Cônicas – Hipérboles (Teoria)

Estrutura desta apresentação

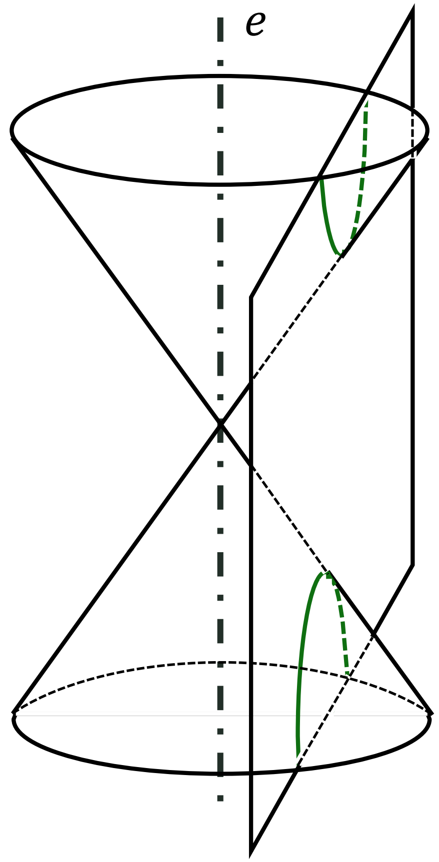
- Hipérbole
  - Definição geométrica
  - Elementos
  - Equações com centro na origem
  - Equações com centro fora da origem
  - Assíntotas

A hipérbole

As seções cônicas não degeneradas

2. Cônicas não degeneradas:

i. Uma **hipérbole**, se π for paralelo ao eixo e



A hipérbole

"A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos desse plano, em valor absoluto, é constante."

A hipérbole

Sejam dois pontos distintos do plano, F_1 e F_2, tais que $d(F_1, F_2) = 2c$. Considere uma constante a tal que $a < c$.

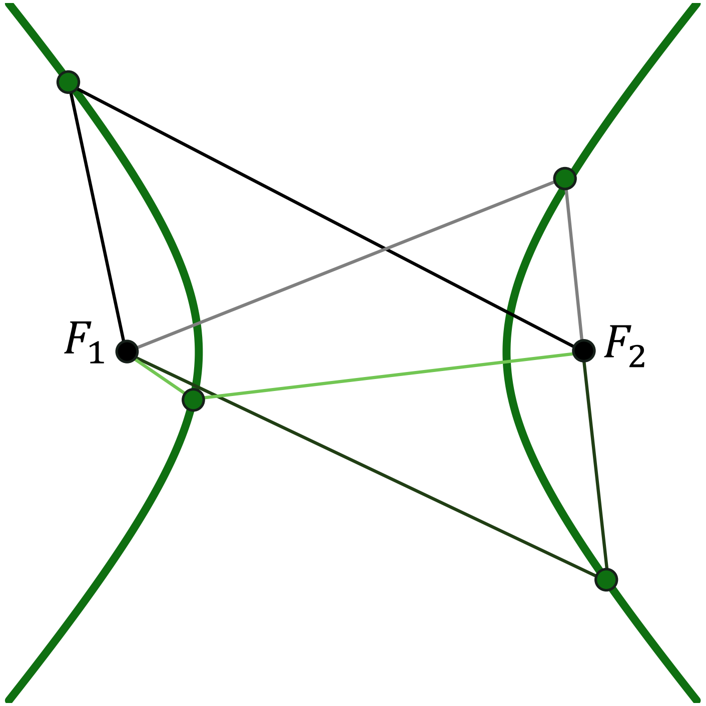
A hipérbole será dada então por todos pontos P tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

