Álgebra Linear (ALI0001 – CCI-192-02U)

Propriedades e Núcleo de Transformações Lineares

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula do dia 10 de maio de 2023.

Revisão: Definição e propriedades

Definição: Sejam U e V espaços vetoriais.

Uma função vetorial $T: U \to V$ é uma transformação linear entre U e V se e somente se

i) Para todos $u, v \in U$ tivermos que $T(u+v) = T(u) + T(v)$;

ii) Para todo $k \in \mathbb{R}$ e para todo $u \in U$ tivermos que $T(ku) = kT(u)$.

- Propriedade 1: Se $T: U \to V$ é uma transformação linear então a imagem do vetor nulo de U é o vetor nulo de V, isto é,

$$T(\vec{0}_U) = \vec{0}_V.$$

Observação: A contraposição da Propriedade 1 indica que

Se $T: U \to V$ é tal que $T(\vec{0}_U) \neq \vec{0}_V$ então T NÃO é uma transformação linear.

- Propriedade 2: Se $T: U \to V$ é uma transformação linear então para todos $u, v, w \in U$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$ têm-se que

$$T(au + bv + cw) = aT(u) + bT(v) + cT(w).$$

- Propriedade 3: Uma transformação linear $T: U \to V$ fica unicamente determinada conhecendo-se as imagens dos vetores de uma base do domínio U.

Exercícios:

Exercício 1) Encontre a lei da transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ tal que

$$T(1,-1,0) = 3 - x + 5x^2$$

$$T(0,1,-1) = -2 + 4x - x^2$$

$$T(1,1,-1) = 7 - x + 2x^2.$$

Exercício 2) Encontre a lei da transformação linear $T: P_2 \to M(2,2)$ tal que

$$T(1 + x - x^2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T(1 + 2x - x^2) = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T(2 - x - x^2) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercício 3) Encontre a lei da transformação linear $T: M(2,2) \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (1,1,1); \qquad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = (1,-1,-1);$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-1,0,1) \quad \text{e} \quad T\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = (0,5,-2).$$

Solução: Os Exercícios 1 e 2 foram resolvidos durante a aula.

O Exercício 3 foi deixado para ser resolvido pelos estudantes.

Exemplos Resolvidos:

Exemplo 1) Uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ é tal que

$$T(0,1,0) = (-1,2,-3,4)$$
$$T(1,0,1) = (5,0,7,-9)$$
$$T(1,1,0) = (-6,1,-1,0).$$

Sabendo que $\beta = \{(0,1,0),(1,0,1),(1,1,0)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$, determine a lei de formação de T.

Solução: Como β é uma base de $\mathbb{R}^3$, para qualquer $u = (x,y,z)$ temos que existem $a,b,c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= a(0,1,0) + b(1,0,1) + c(1,1,0)\\ &= (b+c, a+c, b).\end{aligned}$$

Assim, obtemos um sistema linear (que deve ser possível):

$$\begin{cases} b + c = x \\ a + c = y \\ b = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &c = x - b = x - z \\ &a = y - c = y - (x - z) = -x + y + z \\ &b = z \end{aligned}$$

Exemplos Resolvidos:

Assim, obtemos que

$$(x,y,z) = (-x+y+z)(0,1,0) + z(1,0,1) + (x-z)(1,1,0).$$

Aplicando a transformação T em ambos os lados:

$$T(x,y,z) = T((-x+y+z)(0,1,0) + z(1,0,1) + (x-z)(1,1,0)).$$

Usando a Propriedade 2, obtemos que

$$T(x,y,z) = (-x+y+z)T(0,1,0) + zT(1,0,1) + (x-z)T(1,1,0).$$

Substituindo as imagens dadas no enunciado:

$$T(x,y,z) = (-x+y+z)(-1,2,-3,4) + z(5,0,7,-9) + (x-z)(-6,1,-1,0).$$

Efetuando os cálculos:

$$T(x,y,z) = (x-y-z,-2x+2y+2z,3x-3y-3z,-4x+4y+4z)$$
$$+(5z,0,7z,-9z) + (-6x+6z,x-z,-x+z,0)$$
$$= (x-y-z+5z-6x+6z,-2x+2y+2z+x-z,3x-3y-3z+7z-x+z,-4x+4y+4z-9z).$$

