Álgebra Linear (ALI0001 – CCI-192-02U)

Cálculo de Autovalores e Autovetores
Diagonalização de Operadores

Professor: Marnei Mandler

Aula de ALI do dia 21 de junho de 2023.

UDESC

Autovalores, Autovetores e Autoespaços

Definição: Seja $T: V \to V$ um operador linear.

Um vetor $v \in V$, com $v \neq \vec{0}_V$ é dito um **autovetor de T** se e somente se existir um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$T(v) = \lambda v.$$

Nesse caso, o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito **autovalor de T**, associado ao autovetor v.

Observação: Se λ é um autovalor de $T: V \to V$ então o conjunto de todos os elementos $v \in V$ tais que $T(v) = \lambda v$ forma um subespaço vetorial de V, conforme o teorema a seguir.

Teorema: Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor do operador linear $T: V \to V$ então o conjunto

$$V_\lambda = \{v \in V;\ T(v) = \lambda v\}$$

é um **subespaço vetorial de V**, chamado de **autoespaço** associado a λ.

Justificativa: Basta notar que V_λ é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar, conforme demonstrado em aula.

Observação: Note que $\vec{0}_V \in V_\lambda$, pois $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_V = \lambda \cdot \vec{0}_V$. Além disso, V_λ contém todos os autovetores de T associados ao autovalor λ.

Operador Diagonalizável

Definição: Um operador linear $T: V \to V$ é dito diagonalizável se existir uma base β para V formada por autovetores de T.

- Se $T: V \to V$ é um operador diagonalizável, com $\dim(V) = n$ temos que existe uma base $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ para V, formada por autovetores de T, associados, respectivamente, aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ então a matriz de T em relação à β é diagonal e dada por

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Observações:

- Se existir uma base β para V composta por autovetores de T, então a matriz $[T]_\beta^\beta$ é a matriz mais simples possível para T.
- Como $\det\left([T]_\beta^\beta\right) = \lambda_1.\lambda_2.\lambda_3.\dots.\lambda_n$, se tivermos que $\lambda_i \neq 0 \quad \forall i$, então o determinante será não nulo e, com isso, T será invertível, bijetora e/ou um isomorfismo.

Cálculo dos autovalores e autovetores de um operador

Questão: Como obter os autovalores e autovetores de $T: V \to V$?

Queremos encontrar autovalores $\lambda \in \mathbb{R}$ e o autovetores $v \in V$, com $v \neq \vec{0}_V$, tais que

$$T(v) = \lambda v$$

ou seja

$$T(v) - \lambda v = \vec{0}_V$$

isto é

$$(T - \lambda I)(v) = \vec{0}_V$$

em que I é o operador (ou matriz) identidade. Com isso, obtemos que

$$v \in N(T - \lambda I)$$

pois v foi anulado pelo operador $T - \lambda I$. Como $v \neq \vec{0}_V$, temos então que

$$N(T - \lambda I) \neq \{\vec{0}_V\}.$$

Com isso, vemos que $T - \lambda I$ não pode ser injetora.
Portanto, $T - \lambda I$ não é bijetora e nem invertível.
Assim, temos que $[T - \lambda I]$ também não é invertível e

$$\det([T - \lambda I]) = 0.$$

Cálculo dos autovalores e autovetores

Portanto, os autovalores λ são obtidos encontrando as raízes da equação

$$\det([T-\lambda I])=0,$$

enquanto os autovetores são as soluções não triviais (pois $v\neq\vec{0}_V$) do sistema homogêneo SPI

$$[T-\lambda I](v)=\vec{0}_V.$$

Definição: Dado um operador linear $T\colon V\to V$, definimos o polinômio característico de T como

$$p(\lambda)=\det([T-\lambda I]).$$

Observação: Como os autovalores de $T\colon V\to V$ são dados por

$$p(\lambda)=\det([T-\lambda I])=0,$$

temos que os autovalores são as raízes reais do polinômio característico de T.

Como $p(\lambda)$ tem grau igual à $n=\dim(V)$, sabemos então que existem, no máximo, n raízes reais para $p(\lambda)$ (e portanto, n autovalores para T), que podem ser distintas ou eventualmente repetidas.

Exemplo

Exercício 1: Determine o polinômio característico, os autovalores, os autovetores e autoespaços de $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = (15x - 8y,\ 24x - 13y).$$

A seguir, verifique se o operador é diagonalizável ou não.

No caso positivo, determine sua base de autovetores e a matriz de T na forma diagonal.

Solução: O exercício foi resolvido durante a aula.

