Lista 05 - MDI

(I)

01. comutatividade: $A \cup B = B \cup A$

1º $A \cup B \subseteq B \cup A$

pela definição de contingência deve-se provar

$x \in (A \cup B) \to x \in (B \cup A)$

pela defição de união

$x \in A \vee x \in B$

pela comutatividade

$x \in B \vee x \in A$

pela definição de união

$x \in (B \cup A)$

logo está provado que $x \in (A \cup B) \to x \in (B \cup A)$

2º $B \cup A \subseteq A \cup B$

pela definição de contigência deve-se provar

$x \in (B \cup A) \to x \in (A \cup B)$

pela definição de união

$x \in B \vee x \in A$

pela comutatividade

$x \in A \vee x \in B$

pela definição de união

$x \in (A \cup B)$

logo está provado que $x \in (B \cup A) \to x \in (A \cup B)$

02. idempotência: $A \cup A = A$

1º $A \cup A \subseteq A$

pela definição de contingência deve-se provar

$x \in (A \cup A) \rightarrow x \in A$

pela definição de união

$x \in A \vee x \in A$

pela propriedade de idempotência

$x \in A$

pela definição de conjunto

A

logo está provado que $x \in (A \cup A) \rightarrow x \in A$

2º $A \subseteq A \cup A$

pela definição de contingência deve-se provar

$x \in A \rightarrow x \in (A \cup A)$

pela propriedade de adição sobre $x \in A$:

$x \in A \vee x \in A$

pela definição de união

$x \in (A \cup A)$

logo está provado que $x \in A \rightarrow x \in (A \cup A)$

03. elemento neutro: $A \cup \emptyset = A$

1º $A \cup \emptyset \subseteq A$

pela definição de contingência deve-se provar

$x \in (A \cup B) \rightarrow x \in A$

pela definição de união

$x \in A \vee x \in B$

dado que $x \in B$ é sempre falso tem-se

$x \in A \vee \square$

pela propriedade de identidade

$x \in A$

logo está provado que $x \in (A \cup B) \rightarrow x \in A$

2º $A \subseteq A \cup \emptyset$

pela definição de contingência deve-se provar

$x \in A \rightarrow x \in (A \cup \emptyset)$

pela propriedade da adição, dado que $x \in \emptyset$ é falso tem-se

$x \in A \vee x \in \emptyset$

pela definição de união

$x \in (A \cup B)$

logo está provado que $x \in A \rightarrow x \in (A \cup B)$

04. elemento absorvente: $A \cup U = U$

1º $A \cup U \subseteq U$

pela definição de contingência deve-se provar

$x \in (A \cup U) \rightarrow x \in U$

provando por absurdo deve-se mostrar

$[x \in (A \cup U) \wedge \sim(x \in U)] \rightarrow$ falso

pela definição de união

$[(x \in A \vee x \in U) \wedge \sim(x \in U)]$

manipulando

$(x \in A \vee x \in U) \wedge x \notin U$

$(x \in A \wedge x \notin U) \vee (x \in U \wedge x \notin U)$

dado que $x \notin U$ é sempre falso

$(x \in A \wedge \square) \vee (x \in U \wedge \square)$

pela idempotência

$\square \vee \square$

falso

logo está provado que $x \in (A \cup U) \rightarrow x \in U$

2º $U \subseteq A \cup U$

Pela definição de contingência deve-se provar

$x \in U \rightarrow x \in (A \cup U)$

pela definição de união

$x \in U \rightarrow x \in A \vee x \in U$

pela hipótese $x \in U$ logo

$x \in A \vee x \in U \leftrightarrow$ verdade

logo tem se

verdade $\rightarrow$ verdade

04. (continuação)

logo tem-se
verdade
ou seja está provado que
$x \in A \to x \in (A \cup U)$

05. Associatividade: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

1º $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$
pela definição de contingência deve-se
provar
$x \in [A \cup (B \cup C)] \to x \in [(A \cup B) \cup C]$
pela definição de união
$x \in A \vee x \in (B \cup C)$
novamente
$x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$
pela associatividade de '$\vee$'
$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$
pela definição de uniao
$x \in (A \cup B) \vee x \in C$

05. (continuação)

novamente
$x \in [(A \cup B) \cup C]$
logo está provado que
$x \in [A \cup (B \cup C)] \rightarrow x \in [(A \cup B) \cup C]$

