UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Disciplinas: ALGA001 e GAN0001
Prof. Bruno Terêncio do Vale

Quarta Lista de Exercícios
Tópico: Seções Cônicas

1. Estabelecer a equação de cada uma das parábolas, sabendo que:

   (a) Vértice $V(0,0)$; diretriz $d: y = -2$
   (b) Vértice $V(0,0)$; foco $F(0,-3)$
   (c) Vértice $V(-2,3)$; foco $F(-2,1)$
   (d) Vértice $V(2,-1)$; foco $F(5,-1)$
   (e) Vértice $V(1,3)$; eixo paralelo ao eixo dos x, passando pelo ponto $P(-1,-1)$
   (f) Eixo de simetria paralelo ao eixo dos y e passa pelos pontos $P_1(0,1)$, $P_2(1,0)$ e $P_3(2,0)$

2. Determinar o vértice, o foco, uma equação para a diretriz e uma equação para o eixo da parábola de cada uma das equações dadas. Esboçar o gráfico.

   (a) $x^2 = -12y$
   (b) $y^2 = -100x$
   (c) $x^2 - 2x - 20y - 39 = 0$
   (d) $y^2 + 4y + 16x - 44 = 0$

3. Calcular o valor de k para que a parábola $x = ky^2$ tenha foco no ponto $(3,0)$.

4. Determine a equação da parábola $y = x^2 + bx + c$ que passa pelo ponto $P(1,3)$ e tem abcissa do foco igual a 2. Represente-a geometricamente.

5. Determine a equação da parábola que passa pelos pontos $P(-2,3)$, $Q(-5,-3)$ e $R(0,-1)$.

6. Determinar o centro, os vértices A_1 e A_2, os focos e a excentricidade das elipses dadas. Esboçar o gráfico.

   (a) $x^2 + 25y^2 = 25$
   (b) $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$
   (c) $25x^2 + 16y^2 + 50x + 64y - 311 = 0$
   (d) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$

7. Estabelecer a equação da elipse que satisfaz as condições dadas.

   (a) Centro $C(0,0)$; um foco $F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ e um vértice $A(1,0)$.
   (b) Centro $C(0,0)$; um foco $F\left(0, -\sqrt{5}\right)$ e eixo menor mede 4.
   (c) Centro $C(2,4)$; um foco $F(5,4)$ e excentricidade $e = \frac{3}{4}$.
   (d) Centro $C(-3,4)$; semi-eixos de comprimento 4 e 3 e eixo maior paralelo ao eixo dos x.

(e) Vértices $A_1\,(1,-4)$ e $A_2\,(1,8)$, excentricidade $e = \dfrac{2}{3}$.

8. Determine a equação da circunferência cujo centro está sobre a reta $4x + 7y + 5 = 0$ e que passa pelos pontos $(-1,-4)$ e $(2,-1)$.

9. A excentricidade de uma elipse é definida como a razão $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. Se a permanece fixo e b varia, descreva a forma geral da elipse quando a excentricidade tende a 1 e quando tende a zero.

10. Determinar o centro, os vértices, os focos e a excentricidade das hipérboles dadas. Esboçar o gráfico.

    (a) $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0$
    (b) $3x^2 - y^2 + 3 = 0$
    (c) $x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 31 = 0$
    (d) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$

11. Estabelecer a equação da hipérbole que satisfaz as condições dadas.

    (a) Centro $C\,(0,0)$; eixo real sobre Oy, $b = 8$ e excentricidade $e = \dfrac{5}{3}$.
    (b) Vértices $A\,(\pm 3, 0)$; equações das assíntotas $y = \pm 2x$.
    (c) Centro $C\,(5,1)$; um foco em $(9,1)$ e eixo imaginário mede $4\sqrt{2}$.
    (d) Focos $F_1\,(-1,-5)$ e $F_2\,(5,-5)$, hipérbole equilátera $(a = b)$.

12. Determine as equações das retas assíntotas das hipérboles abaixo.

    (a) $y^2 - x^2 + 4y + 4x - 1 = 0$
    (b) $5x^2 - 4y^2 - 30x - 16y + 9 = 0$

13. As retas $r : 2x + y = 3$ e $s : 2x - y = 1$ são as assíntotas de uma hipérbole que passa pelo ponto $(6,2)$. Determine sua equação.