Exercício 2: Determine o polinômio característico, os autovalores e os autovetores de $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (4x - 3y,\ -y, -7x + 4z).$$

A seguir, verifique se o operador é diagonalizável ou não. No caso positivo, determine sua base de autovetores e a matriz de T na forma diagonal.

Solução: O exercício foi resolvido durante a aula.

Exemplo Resolvido

Exemplo 1: Determine o polinômio característico, os autovalores, os autovetores e autoespaços de $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x,y) = (-x + 4y,\ 2x - 3y).$$

A seguir, verifique se o operador é diagonalizável ou não. No caso positivo, determine sua base de autovetores e a matriz de T na forma diagonal.

Solução: Como a matriz canônica de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},$$

o polinômio característico de T é dado por

$$p(\lambda) = \det([T - \lambda I]) = det\left(\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix}\right).$$

$$= (-1-\lambda).(-3-\lambda) - 8 \ = 3 + 3\lambda + \lambda + \lambda^2 - 8 \ = \lambda^2 + 4\lambda - 5.$$

Portanto, os autovalores de T são dadas pelas raízes de $p(\lambda)$, ou seja:

$$p(\lambda) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0.$$

Assim, obtemos dois autovalores distintos, dados por

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -5.$$

Nesse exemplo, o grau do polinômio característico é igual a $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$.

Exemplo Resolvido

Para encontrar os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$, temos que obter as soluções não triviais $v = (x, y) \neq (0,0)$ do sistema homogêneo

$$[T - 1I](v) = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}.$$

Substituindo $\lambda = 1$ em $[T - \lambda I] = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix}$ e escalonando a matriz associada ao sistema homogêneo, temos:

$$[T - 1I] = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$ são dados por $v = (x, y)$ tais que

$$-2x + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2y$$

com $y \in \mathbb{R}$. Logo, são da forma

$$v = (x, y) = (2y, y) = y(2,1).$$

Prova real:
$T(2,1) = 1(2,1)$

Com isso, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ é $v_1 = (2,1)$ e ele gera todo um subespaço vetorial formado por autovetores associados a $\lambda_1 = 1$, chamado de autoespaço e dado por $V_{\lambda_1} = V_1 = ger\{(2,1)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 2y\}$.

Exemplo Resolvido

Para encontrar os autovetores associados a $\lambda_2 = -5$, temos que obter as soluções não triviais $v = (x, y) \neq (0,0)$ do sistema homogêneo

$$[T - (-5)I](v) = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}.$$

Substituindo $\lambda = -5$ em $[T - \lambda I] = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix}$ e escalonando a matriz associada ao sistema homogêneo, temos:

$$[T + 5I] = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E os autovetores associados a $\lambda_2 = -5$ são dados por $v = (x, y)$ tais que

$$x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -x$$

com $x \in \mathbb{R}$. Logo, são da forma

$$v = (x, y) = (x, -x) = x(1, -1).$$

Prova real:
$T(1, -1) = -5(1, -1)$

Com isso, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = -5$ é $v_2 = (1, -1)$ e ele gera todo um subespaço vetorial formado por autovetores associados a $\lambda_2 = -5$ chamado de autoespaço e dado por

$$V_{\lambda_2} = V_{-5} = ger\{(1, -1)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = -x\}.$$

Exemplo Resolvido

Para verificar se T é diagonalizável basta verificar se conseguimos obter uma base para $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T.

Como

$$\beta = \{(2,1),(1,-1)\}$$

é tal que

$$a(2,1) + b(1,-1) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3a = 0 \\ a = b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

temos que β é LI e, portanto, é uma base para $\mathbb{R}^2$ composta por autovetores de T. Portanto,

T é diagonalizável

e sua matriz diagonal é

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Note a importância de considerar o ordenamento da base de autovetores. Caso invertêssemos a posição dos autovetores na base β, deve-se inverter a posição dos autovalores na diagonal da matriz $[T]_\beta^\beta$.

Exemplo

Exemplo 2: Determine os autovalores, autovetores e os autoespaços de $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado

$$T(x, y, z) = (3x - y + 2z, x + 2y + z, 3y + z).$$

A seguir, verifique se o operador é diagonalizável ou não. No caso positivo, determine a base de $\mathbb{R}^3$ composta por autovetores de T e a matriz de T na forma diagonal.