$2^{\underline{o}}$ $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$
pela definição de contingência devemos provar que
$x \in [(A \cup B) \cup C] \longrightarrow x \in [A \cup (B \cup C)]$
pela definição de união temos
$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$
pela associatividade do '$\vee$' temos
$x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$
pela definição de união temos
$x \in [A \cup (B \cup C)]$
logo está provado que
$x \in (A \cup B) \cup C \rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

(II)

1. comutatividade: $A \cap B = B \cap A$

$1^{\underline{o}}$ $A \cap B \subseteq B \cap A$
pela definição de contingência deve-se provar
$x \in (A \cap B) \rightarrow x \in (B \cap A)$
pela definição de interseção tem-se
$x \in A \wedge x \in B$
pela comutatividade do '$\wedge$'

01. (continuação)

$x \in B \wedge x \in A$

pela definição de intersecção

$x \in (B \cap A)$

logo está provado que

$x \in (A \cap B) \rightarrow x \in (B \cap A)$

2º $B \cup A \subseteq A \cup B$

(praticamente igual a demonstração anterior...)

02. idempotência: $A \cap A = A$

1º $A \cap A \subseteq A$

pela definição de contingência deve-se provar

$x \in (A \cap A) \rightarrow x \in A$

pela definição de intersecção tem-se

$x \in A \wedge x \in A$

simplificando pela idempotência do '$\wedge$'

$x \in A$

logo está provado que

$x \in (A \cap A) \rightarrow x \in A$

2º $A \subseteq A \cap A$

(semelhante a demontração anterior, também utilizando a idempotência do '$\wedge$')

03. elemento neutro: $A \cap U = A$

1º $A \cap U \subseteq A$

pela definição de contingência deve-se provar

$x \in (A \cap U) \rightarrow x \in A$

pela definição de união tem-se

$x \in A \land x \in U$

dado que $\forall x \in U$ pela definição de U

$x \in A \land \square$

$x \in A$

logo está provado que

$x \in (A \cap U) \rightarrow x \in A$

2º $A \subseteq A \cap U$

pela definição de contingência deve-se provar

$x \in A \rightarrow x \in (A \cap U)$

assim podemos escrever que

$x \in A \leftrightarrow x \in A \land \square$

dado que pela definição de U, $x \in U \leftrightarrow \square$,

temos que

$x \in A \land \square \leftrightarrow x \in A \land x \in U$

logo temos

$x \in A \land x \in U$

e pela definição de intersecção

$x \in (A \cup U)$

logo está provado que

$x \in A \rightarrow x \in (A \cap U)$

04. elemento absorvente: $A \cap \emptyset = \emptyset$

1º $A \cap \emptyset \subseteq \emptyset$

pela definição de contingência deve-se provar

$x \in (A \cap \emptyset) \to x \in \emptyset$

pela definição de intersecção tem-se

$x \in A \wedge x \in \emptyset$

pela definição de $\emptyset$ temos que

$x \in \emptyset \leftrightarrow$

logo temos

$x \in A \wedge \blacksquare$

$\blacksquare$

como o lado esquerdo da implicação é falso tem-se

um verdade ou seja

$[x \in (A \cap \emptyset) \to x \in \emptyset] \leftrightarrow \square$

logo está provado que

$x \in (A \cap \emptyset) \to x \in \emptyset$

2º $\emptyset \subseteq A \cap \emptyset$

pela definição de contingência deve-se provar

$x \in \emptyset \to x \in (A \cap \emptyset)$

dado que pela definição de $\emptyset$, $x \in \emptyset \leftrightarrow \blacksquare$,

então o lado esquerdo da implicação é falso e

assim a implicação é verdadeira ou seja

$[x \in \emptyset \to x \in (A \cap \emptyset)] \leftrightarrow \square$

logo está provado que

$x \in \emptyset \to x \in (A \cap \emptyset)$

05. associatividade: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

1º $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$

pela definição de contingência deve-se provar

$x \in [A \cap (B \cap C)] \rightarrow x \in [(A \cap B) \cap C]$

pela definição de intersecção tem-se

$x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$

pela associatividade do '$\wedge$'

