x^2-x\right)^4.$ $(*)$

Pela regra da cadeia, temos que:

$\left(\left(2x^2-x\right)^4\right)'=4\left(2x^2-x\right)^3\left(2x^2-x\right)'=4\left(4x-1\right)\left(2x^2-x\right)^3.$ (1)

Pela regra do quociente, segue que:

$\left(\frac{x^2+2}{3x-1}\right)'=\frac{3x^2-2x-6}{(3x-1)^2}$ (2)

Substituindo (1) e (2) em $(*)$, temos que:

$y' = 4\,(4x-1)\,(2x^2-x)^3\left(\frac{x^2+2}{3x-1}\right) + \frac{3x^2-2x-6}{(3x-1)^2}\,(2x^2-x)^4$

$y' = \frac{(2x^2-x)^3}{(3x-1)^2}\,(54x^4 - 35x^3 + 90x^2 - 50x + 8).$

(d) $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2+1)^{-2}}}.$

<u>**Solução:**</u> Reescrevendo a função, temos que:

$$y = x^2\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Pela regra do produto, temos que:

$y' = (x^2)'\,(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + x^2\left((x^2+1)^{\frac{2}{3}}\right)'. \qquad (*)$

Pela regra da cadeia, temos que:

$\left((x^2+1)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}\,(x^2+1)^{\frac{2}{3}-1}\,(x^2+1)' = \frac{4x}{3}\,(x^2+1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{4x}{3(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}. \qquad (1)$

Substituindo (1) em $(*)$, temos que:

$y' = 2x\,(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + x^2\left(\frac{4x}{3(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}\right)$

$y' = \frac{2x}{3(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}\,(3x^2+5).$

Derivada das funções trigonométricas

1. **Derivada da Função Seno:** Se $f(x) = \sin x$, então $f'(x) = \cos x$.

   <u>Demonstração</u>: Pela definição de limite, temos que:

   $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$

   $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos(\Delta x) + \sin(\Delta x)\cos x - \sin x}{\Delta x}$

   $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x[\cos(\Delta x) - 1] + \sin(\Delta x)\cos x}{\Delta x}$

   Aplicando propriedades de limites, temos que:

   $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sin x . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \cos x . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}$

   $f'(x) = \sin x * 0 + \cos x * 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x.$

Portanto,

$$f'(x) = \cos x.$$

Exemplo 18: Se $f(x) = \sin\sqrt{3x^2-1}$, determine $f'(x)$.

<u>**Solução:**</u> Definindo $u = \sqrt{3x^2-1}$, então $y = f(u) = \sin u$.
Pela regra da cadeia, temos que:
$y' = f'(u).u' = (\sin u)'.u' = u'.\cos u$
$y' = \left((3x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right)'.\cos\left(\sqrt{3x^2-1}\right)$
$y' = \frac{1}{2}(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}(3x^2-1)'.\cos\left(\sqrt{3x^2-1}\right)$
$y' = \frac{3x}{\sqrt{3x^2-1}}\cos\left(\sqrt{3x^2-1}\right).$

2. **Derivada da Função Cosseno:** Se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\sin x$.

   <u>*Demonstração*</u>*: Pela definição de limite, temos que:*
   $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$
   $= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\cos(\Delta x)-\sin(\Delta x)\sin x-\cos x}{\Delta x}$
   $= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x[\cos(\Delta x)-1]-\sin(\Delta x)\sin x}{\Delta x}$
   Aplicando propriedades de limites, temos que:
   $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos x.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin x.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}$
   $f'(x) = \cos x * 0 - \sin x * 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x.$
   Portanto,

   $$f'(x) = -\sin x.$$

   Exemplo 19: Se $f(x) = \cos\left(\sin\sqrt{x+1}\right)$, determine $f'(x)$.

   <u>**Solução:**</u> Definindo $u = \sin\sqrt{x+1}$, então $y = f(u) = \cos u$.
   Pela regra da cadeia, temos que:
   $y' = f'(u).u' = (\cos u)'.u' = -u'.\sin u$
   $y' = -\left(\sin\left(\sqrt{x+1}\right)\right)'.\sin\left(\sin\left(\sqrt{x+1}\right)\right)$
   $y' = -\left(\cos\sqrt{x+1}.\left(\sqrt{x+1}\right)'\right).\sin\left(\sin\left(\sqrt{x+1}\right)\right)$
   $y' = \frac{-1}{2\sqrt{x+1}}\cos\left(\sqrt{x+1}\right).\sin\left(\sin\left(\sqrt{x+1}\right)\right).$

3. **Derivada da Função Tangente:** Se $f(x) = tg(x)$, então $f'(x) = \sec^2 x$.

<u>*Demonstração*</u>*: Escrevendo a função tangente como um quociente, temos que:*

$$f(x) = \text{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Derivando pela regra do quociente, temos que:
$f'(x) = \frac{\cos x(\sin x)' - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$
Portanto,

$$f'(x) = \sec^2 x.$$

Exemplo 20: Se $f(x) = tg\left(\sqrt{\sin(x^2)}\right)$, determine $f'(x)$.

<u>**Solução:**</u> Definindo $u = \sqrt{\sin(x^2)}$, então $y = f(u) = tg(u)$.
Pela regra da cadeia, temos que:
$y' = f'(u).u' = (\text{tg}(u))'.u' = u'.\sec^2 u$
$y' = \left((\sin(x^2))^{\frac{1}{2}}\right)'.\sec^2\left(\sqrt{\sin(x^2)}\right)$
$y' = \frac{1}{2}(\sin(x^2))^{-\frac{1}{2}}(\sin(x^2))'.\sec^2\left(\sqrt{\sin(x^2)}\right)$
$y' = x\frac{\cos\left(x^2\right)}{\sqrt{\sin(x^2)}}\sec^2\left(\sqrt{\sin(x^2)}\right).$

4. **Derivada da Função Cotangente:** Se $f(x) = $cotg$(x)$, então $f'(x) = -\text{cossec}^2(x)$.

<u>*Demonstração*</u>*: Escrevendo a função cotangente como um quociente, temos que:*

$$f(x) = \text{cotg}(x) = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Derivando pela regra do quociente, temos que:
$f'(x) = \frac{\sin x(\cos x)' - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -cossec^2(x).$
Portanto,

$$f'(x) = -cossec^2(x).$$

Exemplo 21: Se $f(x) = $cotg$(x^2 + x + 1)$, determine $f'(x)$.

<u>**Solução:**</u> Definindo $u = x^2 + x + 1$, então $y = f(u) = $cotg$(u)$.
Pela regra da cadeia, temos que:
$y' = f'(u).u' = (\text{cotg}(u))'.u' = -u'.\text{cossec}^2 u$
$y' = -\left(x^2 + x + 1\right)'.\text{cossec}^2\left(x^2 + x + 1\right)$
$y' = -(2x + 1).\text{cossec}^2\left(x^2 + x + 1\right).$

5. **Derivada da Função Secante:** Se $f(x) = \sec(x)$, então $f'(x) = \text{tg}(x)\sec x$.

   <u>*Demonstração*</u>*: Escrevendo a função secante como um quociente, temos que:*

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x} = (\cos x)^{-1}.$$

   Derivando pela regra da cadeia, temos que:
   $f'(x) = -1(\cos x)^{-2}(\cos x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos x} = tg(x)\sec x.$
   Portanto,

$$f'(x) = \text{tg}(x)\sec x.$$

6. **Derivada da Função Cossecante:** Se $f(x) = \text{cossec}(x)$, então $f'(x) = -\text{cotg}(x)\text{cossec}(x)$.

   <u>*Demonstração*</u>*: Escrevendo a função cossecante como um quociente, temos que:*

$$f(x) = \text{cossec}(x) = \frac{1}{\sin x} = (\sin x)^{-1}.$$

   Derivando pela regra da cadeia, temos que:
   $f'(x) = -1(\sin x)^{-2}(\sin x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x}.\frac{1}{\sin x} = -cotg(x).cossec(x).$
   Portanto,

$$f'(x) = -\text{co}tg(x).\text{cossec}(x).$$

   Exemplo 22: Se $f(x) = \text{cossec}\sqrt[4]{\sec(x)}$, determine $f'(x)$.

   <u>**Solução:**</u> Definindo $u = \sqrt[4]{\sec(x)}$, então $y = f(u) = \text{cossec}(u)$.
   Pela regra da cadeia, temos que:
   $y' = -u'.\text{cotg}(u)\text{cossec}(u)$
   $y' = -\left(\sqrt[4]{\sec(x)}\right)'.\text{cotg}\left(\sqrt[4]{\sec(x)}\right)\text{cossec}\left(\sqrt[4]{\sec(x)}\right)$
   $y' = -\frac{1}{4}(\sec(x))^{-\frac{3}{4}}(\sec(x))'\text{cotg}\left(\sqrt[4]{\sec(x)}\right)\text{cossec}\left(\sqrt[4]{\sec(x)}\right)$
   $y' = -\frac{1}{4}(\sec(x))^{-\frac{3}{4}}\text{tg}(x)\sec(x).\text{cotg}\left(\sqrt[4]{\sec(x)}\right)\text{cossec}\left(\sqrt[4]{\sec(x)}\right)$
   $y' = -\frac{1}{4}(\sec(x))^{\frac{1}{4}}\text{tg}(x).\text{cotg}\left(\sqrt[4]{\sec(x)}\right)\text{cossec}\left(\sqrt[4]{\sec(x)}\right).$

Observação: Todos os teoremas demonstrados até aqui, são generalizados, com o uso da função composta:

1. Se $f(u) = \sin u$, então $f'(u) = u'\cos u$;

2. Se $f(u) = \cos u$, então $f'(u) = -u'\sin u$;

3. Se $f(u) = \text{tg}(u)$, então $f'(u) = u'\sec^2 u$;

4. Se $f(u) =$cotg(u), então $f'(u) = -u'\text{cossec}^2(u)$;

5. Se $f(u) = \sec u$, então $f'(u) = u'\text{tg}(u)\sec(u)$;

6. Se $f(u) =$cossec(u), então $f'(u) = -u'\text{cossec}(u)\text{cotg}(u)$.

Exemplo 23: Encontre o(s) ponto(s) em que a(s) reta(s) tangente(s) ao gráfico de $y = 3x - \text{tg}(x)$ é(são) paralela(s) à reta $y - x = 2$.

Solução:

Se t a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ que é paralela $r : y = x + 2$. Então:

$m_t = m_r \quad \Rightarrow m_t = 1$.

Por outro lado, sabemos que:

$m_t = f'(x_o) = 3 - \sec^2 x_o \quad \Rightarrow \quad m_t = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 3 - \sec^2 x_o = 2$

$\Rightarrow \cos x_o = \pm 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_o = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x_o = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Então os pontos de tangência são: $\boxed{P\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, f\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\right) \text{ e } Q\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi,\ f\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi\right)\right)}$

Derivada da função exponencial

Teorema: Se $y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, então $y' = a^x \ln a$.

Demonstração: Pela definição de limite, temos que:

$y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{(x+\Delta x)} - a^x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x}$.

Pelas propriedades de limites, temos que:

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} a^x . \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$.

Portanto,

$$y' = a^x \ln a.$$

Caso particular: Se $a = e$, então para $y = e^x$, segue que

$$y' = e^x \ln e \quad \Rightarrow \quad y' = e^x.$$

Derivada da função logarítmica

Teorema: Se $y = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, então $y' = \frac{1}{x}\log_a e$.

Demonstração: Pela definição de derivadas, temos que:

$y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \log_a\left(\lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right).$$

Definindo $\frac{1}{u} = \frac{\Delta x}{x}$, *ou seja,* $u = \frac{x}{\Delta x}$. *Se* $\Delta x \to 0$, *então* $u \to \infty$. *Assim,*

$y' = \log_a\left(\lim\limits_{u \to \infty}\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{\frac{u}{x}}\right) = \log_a\left(\lim\limits_{u \to \infty}\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\log_a e$.

Portanto,

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Caso particular: Se $a = e$, então para $y = \log_e x = \ln x$, segue que

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}.$$

Derivada de uma função exponencial composta

Teorema: Se $y = u^v$, onde $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções de x, deriváveis em um intervalo I e $u(x) > 0$, $\forall x \in I$, então

$$y' = v.u^{v-1}.u' + u^v. \ln u.v'.$$

Demonstração: Usando propriedades de logaritmo, podemos escrever a função $y = u^v$, como

$$y = e^{\ln u^v} \quad \Rightarrow \; y = e^{v \ln u} \;.$$

Note que:
$y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, *onde* $g(w) = e^w$ *e* $w = f(x) = v \ln u$.
Pela regra da cadeia, temos que:
$y' = g'(w).w' \quad \Rightarrow \quad y' = e^w.(v \ln u)'$
$\Rightarrow y' = e^w \left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) \quad \Rightarrow \quad y' = e^{v \ln u}(v' \ln u + v.u^{-1}.u')$
Por propriedade de logaritmo, segue que:
$y' = e^{\ln u^v}(v' \ln u + v.u^{-1}.u') \;\Rightarrow\; y' = u^v(v' \ln u + v.u^{-1}.u')$.
Portanto,

$$y' = v.u^{v-1}.u' + u^v. \ln u.v'.$$

Resumo: Aplicando a regra da cadeia para as funções compostas abaixo, obtém-se:

1. Se $y = a^u$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, então $y = u'.a^u \ln a$;

2. Se $y = e^u$, então $y = u'e^u$;

3. Se $y = \log_a u$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, então $y = \frac{u'}{u} \log_a e$;

4. Se $y = \ln u$, então $y = \frac{u'}{u}$;

5. Se $y = u^v$, então $y' = v.u^{v-1}.u' + u^v. \ln u.v'$.

Exemplo 24: Determine a derivada das funções:

1. $y = 5^{\sqrt{2x^2+3x}}$;

Solução: Definindo $u = \sqrt{2x^2 + 3x}$, então $y = 5^u$.

Pela regra da cadeia, temos que:

$u' = \left((2x^2 + 3x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,(2x^2 + 3x)^{-\frac{1}{2}}\,.\,(2x^2 + 3x)' = \frac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x}}.$

Pela regra de derivação da função exponencial composta, temos que:

$y' = 5^u \ln 5.u' \;\;\Rightarrow\;\; y' = \frac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x}}5^{\sqrt{2x^2+3x}} \ln 5.$

2. $y = \ln\left(\sin\left(e^{-2x}\right)\right)$;

Solução: Definindo $u = \sin\left(e^{-2x}\right)$, então $y = \ln u$.

Pela regra da cadeia, temos que:

$u' = \left(\sin\left(e^{-2x}\right)\right)' \;\Rightarrow\; u' = \left(e^{-2x}\right)' \cos\left(e^{-2x}\right)$

$u' = (-2x)'\left(e^{-2x}\right)\cos\left(e^{-2x}\right) \;\Rightarrow\; u' = -2e^{-2x}\cos\left(e^{-2x}\right).$

Pela regra de derivação da função logaritmo composta, temos que:

$y' = \frac{u'}{u} \;\Rightarrow\; y' = \frac{-2e^{-2x}\cos\left(e^{-2x}\right)}{\sin(e^{-2x})} = -2e^{-2x}\mathrm{cotg}(e^{-2x})\,.$

3. $y = e^{\sqrt{e^{x^2}}}$;

Solução: Definindo $u = \sqrt{e^{x^2}}$, então $y = \ln u$.

Pela regra da cadeia, temos que:

$u' = \left(\left(e^{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)' \;\Rightarrow\; u' = \frac{1}{2}\left(e^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(e^{x^2}\right)' = xe^{x^2}\left(e^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$u' = x\left(e^{x^2}\right)^{1-\frac{1}{2}} = x\sqrt{e^{x^2}}.$

Pela regra de derivação da função exponencial composta, temos que:

$y' = u'e^u \;\Rightarrow\; y' = x\sqrt{e^{x^2}}e^{\sqrt{e^{x^2}}}.$

4. $y = \sec\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) + \mathrm{cossec}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$;

Solução: Aplicando propriedades de derivadas, temos que:

$y' = \left(\sec\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) + \mathrm{cossec}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)' = \left(\sec\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)\right)' + \left(\mathrm{cossec}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)'.$

Definindo $u = \sqrt[3]{2x+1}$ e $v = \frac{x-1}{x+1}$.

Pela regra da cadeia, temos que:

$u' = \left((2x+1)^{\frac{1}{3}}\right)' \;\Rightarrow\; u = \frac{2}{3}\,(2x+1)^{-\frac{2}{3}}.$

Pela regra do quociente, temos que:

$v' = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \;\Rightarrow\; v' = \frac{(x+1)(x-1)'-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$

Pela regra de derivação de funções trigonométricas composta, temos que:

$y' = u'\sec(u)\mathrm{tg}(u) - v'\mathrm{cotg}(v)\mathrm{cotg}(v)$

$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} \sec\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) \mathrm{tg}\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) - \frac{2}{(x+1)^2} \mathrm{cotg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \mathrm{cotg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$

5. $y = (\sin x)^{x^2}$;

   Solução: Definindo $u = \sin x$ e $v = x^2$.

   Pela regra de derivação de uma função exponencial composta, temos que:

   $y' = v.u^{v-1}.u' + u^v.\ln u.v'$

   $y' = x^2 (\sin x)^{x^2-1} (\sin x)' + (\sin x)^{x^2} \ln(\sin x).(x^2)'$

   $y' = x^2 (\sin x)^{x^2-1} \cos x + 2x (\sin x)^{x^2} \ln(\sin x)$

   $y' = x (\sin x)^{x^2} \left(x \frac{\cos x}{\sin x} + 2\ln(\sin x)\right)$

   $y' = x (\sin x)^{x^2} (x\mathrm{cotg}(x) + 2\ln(\sin x)).$

Derivada de funções hiperbólicas

Como as funções hiperbólicas são definidas em termos das funções exponenciais, a derivação dessas funções se resume na derivação de funções exponenciais.

Exemplo 25: Mostre que se $f(x) = \sinh x$, então $f'(x) = \cosh x$.

Solução: Lembre que: $f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Assim,

$f'(x) = (\sinh(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$

Portanto, $f'(x) = \cosh x$.

Analogamente, obtemos as derivadas das demais funções hiperbólicas, que são:

1. Se $f(u) = \sinh u$, então $f'(u) = u' \cosh u$;

2. Se $f(u) = \cosh u$, então $f'(u) = u' \sinh u$;

3. Se $f(u) =$tgh(u), então $f'(u) = u'\mathrm{sech}^2(u)$;

4. Se $f(u) =$cotgh(u), então $f'(u) = -u'\mathrm{cossech}^2(u)$;

5. Se $f(u) =$sech(u), então $f'(u) = -u'\mathrm{tgh}(u)\mathrm{sech}(u)$;

6. Se $f(u) =$cossech(u), então $f'(u) = -u'\mathrm{cossech}(u)\mathrm{cotgh}(u)$.

Observação: *A demonstração das derivadas das funções hiperbólicas fica como exercício!*

Exemplo 26: Determine a derivada das funções:

1. $y = \cosh\left(\left(x^3+2\right)e^{4x}\right)$;

Solução: Definindo $u = \left(x^3+2\right)e^{4x}$. Então: $y = \cosh u$.

Pela regra do produto, temos que:

$u' = \left(x^3+2\right)\left(e^{4x}\right)' + \left(x^3+2\right)' e^{4x} \;\Rightarrow\; u' = 4\left(x^3+2\right)e^{4x} + 3x^2 e^{4x}$

$u' = \left(4x^3+3x^2+8\right)e^{4x}$.

Pela regra de derivação de funções hiperbólicas, temos que:

$y' = (\cosh u)' = u' \sinh u \;\Rightarrow\; y' = \left(4x^3+3x^2+8\right)e^{4x}\sinh\left(\left(x^3+2\right)e^{4x}\right)$.

2. $y = \text{tgh}\left(\ln\left(\frac{x^2+3}{x^4}\right)\right)$;

Solução 1: Definindo $u = \ln\left(\frac{x^2+3}{x^4}\right)$. Assim, $y = \text{tgh}(u)$.

Derivando o ln, temos que:

$u' = \frac{\left(\frac{x^2+3}{x^4}\right)'}{\frac{x^2+3}{x^4}} = \frac{-\frac{2\left(x^2+6\right)}{x^5}}{\frac{x^2+3}{x^4}} = -\frac{2x^2+12}{x^3+3x}$.

Pela regra de derivação de funções hiperbólicas, temos que:

$y' = u'\text{sech}^2(u) \;\Rightarrow\; y' = -\frac{2x^2+12}{x^3+3x}\text{sech}^2\left(\ln\left(\frac{x^2+3}{x^4}\right)\right)$.

Solução 2: Definindo $u = \ln\left(\frac{x^2+3}{x^4}\right)$. Assim, $y = \text{tgh}(u)$.

Aplicando as propriedades de ln para reescrever a função u, temos que:

$u = \ln\left(x^2+3\right) - 4\ln x \;\Rightarrow\; u' = \frac{2x}{x^2+3} - \frac{4}{x} = -\frac{2x^2+12}{x^3+3x}$.

Pela regra de derivação de funções hiperbólicas, temos que:

$y' = u'\text{sech}^2(u) \;\Rightarrow\; y' = -\frac{2x^2+12}{x^3+3x}\text{sech}^2\left(\ln\left(\frac{x^2+3}{x^4}\right)\right)$.

3. $y = \sqrt{\text{cotgh}\,(t+1)^2}$;

Solução: Definindo $u = \text{cotgh}(t+1)^2$. Então, $y = \sqrt{u}$.

Pela regra da cadeia, temos que:

$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}.u' \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{\text{cotgh}(t+1)^2}}\left(-\text{cossech}^2\,(t+1)^2\right)\left((t+1)^2\right)'$

$y' = \frac{-(t+1)\text{cossech}^2(t+1)^2}{\sqrt{\text{cotgh}(t+1)^2}}$.

Exemplo 27: Sejam f uma função diferenciável e g a função definida por

$$g(x) = \cosh(2x-1)\, f\left(8x^3\right).$$

Supondo que $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 12$ determine o valor $f'(1)$.

Solução:

Pela regra do produto, temos que:

$g'(x) = (2x-1)'\text{senh}(2x-1)\; f\left(8x^3\right) + \cosh(2x-1)\; f'\left(8x^3\right)\left(8x^3\right)'$

$\Rightarrow g'(x) = 2\text{senh}(2x-1)\ f(8x^3) + 24x^2\cosh(2x-1)\ f'(8x^3)$
Como $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 12$, segue que:
$12 = 2\underbrace{\text{senh}(0)}_{0}\ f(1) + 24\frac{1}{4}\underbrace{\cosh(0)}_{1}\ f'(1)$
$\Rightarrow 12 = 6f'(1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'(1) = 2.}$

3.7 Derivação Implícita

Definição 6: Quando a relação entre x e y é dada por uma equação da forma $F(x,y) = 0$, dizemos que y é uma *função implícita* de x.

Uma equação em x e y pode implicitamente definir mais do que uma função de x.Por exemplo, se resolvermos a equação

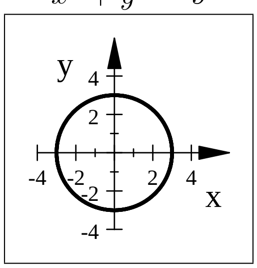
$$x^2 + y^2 = 9, \qquad (1)$$

para y em termos de x, obtemos $y = \pm\sqrt{9-x^2}$. Assim, encontramos duas funções que estão definidas implicitamente por (1), são

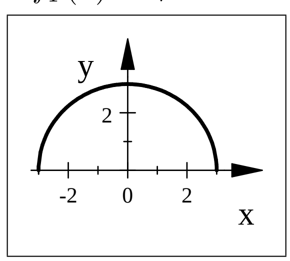
$$f_1(x) = \sqrt{9-x^2}; \qquad f_2(x) = -\sqrt{9-x^2};$$

Os gráficos dessas funções são semicírculos do círculo $x^2+y^2 = 9$ que estão localizados acima e abaixo do eixo das ordenadas.

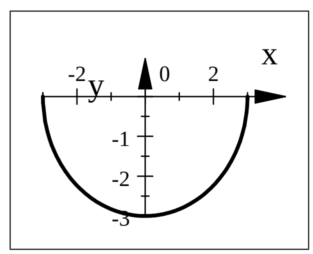
$x^2 + y^2 = 9$



$f_1(x) = \sqrt{9-x^2}$



$f_2(x) = -\sqrt{9-x^2}$



Observe que o círculo completo não passa no teste da reta vertical, e portanto, não é o gráfico de uma função de x. Contudo, os semicírculos superior e inferior passam no teste da reta vertical.

Nem sempre é possível definir a forma explícita de uma função definida implicitamente. Por exemplos, as funções

$$x^3 + y^2 = 3xy,$$
$$y^4 + 3xy + 2\ln y = 0,$$

não podem ser expressas na forma $y = f(x)$.

O método da derivação implícita permite encontrar a derivada de uma função assim definida, sem a necessidade de explicitá-la.

Derivada de uma função dada implicitamente

Suponhamos que $F(x,y) = 0$ define implicitamente uma função derivável $y = f(x)$. A derivada de uma função na forma implícita é obtida usando a regra da cadeia. Assim, é possível determinar y' sem explicitar y.

Exemplo 28: Derive implicitamente as funções abaixo.

1. $x^2 + y^2 = 9$;

   <u>**Solução:**</u> Derivando ambos os membros com relação a x, temos que:

   $(x^2 + y^2)' = (9)' \quad \Rightarrow \quad 2x\frac{dx}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

2. $x^3 + y^2 = 3xy$;

   <u>**Solução:**</u> Derivando ambos os membros com relação a x, temos que:

   $(x^3 + y^2)' = (3xy)' \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 2y\frac{dy}{dx} = 3\,(xy)' \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 2y\frac{dy}{dx} = 3y + 3x\frac{dy}{dx}$

   $\Rightarrow \quad (2y - 3x)\,\frac{dy}{dx} = 3y - 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3y-3x^2}{2y-3x}$.

3. $y^4 + 3xy + 2\ln y = 0$

   <u>**Solução:**</u> Derivando ambos os membros com relação a x, temos que:

   $(y^4 + 3xy + 2\ln y)' = (0)' \quad \Rightarrow \quad 4y^3\frac{dy}{dx} + 3x\frac{dy}{dx} + 3y + 2\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 0$

   $\Rightarrow \quad \left(4y^3 + 3x + \frac{2}{y}\right)\frac{dy}{dx} = -3y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{3y^2}{4y^4+3xy+2}$.

4. $y^7 + \ln\left(\sin\left(xy^2\right)\right) = e^{2x^3+x}$.

   <u>**Solução:**</u> Derivando ambos os membros com relação a x, temos que:

   $7y^6y' + \frac{\left(\sin\left(xy^2\right)\right)'}{\sin(xy^2)} = (6x^2+1)\,e^{2x^3+x}$

   $\Rightarrow \quad 7y^6y' + \frac{\left(xy^2\right)'\cos\left(xy^2\right)}{\sin(xy^2)} = (6x^2+1)\,e^{2x^3+x}$

   $\Rightarrow \quad 7y^6y' + (y^2 + 2xyy')\text{cotg}(xy^2) = (6x^2+1)\,e^{2x^3+x}$

   $\Rightarrow (7y^6 + 2x\cot\left(xy^2\right))\,y' = (6x^2+1)\,e^{2x^3+x} - y^2\text{cotg}(xy^2)$

   $\Rightarrow y' = \frac{\left(6x^2+1\right)e^{2x^3+x} - y^2\cot\left(xy^2\right)}{7y^6+2x\cot(xy^2)}$.

Exemplo 29: Determine o(s) ponto(s) em que a reta tangente à curva

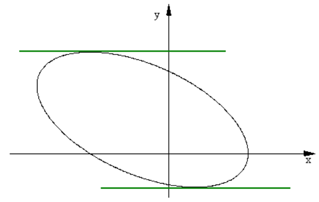
$$C : x^2 + xy + y^2 - 3y = 9$$

é horizontal.

<u>**Solução:**</u>

- Interpretação geométrica:

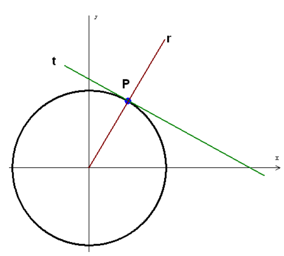
Pela próxima figura, note que existem dois pontos em que a reta tangente a curva C é horizontal.



- Determinando analiticamente os pontos em que a reta tangente a curva C é horizontal:

Sabemos que a reta tangente é horizontal nos pontos em que $m_t = \frac{dy}{dx} = 0$.
Derivando implicitamente a equação que descreve C, temos que:
$2x + xy' + y + 2yy' - 3y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2x-y}{x+2y-3}. \qquad (*)$
Se $x + 2y - 3 \neq 0$, então $\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -2x. \qquad (1)$
Substituindo em C, temos que:
$3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = 0$, ou seja, $x = -3$ ou $x = 1$.
Substituindo estes valores em (1), obtemos: $P_1(-3, 6)$ e $P_2(1, -2)$.
Portanto, a reta tangente é horizontal nos pontos P_1 e P_2, pois satisfazem a condição $(*)$.

Exemplo 30: Seja C uma circunferência com centro na origem e raio igual a 2. Mostre que a tangente a C no ponto $P\left(1, \sqrt{3}\right)$ é ortogonal a reta que passa pela origem do sistema de coordenadas e pelo ponto P.
Solução:
Interpretação geométrica:



Equação da circunferência C cujo centro está na origem e cujo raio é igual a 2 :

$$C : x^2 + y^2 = 4. \qquad (1)$$

Sejam t e r, respectivamente, a reta tangente à C em P e a reta que passa pela origem e polo ponto P.

Objetivo do exercício: mostrar que $r \perp t$.

Sabemos que $m_r.m_t = -1 \Leftrightarrow m_r.m_t = -1$.
* Coeficiente angular da reta r: $m_r = \frac{\sqrt{3}-0}{1-0} = \sqrt{3}$.
* Para obter o coeficiente angular da reta t deriva-se impliticamente a equação (1) com relação a x, pois sabemos que o coeficiente angular de uma reta tangente é: $m_t = \left.\frac{dy}{dx}\right|_P = -\left.\frac{x}{y}\right|_P \quad \Rightarrow \quad m_t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Portanto, $m_r.m_t = -1$.

Observação: A técnica utilizada na demonstração da derivada de uma função exponencial composta também e a derivada implícita de uma função podem ser usadas para facilitar a derivação de algumas funções que envolvam quocientes e produtos. Isto pode ser observeado o próximo exemplo.

Exemplo 31: Obtenha a derivada da função $y = \dfrac{\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[5]{\operatorname{sen}^3(2x)}}{e^{3x^7+x}}$.

Solução:

Antes de derivar, usando a regra do quociente, iremos reescrever a função com a finalidade de que sua derivada seja obtida mais facilmente.

Aplicando o logaritmo neperiano em ambos os lados, estamos que:

$\ln y = \ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[5]{\operatorname{sen}^3(2x)}}{e^{3x^7+x}}\right)$

Aplicando as propriedades de logaritmo neperiano, temos que:

$\Rightarrow \ln y = \ln\left(\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[5]{\operatorname{sen}^3(2x)}\right) - \ln\left(e^{3x^7+x}\right)$

$\Rightarrow \ln y = \ln(2x+1)^{\frac{1}{3}} + \ln(\operatorname{sen}(2x))^{\frac{3}{5}} - (3x^7+x)\ln e$

$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{3}\ln(2x+1) + \frac{3}{5}\ln(\operatorname{sen}(2x)) - (3x^7+x)$

Derivando implicitamente com relação a x, temos que:

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\ln(2x+1) + \frac{3}{5}\ln(\operatorname{sen}(2x)) - (3x^7+x)\right)$

$\Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\dfrac{2}{2x+1}\right) + \frac{3}{5}\left(\dfrac{2\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}\right) - 21x^6 - 1$

Multiplicando ambos os lados por y, obtém-se que:

$\Rightarrow y' = y\left(\dfrac{2}{6x+3} + \dfrac{6}{5}\operatorname{cotg}(2x) - 21x^6 - 1\right)$

Susbtituindo a função y dada inicialmente segue que:

$y' = \dfrac{\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[5]{\operatorname{sen}^3(2x)}}{e^{3x^7+x}}\left(\dfrac{2}{6x+3} + \dfrac{6}{5}\operatorname{cotg}(2x) - 21x^6 - 1\right)$.

3.8 Derivada da função inversa

Exemplo 32: Considere a função $y = f(x) = \frac{x}{x+2}$. Determine $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dx}{dy}$.

Solução:

Como $y = \frac{x}{x+2}$, derivando pela regra do quociente, obtemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x+2)^2}.$$

Para determinar $\frac{dx}{dy}$, iremos escrever x em função de y e, a seguir, derivar x com relação a y.

Se $x = g(y) = \frac{2y}{1-y}$, então $\frac{dx}{dy} = \frac{2}{(y-1)^2}$.

Lembrando que $y = \frac{x}{x+2}$, temos que:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(x+2)^2}{2}.$$

Observe que,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Neste exemplo, verificamos uma aparente relação que existe entre a derivada de uma função e a derivada de sua inversa.

Para determinarmos um relação entre as derivadas de f e f^{-1}, suponha que ambas as funções são diferenciáveis, e seja

$$y = f^{-1}(x). \qquad (\#)$$

Reescrevendo esta equação como

$$x = f(y),$$

e diferenciando implicitamente com relação a x, resulta que
$\frac{d(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(f(y)) \quad \Rightarrow \quad 1 = f'(y)\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}.$

A partir de (#) obtemos a seguinte fórmula que relaciona a derivada de f^{-1} com a derivada de f.

$$\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Podemos enunciar este resultado como:

Teorema: Seja $y = f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto (a, b). Suponhamos que $f(x)$ admite uma função inversa $x = g(y)$ contínua. Se $f'(x)$ existe e é diferente de zero para qualquer $x \in (a, b)$, então $g = f^{-1}$ é derivável e

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Em outras palavras, se $y = f(x)$ admita uma função inversa então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Derivada das funções trigonométricas inversas

1. **Derivada da função Arco Seno:** Seja $f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por $f(x) = \arcsin x$. Então, $y = f(x)$ é derivável em $(-1, 1)$ e $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Demostração: Sabemos a função arco seno é a inversa da função seno, ou seja,

   $$y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y.$$

   Como $(\sin y)'$ existe e é diferente de zero $\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pelo teorema da derivada da função inversa, temos que:

$$y'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}.$$

Pela identidade trigonométrica, temos que: $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$. *Assim,*

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Portanto,

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. **Derivada da função Arco Cosseno:** Seja $f:[-1,1]\rightarrow[0,\pi]$ definida por $f(x)=\arccos x$. Então, $y=f(x)$ é derivável em $(-1,1)$ e $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Demostração: Sabemos a função arco cosseno é a inversa da função cosseno, ou seja,

   $$y=\arccos x \quad\Leftrightarrow\quad x=\cos y.$$

   Como $(\cos y)'$ *existe e é diferente de zero* $\forall y\in(0,\pi)$, *pelo teorema da derivada da função inversa, temos que:*

   $$y'=\frac{1}{(\cos y)'}=-\frac{1}{\sin y}.$$

   Pela identidade trigonométrica, temos que: $\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}$. *Assim,*

   $$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   Portanto,

   $$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. **Derivada da função Arco Tangente:** Seja $f:\mathbb{R}\rightarrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ definida por $f(x)=\operatorname{arctg}(x)$. Então, $y=f(x)$ é derivável e $y'=\frac{1}{1+x^2}$.

   Demostração: Sabemos a função arco tangente é a inversa da função tangente, ou seja,

   $$y=\operatorname{arctg}(x) \quad\Leftrightarrow\quad x=\operatorname{tg}(y).$$

   Como $(\operatorname{tg}(y))'$ *existe e é diferente de zero* $\forall y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, *pelo teorema da derivada da função inversa, temos que:*

   $$y'=\frac{1}{(\operatorname{tg}(y))'}=\frac{1}{\sec^2 y}.$$

Pela identidade trigonométrica, temos que: $\sec^2 y = \operatorname{tg}^2(y) + 1$. *Assim,*

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(y) + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Portanto,

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4. **Derivada da função Arco Cotangente:** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ definida por $f(x) = \operatorname{arccotg}(x)$. Então, $y = f(x)$ é derivável e $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

   <u>*Demostração*</u>*: Sabemos a função arco cotangente é a inversa da função cotangente, ou seja,*

   $$y = \operatorname{arccotg}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{cotg}(y).$$

   Como $(\operatorname{cotg}(y))'$ *existe e é diferente de zero* $\forall y \in (0, \pi)$, *pelo teorema da derivada da função inversa, temos que:*

   $$y' = \frac{1}{(\operatorname{cotg}(y))'} = -\frac{1}{\operatorname{cossec}^2 y}.$$

   Pela identidade trigonométrica, temos que: $\operatorname{cossec}^2 y = \operatorname{cotg}^2(y) + 1$. *Assim,*

   $$y' = -\frac{1}{\operatorname{cotg}^2(y) + 1} = -\frac{1}{x^2 + 1}.$$

   Portanto,

   $$y' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

5. **Derivada da função Arco Secante:** Seja $f(x) = \operatorname{arcsec}(x)$, definida para $|x| \geq 1$. Então, $y = f(x)$ é derivável para $|x| > 1$ e $y' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

   <u>*Demostração*</u>*: Sabemos a função arco secante é a inversa da função secante, ou seja,*

   $$y = \operatorname{arcsec}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \sec(y) = \frac{1}{\cos y} \quad \Rightarrow \quad y = \arccos\left(\frac{1}{x}\right).$$

   Pela regra da cadeia, nos pontos em que existe a primeira derivada, temos que:

   $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = \frac{\sqrt{x^2}}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2}\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$

   Portanto,

   $$y' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}.$$

6. **Derivada da função Arco Cossecante:** Seja $f(x) =$arccossec(x), definida para $|x| \geq 1$. Então, $y = f(x)$ é derivável para $|x| > 1$ e $y' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

   Demostração: Sabemos a função arco cossecante é a inversa da função cossecante, ou seja,

$$y = \operatorname{arccossec}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{cossec}(y) = \frac{1}{\sin y} \quad \Rightarrow \quad y = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right).$$

   Pela regra da cadeia, nos pontos em que existe a primeira derivada, temos que:
   $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = -\frac{\sqrt{x^2}}{x^2\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.
   Portanto,

$$y' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

Para funções compostas, usando a regra da cadeia, temos que:

1. Se $y = \arcsin u$, então $y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
2. Se $y = \arccos u$, então $y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
3. Se $y =$arctg(u), então $y' = \frac{u'}{1+u^2}$;
4. Se $y =$arccotg(u), então $y' = -\frac{u'}{1+u^2}$;
5. Se $y = \operatorname{arcsec}(u)$, então $y' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$;
6. Se $y =$arccossec(u), então $y' = -\frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$.

Exemplo 33: Determine a derivada das funções.

1. $f(x) = \arcsin[\ln(x^2-1)]$;
   Solução: Definindo $u = \ln(x^2-1)$. Então, $u' = \frac{2x}{x^2-1}$.
   $y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\ln(x^2-1))^2}}\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x}{(x^2-1)\sqrt{1-\ln^2(x^2-1)}}$.

2. $f(x) = \operatorname{arcsec}\left(xe^{x^3}\right)$;
   Solução: Definindo $u = xe^{x^3}$. Então, $u' = (1+3x^3)e^{x^3}$.
   $y' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} = \frac{\left(1+3x^3\right)e^{x^3}}{\left|xe^{x^3}\right|\sqrt{x^2e^{2x^3}-1}}$.

3. $f(x) = \text{arccossec}\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)$;

 Solução: Definindo $u = \ln\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$. Então, $u' = \frac{x}{x^2+1}$.

 $y' = -\frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} = -\frac{x}{(x^2+1)\left|\ln\sqrt{x^2+1}\right|\sqrt{\ln^2\sqrt{x^2+1}-1}}$.

Derivada das funções hiperbólicas inversas

Pelo capítulo anterior, sabemos que a função $y = \arg\sinh x$ também pode ser escrita como $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Assim, definindo $u = x+\sqrt{x^2+1}$, segue que:

$$y' = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Logo, se $y = \arg\sinh x$, então $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Por desenvolvimento análogo podem ser obtidas as derivadas das demais funções hiperbólicas inversas.

A seguir, apresentamos as derivadas das funções hiperbólicas inversas compostas.

1. Se $y = \arg\sinh u$, então $y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$;
2. Se $y = \arg\cosh u$, então $y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$, para $u > 1$;
3. Se $y = \arg\ \text{tgh}(u)$, então $y' = \frac{u'}{1-u^2}$, para $|u| < 1$;
4. Se $y = \arg\ \text{cotgh}(u)$, então $y' = \frac{u'}{1-u^2}$, para $|u| > 1$;
5. Se $y = \arg\ \text{sech}(u)$, então $y' = -\frac{u'}{u\sqrt{1-u^2}}$, para $0 < u < 1$;
6. Se $y = \arg\ \text{cossech}(u)$, então $y' = -\frac{u'}{|u|\sqrt{1+u^2}}$, para $u \neq 0$.

Exemplo 34: Determine a derivada da função $y = \arg\ \text{tgh}\left(\cosh^2(6x)\right)$.
Solução: Se $u = \cosh^2(6x)$, então:
$u' = 12\cosh(6x)\sinh(6x) = 6\sinh(12x)$.
Assim,
$y' = \frac{u'}{1-u^2} = \frac{6\sinh(12x)}{1-\cosh^4(6x)}$.