Portanto, a lei de formação de T é dada por:

$$T(x,y,z) = (-5x-y+10z,-x+2y+z,2x-3y+5z,-4x+4y-5z).$$

Prova real: $T(0,1,0) = (-1,2,-3,4)$ $T(1,0,1) = (5,0,7,-9)$ $T(1,1,0) = (-6,1,-1,0).$

Exemplos Resolvidos:

Exemplo 2) Uma transformação linear $T: P_2 \to M(2,2)$ é tal que

$$T(1+x) = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad T(-1-x^2) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T(x+x^2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Qual é a lei de formação de T?

Solução: Note que

$$\beta = \{1+x, -1-x^2, x+x^2\}$$

é um conjunto linearmente independente (verifique como exercício) e como temos três vetores em β e $\dim(P_2) = 2+1 = 3$, obtemos que β é uma base de P_2.

Portanto, conhecemos a imagem dos vetores de uma base e podemos utilizar a Propriedade 3 para obter a lei de formação de T.

Seja $p(x) = a + bx + cx^2 \in P_2$. Como β é base de P_2, sabemos que $p(x)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores de β.

Assim, existem $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} p(x) = a + bx + cx^2 &= a_1(1+x) + a_2(-1-x^2) + a_3(x+x^2) \\ &= (a_1 - a_2) + (a_1 + a_3)x + (-a_2 + a_3)x^2. \end{aligned}$$

Exemplos Resolvidos:

Resolvendo o sistema linear:

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = a \\ a_1 + a_3 = b \\ -a_2 + a_3 = c \end{cases}$$

$$a_1 = a + a_2$$

$$a + a_2 + c + a_2 = b$$

$$a_3 = c + a_2$$

$$a_1 = \frac{a+b-c}{2}$$

$$a_2 = \frac{-a+b-c}{2}$$

$$a_3 = \frac{-a+b+c}{2}$$

Assim, obtemos que

$$a + bx + cx^2 = \frac{a+b-c}{2}(1+x) + \frac{-a+b-c}{2}(-1-x^2) + \frac{-a+b+c}{2}(x+x^2).$$

Aplicando a transformação linear em ambos os lados e usando a linearidade de T obtemos

$$T(a+bx+cx^2) = \frac{a+b-c}{2}T(1+x) + \frac{-a+b-c}{2}T(-1-x^2) + \frac{-a+b+c}{2}T(x+x^2)$$

e substituindo as imagens dadas no enunciado da questão, obtemos

$$T(a+bx+cx^2) = \frac{a+b-c}{2}.\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \frac{-a+b-c}{2}.\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \frac{-a+b+c}{2}.\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Exemplos Resolvidos:

Portanto, a lei de T é dada por:

$$T(a+bx+cx^2)=\frac{a+b-c}{2}\cdot\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 6\end{bmatrix}+\frac{-a+b-c}{2}\cdot\begin{bmatrix}4 & 6\\ -2 & 3\end{bmatrix}+\frac{-a+b+c}{2}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4a+4b-4c & -a-b+c\\ \dfrac{3a+3b-3c}{2} & 3a+3b-3c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2a+2b-2c & -3a+3b-3c\\ a-b+c & \dfrac{-3a+3b-3c}{2}\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}-a+b+c & 0\\ 0 & a-b-c\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a+7b-5c & -4a+2b-2c\\ \dfrac{5a+b-c}{2} & \dfrac{5a+7b-11c}{2}\end{bmatrix}.$$

Convém verificar se são válidas as condições do enunciado, ou seja, tirar a prova real, constatando se:

$$T(1+x)=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$$

$$T(-1-x^2)=\begin{bmatrix}4 & 6\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

e $T(x+x^2)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$.

Núcleo de uma Transformação Linear

Seja $T: U \to V$ uma transformação linear.