$(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$

pela definição de intersecção

$x \in [(A \cap B) \cap C]$

logo está provado que

$x \in [A \cap (B \cap C)] \rightarrow x \in [(A \cap B) \cap C]$

2º $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$

(semelhante a demonstração anterior, utilizando a associatividade do '$\wedge$')

(III) o elemento absorvente da operação de produto cartesiano (x) é $\emptyset$

(IV)

01. $A - B \subseteq A$

pela definição de contingência deve-se provar
$x \in (A - B) \subseteq A$
pela definição da diferença entre conjuntos tem-se
$x \in A \wedge x \notin B$
assim se $x \in (A - B) \leftrightarrow$ verdade temos
[verdade $\rightarrow$ verdade] $\leftrightarrow \square$
se $x \in (A - B) \leftrightarrow$ falso então temos
[falso $\rightarrow x \in A$] $\leftrightarrow \square$
logo a implicação é sempre válida ou seja está provado que
$x \in (A - B) \rightarrow x \in A$

02. $A - B = A \longleftrightarrow A \cap B = \varnothing$

1º $(A - B = A) \rightarrow (A \cap B = \varnothing)$
dado que $x \in A \wedge x \notin B \leftrightarrow x \in A$ então a seguinte implicação é válida
$x \in A \rightarrow x \in A \wedge x \notin B$
logo se
$x \in A \cap B$
então
$x \in A \wedge x \in B$
e pela hipótese
$x \in A \wedge x \notin B$

02. (continuação)

assim note que temos

$x \in A \land x \in B \land x \notin B \leftrightarrow \blacksquare$

e então é válido que

$x \in (A \cap B) \leftrightarrow x \in \emptyset$

e pois é o mesmo que

$\blacksquare \leftrightarrow \blacksquare$

logo está provado que

$(A - B = A) \rightarrow (A \cap B = \emptyset)$

2º $(A \cap B = \emptyset) \rightarrow (A - B = A)$

pela hipótese

$x \in A \land x \in B \rightarrow x \in \emptyset$

ou seja

$x \in A \land x \in B \rightarrow \blacksquare$

logo temos os seguintes casos (visto que $x \in A \land x \in B$ é uma afirmação falsa)

a) $x \in A \leftrightarrow$ verdadeiro e $x \in B \leftrightarrow$ falso $(x \notin B)$

$[x \in (A - B) \rightarrow x \in A] \leftrightarrow$ (verdadeiro $\rightarrow$ verdadeiro)

$[x \in (A - B) \rightarrow x \in A] \leftrightarrow$ verdadeiro

b) se $x \in A \leftrightarrow$ falso

$[x \in (A - B) \rightarrow x \in A] \leftrightarrow$ (falso $\rightarrow$ falso)

$[x \in (A - B) \rightarrow x \in A] \leftrightarrow$ verdadeiro

logo dado que a afirmação é válida em todos os caso está provado que

$(A \cap B = \emptyset) \rightarrow (A - B = \emptyset)$

03. $(A-B) \cap B = \emptyset$

1º $(A-B) \cap B \subseteq \emptyset$

pela definição de contingência deve-se provar

$x \in [(A-B) \cap B] \rightarrow x \in \emptyset$

pela definição de intersecção

$x \in (A-B) \wedge x \in B$

pela definição de diferença

$(x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \in B$

pela associatividade de '$\wedge$'

$x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \in B)$

$x \in A \wedge \blacksquare$

$\blacksquare$

ou seja temos que

$\{x \in [(A-B) \cap B] \rightarrow \emptyset\} \leftrightarrow (\blacksquare \rightarrow x \in \emptyset)$

e pela definição de $\emptyset$, $x \in \emptyset \leftrightarrow \blacksquare$, então

$\{x \in [(A-B) \cap B] \rightarrow \emptyset\} \leftrightarrow (\blacksquare \leftrightarrow \blacksquare) \leftrightarrow \square$

ou seja, a implicação é sempre verdadeira, logo está provado que

$x \in [(A-B) \cap B] \rightarrow \emptyset$

2º $\emptyset \subseteq (A-B) \cap B$

pela definição de contingência deve-se provar que

$x \in \emptyset \rightarrow x \in [(A-B) \cap B]$

pela definição de $\emptyset$ temos que $x \in \emptyset \leftrightarrow \emptyset$ assim temos

$\blacksquare \rightarrow x \in [(A-B) \cap B]$

como o lado esquerdo da implicação é sempre falso a implicação é sempre verdadeira logo está provado que $x \in \emptyset \rightarrow x \in [(A-B) \cap B]$