3.9 Derivadas de Ordem Superior

Se a derivada f' de uma função f for ela mesma diferenciável, então a derivada de f' será denotada por f'', sendo chamada de *derivada segunda* de f. À medida que tivermos diferenciabilidade, poderemos continuar o processo de diferenciar derivadas para obter as derivadas terceira, quarta, quinta e mesmo as derivadas mais altas de f. As derivadas sucessivas de f são denotadas por

$$f',\ f''=(f')'\ \ ,\ f'''=(f'')',\ f^{(4)}=(f''')',\ f^{(5)}=\left(f^{(4)}\right)',\ \cdots$$

Chamadas de derivadas primeira, segunda, terceira e assim por diante. Acima da derivada terceira, fica muito estranho continuar a usar linhas para indicar derivadas. Assim sendo, denotamos por inteiros entre parênteses a indicação da *ordem* das derivadas. Nesta notação, a derivada de ordem arbitrária é denotada por

$$f^{(n)}\text{: } n\text{-ésima derivada de } \dot{f}.$$

Derivadas sucessivas também podem ser denotadas por

$$\begin{array}{lll}
y'=f'(x) & \Rightarrow & \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[f(x)]; \\
y''=f''(x) & \Rightarrow & \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}[f(x)]\right)=\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]; \\
y'''=f'''(x) & \Rightarrow & \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]\right)=\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]; \\
\vdots \quad \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Em geral, escrevemos

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d^n}{dx^n}[f(x)].$$

Exemplo 38: Obtenha a expressão da *n-ésima* derivada das funções abaixo:

1. $y=x^5-3x^3+x^2+5$;

   Solução: Temos que:

   $y'=5x^4-9x^2+2x$;

   $y''=20x^3-18x+2$;

   $y'''=60x^2-18$;

   $y^{(4)}=120x$;

   $y^{(5)}=120$;

   $y^{(6)}=0$;

   $\vdots$

   Determinando algumas derivadas, observamos que a forma geral da *n-ésima* é

   $$y^{(n)}=0,\ \forall n\geq 6.$$

2. $y = a^{2x}$, para $a > 0$ e $a \neq 1$;
Solução: Temos que:
$y' = 2\ln a.a^{2x}$;
$y'' = (2\ln a)^2 .a^{2x}$;
$y''' = (2\ln a)^3 .a^{2x}$;
$y^{(4)} = (2\ln a)^4 .a^{2x}$;
$\vdots$
Determinando algumas derivadas, observamos que a forma geral da *n-ésima* é
$$y^{(n)} = (2\ln a)^n .a^{2x}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. $y =$sen x;
Solução: Temos que:
$y' = \cos x =$sen$\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;
$y'' = -$sen $x =$sen$\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$;
$y''' = -\cos x =$sen$\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$;
$y^{(4)} =$sen $x =$sen$\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right)$;
$\vdots$
Determinando algumas derivadas, observamos que a forma geral da *n-ésima* é
$$y^{(n)} = \text{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. $y = \ln(3x+1)$;
Solução: Temos que:
$y' = \frac{3}{3x+1}$;
$y'' = -\frac{3.3}{(3x+1)^2}$;
$y''' = \frac{3.3.2.3}{(3x+1)^3}$;
$y^{(4)} = -\frac{3.3.2.3.3.3}{(3x+1)^4}$;
$\vdots$
Observamos que a forma geral da *n-ésima* é
$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} 3^n (n-1)!}{(3x+1)^n}, \forall n \in \mathbb{N}..$$

5. $y = \frac{1}{x+a}$.

Solução: Observe que, $y = (x+a)^{-1}$. Assim, temos que:

$y' = -(x+a)^{-2}$;

$y'' = 2(x+a)^{-3}$;

$y''' = -2.3.(x+a)^{-4}$;

$y^{(4)} = 2.3.4.(x+a)^{-5}$;

$\vdots$

Observamos que a forma geral da *n-ésima* é

$$y^{(n)} = (-1)^n (x+a)^{-(n+1)} n! = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 39: Determine a constante k para que $y(x) = k\,\text{cotgh}(x)\,.\text{sech}(x)$ seja solução da equação

$$y.y' + \cot\text{gh}(x)\,.\cos\text{sech}^2(x) = 0.$$

Solução: Reescrevendo $y(x) = k\,\text{cotgh}(x)\,.\text{sech}(x)$, temos que:

$y(x) = k\frac{\cosh x}{\sinh x}.\frac{1}{\cosh x} = k\frac{1}{\sinh x} = k(\sinh x)^{-1}$

Assim,

$y'(x) = -k(\sinh x)^{-2}\cosh x = -k\frac{\cosh}{\sinh^2 x}$.

Observe que,

$y.y' + \text{cotgh}(x)\,.\,\text{cossech}^2(x) = k\frac{1}{\sinh x}.\left(-k\frac{\cosh}{\sinh^2 x}\right) + \text{cotgh}(x)\,.\,\text{cossech}^2(x)$

$= (-k^2+1)\,\text{cotgh}(x)\,.\,\text{cossech}^2(x)$

Logo,

$y.y' + \text{cotgh}(x)\,.\,\text{cossech}^2(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-k^2+1)\,\text{cotgh}(x)\,.\,\text{cossech}^2(x) = 0$

Dessa forma, a igualdade é satisfeita se, e somente se,

$-k^2+1 = 0$ ou $\text{cotgh}(x)\,.\,\text{cossech}^2(x) = 0 \Rightarrow k = \pm 1$ ou $\frac{\cosh x}{\sinh^2 x} = 0$.

Conclusão: Se $k = \pm 1$ então $y(x) = k\,\text{cotgh}(x)\,.\text{sech}(x)$ é solução da equação diferencial dada.

Exemplo 40: Determine o valor das constantes A e B para que a função $y = A\,\text{sen}(2x) + B\cos(2x)$ satisfaça a equação $y'' + y' - 2y = \text{sen}(2x)$.

Solução:

Como $y = A\,\text{sen}(2x) + B\cos(2x)$, temos que:

1ª derivada: $y' = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)$

2ª derivada: $y' = -4B\cos(2x) - 4A\sin(2x)$

Substituindo na equação $y'' + y' - 2y = \text{sen}(2x)$, temos que:

$(-4B\cos(2x) - 4A\sin(2x)) + (2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)) - 2(A\sin(2x) + B\cos(2x)) = \sin(2x)$

$\Rightarrow (2A-6B)\cos 2x - (6A+2B)\sin 2x = \sin(2x)$

Por comparação, segue que:

$$\begin{cases} 2A - 6B = 0 \\ -6A - 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = -\frac{3}{20} \text{ e } B = -\frac{1}{20}.}$$

3.10 Diferenciais e Aproximação Linear Local

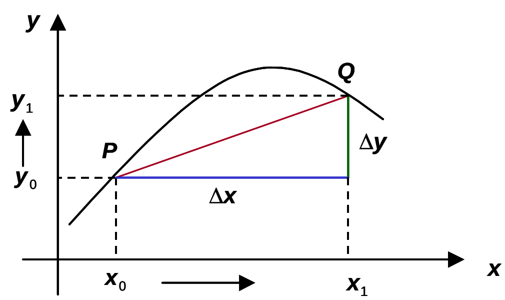
3.10.1 Incrementos

Seja $y = f(x)$ uma função. Sempre é possível considerar uma variação da variável independente x. Se x varia de x_0 a x_1, definimos o *incremento* ou *acréscimo* de x, denotado por Δx, como

$$\Delta x = x_1 - x_0.$$

Se $y = f(x)$ e se x varia de x_0 a x_1, então há uma correspondente variação no valor de y que vai de $y_0 = f(x_0)$ até $y_1 = f(x_1)$, ou seja, o incremento Δx em x produz um incremento Δy em y, onde

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0). \qquad (*)$$



Os incrementos podem ser positivos, negativos ou nulos, dependendo da posição relativa do pontos inicial e final. Por exemplo, na figura anterior, os incrementos Δx e Δy são positivos. Observe que, as expressões $\Delta x = x_1 - x_0$ e $\Delta y = y_1 - y_0$, podem ser reescritas como

$$x_1 = x_0 + \Delta x \text{ e } y_1 = y_0 + \Delta y.$$

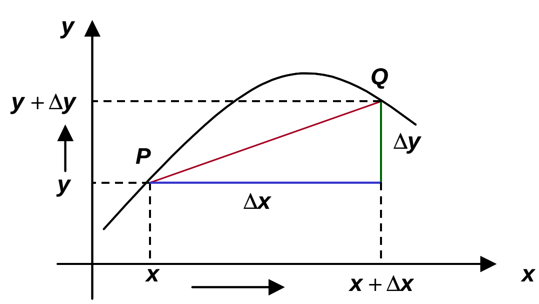
Com esta notação podemos escrever $(*)$ como

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Em um ponto qualquer, omitindo-se os subscritos, temos que:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

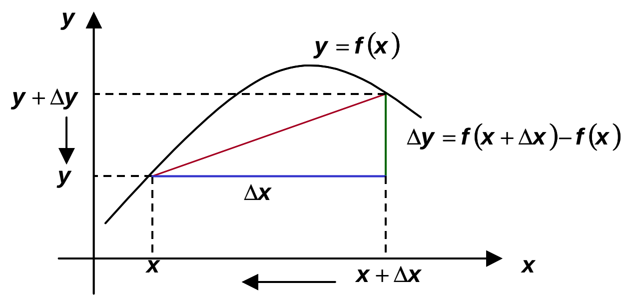
Geometricamente,



A razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pode ser interpretada como a inclinação da reta secante que passa pelos pontos $P\left(x, f\left(x\right)\right)$ e $Q\left(x+\Delta x, f\left(x+\Delta x\right)\ \right)$, e, portanto, a derivada de y com relação a x pode ser expressa como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right)}{\Delta x}.$$

Graficamente,



3.10.2 Diferenciais

Os símbolos dy e dx que aparecem na derivada são chamados de *diferenciais*, e o nosso objetivo é definir estes símbolos de tal forma que se possa tratar $\frac{dy}{dx}$ como uma *razão*. Com essa finalidade, vamos considerar x como fixo e *definir* dx como uma variável independente, para a qual possa ser atribuído um valor arbitrário. Se f for diferenciável em x, então *definimos* dy pela fórmula

$$dy = f'\left(x\right) dx.$$

Se $dx \neq 0$, podemos dividir esta expressão por dx. Assim,

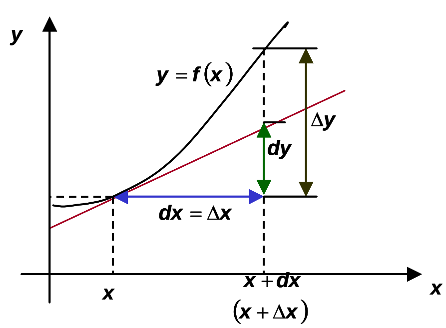
$$\frac{dy}{dx} = f'\left(x\right).$$

Como a inclinação da reta tangente a $y = f\left(x\right)$ em x é $m_t = f'\left(x\right)$, as diferenciais dy e dx podem ser vistas como o avanço (dx) e a elevação (dy) correspondentes dessa reta tangente.

Para ver a diferença entre o incremento Δy e o diferencial dy, vamos atribuir às variáveis independentes dx e Δx o mesmo valor $(dx = \Delta x)$. Dessa forma, temos que:

(i) Δy representa a variação ao *longo da curva* $y{=}f(x)$, quando são percorridas Δx unidades na direção x;

(ii) dy representa a variação ao *longo da reta tangente* $y{=}f(x)$, quando são percorridas dx unidades na direção x.



Exemplo 41: Seja $y = x^2$. Determine o incremento Δy e o diferencial dy em $x = 3$ para $dx = \Delta x = 4$ unidades.

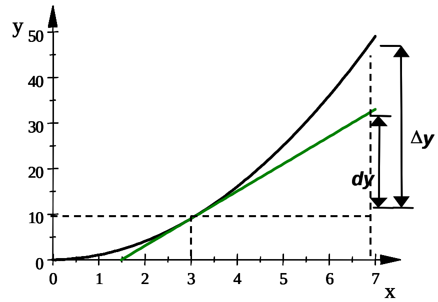
<u>Solução:</u> Observe que $\frac{dy}{dx} = 2x$ pode ser escrita na forma diferencial como $dy = 2xdx$.

Para $x = 3$, temos que:

$dy = 6dx \quad \Rightarrow \quad dy = 24$ unidades ao longo da reta tangente.

$\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f(7) - f(3) = 40$ unidades ao longo da curva.

Assim, $\Delta y - dy = 16$ unidades.



Exemplo 42: Seja $y = \ln x$. Determine o incremento Δy e o diferencial dy em $x = 2$ para $dx = \Delta x = \frac{3}{2}$ unidades.

<u>Solução:</u> Observe que $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ pode ser escrita na forma diferencial como $dy = \frac{1}{x}dx$.

Para $x = 2$, temos que:

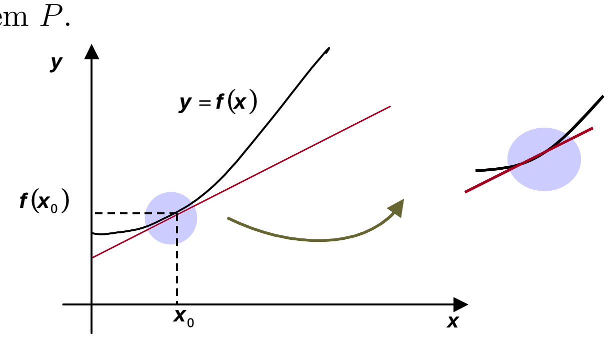
$dy = \frac{1}{2}dx \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{3}{4} = 0.75$ unidades ao longo da reta tangente.

$\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f\left(\frac{7}{2}\right) - f(2) = \ln\frac{7}{2} - \ln 2 = 0.559\,62$ unidades ao longo da curva.

Assim, $\Delta y - dy = -0.190\,38$ unidades.

3.10.3 Aproximação Linear Local

Uma função diferenciável em P é dita *localmente linear em* P, quando P é um ponto de diferenciabilidade de uma função f, pois quanto maior for a ampliação em P, mais o segmento da curva contendo P se parecerá com uma reta não-vertical, que é a reta tangente à curva em P.



Observe que, a equação da reta tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Como $y = f(x)$, para valores de x próximos de x_0, tem-se que

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Esta aproximação é chamada de *aproximação linear local* e é melhor a medida que $x \to x_0$. Definindo $\Delta x = x - x_0$, podemos escrever a aproximação como

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Exemplo 43: Calcule um valor aproximado de $\sqrt[3]{65,5}$.

Solução:

Seja a função $y = \sqrt[3]{x}$. Assim, a aproximação linear local para f é

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

$\Rightarrow \quad \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x_0} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x_0^2}}\Delta x. \qquad (+)$

Observe que:

$$65,5 = 64 + 1,5.$$

Assumindo $x_0 = 64$ e $\Delta x = 1,5$, pela aproximação dada em $(+)$, segue que

$\sqrt[3]{65,5} \approx \sqrt[3]{64} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}}(1,5) = 4,031\,3.$

Observe que, o valor calculado diretamente é $\sqrt[3]{65,5} = 4,031$.

Assim, a diferença entre o valor exato e aproximado, em valor absoluto, é $3 * 10^{-3}$.

Exemplo 44: Calcule uma valor aproximado para $\text{tg}(45°4'30'')$.

Solução:

Seja $y = f(x)$ a função definida por $f(x) = \text{tg}(x)$. Assim, a aproximação linear local para f é

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

$\Rightarrow \quad \text{tg}(x_0 + \Delta x) \approx \text{tg}(x_0) + \sec^2(x_0)\Delta x. \quad (\#)$

Observe que:

$$45°4'30'' = 45° + 4'30''.$$

Assumindo $x_0 = 45°$ e $\Delta x = 4'30''$.

Devemos transformar Δx para radianos:

Transformando $30''$ para minutos, tem-se que: $30'' = \left(\frac{1}{2}\right)'$

Transformando $4' + \left(\frac{1}{2}\right)' = \left(\frac{9}{2}\right)'$ para graus, tem-se que:

$\left(\frac{9}{2}\right)' = \left(\frac{9}{120}\right)° = \left(\frac{3}{40}\right)°$

E, finalmente, transformando $\left(\frac{3}{40}\right)°$ para radianos, obtém-se:

$\left(\frac{3}{40}\right)° = \frac{\pi}{2400}$.

Portanto, pela aproximação dada em $(\#)$, tem-se que

$\text{tg}(45°4'30'') \approx \text{tg}(45°) + \sec^2(45°)\frac{\pi}{2400}$

$\Rightarrow \quad \text{tg}(45°4'30'') \approx 1,002617.$

Exemplo 45: Determine uma aproximação linear local para $f(x) = \sin x$ em torno de $x = 0$. Use esta aproximação para encontrar $\sin(2°)$.

Solução: Pela aproximação linear local, temos que:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Para $x_0 = 0$, temos que
$f(\Delta x) \approx f(0) + f'(0)\Delta x \quad \Rightarrow \quad \sin(\Delta x) \approx \sin 0 + (\cos 0)\Delta x$
$\Rightarrow \sin(\Delta x) \approx \Delta x. \quad (I)$

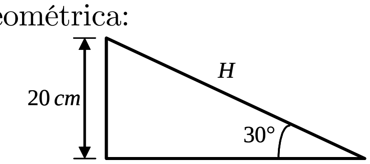
Para determinar um valor aproximado de $\sin(2^\circ)$, é necessário transformar 2° para radianos. A seguir, basta aplicar a relação dada em (I).

Transformando 2° para radianos, obtém-se:
$2^\circ = \frac{2\pi}{180} = \frac{1}{90}\pi.$
Assim, pela aproximação dada em (I), tem-se que
$\sin(2^\circ) \approx \frac{\pi}{90} = 0,03\,490\,7.$
Note que este valor está bem próximo do valor exato, que é

$$\sin(2^\circ) = 0,0348995.$$

Exemplo 46: Um dos catetos de um triângulo retângulo mede 20 cm de comprimento e o ângulo oposto a este cateto foi medido como sendo $\dfrac{\pi}{6}$ rad. Sabendo que ao medir o ângulo pode ter ocorrido um erro de até 5%, para mais, use diferenciais para estimar a medida da hipotenusa.

Solução:
Interpretação geométrica:



Temos que: $\quad \sin 30^\circ = \frac{20}{H} \quad \Rightarrow \quad H = 40\ cm.$

Observe que o cateto oposto ao ângulo de interesse é fixo e que foi cometido um erro de até 5% para mais ao medir este ângulo, isto significa que a medida da hipotenusa é maior que $40cm$, pois o ângulo exato é menor que $\dfrac{\pi}{6}$ rad.

Por diferenciais, temos que o valor da hipotenusa será:

$$H\left(\frac{\pi}{6} + d\theta\right) \approx H\left(\frac{\pi}{6}\right) + dH \qquad (1)$$

Encontrando dH :
Seja $f(\theta) = \dfrac{20}{\sin\theta} = 20\sin^{-1}\theta.$
Pela definição de diferencial, temos que:
$dH = f'(\theta)\,d\theta \quad \Rightarrow \quad dH = -20\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$
Sabe-se que: $\theta = 30^o$ e que $d\theta = -\frac{5}{100}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{120}\pi$ rad.
Substituindo estas informações em (1), temos que:
$H\left(\frac{\pi}{6} + d\theta\right) \approx 40 - 20\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}\left(-\frac{1}{120}\pi\right) = 40 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\pi = 41.814cm.$

3.11 Interpretação Mecânica da Derivada

Velocidade

Sabemos que velocidade é a variação do espaço percorrido num determinado intervalo de tempo.

Supondo que um corpo se move em linha reta e que $s(t)$ represente o espaço percorrido pelo móvel até o instante t. Então no intervalo de tempo entre t e $t+\Delta t$, o corpo sofre um deslocamento $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$. Definimos a *velocidade média* como

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad v_m = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

A velocidade média não nos diz nada a respeito da velocidade do corpo num determinado instante t. Para determinar a *velocidade instantânea*, isto é, a velocidade num instante t devemos fazer Δt cada vez menor $(\Delta t \to 0)$. Assim, a velocidade neste instante é o limite das velocidade médias.

$$v = v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad v = s'(t).$$

Aceleração

Lembre que a aceleração é a variação da velocidade num certo intervalo de tempo gasto.

Por racicíonio análogo ao anterior, segue que a *aceleração média* no intervalo de t até $t+\Delta t$ é

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad a_m = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Para obter a aceleração do corpo no instante t, tomamos sua aceleração média em intervalos de tempo Δt cada vez menores. A *aceleração instantânea* é

$$a = a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad a = v'(t) = s''(t).$$

Exemplo 37: No instante $t = 0$ um corpo inicia um movimento retilíneo e sua posição num instante t é dada por $s(t) = \frac{t}{t+1}$. Determinar:

(a) a posição no instante $t = 2$;

(b) a velocidade média do corpo para $t \in [2, 4]$;

(c) a velocidade do corpo no instante $t = 2$;

(d) a aceleração média do corpo para $t \in [0, 4]$;

(e) a aceleração no instante $t = 2$.

Obs: Considere o tempo medido em segundos e a distância em metros.

Solução:

(a) A posição do corpo no instante $t = 2$ é $s\,(2) = \frac{2}{3}m$.

(b) Para $t \in [2, 4]$, temos que $\Delta t = 2$. Assim, a velocidade média do corpo é $v_m = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} = \frac{s(4)-s(2)}{2} = \frac{1}{15}m/s$.

(c) A velocidade instantânea é $v\,(t) = s'\,(t) = \frac{1}{(t+1)^2}$.
Então, em $t = 2$, obtém-se $v\,(2) = s'\,(2) = \frac{1}{9}m/s$.

(d) Para $t \in [0, 4]$, temos que $\Delta t = 4$. A aceleração média do corpo é $a_m = \frac{v(4)-v(0)}{4} = -\frac{6}{25}m/s$.

(e) A aceleração instantânea é $a\,(t) = v'\,(t) = -\frac{2}{(t+1)^3}$.
Logo, em $t = 2$, temos que $a\,(2) = -\frac{2}{27}m/s^2$.

3.12 Taxa de Variação

Sabemos que a velocidade é a razão da variação do deslocamento por unidade de variação de tempo. Então, dizemos que $s'\,(t)$ é a *taxa de variação* da função $s\,(t)$ por unidade de variação de t. Analogamente, dizemos que a aceleração $a\,(t) = v'\,(t)$ representa a taxa de variação da velocidade $v\,(t)$ por unidade de tempo.

Toda derivada pode ser interpretada como uma taxa de variação. Dada uma função $y = f\,(x)$, quando a variável independente varia de x a $x + \Delta x$, a correspondente variação de y será $\Delta y = f\,(x + \Delta x) - f\,(x)$. Assim, a *taxa de variação média* de y com relação a x é dada por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\,(x + \Delta x) - f\,(x)}{\Delta x}.$$

A *taxa de variação instantânea* é definida como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad f'\,(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x + \Delta x) - f\,(x)}{\Delta x}.$$

Exemplo 37: Seja V o volume de um cubo de x cm de aresta.

(a) Calcule a razão da variação média do volume quando x varia de 3 cm à $3,1$ cm.

(b) Calcule a razão da variação instantânea do volume por variação em centímetros no comprimento de aresta x, quando $x = 3$ cm.

Solução:

(a) Sabemos que o volume de um cubo é $V = x^3$. Quando x varia de 3 cm à $3,1$ cm, temos que $\Delta x = 0,1$ cm. Então, a razão da variação média do volume $\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V(x+\Delta x)-V(x)}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V(3,1)-V(3)}{0,1} = 27,91$ cm^3.

(b) A variação instantânea do volume é dada por $V'\,(x) = 3x^2$.
Em $x = 3$, temos que: $V\,(3) = 27$ cm^3.

3.13 Taxas Relacionadas

Nos problemas de taxas relacionadas busca-se encontrar a taxa segundo a qual certa quantidade está variando em relação a outras quantidades, cujas taxas de variação são conhecidas.

Exemplo 38: O lado de um quadrado ℓ (em m) está se expandindo segundo a equação $\ell = 2+t^2$, onde a variável t representa o tempo. Determine a taxa de variação da área deste quadrado em $t = 2\ s$.

Solução:

Sejam:

t : tempo (em s);

ℓ : lado do quadrado (em m);

A : área do quadrado (em m^2).

Sabemos que, a área de um quadrado é

$$A(\ell) = \ell^2.$$

Como ℓ é uma função do tempo, pela regra da cadeia, temos que

$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\ell}\frac{d\ell}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = 2\ell\frac{d\ell}{dt} = 2\left(2+t^2\right)\frac{d\ell}{dt}$

$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \left(4+2t^2\right)2t = 4t^3 + 8t.$

Para $t = 2s$, temos que:

$A'(2) = \left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=2} \quad \Rightarrow \quad A'(2) = 48\ m^2/s.$

Exemplo 39: Suponhamos que um óleo derramado através da ruptura do tanque se espalha em uma forma circular cujo raio cresce em uma taxa constante de $\frac{1}{2}m/s$. Com que velocidade a área do derramamento de óleo está crescendo quando o raio dele for $20m$?

Solução:

Sejam:

t : tempo (em s);

r : raio (em m);

A : área da circunferência (em m^2).

O óleo está se espalhando em forma circular, a área do derramamento é

$$A(r) = \pi r^2.$$

Como r é está variando com o tempo, pela regra da cadeia, temos que

$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}. \qquad (1)$

Sabemos que o raio cresce em uma taxa constante de $\frac{1}{2}m/s$, ou seja, $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}m/s$.

Substituindo em (1), temos que:

$$\frac{dA}{dt} = \pi r.$$

Para o raio $r = 20m$, temos que:

$A'(20) = \left.\frac{dA}{dr}\right|_{r=20} \quad \Rightarrow \quad A'(20) = 20\pi\ m^2/s.$

Exemplo 40: Uma escada de 510 cm de comprimento está apoiada em um muro vertical. Se a extremidade inferior da escada se afasta do muro na razão de 90

cm/s, então com que rapidez está descendo a extremidade superior no instante em que o pé da escada está a 240 cm do muro?

Solução:
Sejam:
x : distância do pé da escada ao muro (em cm);
y : distância do topo da escada ao chão (em cm);
t : tempo (em s).

Nosso objetivo é determinar $\frac{dy}{dt}$, para $x = 240\ cm$.
Fazendo um esboço, pelo teorema de Pitágoras, temos que:
$x^2 + y^2 = (510)^2. \qquad (I)$
Como x e y variam no tempo, derivando implicitamente com relação ao tempo (I), temos que:
$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}. \qquad (II)$
Por (I), se $x = 240\ cm$, então $y = 450\ cm$.
Substituindo em (II), e ainda, lembrando que $\frac{dx}{dt} = 90\ cm/s$, obtém-se

$$\frac{dy}{dt} = -48\ \ cm/s.$$

Exemplo 41: Acumula-se areia em monte com a forma de um cone cuja altura é igual ao raio da base. Se o volume da areia cresce a uma taxa de 10 m^3/h, a que razão aumenta a área da base quando a altura do monte é de 4 m.

Solução:
Sejam:
h : altura do monte de areia (em m);
r : raio da base (em m);
A : área da base (em m^2).
V : volume de areia (em m^3).

A área da base corresponde a área de um circulo, isto é,
$A = \pi r^2$.
Pela regra da cadeia, a razão que aumenta à área da base é
$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}. \qquad (I)$
Precisamos encontrar uma relação para $\frac{dr}{dt}$.
Como o monte de areia tem a forma de um cone, seu volume é
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h. \qquad (II)$
Lembre que, o raio e a altura são iguais.
Assim, substituindo $r = h$ em (II), temos que
$V = \frac{1}{3}\pi r^3. \qquad (III)$
Aplicando a regra da cadeia em (III), temos que
$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \pi r^2\frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi r^2}\frac{dV}{dt}.$
Como $\frac{dV}{dt} = 10\ m^3/h$, temos que $\frac{dr}{dt} = \frac{10}{\pi r^2}$.
Substituindo em (I), temos que:
$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{10}{\pi r^2} = \frac{20}{r}$.
Se $h = r = 4$, então

$$\frac{dA}{dt} = 5\ m^2/h.$$

3.14 Exercícios

1. Para as funções dadas abaixo calcule $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

   (a) $f(x)=x^2-2$

   (b) $f(x)=\sqrt{x}$

   (c) $f(x)=\dfrac{1}{2x}$

   (d) $f(x)=\sin(3x)$

   (e) $f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

   (f) $f(x)=\tan(x)$

   (g) $f(x)=\log_a(x),\ \ a\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}$

   (h) $f(x)=a^x,\ \ a\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}$

2. Use a definição para encontrar a primeira derivada de cada uma das funções abaixo.

   (a) $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+3}$

   (b) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

   (c) $f(x)=e^{2x}$

   (d) $f(x)=\ln(x+1)$

   (e) $f(x)=\sinh(ax),\quad a\in\mathbb{R}$

   Nos exercícios 3 a 5 use a definição de derivada para encontrar o coeficiente angular da reta tangente

3. Seja $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

   (a) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y=f(x)$, no ponto de abscissa $x=1$.

   (b) Determine a equação da reta tangente no ponto mencionado.

   (c) Determine os pontos da curva $y=f(x)$ em que a reta tangente tem inclinação de $60°$.

4. Seja $f(x)=\frac{x}{x-1}$. Se possível, determine a equação da reta tangente e da reta normal a curva $y=f(x)$ no ponto $P\left(-2,\frac{2}{3}\right)$.

5. Caso exista, determine a(s) equação(ões) da(s) reta(s) tangente(s) a curva $f(x)=x^2+\ln(x+1)$ que é(são) perpendicular(es) a reta $r: 3y+3x=6$.

6. Determine as coordenadas dos pontos da curva $f(x)=x^3-x^2+2x$ em que a reta tangente é paralela ao eixo x.

7. Mostre que as retas tangentes à curva $f(x)=\dfrac{\pi\sin x}{x}$ em $x=\pi$ e $x=-\pi$, interceptam-se formando um ângulo reto.

8. Determine a equação da reta normal a curva $f(x)=\frac{x}{1+x}$ que é paralela a reta $r: y+x+3=0$.

9. Considere a curva dada por $f(x)=-\sqrt{4x-3}$. Caso exista, escreva a equação da reta tangente a esta curva que é paralela a reta $r: x+y=0$.

10. Seja $f(x)=\dfrac{1}{e^{x^2}}$. Determine a equação da reta tangente e da reta normal a curva $y=f(x)$ no ponto cuja abscissa é $x=1$.

11. Determine as abscissas dos pontos do gráfico de $y=3x-\cos(2x)$, nos quais as retas tangentes são perpendiculares a reta $r: 2x+4y=5$.

12. Dada a curva $f(x) = -\sqrt{x-1}$. Determine a equação da reta normal a esta curva no ponto em que a reta tangente é paralela à reta $r : x + 2y - 5 = 0$.

13. Dada a curva $f(x) = \sqrt[3]{3x+2}$ determine, se possível:

    (a) o(s) ponto(s) da curva onde a reta tangente é paralela a reta $y = 2$.

    (b) a(s) equação(ões) da(s) reta(s) tangente(s) a curva no(s) ponto(s) onde a inclinação é 45°.

14. Em cada item, verifique se a função dada é derivável nos pontos referidos, justificando sua resposta.

    (a) $f(x) = \begin{cases} 3-2x, & \text{se } x < 2 \\ 3x-7, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, em $x = 2$.

    (b) $f(x) = |x-3|$, em $x = 3$.

    (c) $f(x) = 1 - \left|\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{3}\right|$, em $x = \dfrac{2}{9}$.

    (d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{se } x < 1 \\ 1-x^2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$, em $x = 1$.

    (e) $f(x) = \begin{cases} x^2-4, & \text{se } x < 1 \\ 2x, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$, em $x = 1$.

    (f) $f(x) = \begin{cases} -x^2-x+4, & \text{se } x \leq 1 \\ x^3-3x^2+4, & \text{se } x > 1 \end{cases}$, em $x = 1$.

15. Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se } x \leq 2 \\ ax+b, & \text{se } x > 2 \end{cases}$. Determine, se possível, os valores das constantes a e b para que f seja uma função derivável em $x = 2$.
    <u>Obs:</u> *Lembre que se f é derivável em um ponto, então f também deve ser contínua neste ponto.*

16. Determine os pontos onde a função $f(x) = |x| + |x+1|$ não é derivável.

17. Determine a derivada das funções a seguir da forma mais simples.

    (a) $f(x) = (3x^2+2x-4)(x^4-5)$
    (b) $f(x) = (-2x^2+1)^3$
    (c) $f(t) = t^2 + \dfrac{2}{t^2}$
    (d) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{\sqrt{x^3}}$
    (e) $f(x) = (1+\sqrt[3]{x})^3$
    (f) $f(x) = \ln(9x+4)$
    (g) $f(x) = \ln(\sin^2(x))$
    (h) $f(x) = \sinh(x^2)$
    (i) $f(x) = xe^x - e^x$
    (j) $f(x) = \dfrac{x(x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}$
    (k) $f(x) = 3^{2x} + \log_2(4x^2)$
    (l) $f(x) = \ln(\sqrt[3]{4x^2+7x})$
    (m) $f(x) = x\ln x$
    (n) $f(x) = \ln(\sqrt{x}) + \sqrt{\ln x}$
    (o) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{(9x-4)^2}\right)$
    (p) $f(x) = \csc(2^x)$
    (q) $f(x) = e^{-2x}\ln x$
    (r) $f(x) = e^{x\ln(x)}$
    (s) $f(x) = \sec(\sqrt{x-1})$
    (t) $f(x) = 2^{4x}e^{\cos(x)}$
    (u) $f(x) = \cot(2x^3 - \sin(x^2))$
    (v) $f(x) = x^{\ln(x)} + \ln(\ln(x))$
    (w) $f(x) = \text{sech }(2x)$
    (x) $f(x) = x^{x^2}$
    (y) $f(x) = 3^{\tan(5x)}$
    (z) $f(x) = e^{x^x}$

18. Determine $y' = f'(x)$, com as simplificações possíveis, sendo $y = f(x)$ a expressão dada.
   (a) $y = (4x^3 - 5x^2 + 2x + 1)^3$
   (b) $y = e^{\ln x}$
   (c) $y = \ln((2 - 3x)^5)$
   (d) $y = \ln^3(5x^2 + 1)$
   (e) $y = \operatorname{tg}(x^3 - 2x)$
   (f) $y = \left(\dfrac{1}{x^2} + x^2\right)^4$
   (g) $y = \dfrac{4}{(x^8 - x^5 + 6)^{10}}$
   (h) $y = \dfrac{1}{\ln x} + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   (i) $y = \left(\dfrac{x^2 - 2x}{3 - 4x^3}\right)^3$
   (j) $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$
   (k) $y = \ln(\ln(\sec(2x)))$
   (l) $y = (\sin(5x) - \cos(5x))^5$
   (m) $y = \dfrac{\csc(3x)}{x^3 + 1}$
   (n) $y = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$
   (o) $x \ln y - y \ln x = 1$
   (p) $e^{xy} - x^3 + 3y^2 = 11$
   (q) $8x^2 + y^2 = 10$
   (r) $y = x \sin y$
   (s) $x = \sin\left(\dfrac{1}{y}\right)$
   (t) $y = 3^{\arcsin(x^3)}$
   (u) $(y^2 - 9)^4 = (4x^2 + 3x - 1)^2$
   (v) $\cos^2(3yx) - \ln(xy) = 0$
   (w) $y = (1 + \arccos(3x))^3$
   (x) $y = \ln(\arctan(x^2))$
   (y) $y^2 = e^{-3x}\tan(\sqrt{x})$
   (z) $y = \arctan(3x - 5)$

19. Seja $x^2 + xy + y^2 = 3$ uma curva, se existir determine a(s) equação(s) da(s) reta(s) tangente(s) a esta curva e que seja(m) paralela(s) a reta(s) $r : x + y = 1$.

20. Se existir, escreva a equação da reta normal a curva $(x^2 + 4)\, y = 4x - x^3$ e que passe pela origem do sistema cartesiano.

21. Mostre que as retas tangentes às curvas $4y^3 - x^2y - x + 5y = 0$ e $x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$, na origem, são perpendiculares.

22. A reta $x = a$ intercepta a curva $y = \frac{x^3}{3} + 4x + 3$ num ponto P e a curva $y = 2x^2 + x$ num ponto Q. Para que valor(es) de a as retas tangentes a essas curvas são paralelas? Encontre a(s) equação(ões) da(s) referida(s) reta(s).

23. Determine a equação da reta normal à curva $C : xy^2 + y^3 = 2x - 2y + 2$ no ponto em que a abscissa e a ordenada tem o mesmo valor.

24. Seja P o ponto de interseção das curvas $C_1 : 2x^2 + 3y^2 = 5$ e $C_2 : y^2 = x^3$. Mostre que as retas tangentes às curvas C_1 e C_2 são perpendiculares no ponto P.

25. Se $f(x) = \dfrac{1}{x}$, obtenha uma fórmula para $f^{(n)}(x)$ onde n é um inteiro positivo. Quanto é $f^{(n)}(1)$?

26. Determine a expressão da derivada n-ésima em cada caso:

   (a) $f(x) = e^{ax}$, com $a \in \mathbb{R}^*$.
   (b) $f(x) = (a + bx)^m$, com $a, b \in \mathbb{R}^*$ e $m \in \mathbb{N}^*$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

(d) $f(x) = \ln(2x-3)$

27. Determine $f^{(101)}(1) - f^{(100)}(1)$ para as funções dadas a seguir:

    (a) $f(x) = \log_2(x)$

    (b) $f(x) = x^{100}$

28. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável duas vezes e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x + 2\cos(3x))$.

    (a) Determine $g''(x)$.

    (b) Se $f'(2) = 1$ e $f''(2) = 8$, calcule $g''(0)$.

29. Considere a função $g(x) = \cos x.\left[f(x)\right]^2$,, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável. Se $f(0) = -1$ e $f'(0) = f"(0) = 2$, determine $g''(0)$.

30. Determine:

    (a) $f'(0)$ sabendo que $f\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f(3x - \pi) + 3x - \pi$.

    (b) a função g sabendo que $(f \circ g)'(x) = 24x + 34$, $f(x) = 3x^2 - x - 1$ e $g'(x) = 2$.

    (c) $(g \circ f \circ h)'(2)$, sabendo que $f(0) = 1$, $h(2) = 0$, $g'(1) = 5$ e $f'(0) = h'(2) = 2$.

31. Determine o valor das constantes A e B para que a função $y = A\sin(2x) + B\cos(2x)$ seja solução da equação diferencial $y'' + y' - 2y = \sin(2x)$.

32. Seja C uma circunferência com centro na origem e raio igual a 2. Mostre que a tangente a C no ponto $P(1, \sqrt{3})$ é ortogonal a reta r que passa pela origem e pelo ponto P.

33. Prove as seguintes fórmulas de derivadas usando regras de derivação já estudadas.

    (a) $y = \sinh(u) \quad \Rightarrow \quad y' = u'\cosh(u)$;

    (b) $y = \cosh(u) \quad \Rightarrow \quad y' = u'\sinh(u)$;

    (c) $y = \tanh(u) \quad \Rightarrow \quad y' = u'\text{sech}^2(u)$;

    (d) $y = \coth(u) \quad \Rightarrow \quad y' = -u'\text{cossech}^2(u)$;

    (e) $y = \text{sech}(u) \quad \Rightarrow \quad y' = -u'\tanh(u)\text{sech}(u)$;

    (f) $y = \text{cossech}(u) \quad \Rightarrow \quad y' = -u'\coth(u)\text{cossech}(u)$;

    Obs. algumas identidades hiperbólicas:

    - $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$;
    - $1 - \tanh^2(x) = \text{sech}^2(x)$;
    - $\coth^2(x) - 1 = \text{cossech}(x)$.

34. Prove as seguintes fórmulas de derivadas usando derivação implícita.

(a) $y = \arcsin(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

(b) $y = \arccos(u) \quad \Rightarrow \quad y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

(c) $y = \arctan(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

(d) $y = \text{arccot}(u) \quad \Rightarrow \quad y' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

(e) $y = \text{arcsec}(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

(f) $y = \text{arccsc}(u) \quad \Rightarrow \quad y' = -\dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

35. Calcule a área do triângulo retângulo ABC na Figura 1, sabendo-se que n é a reta normal a $f(x) = e^x$ no ponto $x_o = 1$

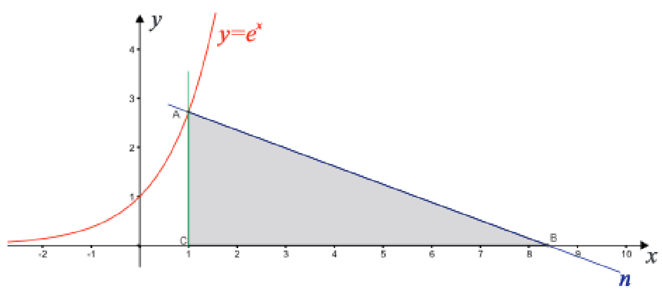


Figura 1: Exercício 35.

36. Um forno industrial coze a temperatura constante de 608 graus centígrados. A temperatura do forno, desde o início em que é ligado até atingir a temperatura de cozedura, é dada por: $T(t) = \dfrac{20t^2 + 5t + 32}{t+2}$, t em minutos e $T(t)$ em °C. Determine:

(a) a temperatura inicial do forno?