ou

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$$

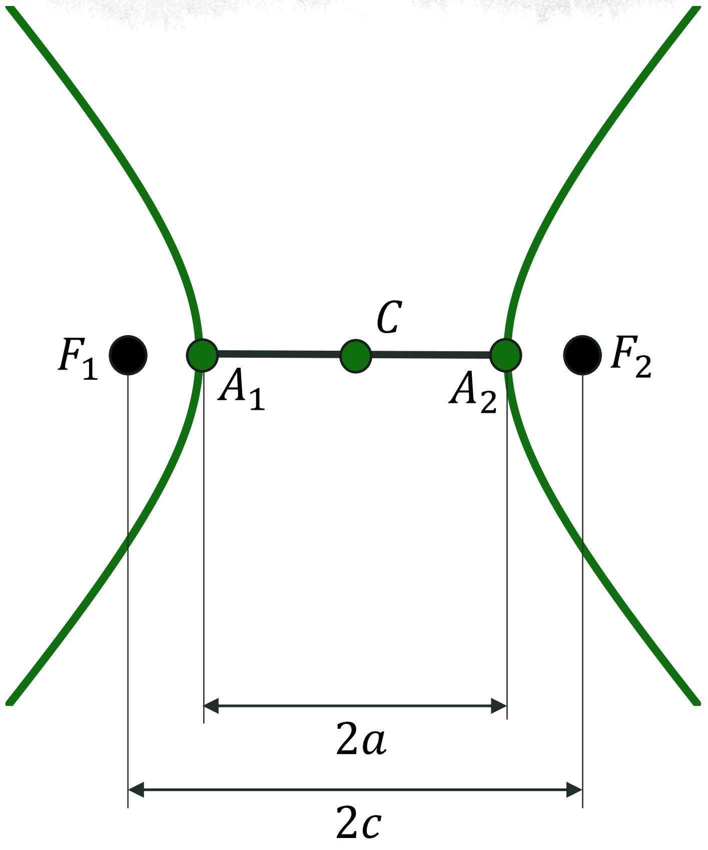
Ou seja, a hipérbole é uma curva com dois ramos.



A hipérbole

Elementos:

- **Focos:** pontos F_1 e F_2;
- **Distância focal:** distância entre F_1 e F_2 (igual a $2c$);
- **Centro:** ponto médio do segmento F_1F_2 (ponto C);
- **Vértices:** pontos em que o segmento F_1F_2 intercepta a hipérbole (pontos A_1 e A_2);
- **Eixo real ou transverso:** segmento A_1A_2 de comprimento $2a$;



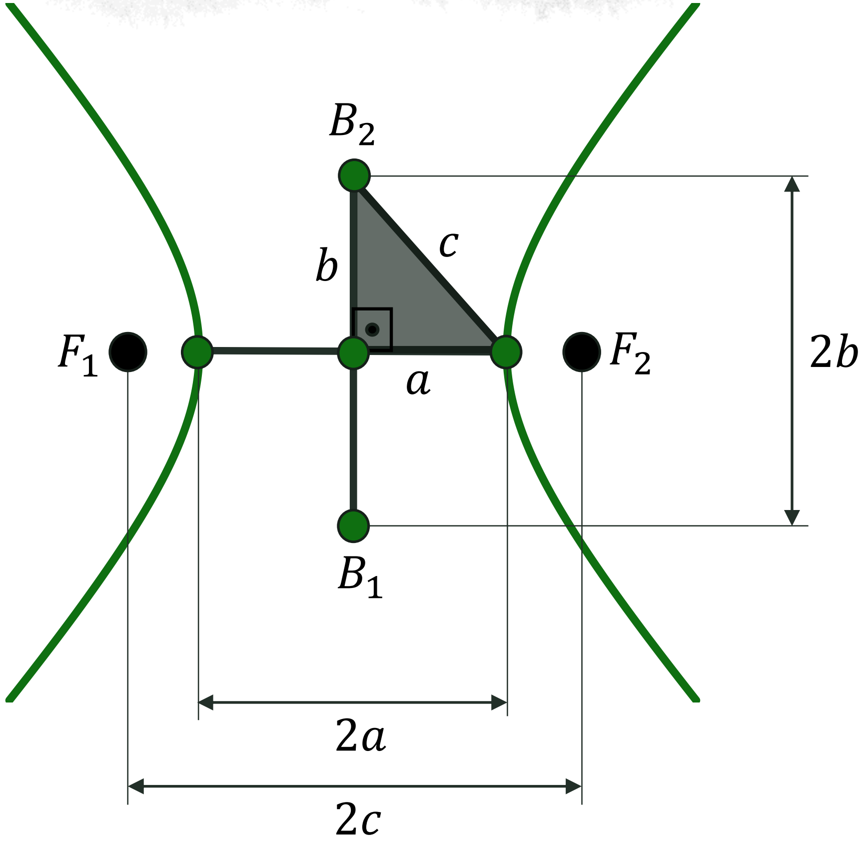
A hipérbole

Elementos:

- **Eixo imaginário ou conjugado:** segmento B_1B_2 de comprimento $2b$, em que

$$c^2 = b^2 + a^2$$

- **Excentricidade:** e, dada por $e = \frac{c}{a} > 1$.