Solução: Como a matriz canônica de T é dada por $[T] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, o polinômio característico de T é dado por

$$p(\lambda) = \det([T - \lambda I]) = det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (3-\lambda).(2-\lambda).(1-\lambda) + 6 + (1-\lambda) - 3(3-\lambda)$$

$$= (3-\lambda).(2-\lambda).(1-\lambda) + 7 - \lambda - 9 + 3\lambda$$

$$= (3-\lambda).(2-\lambda).(1-\lambda) - 2 + 2\lambda$$

$$= (3-\lambda).(2-\lambda).(1-\lambda) - 2(1-\lambda).$$

Cálculo dos autovalores e autovetores

Colocando em evidência o fator comum $(1-\lambda)$ obtemos que o polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (3-\lambda).(2-\lambda).(1-\lambda) - 2(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)[\,(3-\lambda).(2-\lambda) - 2\,] \\ &= (1-\lambda)[\,6 - 5\lambda + \lambda^2 - 2\,] \\ &= (1-\lambda)(\,4 - 5\lambda + \lambda^2\,). \end{aligned}$$

Nesse exemplo, o grau do polinômio característico é igual a $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Como os autovalores de T são as raízes de $p(\lambda)$, fazemos

$$p(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)(\,4 - 5\lambda + \lambda^2\,) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Portanto, os os autovalores de T são

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 4.$$

Note que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ é uma raiz repetida (dupla) e que $\lambda_3 = 4$ é uma raiz simples.

O número de vezes que um autovalor λ é raiz do polinômio característico é chamado de multiplicidade algébrica de λ .

Com isso, a multiplicidade algébrica de $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ é igual a dois e a multiplicidade algébrica de $\lambda_3 = 4$ é igual a um.

Exemplo

Agora vamos obter os autovetores de T. Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, vamos obter as soluções não triviais do sistema homogêneo $[T - 1.I]v = \vec{0}$.

Substituindo $\lambda = 1$ em $[T - \lambda I] = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}$ e escalonando a matriz associada ao sistema homogêneo, temos:

$$[T - 1I] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Veja que
$posto([T - 1I]) = 2$
$null([T - 1I]) = 1$

Assim, os autovetores associados a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ são os elementos $v = (x, y, z)$ tais que

$$x + y + z = 0 \quad \text{e} \quad y = 0.$$

Logo $z = -x$ e $y = 0$ e assim

$$v = (x, 0, -x) = x(1,0,-1).$$

Tire a prova real, verificando que $T(1,0,-1) = 1(1,0,-1)$.

Obtemos um único autovetor LI associado ao autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, que é $v_1 = (1,0,-1)$.
Assim, o autoespaço associado a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ é dado por

$$V_1 = ger\{(1,0,-1)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = -x \ \text{ e } \ y = 0\}.$$

Exemplo

Para $\lambda_3 = 4$: vamos obter as soluções não triviais do sistema homogêneo $[T - 4I]v = \vec{0}$.

Substituindo $\lambda = 4$ em $[T - \lambda I] = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}$ e escalonando a matriz associada ao sistema homogêneo, temos:

$$[T - 4I] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Veja que
$posto([T-4I]) = 2$
$null([T-4I]) = 1$

Logo, os autovetores associados a $\lambda_2 = 4$ são os elementos $v = (x, y, z)$ tais que

$$x + y - 2z = 0 \quad \text{e} \quad y - z = 0$$

Resolvendo, obtemos $y = z$ e $x = z$ e assim

$$v = (z, z, z) = z(1,1,1).$$

Tire a prova real, verificando que $T(1,1,1) = 4(1,1,1)$

Obtemos um único autovetor LI associado ao autovalor $\lambda_3 = 4$, dado por $v_2 = (1,1,1)$ e o autoespaço associado a $\lambda_3 = 4$ é dado por

$$V_4 = ger\{(1,1,1)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y = z\}.$$

Exemplo

Para verificar se T é diagonalizável basta verificar se conseguimos uma base para $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

Como obtemos apenas dois autovetores LI's associados aos autovalores distintos, temos que

$$\beta = \{(1,0,-1),(1,1,1)\}$$

não forma uma base para $\mathbb{R}^3$ e, por isso, T não é diagonalizável.

Assim, T não pode ser representado por uma matriz diagonal

Observações:

- Veja que no Exemplo anterior, T não é diagonalizável porque o autovalor duplo $(\lambda = 1)$ admite apenas um único autovetor LI.
- Por isso, é importante analisarmos o que ocorre com a quantidade de autovetores linearmente independentes (LI) associados a autovalores repetidos.
- Veja que essa quantidade de autovetores LI's é, por definição, igual à dimensão do autoespaço associado ao autovalor em questão.
- Nesse sentido, na próxima aula definiremos que a dimensão do autoespaço associado a um autovalor será a multiplicidade geométrica desse autovalor.