(b) a variação da temperatura no intervalo de tempo $[2, 10]$.

(c) a variação instantânea da temperatura para $t = 10$.

37. O valor de um automóvel ao fim de t anos é dado por $V(t) = 50000e^{-0.12t}$, sendo V dado em reais e t em anos.

(a) Por qual preço foi comprado o automóvel?

(b) Represente graficamente a função e determine o valor aproximado do automóvel daqui a 5 anos.

(c) A taxa de variação é negativa para qualquer valor de t. Justifique esta afirmação e interprete este fato no contexto da situação.

(d) Em que momento a taxa de variação é -2500 reais ao ano?

(e) Mostre que o gráfico V' tem uma assíntota horizontal. Qual o seu significado relativo à situação?

38. Seja $y = \sqrt[3]{3x+2}$ a equação do movimento de uma partícula, determine:

    (a) a velocidade da partícula quando transcorridos $2s$.

    (b) a aceleração da partícula quando transcorridos $2s$.

39. Um carro está a $s = \left(16t^{\frac{3}{2}} - 24t + 16\right)\ km$ a leste de uma parada no instante t horas. Pergunta-se:

    (a) Qual é a velocidade no instante $t = \dfrac{1}{4}h$ e qual é o sentido que ele se move?

    (b) Qual a posição do carro quando sua velocidade é nula?

40. Dois corpos têm movimento em uma mesma reta segundo as equações $s_1 = t^3 + 4t^2 + t - 1$ e $s_2 = 2t^3 - 5t^2 + t + 2$. Determine a velocidade e as posições desses dois corpos no instante em que as suas acelerações são iguais. Considere s_1 e s_2 em metros e t em segundos.

41. Dois pontos partem da origem do eixo x no instante $t = 0$ e se movem ao longo desse eixo de acordo com as equações $x_1 = t^2 - 2t$ e $x_2 = 8t - t^2$, com x_1 e x_2 em metros e t em segundos.

    (a) Em que instante os dois têm mesma velocidade?

    (b) Qual a velocidade desses pontos no instante em que eles têm a mesma posição?

42. A posição de uma partícula que se desloca ao longo do eixo y varia com o tempo x segundo a equação $y = \dfrac{v_0}{c}\left(1 - e^{-cx}\right)$, $x \geq 0$, onde v_0 e c são constantes positivas. Use a **DEFINIÇÃO** de derivadas para determinar a velocidade da partícula no instante x.

43. Uma esfera aumenta de modo que seu raio cresce a razão de $12,5$ cm/s. Qual a variação do volume no instante em que o raio é de $15,2$ cm?

44. Dois carros, um dirigindo-se para leste com velocidade de 80 km/h, o outro dirigindo-se para sul com velocidade de 50 km/h, estão viajando em direção ao encontro das rodovias. A que velocidade os carros se aproximam um do outro, no momento em que o primeiro carro está a 400 m e o segundo está a 300 m da interseção das rodovias?

45. Um tanque de forma cônica invertido tem altura de 8 m, raio da base 2 m. O mesmo se enche de água à razão de 7 m^3/min. Com que velocidade sobe o nível da água quando este se encontra a 4 m de profundidade?

46. Uma piscina tem 18 m de largura, 28 m de comprimento, 2 m de profundidade em um extremo e 8 m no outro, o fundo tem forma de um plano inclinado. Se a água está sendo bombeada para a piscina à razão de $0,8$ m^3/min, com que velocidade se eleva o nível da água no instante em que ele esta a $1,8$ m na extremidade mais profunda?

47. Em que pontos da parábola $y^2 - 18x = 0$ a ordenada y cresce duas vezes mais depressa que a abscissa x?

48. Uma criança esta empinando uma pipa e movendo-se horizontalmente a 4 m/s. Supondo que a pipa permaneça sempre a 80 m de altura, sobre o nível do solo, qual é a velocidade com que a criança está soltando a corda da pipa quando esta corda medir 100 m?
Obs: Despreze a altura da criança.

49. Um tanque tem a forma de um cilindro circular reto com raio da base de 5 m e altura de 10 m. Se instante $t = 0$s, a água começa a fluir no tanque à razão de 25 m^3/h, determine:

    (a) com que velocidade sobe o nível da água?

    (b) quanto tempo levará para encher o tanque?

50. Um balão está subindo **verticalmente** acima de uma estrada a uma velocidade constante de $\frac{1}{3}$ m/s. Quando ele está a 17 m acima do solo, uma bicicleta que se desloca a uma velocidade constante de 5 m/s passa por baixo dele. A que taxa a distância entre a bicicleta e o balão aumentará $3s$ depois?

51. O nível de café que escoa de um filtro cônico, de diâmetro e altura 15 cm, para uma cafeteira cilíndrica, de diâmetro e altura 15 cm, varia a uma taxa de $2 \cdot 10^{-4}$ cm/min. A que taxa o nível do café, na cafeteira, aumentará quando a altura de café no filtro for 5 cm?

52. Um cabo de cobre tem diâmetro de 1 cm a $0°C$. Suponha que seu comprimento é de 1 m e não se altera com a variação da temperatura. Se seu diâmetro aumenta a uma velocidade de $0,02cm/°C$, Calcule a taxa de variação do volume desse cabo quando a temperatura está a $20°C$.

53. Numa granja de frangos, o abastecimento de ração é automático. A ração está num reservatório que tem a forma de uma pirâmide de base quadrada com 2 m de lado e 6 m de altura, cujo vértice está voltado para baixo. Se o consumo de ração é de $0,05\ m^3/h$, com que velocidade desce o nível de ração quando este está a 2 m do vértice?

54. A altura de um triângulo cresce a razão de $1cm/\min$ e sua área aumenta a razão de $2cm^2/\min$. Qual a taxa de variação da base do triângulo quando sua altura for $10cm$ e sua área $100cm^2$.

55. Uma piscina tem $24m$ de comprimento e seus extremos são trapézios isósceles com altura de $6m$, uma base menor $6m$ e uma base maior de $8m$. A água está sendo bombeada para a piscina à razão de $10m^3/mim$. Com que velocidade o nível de água está subindo quando a profundidade da água é de $2m$?

56. Um avião (**A**) voa a 124 m/s, paralelamente ao solo, a uma altitude de 1220 m no sentido oeste, tomando como referência um holofote (**H**), fixado no solo, que o focaliza e que se encontra à esquerda da projeção vertical (**P**) do avião e sabendo que a luz do holofote deverá permanecer iluminando o avião, qual será a velocidade com que θ estará variando quando a distância entre o holofote e a projeção vertical do avião for de 610 m?

57. Às $7:00$ horas dois navios partem de um ponto O em rotas que formam um ângulo de $120°$. Os navios A e B deslocam-se a 20 km/h e 25km/h, respectivamente. Determine qual é a velocidade de afastamento desses navios às $9:00$ horas.

58. Use aproximações lineares para estimar o valor de

    (a) $\sqrt[4]{17}$
    (b) $(8,06)^{\frac{2}{3}}$
    (c) $\tan(44°)$
    (d) $\ln(1,05)$
    (e) $\sqrt{99,8}$
    (f) $(1,2)^{1,2}$
    (g) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{30}}$
    (h) $e^{-0,13}$
    (i) $\arctan(1,02)$
    (j) $(1,01)^6$
    (k) $\sqrt[3]{65}$

59. Suponha que não temos uma fórmula para $g(x)$, mas sabemos que $g(2) = -4$ e $g'(x) = \sqrt{x^2+5}$ para todo x. Use uma aproximação linear para estimar $g(1,95)$ e $g(2,05)$.

60. A aresta de um cubo tem 30cm, com um possível erro de medida de 0,1cm. Use diferenciais para estimar o erro possível no cálculo

    (a) do volume do cubo.
    (b) da área da superfície do cubo.

61. Por meio de diferenciais obtenha uma fórmula aproximada do volume de uma fina coroa cilíndrica de altura h, raio interior r e espessura Δr. Qual o erro decorrente do uso desta fórmula?

62. Estima-se em 12cm o raio de uma esfera com erro máximo de 0,05cm. Estime o erro máximo para no cálculo do volume da esfera.

63. Uma janela tem o formato de um quadrado com um semicírculo em cima. A base da janela mede 60cm com um possível erro na medida de 1mm. Use diferenciais para estimar o maior erro possível no cálculo da área desta janela.

64. Na medida que a areia escoa de um recipiente, vai formando uma pilha cônica cuja altura é sempre igual ao raio. Se, num dado instante, o raio é 10cm, use diferenciais para aproximar a variação do raio que ocasiona um aumento de 2cm^3 no volume da pilha.

65. A área de um quadrado de lado s é dada por s^2. Para um acréscimo Δs de s, ilustre geometricamente dA e $\Delta A - dA$.

66. Aproxime, por meio de diferenciais, $N = (2,01)^4 - 3(2,01)^3 + 4(2,01)^2 - 5$. Qual o valor exato de N?

67. Uma caixa em forma de cubo deve ter um revestimento externo com espessura de $1/4$ cm. Se o lado da caixa é de 2 m, usando diferencial, encontre a quantidade de revestimento necessária.

Respostas:

1. .
   (a) $f'(x) = 2x$
   (b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
   (c) $f'(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$
   (d) $f'(x) = 3\cos(3x)$
   (e) $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$
   (f) $f'(x) = \sec^2(x)$
   (g) $f'(x) = \dfrac{\log_a(e)}{x}, \quad a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$
   (h) $f'(x) = a^x \ln(a), \quad a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

2. .
   (a) $f'(x) = \dfrac{5}{(2x+3)^2}$
   (b) $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$
   (c) $f'(x) = 2e^{2x}$
   (d) $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$
   (e) $f'(x) = a\cosh(ax), \quad a \in \mathbb{R}$

3. (a) $-\dfrac{1}{2}$ (b) $2y + x = 3$ (c) não existe

4. Reta tangente: $y = -\dfrac{x-4}{9}$; Reta normal: $y = 9x + \dfrac{56}{3}$

5. $y = x$ e $y = x + \dfrac{3}{4} - \ln(2)$

6. Não existem.

7. Mostre que o produto dos coeficientes angulares é -1.

8. $y = -x$

9. $y = -x - \dfrac{1}{4}$

10. Reta tangente: $y = e^{-1}(-2x+3)$; Reta normal: $y = \dfrac{ex}{2} - \dfrac{e}{2} + \dfrac{1}{e}$

11. $x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \dfrac{11\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

12. $y = 2x - 5$

13. (a) não existe; (b) $y = x$ e $y = x + \dfrac{4}{3}$

14. .
   (a) Não é derivável.
   (b) Não é derivável.
   (c) Não é derivável.
   (d) Não é derivável.
   (e) Não é derivável.
   (f) $f'(1) = -3$.

15. $a = 12$ e $b = -12$.

16. $x = 0$ e $x = -1$.

17. .

(a) $f'(x) = 18x^5 + 10x^4 - 16x^3 - 30x - 10$

(b) $f'(x) = -12x(1-2x^2)^2$

(c) $f'(t) = 2t - \dfrac{4}{t^3}$

(d) $f'(x) = \dfrac{3(x+1)^2(x-1)}{2x\sqrt{x^3}}$

(e) $f'(x) = \dfrac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}$

(f) $f'(x) = \dfrac{9}{9x+4}$

(g) $f'(x) = 2\text{cotg }(x)$

(h) $f'(x) = 2x\cosh(x^2)$

(i) $f'(x) = xe^x$

(j) $f'(x) = \dfrac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(k) $f'(x) = 9^x\ln(9) + \dfrac{2\log_2(e)}{x}$

(l) $f'(x) = \dfrac{8x+7}{12x^2+21x}$

(m) $f'(x) = 1 + \ln x$

(n) $f'(x) = \dfrac{1}{2x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\ln x}} + 1\right)$

(o) $f'(x) = -\dfrac{9x^2+4x+18}{(9x-4)(x^2+1)}$

(p) $f'(x) = -2^x ln(2)\text{cotg }(2^x)\text{cossec }(2^x)$

(q) $f'(x) = e^{-2x}\left(\dfrac{1}{x} - 2\ln x\right)$

(r) $f'(x) = x^x(\ln(x)+1)$

(s) $f'(x) = \dfrac{\tan(\sqrt{x-1})\sec(\sqrt{x-1})}{2\sqrt{x-1}}$

(t) $f'(x) = 16^x e^{\cos(x)}(\ln(16) - \sin(x))$

(u) $f'(x) = 2x(\cos(x^2) - 3x)\text{cossec }^2(2x^3 - \sin(x^2))$

(v) $f'(x) = \dfrac{2\ln^2(x)x^{\ln(x)} + 1}{x\ln(x)}$

(w) $f'(x) = -2\tanh(2x)\text{sech }(2x)$

(x) $f'(x) = x^{x^2+1}(2\ln(x)+1)$

(y) $f'(x) = 5\ln(3)3^{\tan(5x)}\sec^2(5x)$

(z) $f'(x) = x^x e^{x^x}(\ln(x)+1)$

18. .

(a) $y' = 6(6x^2 - 5x + 1)(4x^3 - 5x^2 + 2x + 1)^2$
(b) $y' = 1$
(c) $y' = \dfrac{15}{3x - 2}$
(d) $y' = \dfrac{30x \ln^2(5x^2 + 1)}{5x^2 + 1}$
(e) $y' = (3x^2 - 2)\sec^2(x^3 - 2x)$
(f) $y' = \dfrac{8(x^4 - 1)(x^4 + 1)^3}{x^9}$
(g) $y' = \dfrac{-40x^4(8x^3 - 5)}{(x^8 - x^5 + 6)^{11}}$
(h) $y' = -\dfrac{1}{x \ln^2 x} - \dfrac{1}{x}$
(i) $y' = \dfrac{6(x - 2)^2 x^2 (2x^4 - 8x^3 + 3x - 3)}{(3 - 4x^3)^4}$
(j) $y' = \dfrac{4x}{3(x^4 - 1)}$
(k) $y' = \dfrac{2\tan(2x)}{\ln(\sec(2x))}$
(l) $y' = 25(\sin(5x) - \cos(5x))^4(\sin(5x) + \cos(5x))$
(m) $y' = -\dfrac{3\mathrm{cossec}(3x)[\mathrm{cotg}(3x)(x^3 + 1) + x^2]}{(x^3 + 1)^2}$
(n) $y' = -\dfrac{2e^x}{e^{2x} - 1}$
(o) $y' = \dfrac{y(y - x\ln y)}{x(x - y\ln x)}$
(p) $y' = \dfrac{3x^2 - ye^{xy}}{6y + xe^{xy}}$
(q) $y' = -\dfrac{8x}{y}$
(r) $y' = \dfrac{\sin y}{1 - x\cos y}$
(s) $y' = -y^2 \sec\left(\dfrac{1}{y}\right)$
(t) $y' = \dfrac{3x^2 \ln(3) 3^{\arcsin(x^3)}}{\sqrt{1 - x^6}}$
(u) $y' = \dfrac{(4x^2 + 3x - 1)(8x + 3)}{4(y^2 - 9)^3}$
(v) $y' = -\dfrac{y}{x}$
(w) $y' = -\dfrac{9(1 + \arccos(3x))^2}{\sqrt{1 - 9x^2}}$
(x) $y' = \dfrac{2x}{\arctan(x^2)(1 + x^4)}$
(y) $y' = \dfrac{e^{-3x}[-6\sqrt{x}\tan(\sqrt{x}) + \sec^2(\sqrt{x})}{4y\sqrt{x}}$
(z) $y' = \dfrac{3}{9x^2 - 30x + 26}$

19. $y = -x - 2$ e $y = -x + 2$

20. $y = -x$

21. $m_1 = \dfrac{1}{5}$ e $m_2 = -5$

22. Para $a = 1:$ $y = 5x + \dfrac{7}{3}$ e $y = 5x - 2$; para $a = 3:$ $y = 13x - 15$ e $y = 13x - 18$.

23. $y = -7x + 8$

24. $m_1 = \pm\dfrac{2}{3}$ e $m_2 = \mp\dfrac{3}{2}$

25. $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ e $f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$

26. .

(a) $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$
(b) $f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))(a+bx)^{m-n}b^n$, se $n \leq m$ e $f^{(n)}(x) = 0$, se $n > m$

(c) $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}n!}{(x+1)^{n+1}}$

(d) $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}2^n(n-1)!}{(2x-3)^n}$

27. (a) $\log_2 e(100! + 99!)$

    (b) $-100!$

28. (a) $g''(x) = (1 - 6\sin(3x))^2 f''(x + 2\cos(3x)) - 18\cos(3x)f'(x + 2\cos(3x))$

    (b) $g''(0) = -10$

29. $g''(0) = 3$

30. (a) $f'(0) = -\dfrac{6}{5}$ (b) $g(x) = 2x + 3$ (c) 20

31. $A = -\dfrac{3}{20}$ e $B = -\dfrac{1}{20}$

32. $m_t = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $m_r = \sqrt{3}$.

33. -

34. -

35. $A = \dfrac{e^3}{2}$u.a.

36. -

    (a) 16°C.

    (b) 17,875°C.

    (c) 19,29°C por minuto.

37. .

    (a) 50000 reais.

    d. 7,3 anos.

38. (a) $v(2) = \dfrac{1}{4}$u.c./s (b) $a(2) = -\dfrac{1}{16}$u.c./s^2

39. (a) $v(1/4) = -12$km/h e está indo na direção oeste (b) $s(1) = 8$km

40. $t = 3$s; $v_1(3) = 52$m/s; $v_2(3) = 25$m/s; $s_1(3) = 65$m; $s_2(3) = 14$m

41. (a) 2,5s (b) $t = 0$s $\Rightarrow$ $v_1 = -2$m/s e $v_2 = 8$m/s; $t = 5$s $\Rightarrow$ $v_1 = 8$m/s e $v_2 = -2$m/s

42. $v_0 e^{-cx}$u.c./u.t.

43. 11552πcm^3/s

44. 94km/h

45. $\dfrac{7}{\pi}$m/min

46. 0,005m/min   ou   0,025m/min, dependendo da interpretação da piscina.

47. $\left(\dfrac{9}{8}, \dfrac{9}{2}\right)$

48. 2,4m/s

49. (a) $\dfrac{1}{\pi}$m/h   (b) 31,4h

50. $\dfrac{27}{\sqrt{61}} \approx 3,46$m/s

51. $\dfrac{2 \cdot 10^{-4}}{9}$cm/min

52. $1,4\pi$cm$^3/°C$

53. -0,1125m/h

54. -1,6cm/min

55. 0,0625m/min

56. 0,08rad/s

57. $5\sqrt{61}$km/h

58. .
   (a) $\dfrac{65}{32} = 2,03125$
   (b) $4,02$
   (c) $\dfrac{90-\pi}{90} \approx 0,9651$
   (d) $0,05$
   (e) $9,99$
   (f) $1,2$
   (g) $\dfrac{26}{81} \approx 0,32099$
   (h) $0,87$
   (i) $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{100} \approx 0,7954$
   (j) $1,06$
   (k) $\dfrac{193}{48} \approx 4,02083$

59. $g(1,95) \approx -4,15$ e $g(2,05) \approx -3,85$

60. $dV = 270$cm^3 e $dA = 36$cm^2

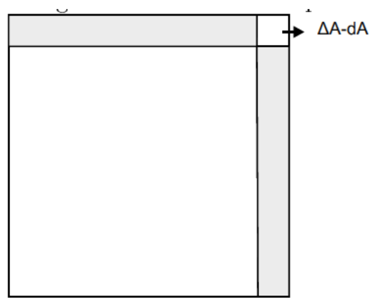
61. $V = 2\pi rh\Delta r =$(Área lateral do cilindro interior)$\times$(Espessura) e $E = \pi h(\Delta r)^2$

62. $dV = 28,8\pi$cm^3

63. $dA = 16,7263$cm^2

64. $dr = \dfrac{1}{50\pi}$cm

65. A região sombreada corresponde a dA e $\Delta A - dA$ está indicado



66. $N \approx 3,12$ e $N = 3,12100501$

67. 60000 cm^3

Capítulo 4

Regra de L'Hôpital

4.1 Introdução

No capítulo 2, discutimos limites que podem ser determinados examinando por inspeção ou por alguma manipulação algébrica. Nesta seção, estaremos interessados com limites que não podem ser obtidos por tais métodos. Por exemplo, por algumentos geométricos, usando o Teorema do Confronto e algumas manipulações com desigualdades já provamos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1. \qquad (1)$$

Nosso objetivo aqui é desenvolver um método mais direto. O que faz o limite (1) problemático é o fato de que numerador e denominador tendem a zero, ou seja, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$. Este limite pode ser conjecturado de aproximações locais lineares de sen(x) em 0.

Lembre que, se uma função f for diferenciável em um ponto x_0, então para os valores de x próximo de x_0, os valores de f podem ser aproximados por

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \qquad (2)$$

onde a aproximação tende a ser cada vez melhor quando $x\to x_0$.Em particular, para $f(x)=$sen(x) e $x_0=0$, segue que

$$\operatorname{sen}(x)\approx x.$$

Isto sugere que o valor de $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ fica cada vez mais próximo de 1 quando $x\to 0$ e, portanto, podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

A idéia de usar aproximações lineares locais para calcular formas indeterminadas do tipo $\frac{0}{0}$ pode ser usada para motivar um procedimento mais geral para determinar tais limites. Para esta proposta, suponhamos que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$, isto é,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0. \qquad (3)$$

Por simplificação, admitiremos também que f e g são funções diferenciáveis em $x = x_0$ e que f' e g' são funções contínuas em $x = x_0$, ou seja,

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0) \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = g'(x_0). \qquad (4)$$

A diferenciabilidade de f e g implica que f e g são contínuas em $x = x_0$, e, portanto a partir de (3) segue que

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \text{ e } g(x_0) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0. \qquad (5)$$

Assim, usando a aproximação linear local, as propriedades de limites e a equação (4), temos que:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Através da equação (5), obtemos o seguinte resultado

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

4.2 Forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$

Teorema: Se f e g são duas funções com primeiras derivadas contínuas em $x = x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ e $\forall\ x \neq x_0$, $g'(x) \neq 0$ e $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir então

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Podemos concluir então, pelo *Teorema de L'Hôpital*, que para calcular um limite cuja indeterminação é do tipo $\frac{0}{0}$ basta derivar o numerador e o denominador, e estas derivadas serão o numerador e o denominador de uma nova função cujo valor no ponto de indeterminação da função inicial é o limite desta quando o argumento tende ao ponto de indeterminação.

Exemplo 1: Calcule os limites:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$;

   Solução: Observe que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0}$.

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}.$

<u>**Solução:**</u> Observe que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{0}{0}.$

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$

Observação 1: Se $f'(c)=0$ e $g'(c)=0$, isto é, $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to x_0}g'(x)=0$ e se as funções f' e g' satisfazem as condições impostas às funções f e g segundo a hipótese do teorema, então este teorema pode ser aplicado para a razão $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ e nos dará como conclusão que:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{f''(x_0)}{g''(x_0)}.$$

Exemplo 2: Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}.$

<u>**Solução:**</u> Observe que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\frac{0}{0}.$

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\frac{0}{0}.$

Aplicando novamente a regra de L'Hôpital, temos que:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{0}{0}$

Novamente a regra de L'Hôpital, temos que:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$

Observação 2: O processo descrito pelo Teorema de L'Hôpital pode ser repetido quantas vezes se fizer necessário, desde que respeitadas as condições do teorema. Para o caso geral, $f^{(n)}(x)$ e $g^{(n)}(x)$, não demonstraremos aqui, pois exige o conhecimento da Fórmula de Taylor com resíduo para $f(x)$ e $g(x)$.

Observação 3: O Teorema de L'Hôpital pode ser aplicado quando $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ e quando $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ e se o que se quer é o $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, desde que exista o $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Para tanto, basta fazer uma mudança de variável. Definindo $x=\frac{1}{y}$. Se $x\to\infty$, então $y\to 0$. Assim,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{1}{y^2}f'\left(\frac{1}{y}\right)}{-\frac{1}{y^2}g'\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplo 3: Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{k}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

<u>**Solução:**</u> Observe que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{k}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}$.

Definindo $y=\frac{1}{x}$. Se $x\to\infty$, então $y\to 0$. Assim,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{k}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin(ky)}{y}=\frac{0}{0}$.

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin(ky)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{k\cos(ky)}{1}=k$.

Exemplo 4: Calcule os limites a seguir.

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x^n-a^n}$;

   <u>**Solução:**</u> Observe que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x^n-a^n}=\frac{0}{0}$.

   Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

   $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x^n-a^n}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{nx^{n-1}}=\frac{1}{na^{n-1}}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$;

   <u>**Solução:**</u> Observe que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}=\frac{0}{0}$.

   Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\frac{0}{0}$.

   Novamente, aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sec^2 x\tan x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\cos^3 x}=2$.

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$;

   <u>**Solução:**</u> Temos que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}=\frac{0}{0}$.

   Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

   $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-4(\pi-2x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\text{cossec}^2 x}{8}=-\frac{1}{8}$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$;

Solução: Temos que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x} = \frac{0}{0}$.

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$.

4.3 Forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema: Se f e g são funções contínuas e deriváveis em todos os pontos $x \neq x_0$ (numa vizinhança do ponto x_0) e $g'(x) \neq 0$ para todo x e se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir, então

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplo 5: Calcule o $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.

Solução: Temos que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$.

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x) = 0$.

Observação 4: As considerações tecidas nas observações para regra de L'Hôpital para indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ são também verdadeiras aqui no a para indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e ilustraremos apenas com exemplos.

Exemplo 6: Calcule os limites.

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan x}{\tan(3x)} = \frac{\infty}{\infty}$;

Solução: Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$L = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan x}{\tan(3x)} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{3 \sec^2(3x)} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(3x)}{3 \cos^2 x} = \frac{0}{0}$.

Novamente, pela regra de L'Hôpital, temos que:

$L = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(6x)}{\sin(2x)} = \frac{0}{0}$.

Pela regra de L'Hôpital novamente, temos que:

$L = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3\cos(6x)}{\cos(2x)} = 3$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}$;

<u>**Solução:**</u> Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}$.

Novamente, pela regra de L'Hôpital, temos que:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=\frac{\infty}{\infty}$;

<u>**Solução:**</u> Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$.

Observação 5: A regra de L'Hôpital só pode ser aplicada para indeterminações da forma $\dfrac{0}{0}$ e $\dfrac{\infty}{\infty}$. Caso seja ignorada essa condição, chega-se a resultados absurdos.

Veremos a seguir, como as indeterminações da forma $0.\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0 e ∞^0 podem ser transformadas em indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, com o objetivo de aplicar a regra de L'Hôpital para auxiliar no cálculo de limites.

4.4 Aplicações da Regra de L'Hôpital

4.4.1 Forma indeterminada $0.\infty$

Se $f(x)=g(x)\,h(x)$ e o $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0.\infty$, então para levantar esta indeterminação rrescrevemos a função como segue

$$f(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{h(x)}}\text{ ou }\ f(x)=\frac{h(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

Desta forma, o $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ assume a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplo 7: Calcule os limites:

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec(3x)\cos(5x))$

<u>**Solução:**</u> Temos que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec(3x)\cos(5x))=0.\infty$.

Reescrevendo a função, temos que:

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sec(3x)\cos(5x)\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec(3x)}{\frac{1}{\cos(5x)}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(5x)}{\cos(3x)}=\tfrac{0}{0}.$$

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-5\sin(5x)}{-3\sin(3x)}=\tfrac{5}{3}.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(x^2-1\right)^2e^{-x^2}\right)=\infty.0$

Solução: Reescrevendo o limite, temos que:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(x^2-1\right)^2e^{-x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-1\right)^2}{e^{x^2}}=\tfrac{\infty}{\infty}.$$

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(x^2-1\right)2x}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(x^2-1\right)}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{2xe^{x^2}}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2xe^{x^2}}=0$$

3. $\lim\limits_{x\to1^+}\left[\left(\cot\frac{\pi x}{2}\right)\left(\ln(x-1)-x\right)\right]=0.\infty.$

Solução: Reescrevendo a função, temos que:

$$L=\lim_{x\to1^+}\left[\left(\mathrm{cotg}\tfrac{\pi x}{2}\right)\left(\ln(x-1)-x\right)\right]=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(x-1)-x}{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\tfrac{\infty}{\infty}$$

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x-1}-1}{\frac{\pi}{2}\sec^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\underset{\substack{\downarrow\\ \frac{\infty}{\infty}}}{=}\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1^+}\frac{(2-x)\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x-1}=\tfrac{0}{0}$$

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$$\Rightarrow L=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1^+}\frac{-\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{\pi}{2}(2-x)\sin(\pi x)}{1}=0.$$

4.4.2 Forma indeterminada $\infty-\infty$

Se $f(x)=g(x)-h(x)$ e o $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty-\infty$, então, através de operação elementares entre as funções $g(x)$ e $h(x)$ é sempre possível transformar o $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ numa das formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplo 8: Calcule os limites:

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sec(x)-\mathrm{tg}(x)\right).$

Solução: Temos que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sec(x)-\mathrm{tg}(x)\right)=\infty-\infty.$

Reescrevendo a função, temos que:

$$L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right) = \tfrac{0}{0}.$$

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$$L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-\cos x}{-\sin x}\right) = 0.$$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{1-\cos x}\right) = \infty - \infty$

<u>**Solução:**</u> Reescrevendo a função, temos que:

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+\cos x + x^2 - 1}{(x^2+x)(\cos x - 1)} = \tfrac{0}{0}$$

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$$L = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{2x - \sin x + 1}{2x - \cos x + x^2 \sin x - 2x\cos x + x\sin x + 1}\right) = -\infty$$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \infty - \infty$

<u>**Solução:**</u> Reescrevendo a função, temos que:

$$L = \lim_{x\to 0} \tfrac{e^x - 1 - \ln(1+x)}{(e^x-1)\ln(1+x)} \underset{\frac{0}{0}L'H}{\overset{=}{\downarrow}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{1+x}}{(e^x-1)\frac{1}{1+x} + e^x \ln(1+x)} \underset{\frac{0}{0}L'H}{\overset{=}{\downarrow}}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{(1+x)e^x - (e^x-1).1}{(1+x)^2} + e^x \frac{1}{1+x} + e^x \ln(1+x)} = 1.$$

4.4.3 Formas Indeterminadas 1^∞, 0^0 e ∞^0

Se $f(x) = [g(x)]^{h(x)}$ e $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ assume uma das três formas indeterminadas 1^∞, 0^0 e ∞^0, então, para qualquer uma destas três indeterminações define-se

$$L = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} [g(x)]^{h(x)}.$$

Aplicando-se o logaritmo neperiano a função dada, temos que:

$$\ln L = \ln\left(\lim_{x\to x_0} [g(x)]^{h(x)}\right) \quad\Rightarrow\quad \ln L = \lim_{x\to x_0} \left(\ln [g(x)]^{h(x)}\right).$$

Por propriedade de logaritmo neperiano, temos que:

$$\ln L = \lim_{x \to x_0} \left[h(x) \ln(g(x))\right] = b.$$

Assim, o limite passa a assumir a forma indeterminada $0.\infty$, que se resolve conforme a primeira aplicação da regra de L'Hôpital vista antriormente. E ainda, como foi aplicado logaritmo na função dada, para determinar a solução final deve-se aplicar a função exponencial (pois é a função inversa do logaritmo) do limite, isto é,

$$L = e^b \quad \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = e^b.$$

Exemplo 9: Determine os limites abaixo.

1. $\lim\limits_{x \to 0} x^x = 0^0$;

   <u>**Solução:**</u> Definindo $L = \lim\limits_{x \to 0} x^x$.

   Aplicando logaritmo neperiano em ambos os membros, temos que:

   $\ln L = \ln\left(\lim\limits_{x \to 0} x^x\right) = \lim\limits_{x \to 0}\left(\ln\left(x^x\right)\right) = \lim\limits_{x \to 0}\left(x \ln x\right) = 0.\infty.$

   Reescrevendo a função, temos que:

   $\ln L = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}.$

   Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

   $\ln L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0}(-x) = 0 \ \Rightarrow \ \ln L = 0.$

   Aplicando a função exponencial a ambos os membros, obtém-se:

   $L = e^0 \ \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} x^x = 1.$

2. $\lim\limits_{x \to 1}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = 1^\infty$;

   <u>**Solução:**</u> Definindo $L = \lim\limits_{x \to 1}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$.

   Aplicando logaritmo neperiano em ambos os membros, temos que:

   $\ln L = \ln\left(\lim\limits_{x \to 1}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right) = \lim\limits_{x \to 1}\left(\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(2-x)\right) = \infty.0.$

   Reescrevendo a função, temos que:

   $\ln L = \lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\ln(2-x)\right) = \lim\limits_{x \to 1}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)\lim\limits_{x \to 1}\frac{\ln(2-x)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

   $\Rightarrow \ \ln L = \lim\limits_{x \to 1}\dfrac{\ln(2-x)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \frac{0}{0}.$

   Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

   $\ln L = \lim\limits_{x \to 1}\dfrac{-\frac{1}{2-x}}{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim\limits_{x \to 1}\dfrac{2}{\pi(2-x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \frac{2}{\pi} \ \Rightarrow \ \ln L = \frac{2}{\pi}.$

   Aplicando a função exponencial a ambos os membros, obtém-se:

   $L = e^{\frac{2}{\pi}} \ \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^{\frac{2}{\pi}} = \sqrt[\pi]{e^2}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg}(x)\right)^{\sin x} = \infty^0$.

<u>**Solução:**</u> Definindo $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg}(x)\right)^{\sin x}$.

Aplicando logaritmo neperiano em ambos os membros, temos que:

$\ln L = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg}(x)\right)^{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x \ln(\operatorname{cotg}(x))\right) = 0.\infty$.

Reescrevendo a função, temos que:

$$\ln L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\operatorname{cotg}(x))}{\frac{1}{\sin x}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\operatorname{cotg}(x))}{\operatorname{cossec}(x)}\right) = \frac{\infty}{\infty}.$$

Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que:

$$\ln L = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{cossec}^2(x)}{\operatorname{cotg}(x)}}{-\operatorname{cotg}(x)\operatorname{cossec}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0 \;\Rightarrow\; \ln L = 0.$$

Aplicando a função exponencial a ambos os membros, obtém-se:

$L = e^0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg}(x)\right)^{\sin x} = 1$.

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \sqrt[4\cos^2(3x)]{1+\cos^2(3x)}$

<u>**Solução:**</u> Definindo $L = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \sqrt[4\cos^2(3x)]{1+\cos^2(3x)}$, temos que:

$$\ln L = \ln \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(1+\cos^2(3x)\right)^{\frac{1}{4\cos^2(3x)}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left(1+\cos^2(3x)\right)}{4\cos^2(3x)} \underset{\frac{0}{0}\;L'H}{\overset{\downarrow}{=}}$$

$$\Rightarrow \ln L = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\frac{-6\cos(3x)\sin(3x)}{1+\cos^2(3x)}}{-24\cos(3x)\sin(3x)} = -\frac{1}{4}\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2(3x)} = -\frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow \ln L = -\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}.$$

4.5 Exercícios

1. Calcule os limites, aplicando a regra de L'Hopital, quando possível:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\text{arcsen }x}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to y}\dfrac{\text{sen }x-\text{sen }y}{x-y}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-\text{sen}x\ -1}{\ln(1+x)}$

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{\sec^2(3x)}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\text{cossec }x}$

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^n}{e^{2x}}$, para $n\in\mathbb{N}$

7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\text{tg}(x)}{\text{tg}(3x)}$

8. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$, para $n\in\mathbb{N}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{cotg}(x)}{\text{cotg}(2x)}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

11. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{2x}{1-x^2}}$

12. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\text{sen}2x)}{\ln(\text{sen }x)}$

13. $\lim\limits_{x\to 0^+}[x\ln(\sin x^2)]$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi}{x}\dfrac{\text{tg}(\pi x)}{2}\right)$

15. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x\sin\left(\dfrac{a}{x}\right)\right)$

16. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}[(\pi-2x)\,\text{tg}(x)]$

17. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}[(1-\text{tg}x)\sec(2x)]$

18. $\lim\limits_{x\to a}\left[(a^2-x^2)\,\text{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right)\right]$

19. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3-x}\right)$;

20. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-\frac{x-2}{\text{tg}(x-2)}-\cos(x-2)\right)$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\text{sen}^2 x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right)$

22. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\text{tg}(x)}\right)$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi}{4x}-\dfrac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}\right)$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2}-\text{tg}\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)\right)$

27. $\lim\limits_{x\to \infty}\left[e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)\right]^{x^{-1}}$

28. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right)^{x^2}$

29. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2}{x}+1\right)^{x}$

30. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$

31. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\text{sen }x)^{\text{cotg}(x)}$

32. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

33. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+2x)^{4x}$

34. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln x}$

35. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\text{sen }x}$

36. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\text{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)^{\text{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right)$

37. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\text{tg }x}{1-\sqrt{2}\text{sen }x}$

38. $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x+x)^{\ln x}$

39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\text{sen}^2 x}{3\text{tg}^3 x\cos x}$

40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}^2 x-\text{cotg}(x)}{x^2}$

41. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$

42. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$

43. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}$

44. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\left(\operatorname{cotg}(x)\right)^{\operatorname{tg}\,x}\right]$

45. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^{-2}}-1}{2\operatorname{arctg}(x^2)-\pi}$

46. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}$

47. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+1\right)^{x^{-2}}$

48. $\lim\limits_{x\to\infty}\left((x+1)^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}}\right)$

49. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{x^2-1}\right)$

50. $\lim\limits_{x\to 4}(x-3)^{\frac{2x}{x-4}}$

51. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$

52. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{2e^x-2}$

53. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(e^x+1\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]$

2. Determine o valor da constante a para que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=4.$

3. Determine todos os valores das constantes a e b para que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{a+\cos(bx)}=-8.$

4. Determine o valor da constante a para que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+e^{2x}}{2}\right)^{a/x}=\sqrt{e}.$

5. Determine, se possível, o valor da constante a para que

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt[\ln(x+1)]{1+a\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}^2(x)}{3\operatorname{tg}^3(x)\cos(x)}.$$

6. Se f' é contínua e $f(0)=3$ determine, se possível, o valor da constante m e o valor de $f'(0)$ para que

$$\lim_{x\to 0}\frac{m\ f\left(e^{4x}-1\right)+\left[f\left(\sin(3x)\right)\right]^2}{x}=12.$$

Respostas:

1. .

1. 0	2. $\cos y$	3. 0	4. 9
5. 0	6. $\begin{cases} \infty, \text{ para } x \to -\infty \\ 0, \text{ para } x \to +\infty \end{cases}$	7. 3	8. 0
9. 2	10. 1	11. e^{-1}	12. 1
13. 0	14. $\dfrac{\pi^2}{2}$	15. a	16. 2
17. 1	18. $\dfrac{4a^2}{\pi}$	19. 0	20. 6
21. $\dfrac{1}{2}$	22. $-\dfrac{1}{2}$	23. $\dfrac{1}{3}$	24. $\dfrac{1}{3}$
25. $\dfrac{\pi^2}{8}$	26. $-\infty$	27. e	28. e^{-2}
29. e^2	30. e^{-1}	31. e	32. e^2
33. 1	34. 1	35. 1	36.
37. 2	38. 1	39. $\dfrac{1}{3}$	40. ∞
41. $\dfrac{1}{2}$	42. e	43. $e^{\frac{2}{\pi}}$	44. 0
45. $-\dfrac{1}{2}$	46. 1	47. ∞	48. 0
49. ∞	50. e^8	51. $\sqrt{2}$	52. 0
53. 0			

2. $c = \ln 2$

3. $a = -1$ e $b = \pm\frac{1}{2}$

4. $a = \frac{1}{4}$

5. $a = -\ln 3$

6. $m = -3$ e $f'(0) = 2$.

Capítulo 5

Análise da Variação das Funções

Objetivos

- Interpretar geometricamente e aplicar o teorema de Rolle;
- Interpretar geometricamente e aplicar o teorema do Valor Médio;
- Determinar intervalos de crescimento e decrescimento de uma função;
- Encontrar os pontos críticos;
- Determinar os intervalos em que uma função é côncava e/ou convexa;
- Obter os pontos de inflexão;
- Encontrar os máximos e mínimos relativos;
- Analisar os máximos e mínimos de uma função mediante o teste (ou critério) da primeira derivada;
- Analisar os máximos e mínimos de uma função mediante o teste (ou critério) da segunda derivada;
- Determinar as assíntotas do gráfico de uma função;
- Construir gráficos de funções;
- Aplicar a teoria de máximos e mínimos das funções na resolução de problemas;
- Analisar o gráfico de uma função (máximos e mínimos relativos e absolutos, pontos críticos, pontos de inflexão, intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade, assíntotas).

5.1 Introdução

O aspecto quantitativo no estudo dos fenômenos da natureza se resume em estabelecer e analisar a dependência funcional entre as grandezas variáveis que tomam parte em cada fenômeno. Se conseguirmos estabelecer esta dependência funcional de modo analítico, isto é, mediante uma ou várias fórmulas, podemos explorar esta dependência servindo-nos dos métodos de análise matemática.

O nosso objetivo é estabelecer um método geral para a análise da variação de funções de uma variável real e construção do seu gráfico.

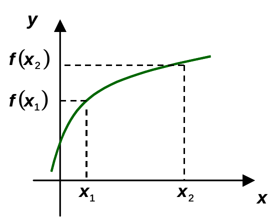
5.2 Funções Crescentes e Decrescentes

Definição 1: Seja f uma função definida em um intervalo I e sejam x_1, $x_2 \in I$.