Vamos obter todos os elementos do domínio U que são anulados pela transformação linear T, ou seja, queremos encontrar todos os elementos $u \in U$ tais que

$$T(u) = \vec{0}_V.$$

Intuitivamente, os elementos $u \in U$ tais que $T(u) = \vec{0}_V$ podem ser vistos como as "raízes de T". Chamaremos o conjunto formado por todas essas "raízes" de Núcleo de T.

Definição: Seja $T: U \to V$ uma transformação linear.
O Núcleo de T é definido como o conjunto

$$N(T) = \{u \in U;\ T(u) = \vec{0}_V\}.$$

Observações:

i) O núcleo de $T: U \to V$ é sempre um subconjunto do domínio U, ou seja, $N(T) \subset U$.

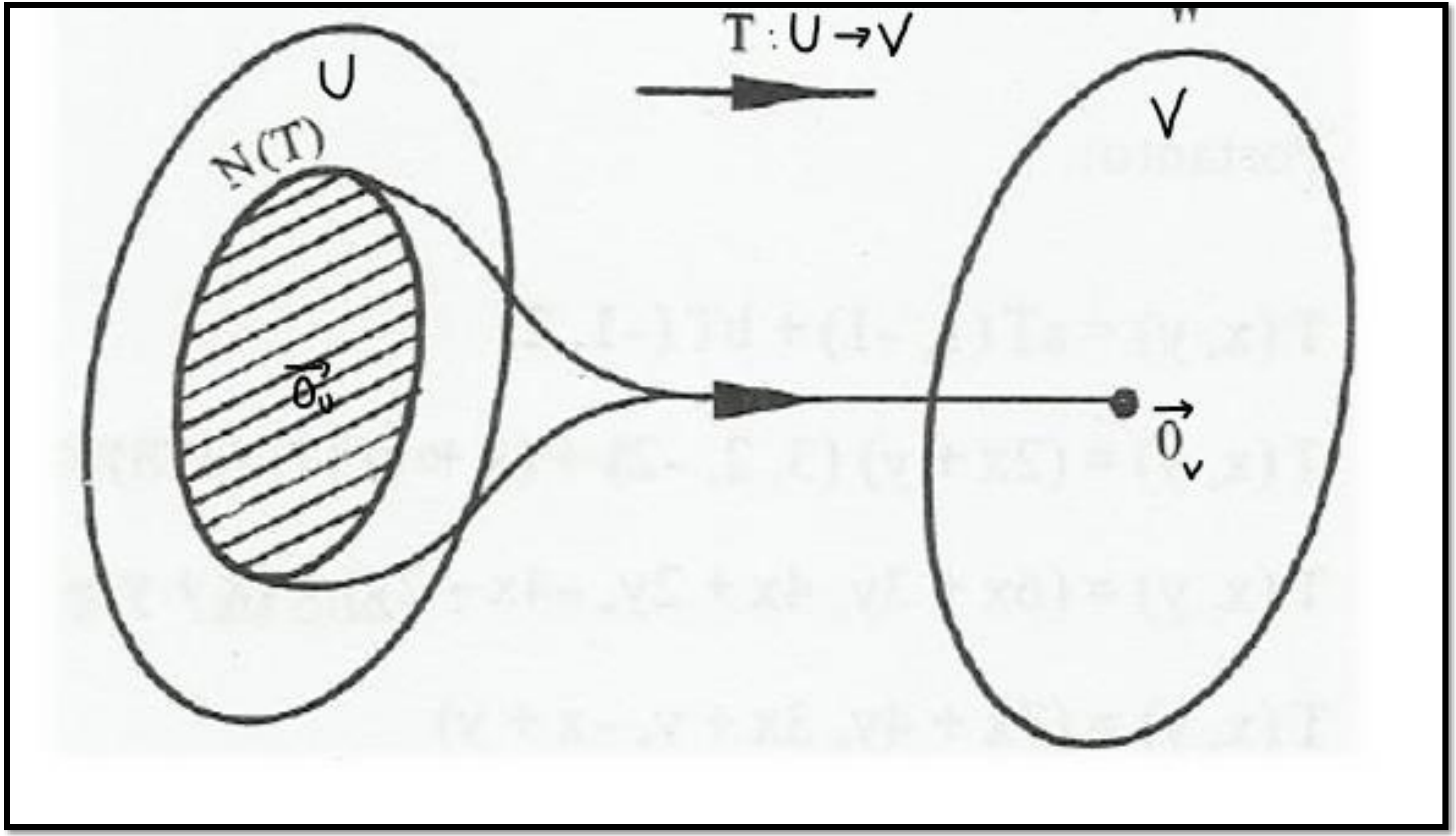
ii) Como $T(\vec{0}_U) = \vec{0}_V$ sempre temos que $\vec{0}_U \in N(T)$.