A hipérbole

Análogo ao que foi feito para a parábola e elipse, apresentam-se agora as equações de quatro casos de hipérboles:

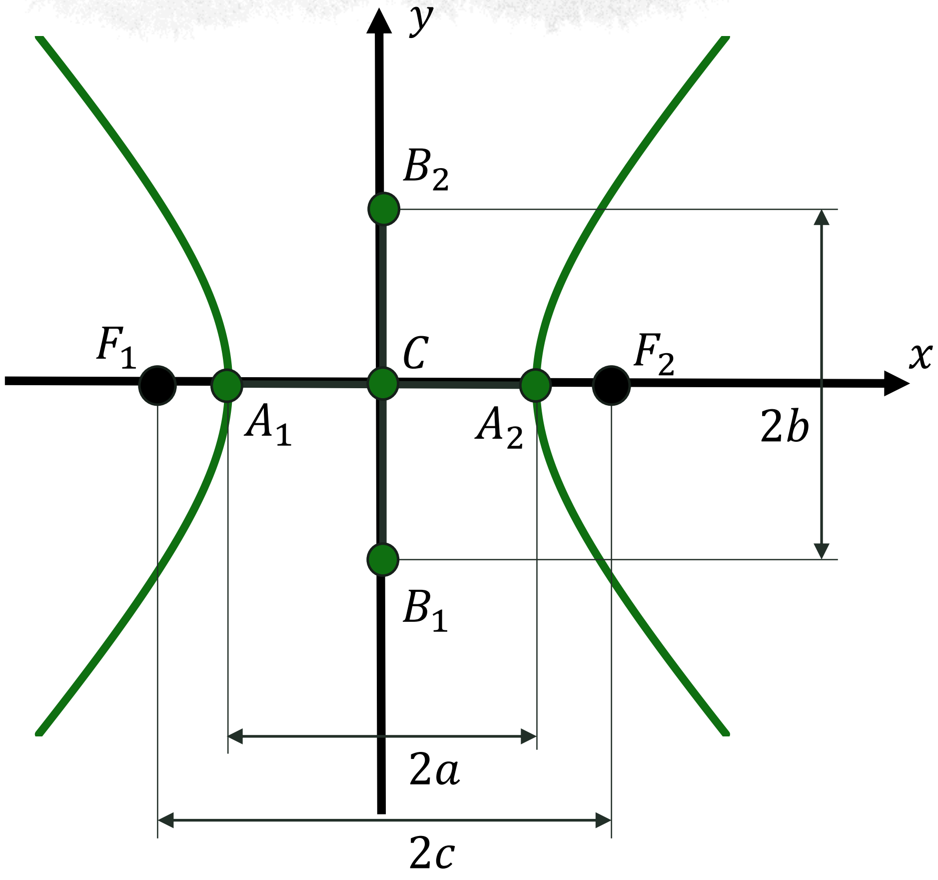
1. **Hipérbole de centro na origem do sistema**
   i. O eixo real está sobre o eixo dos x
   ii. O eixo real está sobre o eixo dos y

2. **Hipérbole de centro fora da origem do sistema**
   i. O eixo real é paralelo ao eixo dos x
   ii. O eixo real é paralelo ao eixo dos y

Observação: Não serão considerados nesta disciplina os casos em que o eixo real está inclinado.

A hipérbole

1. **Hipérbole de centro na origem do sistema**
   i. O eixo real está sobre o eixo dos x



Os elementos da hipérbole terão como coordenadas:

$$C(0,0)$$

$$F_1(-c,0) \text{ e } F_2(c,0)$$

$$A_1(-a,0) \text{ e } A_2(a,0)$$

$$B_1(0,-b) \text{ e } B_2(0,b)$$

A hipérbole

$$C(0,0)$$

$$F_1(-c,0) \text{ e } F_2(c,0)$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$

Da definição, $P(x, y)$ pertence à hipérbole se

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$\left||\overrightarrow{F_1P}| - |\overrightarrow{F_2P}|\right| = 2a$$

$$\left|\sqrt{[x-(-c)]^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$$

Um desenvolvimento análogo ao feito para elipses e parábolas fornece a equação

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Esta é a **equação reduzida da hipérbole de centro na origem e eixo real sobre o eixo dos $\boldsymbol{x}$**.

A hipérbole

1. **Hipérbole de centro na origem do sistema**
   ii. O eixo real está sobre o eixo dos y