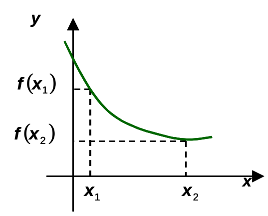
(i) f é *crescente* em I se $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1 < x_2$;

(ii) f é *decrescente* em I se $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 < x_2$;

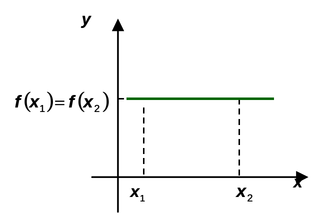
(iii) f é *constante* em I se $f(x_1) = f(x_2)$ para todos os pontos x_1 e x_2.



f crescente



f decrescente

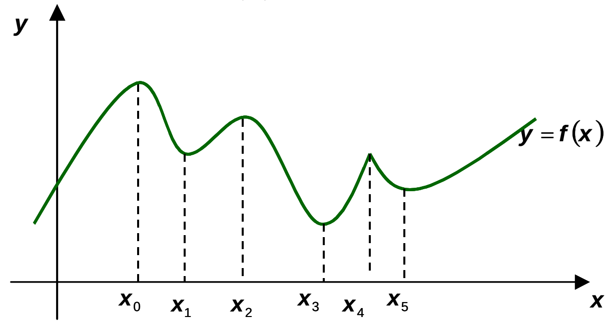


f constante

Se uma função é só crescente ou só decrescente em um intervalo, dizemos que é *monótona* neste intervalo.

5.3 Máximos e Mínimos

Considere a função $y = f(x)$ como abaixo ilustrada.



Os pontos de abcissas x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são chamados *pontos extremos*. Os valores das ordenadas, $f(x_0)$, $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são chamados de *máximos relativos*; e, $f(x_1)$, $f(x_3)$ e $f(x_5)$ são chamados de *mínimos relativos*.

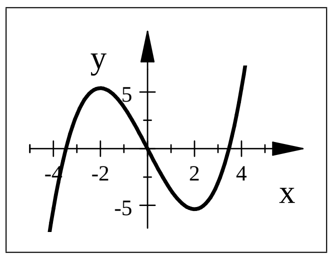
Definição 2: Uma função f tem um *máximo relativo* em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que

$$f(c) \geq f(x), \forall x \in I \cap Df.$$

Definição 3: Uma função f tem um *mínimo relativo* em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que

$$f(c) \leq f(x), \forall x \in I \cap Df.$$

Exemplo 1: A função $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$ tem um máximo relativo em $c_1 = -2$ e um mínimo relativo em $c_2 = 2$.



Teorema: Supondo que $f(x)$ existe para todos os valores de $x \in (a, b)$ e que f tem um extremo relativo em c, com $a < c < b$. Se $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.

Demostração: Supondo que f tem um ponto de máximo relativo em c e que $f'(c)$ existe. Então, pela definição de derivadas, temos que

$f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim\limits_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim\limits_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$.

Como c é um ponto de máximo relativo de f, se x estiver suficientemente próximo de c, temos que

$$f(c) \geq f(x) \quad \Rightarrow \quad f(c) - f(x) \geq 0.$$

Se $x \to c^+$, então $x - c \to 0$. E ainda, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$. Assim,

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \qquad (1)$$

Se $x \to c^-$, então $x - c \to 0$. E ainda, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$. Assim,

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \qquad (2)$$

De (1) e (2), segue que $f'(c) = 0$.

Geometricamente, está proposição nos afirma que se f tem um extremo relativo em c e se $f'(c)$ existe, então o gráfico de $y = f(x)$ tem um reta tangente horizontal no ponto $x = c$.

A proposição 1, nos permite concluir que se $f'(c)$ existe, a condição $f'(c) = 0$ é *necessária* para a existência de um extremo relativo em c, mas *não é suficiente*. Em outras palavras, se $f'(c) = 0$, então a função f pode ter ou não um extremo relativo no ponto c. Isto pode ser observado nas funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = |x|$. *Verifique!!!*

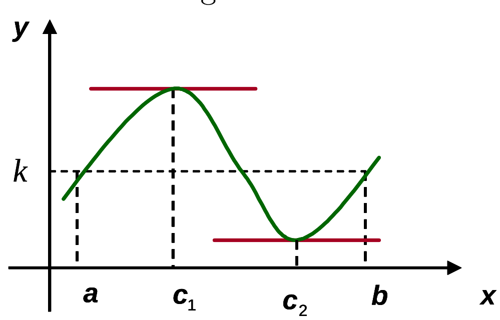
Definição 4: O ponto $c \in Df$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe é chamado de *ponto crítico* ou *valor crítico*.

Observe que uma função definida num dado intervalo pode admitir vários pontos extremos. Ao *maior* e ao *menor* valor da função num intervalo denominamos *máximo absoluto* e *mínimo absoluto*, respectivamente.

Teorema de Weierstrass: Se f é uma função contínua, definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Então f assume seu máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.
Obs: Esta demonstração será omitida.

5.4 Teoremas sobre derivadas

O próximo teorema afirma que se o gráfico de uma função deferenciável cruza a reta $y = k$ em dois pontos, a e b, então entre eles deve existir ao menos um ponto c onde a reta tangente horizontal. Observe a figura abaixo:



No exemplo acima ilustrado, em cada um dos pontos cujas abscissas são c_1 e c_2 o coeficiente angular da reta tangente a curva é zero. Portanto, $f'(c) = 0$.

Teorema de Rolle

Seja f uma função tal que

i. f é contínua em $[a, b]$;

ii. f é derivável em (a, b);

iii. $f(a) = f(b)$.

Então, existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
Demonstração: Consideremos dois casos.

1º Caso: *Se* $f(x) = k$, $\forall x \in [a, b]$.

Então $f'(x) = 0$, $\forall\ x \in (a,b)$.

Logo, qualquer número entre a *e* b *pode ser escolhido como* c.

2^o Caso: *Se* $f(x) \neq f(a) = f(b)$, *para algum* $x \in (a,b)$.

Como f *é contínua em* $[a,b]$, *pela proposição 2,* f *atinge seu máximo e seu mínimo em* $[a,b]$. *Sendo* $f(x) \neq f(a) = f(b)$ *existe um valor extremo em algum* $c \in (a,b)$. *E ainda, como* f *é derivável, pela proposição 1, conclui-se que* $f'(c) = 0$.

Exemplo 2: A função $f(x) = x - x^3$, $\forall x \in [-1,1]$, verifica o teorema de Rolle?

Solução: Verifiquemos se as hipóteses do teorema de Rolle são satisfeitas:

i. f é definida e contínua sobre o intervalo fechado $[-1,1]$;

iii. $f'(x) = 1 - 3x^2$ é definida e contínua em $[-1,1]$. Logo, f é derivável em $(-1,1)$;

iii. $f(-1) = f(1) = 0$;

Como as hipóteses estão satisfeitas, então existe $c \in (-1,1)$ tal que
$f'(c) = 0 \Rightarrow 1 - 3c^2 = 0 \Rightarrow c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \in (-1,1)$.

Exemplo 3: A função $f(x) = \cos^2 x$, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, verifica o teorema de Rolle?

Solução: Temos que:

i. f é definida e contínua em $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$;

ii. $f'(x) = -2\sin x \cos x = -2\sin(2x)$ é derivável em $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$;

iii. $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$;

Observe ainda que, se
$f'(c) = 0 \Rightarrow -2\sin(2c) = 0 \Rightarrow c = \frac{n\pi}{2}$, com $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Para $c = 0$, temos que $c \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.
Logo, verifica-se o teorema de Rolle.

Exemplo 4: A função $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$, $\forall x \in [0,4]$, verifica o teorema de Rolle?

Solução: Verifiquemos se as hipóteses do teorema de Rolle são satisfeitas:

i. f é definida e contínua sobre o intervalo fechado $[0,4]$;

iii. $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$;

ii. $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x-2)}}$ não é definida para $x = 2 \in (0,4)$.

Logo, não verifica o teorema sobre o intervalo $[0,4]$.

Exemplo 5: A função $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ se anula nos extremos do intervalo $[-1,1]$. Demonstre que sua derivada não se reduz a zero em nenhum ponto do segmento $[-1,1]$.

Solução: Observe que

(i) f é definida e contínua sobre o intervalo fechado $[-1,1]$;

(iii) $f(-1) = f(1) = 0$;

(iii) $f'(x) = -\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$ não é definida para $x = 0 \in (-1,1)$.

Portanto, f não satisfaz o teorema de Rolle sobre o intervalo $[-1,1]$ então não é possível afirmar que existe um ponto tal que $f'(c) = 0$.

Exemplo 6: Comprove que entre as raízes de $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ existe também as raízes de sua derivada.

Solução: As raízes de f são 2 e 3. Note ainda que,

(i) f é definida e contínua sobre o intervalo fechado $[2,3]$;

(iii) $f(2) = f(3) = 0$;

(iii) $f'(x) = \frac{2x-5}{3\sqrt[3]{(x^2-5x+6)^2}}$ é derivável para todo $x \in (2,3)$.

Logo, pelo teorema de Rolle, concluímos que existe um $c \in (2,3)$ tal que $f'(c) = 0$, ou seja, entre 2 e 3 existe também a raiz da derivada.

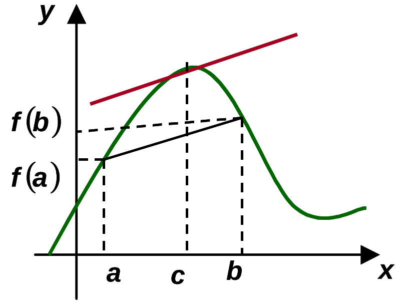
Analisemos agora o primeiro teorema do valor médio para derivadas, ou seja, sobre os incrementos finitos de uma função.

O teorema de Rolle é um caso especial do *Teorema do Valor Médio*, o qual afirma que entre dois pontos quaisquer A e B sobre um gráfico de uma função diferenciável, deve haver pelo menos um lugar onde a reta tangente à curva é paralela à reta secante que passa por A e B.

Note que o coeficiente angular da reta secante, que passa pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$, é

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e que a inclinação da reta tangente em c é $f'(c)$. Geometricamente,



Teorema do Valor Médio (ou de Lagrange)

Seja f uma função tal que

i. f é contínua em $[a, b]$;

ii. f derivável em (a, b);

Então, existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demonstração: A equação da reta que passa pelos pontos A e B é

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Se $y = h(x)$, então:

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Observe que $h(x)$ é uma função polinomial. Sendo assim, h é uma função contínua e diferenciável para todo x.

Defina a função $g(x) = f(x) - h(x)$. Assim,

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Esta função representa a distância vertical entre um ponto do gráfico e o ponto correspondente da reta secante.

Note que:

(i) $g(a) = g(b) = 0$*;*

(ii) *g é uma função contínua em $[a, b]$;*

(iii) *g é derivável em (a, b);*

Portanto, como a função g satisfaz as condições do Teorema de Rolle, existe um $c \in (a, b)$ tal que

$$g'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Exemplo 7: Verifique se as funções abaixo verificam o teorema do valor médio:

1. $f(x) = x - x^3$ em $[-2, 1]$;

   Solução: Verificando as hipóteses do teorema do valor médio:

   (a) i. f é definida e contínua em $[-2, 1]$;
       ii. $f'(x) = 1 - 3x^2$ é definida para todo $x \in (-2, 1)$;

Logo, satisfaz as condições do teorema. Assim, temos que $\exists c \in (-2, 1)$ tal que

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \Rightarrow \quad 1 - 3c^2 = -2 \quad \Rightarrow \quad c = \pm 1.$

Observe que, apenas $-1 \in (-2, 1)$.

2. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ sobre $[-1, 1]$.

   Solução: Verificando as hipóteses do teorema do valor médio:

   (a) i. f é definida e contínua em $[-1, 1]$;
   ii. $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ não é definida em $x = 0 \in (-1, 1)$;

   Vejamos, no entanto, se verifica o Teorema.

   $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0.$

   Conclusão: não existe $c \in (-1, 1)$. Portanto, não verifica o teorema sobre $[-1, 1]$.

Exemplo 8: Em que ponto da curva $f(x) = \ln x$ a tangente é paralela à corda que une os pontos $A(1, 0)$ e $B(e, 1)$.

Solução: Como as hipóteses do Teorema de Lagrange são satisfeitas para $f(x) = \ln x$ sobre $[1, e]$ (*verifique!!!*), temos que

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{e-1} \quad \Rightarrow \quad c = (e-1) \quad \Rightarrow \quad c \in (1, e).$

Lembre que $f'(c)$ é o coeficiente angular da reta secante que passa pelos pontos A e B.

Portanto, o ponto em que a tangente a curva é paralela a corda que une os pontos A e B é $P(e-1, \ln(e-1))$.

Exemplo 9: Aplique o Teorema de Lagrange para demonstrar a desigualdade $x > \ln(x+1)$ se $x > 0$.

Solução: Como $x > 0$ tomemos um número c tal que $0 < c < x$. Se $f(x) = \ln(x+1)$ e os extremos do intervalo são $a = 0$ e $b = x$, então:

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c+1} = \frac{\ln(x+1)-0}{x-0} \quad \Rightarrow \quad \ln(x+1) = \frac{x}{c+1}.$

Oberve que,

$\frac{x}{c+1} < x$, pois $c > 0 \qquad \Rightarrow \ln(x+1) < x.$

Com o auxílio do estudo das derivadas podemos aprimorar este conceito de função crescente, decrescente ou nula. O próximo teorema esta baseado no teorema do Valor Médio.

Teorema 1: Seja f uma função contínua sobre o intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b).

(i) Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$;

(ii) Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$;

(iii) Se $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, então f é constante em $[a, b]$.

Demonstração:

Sejam x_1, $x_2 \in [a,b]$ com $x_1 < x_2$. Como f é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então f é contínua em $[x_1,x_2]$ e derivável em (x_1,x_2), pois $[x_1,x_2] \subset [a,b]$. Pelo Teorema do valor médio, $\exists c \in (x_1,x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Observe que $x_2 - x_1 > 0$, então:

(i) *Se $f'(c) > 0$, então $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.*

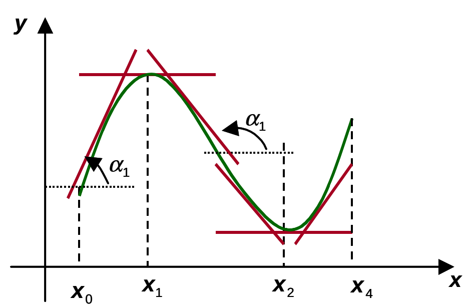
Logo, pela definição 1, f é crescente em $[a,b]$.

(ii) *Se $f'(c) < 0$, então $f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.*

Portanto, pela definição 1, f é decrescente em $[a,b]$.

(iii) *Se $f'(c) = 0$, então $f(x_2) = f(x_1)$. Dessa forma, pela definição 1, f é constante em $[a,b]$.*

Geometricamente, no(s) intervalo(s) em que f é crescente, a inclinação da reta tangente à curva em cada ponto é positiva, pois forma com o eixo x um ângulo agudo α; decrescente, a inclinação da reta tangente à curva em cada ponto é negativa, pois forma com o eixo x um ângulo obtuso α. E ainda, a reta tangente é paralela ao eixo x nos pontos em que a derivada é nula.



Exemplo 10: Determinar os intervalos de crescimento e/ou decrescimento das funções:

1. $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$;

   Solução: O domínio da função f é: $Df = \mathbb{R}$.

   Temos que:

   $f'(x) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) \Rightarrow Df' = \mathbb{R}$.

   Assim,

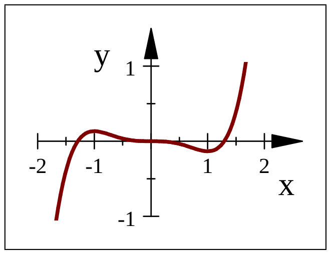
   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pm 1$.

   Os pontos críticos da função são: -1, 0 e 1.

   Analisando o sinal da derivada nos intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ e $(1,+\infty)$, pelo teorema anterior, conclui-se que:

   - f é crescente para $x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$;
   - f é decrescente para $x \in [-1,1]$.

Graficamente, temos que:



2. $f(x) = \frac{1}{x+2}$;

   Solução: O domínio da função f é: $Df = \mathbb{R} - \{-2\}$.

   Temos que:

   $f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} \Rightarrow Df' = \mathbb{R} - \{-2\}$.

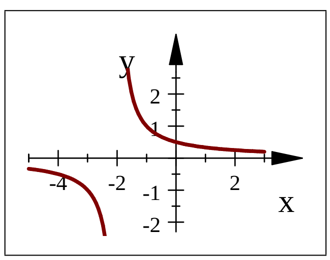
   Observe que f' não existe em $x = -2$. Assim,

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow -1 = 0 \quad$ *Absurdo!*

   Temos que, f' não existe em $x = -2$. Como $-2 \notin Df$, não pode ser considerado um ponto crítico. Apesar disso, devemos considerá-lo na análise do sinal da derivada.

   Analisando o sinal da derivada nos intervalos $(-\infty, -2)$ e $(-2, +\infty)$, conclui-se que f é decrescente para $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

   Graficamente, temos que:



3. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

   Solução: O domínio da função f é: $Df = [-1, 1]$.

   Temos que:

   $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow Df' = (-1, 1)$.

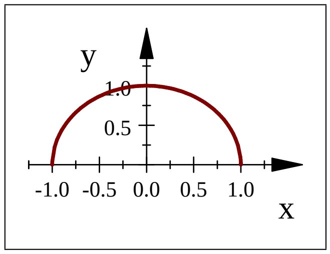
   Note que f' não está definida em $x = \pm 1$. Assim,

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$.

   Analisando o sinal da derivada somente nos intervalos $(-1, 0)$ e $(0, 1)$, pois fazem parte do domínio da função, conclui-se que:

   - f é crescente para $x \in (-1, 0]$;
   - f é decrescente para $x \in [0, 1)$.

Graficamente, confirma-se a conclusão acima.



4. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4, \text{ se } x \leq 1 \\ -x - 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$.

<u>**Solução:**</u> O domínio da função f é: $Df = \mathbb{R}$.

Temos que:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x, \text{ se } x < 1 \\ -1, \text{ se } x > 1 \end{cases} \Rightarrow Df' = \mathbb{R} - \{1\}.$$

- Para $x < 1$, temos que:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0.$

O único ponto crítico, neste intervalo, é 0.

Analisando o sinal da derivada somente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, 1)$, conclui-se que:

  - f é crescente para $x \in [0, 1]$;
  - f é decrescente para $x \in (-\infty, 0]$.

- Para $x > 1$, temos que:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 = 0 \quad$ *Absurdo!!!*

Logo, não há ponto crítico neste intervalo.

Como $f'(x) = -1 < 0$ para todo $x > 1$, então f é decrescente para todo $x \in (1, +\infty)$.

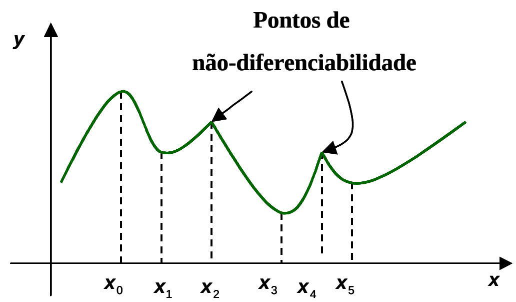
<u>Conclusão</u>:

- f é crescente para $x \in [0, 1]$;
- f é decrescente para $x \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$.

Observação: Como uma função $f(x)$ pode ter valor extremo num ponto no qual a abscissa x não pertença ao seu campo de definição, embora esta abscissa não possa ser considerada como um *valor crítico*, ao estabelecer os intervalos para a análise do crescimento e decrescimento da função $y = f(x)$ estes valores devem ser considerados, pois são extremos destes intervalos. Nos itens 2 e 3, do exemplo 1, esta consideração foi feita.

5.5 Critérios para determinação dos extremos de uma função

Os extremos relativos podem ser vistos como pontos de transição, separando regiões onde o gráfico é crescente ou decrescente. Conforme a figura abaixo, os extremos relativos de uma função contínua ocorrem ou em bicos (pontos de não-diferenciabilidade) ou em pontos em que a reta tangente é horizontal.



Os pontos extremos relativos de uma função, se houver, ocorrem em pontos críticos em que f' muda de sinal.

A seguir, veremos alguns teoremas que estabelecem critérios para determinar os extremos de uma função.

Critério da derivada primeira para determinação dos extremos

Teorema 2 (Teste da primeira derivada): Seja $y = f(x)$ uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a, b), exceto possivelmente num ponto c.

i. Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem máximo relativo em c;

ii. Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem mínimo relativo em c;

iii. Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f não tem ponto nem de máximo nem de mínimo relativo em c;

iv. Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f não tem ponto nem de máximo nem de mínimo relativo em c;

Demonstração do caso (i):

Como $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, c)$, então f é crescente em $[a, c]$ (por teorema da seção anterior). Analogamente, concluímos que f é decrescente em $[c, b]$. Portanto, $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b), então f tem um máximo relativo em c.

A demonstração dos casos (ii), (iii) e (iv) é semilar a do caso(i).

Podemos concluir deste teorema que: se ao passar pelo ponto crítico da esquerda para a direita o sinal da primeira derivada muda de mais (+) para menos (-) então, em a função tem um valor máximo e se muda de menos (-) para mais (+) então, em a função tem valor mínimo.

Exemplo 11: Determine os valores extremos da função, se existirem:

1. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$;

   Solução: O domínio da função f é: $Df = \mathbb{R}$.

   Temos que:

   $f'(x) = x^2 - x - 6 \Rightarrow Df' = \mathbb{R}$.

   Assim,

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$ e $x_2 = 3$.

   Logo, os pontos críticos da função são: -2 e 3.

   Analisando o sinal da derivada nos intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ e $(3, +\infty)$, conclui-se que:

   - $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$;
   - $f'(x) < 0$ para $x \in (-2, 3)$.

   Pelo teste da primeira derivada conclui-se que:

   - Em $x = -2$, a função f tem um ponto de máximo em $P\left(-2, \frac{22}{3}\right)$;
   - Em $x = 3$, a função f tem um ponto de mínimo em $P\left(3, -\frac{15}{2}\right)$.

2. $f(x) = \left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$;

   Solução: O domínio da função f é: $Df = [-1, 1]$.

   Temos que:

   $f'(x) = -\frac{\sqrt{1-x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow Df' = [-1, 0) \cup (0, 1]$.

   A função f' não está definida em $x = 0$.

   Temos que,

   - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{1-x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}} = 0 \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow x = \pm 1$, mas $\pm 1 \notin (-1, 1)$.
   - $f'(x)$ não está definida em $x = 0$.

   Logo, o único ponto crítico ocorre em $x = 0$.

   Analisando o sinal da derivada nos intervalos $(-1, 0)$ e $(0, 1)$, conclui-se que:

   - $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, 0)$;
   - $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 1)$.

   Pelo teste da primeira derivada conclui-se que, em $x = 0$ a função f tem um ponto de máximo em $P(0, 1)$.

1. $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$;

<u>**Solução:**</u> O domínio da função f é: $Df = \mathbb{R}$.

Temos que:

$f'(x) = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow Df' = \mathbb{R}^*$.

Assim,

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow 5x-2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$.
- $f'(x)$ não está definida em $x = 0$

Logo, os pontos críticos da função ocorrem em $x = 0$ e $x = \frac{2}{5}$.

Analisando o sinal da derivada nos intervalos $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{2}{5}\right)$ e $\left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$, conclui-se que:

- $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$;
- $f'(x) < 0$ para $x \in \left(0, \frac{2}{5}\right)$.

Pelo teste da primeira derivada conclui-se que:

- Em $x = 0$, a função f tem um ponto de máximo em $P(0,0)$;
- Em $x = \frac{2}{5}$, a função f tem um ponto de mínimo em $P\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}\right)$.

2. $f(x) = (x-1)^2(x+1)^3$;

<u>**Solução:**</u> O domínio da função f é: $Df = \mathbb{R}$.

Temos que:

$f'(x) = (x-1)(x+1)^2(5x-1) \Rightarrow Df' = \mathbb{R}$.

Assim,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2(5x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = -1$ e $x_3 = \frac{1}{5}$.

Logo, os pontos críticos da função são: ± 1 e $\frac{1}{5}$.

Analisando o sinal da derivada nos intervalos $(-\infty, -1)$, $\left(-1, \frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{1}{5}, 1\right)$ e $(1, +\infty)$, conclui-se que:

- $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{1}{5}\right) \cup (1, +\infty)$;
- $f'(x) < 0$ para $x \in \left(\frac{1}{5}, 1\right)$.

Pelo teste da primeira derivada conclui-se que:

- Em $x = -1$, a função f tem não tem valor máximo nem mínimo;
- Em $x = \frac{1}{5}$, a função f tem um ponto de máximo em $P\left(\frac{1}{5}, \frac{3456}{3125}\right)$;
- Em $x = 1$, a função f tem um ponto de mínimo em $P(1,0)$.

Roteiro para determinar os valores extremos

1^o Passo: Determinar o campo de definição de f;

2^o Passo: Encontrar a primeira derivada;

3^o Passo: Determinar os pontos críticos;

4^o Passo: Analisar o sinal de $f'(x)$;

5^o Passo: Aplicar o teste da primeira derivada.

Critério da derivada segunda para determinação dos extremos

Seja $x = c$ um valor crítico do domínio de $f(x)$ tal que $f'(c) = 0$, se existir a segunda derivada $f''(x)$ e se esta é contínua numa vizinhança de $x = c$ podemos então averiguar se $f(c)$ é um valor máximo ou mínimo relativo de $f(x)$ através da segunda derivada, segundo o teorema seguinte:

Teorema 3 (Teste da segunda derivada): Sejam f uma função derivável num intervalo aberto (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo tal que $f'(c) = 0$, para $c \in (a, b)$. Se f admite a derivada f'' em (a, b) e se

i. $f''(c) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em c;

ii. $f''(c) > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em c;

Demonstração do caso (i):

Por hipótese $f''(c)$ existe e $f''(c) < 0$. Então, pela definição de derivada segunda, temos que:

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0.$$

Existe um intervalo aberto I contendo, contendo c, tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0, \forall x \in I.$$

Seja A o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x < c$. Então, c é o extremo direito do intervalo aberto A.

Seja B o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x > c$. Então, c é o extremo esquerdo do intervalo aberto B.

Como $f'(c) = 0$, concluímos que:

- *se $x \in A \Rightarrow f'(x) > 0$;*
- *se $x \in B \Rightarrow f'(x) < 0$.*

Pelo teste da primeira derivada, conclui-se que f tem um valor máximo relativo em c.

A demonstração de (ii) é análoga.

Observação: Se $f''(c) = 0$ ou $f''(c)$ não existir, então o teste da segunda derivada é inconclusivo, isto é, f pode ter um máximo, um mínimo ou nem de máximo nem de mínimo em c. Neste caso, para proceder a análise dos máximos e mínimos devemos recorrer ao critério da primeira derivada.

Exemplo 12: Determine os valores extremos de cada função mediante o critério da segunda derivada.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$;

   Solução: O domínio da função f é: $Df = \mathbb{R}$.

   Temos que:

   $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow Df' = \mathbb{R}$.

   Assim,

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ e $x_2 = 3$.

   Os pontos críticos da função são: -1 e 3.

   $$f''(x) = -6x - 6 \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = -12 < 0 \\ f''(3) = 12 > 0 \end{cases}.$$

   Pelo teste da segunda derivada, conclui-se que:

   - Em $x = -1$, a função f tem um ponto de máximo em $P(-1, 10)$;
   - Em $x = 3$, a função f tem um ponto de mínimo em $P(3, -22)$.

2. $f(x) = 1 - x^4$;

   Solução: O domínio da função f é: $Df = \mathbb{R}$.

   Temos que:

   $f'(x) = -4x^3 \Rightarrow Df' = \mathbb{R}$.

   Assim,

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$.

   O único ponto crítico da função é o 0.

   $f''(x) = -12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$.

   Logo, o teste da segunda derivada é inconclusivo.

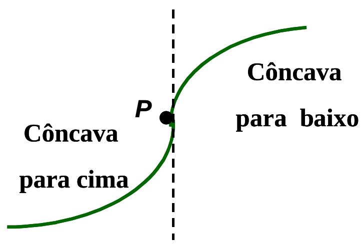
   Neste caso, recorrendo ao critério da derivada primeira, temos que:

   - $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0)$;
   - $f'(x) < 0$ para $x \in (0, +\infty)$.

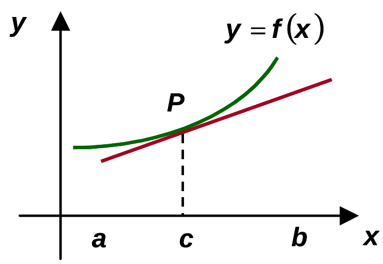
Conclusão: Pelo teste da primeira derivada, tem-se que em $x = 0$ a função f tem um ponto de máximo em $P(0, 1)$.

5.6 Concavidade

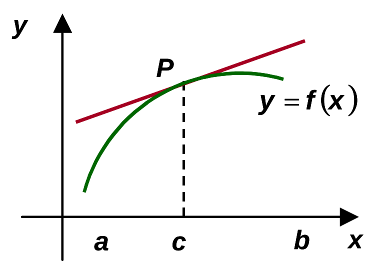
O sinal da derivada de f revela onde o seu gráfico é crescente ou decrescente, ele não revela a direção da curvatura. Por exemplo, na próxima figura, vê-se que ambos os lados do ponto P o gráfico é crescente, mas à esquerda a curvatura está para cima e à direita a curvatura está para baixo. Nos intervalos onde o gráfico de f tem a curvatura para cima dizemos que f é *côncava para cima*, e se a curvatura é para baixo, dizemos que f é *côncava para baixo* naqueles intervalos.



Para funções diferenciáveis,a direção da curva pode ser caracterizada em termos das retas tangentes. Nos intervalos em que f é côncava para cima seu gráfico está acima das retas tangentes. Nos intervalos em que f é côncava para baixo seu gráfico está abaixo das retas tangentes.



f côncava para cima



f côncava para baixo

Definição 5: Se f for diferenciável num intervalo I então:

i. f tem *concavidade para cima* se f' for crescente em I;

ii. f é *concavidade para baixo* se f' for decrescente em I;

Para obter os intervalos em que a concavidade é voltada para cima ou para baixo, isto é, os intervalos em que f'cresce e decresce, estuda-se o sinal da segunda derivada de f.

Teorema 4: Seja f uma função duas vezes diferenciável em um intervalo aberto $I = (a, b)$. Se:

i. $f''(x_0) > 0$ quando $x_0 \in I$ então, o gráfico de f tem concavidade para cima sobre I;

ii. $f''(x_0) < 0$ quando $x_0 \in I$ então, o gráfico de f tem concavidade para baixo sobre I.

Demonstração: Omitiremos a demonstração tanto de (i) quanto de (ii), faremos apenas algumas considerações:

1^a *Este teorema nos diz que se em I a segunda derivada é positiva (caso (i)) ou negativa (caso (ii)) exceto em alguns pontos nos quais ela é zero, então a curva $f(x)$ tem concavidade para cima para o caso (i) ou para baixo no caso (ii).*

2^a *Se ocorrer que $f''(x) = 0$ não só em alguns pontos senão em todo o intervalo I, então $f(x)$ será uma função linear, onde não faz sentido tratar de concavidade.*

Exemplo 13: Determine os intervalos de concavidade e/ou convexidade da curva.

1. $f(x) = x^3 - x^2$;

   Solução:

   Temos que:

   $f'(x) = 3x^2 - 2x$;

   $f''(x) = 6x - 2$.

   Assim,

   $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow 6x_0 - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{3}$.

   Analisando os intervalos $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ e $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, conclui-se que:

   - $f''(x) < 0$, $\forall x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
   - $f''(x) > 0$, $\forall x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade voltada para cima.

2. $f(x) = e^{-x^2}$;

   Solução: Domínio de f: $Df = \mathbb{R}$.

   Temos que:

   $f'(x) = -2xe^{-x^2}$;

   $f''(x) = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right)$.

   Assim,

   $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-x^2}\left(2x_0^2 - 1\right) \Rightarrow x_0 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Analisando os sinais da segunda derivada concluímos que:

   - $f''(x) > 0$, $\forall x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
   - $f''(x) < 0$, $\forall x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo.

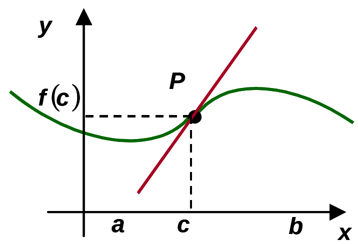
5.7 Pontos de Inflexão

Quando sobre o gráfico de uma função existir um ponto, no qual o sentido de concavidade pode mudar então, a reta tangente atravessa o gráfico neste ponto. Este ponto é chamado *ponto de inflexão*.

Definição 6: Um ponto $P(c, f(c))$ do gráfico de uma função contínua f é chamado um *ponto de inflexão*, se existe um intervalo (a, b) contendo c, tal que uma das situações ocorra:

i. f tem concavidade voltada para cima em (a, c) e para baixo em (c, b);

ii. f tem concavidade voltada para baixo em (a, c) e para cima em (c, b).



Estabeleceremos agora uma condição necessária para a existência de pontos de inflexão.

Teorema 5: Seja $f(x)$ uma função diferenciável sobre (a, b) onde $c \in (a, b)$, se $P(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$ e se existe $f''(c)$, então $f''(c) = 0$.

<u>Demonstração</u>:

Do fato de $P(c, f(c))$ ser um ponto de inflexão, existe então um intervalo (a, b) onde $c \in (a, b)$ tal que:

i. *$f'(x)$ é crescente sobre (a, c) e decrescente sobre (c, b), ou*

ii. *$f'(x)$ é decrecente sobre (a, c) e crescente sobre (c, b).*

Do fato que existe $f''(c)$ sabemos que f' será contínua em c e considerando o caso (i) concluímos que $f'(c)$ é um valor máximo relativo de $f'(x)$ e $f''(c) = 0$.

Agora, considerando o caso (ii) concluímos que $f'(c)$ é um valor mínimo relativo de $f'(x)$ e $f''(c) = 0$.

Estabeleceremos agora uma condição suficiente para a determinação e análise de $f(x)$ quanto aos pontos de inflexão.

Teorema 6: Seja $f(x)$ uma função contínua sobre um conjunto I onde $(a, b) \subseteq I$, se $c \in (a, b)$ tal que $f''(c) = 0$ ou $f''(c)$ não existir e se:

i. $f''(x) > 0$ quando $x \in (a, c)$ e $f''(x) < 0$ quando $x \in (c, b)$, então $P(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$;

ii. $f''(x) < 0$ quando $x \in (a, c)$ e $f''(x) > 0$ quando $x \in (c, b)$, então $P(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$;

iii. $f''(x) < 0$ quando $x \in (a, c)$ e $f''(x) < 0$ quando $x \in (c, b)$ (ou $f''(x) < 0$ quando $x \in (a, c)$ e $f''(x) < 0$) então $P(c, f(c))$ não é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$.

<u>*Demonstração do caso (i):*</u>

Como $f''(x) > 0$ para $x \in (a, c)$, pelo teorema 4 (i) o gráfico da curva $f(x)$ tem concavidade voltada para cima sobre (a, c) e como $f''(x) < 0$ para $x \in (c, b)$, pelo teorema 4 (ii) o gráfico da curva é convexo tem concavidade voltada para baixo sobre (c, b). Assim, o ponto $P(c, f(c))$ onde pela definição 3 é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$ sobre (a, b).

A demonstração dos caos (ii) e (iii) é análoga.

Roteiro para determinar os pontos de inflexão do gráfico de f

1^o Passo: Determinar $f''(x)$;

2^o Passo: Determinar c tal que $f''(c) = 0$ e/ou $f''(c)$ não exista;

3^o Passo: Analisar o sinal de $f''(x)$ conforme o teorema 6.

Exemplo 14: Determine os intervalos em que a concavidade voltada para cima e/ou para baixo, bem como os pontos de inflexão do gráfico da função dada

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$;

   <u>**Solução:**</u>

   Temos que:

   $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$;

   $f''(x) = 6x - 12$.

   Determinando os possíveis pontos de inflexão:

   $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow 6x_0 - 12 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$.

   Analisando os intervalos $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$, conclui-se que:

   - $f''(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, 2) \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
   - $f''(x) > 0$, $\forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade voltada para cima.

   Portanto, como há mudança de concavidade em $x = 2$, este ponto é um ponto de inflexão.

2. $f(x) = \ln x$;

   <u>**Solução:**</u> Domínio de f: $Df = \mathbb{R}_+^*$.

   Temos que:

   $f'(x) = \frac{1}{x}$;

   $f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow Df'' = \mathbb{R}_+^*$.

Determinando os possíveis pontos de inflexão:

$f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow -1 = 0.$ *Absurdo!*

Como $f''(x_0) = 0$ não ocorre para nenhum valor de x, então o único ponto a ser analisado é o ponto em que f'' não está definida, ou seja, $x = 0$.

Como $f''(x) < 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$ então o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo.

Portanto, como não há mudança de concavidade em $x = 0$ então não existe ponto de inflexão.

3. $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$;

   Solução: Domínio de f: $Df = \mathbb{R}$.

   Temos que:

   $f'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}$;

   $f''(x) = -\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow Df'' = \mathbb{R} - \{1\}$.

   Determinando os possíveis pontos de inflexão:

   $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}} = 0 \Rightarrow -2 = 0.$ *Absurdo!*

   Como $f''(x_0) = 0$ não ocorre para nenhum valor de x, então o único ponto a ser analisado é o ponto $x = 1$ pois neste ponto f'' não está definida.

   Analisando os intervalos $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$, conclui-se que:

   - $f''(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty, 1) \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
   - $f''(x) < 0$, $\forall x \in (1, +\infty) \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo.

   Portanto, como há mudança de concavidade em $x = 1$, o ponto $P(1, 0)$ é um ponto de inflexão.

4. $f(x) = \sin x$;

   Solução: Domínio de f: $Df = \mathbb{R}$.

   Temos que:

   $f'(x) = \cos x$;

   $f''(x) = -\sin x \Rightarrow Df'' = \mathbb{R}$.

   Determinando os possíveis pontos de inflexão:

   $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow -\sin x = 0 \Rightarrow = n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$

   Analisando alguns intervalos, temos que:

   $\vdots$

   - Se $-2\pi < x < -\pi$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
   - Se $-\pi < x < 0$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;

- Se $0 < x < \pi$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- Se $\pi < x < 2\pi \ldots$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade voltada para cima.

$\vdots$

Como há mudança de concavidade em $\ldots - \pi,\ 0,\ \pi,\ \ldots$, os pontos $P_1(-\pi, 0)$, $P_2(0,0)$, $P_3(\pi, 0)\ldots$ são pontos de inflexão.

Portanto, cada ponto de f onde $x = n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$ é um ponto de inflexão.

5. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+12}$;

<u>**Solução:**</u> Domínio de f: $Df = \mathbb{R}$.

Temos que:

$f'(x) = \frac{x^4+36x^2}{(x^2+12)^2}$;

$f''(x) = \frac{24x\left(36-x^2\right)}{(x^2+12)^3} \Rightarrow Df'' = \mathbb{R}$.

Determinando os possíveis pontos de inflexão:

$f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{24x\left(36-x^2\right)}{(x^2+12)^3} = 0 \Rightarrow 24x\left(36 - x^2\right) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = \pm 6$.

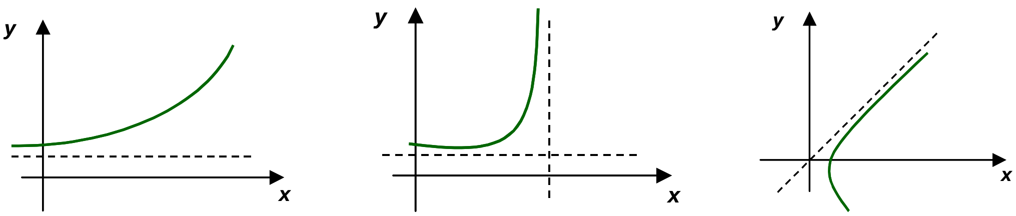
Analisando os intervalos, temos que:

- $\forall x \in (-\infty, -6)$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- $\forall x \in (-6, 0)$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- $\forall x \in (0, 6)$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- $\forall x \in (6, +\infty)$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo.

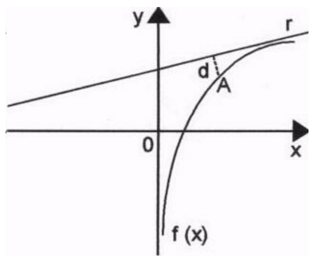
Portanto, como há mudança de concavidade em -6, 0 e 6 os pontos $P_1\left(-6, -\frac{9}{2}\right)$, $P_2(0,0)$ e $P_3\left(6, \frac{9}{2}\right)$ são pontos de inflexão.

