Álgebra Linear
(ALI0001 – CCI-192-02U)

Método da Eliminação de Gauss para classificação e resolução de sistemas de equações lineares

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula do dia 06 de março de 2023.

UDESC

Resolvendo um sistema de equações lineares

Qual sistema é mais fácil de resolver algebricamente?

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

- O sistema da direita é claramente mais fácil de resolver.
- Esse sistema está na **forma escalonada por linhas**, o que significa que sua matriz ampliada está escrita em um padrão de "degraus de escada", em que os coeficientes da primeira variável de cada equação são sempre iguais a 1.
- Note que ambos os sistemas admitem a mesma solução: $x = 1, y = -1$ e $z = 2$.
- Tais sistemas são chamados de sistemas equivalentes, pois admitem a mesma solução.
- Para resolver um sistema que não esteja na forma escalonada por linhas, vamos "transformá-lo" em um sistema equivalente que esteja na forma escalonada por linhas, usando as operações elementares com as linhas da sua matriz ampliada:

Operações elementares sobre as linhas

Vamos "escalonar" a matriz ampliada de um sistema qualquer, para transformá-lo em um sistema equivalente cuja matriz ampliada esteja na forma escalonada por linhas.

Para isso, vamos utilizar SOMENTE as seguintes operações, sempre sobre as LINHAS da matriz.

OPERAÇÕES ELEMENTARES SOBRE AS LINHAS:

- Trocar a posição de duas linhas da matriz. **Notação**: $L_r \leftrightarrow L_s$.
- Multiplicar todos os elementos de uma linha da matriz por um escalar diferente de zero. **Notação:** $L_r \longrightarrow kL_s$, com $k \in \mathbb{R}^*$.
- Somar uma linha da matriz com um múltiplo escalar de outra linha da matriz. **Notação:** $L_r \longrightarrow L_r + kL_s$.

TEOREMA (SISTEMAS EQUIVALENTES):

Se dois sistemas lineares $AX = B$ e $CX = D$ são tais que a matriz ampliada $[C\,|D]$ é obtida por meio da aplicação de uma quantidade finita de operações elementares sobre as linhas de $[A\,|B]$, então os dois sistemas possuem as mesmas soluções.

Exemplo: usando operações elementares para resolver um sistema

Sistema linear	Matriz ampliada associada
$\begin{cases} x-2y+3z=9 \\ -x+3y=-4 \\ 2x-5y+5z=17 \end{cases}$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right)$
Some a 1ª eq. à 2ª eq.: $\begin{cases} x-2y+3z=9 \\ y+3z=5 \\ 2x-5y+5z=17 \end{cases}$	$L_2 \to L_2+L_1$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right)$
Some a 1ª eq. multiplicada por -2 à 3ª eq.: $\begin{cases} x-2y+3z=9 \\ y+3z=5 \\ -y-z=-1 \end{cases}$	$L_3 \to L_3-2L_1$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$
Some a 2 eq. à 3ª eq.: $\begin{cases} x-2y+3z=9 \\ y+3z=5 \\ 2z=4 \end{cases}$	$L_3 \to L_3+L_2$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$
Multiplique a 3ª linha por ½: $\begin{cases} x-2y+3z=9 \\ y+3z=5 \\ z=2 \end{cases}$	$L_3 \to \frac{1}{2}L_3$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ \boxed{0} & 1 & 3 & 5 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & 2 \end{array}\right)$
Substituindo $z=2$ na 2ª equação, obtém-se $y=-1$. Da 1ª equação, obtém-se $x=1$.	A última matriz está na **forma escalonada por linhas**

Note que, na última matriz, o primeiro elemento não nulo de cada linha é igual a 1 e há somente zeros abaixo deles.

Matriz escalonada por linhas

Matriz escalonada por linhas: Uma matriz $m \times n$ está escrita na **forma escalonada por linhas** se e somente se satisfazer as seguintes propriedades:

a) Uma linha inteiramente nula (se existir) ocorre sempre abaixo de todas as linhas não nulas.

b) O primeiro elemento não nulo de uma linha é igual a 1. Chamamos este elemento de **pivô**.

c) Para linhas sucessivas (não nulas), o 1 pivô da linha superior está mais à esquerda do que o 1 pivô da linha inferior. (Isso significa que a quantidade de zeros que precedem o pivô de um linha superior é sempre menor do que a de uma linha inferior.