04. $A \cap B = A - (A - B)$

1º $A \cap B \subseteq A - (A - B)$

pela definição de contingência deve-se provar

$x \in (A \cap B) \rightarrow x \in [A - (A - B)]$

pela definição de intersecção

$x \in A \wedge x \in B$

que podemos escrever como

$x \in A \wedge (x \in B \vee x \notin A)$

$x \in A \wedge \neg\neg(x \in B \vee x \notin A)$

$x \in A \wedge \neg(x \notin B \wedge x \in A)$

$x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \notin B)$

pela definição de diferença entre conjuntos

$x \in A \wedge \neg[x \in (A - B)]$

$x \in A \wedge x \notin (A - B)$

novamente pela definição de diferença entre conjuntos

$x \in [A - (A - B)]$

logo está provado que

$x \in (A \cap B) \rightarrow x \in [A - (A - B)]$

2º $A - (A - B) \subseteq A \cap B$

pela definição de contingência deve-se provar

$x \in [A - (A - B)] \rightarrow x \in (A \cap B)$

pela definição de diferença entre conjuntos tem-se

$x \in A \wedge x \notin (A - B)$

$x \in A \wedge \neg[x \in (A - B)]$

04. (continuação)

novamente pela definição de diferença entre conjuntos

$x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \notin B)$

$x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B)$

aplicando a propriedade distributiva

$(x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B)$

$\blacksquare \vee (x \in A \wedge x \in B)$

pela propriedade de simplificação do '$\vee$' temos

$x \in A \wedge x \in B$

pela definição de interseção

$x \in (A \cap B)$

logo está provado que

$x \in [A - (A - B)] \rightarrow x \in (A \cap B)$

05. $\overline{(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})} = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

1º $\overline{(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})} \subseteq (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

pela definição de contingência deve-se provar

$x \in [\overline{(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})}] \rightarrow x \in [(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})]$

assim sendo, temos

$x \notin [(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})]$

$\neg\{x \in [(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})]\}$

$\neg[x \in (A \cap B) \vee x \in (\bar{A} \cap \bar{B})]$

$\neg[(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B})]$

$\neg(x \in A \wedge x \in B) \wedge \neg(x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B})$

$(x \notin A \vee x \notin B) \wedge \neg(x \notin A \wedge x \notin B)$

$(x \notin A \vee x \notin B) \wedge (x \in A \vee x \in B)$

$[(x \notin A \vee x \notin B) \wedge x \in A] \vee [(x \notin A \vee x \notin B) \wedge x \in B]$

05. (continuação)

$[(x \notin A \land x \in A) \lor (x \notin B \land x \in A)] \lor [(x \notin A \land x \in B) \lor (x \notin B \land x \in B)]$

$[\blacksquare \lor (x \notin B \land x \in A)] \lor [(x \notin A \land x \in B) \lor \blacksquare]$

$(x \notin B \land x \in A) \lor (x \notin A \land x \in B)$

pela comutatividade de '$\land$'

$(x \in A \land x \notin B) \lor (x \notin A \land x \in B)$

pela definição de intersecção

$x \in (A \cap \bar{B}) \lor x \in (\bar{A} \cap B)$

pela definição de união

$x \in [(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$

logo está provado que

$x \in [\overline{(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})}] \to x \in [(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})]$

2º $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \to$

pela definição de contingência devemos provar

$x \in [(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] \to x \in [\overline{(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})}]$

pela definição de união

$x \in (A \cap \bar{B}) \lor x \in (\bar{A} \cap B)$

pela definição de intersecção

$(x \in A \land x \in \bar{B}) \lor (x \in \bar{A} \land x \in B)$

$(x \in A \land x \notin B) \lor (x \notin A \land x \in B)$

$[(x \in A \land x \notin B) \lor x \notin A] \land [(x \in A \land x \notin B) \lor x \in B]$

$[(x \in A \lor x \notin A) \land (x \notin B \lor x \notin A)] \land [(x \in A \lor x \in B) \land (x \notin B \lor x \in B)]$

$[\square \land (x \notin B \lor x \notin A)] \land [(x \in A \lor x \in B) \land \square]$

pela propriedade de simplificação de '$\land$'