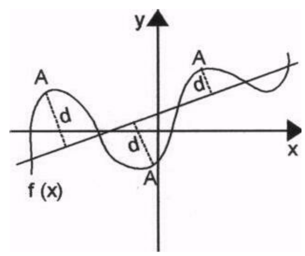
5.8 Assíntotas do gráfico de uma função

Em aplicações práticas, encontramos com muita frequência gráficos que se aproximam de uma reta à medida que x cresce ou decresce. Essas retas são chamadas de *assíntotas*. Veja alguns exemplos:



Definição 7: Seja $y = f(x)$ uma função, $A(x, f(x))$ um ponto do gráfico de $f(x)$ e r uma reta, quando a distância d entre a reta e o ponto A tende a zero enquanto o ponto A tende ao infinito, esta reta r é dita *assíntota da curva*.





As assíntotas podem ser classificadas como *assíntotas verticais* e *oblíquas*, como veremos a seguir.

5.8.1 Assíntotas Verticais

Definição 8: A reta $x = a$ é uma *assíntota vertical* do gráfico de $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

i. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$;

ii. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$;

iii. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$;

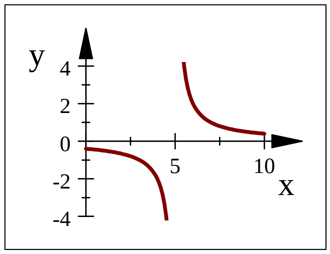
iv. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

Exemplo 15: Determine, se existir(em), as assíntotas verticais de cada função:

1. $f(x) = \frac{2}{x-5}$

   Solução: Geometricamente, observe que:

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to 5^-} f(x) = +\infty.$$



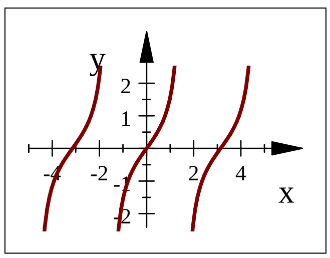
Portanto, pela definição 5, segue que a reta $x = 5$ é uma assíntota vertical.

2. $f(x) = \tan x$.

<u>**Solução:**</u>

As assíntotas verticais da função $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ correspondem as retas $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ com $k \in \mathbb{Z}$, pois nestes pontos $\cos x = 0$. Geometricamente, observe que:

$$\lim_{x \to (2k+1)\frac{\pi}{2}^{+}} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to (2k+1)\frac{\pi}{2}^{-}} f(x) = +\infty.$$



5.8.2 Assíntota Oblíquas

Definição 6: A curva $f(x)$ tem uma *assíntota oblíqua*, cuja equação é da forma $y = kx + b$, onde os valores dos coeficientes k e b, se existirem os limites:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ e } b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx).$$

Observações:

i. Se um dos limites acima não existir, então a curva não tem assíntota oblíqua.

ii. Se $k = 0$ e b existir, então a equação da assíntota será $y = b$ e é chamada de *assíntota horizontal*.

Exemplo 16: Escreva as equações de todas as assíntotas, em cada caso:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

<u>**Solução:**</u> Domínio de f: $Df = \mathbb{R}^*$.

Candidata a assíntota vertical: $x = 0$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, pela definição 5, conclui-se que $x = 0$ é uma assíntota vertical.

Se existe(m) assíntota(s) oblíquas, elas são da forma $y = kx + b$.

Verifiquemos se é possível determinar os coeficientes k e b.

Temos que:

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$;

$b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Como $k = 0$ e b existe, então a assíntota oblíqua é a reta $y = 0$.

<u>Conclusão</u>:

- assíntota vertical: $x = 0$;
- assíntota horizontal: $y = 0$.

2. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$;

<u>**Solução:**</u> Domínio de f: $Df = \mathbb{R}^*$.

Candidata a assíntota vertical: $x = 0$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, pela definição 5, conclui-se que $x = 0$ é uma assíntota vertical.

Se existe(m) assíntota(s) oblíquas, elas são da forma $y = kx + b$.

Determinando, se possível, os coeficientes k e b.

Temos que:

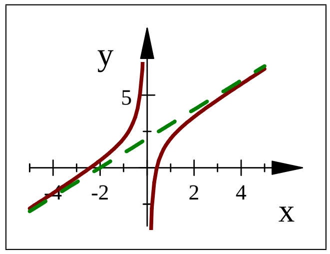
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = 1$;

$b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$.

Como $k = 1$ e b existe, então a assíntota oblíqua é a reta $y = x + 2$.

<u>Conclusão</u>:

- assíntota vertical: $x = 0$;
- assíntota oblíqua: $y = x + 2$.



3. $f(x) = e^{-x} \sin x + x$.

   <u>**Solução:**</u> Domínio de f: $Df = \mathbb{R}$.

   Como existe o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x) = e^{-a} \sin a + a$ entãonão há assíntota vertical, pois não satisfaz as condições da definição 5.

   Se existe(m) assíntota(s) oblíquas, elas são da forma $y = kx + b$.

   Determinando, se possível, os coeficientes k e b.

   Temos que:

   $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{-x} \sin x + x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{x} \lim\limits_{x \to \infty} \sin x + \lim\limits_{x \to \infty} 1$

   $\Rightarrow k = \left(\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{x} \right) \left(\lim\limits_{x \to \infty} \sin x \right) + 1$

   Como a função $\sin x$ é periódica, $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$ não existe, mas sabemos que $-1 \leq \sin x \leq 1$, ou seja, esta função é limitada. Podemos representar então que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin x = \pm m$. Assim, segue que:

   - se $x \longrightarrow +\infty$, então: $k = 1$.
   - se $x \longrightarrow -\infty$, então não existe k, pois $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

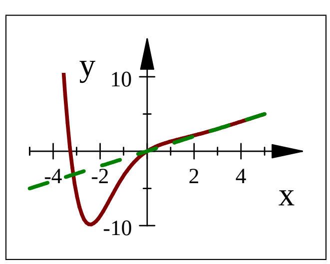
   Dessa forma, para $x \longrightarrow +\infty$, temos que:

   $b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x} \sin x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} \lim\limits_{x \to +\infty} (\sin x) = 0.$

   Como $k = 1$ e b existe, então a assíntota oblíqua é a reta $y = x$.

   <u>Conclusão</u>:

   - assíntota vertical: $\nexists$;
   - assíntota oblíqua: $y = x$.



Esquema Geral Para Analisar Funções e Construir Gráficos

O gráfico de uma função é construído baseado na investigação. Segundo as análises realizadas nos itens anteriores, podemos estabelecer um método prático que o resumimos nos seguintes passos:

1^o Passo: Determinar o campo de definição da função;

2^o Passo: Encontrar os pontos críticos de f;

3^o Passo: Análise dos sinais de f', para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de f;

4^o Passo: Determinar os pontos de máximos e/ou mínimos, se existirem (*usa-se teste da primeira derivada ou teste da segunda derivada*);

5^o Passo: Calcular os possíveis pontos de inflexão;

6^o Passo: Determinar os intervalos de concavidade, convexidade e pontos de inflexão;

7^o Passo: Determinar as equações de todas as assíntotas;

8^o Passo: Construir o gráfico.

Exemplo 17: Analise e contrua o gráfico de cada uma das funções abaixo:

1. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$;

   Solução: 1) Domínio: $\mathbb{R}$;

   2) Determinando os pontos críticos: $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

   Observe que, f' está definida $\forall x \in \mathbb{R}$.

   $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$

   3) Analisando os sinais de f', tem-se que:

   - f é crescente $\forall x \in [-1, 1]$;
   - f é decrescente $\forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

   4) Pelo teste da 1^a derivada conclui-se que:

   - f tem um ponto de mínimo em $P_1\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$;
   - f tem um ponto de máximo em $P_2\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

   5) Determinando os pontos de inflexão: $f''(x) = \frac{2x\left(x^2-3\right)}{(1+x^2)^3}$;

   Note que, f'' está definida $\forall x \in \mathbb{R}$.

   $f''(x_o) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x_0\left(x_0^2-3\right)}{\left(1+x_0^2\right)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_o = 0 \quad \text{ou} \quad x_o = \pm\sqrt{3}.$

   6) Analisando os sinais de f'', tem-se que:

- f tem concavidade voltada para cima $\forall x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$;
- f tem concavidade voltada para baixo $\forall x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$.

Dessa análise, conclui-se que os pontos $A_1\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $A_2\left(0, 0\right)$ e $A_3\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ são pontos de inflexão de f.

7) Determinando as assíntotas:

- verticais: $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{a}{1+a^2}$

Logo, não há assíntotas verticais.

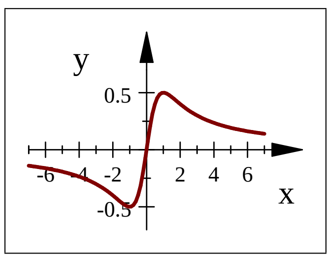
- oblíquas: $y = kx + b$, onde

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$;

$b = \lim\limits_{x \to \infty} \left(f\left(x\right) - 0x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$.

Portanto, $y = 0$ é assíntota oblíqua.

8) Construção do gráfico:



2. $f\left(x\right) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$;

Solução: 1) Domínio: $\mathbb{R}$;

2) Determinando os pontos críticos: $f'\left(x\right) = 3x^2 - 18x + 24$;

Domínio de f': $Df' = \mathbb{R}$;

$f'\left(x\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 18x + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$ e $x_2 = 4$.

3) Analisando os sinais de f', tem-se que:

- f é crescente $\forall x \in (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$;
- f é decrecente $\forall x \in [2, 4]$.

4) Pelo teste da 1^a derivada conclui-se que:

- f tem um ponto de máximo em $P_1\left(2, 13\right)$;
- f tem um ponto de mínimo em $P_2\left(4, 9\right)$.

5) Determinando os pontos de inflexão: $f''(x) = 6x - 18$;

Domínio de f'': $Df'' = \mathbb{R}$;

$f''(x_o) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x_0 - 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_o = 3.$

6) Analisando os sinais de f'', tem-se que:

- f tem concavidade voltada para baixo $\forall x \in (-\infty, 3)$;
- f tem concavidade voltada para cima $\forall x \in (3, +\infty)$.

Portanto, o pontos $A(3, 11)$ é o ponto de inflexão de f.

7) Determinando as assíntotas:

- verticais: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a^3 - 9a^2 + 24a - 7.$

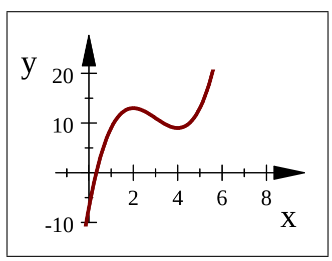
Logo, não há assíntotas verticais.

- oblíquas: $y = kx + b$, onde

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x^2 - 9x + 24 - \frac{7}{x}\right) = +\infty$;

Portanto, como não existe k então não há assíntota oblíqua.

8) Construção do gráfico:



3. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$;

1) Domínio: $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$;

2) Determinando os pontos críticos: $f'(x) = \frac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$.

Observe que, f' não está definida em $x = \pm 1$.

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}.$

Pontos a serem considerados na análise dos sinais de f': $x = \pm 1$ e $x = \pm\sqrt{3}$.

3) Analisando os sinais de f', tem-se que:

- f é crescente $\forall x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right)$;
- f é decrecente $\forall x \in \left[-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 1) \cup \left(-1, \sqrt{3}\right]$.

4) Pelo teste da 1^a derivada conclui-se que:

- f tem um ponto de máximo em $P_1\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$;
- em $x = 0$, f não tem ponto nem de máximo nem de mínimo;
- f tem um ponto de mínimo em $P_2\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

Comentário: Observe que, pelo teste da 1^a derivada somos levados a concluir que em $x = \pm 1$, f não tem pontos nem de máximo nem mínimo. Deve-se tomar cuidado com essa conclusão, pois estes pontos cujas abcissas são ± 1 nem fazem parte do domínio da função. Portanto, não poderão ser pontos de máximos e/ou mínimos.

5) Determinando os pontos de inflexão: $f''(x) = \frac{2x\left(9-x^2\right)}{9\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^7}}$;

Note que, f'' não está definida em $x = \pm 1$.

$$f''(x_o) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x_0\left(9-x_0^2\right)}{9\sqrt[3]{\left(x_0^2-1\right)^7}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_o = 0 \text{ ou } \ x_o = \pm 3.$$

os pontos a serem analisados são: 0, ± 1 e ± 3.

6) Analisando os sinais de f'', tem-se que:

- f tem concavidade voltada para baixo$\forall x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (1, 3)$;
- f tem concavidade voltada para cima $\forall x \in (-3, -1) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty)$.

Logo, os pontos $A_1\left(-3, \frac{3}{2}\right)$, $A_2(0,0)$ e $A_3\left(3, \frac{3}{2}\right)$ são pontos de inflexão de f.

Em $x = \pm 1$, apesar do valor da ordenada correspondente não estar definida, pois f não é definida nestes pontos, também há mudança de concavidade. Portanto, também são pontos de inflexão.

7) Determinando as assíntotas:

- verticais:

As retas candidatas a serem assíntotas verticais são $x = \pm 1$. Verificando se realmente essas retas são assíntotas verticais.

$$\lim_{x\to 1} f(x) \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \end{cases};$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty \end{cases}.$$

Logo, as retas $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais.

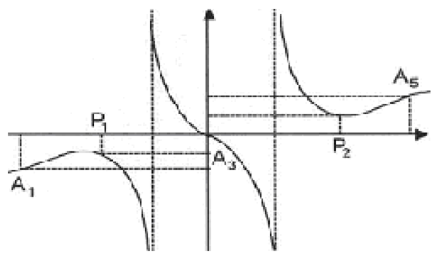
- oblíquas: $y = kx + b$, onde

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} = 0;$

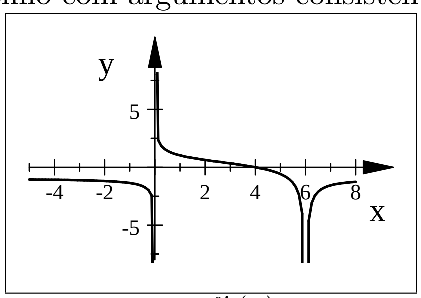
$b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - 0x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = +\infty.$

Portanto, não existe assíntota oblíqua.

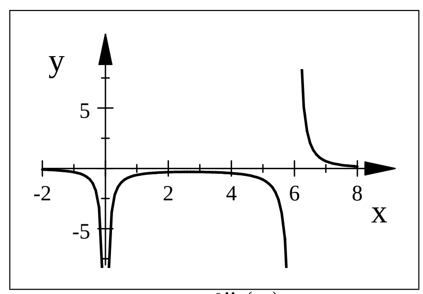
8) Construção do gráfico:



Exemplo 18: Seja f um função contínua para todo x real. Sabe-se $f(0) = 0$, $f(6) = 0$ e que o gráfico de f possui a reta $y = -x + 2$ como assíntota oblíqua para $x \to \pm\infty$. Usando as informações que podem ser extraídas dos gráficos da primeira e da segunda derivada de f , que estão abaixo ilustrados, esboce o gráfico da função f. Justifique seu raciocínio com argumentos consistentes.



$y = f'(x)$



$y = f''(x)$

Solução:
Dados:

1.
- Domínio de $f : Df = \mathbb{R}$;
- $f(0) = 0$ e $f(6) = 0$;
- a reta $y = -x + 2$ é assíntota oblíqua para $x \to \pm\infty$;

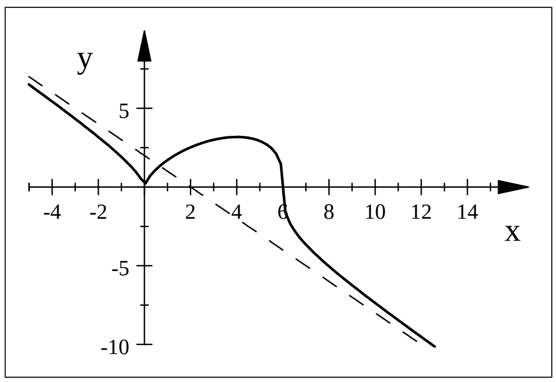
O gráfico da primeira derivada nos fornece as seguintes informações:

- a f' não existe em $x = 0$ e em $x = 6 \Rightarrow$ os pontos $P_1(0, f(0))$ e $P_2(6, f(6))$ são pontos críticos;
- $f'(4) = 0 \Rightarrow$ o ponto $P_3(4, f(4))$ é um ponto crítico;
- $f'(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (4, 6) \cup (6, +\infty) \Rightarrow f$ é uma função decrescente $\forall x \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) - \{6\}$;
- $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0, 4) \Rightarrow f$ é uma função crescente $\forall x \in [0, 4]$;
- pelo teste da primeira derivada: o ponto P_1 é um ponto de mínimo relativo; o ponto P_2 não ponto de máximo nem de mínimo relativo; e, o ponto P_3 é um ponto de máximo relativo.

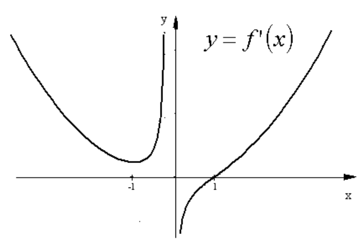
O gráfico da segunda derivada nos fornece as seguintes informações:

- a f'' não existe em $x = 0$ e em $x = 6 \Rightarrow$ os pontos $P_1(0, f(0))$ e $P_2(6, f(6))$ são candidatos a pontos de inflexão;
- $f''(x) \neq 0$ para todo x real;
- $f''(x) < 0,\ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, 6) \Rightarrow f$ tem concavidade voltada para baixo $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, 6)$;
- $f'(x) > 0,\ \forall x \in (6, +\infty) \Rightarrow f$ tem concavidade voltada para cima $\forall x \in (6, +\infty)$;

A partir destas informações, temos que um esboço do gráfico de f é:



Exemplo 19: Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ cujo gráfico de sua primeira derivada está ilustrado na figura abaixo.



Sabendo que $f(0) = 4$ e que $\lim\limits_{x - \infty}(f(x) - x) = 2$, esboce o gráfico da função f.

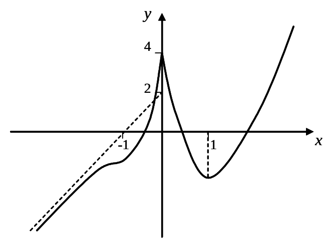
<u>**Solução:**</u>

Pelo gráfico de f', temos que:

- $f'(x) > 0,\ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \Rightarrow f$ é crescente $\forall x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$;
- $f'(x) < 0,\ \forall x \in (0, 1) \Rightarrow f$ é decrescente $\forall x \in [0, 1]$;
- f' é decrescente $\forall x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f$ tem concavidade voltada para baixo $\forall x \in (-\infty, -1)$;
- f' é crescente $\forall x \in [-1, \infty) - \{0\} \Rightarrow f$ tem concavidade voltada para cima $\forall x \in (-1, \infty) - \{0\}$;

- Como $\lim\limits_{x-\infty}(f(x)-x)=2$, concluímos que a reta $y=x+2$ é asíntota oblíqua de f para $x\to-\infty$.

  Pelas informações acima, segue que um esboço para o gráfico da função f é:



5.9 Aplicações da Teoria dos Máximos e Mínimos de Funções na Solução de Problemas

Os problemas de determinação de valores máximos e mínimos se encontram entre as aplicações mais comuns do Cálculo Diferencial e Integral I. Certamente, você já deve ter ouvido falar em lucro máximo, custo mínimo, tempo mínimo, diferença de potencial máximo, tamanho ótimo, potência máxima ou distância máxima. A teoria desenvolvida para a determinação de extremos de funções pode ser aplicada na resolução de tais problemas. Estes, podem ser enunciados por escrito e podem ser resolvidos sempre que for possível equacionar o fenômeno em estudo, mediante fórmulas matemáticas. Vejamos exemplos nesse sentido.

Exemplo 20: A diferença de dois números é a. Determine esses números para que o seu produto resulte o menor possível.

Solução:

Sejam x e y os números tais que

$$x-y=a \;\Rightarrow\; x=a+y. \qquad (1)$$

Seja P a função produto definida por

$$P=xy. \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos que:
$P=(a+y)\,y=y^2+ay$, com $y\in\mathbb{R}$.
Determinando os pontos críticos:
$P'(y)=2y+a \Rightarrow \quad P'(y)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2y+a\ =0 \quad \Rightarrow\; y=-\frac{a}{2}$.
Logo, o único ponto crítico é em $y=-\frac{a}{2}$.
Aplicando o teste da segunda derivada: $P''(y)=2$.
$P''\left(-\frac{a}{2}\right)=2>0$.
Portanto, $y=-\frac{a}{2}$ é o mínimo relativo de P.

Como

$\lim\limits_{y\to\pm\infty} P(y) = \lim\limits_{y\to\pm\infty} (y^2+ay) = \lim\limits_{y\to\pm\infty} y^2 = +\infty$, então $y=-\frac{a}{2}$ é o mínimo absoluto de P.

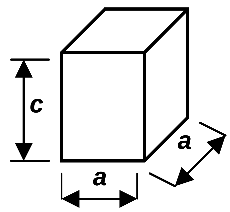
Substituindo y em (1), conclui-se que:

$$x=\frac{a}{2} \text{ e } y=-\frac{a}{2}.$$

Exemplo 21: Um pacote pode ser enviado pelo reembolso postal desde que a soma de seu comprimento mais o perímetro de sua base não exceda 2 m. Determine as dimensões do pacote de volume máximo que pode ser enviado, se a base é quadrada.

Solução: Sejam

V : volume do pacote (m^3);
a : lado da base (m);
c : comprimento (m).



Objetivo: Determinar as dimensões a e c que maximizam o volume do pacote.

Sabemos que a soma de seu comprimento mais o perímetro de sua base (que é quadrada) não pode exceder 2 m, ou seja,

$c+4a=2 \quad \Rightarrow \quad c=2-4a. \qquad (1)$

O volume do pacote é
$V=a^2.c \quad \Rightarrow \quad V=a^2(2-4a)=2a^2-4a^3$, com $a\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

Como V é uma função contínua em $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, pelo teorema de Wieirstrass, V tem seus extremos absolutos em $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

Note que nos extremos do intervalo o volume é nulo, logo, não podem ser solução, pois não haveria pacote. Logo, a solução estará no intervalo aberto de $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, ou seja, os extremos absolutos estarão nos pontos críticos.

Determinando os pontos críticos:
$V'(a)=0 \quad \Rightarrow \quad -4a(3a-1)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad a=0 \quad \text{ou} \quad a=\frac{1}{3}$.
Como $0\notin\left(0,\frac{1}{2}\right)$, o único ponto crítico é em $a=\frac{1}{3}$.

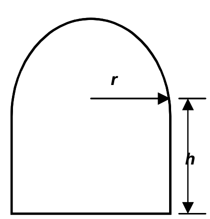
Aplicando o teste da segunda derivada: $V''(a)=4-24a \quad \Rightarrow V''\left(\frac{1}{3}\right)<0$.

Portanto, $a=\frac{1}{3}$ é o máximo absoluto de V. Assim, por (1), segue que $c=\frac{2}{3}$.

Exemplo 22: Uma janela consiste de um retângulo com um semicírculo em cima e deve ter um perímetro P. Determine o raio do semicírculo para que a área da janela seja máxima.

Solução:
Sejam

P : perímetro da janela;
A : área da janela;
r : raio do semicírculo;
h : altura do retângulo;



Objetivo: Determinar r para que a área da janela seja máxima. Para tanto, devemos determinar r que maximize a área da janela.

A área da janela é
$A =$(área do retângulo) + (área do semicírculo) $\Rightarrow A = 2rh + \frac{\pi r^2}{2}$ (1)
O perímetro da janela é
$P = 2h + 2r + \frac{2\pi r}{2} = 2h + 2r + \pi r \quad \Rightarrow \quad h = \frac{P - r(2+\pi)}{2}$ (2)
Substituindo (2) em (1), temos que:
$A = 2r\frac{P-r(2+\pi)}{2} + \frac{\pi r^2}{2} = Pr - \frac{1}{2}\pi r^2 - 2r^2 = -\frac{1}{2}r\,(4r - 2P + \pi r)$, com $r \in \left[0, \frac{2P}{4+\pi}\right]$.

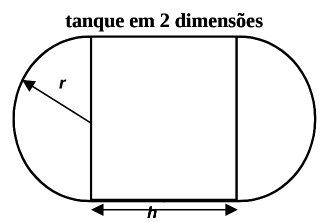
Como a área é uma função contínua e o intervalo é fechado então existe extremo absoluto neste intervalo, pelo teorema de Wieirstrass.

Determinando os pontos críticos:
$A'(r) = P - \pi r - 4r \Rightarrow \quad V_c'(r) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P - r(4+\pi) = 0 \quad \Rightarrow r = \frac{P}{4+\pi}$.
Logo, o único ponto crítico é $r = \frac{P}{4+\pi}$.
Aplicando o teste da segunda derivada: $A''(r) = -\pi - 4$
$A''\left(\frac{P}{4+\pi}\right) = -\pi - 4 < 0$.
Portanto, $r = \frac{P}{4+\pi}$ maximiza a área da janela.
Como $r = \frac{P}{4+\pi}$ é um mínimo relativo, e nos extremos do intervalo segue que $A(0) = A\left(\frac{2P}{4+\pi}\right) = 0$, então este valor de r também é o valor de mínimo absoluto.

Exemplo 23: Deve-se construir um tanque para armazenamento de um gás propano em forma de um cilindro circular reto com dois hemisférios nas extremidades. O custo do metro quadrado dos hemisférios é o dobro do custo da parte cilíndrica. Se a capacidade do tanque deve ser de $12\pi\ m^3$, que dimensões minimizaram o custo da construção?

Solução: Sejam

C : função custo;
r : raio do hemisfério $\equiv$ raio do cilindro;
h : altura do cilindro.



Objetivo: Determinar as dimensões r e h que minimizam o custo na contrução do tanque.

Como o custo está associado com a área lateral, temos que:
$C = 2$ [área de uma esfera($\equiv$ área de 2 hemisférios)] + (área lateral do cilindro)
$\Rightarrow C = 2\left(4\pi r^2\right) + 2\pi rh = 8\pi r^2 + 2\pi hr.$ (1)
O volume total do tanque é dado por
$V =$ (volume de uma esfera) + (volume de um cilindro)
$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h.$
Como $V = 12\pi\ m^3$, temos que
$12\pi = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h \qquad \Rightarrow \quad h = \frac{12}{r^2} - \frac{4}{3}r.$ (2)
Substituindo (2) em (1), temos que:
$C = 8\pi r^2 + 2\pi\left(\frac{12}{r^2} - \frac{4}{3}r\right)r = 24\frac{\pi}{r} + \frac{16}{3}\pi r^2$, com $r \in (0, +\infty)$.
Determinando os pontos críticos:
$C'(r) = \frac{-24\pi}{r^2} + \frac{32\pi r}{3} \Rightarrow \quad C'(r) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}.$

Aplicando o teste da segunda derivada: $C''(r) = \frac{48\pi}{r^3} + \frac{32\pi}{3} \Rightarrow C''\left(\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\right) > 0$

$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$ é um mínimo relativo.

Note que:

$\lim\limits_{r \to 0^+} C(r) = \lim\limits_{r \to 0^+} \left(24\frac{\pi}{r} + \frac{16}{3}\pi r^2\right) = +\infty$

$\lim\limits_{r \to +\infty} C(r) = \lim\limits_{r \to +\infty} \left(24\frac{\pi}{r} + \frac{16}{3}\pi r^2\right) = +\infty$

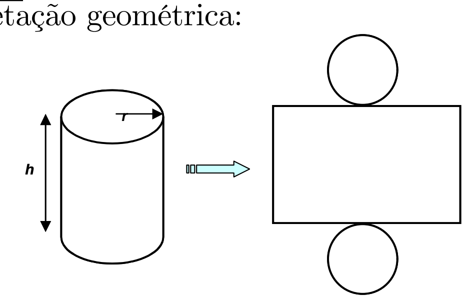
Logo, pode-se concluir que o valor de mínimo relativo $r = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$ também é o valor de mínimo absoluto.

Portanto, $r = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$ minimiza a área da janela. Basta substituir este valor de r (2) para obter h.

Exemplo 24: Dado o volume V de um cilindro, quais devem ser as suas dimensões para que seja mínima a área total?

Solução:

Interpretação geométrica:



Objetivo: Determinar r e h para que a área do cilindro seja mínima.

A área do cilindro é

$A =$(área do retângulo) + ($2\times$ área do círculo) $\Rightarrow A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad (1)$

Sabemos que o volume do cilindro é V, assim:

$V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V}{\pi r^2} \qquad (2)$

Substituindo (2) em (1), temos que:

$A = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r} = 2\left(\pi r^2 + \frac{V}{r}\right)$, com $r \in (0, +\infty)$.

Determinando os pontos críticos:

$A'(r) = 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right) \Rightarrow A'(r) = 0 \iff 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right) = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Aplicando o teste da segunda derivada: $A''(r) = 2\left(2\pi + \frac{V}{r^3}\right)$

$A''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 12\pi > 0$.

Note que:

$\lim\limits_{r \to 0^+} A(r) = \lim\limits_{r \to 0^+} \left(2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{r \to +\infty} A(r) = \lim\limits_{r \to +\infty} \left(2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}\right) = +\infty$

Logo, pode-se concluir que o valor de mínimo relativo $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ também é o valor de mínimo absoluto.

Logo, as dimensões que minimizam a área são

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \text{ e } h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Exemplo 25: A distância percorrida (no vácuo), por um projétil, lançado com uma velocidade v_0 desde uma canhão de artilharia com ângulo de elevação α é dada por $y = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$. Determine α para que y seja máxima.

<u>**Solução:**</u>

Sabemos que a distância percorrida por um projétil é dada por

$$y = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$

Consideremos $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Observe que y é uma função contínua em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, então o teorema de Wieirstrass garante que seus extremos abasolutos estão no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Como $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, então os extremos absolutos devem estar nos pontos críticos da função $y = y(\alpha)$.

Determinando os pontos críticos:

$y'(\alpha) = \frac{2v_0^2 \cos(2\alpha)}{g} \quad \Rightarrow \quad y'(\alpha) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2v_0^2 \cos(2\alpha)}{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$

Aplicando o teste da segunda derivada: $y''(\alpha) = \frac{-4v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$

$A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-4v_0^2}{g} < 0$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ é o máximo absoluto, pois este é o único ponto crítico dentro do intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Portanto, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ é o ângulo de elevação cujo alcance será o máximo possível.

Logo, para $\alpha = \frac{\pi}{4}$ temos que $y = \frac{v_0^2}{g}$.

Exemplo 26: Uma estação de rádio fez um levantamento dos hábitos dos ouvintes entre $17hs$ e meia-noite. A pesquisa mostra que a porcentagem de adultos sintonizados na estação x horas após as $17hs$ é $f(x) = \frac{1}{8}(-2x^3 + 27x^2 - 108x + 240)$. Em que instantes, entre $17hs$ e meia-noite, existem *mais e menos* ouvintes sintonizados na estação? Qual é a porcentagem de ouvintes nestes momentos?

<u>**Solução:**</u>

<u>*Objetivo:*</u> Determinar x que maximiza e minimiza a função f.

Como a pesquisa mostra que a porcentagem de adultos sintonizados na estação x horas após as $17hs$ é $f(x) = \frac{1}{8}(-2x^3 + 27x^2 - 108x + 240)$, temos que $x \in [0, 7]$.

Determinando os valores críticos:

$f'(x) = -\frac{3}{4}(x^2 - 9x + 18) \quad \Rightarrow f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 3$ ou $x = 6$.

Aplicando o teste da segunda derivada, temos que:

$$f''(x) = -\frac{3}{4}(2x - 9) \quad \Rightarrow \begin{cases} f''(3) > 0 \ \rightsquigarrow \text{ é um ponto de mínimo relativo} \\ f''(6) < 0 \ \rightsquigarrow \text{ é um ponto de máximo relativo} \end{cases}.$$

Como f é uma função contínua em no intervalo fechado $[0, 7]$, pelo teorema de Wieirstrass, existem os extremos abasolutos em $[0, 7]$. Logo, os máximos e mínimos absolutos podem estar nos extremos do intervalo. Analisando o valor da função nos extremos e nos pontos extremos relativos, temos que:

$f(0) = \frac{240}{8} = 30\%$ $\qquad f(6) = \frac{33}{2} = 16.5\%$

$f(3) = \frac{105}{8} = 13.125\%$ $\qquad f(7) = \frac{121}{8} = 15.125\%$

Logo, $x = 0$ e $x = 3$ são, respectivamente, os pontos de máximo e mínimo absolutos.

<u>*Conclusão:*</u>

- Às $17hs$ $(x = 0)$, o maior número de adultos está sintonizado na rádio; corresponde a 30% dos ouvintes.
- Às $20hs$ $(x = 3)$, o menor número de adultos está sintonizado na rádio; corresponde a 13% dos ouvintes.

5.10 Exercícios

1. Seja $f(x) = x^5 + x + 1$. Justifique a afirmação: f tem pelo menos uma raiz no intervalo $[-1, 0]$. Determine um intervalo de amplitude 0,25 que contenha a raiz.

2. Prove que a equação $x^3 - \dfrac{1}{x^4+1} = 0$ admite ao menos uma raiz real. Determine um intervalo de amplitude 0,25 que contenha a raiz.

3. Prove que cada um dos conjuntos abaixo admite máximo e mínimo absolutos.

   (a) $A = \left\{ \dfrac{x}{x^2+1} / \ -2 \leq x \leq 2 \right\}$

   (b) $A = \left\{ \dfrac{x^2+x}{x^2+1} / \ -1 \leq x \leq 1 \right\}$

4. Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2+1}$.

   (a) Prove que $f(1)$ é o valor máximo de f.

   (b) Prove que existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c)$ seja o valor de mínimo absoluto de f.

5. Prove que a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ admite uma única raiz real. Determine o intervalo de amplitude 1 que contenha a raiz.

6. Prove que a equação $x^3 + x^2 - 5x + 1 = 0$ admite três raízes reais distintas. Localize intervalos de amplitude 1 que contenham tais raízes.

7. Determine condições sobre $a \in \mathbb{R}$ para que a equação $x^3 + 3x^2 - 9x + a = 0$ admita:

   (a) uma única raiz real.

   (b) duas raízes reais distintas.

   (c) três raízes reais distintas.

8. Considere $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - x + 1}$. Existe $c \in [-2, -1]$ tal que $f(c) = 0$? Justifique.

9. Considere $f(x) = x^{-2}$. Podemos usar o Teorema de Rolle para concluir que existe $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$? Justifique.

10. Em cada caso, examine se as funções satisfazem as condições e verificam o Teorema de Rolle e justifique sua resposta.

    (a) $f(x) = 2x^2 + x$ sobre o intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$;

    (b) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ sobre o intervalo $[-1, 1]$;

    (c) $f(x) = \tan(x)$ sobre o intervalo $[0, \pi]$;

    (d) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ sobre o intervalo $[1, 3]$;

    (e) $f(x) = \sin^2(x)$ sobre o intervalo $[0, \pi]$.

11. Sabendo que $f(x) = 4x^3 - 4x + x^2 - 1$ tem raízes -1 e 1, pelo teorema de Rolle é possível afirmar que a derivada tem alguma raiz entre -1 e 1? Justifique.

12. Em cada caso, examine se as funções satisfazem as condições e verificam o Teorema do Valor Médio (de Lagrange). Justifique.

    (a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ sobre o intervalo $[-3, 4]$;

    (b) $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ sobre o intervalo $[0, 2]$;

    (c) $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ sobre o intervalo $[-1, 1]$;

    (d) $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ sobre o intervalo $[0, 1]$;

    (e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sobre o intervalo $[-1, 1]$;

    (f) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ sobre o intervalo $[0, 1]$.

13. Através do teorema de Rolle é possível afirmar que a função $f(x) = 2 - |3 - x|$ possui um ponto crítico no intervalo $[1, 5]$? Justifique.

14. Use algum dos teoremas estudados para determinar em que ponto da curva $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ a reta normal a esta curva é perpendicular a reta que passa pelos pontos $A(1, -2)$ e $B(0, -1)$.

15. Utilize o Teorema de Lagrange para demonstrar as desigualdades:

    (a) $e^x \geq 1 + x$, para $x \geq 0$;

    (b) $\arctan(x) < x$, para $x > 0$;

    (c) $b^n - a^n \leq nb^{n-1}(b - a)$, para $b > a$, $n \in \mathbb{N}^*$

    (d) $|\sin\theta - \sin\alpha| \leq |\theta - \alpha|$, para α e $\theta \in \mathbb{R}$.

16. Para que valores de a, m e b a função $f(x) = \begin{cases} 3, \text{ se } x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, \ 0 < x < 1 \\ mx + b, \text{ se } \ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ satisfaz o teorema do Valor Médio no intervalo $[0, 2]$? Justifique.

17. Em que ponto da curva $f(x) = x^n$ a tangente a curva é paralela a corda que une os pontos $A(0, 0)$ e $B(a, a^n)$?

18. Seja g a função definida por $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

    (a) Usando um dos teoremas estudados, determine o ponto em que a reta normal à curva $y = g(x)$ também é normal a reta que passa pelos pontos $A(-2, 0)$ e $B(0, 2)$.

    (b) A função $y = f(x) = \sqrt{16 - x^4}.g'(x)$, verifica o teorema de Rolle entre as raízes da função g? Justifique.

19. Seja $p(x) = Ax^2 + Bx + C$, onde A, B e C são constante reais e $A \neq 0$. Mostre que para qualquer intervalo $[a, b]$, o valor de c cuja existência é garantida pelo Teorema de Lagrange, é o *ponto médio* do intervalo.

20. Afirma-se que $f(0) = -3$ e $f'(x) \leq 5$, para todo x real, então pelo Teorema do Valor Médio (ou de Lagrange) o maior valor possível para $f(2)$ é 7. Pergunta-se: é verdade? Justifique.

21. Em cada caso, determine os intervalos onde $f(x)$ é crescente e decrescente bem como todos os pontos de máximo e mínimo:

    (a) $f(x) = \dfrac{x}{(x-8)(x+2)}$
    (b) $f(x) = x + \sin x$
    (c) $f(x) = x \ln x$
    (d) $f(x) = xe^{-x}$
    (e) $f(x) = \dfrac{16}{x(4-x^2)}$
    (f) $f(x) = \dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$
    (g) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

22. Em cada caso, determine todos os intervalos de concavidade para baixo e para cima bem como os pontos de inflexão.

    (a) $f(x) = \dfrac{x}{(x-8)(x+2)}$
    (b) $f(x) = xe^{-x}$
    (c) $f(x) = \dfrac{16}{x(4-x^2)}$
    (d) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

23. Em cada caso, determine a equação de todas as assíntotas.

    (a) $f(x) = \dfrac{16}{x(4-x^2)}$
    (b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$
    (c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$
    (d) $f(x) = \dfrac{\cos(x^2-1)}{x-1} - 2x$

24. Faça a análise e construa o gráfico de cada uma das funções:

    (a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
    (b) $f(x) = \dfrac{6x^2 - x^4}{9}$
    (c) $f(x) = \dfrac{x}{x^4-4}$
    (d) $f(x) = \sqrt[3]{2x - x^3}$
    (e) $f(x) = \dfrac{1}{1-e^x}$
    (f) $f(x) = e^{-x^2} + 2$
    (g) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
    (h) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$
    (i) $f(x) = xe^{x^{-2}}$
    (j) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
    (k) $f(x) = 2x + 1 + e^{-x}$
    (l) $f(x) = x^2 e^{1-x}$
    (m) $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$
    (n) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$
    (o) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
    (p) $f(x) = \dfrac{16x^3}{3} + \dfrac{1}{x}$
    (q) $f(x) = (x-1)e^x$
    (r) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{2}$
    (s) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$
    (t) $f(x) = x \ln(x^2)$
    (u) $f(x) = xe^{-x}$
    (v) $f(x) = x + \ln x$
    (w) $f(x) = \cot(x), \forall x \in (-\pi, \pi)$
    (x) $f(x) = \sec(x)\ \forall x \in (-2\pi, 2\pi)$
    (y) $f(x) = \ln(\cos(2x)),\ \forall x \in (0, 2\pi)$

25. Dada a função $f(x) = \ln(x^2+1)$, explique, usando o Teorema de Rolle, porque é possível afirmar que existe um possível ponto de inflexão no gráfico da curva de $y = f(x)$, no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

26. Seja $f(x) = 2ax^3 + bx^2 - cx + d$ uma função com pontos críticos em $x = 0$ e $x = 1$.

    (a) Determine uma relação entre as constantes a, b, c e d.

(b) Se $a > 0$ em qual dos pontos críticos a função terá máximo e/ou mínimo?

27. Considere a função $f(x) = x^8 + 2x^7 - 8x^6 + x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 4x^2$. Afirma-se que no intervalo $(0, 1)$ esta função tem pelo menos um ponto crítico. Pergunta-se: é verdade ? Justifique sua resposta.

28. Determinar os coeficientes a e b de forma que a função $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenha um extremo relativo no ponto $(-2, 1)$.