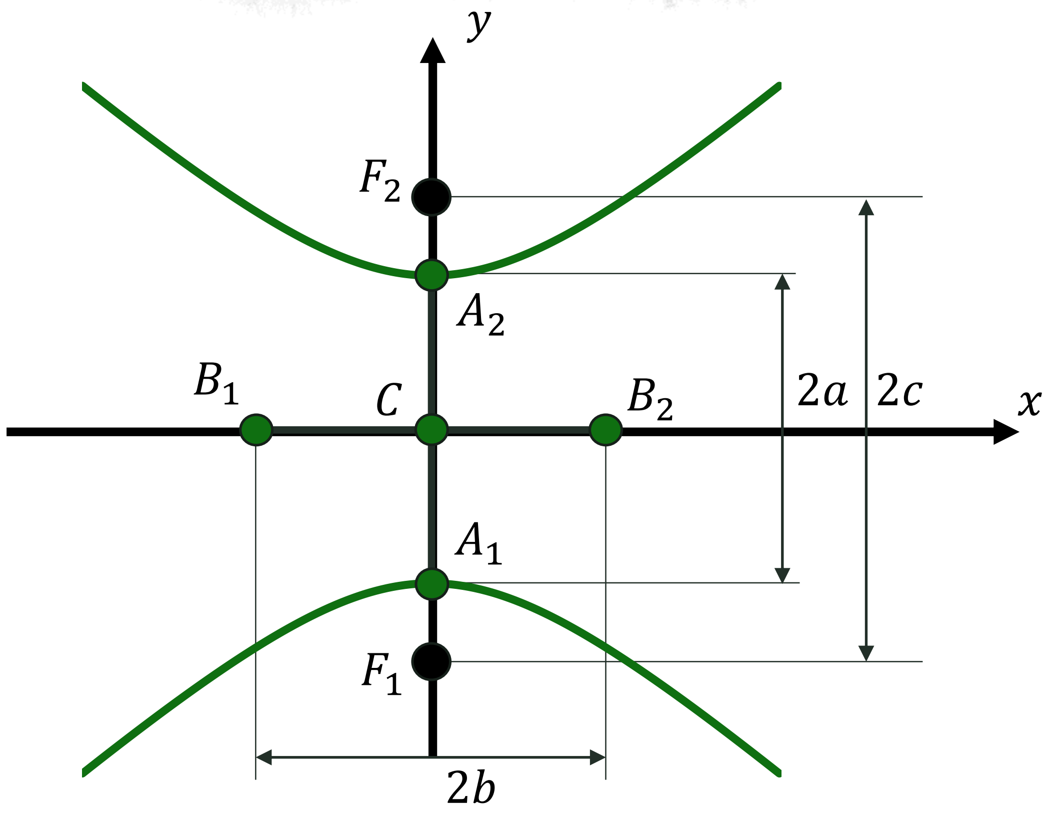
Os elementos da elipse terão como coordenadas:

$$C(0,0)$$

$$F_1(0,-c) \text{ e } F_2(0,c)$$

$$A_1(0,-a) \text{ e } A_2(0,a)$$

$$B_1(-b,0) \text{ e } B_2(b,0)$$



A hipérbole

$$C(0,0)$$

$$F_1(0,-c) \text{ e } F_2(0,c)$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$

Da definição, $P(x,y)$ pertence à hipérbole se

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$$

$$\left| |\overrightarrow{F_1P}| - |\overrightarrow{F_2P}| \right| = 2a$$

$$\left| \sqrt{(x-0)^2 + [y-(-c)]^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} \right| = 2a$$

A simplificação desta equação fornece

$$\boldsymbol{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

Esta é a **equação reduzida da hipérbole de centro na origem e eixo maior sobre o eixo dos y**.

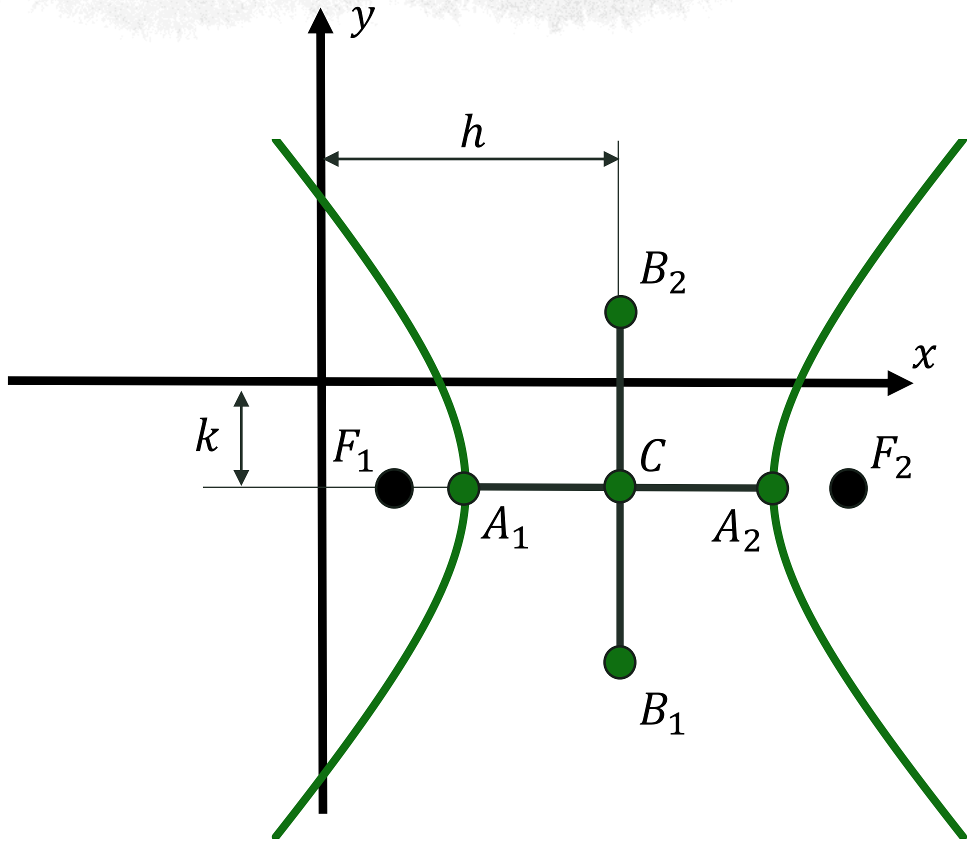
E os casos em que o centro não está na origem?