$(x \notin B \lor x \notin A) \land (x \in A \lor x \in B)$

$\neg\neg[(x \notin B \lor x \notin A) \land (x \in A \lor x \in B)]$

$\neg[\neg(x \notin B \lor x \notin A) \lor \neg(x \in A \lor x \in B)]$

05. (continuação)

$\neg[(x \in B \land x \in A) \lor (x \notin A \land x \notin B)]$

pela definição de intersercção

$\neg[(x \in B \cap A) \lor (x \in \bar{A} \cap \bar{B})]$

pela definição de união

$\neg\{x \in [(B \cap A) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})]\}$

$x \notin [(B \cap A) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})]$

$x \in \overline{[(B \cap A) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}]}$

Logo está provado que

$x \in [(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})] \rightarrow x \in [\overline{(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})}]$

06. $A \cap \bar{B} = \varnothing \land A \cap B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$

prova por absurdo

supondo que $A \neq \varnothing$

$A \cap \bar{B} = \varnothing$

unindo B à ambos os lados da equação

$(A \cap \bar{B}) \cup B = \varnothing \cup B$

$(A \cup B) \cap (\bar{B} \cup B) = B$

$(A \cup B) \cap U = B$

$(A \cap U) \cup (B \cap U) = B$

$A \cup B = B$

ou seja

$A \subseteq B$

entretanto pela outra equação

$A \cap B = \varnothing$

06. (continuação)

unindo $\bar{B}$ à ambos os lados da equação

$(A \cap B) \cup \bar{B} = \emptyset \cup \bar{B}$

$(A \cup \bar{B}) \cap (B \cup \bar{B}) = \bar{B}$

$(A \cup \bar{B}) \cap U = \bar{B}$

$A \cup \bar{B} = \bar{B}$

ou seja

$A \subseteq \bar{B}$

mas se A está contido em B então A não pode estar contido em $\bar{B}$ pois pela definição de complemento:

$x \in \bar{B} \leftrightarrow x \notin B$

a não ser que $A = \emptyset$ mas pela hipótese temos que $A \neq \emptyset$, assim

$A \subseteq B \wedge A \subseteq \bar{B} \wedge A \neq \emptyset \rightarrow$ falso

ou seja, temos um absurdo, logo está provado que:

$A \cap \bar{B} = \emptyset \wedge A \cap B = \emptyset \rightarrow A = \emptyset$

07. $A \cup B = B \wedge A \cap B = \emptyset \longrightarrow A = \emptyset$

prova por absurdo

supondo que $A \neq \emptyset$ note que $\exists a \in A$, logo

$A \cup B = B \longrightarrow A \subseteq B$

então

$A \cap B = A$

assim temos

$A \cap B = A \wedge A \cap B \neq \emptyset \wedge A \neq \emptyset \rightarrow$ falso

07. (continuação)

Logo está provado que
$A \cup B = B \wedge A \cap B = \emptyset \rightarrow A \neq \emptyset$

08. $A \cup B = \emptyset \rightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$

prova por absurdo
supondo que $A \neq \emptyset \vee B \neq \emptyset$ então
$\exists x,\ x \in A \vee x \in B \leftrightarrow$ verdadeiro
ou seja, pela definição de união é válido que
$\exists x \in A \cup B \leftrightarrow$ verdadeiro
mas pela hipótese também temos que
$A \cup B = \emptyset$
ou seja
$\nexists x \in A \cup B$
assim temos
$\nexists x \in A \cup B \wedge \exists x \in A \cup B \leftrightarrow \blacksquare$
o que é um absurdo, logo está provado que
$A \cup B = \emptyset \rightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$

09. $A \subseteq B \leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$

1º $A \subseteq B \rightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$
note que manipulando a expressão
$A \subseteq B$, temos
$(x \in A \rightarrow x \in B)$
$[\neg(x \in A) \vee x \in B]$

09. (continuação)

$(x \notin A \vee x \in B)$

$[\neg(x \in B) \to x \notin A]$

$(x \notin B \to x \notin A)$

$(x \in \bar{B} \to x \in \bar{A})$

Logo está provado que

$(x \in A \to x \in B) \to (x \in \bar{B} \to x \in \bar{A})$

2º $\bar{B} \subseteq \bar{A} \to A \subseteq B$

(semelhante a demonstração anterior, invertendo a implicação da contingência)