29. Esboce o gráfico da função $f(x)$ que satisfaz as seguintes condições:

    i. $f(0) = 1$;
    ii. $y = 1$ é uma assíntota horizontal de f;
    iii. f não possui assíntota vertical.
    iv. $f'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$;
    v. $f'(x) < 0$ para todo $x \in (-1, 1)$;
    vi. $f''(x) > 0$ para todo $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$;
    vii. $f''(x) < 0$ para todo $x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

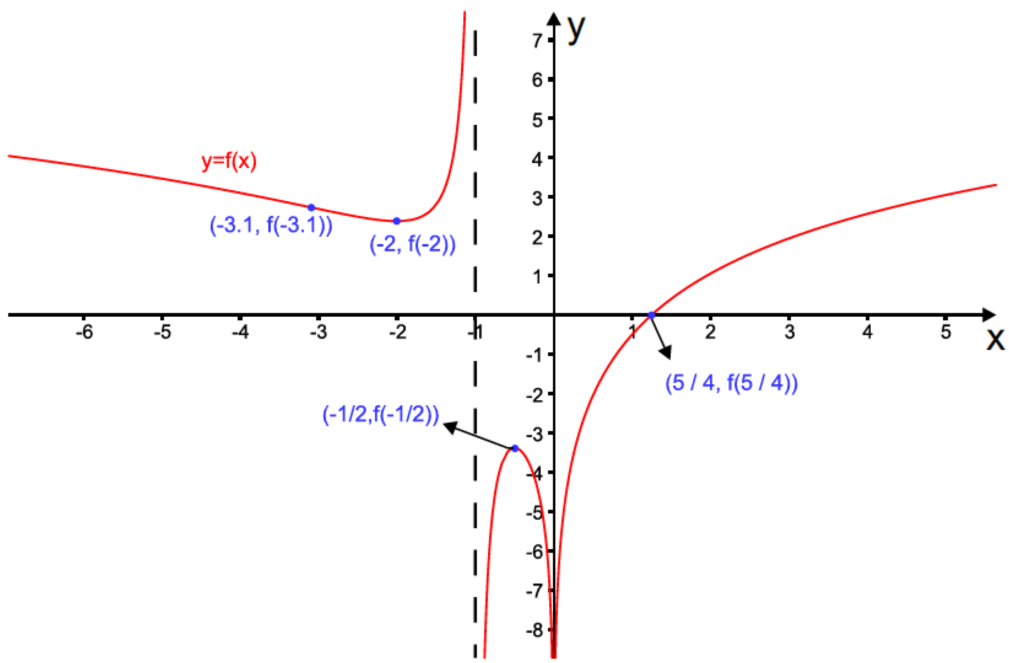
    Determine os pontos de máximo(s) e/ou mínimo(s) e o(s) ponto(s) de inflexão. *Justifique* cada um desses itens.

30. Construa o gráfico de uma função que satisfaz as seguintes condições: $f'(-1) = f'(1) = 0$; $f'(x) < 0$ se $|x| < 1$; $f'(x) > 0$ se $1 < |x| < 2$; $f'(x) = -1$ se $|x| > 2$; $f''(x) < 0$ se $-2 < x < 0$; o ponto $P(0, 1)$ é um ponto de inflexão.

31. Construa o gráfico de uma função contínua em $\mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

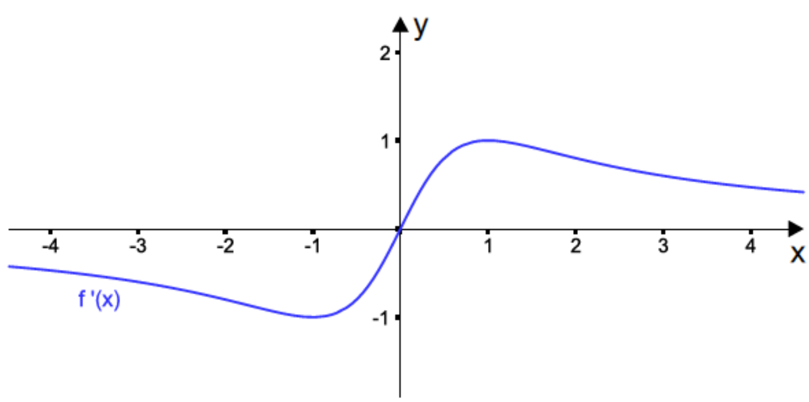
    i. $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$; $f'(x) < 0$ se $|x| > 2$; $f'(2) = 0$;
    ii. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ e $f(-x) = -f(x)$;
    iii. $f''(x) < 0$ se $0 < x < 3$;
    iv. $P(3, f(3))$ é ponto de inflexão.

32. Seja f a função cujo gráfico está representado na figura a seguir.

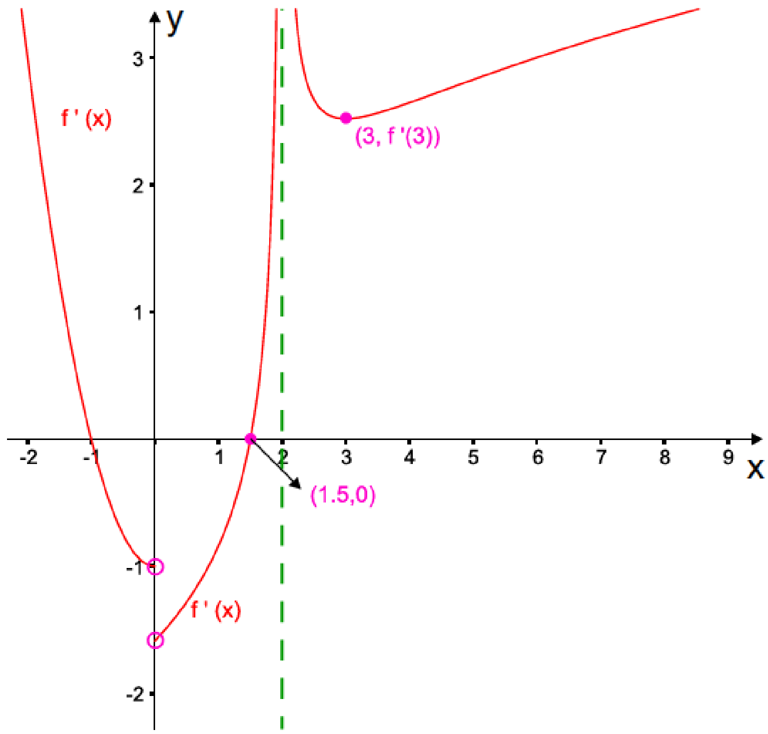


Faça a análise gráfica de f, observando, se existir(em), assíntota(s) vertical(is) e assíntota(s) horizontal(is), os intervalos em que $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$, os intervalos em que $f''(x) > 0$ e $f''(x) < 0$, pontos de máximo(s) e/ ou mínimo(s) relativos, o(s) ponto(s) de inflexão, descontinuidades e raízes. **Justifique** cada item.

33. Sabe-se que f é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Construa o gráfico de f de tal forma que sua primeira derivada apresente o comportamento abaixo ilustrado. Além disso, descreva o que pode ser concluído sobre o gráfico de $f''(x)$. Justifique suas conclusões.



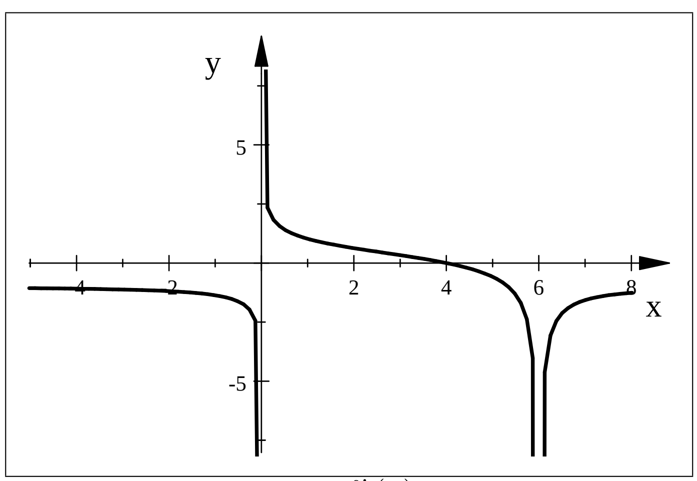
34. Esboce o gráfico da função f, contínua em $\mathbb{R}$, sabendo que o gráfico da primeira derivada de f está representado na figura a seguir e as raízes de f estão em $x = -2,\ x = 0$ e $x = 2$.



35. Sabendo que h é uma função contínua em $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\frac{\pi}{2}$ e que o gráfico de h' está ilustrado na figura abaixo, faça um esboço do gráfico da função h. Além disso, argumete de forma consistente se existe(m) ou não ponto(s) crítico(s), ponto(s) extremo(s), ponto(s) de inflexão e assíntotas.

- 2/Apostila de Cálculo 1/Q5NFGY4S.wmf

36. Sabendo que f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) + x) = 2$, $f(0) = f(6) = 0$ e que o gráfico da primeira derivada de f está abaixo ilustrado, esboce o gráfico da função f. Justifique seu raciocínio com argumentos consistentes.



$y = f'(x)$

37. Quer-se construir uma sala retangular que tenha 236 m^2 de área. Quais devem ser as dimensões para que seu perímetro seja o menor possível?

38. Tem-se um terreno retangular de 4328 m^2 de área. Pretende-se murá-lo e sabe-se que o vizinho de um dos lados paga a metade do muro que faz limite com sua propriedade. Para tanto, quais devem ser as dimensões deste terreno para que se gaste o mínimo possível ao murá-lo?

39. Dentre todos os retângulos de área 49 cm^2, qual tem perímetro mínimo?

40. Um fazendeiro tem 24 m de cerca para construir três galpões retangulares adjacentes (de mesma área), conforme a figura a seguir. Quais devem ser as dimensões totais dos galpões de modo a maximizar sua área total ?

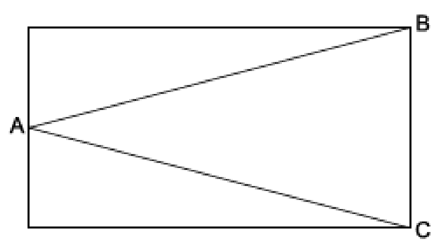
41. Um sólido será construído acoplando-se a um cilindro circular reto de altura h e raio r uma semi-esfera também de raio r. Deseja-se que a área da superfície do sólido seja de 5πcm^2. Determine os valores de r e h para que o sólido tenha volume máximo.

42. Um arame de comprimento 12m é cortado em dois pedaços, sendo que um pedaço é dobrado em forma de quadrado cujo lado é l, e o outro pedaço é dobrado em forma de círculo cujo raio é R. Como devemos cortar o arame para que a soma das áreas englobadas pelos dois pedaços seja máxima?

43. Há várias semanas o Departamento de Estradas vem registrando velocidade do tráfego fluindo numa rodovia após uma saída. Os dados sugerem que a velocidade do tráfego na saída é aproximadamente $f(t) = t^3 - 10{,}5t^2 + 30t + 20$ km/h, onde t é o número de horas após o meio dia. A que horas entre 15 e 18 horas, o tráfego se move mais rápido e a que horas ele se move mais lentamente?

44. Considere três números positivos tais que sua soma é 15. Sabendo-se que o dobro do primeiro mais três vezes o segundo, mais quatro vezes o terceiro é 45, determine então esses números de modo que o produto dos três seja o maior possível.

45. Considere o retângulo, da figura a seguir, cujo perímetro é 16cm. Determine os lados do retângulo para que a área do trângulo ABC seja a maior possível.



46. Determine, se existir, um número positivo tal que a soma de seu cubo com 4 vezes o inverso de seu quadrado seja o menor possível.

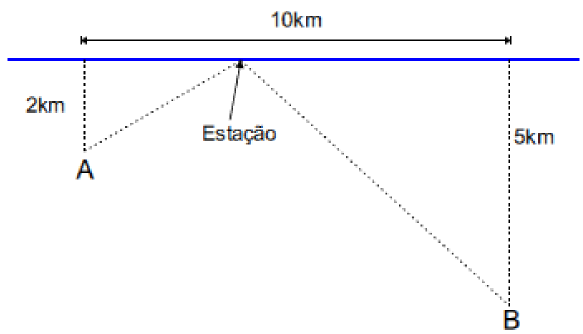
47. Considere um semicírculo de raio 2. Determine:

    (a) as dimensões do retângulo com máxima área que seja inscrito neste semicírculo;

    (b) a área deste retângulo.

48. Um recipiente com a forma de um paralelepípedo de base quadrada tem um volume de 2.000 cm^3. Sabendo-se que o custo da base e da tampa é o triplo do custo dos lados, determine as dimensões do recipiente de menor custo possível.

49. Duas cidades estão localizadas ao sul de um rio conforme a figura a seguir. Uma estação bombeadora de água será instalada para servir as duas cidades. A tubulação seguirá as retas que ligam cada cidade à estação. Defina o ponto onde a estação bombeadora deve ser instalada para minimizar o custo da tubulação.



50. Determine as dimensões de um cilindro reto inscrito em uma esfera de raio R para que este tenha o maior volume possível.

51. Uma pista de atletismo com comprimento total 400m, consiste em 2 semicírculos e dois segmentos retos, conforme a figura a seguir. Determine as dimensões da pista de tal forma que a área retangular, demarcada na figura, seja máxima.

52. Uma folha de papelão quadrada com 16 cm^2 é usada para fazer uma caixa aberta, retirando quadrados do mesmo tamanho dos quatro cantos e dobrando-se os lados. Qual é o tamanho dos quadrados que resulta na caixa com o maior volume possível?

53. Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio, de 900m de largura, até uma fábrica situada do outro lado do rio, 3000m rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de $R\$5,00$ por metro, enquanto que para estendê-lo por terra custa $R\$4,00$ o metro. Qual é o percurso mais econômico para o cabo?

54. Considere um trapézio isósceles de área 50cm^2. Sabendo que $\alpha = 30°$ é um dos ângulos da base, determine a medida da lateral l para que o perímetro seja mínimo.

55. Uma bateria de voltagem fixa V e resistência interna fixa r está ligada a um circuito de resistência variável R. Pela Lei de Ohm, a corrente I no circuito é $I = \dfrac{V}{R+r}$. Se a potência é dada por $P = I^2R$, mostre que a potência máxima ocorre quando $R = r$.

56. No projeto de aviões, uma característica importante é o chamado "fator de arraste", isto é, a força de freagem exercida pelo ar sobre o avião. Um modelo mede o arraste por uma função da forma $F(v) = Av^2 + \dfrac{B}{v^2}$, onde A e B são constantes positivas. Descobre-se experimentalmente que o arraste é minimizado quando $v = 160$ mph. Use esta informação para encontrar a razão $\dfrac{B}{A}$.

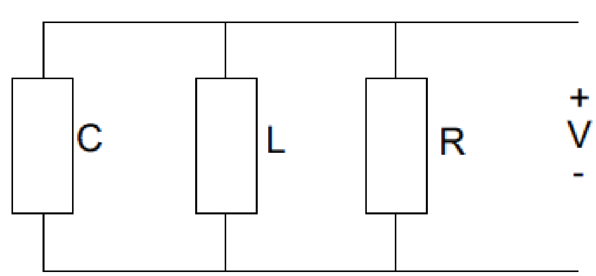
57. A carga transmitida através de um circuito varia de acordo com a equação $q = t^4 - 4t^3$ coulombs. Determine o instante t quando a corrente $i = \dfrac{dq}{dt}$ atinge um mínimo.

58. O trabalho realizado por um solenóide ao mover um induzido varia de acordo com $W = 2t^3 - 3t^4$ joules. Determine a maior potência desenvolvida. (Potência: $P = \dfrac{dW}{dt}$.)

59. Determine a maior corrente num capacitor com capacitância C igual a $\dfrac{4}{3} \times 10^{-6}$ farads, se a voltagem aplicada for dada por $V = 250t^2 - 200t^3$ volts ($i = C\dfrac{dV}{dt}$).

60. Um gerador produz uma tensão $V_{in} = 110$ Volt para alimentar uma carga resistiva R. A linha de transmissão de energia possui uma resistência $r_0 = 0,8k\Omega$/km e 5000km de extensão entre a fonte e a carga. Sabendo que a potência sobre uma carga é dada por $P = V^2\dfrac{R}{(R+r)^2}$, calcule o valor de R para que a potência transmitida pelo gerador seja máxima.

61. Um circuito RLC paralelo sobreamortecido com o capacitor de capacitância $C = 23,81\text{mF} = \dfrac{1}{42}\text{F}$, inicialmente descarregado, e o indutor de indutância $L = 7\text{H}$, inicialmente carregado com corrente de -10A, gera uma tensão de saída no resistor de resistência $R = 6\Omega$ regida pela Equação 5.1. Calcule o tempo para que a corrente que passa pelo resistor seja máxima. Calcule também o valor da tensão e da corrente no resistor nesse instante e esboce o gráfico da tensão de saída do circuito. Dados:

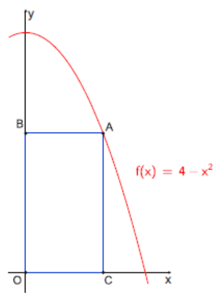


$$V = -K_1e^{s_1t} + K_2e^{s_2t} \tag{5.1}$$
$$V = RI \tag{5.2}$$

- $K_1 = K_2 = 84\text{V}$
- $s_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

- $s_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$
- $\alpha = \dfrac{1}{2RC}$
- $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

62. Considere um retângulo inscrito no segmento parabólico delimitado pela função $f(x) = 4 - x^2$ e pelos eixos cartesianos, como na figura abaixo. Quais as dimensões do retângulo para que sua área seja máxima? Qual é o valor da área máxima?



63. Um produtor de fertilizante constata que, se produzir x unidades de fertilizantes, pode vender seu produto a $p = 300 - \dfrac{x}{10}$ reais por unidade. O custo de produção (em reais) de x unidades é

$$C(x) = 15.000 + 125x + \frac{x^2}{40}.$$

Se a capacidade de produção da empresa for de, no máximo, 1.000 unidades de fertilizante num determinado intervalo de tempo especificado, quantas unidades deveriam ser manufaturadas e vendidas nesse intervalo de tempo para maximizar o lucro?

64. No planejamento de uma lanchonete foi estimado que se existem lugares para de 20 a 80 pessoas, o rendimento semanal será de R$ 70,00 por lugar. Contudo, se a capacidade de assentos está acima de 80 lugares, o rendimento semanal, em cada lugar, será reduzido em 50 centavos pelo número de lugares excedentes. Qual deverá ser a capacidade de assentos para que o rendimento semanal seja o maior possível? Qual é o lucro máximo?

Respostas:

1. Use o TVI ou o Teorema Bolzano; $c \in (-1, -0.75)$

   Observação: O teorema de Bolzano está enunciado no capítulo 2.

2. Use o TVI ou o Teorema Bolzano; $c \in (0.75, 1)$

3. Use o Teorema de Weiertrass.

4. Use o Teorema de Weiertrass.

5. Use o Teorema de Bolzano; $[-2, -1]$

6. Use o Teorema de Bolzano; $[-3, -2]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$

7. .

    (a) $a < -27$ ou $a > 5$.
    (b) $a = -27$ ou $a = 5$.
    (c) $-27 < a < 5$.

8. Não.

9. Não.

10. (a) não; (b) não; (c) não; (d) sim; (e) sim.

11. Sim.

12. (a) não; (b) sim; (c) sim; (d) sim; (e) não; (f) sim.

13. Não. f' não existe em $x = 3$.

14. $\left(\frac{1}{3}, -\frac{32}{27}\right)$

15. Dica: Primeiro encontre a função e o intervalo para aplicar o TVM.

16. $a = 3$, $b = 4$ e $m = 1$.

17. $\left(\dfrac{a}{\sqrt[n-1]{n}}, \dfrac{a^n}{\sqrt[n-1]{n^n}}\right)$

18. (a) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; (b) não.

19. -

20. A afirmação é verdadeira.

21. .

    (a) Decrescente no domínio
    (b) Crescente no domínio
    (c) Decrescente em $(0, e^{-1}]$ e crescente em $[e^{-1}, +\infty)$
    (d) Decrescente em $[1, +\infty)$ e crescente em $(-\infty, 1]$
    (e) Crescente em $\left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ e decrescente em $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$
    (f) Decrescente em $(-\infty, 0) \cup [3.2, +\infty)$ e crescente em $(0, 3.2)$
    (g) Decrescente em $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, \sqrt{2})$ e crescente em $(-\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

22. .

    (a) Côncava para cima em $(-2, 0] \cup (8, +\infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty, -2) \cup (0, 8)$
    (b) Côncava para baixo em $(-\infty, 2]$ e côncava para cima em $[2, +\infty)$
    (c) Côncava para cima em $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ e côncava para baixo em $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

(d) Côncava para cima em todo seu domínio

23. .

    (a) $y = 0,\ x = -2,\ x = 0$ e $x = 2$
    (b) $y = x,\ y = -x,\ x = -1$ e $x = 1$
    (c) $y = 0$ e $x = 0$
    (d) $y = -2x$ e $x = 1$

24. No final do gabarito.

25. Sugestão: Aplique o Teorema de Rolle para a função $g(x) = f'(x)$.

26. (a) $b = -3a, \quad c = 0 \quad$ e $\quad d \in \mathbb{R}$.
    (b) $P_1(0, f(0))$ e $P_2(1, f(1))$ são pontos de máximo e mínimo relativo, respectivamente.

27. Afirmação verdadeira.

28. $a = 3$ e $b = -3$.

29. -

30. -

31. -

32. .

    - Assíntotas verticais: $x = -1$ e $x = 0$
    - Assíntotas Horizontais: não tem
    - $f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [-\frac{1}{2}, 0)$
    - $f'(x) > 0 \Rightarrow x \in [-2, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2}] \cup (0, +\infty)$
    - $f''(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3.1] \cup [-2, 0) \cup (0, +\infty)$
    - $f''(x) > 0 \Rightarrow x \in [-3.1, -2)$
    - Ponto de mínimo: $(-2, f(-2))$
    - Ponto de máximo: $(-1/2, f(-1/2))$
    - Ponto de inflexão: $(-3.1, f(-3.1))$
    - Descontinuidades: $x = -1$ e $x = 0$
    - Raiz: $x = 5/4$

33. Pelo gráfico de $f'(x)$ pode-se concluir que $f(x)$ tem um mínimo em $x = 0$ e pontos de inflexão em $(-1, f(-1))$ e $(1, f(1))$. Sendo côncava para baixo em $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ e côncava para cima em $[-1, 1]$. Também podemos concluir que as únicas raízes de $f''(x)$ são $x = -1$ e $x = 1$, sendo $f''(x) < 0$ se $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e $f''(x) > 0$ se $x \in (-1, 1)$.

34. -

    - $f(-2) = f(0) = f(-2) = 0$

- Ponto de mínimo: $(1.5, f(1.5))$
- Ponto de máximo: $(-1, f(-1))$
- Pontos de inflexão: $(0,0)$, $(2,0)$ e $(3, f(3))$
- $f(x)$ tem um "pico"em $x = 0$ e uma tangente vertical em $x = 2$

35. -

- Domínio de $f : Df = \mathbb{R}$;
- $P_1\,(0, f\,(0))$ é um ponto de máximo e C é um ponto de mínimo;
- A, B e $P_2\,(4, f\,(4))$ são pontos de inflexão;
- Assintotas horizontais: $y = \frac{\pi}{2}$ para $x \to +\infty$ e $y = -\frac{\pi}{2}$ para $x \to -\infty$.

36. -

- Domínio de $f : Df = \mathbb{R}$;
- a reta $y = -x + 2$ é assíntota oblíqua para $x \to \pm\infty$;
- $P_1\,(0,0)$ é um ponto de mínimo e $P_2\,(4, f\,(4))$ é um ponto de máximo.
- $P_3\,(6,0)$ é um ponto de inflexão.
- $f(x)$ tem um "pico"em P_1 e uma tangente vertical em P_3.

37. $x = y = 2\sqrt{59}$m
38. Aproximadamente 76m por 57m.
39. O quadrado de lado 7cm.
40. 2m e 3m.
41. $r = h = 1$cm
42. $R = \dfrac{6}{\pi}$ e $l = 0$
43. Mais rápido 15h, mais lento às 17h.
44. $x = y = z = 5$
45. $x = y = 4$cm
46. $\sqrt[5]{\dfrac{8}{3}}$
47. (a) $\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$; (b) 4u.a.
48. $5\sqrt[3]{144}$cm e $\dfrac{20}{\sqrt[3]{12}}$
49. $\dfrac{20}{7}$m após o ponto N.
50. $\dfrac{\sqrt{6}R}{3}$ e $\dfrac{2\sqrt{3}R}{3}$

51. 100m e $\dfrac{200}{\pi}$m

52. $\dfrac{2}{3}$m

53. 1200m pelo rio e 1800m por terra.

54. $l = 10$cm

55. -

56. $\dfrac{B}{A} = (160)^4$

57. $t = 2$s

58. $2/9$W$\approx 0,222$ W

59. $i = \dfrac{25 \times 10^{-4}}{18}$A

60. $R = 4M\Omega$

61. $t = \dfrac{\ln 6}{5}s;\ V = \dfrac{70}{\sqrt[5]{6}}V;\ I = \dfrac{35}{3\sqrt[5]{6}}A$

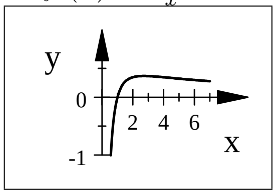
62. $\frac{2}{3}\sqrt{3}u.c.;\ \frac{16}{9}\sqrt{3}u.a.$

63. 700 unidades

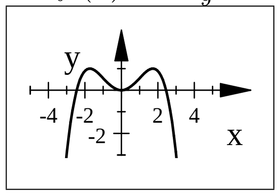
64. 110 lugares; $R\$6.050,00.$

24. -

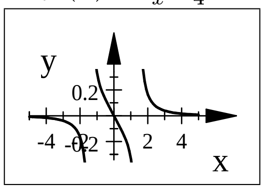
a. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$



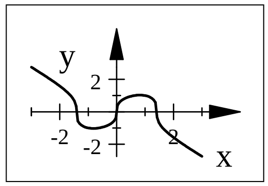
b. $f(x) = \frac{6x^2 - x^4}{9}$



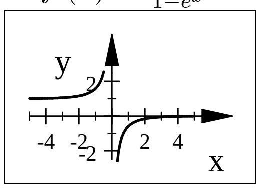
c. $f(x) = \frac{x}{x^4 - 4}$



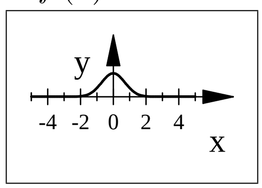
d. $f(x) = \sqrt[3]{2x - x^3}$



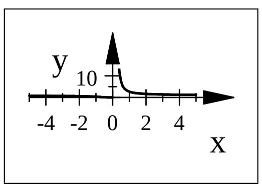
e. $f(x) = \frac{1}{1 - e^x}$



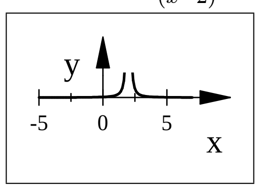
f. $f(x) = e^{-x^2} + 2$



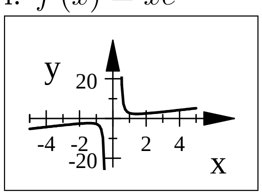
g. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$



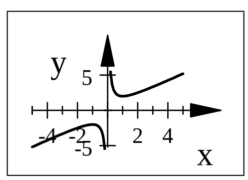
h. $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$



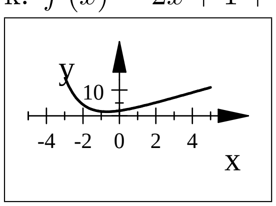
i. $f(x) = xe^{x^{-2}}$



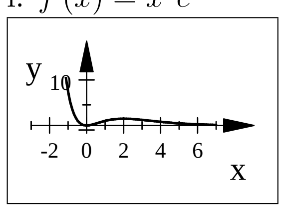
j. $f(x) = x + \frac{1}{x}$



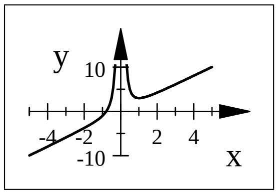
k. $f(x) = 2x + 1 + e^{-x}$



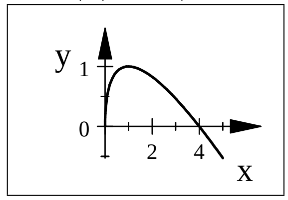
l. $f(x) = x^2 e^{1-x}$



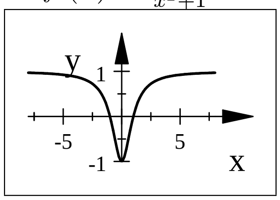
m. $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$



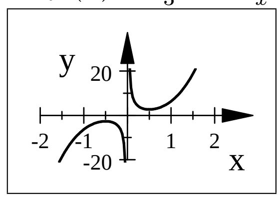
n. $f(x) = 2\sqrt{x} - x$



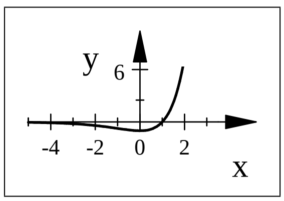
o. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$



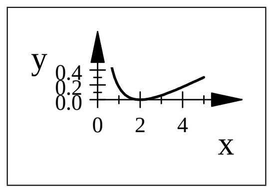
p. $f(x) = \frac{16}{3}x^3 + \frac{1}{x}$



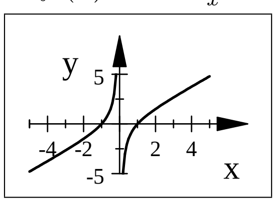
q. $f(x) = (x-1)e^x$



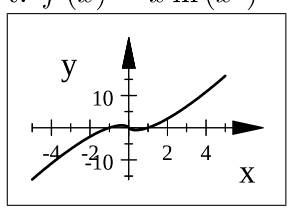
r. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{2}$



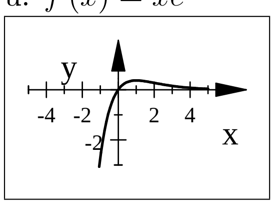
s. $f(x) = x - \frac{1}{x}$



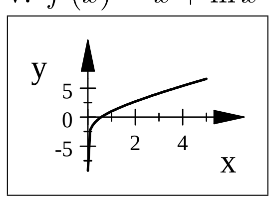
t. $f(x) = x\ln(x^2)$



u. $f(x) = xe^{-x}$

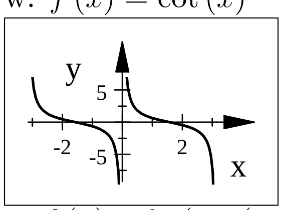


v. $f(x) = x + \ln x$

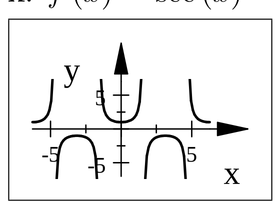


25. 26.

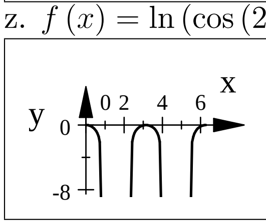
w. $f(x) = \cot(x)$



x. $f(x) = \sec(x)$



z. $f(x) = \ln(\cos(2x))$



Capítulo 6

Integral Indefinida

Objetivos

- Determinar a primitiva de uma função, mediante a definição;
- Interpretar geometricamente a integral indefinida;
- Aplicar as propriedades relativas à integral indefinida;
- Resolver integrais através de integração imediata;
- Resolver integrais pelo método da integração por partes;
- Resolver integrais de funções trigonométricas;
- Resolver integrais elementares que contém um trinômio quadrado;
- Resolver integrais por substituições trigonométricas;
- Resolver integrais por decomposição em frações parciais.

6.1 Introdução

O estudo desenvolvido neste capítulo visa o problema inverso ao que desenvolvemos no capítulo 3, ou seja, agora será dada uma função e deveremos calcular uma outra função, cuja derivada é igual à função dada. Neste sentido, serão apresentados os métodos mais comuns para que isto possa ser alcançado. Para tanto, precisamos do conceito de primitiva de uma função.

Definição 1: Uma função $F(x)$ é chamada de *primitiva* ou *antiderivada* da função $f(x)$ em um intervalo I se

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

Exemplo 1:

(i) $F(x) = \frac{x^3}{3}$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$;

(ii) $F(x) = \cos x$ é uma primitiva de $f(x) = -\sin x$;

(iii) $F(x) = e^{-x}$ é uma primitiva de $f(x) = -e^{-x}$.

Observação 1: Em qualquer um dos exemplos acima podemos perceber que se acrescentarmos uma constante qualquer na função $F(x)$ sua derivada continuará sendo igual a função dada, isto é, ela continuará sendo uma primitiva.

Vejamos algumas proposições neste sentido.

Proposição 1: Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$. Então, se c é uma constante qualquer, a função $G(x) = F(x) + c$ também é primitiva de $f(x)$.

Demonstração: Como $F(x)$ é uma primitiva da função $f(x)$, pela definição, $F'(x) = f(x)$.

Assim, $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$.

Portanto, G é uma primitiva de f.

O teorema 1 no garante que para uma função contínua dada não existe uma única primitiva, mas sim, uma infinidade delas.

Proposição 2: Se $f'(x)$ se anula em todos os pontos do intervalo I, então f é constante em I.

Demonstração: Sejam $x, y \in I$, com $x < y$.

Como f é diferenciável em I, então f é contínua em $[x, y]$ e diferenciável em (x, y).

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x, y)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Por hipótese, $f'(c) = 0$, pois $c \in I$. Assim, segue que

$$f(y) - f(x) = 0 \Rightarrow f(y) = f(x).$$

Sendo x e y dois pontos quaisquer de I, concluímos que f é constante em I.

Proposição 3: Se $F(x)$ e $G(x)$ são funções primitivas de f no intervalo I, então existe uma constante c tal que $F(x) - G(x) = c$.

Demonstração: Seja $H(x) = F(x) - G(x)$.

Como $F(x)$ e $G(x)$ são primitivas de $f(x)$ em I, então $F'(x) = G'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$. Logo, $H(x)$ é derivável em I e

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Pela proposição 2, segue que, existe uma constante c, tal que $H(x) = c$, ou seja,

$$F(x) - G(x) = c \Rightarrow F(x) = G(x) + c.$$

Dos teoremas acima podemos escrever que tendo-se determinado uma primitiva $F(x)$ obtém-se outra primitiva qualquer da função dada, somando-se a $F(x)$ uma constante c e a expressão $F(x) + c$ representa o conjunto de todas as funções primitivas para a função $f(x)$ dada.

Com isto podemos estabelecer a definição de integral indefinida.

Definição 2: Se $F(x)$ é uma primitiva ou antiderivada de $f(x)$, a expressão $F(x) + c$ é definida como sendo a integral indefinida da função $f(x)$ e é denotada por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

Na igualdade estabelecida na definição 2, temos que:

- o símbolo $\int$ é chamado sinal de integração;
- $f(x)$ é dita função subintegral ou integrando;
- a expressão $f(x)dx$ é dita elemento de integração;
- a função $F(x)$ é dita, parte funcional da integral indefinida;
- o número c é dito, constante arbitrária da integral indefinida.

Observações 2:

i. A integral indefinida é também conhecida como anti-diferencial.

ii. Na notação da definição 2, o termo dx não tem significado próprio, somente a expressão completa $\int f(x)\,dx = F(x)$ tem sentido.

iii. Quando queremos obter todas as primitivas de uma função $f(x)$ dada, escrevemos $\int f(x)\,dx$.

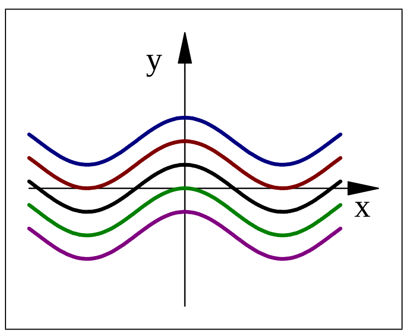
Exemplo 2:

1. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$;
2. $\int \cos x dx = \sin x + c$;
3. $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + c$.

Interpretação Geométrica

A integral indefinida, geometricamente, representa uma família de curvas e se obtém cada uma delas mediante o deslocamento de uma curva paralela a si mesma ao longo do eixo das ordenadas. Os gráficos dessa família das primitivas (ou antiderivadas) de f são chamados de *curvas integrais*.

Exemplo 3: O gráfico a seguir representa uma família de curvas da função integrando $f(x) = \cos x$. As curvas integrais abaixo figura apresentada assumiu os valores $c = -2, 1, 0, 1, 2$.



6.2 Propriedades da Integral Indefinida

Proposição 4: Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ e c uma constante qualquer. Então:

i. $\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$;

ii. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

Demonstração:

i. *Como $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ então $cF(x)$ é primitiva de $cf(x)$. Assim, temos que:*

$$\int cf(x)\,dx = cF(x) + k = cF(x) + ck_1 = c(F(x) + k_1) = c\int f(x)\,dx.$$

ii. *Provaremos para a soma, a demonstração para a diferença é análoga.*

Sejam $F(x)$ *e* $G(x)$ *as primitivas das funções* $f(x)$ *e* $g(x)$.
Definindo $H(x) = F(x) + G(x)$ *e* $h(x) = f(x) + g(x)$, *temos que:*
$H'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = h(x)$.
Assim,
$\int h(x)\,dx = H(x) + c = F(x) + G(x) + c_1 + c_2 =$
$= F(x) + c_1 + G(x) + c_2 = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

Observação 3: A proposição (ii) é válida para um número finito de funções, isto é, a integral da soma é igual a soma de integrais.

Resumiremos a seguir algumas propriedades da integral indefinida, cujas demonstrações serão omitidas aqui:

i. $\int d(F(x)) = F(x) + c$, onde $d(F(x))$ representa é a diferencial da função $F(x)$;

ii. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$;

iii. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$;

iv. $\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + c$, onde a é uma constante;

v. $\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + c$, onde b é uma constante;

vi. $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$, onde a e b são constantes.

Através das derivadas das funções elementares é possível obter uma tabela de integrais, conhecidas como *integrais imediatas*.

6.3 Tabela de Integrais Imediatas

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$, $n \neq -1$;
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$;
3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$, $a > 0$ e $a \neq 1$;
4. $\int e^u du = e^u + c$;
5. $\int \sin(u)\,du = -\cos u + c$;
6. $\int \cos(u)\,du = \sin u + c$;
7. $\int \sec^2(u)\,du = \text{tg}(u) + c$;
8. $\int \text{cossec}^2(u)\,du = -\text{cotg}(u) + c$;
9. $\int \dfrac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + c$.

A verificação destas integrais pode ser feita segundo a definição de integral indefinida, ou seja, através da definição de primitiva de uma função.

Observação: *As integrais abaixo não são imediatas, porém elas sugem várias vezes nas integrações. Como, por enquanto, não temos condições de demonstrá-las iremos utilizar este resultado. Para demostrá-las é necessário utilizar além do método da substituição (próxima seção) a técnica de decomposição em frações parciais, que é a última técnica de integração a ser utilizada.*

1. $\int \sec(u)\, du = \ln|\sec(u) + \text{tg}(u)| + c$;
2. $\int \text{cossec}(u)\, du = \ln|\text{cossec}(u) - \text{cotg}(u)| + c$;

Exemplo 4:

1. $\int \sec^2 u du = \text{tg}(u) + c$

   Solução: Definindo $F(u) = \text{tg}(u) + c$ e $f(u) = \sec^2 u$.

   Devemos mostrar que $F'(u) = f(u)$.

   $F'(u) = (\text{tg}(u) + c)' = \sec^2 u = f(u)$.

2. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + c$

   Solução: Definindo $F(u) = \frac{1}{a}\text{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + c$ e $f(u) = \frac{1}{u^2+a^2}$.

   Devemos mostrar que $F'(u) = f(u)$.

   $$F'(u) = \left(\tfrac{1}{a}\text{arctg}\left(\tfrac{u}{a}\right) + c\right)' = \frac{1}{a}\frac{\left(\frac{u}{a}\right)'}{1 + \left(\frac{u}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{1 + \frac{u^2}{a^2}}\right) = \frac{1}{u^2+a^2} = f(u).$$

Vejamos agora, alguns exemplos usando a tabela e as propriedades.

Exemplo 5: Resolva as integrais indefinidas:

1. $\int (2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x})\, dx$;

   Solução: Pelas propriedades de integrais, temos que:

   $$\begin{aligned}\int (2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x})\, dx &= \int 2x^3 dx - \int 3\sin x dx + \int 5\sqrt{x} dx \\ &= 2\int x^3 dx - 3\int \sin x dx + 5\int x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \tfrac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + c\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{x^4 + 3x^{-\frac{1}{2}} + x\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$;

   Solução: Pelas propriedades de integrais, temos que:

   $$\int \frac{3x^4 - 5x^{-\frac{1}{2}} + x\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx = \int 3x^{\frac{7}{2}} dx + \int \tfrac{-5}{x} dx + \int x^{\frac{1}{8}} dx$$

$$= 3\int x^{\frac{7}{2}}dx - 5\int \frac{dx}{x} + \int x^{\frac{1}{8}}dx$$
$$= \frac{2}{3}x^{\frac{9}{2}} - 5\ln x + \frac{8}{9}x^{\frac{9}{8}} + c.$$

3. $\int \left(2e^x + \frac{3}{x^7} - \text{tg}^2(x)\ \text{cossec}^2(x)\right) dx.$

   Solução: Pelas propriedades de integrais, temos que:

$$\int \left(2e^x + \frac{3}{x^7} - \text{tg}^2(x)\ \text{cossec}^2(x)\right) dx = 2\int e^x dx + 3\int x^{-7}dx - \int \text{tg}^2(x)\,\text{cossec}^2(x)\,dx$$
$$= 2e^x + 3\frac{x^{-6}}{-6} + c - \int \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\frac{1}{\text{sen}^2 x}dx$$
$$= 2e^x + 3\frac{x^{-6}}{-6} + c - \int \frac{1}{\cos^2 x}dx$$
$$= 2e^x + 3\frac{x^{-6}}{-6} + c - \int^2 \sec^2(x)\,dx$$
$$= 2e^x - \frac{1}{2x^6} - \text{tg}(x) + k.$$

6.4 Técnicas de Integração

Com o objetivo de usar alguma das integrais imediatas, faz-se necessário utilizar alguns métodos para transformar a integral dada em uma integral conhecida. A seguir, estudaremos alguns métodos de integração que irão nos auxiliar neste procedimento.