Basta utilizar as fórmulas de translação!

A hipérbole

2. Hipérbole de centro fora da origem do sistema

i. O eixo real é paralelo ao eixo dos x



A hipérbole

1. **Hipérbole de centro na origem do sistema**
   i. O eixo real está sobre o eixo dos x

$$C(0,0)$$

$$F_1(-c,0) \text{ e } F_2(c,0)$$

$$A_1(-a,0) \text{ e } A_2(a,0)$$

$$B_1(0,-b) \text{ e } B_2(0,b)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. **Hipérbole de centro fora da origem do sistema**
   i. O eixo real é paralelo ao eixo dos x

$$C(h,k)$$

$$F_1(-c+h,k) \text{ e } F_2(c+h,k)$$

$$A_1(-a+h,k) \text{ e } A_2(a+h,k)$$

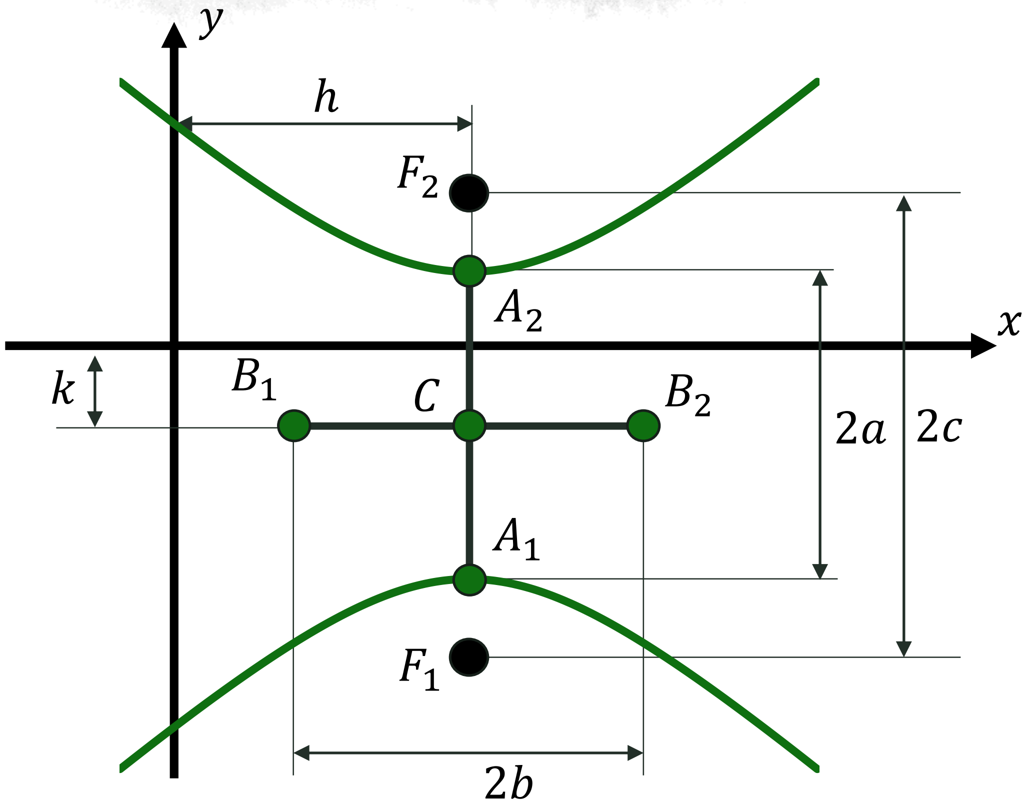
$$B_1(h,-b+k) \text{ e } B_2(h,b+k)$$

$$\boldsymbol{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

A hipérbole

2. Hipérbole de centro fora da origem do sistema

ii. O eixo real é paralelo ao eixo dos y



A hipérbole

1. Hiperbole de centro na origem do sistema

ii. O eixo real está sobre o eixo dos y

$$C(0,0)$$

$$F_1(0,-c) \text{ e } F_2(0,c)$$

$$A_1(0,-a) \text{ e } A_2(0,a)$$

$$B_1(-b,0) \text{ e } B_2(b,0)$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