iii) Com isso, o núcleo de uma transformação linear sempre é um conjunto não vazio (pois contém pelo menos o vetor nulo). Denotamos esse fato como $N(T) \neq \emptyset$.

iv) Alguns autores usam "Kernel" para ser referir ao núcleo e o denotam por $Ker(T)$.

Núcleo de uma Transformação Linear

Em uma representação esquemática, temos que o núcleo de uma transformação linear $T: U \rightarrow V$ é tal que



Exercícios

Exercício 4) Considere $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (x - 3y - 6z, -2x + 5y + 8z, 3x - 4y + 2z).$$

a) Verifique se $u = (-3, -1, 0)$ pertence ao núcleo de T.

b) Verifique se $u = \left(3, 2, \frac{-1}{2}\right)$ pertence ao núcleo de T.

c) Encontre todos os elementos que pertencem ao núcleo de T.

Solução: Todos os itens foram resolvidos durante a aula.

Exemplo 3) Considere $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + 2y - 3z,\ 4x - 5y - 11z)$.

a) Mostre que T é uma transformação linear.

b) Encontre o núcleo de T.

Solução a) Sejam $u = (x, y, z)$ e $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Temos que

$$
\begin{aligned}
T(u + v) &= T(x + a, y + b, z + c) \\
&= ((x + a) + 2(y + b) - 3(z + c), 4(x + a) - 5(y + b) - 11(z + c)) \\
&= (x + a + 2y + 2b - 3z - 3c, 4x + 4a - 5y - 5b - 11z - 11c) \\
&= (x + 2y - 3z, 4x - 5y - 11z) + (a + 2b - 3c, 4a - 5b - 11c) \\
&= T(x, y, z) + T(a, b, c) = T(u) + T(v)
\end{aligned}
$$

Além disso, para qualquer $k \in \mathbb{R}$ temos

$$
\begin{aligned}
T(ku) &= T(kx, ky, kz) = (kx + 2ky - 3kz, 4kx - 5ky - 11kz) \\
&= k(x + 2y - 3z, 4x - 5y - 11z) = kT(u)
\end{aligned}
$$

Assim, T preserva a soma e a multiplicação por escalar.

Portanto, é uma transformação linear.

Exemplos Resolvidos

Solução: b) Seja agora $u = (x, y, z) \in N(T)$.

Aplicando a definição de núcleo para $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, temos que

$$T(u) = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}$$

ou seja

$$T(x, y, z) = (0,0).$$

Substituindo a expressão de T, obtemos

$$(x + 2y - 3z, 4x - 5y - 11z) = (0,0)$$

E chegamos em um sistema linear homogêneo dado por $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 4x - 5y - 11z = 0 \end{cases}$.

Resolvendo o sistema diretamente, da primeira equação temos $x = -2y + 3z$ e substituindo na segunda equação, obtemos

$$4(-2y + 3z) - 5y - 11z = 0 \quad \Rightarrow \quad -8y + 12z - 5y - 11z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 13y.$$

Voltando na equação anterior, temos $x = -2y + 3z = -2y + 3(13y) = 37y$.

Assim a solução do sistema homogêneo (que é SPI) é dada por $x = 37y$, $z = 13y$, com $y \in \mathbb{R}$ (variável livre). Portanto o núcleo de T é dado por

$$N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 37y \ \text{ e } \ z = 13y\} = \{(37y, y, 13y);\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Teorema do Núcleo

Teorema: Se $T: U \to V$ é uma transformação linear então $N(T)$ é um subespaço vetorial do espaço domínio U.