(V)

01. supondo que $x \in (A - E) \leftrightarrow x \in (E - A)$ note que temos

1º $A - E = E - A$

ou seja

$x \in (A - E) \to x \in (E - A)$

$x \in (A - E) \wedge x \notin (E - A)$

$(x \in A \wedge x \notin E) \wedge \neg(x \in E \wedge x \notin A)$

$(x \in A \wedge x \notin E) \wedge (x \notin E \vee x \in A)$

$x \in A \wedge [x \notin E \wedge (x \notin E \vee x \in A)]$

$x \in A \wedge [(x \notin E) \vee (x \notin E \wedge x \in A)]$

$(x \in A \wedge x \notin E) \vee (x \notin E \wedge x \in A)$

$x \in A \wedge x \notin E$

01. (continuação)

$x \in A \wedge x \notin E$

como a hipótese é igual ao resultado da tentativa de prova por absurdo, ou seja

$x \in (A-E) \wedge x \notin (E-A) \to$ verdadeiro

então o que está se tentando se provar é falso, logo não há elemento neutro da operação de diferença entre conjuntos

02. $A - A = A$

1º $A - A \subseteq A$

ou deve-se provar que

$x \in (A-A) \to x \in A$

$x \in A \wedge x \notin A \to x \in A$

$\blacksquare \to x \in A$

$\square$

logo está provado que

$x \in (A-A) \to x \in A$

2º $A \subseteq A - A$

ou seja devemos provar que

$x \in A \to x \in (A-A)$

$x \in A \to x \in A \wedge x \notin A$

note que se $x \in A \leftrightarrow$ verdadeiro, temos

verdadeiro $\to$ verdadeiro $\wedge$ falso

verdadeiro $\to$ falso

falso

02. (continuação)

Logo é falso que

$x \in A \rightarrow x \in (A-A)$

assim é falso que

$A \subseteq A-A$

e então não é válido que

$A-A = A$

03. $A-B = B-A$

1º $A-B \subseteq B-A$

ou seja, deve-se provar que

$x \in (A-B) \rightarrow x \in (B-A)$

$x \in A \wedge x \notin B \rightarrow x \in B \wedge x \notin A$

se $x \in A \leftrightarrow$ verdadeiro e $x \notin B \leftrightarrow$ verdadeiro temos

verdadeiro $\wedge$ verdadeiro $\rightarrow$ falso $\wedge$ falso

verdadeiro $\rightarrow$ falso

falso

Logo é falso que

$x \in (A-B) \rightarrow x \in (B-A)$

ou seja é falso que

$A-B \subseteq B-A$

assim não vale que

$A-B = B-A$

04. $A - (B - C) = (A - B) - C$

1º $A - (B - C) \subseteq (A - B) - C$

ou seja deve-se provar que

$x \in [A - (B - C)] \rightarrow x \in [(A - B) - C]$

provando por absurdo tem-se

$x \in [A - (B - C)] \wedge x \notin [(A - B) - C]$

$[x \in A \wedge x \notin (B - C)] \wedge \neg\{x \in [(A - B) - C]\}$

$\{x \in A \wedge \neg[x \in (B - C)]\} \wedge \neg[x \in (A - B) \wedge x \notin C]$

$[x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C)] \wedge \neg[(x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C]$

$[x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C)] \wedge \neg[x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)]$

$[x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C)] \wedge [x \notin A \vee (x \in B \vee x \in C)]$

$\{[x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C)] \wedge x \notin A\} \vee \{[x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C)] \wedge (x \in B \vee x \in C)\}$

$[(x \notin B \vee x \in C) \wedge (x \in A \wedge x \notin A)] \vee \{x \in A \wedge [(x \notin B \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C)]\}$

$[(x \notin B \vee x \in C) \wedge \blacksquare] \vee \{x \in A \wedge [(x \notin B \wedge x \in B) \vee x \in C]\}$

$\blacksquare \vee [x \in A \wedge [\blacksquare \vee x \in C]$

$x \in A \wedge x \in C$

como a tentativa de prova por contraposição não resulta em falso então não é válido que

$x \in [A - (B - C)] \rightarrow x \in [(A - B) - C]$

assim também não é válido que

$A - (B - C) \subseteq (A - B) - C$

logo é falso que

$A - (B - C) = (A - B) - C$

04. (continuação)