2. Hipérbole de centro fora da origem do sistema

ii. O eixo real é paralelo ao eixo dos y

$$C(h,k)$$

$$F_1(h,-c+k) \text{ e } F_2(h,c+k)$$

$$A_1(h,-a+k) \text{ e } A_2(h,a+k)$$

$$B_1(-b+h,k) \text{ e } B_2(b+h,k)$$

$$\boldsymbol{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1}$$

A hipérbole

Há ainda mais uma consideração acerca das constantes a, b e c. Trata-se das **assíntotas** e, por extensão, a **abertura** da hipérbole.

As assíntotas são retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos se afastam dos focos. A tendência da hipérbole é tangenciar suas assíntotas no infinito.

Naturalmente, esta particularidade das assíntotas constitui um excelente guia para traçar o esboço do gráfico.

A seguir apresentam-se as equações das assíntotas para os dois casos de hipérbole vistos com centro $C(h, k)$.

Esta formulação não apresenta perda de generalidade, uma vez que, caso sejam necessárias as equações para uma hipérbole centrada na origem, basta realizar a substituição $h = k = 0$.

A hipérbole

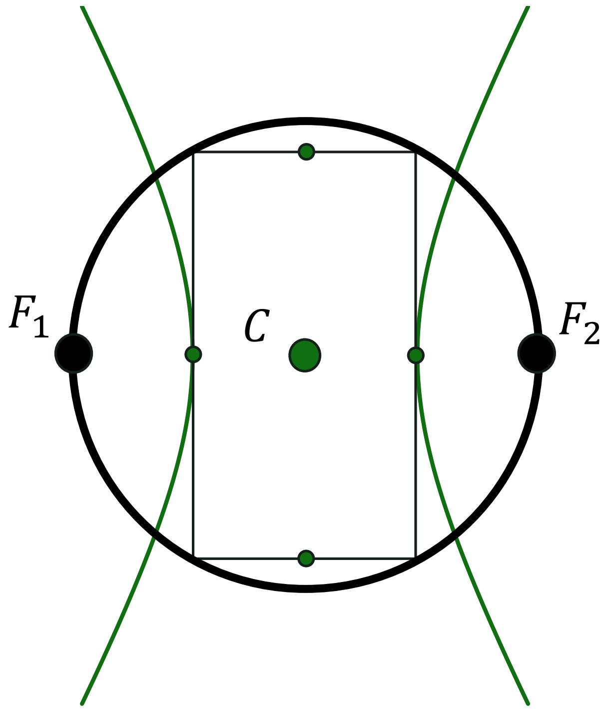
i. O eixo real é paralelo ao eixo dos x

Considere uma circunferência de raio c e cujo centro é o próprio centro C da hipérbole.

É possível criar um retângulo inscrito nesta circunferência, no qual:

- Dois lados são perpendiculares ao diâmetro F_1F_2 e possuem um dos vértices (A_1 ou A_2) como ponto médio.
- Os outros dois lados são paralelos ao diâmetro F_1F_2 e possuem um dos pontos B_1 ou B_2 como ponto médio.

Este retângulo tem lados de comprimento $2a$ e $2b$.



A hipérbole

As retas r e s, que contêm as diagonais do referido retângulo, são as **assíntotas** da hipérbole.

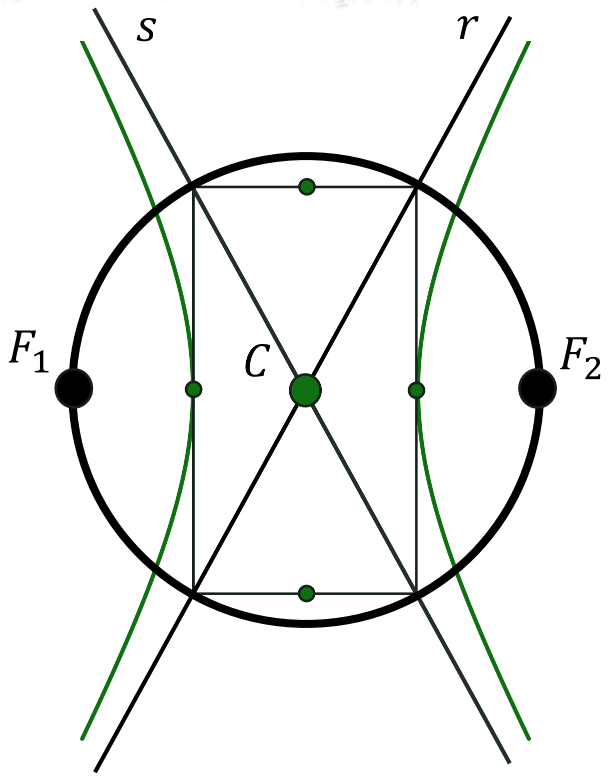
Definição e forma de criação dadas.