14. Sabendo que a curva $y = \dfrac{1}{x}$ é uma hipérbole com eixo real sobre a reta $y = x$, determine seus focos. Essa hipérbole é equilátera?

15. A elipse $2x^2 + 3y^2 = 24$ e a hipérbole $x^2 - y^2 = 5$ interceptam-se em quatro pontos A, B, C e D. Determine a área e o perímetro do retângulo $ABCD$.

16. Esboce a região do plano dada pela inequação $4x^2 + 9y^2 - 40x - 54y + 145 < 0$.

17. Determinar a equação padrão e representar geometricamente o conjunto de pontos $P\,(x,y)$:

    (a) que são equidistantes da reta $y = 3$ e do ponto $F\,(0,0)$.
    (b) cuja soma das distâncias a $F_1\,(1,0)$ e a $F_2\,(3,0)$ é igual a 5.
    (c) cujo módulo da diferença das distâncias a $F_1\,(-1,-5)$ e a $F_2\,(5,-5)$ é igual a $3\sqrt{2}$.

18. Obter a equação reduzida resultante de uma translação de eixos, classificar, dar os elementos e representar graficamente as equações:

    (a) $x^2 + 4y^2 - 4x - 24y + 36 = 0$
    (b) $x^2 - y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$
    (c) $y^2 - 8x + 6y + 17 = 0$
    (d) $3x^2 + 2y^2 - 12x + 8y + 19 = 0$
    (e) $x^2 + 2x + 8y - 15 = 0$
    (f) $9x^2 - 4y^2 - 54x + 45 = 0$
    (g) $9y^2 - 25x^2 - 90y - 50x = 25$

19. Descreva e represente geometricamente as curvas a seguir.

    (a) $x = 3 - \sqrt{3 - y^2 - 2y}$

    (b) $x = 4 - \sqrt{y}$

    (c) $y = -1 - \sqrt{2x + 4}$

    (d) $y = -2 - \dfrac{3}{2}\sqrt{-x^2 + 2x + 3}$

    (e) $x = 2\sqrt{y^2 - 1}$

    (f) $x = -4 - \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + y^2 - 2y}$

Respostas dos Exercícios

1. (a) $x^2 = 8y$
   (b) $x^2 = -12y$
   (c) $x^2 + 4x + 8y - 20 = 0$
   (d) $y^2 + 2y - 12x + 25 = 0$
   (e) $(y-3)^2 = -8(x-1)$
   (f) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x + 1$
2. (a) $V(0,0)$, $F(0,-3)$, $y = 3$, $x = 0$
   (b) $V(0,0)$, $F(-25,0)$, $x = 25$, $y = 0$
   (c) $V(1,-2)$, $F(1,3)$, $y = -7$, $x = 1$
   (d) $V(3,-2)$, $F(-1,-2)$, $x = 7$, $y = -2$
3. $k = \dfrac{1}{12}$
4. $y = x^2 - 4x + 6$
5. $y^2 + 2x - y - 2 = 0$ ou $5y + 4x^2 + 18x + 5 = 0$
6. (a) $C(0,0)$, $A(\pm 5, 0)$, $F\left(\pm 2\sqrt{6}, 0\right)$, $e = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$
   (b) $C(0,0)$, $A(0,\pm 3)$, $F(0,\pm 2)$, $e = \dfrac{2}{3}$
   (c) $C(-1,-2)$, $A_1(-1,-7)$, $A_2(-1,3)$, $F_1(-1,-5)$, $F_2(-1,1)$, $e = \dfrac{3}{5}$
   (d) $C(1,2)$, $A_1(-2,2)$, $A_2(4,2)$, $F\left(1 \pm \sqrt{5}, 2\right)$, $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$
7. (a) $7x^2 + 16y^2 = 7$
   (b) $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$
   (c) $7x^2 + 16y^2 - 28x - 128y + 172 = 0$
   (d) $9x^2 + 16y^2 + 54x - 128y + 193 = 0$
   (e) $9x^2 + 5y^2 - 18x - 20y - 151 = 0$
8. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 29$
9. Se a excentricidade tende a 1, b tende a zero. Neste caso, a elipse fica cada vez mais achatada, tendendo a um segmento de reta. Se a excentricidade tende a zero, b tende a a. Neste caso, a elipse se aproxima cada vez mais do formato de uma circunferência.
10. (a) $C(0,0)$, $A(0,\pm 2)$, $F(0,\pm 3)$, $e = \dfrac{3}{2}$
    (b) $C(0,0)$, $A\left(0, \pm\sqrt{3}\right)$, $F(0,\pm 2)$, $e = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
    (c) $C(-3,3)$, $A_1(-5,3)$, $A_2(-1,3)$, $F\left(-3 \pm \sqrt{5}, 3\right)$, $e = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
    (d) $C(2,-1)$, $A_1(2,-5)$, $A_2(2,3)$, $F_1(2,-6)$, $F_1(2,4)$, $e = \dfrac{5}{4}$
11. (a) $16y^2 - 9x^2 - 576 = 0$
    (b) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1$
    (c) $x^2 - y^2 - 10x + 2y + 16 = 0$