6.4.1 Integração Por Substituição

A técnica de integração por *substituição*, também conhecida como troca de variáveis, pode ser motivada examinando-se a regra da cadeia do ponto de vista da antiderivação. Com este propósito, suponha que $F(x)$ seja uma primitiva de $f(x)$ e que $g(x)$ seja uma função diferenciável.

Pelas regras de derivação, sabemos que:

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x)) + k\right] = F'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x)\,, \text{ para } k \in \mathbb{R}.$$

Note que acabamos de provar que a $F(g(x)) + k$ é a primitiva da função $f(g(x))\,g'(x)$, ou seja, provamos que

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + c.$$

Definindo $u = g(x)$. Então $du = g'(x)\,dx$. Dessa forma,

$$\int f(u)\,du = F(u) + c.$$

Exemplo 6: Resolva as integrais indefinidas.

1. $\int \sqrt{2x-1}dx$;

   Solução: Definindo $u = 2x-1$. Então $du = 2dx$.

   Por substituição, temos que:

   $\int \sqrt{2x-1}dx = \int \sqrt{2x-1}\frac{2}{2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}du$

   $= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + c.$

   Voltando para a variável x, obtemos que:

   $\int \sqrt{2x-1}dx = \frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3} + c.$

2. $\int \frac{3x}{x^2+1}dx$;

   Solução: Definindo $u = x^2+1$. Então $du = 2xdx$.

   Por substituição, temos que:

   $\int \frac{3x}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{2}\ln|u| + c.$

   Retornando para a variável x, obtemos que:

   $\int \frac{3x}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+1| + c.$

Esta técnica é uma das mais importantes para o cálculo de integrais indefinidas. O sucesso desta integração depende da habilidade para escolher a substituição adequada. A seguir, apresentamos as etapas envolvidas na aplicação da técnica de integração por substituição.

Etapas utilizadas na técnica de integração por substituição

Etapa 1: Escolha $u = g(x)$;

Etapa 2: Calcule $\frac{du}{dx} = g'(x)$;

Etapa 3: Substitua $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$;

Etapa 4: Calcule a integral resultante;

Etapa 5: Substitua u por $g(x)$ novamente.

Exemplo 7: Resolva as integrais indefinidas.

1. $\int \dfrac{2x^4}{\sqrt[3]{7-2x^5}}dx$;

   Solução: Definindo $u = 7-2x^5$. Então $du = -10x^4dx$.

   Por substituição, temos que:

   $\int \frac{x^4}{\sqrt[3]{7-2x^5}}dx = -\frac{2}{10}\int \frac{-10x^4}{\sqrt[3]{7-2x^5}}dx = -\frac{1}{5}\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}}$

   $= -\frac{1}{5}\int u^{-\frac{1}{3}}du = -\frac{3}{10}u^{\frac{2}{3}} + c = -\frac{3}{10}(7-2x^5)^{\frac{2}{3}} + c.$

2. $\int \dfrac{x^3 dx}{e^{2x^4}}$;

<u>**Solução:**</u> Reescrevendo o integrando, temos que:

$\int \frac{x^3 dx}{e^{2x^4}} = \int x^3 e^{-2x^4} dx$

Definindo $u = -2x^4$. Então, $du = -8x^3 dx$.

Por substituição, temos que:

$\int x^3 e^{-2x^4} dx = -\frac{1}{8} \int e^{-2x^4} \left(-8x^3\right) dx = -\frac{1}{8} \int e^u du$

$= -\frac{1}{8} e^u + c = -\frac{1}{8} e^{-2x^4} + c.$

3. $\int \sin^2(3x+5) \cos(3x+5)\, dx$;

<u>**Solução:**</u> Definindo $u = \sin(3x+5)$. Então, $du = 3\cos(3x+5)\, dx$.

Por substituição, temos que:

$\int \sin^2(3x+5)\cos(3x+5)\, dx = \frac{1}{3} \int u^2 du$

$= \frac{1}{9} u^3 + c = \frac{1}{9} \sin^3(3x+5) + c.$

4. $\int \dfrac{x\sqrt{1+\operatorname{cotg}(x^2+1)}}{\sin^2(x^2+1)} dx$

<u>**Solução:**</u> Reescrevendo o integrando, temos que:

$\int \frac{x\sqrt{1+\operatorname{cotg}(x^2+1)}}{\sin^2(x^2+1)} dx = \int x \operatorname{cossec}^2(x^2+1) \sqrt{1+\operatorname{cotg}(x^2+1)} dx$

Definindo $u = 1+\operatorname{cotg}(x^2+1)$. Então $du = -2x\operatorname{cossec}^2(x^2+1)\, dx$

Por substituição, temos que:

$\int \frac{x\sqrt{1+\operatorname{cotg}(x^2+1)}}{\sin^2(x^2+1)} dx = -\frac{1}{2} \int \sqrt{u} du =$

$= -\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3} \left(1+\operatorname{cotg}(x^2+1)\right)^{\frac{3}{2}} + c.$

Exemplo 7: Resolva as integrais indefinidas.

1. $\int \dfrac{4x+2}{2x-1} dx$;

<u>**Solução:**</u> Reescrevendo o integrando, temos que:

$\int \frac{4x+2}{2x-1} dx = \int \left(2 + \frac{4}{2x-1}\right) dx = 2 \int dx + 4 \int \frac{dx}{2x-1}$

Definindo $u = 2x-1$. Então $du = 2dx$. Dessa forma,

$\int \frac{4x+2}{2x-1} dx = 2 \int dx + 2 \int \frac{du}{u} = 2x + 2\ln|u| + c$

$= 2x + 2\ln|2x-1| + c.$

2. $\int 3^x (\sin(3^x) + \cos(3^x))\, dx$.

<u>**Solução:**</u> Definindo $u = 3^x$, temos que $du = 3^x \ln 3 dx$. Assim,

$\int 3^x (\sin(3^x) + \cos(3^x))\, dx = \frac{1}{\ln 3} \int (\sin(3^x) + \cos(3^x))\, 3^x \ln 3 dx$

$= \frac{1}{\ln 3} \int (\sin u + \cos u)\, du = \frac{1}{\ln 3} \int \sin u du + \frac{1}{\ln 3} \int \cos u du$

$= \frac{1}{\ln 3} \sin(3^x) - \frac{1}{\ln 3} \cos(3^x) + c$

6.4.2 Integração Por Partes

A técnica de integração por partes é a formulação antiderivada da fórmula para diferenciação do produto de duas funções.

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções deriváveis, então pela regra do produto, temos que:

$$\frac{d}{dx}[\ u(x).v(x)] = u(x)\, v'(x) + v(x)\, u'(x)\,.$$

Integrando com relação a x, temos que:

$\int \frac{d}{dx}[\ u(x).v(x)]\, dx = \int u(x)\, v'(x)\, dx + \int v(x)\, u'(x)\, dx$

$\Rightarrow u(x).v(x) = \int u(x)\, v'(x)\, dx + \int v(x)\, u'(x)\, dx$

$\Rightarrow \int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x).v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx.$

Da definição de diferenciais, lembre que

$$dv = v'(x)\, dx \text{ e } du = u'(x)\, dx.$$

Assim,

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

é chamada de *fórmula de integração por partes.*

Exemplo 8: Resolva as integrais indefinidas.

1. $\int \ln x dx$;

<u>**Solução:**</u> Escolhendo $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$.

Pela integração por partes, temos que:

$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$

Observação 5: No exemplo acima, quando calculamos a função v, desprezamos a constante k, isto é:

$$\int dv = \int dx \ \Rightarrow \ v = x + k,$$

uma vez que interessa somente uma função primitiva e não o conjunto todo. Neste caso é comum dizer que escolhemos a constante $k = 0$.

2. $\int x\text{sen}(x)\,dx$;

Solução: Definindo$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \text{sen}(x)\,dx \Rightarrow v = -\cos(x) \end{cases}$.

Pela integração por partes, temos que:

$\int x\text{sen}(x)\,dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = \text{sen}(x) - x\cos(x) + c.$

3. $\int \arcsin x dx$;

Solução: Definindo$\begin{cases} u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$.

Pela integração por partes, temos que:

$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Por substituição, fazendo $u = 1 - x^2 \Rightarrow du = 2xdx$, temos que:

$$\begin{aligned} \int \arcsin x dx &= x \arcsin x + \tfrac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= x \arcsin x + \sqrt{u} + c \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int \frac{x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Solução: Definindo

$$\begin{cases} u = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{1+x^2} \end{cases},$$

Pela integração por partes, temos que:

$$\begin{aligned} \int \frac{x \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \sqrt{1+x^2} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int \sqrt{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \sqrt{1+x^2} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int dx \\ &= \sqrt{1+x^2} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - x + c. \end{aligned}$$

O problema na integração por partes está em saber qual a expressão subintegral que se toma como u e qual a que se toma por dv. Recomenda-se substituir por dv aquela diferencial para a qual é conhecida a integral ou então, que seja fácil de se calcular.

Há casos em que se pode tomar como dv qualquer uma das funções da expressão subintegral. No entanto, é bom lembrar que, a diferenciação em uma série de casos, simplifica a expressão, isto é, as derivadas de algumas funções transcendentes são algébricas, é o caso das funções logarítmicas e das funções circulares inversas.

Portanto, nas integrais do tipo:

1^o Caso: $\int f(x)\,(\text{função transcendental})\,dx$, onde $f(x)$ é um polinômio real em x, para realizar a integração por partes, é necessário fazer a seguinte escolha

$$\begin{cases} u = \text{função transcendental} \\ dv = f(x)\,dx \end{cases}.$$

2^o Caso: $\int f(x)\,(\text{função circular})\,dx$, onde é um polinômio real em x, para aplicar o método da integração por partes, definimos

$$\begin{cases} u = f(x) \\ dv = (\text{função circular })dx \end{cases}.$$

Nestes dois casos, as funções transcendentais ou as funções circulares têm derivadas não-algébricas.

Exemplo 9: Resolva as integrais indefinidas.

1. $\int e^x \cos x dx$;

   Solução: Neste caso, as duas funções da expressão subintegral são transcendentes

   cujas derivadas não são algébricas.

   Escolhendo$\begin{cases} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{cases}.$

   Pela integração por partes, temos que:

   $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \sin x dx}_{(I)} \qquad (*)$

   Para resolver a integral (I) devemos aplicar novamente a integração por partes.

   Definindo $\begin{cases} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}.$

   Substituindo em $(*)$, temos que:

   $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\right)$

   $\Rightarrow 2 \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x + k$

   $\Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c.$

   Neste exemplo, podemos notar que, ao aplicarmos pela segunda vez a integração por partes, o método nos levou a uma igualdade com a integral dada, o que possibilitou a sua resolução. Poderíamos, no início, ter escolhido qualquer uma das funções subintegrais como u e o resultado se manteria.

2. $\int xe^{5x} dx$;

   Solução: Definindo $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{5x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{5}e^{5x} \end{cases}.$

   Pela integração por partes, temos que:

   $\int xe^{5x} dx = \frac{xe^{5x}}{5} - \frac{1}{5}\int e^{5x} dx = \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}e^{5x} + c.$

3. $\int x \arcsin x dx$;

Solução: Definindo $\left\{\begin{array}{l} u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right.$.

Pela integração por partes, temos que:

$$\begin{aligned}\int x \arcsin x dx &= \tfrac{x^2}{2}\arcsin x - \tfrac{1}{2}\int \tfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \tfrac{x^2}{2}\arcsin x + \tfrac{1}{2}\int \tfrac{-x^2+\mathbf{1}-\mathbf{1}}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \tfrac{x^2}{2}\arcsin x + \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx - \tfrac{1}{2}\int \tfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \tfrac{x^2}{2}\arcsin x + \tfrac{1}{2}\underbrace{\int \sqrt{1-x^2}dx}_{(I)} - \tfrac{1}{2}\int \tfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (1)\end{aligned}$$

Resolvendo, por partes, a integral (I): $\left\{\begin{array}{l} u = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow du = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right.$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}dx &= x\sqrt{1-x^2} - \int \tfrac{-x^2+\mathbf{1}-\mathbf{1}}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}dx + \int \tfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2}dx = \tfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin x \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos que:

$$\begin{aligned}\int x \arcsin x dx &= \tfrac{x^2}{2}\arcsin x + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin x\right) - \tfrac{1}{2}\arcsin x + c \\ &= \left(\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{1}{4}\right)\arcsin x + \tfrac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + c.\end{aligned}$$

4. $\int \frac{2(\ln x)^4 + \frac{5}{(\ln x)^{-2}}}{7(\ln x)^2}dx$

Solução: Definindo $u = \ln x$, temos que $x = e^u$ e $dx = e^u du$.

Assim, pela técnica de substituição, temos que:

$$\begin{aligned}\int \tfrac{2(\ln x)^4 + \frac{5}{(\ln x)^{-2}}}{7(\ln x)^2}dx &= \int \tfrac{2(\ln x)^4+5(\ln x)^2}{7(\ln x)^2} = \int \tfrac{2u^4+5u^2}{7u^2}e^u du = \int \left(\tfrac{2}{7}u^2 + \tfrac{5}{7}\right)e^u du \\ &= \tfrac{2}{7}\underbrace{\int u^2 e^u du}_{(I)} + \tfrac{5}{7}\int e^u du \qquad (1)\end{aligned}$$

Resolvendo a integral (I):

Definindo

$$\left\{\begin{array}{lll} t = u^2 & \Rightarrow & dt = 2udu \\ \int dv = \int e^u du & \Rightarrow & v = e^u \end{array}\right. ,$$

pela integração por partes, temos que:

$\int u^2 e^u du = u^2 e^u - 2\int u e^u du$

Definindo

$$\left\{\begin{array}{lll} w = u & \Rightarrow & dw = du \\ \int dv = \int e^u du & \Rightarrow & v = e^u \end{array}\right. ,$$

e, novamente, usando a integração por partes, temos que:

$$\int u^2 e^u du = u^2 e^u - 2\left(ue^u - \int e^u du\right) = 2e^u + u^2 e^u - 2ue^u \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$\int \frac{2(\ln x)^4 + \frac{5}{(\ln x)^{-2}}}{7(\ln x)^2} dx = \frac{9}{7}e^u + \frac{2}{7}u^2 e^u - \frac{4}{7}ue^u + c$$
$$= \frac{2}{7}x\ln^2 x - \frac{4}{7}x\ln x + \frac{9}{7}x + c.$$

Uma estratégia para integrar por partes

Poderíamos dizer que o propósito da integração por partes é transferir o cálculo de uma integral $\int udv$ para o cálculo de uma integral $\int vdu$ (a qual espera-se que saibamos calcular), pela fórmula de integração por partes, $\int udv = uv - \int vdu$.

Ao integrar por partes, uma integral da forma $\int f(x)\, g(x)\, dx$, devemos sempre escolher, dentre as duas funções da expressão $f(x)\, g(x)\, dx$, uma delas como sendo o fator u e a outra como parte de uma diferencial dv.

Em outras palavras, podemos fazer $u = f(x)$ e $dv = g(x)\, dx$, ou $u = g(x)$ e $dv = f(x)\, dx$, ou $u = f(x)\, g(x)$ e $dv = 1dx$.Mas, esta escolha não pode ser feita de modo aleatório. Temos que ser espertos em nossa escolha para que, ao passarmos da $\int udv$ para a integral $\int vdu$, passemos a uma integral tecnicamente mais simples de ser calculada.

Uma sugestão que funciona bem na grande maioria das vezes é escolher as funções u e v segundo o critério que descreveremos abaixo. Ele foi publicado como uma pequena nota em uma edição antiga da revista *American Mathematical Monthy.*

Considere o seguinte anagrama de funções elementares:

L	**I**	**A**	**T**	**E**
Logarítmicas	**I**nversas de trigonométricas	**A**lgébricas	**T**rigonométricas	**E**xponenciais

Neste esquema, as letras do anagrama LIATE são iniciais de diferentes tipos de funções.

Uma estratégia que funciona bem é: ao realizar uma integração por partes, escolher dentre as funções que aparecem no elemento de integração,

- como função u: a função cuja inicial de caracterização posiciona-se mais à esquerda no anagrama;
- como diferencial dv: a função cuja inicial de caracterização posiciona-se mais à direita no anagrama.

Resumindo, u deve caracterizar-se pela letra mais próxima de **L,** e dv pela letra mais próxima de **E**.

Observa que já usamos esta estratégia nos exemplos desenvolvidos anteriormente:

- Na integral $\int \ln x dx$ fizemos $u = \ln x$ (logarítmica) e $dv = 1dx$ (algébrica);
- Na integral $\int x\text{sen}(x)\, dx$ fizemos $u = x$ (algébrica) e dv =sen$(x)\, dx$ (trigonométrica);

- Na integral $\int$arcsen$(x)\,dx$ fizemos $u =$arcsen(x) (inversa de trigonométrica) e $dv = 1dx$ (algébrica);
- Na integral $\int xe^{5x}dx$ fizemos $u = x$ (algébrica) e $dv = e^{5x}dx$ (exponencial);
- Na integral $\int x$arcsen$(x)\,dx$ fizemos $u =$arsen(x) (inversa de trigonométrica) e $dv = xdx$ (algébrica);

Observações:

(i) Para calcular integrais cuja resolução é pelo método da integração por partes você poderá utilizar o anagrama LIATE para facilitar a escolha de u e de dv, mas tenha sempre o cuidado para não utilizá-lo de forma errada, em integrais que seu uso é impossível. Por exemplo, na integral $\int e^{x^2}dx$, temos uma função algébrica $(f(x) = 1)$ e uma função que é resultado da composição de uma função algébrica com exponencial $(g(x) = e^{x^2})$. Neste exemplo, o anagrama LIATE não funciona! Além disso, esta integral você poderá obter sua solução depois que estudar séries de funções em Cálculo 2.

(ii) Para resolver $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx$ não utilizamos o anagrama LIATE, pois as funções envolvidas não se enquadram nos tipos de funções do anagrama.

(iii) A integral $\int e^x \cos x dx$ é um dos poucos casos em que é indiferente qual das funções do elemento de integração você escolherá por u e por dv.Neste integral, poderia ser utilizado o anagrama.

(iv) Na integral $\int \frac{2(\ln x)^4 + \frac{5}{(\ln x)^{-2}}}{7(\ln x)^2}dx$ primeiramente fizemos uma mudança de variável, depois deste procedimento foram aplicadas as propriedades de integrais e, finalmente, em uma das integrais obtidas foi utilizado o anagrama.

6.5 Integração de Funções Trigonométricas

6.5.1 Integrais do tipo $\int \sin^n xdx$ e $\int \cos^n xdx$, onde $n \in \mathbb{N}$

Para $n \geq 2$, deve-se utilizar alguma(s) da(s) seguintes identidades trigonométricas:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightsquigarrow$ se n for ímpar;
- $\left\{\begin{array}{l} \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \end{array}\right. \rightsquigarrow$ se n for par.

Exemplo 10:

1. $\int \sin^3 x dx$;

<u>**Solução:**</u> Reescrevendo a função do integrando, temos que:

$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx$

$= \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c.$

2. $\int \sin^2 x dx$;

<u>**Solução:**</u> Temos que:

$\int \sin^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx$

$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c.$

3. $\int \cos^4 x dx$;

<u>**Solução:**</u> Reescrevendo a função do integrando, temos que:

$\int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right)^2 dx$

$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\, dx$

$= \frac{x}{4} + c_1 + \frac{1}{4}\sin(2x) + c_2 + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x)\right) dx$

$= \frac{x}{4} + c_1 + \frac{1}{4}\sin(2x) + c_2 + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos(4x)\, dx$

$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c.$

6.5.2 Integrais do tipo $\int \sin^m x \cos^n x dx$, onde m ou n é um número inteiro positivo ímpar

Neste caso, quando m **ou** n é um número inteiro positivo ímpar não nos importamos com o que o outro possa ser. Por exemplo, se m é ímpar escrevemos

$$\sin^m x = \sin^{m-1} x \sin x,$$

onde $m-1$ é par. Portanto, é uma potência de $\sin^2 x$ e pode ser expressa em potências de $\cos^2 x$ pela substituição

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

e a integral será

$$\int (\text{soma dos termos envolvendo } \cos x) \sin x dx$$

e como $\sin x = -(\cos x)'$ cada termo é da forma u^n, sendo $u = \cos x$.
O procedimento é análogo se n for ímpar.

Exemplo 11: Calcule as integrais:

1. $\int \sin^{10} x \cos^3 x dx$;

Solução: Reescrevendo a função do integrando, temos que:

$$\begin{aligned}\int \sin^{10} x \cos^3 x dx &= \int \sin^{10} x \cos^2 x \cos x dx \\ &= \int \sin^{10} x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x dx \\ &= \int \sin^{10} x \cos x dx - \int \sin^{12} x \cos x dx\end{aligned}$$

Definindo $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$.

Assim, por substituição, temos que:

$$\begin{aligned}\int \sin^{10} x \cos^3 x dx &= \int u^{10} du - \int u^{12} du = \tfrac{1}{11} u^{11} - \tfrac{1}{13} u^{13} + c \\ &= \tfrac{1}{11} \sin^{11} x - \tfrac{1}{13} \sin^{13} x + c.\end{aligned}$$

2. $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$.

Solução: Reescrevendo a função do integrando, temos que:

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \cos^2 x dx &= \int \sin^4 x \sin x \cos^2 x dx \\ &= \int \left(\sin^2 x\right)^2 \sin x \cos^2 x dx \\ &= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x \cos^2 x dx \\ &= \int \cos^6 x \sin x dx - 2 \int \cos^4 x \sin x dx + \int \sin x \cos^2 x dx\end{aligned}$$

Definindo $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$.

Por substituição, temos que:

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \cos^2 x dx &= -\int u^6 du + 2 \int u^4 du - \int u^2 du \\ &= -\tfrac{1}{7} u^7 + \tfrac{2}{5} u^5 - \tfrac{1}{3} u^3 \\ &= -\tfrac{1}{7} \cos^7 x + \tfrac{2}{5} \cos^5 x - \tfrac{1}{3} \cos^3 x + c.\end{aligned}$$

6.5.3 Integração de funções envolvendo seno e cosseno de arcos diferentes

As integrais do tipo $\int \sin(mx) \cos(nx)\, dx$, $\int \sin(mx) \sin(nx)\, dx$ e $\int \cos(mx) \cos(nx)\, dx$, onde $m \neq n$, são resolvidas utilizando-se as fórmulas relacionadas à adição de arcos:

$i.$ $\sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} \left[\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)\right]$;

$ii.$ $\sin(mx) \sin(nx) = \frac{1}{2} \left[\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\right]$;

$iii.$ $\cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} \left[\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)\right]$.

Exemplo 12: Calcule as integrais:

1. $\int \sin(2x)\cos(4x)\,dx$;

Solução: Usando as fórmulas de adição de arcos, temos que:

$$\begin{aligned}\int \sin(2x)\cos(4x)\,dx &= \tfrac{1}{2}\int (\sin(6x)+\sin(-2x))\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}\int \sin(6x)\,dx - \tfrac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx\\ &= -\tfrac{1}{12}\cos(6x)+\tfrac{1}{4}\cos(2x)+c.\end{aligned}$$

2. $\int \cos(4x)\cos(3x)\,dx$;

Solução: Usando as fórmulas de adição de arcos, temos que:

$$\begin{aligned}\int \cos(4x)\cos(3x)\,dx &= \tfrac{1}{2}\int (\cos(7x)+\cos(-x))\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}\int \cos(7x)\,dx + \tfrac{1}{2}\int \cos x dx\\ &= \tfrac{1}{14}\sin(7x)+\tfrac{1}{2}\sin x + c.\end{aligned}$$

6.5.4 Integrais do tipo $\int \mathrm{tg}^n x dx$ e $\int \mathrm{cotg}^n x dx$, onde n é inteiro positivo

Essas integrais se resolvem mediante sucessivas aplicações das identidades trigonométricas

$$\mathrm{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \text{ e } \mathrm{cotg}^2 x = \mathrm{cossec}^2 x - 1,$$

que tem por finalidade obter integrais da forma $\int \mathrm{tg}^m x \sec^2 x dx$ e $\int \mathrm{cotg}^m x \mathrm{cossec}^2 x dx$, que são calculadas pelo método da substituição.

Exemplo 13: Calcule as integrais indefinidas:

1. $\int \mathrm{tg}^3 x dx$;

Solução: Reescrevendo a função do integrando, temos que:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{tg}^3 x dx &= \int \mathrm{tg}^2(x).\mathrm{tg}(x)\,dx\\ &= \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{tg}(x)\,dx\\ &= \int \sec^2 x.\mathrm{tg}(x)\,dx - \int \mathrm{tg}(x)\,dx\end{aligned}$$

Definindo $u = \mathrm{tg}(x) \Rightarrow du = \sec^2 x dx$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \mathrm{tg}^3 x dx &= \int u du - \int \mathrm{tg}(x)\,dx\\ &= \tfrac{u^2}{2} - \ln|\sec x| + c\\ &= \tfrac{\mathrm{tg}^2(x)}{2} - \ln|\sec x| + c.\end{aligned}$$

2. $\int \mathrm{cotg}^4 x dx$.

Solução: Reescrevendo a função do integrando, temos que:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{cotg}^4 x dx &= \int \mathrm{cotg}^2(x)\mathrm{cotg}^2(x)\,dx\\ &= \int \mathrm{cotg}^2(x).(\mathrm{cossec}^2 x - 1)\,dx\end{aligned}$$

$= \int \text{cotg}^2(x).\text{cossec}^2 x dx - \int \text{cotg}^2(x)\, dx$
$= \int \text{cotg}^2(x).\text{cossec}^2 x dx - \int (\text{cossec}^2 x - 1)\, dx$
$= \int \text{cotg}^2(x).\text{cossec}^2 x dx - \int \text{cossec}^2 x dx + \int dx$

Definindo $u = \text{cotg}(x) \Rightarrow du = -\text{cossec}^2 x dx$. Assim,

$\int \text{cotg}^4 x dx = -\int u^2 du - \int \text{cossec}^2 x dx + \int dx$
$= -\frac{u^3}{3} + \text{cotg}(x) + x + c$
$= -\frac{\text{cotg}^3(x)}{3} + \text{cotg}(x) + x + c.$

6.5.5 Integrais do tipo $\int \sec^n x dx$ e $\int \text{cossec}^n x dx$, onde n é um número inteiro positivo

Nestes casos, basta fazer:

$$\sec^n x = \sec^{n-2} x \sec^2 x \text{ ou } \text{cossec}^n x = \text{cossec}^{n-2} x.\text{cossec}^2 x$$

e utilizar as identidades trigonométricas

$$\sec^2 x = \text{tg}^2 x + 1 \text{ e } \text{cossec}^2 x = \text{cotg}^2 x + 1.$$

Exemplo 14: Calcule as integrais indefinidas:

1. $\int \text{cossec}^4(2x)\, dx$;

   Solução: Reescrevendo a função do integrando, temos que:

   $\int \text{cossec}^4(2x)\, dx = \int \text{cossec}^2(2x)\text{cossec}^2(2x)\, dx$
   $= \int (\text{cotg}^2(2x) + 1)\text{cossec}^2(2x)\, dx$
   $= \int \text{cotg}^2(2x)\text{cossec}^2(2x)\, dx + \int \text{cossec}^2(2x)\, dx$

   Definindo $u = \text{cotg}(2x) \Rightarrow du = -2\text{cossec}^2 x dx$. Assim,

   $\int \text{cossec}^4(2x)\, dx = -\frac{1}{2}\int u^2 du + \int \text{cossec}^2(2x)\, dx$
   $= -\frac{u^3}{6} - \frac{1}{2}\text{cotg}(2x) + c$
   $= -\frac{\text{cotg}^3(2x)}{6} - \frac{1}{2}\text{cotg}(2x) + c.$

2. $\int \sec^3 x dx$.

   Solução: Reescrevendo o integrando, temos que:

   $\int \sec^3 x dx = \int \sec^2 x \sec x dx$

   Definindo $\begin{cases} u = \sec x & \Rightarrow & du = \sec x.\text{tg}(x)\, dx \\ dv = \sec^2 x dx & \Rightarrow & v = \text{tg}(x) \end{cases}$.

Pela integração por partes, temos que:

$\int \sec^3 x dx = \sec x.\text{tg}(x) - \int \text{tg}^2(x) \sec x dx$

$= \sec x.\text{tg}(x) - \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx$

$= \sec x.\text{tg}(x) - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx$

$\Rightarrow 2 \int \sec^3 x dx = \sec x.\text{tg}(x) + \int \sec x dx$

$\Rightarrow \int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} (\sec x.\text{tg}(x) + \ln|\sec x + \text{tg}(x)|) + c.$

Observação 5: Neste caso, sempre que n é número *inteiro positivo ímpar* deveremos usar integração por partes.

6.5.6 Integrais do tipo $\int \text{tg}^m(x) \sec^n x dx$ e $\int \text{cotg}^m(x) \text{cossec}^n(x) dx$, onde m e n são inteiros positivos

Quando m for *par* **e** n for *ímpar*, a integral deve ser resolvida usando a integração por partes. Nos demais casos, usa-se o método da substituição.

Exemplo 15: Calcule as integrais indefinidas:

1. $\int \text{tg}^6(x) \sec^4 x dx$;

   Solução: Como n é par, iremos usar a identidade trigonométrica $\sec^2 x = \text{tg}^2 x + 1$.

   $\int \text{tg}^6(x) \sec^4 x dx = \int \text{tg}^6(x) \sec^2 x \sec^2 x dx$

   $= \int \text{tg}^6(x) (\text{tg}^2 x + 1) \sec^2 x dx$

   $= \int \text{tg}^8(x) \sec^2 x dx + \int \text{tg}^6(x) \sec^2 x dx$

   Definindo $u = \text{tg}(x) \Rightarrow du = \sec^2 x dx$.

   Por substituição, temos que:

   $\int \text{tg}^6(x) \sec^4 x dx = \int u^8 du + \int u^6 du = \frac{1}{9}u^9 + \frac{1}{7}u^7 + c$

   $= \frac{1}{9}\text{tg}^9(x) + \frac{1}{7}\text{tg}^7(x) + c.$

2. $\int \text{tg}^3(x) \sec^3 x dx$;

   Solução: Como m é ímpar, iremos usar a identidade trigonométrica $\text{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$.

   $\int \text{tg}^3(x) \sec^3 x dx = \int \text{tg}^2(x) .\text{tg}(x) . \sec^3 x dx$

   $= \int (\sec^2 x - 1) .\text{tg}(x) . \sec^3 x dx$

   $= \int \text{tg}(x) \sec^5 x dx - \int \text{tg}(x) . \sec^3 x dx$

   $= \int \text{tg}(x) \sec x \sec^4 x dx - \int \text{tg}(x) . \sec x . \sec^2 x dx$

   Definindo $u = \sec x \Rightarrow du = \sec x.\text{tg}(x) dx$.

   $\int \text{tg}^3(x) \sec^3 x dx = \int u^4 du - \int u^2 du = \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + c$

   $= \frac{1}{5} \sec^5 x - \frac{1}{3} \sec^3 x + c.$

3. $\int \text{tg}^2(x)\sec^3 x dx$;

<u>**Solução:**</u> Observe que m é par e n é ímpar.

$\int \text{tg}^2(x)\sec^3 x dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^3 x dx$

$$= \underbrace{\int \sec^5 x dx}_{(I)} - \underbrace{\int \sec^3 x dx}_{(II)} \qquad (1)$$

Ambas integrais são resolvidas através da integração por partes.

Pelo exemplo 14, item 3, temos que a integral (II) é

$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}\sec x.\text{tg}(x) + \frac{1}{2}\ln|\sec x + tg\,(x)| + c_1 \qquad (2)$

Resolvendo a integral (I), temos que:

$\int \sec^5 x dx = \int \sec^3 x.\sec^2 x dx$

Definindo $\begin{cases} u = \sec^3 x & \Rightarrow \quad du = 3\sec^2 x.\sec x.\text{tg}(x)\,dx \\ dv = \sec^2 x dx & \Rightarrow \quad v = \text{tg}(x) \end{cases}$.

Por partes, temos que:

$\int \sec^5 x dx = \text{tg}(x)\sec^3 x - 3\int \sec^2 x.\sec x.\text{tg}^2(x)\,dx$

$= \text{tg}(x)\sec^3 x - 3\int \sec^2 x.\sec x.(\sec^2 x - 1)\,dx$

$= \text{tg}(x)\sec^3 x - 3\int \sec^5 x dx + 3\int \sec^3 x dx$

$\Rightarrow 4\int \sec^5 x dx = \text{tg}(x)\sec^3 x + 3\int \sec^3 x dx$

$\Rightarrow \int \sec^5 x dx = \frac{1}{4}\,\text{tg}(x)\sec^3 x + \frac{3}{4}\int \sec^3 x dx + c_2 \qquad (3)$

Substituindo (2) e (3) em (1), temos que:

$\int \text{tg}^2(x)\sec^3 x dx = \frac{1}{4}\tan x\sec^3 x - \frac{1}{8}\sec x.\text{tg}(x) - \frac{1}{8}\ln|\sec x + \tan(x)| + k.$

6.6 Integrais Por Substituição Trigonométrica

Geralmente, usa-se esta técnica quando o integrando contém uma expressão da forma

$$\left(a^2 - u^2\right)^{\frac{n}{2}}, \left(u^2 + a^2\right)^{\frac{n}{2}} \text{ ou } \left(u^2 - a^2\right)^{\frac{n}{2}}, \text{ para } n \in \mathbb{N} \text{ e } a \neq 0.$$

o objetivo é eliminar a soma/diferença do termo $a^2 - u^2$, $a^2 + u^2$ou $u^2 - a^2$.

A substituição trigonométrica deve ser escolhida de forma que ao utilizar alguma das identidades trigonométricas abaixo seja possível eliminar a soma/diferença de quadrados.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{ ou } \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta.$$

Analisemos cada um dos casos cujas formas foram citadas acima.

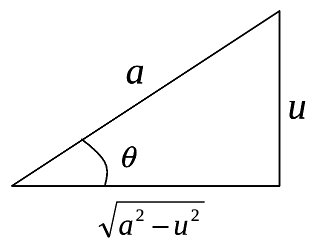
1^o Caso: O integrando contém a expressão $(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}$ com $a > 0$.

Introduzindo uma variável θ tal que $u = a\sin\theta$. Então, $du = a\cos\theta d\theta$ e supondo que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos que:

$$\begin{aligned}(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}} &= \left(a^2 - a^2\sin^2\theta\right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \left[a^2\left(1 - \sin^2\theta\right)\right]^{\frac{n}{2}} \\ &= (a^2\cos^2\theta)^{\frac{n}{2}} \\ &= a^n\cos^n\theta.\end{aligned}$$

Como $\sin\theta = \frac{u}{a}$, então $\theta = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right)$.

Graficamente, temos que:



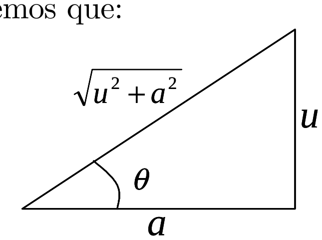
2^o Caso: O integrando contém a expressão $(a^2 + u^2)^{\frac{n}{2}}$ com $a > 0$.

Introduzindo uma variável θ tal que $u = a\text{tg}\theta$. Então, $du = a\sec^2\theta d\theta$ e supondo que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos que:

$$\begin{aligned}(a^2 + u^2)^{\frac{n}{2}} &= (a^2 + a^2\text{tg}^2\theta)^{\frac{n}{2}} \\ &= (a^2\left(1 + \text{tg}^2\theta\right))^{\frac{n}{2}} \\ &= (a^2\sec^2\theta)^{\frac{n}{2}} \\ &= a^n\sec^n\theta.\end{aligned}$$

Como $\text{tg}\theta = \frac{u}{a}$, então $\theta = \text{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)$.

Graficamente, temos que:



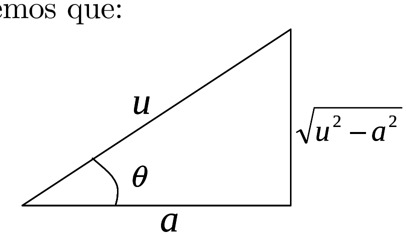
3^o Caso: O integrando contém a expressão $(u^2 - a^2)^{\frac{n}{2}}$ com $a > 0$.

Introduzindo uma variável θ tal que $u = a\sec\theta$. Então, $du = a\sec\theta.\text{tg}\theta d\theta$ e supondo que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$, temos que:

$$\begin{aligned}(u^2 - a^2)^{\frac{n}{2}} &= (a^2\sec^2\theta - a^2)^{\frac{n}{2}} \\ &= (a^2\left(\sec^2\theta - 1\right))^{\frac{n}{2}} \\ &= a^n\text{tg}^n\theta.\end{aligned}$$

Como $\sec\theta = \frac{u}{a}$, então $\theta = \text{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right)$.

Graficamente, temos que:



Exemplo 16: Calcule as integrais indefinidas abaixo:

1. $\int \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$;

<u>**Solução:**</u> Definindo $x = 3\sin\theta \Rightarrow dx = 3\cos\theta d\theta$.

Temos que: $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\cos\theta)^2} = 3\cos\theta$.

Assim,

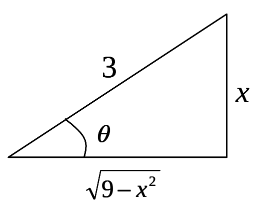
$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = \int \frac{3\cos\theta}{9\sin^2\theta}.3\cos\theta d\theta = \int \text{cotg}^2\theta d\theta$

$= \int \left(\text{cossec}^2\theta - 1\right)d\theta$

$= \int \text{cossec}^2\theta d\theta - \int d\theta$

$= -\text{cotg}\theta - \theta + c. \qquad (*)$

Devemos retornar a variável x. Para isso, observe que:



$$\begin{cases} x = 3\sin\theta \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) \\ \text{cotg}(\theta) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} \end{cases}.$$

Substiuindo em $(*)$, temos que:

$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + c.$

2. $\int \sqrt{x^2+5}dx$;

<u>**Solução:**</u> Definindo $x = \sqrt{5}\text{tg}\theta \Rightarrow dx = \sqrt{5}\sec^2\theta d\theta$.

Temos que: $\sqrt{x^2+5} = \sqrt{5\left(1+\text{tg}^2\theta\right)} = \sqrt{5}\sec\theta$.

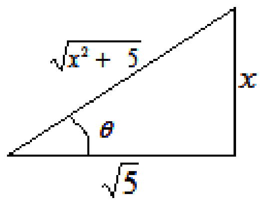
Assim,

$\int \sqrt{x^2+5}dx = \int \sqrt{5}\sec\theta.\sqrt{5}\sec^2\theta d\theta = 5\int \sec^3\theta d\theta$

Integrando por partes, usando resultado do exemplo 14, item 2, temos que:

$\int \sqrt{x^2+5}dx = \frac{5}{2}\text{tg}\theta\sec\theta + \frac{5}{2}\ln|\text{tg}\theta + \sec\theta| + c. \qquad (\#)$

Devemos retornar a variável x. Para isso, observe que:



$$\begin{cases} x = \sqrt{5}\text{tg}\theta \Rightarrow \text{tg}\theta = \frac{x}{\sqrt{5}} \\ \sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Substiuindo em (#), temos que:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+5}dx &= \tfrac{x\sqrt{x^2+5}}{2} + \tfrac{5}{2}\ln\left|\tfrac{x}{\sqrt{5}} + \tfrac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}\right| + c \\ &= \tfrac{x\sqrt{x^2+5}}{2} + \tfrac{5}{2}\ln\left|\tfrac{x+\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}\right| - \tfrac{5}{2}\ln\sqrt{5} + c \\ &= \tfrac{x\sqrt{x^2+5}}{2} + \tfrac{5}{2}\ln\left|\tfrac{x+\sqrt{x^2+5}}{5}\right| + k.\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$;

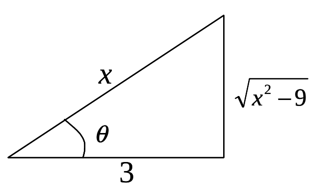
   Solução: Definindo $x = 3\sec\theta \Rightarrow dx = 3\sec\theta\text{tg}\theta d\theta$.

   Temos que: $\sqrt{x^2-9} = \sqrt{(3\sec\theta)^2 - 9} = 3\text{tg}\theta$.