A pergunta agora é: como obter suas equações?

Lembre-se que a equação de uma reta pode ser dada pela expressão

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

em que (x_0, y_0) é um ponto qualquer da reta e m é o seu coeficiente angular.



A hipérbole

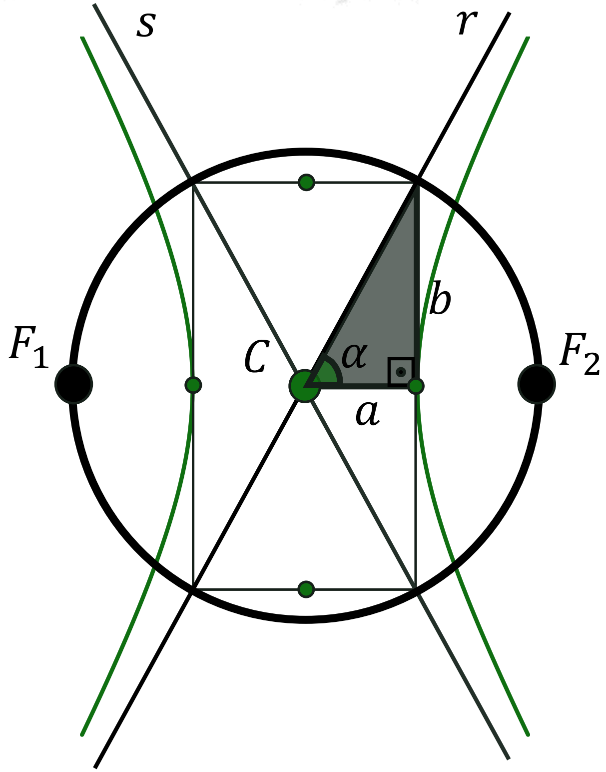
Note que, como um ponto da reta, pode-se escolher o centro da hipérbole.

Para o coeficiente angular, cria-se o triângulo a seguir. A partir dele, tem-se

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Assim, a equação da reta r é

$$r: \boldsymbol{y - k = \frac{b}{a}(x - h)}$$



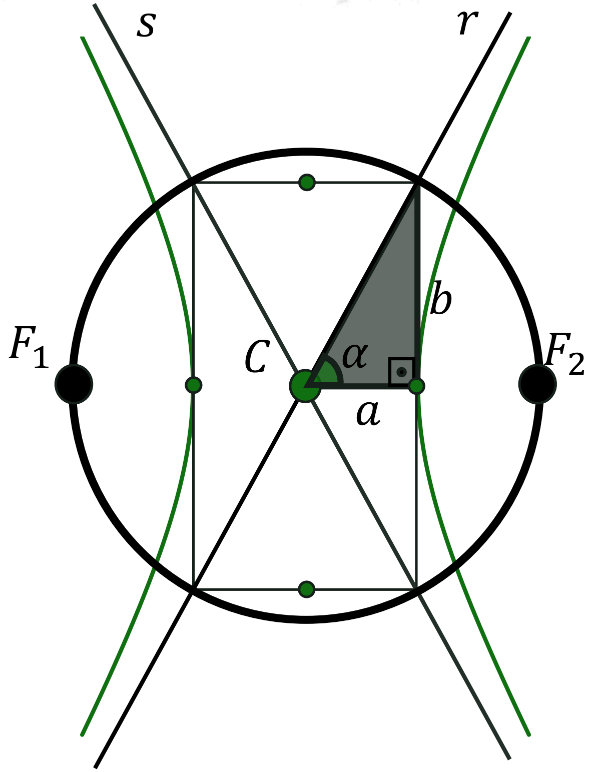
A hipérbole

Para a reta s, pode-se perceber que ela é simétrica a r em relação ao eixo real.

Ou seja, o ângulo que ela forma com o eixo real é, em módulo, igual ao de r, só que negativo.

Com isso, seu coeficiente angular tem o mesmo valor em módulo que o da reta r, só que com o sinal invertido. A equação para reta s será, por conseguinte:

$$s: \boldsymbol{y - k = -\frac{b}{a}(x - h)}$$



A hipérbole

ii. O eixo real é paralelo ao eixo dos y

O processo de criação é análogo.

