Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral

Função Inversa

Prof. Dani Prestini

UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

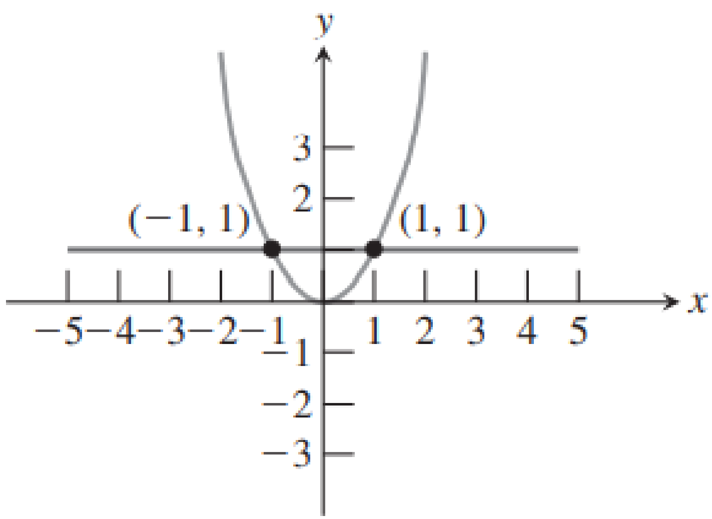
Função Inversa

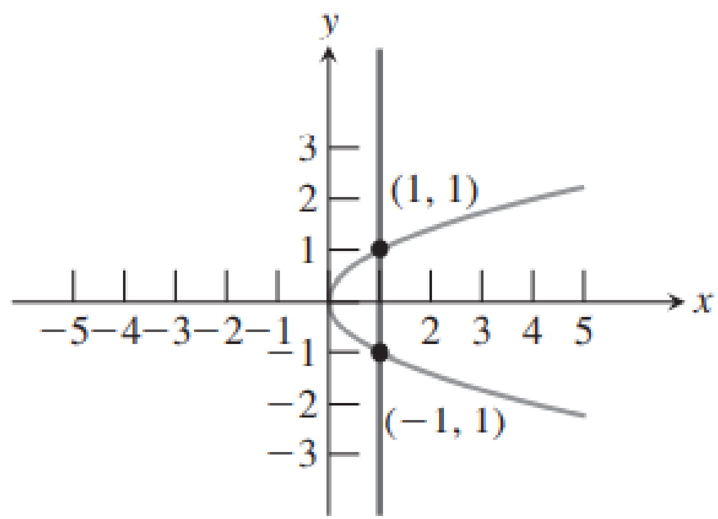
DEFINIÇÃO Relação inversa

O par ordenado (a, b) pertence a uma relação somente se o par ordenado (b, a) está na **relação inversa**.

Teste da linha horizontal

Apesar de esse teste não ter sido citado anteriormente, ele parte da mesma ideia do teste da linha vertical. A inversa de uma relação é uma função somente se cada linha horizontal intersecciona o gráfico da relação original no máximo em um ponto.





Função Inversa

DEFINIÇÃO Função inversa

Se f é uma função bijetora com domínio A e imagem B, então a **função inversa de f**, denotada por f^{-1}, é a função com domínio B e imagem A definida por $f^{-1}(b) = a$, se, e somente se, $f(a) = b$

Exemplo 1 - Encontre uma equação para $f^{-1}(x)$ se $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)}$

$$\boxed{y = \frac{x}{x+1}}$$

$$x = \frac{y}{y+1}$$

$$x(y+1) = y$$

$$x.y + x = y$$

$$x = y - x.y$$

$$x = y(1-x)$$

$$\boxed{y = \frac{x}{1-x}} = f^{-1}(x)$$

Função Inversa

Exemplo 2 – Encontre a função inversa de $f(x) = \sqrt{x+3}$

$$(x)^2 = \left(\sqrt{y+3}\right)^2$$

$$x^2 = y + 3$$

$$y = x^2 - 3$$

$$f^{-1}(x)$$

Verificação

$$f(f^{-1}(x))$$

$$f \circ f^{-1}$$

$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

$$f \circ f^{-1} = \sqrt{(x^2 \cancel{-3}) \cancel{+3}}$$

$$= \sqrt{x^2}$$

$$f \circ f^{-1} = x$$

$$f^{-1}(f(x))$$

$$f^{-1} \circ f$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 3$$

$$f^{-1} \circ f = \left(\sqrt{x+3}\right)^2 - 3$$

$$= x + 3 - 3$$

$$f^{-1} \circ f = x$$

Função Inversa

Exemplo 3 – Encontre a função inversa de $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$

$$x = \frac{y+3}{y-2}$$

$$x(y-2) = y+3$$

$$x.y - 2x = y+3$$

$$x.y - y = 2x+3$$

$$y(x-1) = 2x+3$$

$$f^{-1} \quad \boxed{y = \frac{2x+3}{x-1}}$$

$$\frac{-5}{-5} = 1$$

$$f(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

$$f \circ f^{-1} = \frac{\frac{2x+3}{x-1} + \frac{3}{1}}{\frac{2x+3}{x-1} - \frac{2}{1}} = \frac{\frac{2x+3+3(x-1)}{x-1}}{\frac{2x+3-2(x-1)}{x-1}}$$

$$= \frac{\frac{5x}{x-1}}{\frac{5}{x-1}} = \frac{5x}{\cancel{x-1}} \cdot \frac{\cancel{x-1}}{5} = \underline{\underline{x}}$$

Exercícios

1) Livro Texto: páginas 197 e 198

Obrigado