(d) $2x^2 - 2y^2 - 8x - 20y - 51 = 0$

12. (a) $y = -x$ e $y = x - 4$

    (b) $y = \dfrac{\sqrt{5}\,(x-3)}{2} - 2$ e $y = -\dfrac{\sqrt{5}\,(x-3)}{2} - 2$

13. $4\,(x-1)^2 - (y-1)^2 = 99$

14. $F_1\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ e $F_2\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$. Sim, a hipérbole é equilátera.

15. $A = \dfrac{4\sqrt{546}}{5}$ u.a. e $P = \dfrac{4\left(\sqrt{14} + \sqrt{39}\right)}{\sqrt{5}}$ u.c.

16. $\dfrac{(x-5)^2}{9} + \dfrac{(y-3)^2}{4} < 1$ (pontos do interior da elipse)

17. (a) $x^2 = 6\left(y - \dfrac{3}{2}\right)$

    (b) $\dfrac{(x-2)^2}{\frac{25}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{21}{4}} = 1.$

    (c) $\dfrac{(x-2)^2}{\frac{9}{2}} - \dfrac{(y+5)^2}{\frac{9}{2}} = 1$

18. (a) $\dfrac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$, elipse, eixo maior 4, eixo menor 2, focos $F\left(2 \pm \sqrt{3}, 3\right)$

    (b) $x'^2 - y'^2 = 1$, hipérbole, eixo real 2, eixo imaginário 2, focos $F\left(4 \pm \sqrt{2}, -2\right)$

    (c) $y'^2 = 8x'$, parábola, $p = 4$, diretriz: $x = -1$, foco $F\,(3, -3)$

    (d) $3x'^2 + 2y'^2 = 1$, elipse, eixo maior $\sqrt{2}$, eixo menor $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, focos $F\left(2, -2 \pm \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$

    (e) $x'^2 = -8y'$, parábola, $p = -4$, diretriz: $y = 4$, foco $F\,(-1, 0)$

    (f) $\dfrac{x'^2}{4} - \dfrac{y'^2}{9} = 1$, hipérbole, eixo real 4, eixo imaginário 6, focos $F\left(3 \pm \sqrt{13}, 0\right)$

    (g) $\dfrac{y'^2}{25} - \dfrac{x'^2}{9} = 1$, hipérbole, eixo real 10, eixo imaginário 6, focos $F\left(-1, 5 \pm \sqrt{34}\right)$

19. (a) Ramo da circunferência $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$ com $x \leq 3$.

    (b) Ramo da parábola $y = (x-4)^2$ com $x \leq 4$.

    (c) Ramo da parábola $(y+1)^2 = 2\,(x+2)$ com $y \leq -1$.

    (d) Ramo da elipse $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$ com $y \leq -2$.

    (e) Ramo da hipérbole $-\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ com $x \geq 0$.

    (f) Ramo da hipérbole $4\,(x+4)^2 - (y-1)^2 = 1$ com $x \leq -4$.