Só há uma alteração no cálculo do coeficiente angular.

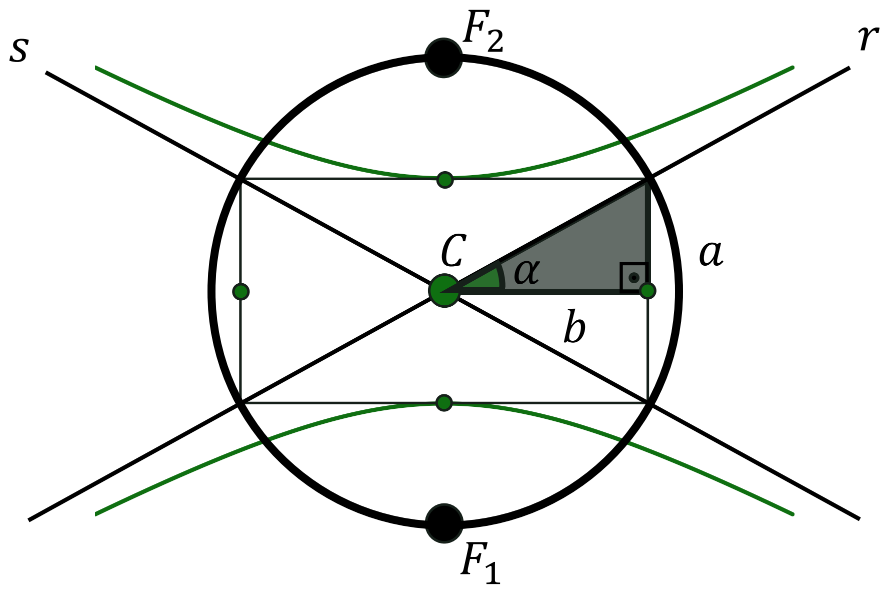
Neste caso, ele é

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Com isto, têm-se as equações

$$r: \boldsymbol{y - k = \frac{a}{b}(x - h)}$$

$$s: \boldsymbol{y - k = -\frac{a}{b}(x - h)}$$

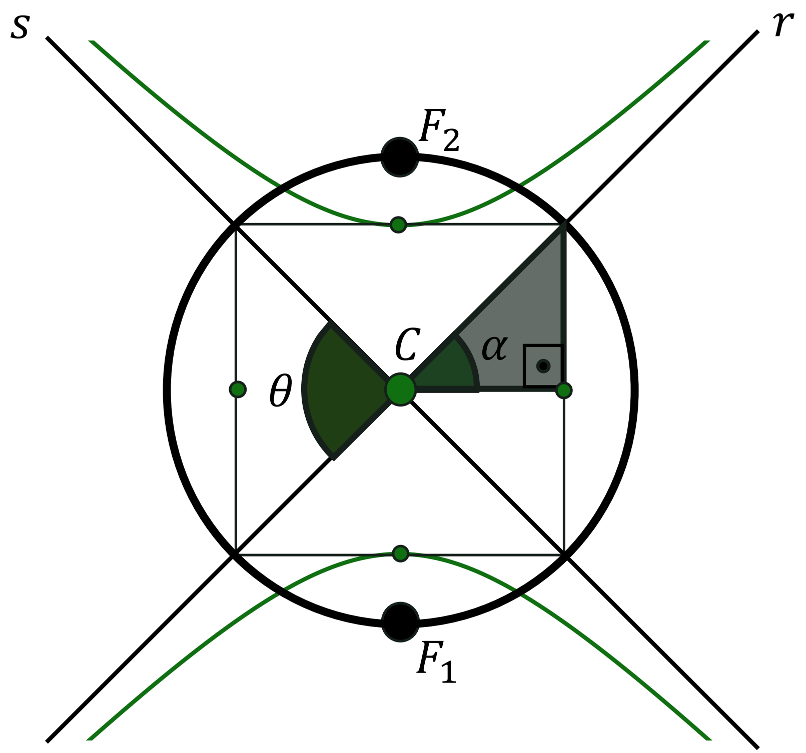


Observações finais:

a) A interseção das assíntotas fornece o centro da hipérbole!

b) A **abertura** da hipérbole é o ângulo θ formado entre as assíntotas, passando pelo eixo horizontal. Pela simetria, tem-se $\theta = 2\alpha$ (em que $m = \operatorname{tg}\alpha$).

c) Caso $\theta = 90°$ (ou seja, se $a = b$), tem-se a chamada **hipérbole equilátera**. O retângulo criado para confecção das assíntotas é, neste caso, um quadrado.



A hipérbole