Exemplos: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Uma matriz na forma escalonada por linhas está na **forma escalonada reduzida (forma escada)** quando cada coluna que contêm um 1 pivô tem zeros em todas as posições acima e abaixo de seu 1 pivô. Exemplos: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Método da Eliminação de Gauss

- O Método para reescrever um sistema de equações na forma escalonada por linhas utilizando as operações elementares é chamada do método da eliminação de Gauss, em homenagem ao matemático alemão Carl-Friedrich Gauss (1777-1855).
- Popularmente, este método também é chamado de método do escalonamento.
- Resumo do método:
  - ✓ Escreva a matriz ampliada do sistema.
  - ✓ Utilize as operações elementares com as linhas da matriz ampliada até chegar na matriz escalonada por linhas.
  - ✓ Escreva o sistema correspondente e utilize a substituição regressiva para encontrar a solução.

Observação: Para esse algoritmo, a ordem no qual executamos as operações é importante. Iniciamos criando o 1 pivô na primeira linha. Após, operamos com a coluna desse pivô, de forma a obter os zeros nas posições situadas abaixo do pivô. Depois repete-se o processo, com as demais linhas. Somente as operações elementares podem ser utilizadas em todo esse processo.

Exemplos:

Exemplo 1) Utilize o método da eliminação de Gauss para obter a solução dos sistemas abaixo, se possível:

a) $\begin{cases} x + 2y - z + 2t = 1 \\ -x - 2y + 2z - t = 1 \\ 2x - z - t = 0 \end{cases}$

Iniciamos com a matriz ampliada do sistema: $[A\,|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right].$

Como o pivô da primeira linha da matriz já é igual a 1, vamos para a próxima etapa. Vamos zerar todos os elementos situados abaixo dele. Para isso, precisaremos operar com a segunda linha (fazendo $L_2 \longrightarrow L_2 + L_1$) e a terceira linha (fazendo $L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1$):

$$[A\,|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_2 \longrightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -5 & -2 \end{array}\right]$$

Como o número de zeros que precede o pivô da segunda linha é maior do que o da terceira linha, precisamos trocar a posição entre essas linhas, denotado por $L_2 \leftrightarrow L_3$.

Exemplo a: continuação

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -5 & | & -2 \end{bmatrix} {\color{red} L_2 \leftrightarrow L_3} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -5 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Agora, devemos fazer com que o pivô da segunda linha seja igual a 1.

Fazemos isso multiplicando toda a segunda linha por $\frac{-1}{4}$, que denotamos por ${\color{red} L_2 \longrightarrow \frac{-1}{4} L_2}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -5 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} {\color{red} L_2 \longrightarrow \frac{-1}{4} L_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{5}{4} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Veja que a última matriz obtida está na forma escalonada por linhas.

Portanto, tomamos o sistema equivalente associado a essa matriz e o resolvemos “de baixo para cima”:

$$\begin{cases} x + 2y - z + 2t = 1 \\ y - \frac{1}{4}z + \frac{5}{4}t = \frac{1}{2} \\ z + t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y + z - 2t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z - \frac{5}{4}t \\ z = 2 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \frac{3}{2}t \\ z = 2 - t \end{cases} \text{com } t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

O último sistema é equivalente ao sistema inicial, ou seja, a solução obtida também é solução do sistema original. Veja que t é uma variável livre e o sistema tem infinitas soluções e é classificado como sistema possível e indeterminado (SPI).

Outra forma de resolvermos o sistema consiste em continuar "escalonando" a matriz até transformá-la na forma escada. Para fazer isso, basta zerar os elementos que estão situados acima dos pivôs das segunda e da terceira linha. Fazendo isso:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \longrightarrow L_2 + \frac{1}{4} L_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] L_1 \longrightarrow L_1 + \frac{1}{2} L_3 \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

E então, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y + \frac{3}{2} t = 1 \\ z + t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \frac{3}{2} t \\ z = 2 - t \end{cases} \text{ com } t \in \mathbb{R} \text{ variável livre.}$$

Veja que obtivemos a mesma solução anterior.

Exemplos:

$$b)\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-z=0 \\ -2x+2y+2z=1 \end{cases}$$

Solução: Iniciamos com a matriz ampliada do sistema: $[A\,|B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & |\,2 \\ 2 & -1 & -1 & |\,0 \\ -2 & 2 & 2 & |\,1 \end{bmatrix}$.

Como o pivô da primeira linha da matriz novamente é igual a 1, vamos para a próxima etapa:

Vamos zerar todos os elementos situados abaixo dele. Para isso, precisaremos operar com a segunda linha (fazendo $L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1$) e a terceira linha fazendo $L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_1$):

$$[A\,|B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & |\,2 \\ 2 & -1 & -1 & |\,0 \\ -2 & 2 & 2 & |\,1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & |\,2 \\ 0 & -3 & -3 & |\,2 \\ 0 & 4 & 4 & |\,5 \end{bmatrix}.$$

Agora, devemos fazer com que o pivô da segunda linha seja igual a 1. Fazemos isso multiplicando toda a segunda linha por $\frac{-1}{3}$, operação que denotamos por $L_2 \longrightarrow \frac{-1}{3}L_2$:

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -3 & -3 & | & 2 \\ 0 & 4 & 4 & | & 5 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow \frac{-1}{3} L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & {-2}/{3} \\ 0 & 4 & 4 & | & 5 \end{bmatrix}.$$

O próximo passo é anular o elemento situado abaixo do pivô da segunda linha.
Fazemos isso com a operação $L_3 \longrightarrow L_3 - 4L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & {-2}/{3} \\ 0 & 4 & 4 & | & 5 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 - 4L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & {-2}/{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & {23}/{3} \end{bmatrix}.$$

A próxima etapa é fazer com que o pivô da terceira linha seja igual a 1.
Veja que nesse exemplo tal pivô está situado na coluna que diz respeito aos termos independentes do sistema. Fazemos isso com a operação $L_3 \longrightarrow \frac{3}{23} L_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & {-2}/{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & {23}/{3} \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow \frac{3}{23} L_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & {-2}/{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

Essa última matriz está na forma escalonada por linhas.

Exemplos:

Portanto, tomamos o sistema equivalente associado a essa última matriz:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ \quad y + z = {}^{-2}/_{3} \\ \quad\quad 0 = 1 \end{cases}.$$

Veja que a última equação desse sistema consiste em uma contradição ($0 = 1$ é um absurdo). Isso significa que o sistema não admite solução, pois não existem valores de x, y, z que façam com que a última equação seja verdadeira. Nesse caso, dizemos que o sistema é impossível (SI)! Como esse sistema é equivalente ao sistema original, não existe solução para o sistema dado.

Observação: Veja que a contradição acima decorre do fato da última linha da matriz ampliada $[A\,|B]$ possuir somente elementos iguais a zero na parte que corresponde à matriz dos coeficientes A, enquanto o elemento da última linha da matriz que corresponde à matriz dos termos independentes B é diferente de zero:

$$[A\,|B] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & {}^{-2}/_{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplos:

c) $\begin{cases} 3x - 3y + 6z = -15 \\ 2x - 4y + 3z = -16 \\ 5x + y + 7z = 5 \end{cases}.$

Solução: Iniciamos com a matriz ampliada do sistema: $[A\,|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 6 & -15 \\ 2 & -4 & 3 & -16 \\ 5 & 1 & 7 & 5 \end{array}\right].$

Aqui, precisamos transformar o pivô da primeira linha em 1.
Podemos fazer isso com a operação $L_1 \longrightarrow L_1 - L_2$:

$$[A\,|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 6 & -15 \\ 2 & -4 & 3 & -16 \\ 5 & 1 & 7 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 - L_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -16 \\ 5 & 1 & 7 & 5 \end{array}\right].$$

Para zerar todos os elementos situados abaixo do pivô da primeira linha, precisaremos operar com a segunda linha $L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1$ e com a terceira linha $L_3 \longrightarrow L_3 - 5L_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -16 \\ 5 & 1 & 7 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 5L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & -18 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right].$$

Exemplos:

Agora, vamos transformar o pivô da segunda linha em 1.

Existem diferentes formas de fazermos isso. Vamos usar a operação $L_2 \longrightarrow \frac{-1}{6} L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & -6 & -3 & | & -18 \\ 0 & -4 & -8 & | & 0 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow \frac{-1}{6} L_2 \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & {}^1/_2 & | & 3 \\ 0 & -4 & -8 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

O próximo passo é zerar o elemento situado abaixo do pivô da segunda linha, com a operação $L_3 \longrightarrow L_3 + 4L_2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & {}^1/_2 & | & 3 \\ 0 & -4 & -8 & | & 0 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 + 4L \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & {}^1/_2 & | & 3 \\ 0 & 0 & -6 & | & 12 \end{bmatrix}.$$

A próxima etapa é transformar o pivô da terceira linha em 1, com a operação $L_3 \longrightarrow \frac{-1}{6} L_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & {}^1/_2 & | & 3 \\ 0 & 0 & -6 & | & 12 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow \frac{-1}{6} L_3 \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & {}^1/_2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix}.$$

Essa última matriz está na forma escalonada por linhas.

Exemplos:

Portanto, tomamos o sistema equivalente associado a essa última matriz:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ \quad\; y + {}^{1}/_{2}\, z = 3 \\ \qquad\quad z = -2 \end{cases}.$$

Resolvendo “de baixo para cima” esse sistema, obtemos que $x = 3$, $y = 4$ e $z = -2$.

Portanto, o sistema admite uma única solução e é um sistema possível e determinado (SPD).

O sistema original é equivalente a esse sistema, ou seja, admite a mesma solução.

Exercícios da lista: até o 12.

Exercício:

Determine se cada matriz abaixo está escrita na forma escalonada por linhas. Caso positivo, determine também se a matriz está na forma escada.

$a)\ \ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

c) $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$