   Assim,

$$\begin{aligned}\int \tfrac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} &= \int \tfrac{3\sec\theta.\text{tg}\theta d\theta}{27\sec^3\theta.3\text{tg}\theta}.d\theta = \tfrac{1}{27}\int \tfrac{d\theta}{\sec^2\theta} \\ &= \tfrac{1}{27}\int \cos^2\theta d\theta = \tfrac{1}{27}\int \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2\theta)\right)d\theta \\ &= \tfrac{1}{54}\int d\theta + \tfrac{1}{54}\int \cos(2\theta)\,d\theta \\ &= \tfrac{1}{54}\theta + \tfrac{1}{108}\sin(2\theta) + c \\ &= \tfrac{1}{54}\theta + \tfrac{1}{54}\sin\theta\cos\theta + c. \qquad (++)\end{aligned}$$

   Observe que:



$$\theta = \text{arcsec}\left(\tfrac{x}{3}\right);\quad \sin\theta = \tfrac{\sqrt{x^2-9}}{x};\quad \cos\theta = \tfrac{3}{x}.$$

   Substiuindo em (++), temos que:

$$\int \tfrac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \tfrac{1}{54}\text{arcsec}\left(\tfrac{x}{3}\right) + \tfrac{3}{54}\tfrac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} + c.$$

4. $\int \frac{\sqrt{4-25x^2}}{x^4}dx$;

   Solução: Definindo $u = 5x \quad \Rightarrow \quad du = 5dx$, temos que:

$$\int \tfrac{\sqrt{4-25x^2}}{x^4}dx = 125\int \tfrac{\sqrt{4-u^2}}{u^4}du$$

   Por substituição trigonométrica,

$$\begin{cases} u = 2\sin\theta \quad \Rightarrow \quad du = 2\cos\theta d\theta \\ \sqrt{4-u^2} = \sqrt{4-4\sin^2\theta} = 2\cos\theta \end{cases}.$$

Assim,

$\int \frac{\sqrt{4-25x^2}}{x^4}dx = 125\int \frac{2\cos\theta}{16\sin^4\theta}2\cos\theta d\theta = \frac{125}{4}\int \text{cotg}^2\theta.\text{cossec}^2\theta d\theta.$

Se $v=$cotgθ, então $dv = -\text{cossec}^2\theta d\theta$. Dessa forma,

$\int \frac{\sqrt{4-25x^2}}{x^4}dx = -\frac{125}{4}\int v^2 dv = -\frac{125}{12}v^3 + c = -\frac{125}{12}\text{cotg}^3\theta + c$

Do triângulo retângulo, temos que:

$\sin\theta = \frac{u}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{4-u^2}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \text{cotg}\theta = \frac{\sqrt{4-u^2}}{u}.$

Logo,

$\int \frac{\sqrt{4-25x^2}}{x^4}dx = -\frac{125}{12}\left(\frac{\sqrt{4-u^2}}{u}\right)^3 + c = -\frac{\left(4-25x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{12x^3} + c.$

6.7 Integrais Elementares que Contém um Trinômio Quadrado

Nesta seção, estudaremos integrais que contém um trinômio quadrado, ou seja, integrais da forma

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx, \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}} \text{ e } \int \sqrt{ax^2+bx+c}dx,$$

onde a, b, c, m e n são constantes reais, com $a \neq 0$, b ou $c \neq 0$, m ou $n \neq 0$.

Para resolver qualquer uma destas integrais será necessário completar quadrados, mudar de variável e, a seguir, utilizar alguma das técnicas de integração que já foram estudadas.

Exemplo 17: Calcule a integral indefinida $\int \dfrac{dx}{2x^2-5x+7}$.

Solução: Pela técnica de completar quadrados, temos que:

$2x^2-5x+7 = 2\left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{7}{2}\right) = 2\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{31}{16}\right).$

Assim,

$\int \frac{dx}{2x^2-5x+7} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{31}{16}}.$

Definindo $u = x - \frac{5}{2} \Rightarrow du = dx$.

Por substituição simples e por substituição trigonométrica, temos que:

$\int \frac{dx}{2x^2-5x+7} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+\left(\frac{\sqrt{31}}{4}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{31}}\text{arctg}\left(\frac{4x-5}{\sqrt{31}}\right) + c.$

Exemplo 18: Calcule a integral indefinida $\int \dfrac{x-1}{x^2-x-1}dx$.

Solução: Pela técnica de completar quadrados, temos que:

$\int \frac{x-1}{x^2-x-1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x-1}$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x^2-x-1| + c_1 - \tfrac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{x^2-x-1}}_{(I)}. \qquad (1)$$

Resolvendo a equação (I):
Completando quadrados, temos que:
$\int \frac{dx}{x^2-x-1} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}$
Definindo $t = x - \frac{1}{2} \Rightarrow dt = dx$.
Por substituição simples e por substituição trigonométrica, temos que:
$\int \frac{dx}{x^2-x-1} = \int \frac{dt}{t^2-\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{u-\frac{\sqrt{5}}{2}}{u+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + c_2$
Retornando em (1) segue que:
$\int \frac{x-1}{x^2-x-1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-x-1| - \frac{\sqrt{5}}{10}\ln\frac{\left|2x-1-\sqrt{5}\right|}{\left|2x-1+\sqrt{5}\right|} + c.$

Exemplo 19: Calcule a integral indefinida $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.
Solução: Pela técnica de completar quadrados, temos que:
$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{3}{2}x-x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}}$.
Definindo $u = x - \frac{3}{4} \Rightarrow du = dx$. Então,
$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{du}{\sqrt{\frac{25}{16}-u^2}}$
Por substituição trigonométrica, temos que:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin \frac{4}{5}u + c \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\left(\frac{4x-3}{5}\right) + c.\end{aligned}$$

Exemplo 20: Calcule a integral indefinida $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.
Solução: Reescrevendo o integrando, temos que:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\end{aligned}$$

Definindo$\begin{cases} u = x^2+2x+2 \Rightarrow du = (2x+2)\,dx \\ t = x+1 \;\Rightarrow\; dt = dx \end{cases}$.
Por substituição simples e por substituição trigonométrica, temos que:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} + 2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \\ &= \sqrt{u} + 2\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + c \\ &= \sqrt{x^2+2x+2} + 2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + c.\end{aligned}$$

Exemplo 21: Calcule a integral indefinida $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.
Solução: Definindo $u = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x+1 = \frac{1}{u} \Rightarrow dx = -\frac{du}{u^2}$, temos que:
$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\left(\frac{1}{u}-1\right)^2+1}} = -\int \frac{du}{u\sqrt{\frac{(1-u)^2+u^2}{u^2}}} = -\int \frac{du}{\frac{u}{|u|}\sqrt{2u^2-2u+1}}$

- Se $u > 0$, temos que:

$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{du}{\sqrt{2u^2-2u+1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-u+\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{du}{\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}$
Definindo $t = u - \frac{1}{2} \Rightarrow dt = du$. Assim,
$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}}$
Por substituição trigonométrica, temos que:
$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|2t+\sqrt{4t^2+1}\right| + c$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|2u-1+\sqrt{4\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+1}\right| + c$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|-\frac{x-1}{x+1}+\sqrt{2\frac{x^2+1}{(x+1)^2}}\right| + c$

Como $u > 0$ então $x > 1 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = x+1$.
Logo,
$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right| + c.$

- Se $u < 0$, por desenvolvimento análogo ao anterior, obtemos que:

$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{du}{\sqrt{2u^2-2u+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{x-1-2\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right| + k.$

Exemplo 22: Calcule a integral indefinida $\int \sqrt{1-2x-x^2}dx$.
Solução: Completando quadrados, temos que:
$\int \sqrt{1-2x-x^2}dx = \int \sqrt{2-(x+1)^2}dx$
Fazendo $u = x+1 \Rightarrow du = dx$, temos que:
$\int \sqrt{1-2x-x^2}dx = \int \sqrt{2-u^2}du$
Por substituição trigonométrica, temos que:
$\int \sqrt{1-2x-x^2}dx = \frac{u\sqrt{2-u^2}}{2} + \arcsin\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + c$

$= \frac{x+1\sqrt{1-2x-x^2}}{2} + \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c.$

6.8 Integração de Funções Racionais Através da Decomposição em Frações Parciais

Seja f uma função racional da forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_mx^m}{q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_nx^n}.$$

Se o grau do polinômio do numerador é menor que o grau do polinômio do denominador a fração é dita *própria*, do contrário é dita *imprópria*.

No caso das impróprias, ao dividir o numerador pelo denominador, segundo divisão de polinômios,

$$\begin{array}{l|l} p(x) & q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

podemos reescrever a função $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Q(x)\, q(x) + R(x)}{q(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{q(x)},$$

onde a parcela $\frac{R(x)}{q(x)}$ é uma fração própria.

Como a primeira parcela, $Q(x)$, é um polinômio, integrá-lo é uma tarefa simples. Vejamos o caso da segunda parcela, $\frac{R(x)}{q(x)}$, que é uma fração própria, conforme o próximo método a ser apresentado.

6.8.1 Decomposição em Frações Parciais

Neste método é útil escrever a fração própria $F(x) = \frac{R(x)}{q(x)}$ como uma soma de *frações parciais*. Os denominadores destas frações são obtidas fatorando-se o polinômio $q(x)$ em um produto de fatores lineares e ou quadráticos. Às vezes isto pode não ser fácil, porém há um teorema que nos diz o seguinte:

"Qualquer polinômio com coeficiente reais pode ser expresso como um produto de fatores lineares e ou quadráticos, de tal forma que cada um dos fatores tenha coeficientes reais."

Depois de feita a fatoração, o método para determinar as frações parciais depende da natureza desses fatores.

Vamos considerar vários casos, para tanto, tomemos o polinômio $q(x)$ de grau n cujo coeficiente de termo x^n é 1, caso contrário, seremos obrigados a dividir tanto o numerador quanto o denominador por este coeficiente.

1^o Caso: Se $x = -\frac{b}{a}$ é raiz de multiplicidade r do polinônio q.

Se o polinômio $q(x)$ apresenta o fator $(ax+b)^r$, com $a \neq 0$ e $r \in \mathbb{N}$, ou seja, se $x = -\frac{b}{a}$ é raiz de q com multiplicidade r, então para cada fator $(ax+b)^r$ erão somadas r parcelas da forma

$$F(x) = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(ax+b)^r},$$

onde A_i, com $i = 1, 2, \ldots, r$ são constantes a serem determinadas.

2^o Caso: Se $q(x)$ apresenta fatores quadráticos irredutíveis.

Por fator quadrático irredutível deve-se entender que o fator $ax^2 + bx + c$ possui o discriminante negativo, isto é, $\Delta < 0$.

Se $q(x)$ apresenta o fator $(ax^2 + bx + c)^r$, com a e c constantes reais não nulas, $r \in \mathbb{N}$ e $\Delta < 0$, então para cada fator quadrático irredutível $(ax^2 + bx + c)^r$ serão somadas r parcelas da forma

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r},$$

onde A_i e B_i, com $i=1,2,\ldots,r$ são constantes a serem determinadas.

Observação: Se $q(x)$ apresenta fatores lineares e quadráticos irredutíveis deve-se utilizar simultaneamente os dois casos.

Exemplo 23: Escreva, SEM determinar os coeficientes, qual é a decomposição em frações parciais de cada uma das funções abaixo.

1. (a) $f(x)=\dfrac{x}{(x^3-1)(x^2-1)^2}$

   Solução:

   Reescrevendo a função f, temos que:

   $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x^2+x+1)\left[(x-1)(x+1)\right]^2}=\dfrac{x}{(x+1)^2(x-1)^3(x^2+x+1)}$

   $\Rightarrow\boxed{f(x)=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{x-1}+\dfrac{D}{(x-1)^2}+\dfrac{E}{(x-1)^3}+\dfrac{Fx+G}{x^2+x+1}}$

   (b) $g(x)=\dfrac{2x^5+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}$

   Solução:

   Como o grau do numerador é igual ao grau do denominador, primeiro devemos realizar a divisão dos ploninômios para reescrever a função g :

   $g(x)=\dfrac{2x^5+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}=\underbrace{\dfrac{2x^4-4x^3+4x^2-2x+3}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}}_{f(x)}+2$

   Usando a decomposição em frações parciais para reescrever a função f, temos que:

   $f(x)=\dfrac{2x^4-4x^3+4x^2-2x+3}{(x-1)(x^2+1)^2}$

   $\Rightarrow\boxed{f(x)=\dfrac{A}{(x-1)}+\dfrac{Bx+C}{(x^2+1)}+\dfrac{Dx+D}{(x^2+1)^2}}$

Exemplo 24: Calcule as integrais indefinidas abaixo.

1. $\int\frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx.$

   Solução: Note que:

   $\int\frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx=\int\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}dx$

   Decompondo em frações parciais, temos que

   $\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)},$

   que é uma identidade para todo x real exceto 0, -1 e 2.

$\Rightarrow x-1=(A+B+C)\,x^2+(-A+B-2C)\,x-2A.$

Por comparação, tem-se que:

$$\left\{\begin{array}{r} A+B+C=0\\ -A+B-2C=1\\ -2A=-1\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} A=\frac{1}{2}\\ B=\frac{1}{6}\\ C=-\frac{2}{3}\end{array}\right. .$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \tfrac{x-1}{x(x-2)(x+1)}dx &= \tfrac{1}{2}\int \tfrac{dx}{x}+\tfrac{1}{6}\int\tfrac{dx}{x-2}-\tfrac{2}{3}\int\tfrac{dx}{x+1}\\ &= \tfrac{1}{2}\ln|x|-\tfrac{2}{3}\ln|x+1|+\tfrac{1}{6}\ln|x-2|+c\\ &= \tfrac{1}{6}\big(3\ln|x|-\tfrac{4}{3}\ln|x+1|+\ln|x-2|\big)+c\\ &= \tfrac{1}{6}\ln\left|\tfrac{x^3(x-2)}{x+1}\right|+c.\end{aligned}$$

2. $\int \frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3}dx.$

<u>**Solução:**</u> Decompondo em frações parciais, temos que:

$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{(x-2)^3}+\frac{D}{(x-2)^2}+\frac{E}{x-2},$

que é uma identidade para todo x real exceto 0 e 2. Assim,

$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3}=\frac{A(x-2)^3+Bx(x-2)^3+Cx^2+Dx^2(x-2)+Ex^2(x-2)^2}{x^2(x-2)^3}$

$\Rightarrow x^3-1=(B+E)\,x^4+(A-6B+D-4E)\,x^3+(-6A+12B+C-2D+4E)\,x^2+(12A-8B)\,x-8A.$

Por comparação, tem-se que:

$$\left\{\begin{array}{r} B+E=0\\ A-6B+D-4E=1\\ -6A+12B+C-2D+4E=0\\ 12A-8B=0\\ -8A=-1\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} A=\frac{1}{8}\\ B=\frac{3}{16}\\ C=-\frac{7}{4}\\ D=\frac{5}{4}\\ E=-\frac{3}{16}\end{array}\right. .$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \tfrac{x^3-1}{x^2(x-2)^3}dx &= \tfrac{1}{8}\int\tfrac{dx}{x^2}+\tfrac{3}{16}\int\tfrac{dx}{x}-\tfrac{7}{4}\int\tfrac{dx}{(x-2)^3}+\tfrac{5}{4}\int\tfrac{dx}{(x-2)^2}-\tfrac{3}{16}\int\tfrac{dx}{x-2}\\ &= \tfrac{3}{16}\ln|x|-\tfrac{3}{16}\ln|x-2|-\tfrac{5}{4(x-2)}+\tfrac{7}{8(x-2)^2}-\tfrac{1}{8x}+c\\ &= \tfrac{3}{16}\ln\left|\tfrac{x}{x-2}\right|-\tfrac{11x^2-31x+4}{8x(x-2)^2}+c.\end{aligned}$$

3. $\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)}dx;$

<u>**Solução:**</u> Decompondo em frações parciais, temos que:

$\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{C}{x-1}=\frac{(Ax+B)(x-1)+C\left(x^2+2x+2\right)}{(x-1)(x^2+2x+2)}$

$\Rightarrow x^2-2x+3=(A+C)\,x^2+(B-A+2C)\,x+(2C-B).$

Por comparação, tem-se que:

$$\left\{\begin{array}{r} A+C=1\\ B-A+2C=-2\\ 2C-B=0\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} A=\frac{9}{5}\\ B=\frac{7}{5}\\ C=-\frac{4}{5}\end{array}\right. .$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)}dx &= \int \frac{\frac{9}{5}x+\frac{7}{5}}{x^2+2x+2}dx - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-1} \\
&= \int \frac{\frac{9}{10}(2x+2)-\frac{2}{5}}{x^2+2x+2}dx - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-1} \\
&= \frac{9}{10}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x^2+2x+2} - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-1} \\
&= \frac{9}{10}\ln|x^2+2x+2| - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} - \frac{4}{5}\ln|x-1| + c \\
&= \frac{9}{10}\ln|x^2+2x+2| - \frac{2}{5}\text{arctg}(x+1) - \frac{4}{5}\ln|x-1| + c \\
&= \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\left(x^2+2x+2\right)^9}{(x-1)^4}\right| - \frac{2}{5}\text{arctg}(x+1) + c.
\end{aligned}$$

4. $\int \frac{dx}{e^{-x}(e^{2x}+1)(e^x-1)}$.

Solução: Reescrevendo o integrando, temos que:

$$\int \frac{dx}{e^{-x}(e^{2x}+1)(e^x-1)} = \int \frac{e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}dx$$

Definindo $u = e^x$, temos que $x = \ln u$ e $dx = \frac{1}{u}du$. Assim,

$$\int \frac{e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}dx = \int \frac{u}{(u^2+1)(u-1)}.\frac{1}{u}du = \int \frac{du}{(u^2+1)(u-1)}$$

Decompondo em frações parciais, temos que:

$$\frac{1}{(u^2+1)(u-1)} = \frac{Au+B}{u^2+1} + \frac{C}{u-1} = \frac{(Au+B)(u-1)+C\left(u^2+1\right)}{(u^2+1)(u-1)}$$

$$\Rightarrow 1 = C - B + Au^2 + Cu^2 - Au + Bu$$

Por comparação, temos que:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B=0 \\ -B+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=B \\ B+C=0 \\ -B+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{(u^2+1)(u-1)} &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u-1)} - \frac{1}{2}\int \frac{u}{u^2+1}du - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{4}\ln|u^2+1| - \frac{1}{2}\arctan u + c \\
&= \frac{1}{2}\ln|e^x-1| - \frac{1}{4}\ln|e^{2x}+1| - \frac{1}{2}\arctan\left(e^x\right) + c.
\end{aligned}$$

5. $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+4x+5)^2}dx$.

Solução: Decompondo em frações parciais, temos que:

Decompondo em frações parciais, temos que

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+4x+5)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+5} = \frac{Ax+B+(Cx+D)\left(x^2+4x+5\right)}{(x^2+4x+5)^2},$$

$$\Rightarrow x^2+x+1 = Cx^3 + (4C+D)\,x^2 + (A+5C+4D)\,x + (B+5D).$$

Por comparação, tem-se que:

$$\begin{cases} C = 0 \\ 4C + D = 1 \\ A + 5C + 4D = 1 \\ B + 5D = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -3 \\ B = -4 \\ C = 0 \\ D = 1 \end{cases}.$$

Assim,

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+4x+5)^2}dx = \underbrace{\int \frac{-3x+4}{(x^2+4x+5)^2}dx}_{(II)} + \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+4x+5}}_{(I)} \qquad (\#)$$

Resolvendo a integral (I):

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \arctan{(x+2)} + c_1. \qquad (1)$$

Resolvendo a integral (I):

$$\begin{aligned} \int \frac{-3x+4}{(x^2+4x+5)^2}dx &= -3\int \frac{x}{(x^2+4x+5)^2}dx + 4\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} \\ &= -\frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}dx + 2\int \frac{dx}{\left((x+2)^2+1\right)^2} \end{aligned}$$

Definindo $\begin{cases} y = x^2+4x+5 \quad \Rightarrow \quad du = (2x+4)\,dx \\ z = x+2 \ \Rightarrow \ dz = dx \end{cases}$.

Por substituição simples, temos que:

$$\begin{aligned} \int \frac{-3x+4}{(x^2+4x+5)^2}dx &= -\frac{3}{2}\int \frac{dy}{y^2} + 2\int \frac{dz}{(z^2+1)^2} \\ &= -\frac{3}{2}\int y^{-2}dy + 2\int \frac{\mathbf{z}^2+1-\mathbf{z}^2}{(z^2+1)^2}dz \\ &= -\frac{3}{2}\int y^{-2}dy + 2\int \frac{dz}{z^2+1} - 2\int \frac{z^2}{(z^2+1)^2}dz \\ &= \frac{3}{2y} + 2\text{arctg}(z) + c_2 - 2\underbrace{\int \frac{z^2}{(z^2+1)^2}dz}_{(III)} \qquad (2) \end{aligned}$$

Resolvendo, por partes, a integral (III):

Definindo $\begin{cases} u = z \quad \Rightarrow \quad du = dz \\ dv = \frac{z}{(z^2+1)^2}dz \Rightarrow \ v = -\frac{1}{2(z^2+1)} \end{cases}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{z^2}{(z^2+1)^2}dz &= -\frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+1} \\ &= -\frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan z + c_3 \qquad (3) \end{aligned}$$

Substituindo (3) em (2), temos que:

$$\int \frac{-3x+4}{(x^2+4x+5)^2}dx = \frac{3}{2y} + \text{arctg}(z) + \frac{z}{z^2+1} + c_4. \qquad (4)$$

Substituindo (1) e (4) em (#), temos que:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+x+1}{(x^2+4x+5)^2}dx &= \frac{3}{2y} + 2.\text{arctg}(z) + \frac{z}{z^2+1} + k \\ &= \frac{3}{2(x^2+4x+5\ )} + 2.\text{arctg}(z) + \frac{x+2}{(x+2)^2+1} + k \\ &= \frac{2x+7}{2(x^2+4x+5)} + 2.\text{arctg}(x+2) + \frac{x+2}{(x+2)^2+1} + k. \end{aligned}$$

6.9 Exercícios

1. Calcule as integrais indefinidas abaixo usando integração imediata ou o método da substituição.

   (a) $\displaystyle\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^3}$

   (c) $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}dx$

   (d) $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+3}dx$

   (e) $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$

   (f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[x]{\pi}}{x^2}dx$

   (g) $\displaystyle\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$

   (h) $\displaystyle\int \frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{2+\cos\left(\frac{x}{3}\right)}dx$

   (i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^7}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx$

   (j) $\displaystyle\int \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}\right)dx$

   (k) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{x^2}dx$

   (l) $\displaystyle\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx$

   (m) $\displaystyle\int \frac{\sec\sqrt{x}\ \mathrm{tg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$

   (n) $\displaystyle\int \frac{e^{4x}}{(1+3e^{4x})^2}dx$

   (o) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$

   (p) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x+4x\ln^2 x}dx$

   (q) $\displaystyle\int \sinh(3x)\,dx$

   (r) $\displaystyle\int \tanh(\ln(\cos x))\tan x dx$

2. Use o método de integração por partes para calcular as integrais indefinidas abaixo.

   (a) $\displaystyle\int x^2\cos x dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{e^{2x}}dx$

   (c) $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$, onde a e $b\in\mathbb{R}^*$

   (d) $\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

   (e) $\displaystyle\int x\sin(3x-2)\,dx$

   (f) $\displaystyle\int x\sec^2 x dx$

   (g) $\displaystyle\int x^n\ln\left(2x^3\right)dx$, $n\in\mathbb{N}$

   (h) $\displaystyle\int \arcsin(2x)\,dx$

   (i) $\displaystyle\int \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

   (j) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx$

3. Resolva as integrais de funções trigonométricas abaixo.

(a) $\int \sin^4(ax)\,dx, \quad a \in \mathbb{R}^*$

(b) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$

(c) $\int \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$

(d) $\int \left[\sin^2(3x) + \cos(3x)\right]^2 dx$

(e) $\int (2 - \sin(x))^2\,dx$

(f) $\int \cot^3(2x)\csc(2x)\,dx$

(g) $\int \tan^3(x)\sec^4(x)\,dx$

(h) $\int \cot^3(2x)\,dx$

(i) $\int \tan^2 x \sec^3 x dx$

4. Calcule as integrais indefinidas a seguir pelo método da substituição trigonométrica.

(a) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$

(b) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^3}dx$

(c) $\int \sqrt{x^2-a^2}dx, \quad a \in \mathbb{R}^*$

(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$

(e) $\int \frac{dx}{x\left(4+\ln^2 x\right)}$

(f) $\int \frac{x+4}{4x^2+5}dx$

(g) $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$

(h) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}$

(i) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}$

5. Resolva as integrais indefinidas elementares que contém um trinômio quadrado abaixo.

(a) $\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx$

(b) $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}dx$

(c) $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$

(d) $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx$

(e) $\int \frac{2x-1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}dx$

(f) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x+2}}$

(g) $\int \frac{2e^x+1}{e^x+2-\frac{5}{e^x}}dx$

(h) $\int \frac{x}{\sqrt{6x-x^2}}dx$

(i) $\int \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x - 6\sin x + 12}dx$

6. Use o método da decomposição em frações parciais para resolver as integrais indefinidas abaixo.

(a) $\displaystyle\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+3x^2}$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^2-x-4}{(x^2+4)(2x-1)}dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{3x^2-x+4}{x(x^3+2x^2+2x)}dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{x^5+9x^3+1}{x^3+9x}dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{3e^{-2x}+2e^{-x}-2}{e^{-3x}-1}dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{2x^3-x+1}{x(x^2+1)^2}dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{x^3+3x-1}{(x-1)(x^4+x^2)}dx$

7. Use alguma das técnicas de integração estudadas para provar que:

(a) $\displaystyle\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)+k$

(b) $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+k$

8. Resolva as integrais indefinidas abaixo pelo método que julgar conveniente.

(a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\left(1+\ln^2 x\right)}dx$

(b) $\displaystyle\int \left(\frac{\sin x}{\cos^3 x}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\left(\tan^2 x+9\right)^{\frac{3}{2}}}dx$

(f) $\displaystyle\int \cos x\sin x\sqrt{1-\sin^4 x}dx$

(g) $\displaystyle\int \sqrt{1+e^x}dx$

(h) $\displaystyle\int \left(\frac{\ln^2 x}{x}+\sqrt{x}\ln x\right)dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

(k) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

(l) $\displaystyle\int x\left(\ln x\right)^2 dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{\ln\left(\ln x\right)}{x\ln x}dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^{-x}}$

(o) $\displaystyle\int \frac{x^2\ln^3\left(1+x^3\right)}{1+x^3}dx$

(p) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

(q) $\displaystyle\int \sin^4\left(e^{2x}\right)\cos\left(e^{2x}\right)e^{2x}dx$

(r) $\displaystyle\int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x}}dx$

(s) $\displaystyle\int \left(\ln\left(\cos x\right)\right)^2\tan x dx$

(t) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\sqrt{1+2x}}$

(u) $\displaystyle\int \ln\left(x^2+1\right)dx$

(v) $\displaystyle\int \frac{e^{\sec^2 x}\tan x}{\cos^2 x}dx$

(w) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx$

(x) $\displaystyle\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(y) $\displaystyle\int \frac{\ln\left[\ln\left(\ln x\right)\right]}{x\ln x}dx$

(z) $\displaystyle\int \frac{x\tan^3\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}dx$

9. Resolva as integrais indefinidas abaixo pelo método que julgar conveniente.

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt[4]{1+x}}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{\ln\left(x+3\right)}{\sqrt{x+3}}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\left(\sqrt{\cot\left(4x\right)}-\sqrt[3]{\cot\left(4x\right)}\right)}{\sqrt{\cot\left(4x\right)}}\csc^2\left(4x\right)dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\csc^8\left(\frac{2}{x}\right)\sec^3\left(\frac{2}{x}\right)}$

(e) $\displaystyle\int \frac{\tan\left(x\right)\sec x}{\cos^2 x+9}dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln^2 x-2\ln x+10}}{x}dx$

(g) $\displaystyle\int \sin\left(4x\right)e^{\cos^2 x}dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{\left(3\cos^2 x-2\right)\sin x}{\cos^3 x-\cos^2 x+\cos x-1}dx$

(i) $\displaystyle\int e^{-2x}\cos^2\left(3e^{-x}\right)dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{\pi^{5x}+9\pi^{3x}+1}{\pi^{3x}+9\pi^x}dx$

(k) $\displaystyle\int 3^x\left(\sin\left(3^x\right)+\cos\left(3^x\right)\right)^2 dx$

(l) $\displaystyle\int e^x\sqrt{1+e^x}\ln\left(1+e^x\right)dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}-4}{x\left(2\sqrt[3]{x^2}+1\right)}dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}e^{-1+\sec^2 x}dx$

Respostas: *Ao resolver essas questões você poderá obter resultados equivalentes.*

1. .
   (a) $\frac{1}{2x^2}\left(6x^2\ln x - 6x + 2x^3 - 1\right) + k$
   (b) $-\frac{1}{2\left(x+2\right)^2} + k$
   (c) $\frac{2}{15}\left(3x+2\right)\left(x-1\right)^{\frac{3}{2}} + k$
   (d) $\frac{1}{5}\left(x^2-2\right)\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}} + k$
   (e) $\frac{\ln^4 x}{4} + k$
   (f) $-\frac{\pi^{x^{-1}}}{\ln\pi} + k$
   (g) $\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x + k$
   (h) $-3\ln\left(\cos\left(\frac{x}{3}\right) + 2\right) + k$
   (i) $\frac{2x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x^7}}{51} - \frac{2x^{\frac{13}{12}}}{13} + k$
   (j) $\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\left(2e^{2\sqrt{x}} - 2\right) + k$
   (k) $-\frac{1}{x}\left(xe^{\frac{1}{x}} + 1\right) + k$
   (l) $\arctan^2(\sqrt{x}) + k$
   (m) $\sec(\sqrt{x}) + k$
   (n) $-\frac{1}{36e^{4x} + 12} + k$
   (o) $\frac{1-\cos x}{\sin x} + k$
   (p) $\frac{1}{8}\ln\left(\ln^2 x + \frac{1}{4}\right) + k$
   (q) $\frac{1}{3}\cosh\left(3x\right) + k$
   (r) $-\ln\left|\cosh\left(\ln\left(\cos x\right)\right)\right| + k$

2. .
   (a) $x^2\sin x - 2\sin x + 2x\cos x + k$
   (b) $-\frac{1}{8}e^{-2x}\left(4x^3 + 6x^2 + 6x + 3\right) + k$
   (c) $\frac{a\left(\cos bx\right)e^{ax} + be^{ax}\sin bx}{a^2+b^2} + k$
   (d) $x\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1} + k$
   (e) $\frac{1}{9}\sin\left(3x-2\right) - \frac{1}{3}x\cos\left(3x-2\right) + k$
   (f) $x\tan(x) + \ln|\cos(x)| + k$
   (g) $\frac{x^{n+1}}{\left(n+1\right)^2}\left(\ln 2 + 3\ln x + n\ln 2 + 3n\ln x - 3\right) + k$
   (h) $\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + x\arcsin(2x) + k$
   (i) $\sqrt{1-x^2} + x\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + k$
   (j) $\frac{1}{2}x\left(\cos\left(\ln x\right) + \sin\left(\ln x\right)\right) + k$

3. .
   (a) $\frac{\sin(4ax) - 8\sin(2ax) + 12ax}{32a} + k$

(b) $\dfrac{\sin^7 x}{7} - \dfrac{2\sin^5 x}{5} + \dfrac{\sin^3 x}{3} + k$

(c) $\dfrac{x}{8} - \dfrac{\sin(2x)}{16} + k$

(d) $\dfrac{7x}{8} + \dfrac{2\sin^3(3x)}{9} + \dfrac{\sin(6x)}{48} - \dfrac{\sin^3(3x)\cos(3x)}{12} + k$

(e) $\dfrac{9x}{2} + 4\cos x - \dfrac{\sin(2x)}{4} + k$

(f) $\dfrac{\csc(2x)}{2} - \dfrac{\csc^3(2x)}{6} + k$

(g) $\dfrac{\tan^6 x}{6} + \dfrac{\tan^4 x}{4} + k$

(h) $-\dfrac{\cot^2(2x)}{4} - \dfrac{\ln(\sin(2x))}{2} + k$

(i) $\dfrac{2\tan x\sec^3 x - \tan x\sec x - \ln(\tan x + \sec x)}{8} + k$

4. .

(a) $\dfrac{\arctan(x^2)}{2} + k$

(b) $-\dfrac{1}{6}\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{9-x^2}+3}{x}\right) + \dfrac{3\sqrt{9-x^2}}{x^2}\right] + k$

(c) $\dfrac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)a^2}{2} + k$

(d) $\ln\left(x+\sqrt{x^2-25}\right) + k$

(e) $\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{\ln x}{2}\right) + k$

(f) $\dfrac{1}{8}\ln\left(x^2+\dfrac{5}{4}\right) + \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\arctan\left(\dfrac{2\sqrt{5}x}{5}\right) + k$

(g) $\dfrac{1}{ab}\arctan\left(\dfrac{a\tan x}{b}\right) + k$

(h) $\dfrac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} + k$

(i) $\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{8x^2} - \dfrac{1}{16}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{x^2-4}}\right) + k$

5. .

(a) $\dfrac{\ln\left(x^2-2x-5\right)}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{3}\ln\left(\dfrac{\left(\sqrt{6}-x+1\right)^2}{x^2-2x-5}\right) + k$

(b) $x - \dfrac{5\ln\left(x^2+3x+4\right)}{2} + \dfrac{9\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\dfrac{2x+3}{\sqrt{7}}\right) + k$

(c) $5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln\left(\dfrac{x+2+\sqrt{x^2+4x+10}}{\sqrt{6}}\right)+k$

(d) $\dfrac{-x-2}{2(x^2+2x+3)}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+k$

(e) $\dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+2x}}+k$

(f) $-\dfrac{4\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{2}x\ln(x+4+\sqrt{8(x^2+x+2)})+\sqrt{2}\ln x}{8x}+k$

(g) $\ln\left(e^{2x}+2e^x-5\right)+\dfrac{\sqrt{6}}{12}\ln\left(\dfrac{e^x+\sqrt{6}+1}{e^x-\sqrt{6}+1}\right)+k$

(h) $-3\arcsin\left(1-\dfrac{1}{3}x\right)-\sqrt{-x\left(x-6\right)}+k$

(i) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}\sin x}{3}-\sqrt{3}\right)+k$

6. .

(a) $2\ln\left(x-2\right)+3\ln\left(x+2\right)+k$

(b) $x+\dfrac{4\ln\left(x-2\right)}{5}-\dfrac{9\ln\left(x+3\right)}{5}+k$

(c) $\ln x\left(x-2\right)-2\ln\left(x+1\right)+k$

(d) $-\dfrac{\left(x\ln x-x\ln\left(x+3\right)+3\right)}{9x}+k$

(e) $\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)-\dfrac{1}{2}\ln\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+k$

(f) $\dfrac{-\ln\left(x^2+1\right)-2\arctan x+2\ln\left(x-1\right)+2x\arctan x-2x\ln\left(x-1\right)+x\ln\left(x^2+1\right)+2}{2\left(1-x\right)}+$
k

(g) $-\dfrac{\left[7\pi x-14x\arctan\left(x+1\right)-5x\ln\left(x^2+2x+2\right)+10x\ln x+8\right]}{4x}+k$

(h) $\dfrac{\ln x}{9}-\dfrac{\ln\left(x^2+9\right)}{18}+\dfrac{x^3}{3}+k$

(i) $\dfrac{3\ln\left(e^{2x}+e^x+1\right)}{2}-\ln\left(e^x-1\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\dfrac{2\sqrt{3}e^x}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+k$

(j) $\dfrac{4\ln x-6x-2\ln\left(x^2+1\right)+2\arctan x-2x^2\ln\left(x^2+1\right)-\pi x^2+4x^2\ln x+2x^2\arctan x}{4\left(x^2+1\right)}+$
k

(k) $\dfrac{6x\ln\left(x-1\right)-6x\arctan x+x\ln\left(x^2+1\right)-8x\ln x-4}{4x}+k$

7.

8. .

(a) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\ln^2 x+1\right)+k$

(b) $\dfrac{x\sqrt{x^2+1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\sec^2(x)}{2}+k$

(c) $\ln\left(e^{2x}+1\right)-x+k$

(d) $\dfrac{6(2-\sqrt[3]{x})^{\frac{5}{2}}}{5}-4(2-\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}}+k$

(e) $\dfrac{\tan(x)}{9\sqrt{\tan^2(x)+9}}+k$

(f) $\dfrac{\arcsin(\sin^2 x)+\sin^2 x\sqrt{1-\sin^4 x}}{4}+k$

(g) $2\sqrt{e^x+1}+\ln\left(\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right)+k$

(h) $\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}\ln x}{3}+\dfrac{\ln^3 x}{3}-\dfrac{4x^{\frac{3}{2}}}{9}+k$

(i) $2\sqrt{x}-2\arctan(\sqrt{x})+k$

(j) $2\sqrt{x}+2\ln|\sqrt{x}-1|+k$

(k) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right)+k$

(l) $\dfrac{x^2\left(2\ln^2 x-2\ln x+1\right)}{4}+k$

(m) $\dfrac{\ln^2(\ln x)}{2}+k$

(n) $\ln\left(e^x+1\right)+k$

(o) $\dfrac{\ln^4\left(x^3+1\right)}{12}+k$

(p) $2\sqrt{x}\left(\ln x-2\right)+k$

(q) $\dfrac{\sin^5\left(e^{2x}\right)}{10}+k$

(r) $\dfrac{3(\sqrt{x}+1)^{\frac{4}{3}}}{2}+k$

(s) $-\dfrac{\ln^3(\cos(x))}{3}+k$

(t) $\sqrt{2x+1}-3\ln(3+\sqrt{2x+1})+k$

(u) $2\arctan x-2x+x\ln\left(x^2+1\right)+k$

(v) $\dfrac{e^{\frac{1}{\cos^2 x}}}{2}+k$

(w) $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+1})+k$

(x) $x - \arcsin(x)\sqrt{1-x^2} + k$

(y) $\ln(\ln x)\left[\ln(\ln(\ln x)) - 1\right] + k$

(z) $\dfrac{\tan^2(\sqrt{x^2-1})}{2} + \ln(\cos(\sqrt{x^2-1})) + k$

9. .

(a) $\dfrac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + \dfrac{4(x+1)^{\frac{5}{4}}}{5} + \dfrac{4(x+1)^{\frac{3}{4}}}{3} + x + k$

(b) $2\left(\ln(x+3) - 2\right)\sqrt{x+3} + k$

(c) $\dfrac{6\cot^{\frac{5}{6}}(4x) - 5\cot(4x)}{20} + k$

(d) $\dfrac{\sin^{11}\left(\frac{2}{x}\right)}{22} - \dfrac{\sin^{9}\left(\frac{2}{x}\right)}{18} + k$

(e) $\dfrac{\sec x}{9} - \dfrac{\arctan(3\sec x)}{27} + k$

(f) $\dfrac{(\ln x - 1)\sqrt{\ln^2 x - 2\ln x + 10} + 9\ln(\ln x - 1 + \sqrt{\ln^2 x - 2\ln x + 10})}{2} + k$

(g) $-e^{\cos^2 x}\left[2\cos(2x) - 4\right] + k$ ou $e^{\cos^2 x}\left[-4\cos^2 x + 6\right] + k$

(h) $-\dfrac{5\ln(\cos^2 x + 1)}{4} - \dfrac{5\arctan(\cos x)}{2} - \dfrac{\ln|\cos x - 1|}{2} + k$

(i) $-\dfrac{e^{-2x}\left[\cos(6e^{-x})\,e^{2x} + 6\sin(6e^{-x})\,e^{x} + 18\right]}{72} + k$

(j) $\dfrac{27\pi^{2x} - 6\pi^{-x} + 2\arctan(3\pi^{-x})}{54\ln\pi} + k$

(k) $\dfrac{3^x + \sin^2(3^x)}{\ln 3} + k$

(l) $\dfrac{2\left(e^x+1\right)^{\frac{3}{2}}\left[3\ln(e^x+1) - 2\right]}{9} + k$

(m) $6\ln|1 + 2\sqrt[3]{x^2}| - 4\ln|x| + \dfrac{3\arctan(\sqrt{2}\sqrt[3]{x})}{\sqrt{2}} + k$

(n) $\dfrac{e^{\tan^2 x}(\tan^2 x - 1)}{2} + k$

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, H. *Cálculo, um novo horizonte.* Porto Alegre: Bookman, vol. 1, 6^a ed.., 2000.

[2] ÁVILA, Geraldo S. S. *Análise matemática para licenciatura.* 3.ed. rev. e ampl. São Paulo: E. Blücher, 2006. 246 p.

[3] FLEMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A.* São Paulo: Pearson Prentice Hall, 6^a ed. rev. e ampl., 2006.

[4] LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica.* São Paulo. Editora HARBRA ltda, 3^a ed., 1994.

[5] NOLLI, Dario. *Apostila utilizada nos semestres anteriores a 2007/2.* (base desta).

[6] PISKOUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral.* Moscu, Editorial Mir, 4^a ed., 1977.

[7] SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com Geometria Analítica.* São Paulo. Makron Books Ltda, 2^a ed., 1994.

[8] THOMAS, G. E. *Cálculo.* São Paulo. Pearson Addison Wesley, São Paulo, vol. 1, 10^a ed, 2002.

[9] KÜHLKAMP, N. *Cálculo 1.* Florianópolis. Editora UFSC, 3^a ed. rev. e ampl. 2006.

[10] SAMPAIO, J. C. V. *Cálculo 1: Integração por Partes.* UFSCAR. [Acesso: 06/02/2011]. http://www.dm.ufscar.br/~sampaio/calculo1_aula16.pdf