Justificativa: Deve-se verificar que $N(T)$ é fechado para a soma e para a multiplicação por escalar definidas em U.

Para isso, sejam $u, v \in N(T)$ e $k \in \mathbb{R}$.

Logo, pela definição de núcleo, temos que

$$T(u) = \vec{0}_V \quad \text{e} \quad T(v) = \vec{0}_V.$$

Assim, $u + v$ é tal que

$$T(u+v) = T(u) + T(v) = \vec{0}_V + \vec{0}_V = \vec{0}_V$$

ou seja, $u + v$ é anulado por T, fato que indica que

$$u + v \in N(T).$$

Da mesma forma, se $k \in \mathbb{R}$ temos que ku é tal que

$$T(ku) = kT(u) = k.\vec{0}_V = \vec{0}_V$$

ou seja, ku também é anulado por T, o que indica que $ku \in N(T)$.

Portanto, $N(T)$ é um subconjunto de U (pois $N(T) \subset U$) que é fechado para a soma e para a multiplicação por escalar. Isso significa que $N(T)$ é um subespaço vetorial de U.

Base e dimensão para o Núcleo

Como o núcleo de uma transformação linear $T: U \to V$ é um subespaço vetorial do domínio U, podemos sempre obter uma base e a dimensão para $N(T)$.

Exercício 5) Determine uma base e a dimensão para o núcleo de $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (x - 3y - 6z, -2x + 5y + 8z, 3x - 4y + 2z).$$

Exercício 6) Determine uma base e a dimensão para o núcleo de $T: M(2,2) \to P_2$ dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + 2b - 3c - 6d) + (-3a - 7b + 13c + 25d)x + (5a + 4b + 9c + 12d)x^2$$

Solução: Os Exercícios 5 e 6 foram resolvidos durante a aula.

Exemplos Resolvidos

Como o núcleo de uma transformação linear $T: U \to V$ é um subespaço vetorial do domínio U, podemos sempre obter uma base e a dimensão para $N(T)$.

Exemplo 4) Determine uma base e a dimensão para o núcleo de $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z) = (x + 2y - 3z,\ 4x - 5y - 11z).$$

Solução: Seja $u = (x, y, z) \in N(T)$. No exemplo anterior, obtivemos que

$$x = 37y, \qquad z = 13y, \quad \text{com } y \in \mathbb{R}.$$

Logo, podemos escrever

$$u = (x, y, z) = (37y, y, 13y) = y(37, 1, 13).$$

Essa igualdade indica que qualquer vetor do núcleo de T é gerado por $(37, 1, 13)$.

Como encontramos um único gerador, o conjunto $\beta = \{(37, 1, 13)\}$ é necessariamente linearmente independente (LI).

Portanto uma base para $N(T)$ é

$$\beta = \{(37, 1, 13)\}$$

e como a base é formada por um único vetor, temos que $\dim\big(N(T)\big) = 1$.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 5) Determine uma base e a dimensão para o núcleo de $T: M(2,2) \to P_2$ dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b-c+d) + (2a-b+3c)x + (5a+2b+3d)x^2.$$

Solução: Seja $u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in N(T)$. Aplicando a definição de núcleo para $T: M(2,2) \to P_2$, temos que

$$T(u) = \vec{0}_{P_2}$$

ou seja

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0 + 0x + 0x^2.$$

Substituindo a expressão de T, obtemos

$$(a+b-c+d) + (2a-b+3c)x + (5a+2b+3d)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

E novamente chegamos em um sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} a+b-c+d=0 \\ 2a-b+3c=0 \\ 5a+2b+3d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} d=-a-b+c \\ b=2a+3c \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} d=-a-(2a+3c)+c=-3a-2c \\ b=2a+3c \end{matrix}$$

Substituindo $d=-3a-2c$ e $b=2a+3c$ na última equação, obtemos

$$5a+2b+3d=0 \quad \Rightarrow \quad 5a+2(2a+3c)+3(-3a-2c)=0 \quad \Rightarrow \quad 0=0.$$

Exemplos Resolvidos

A última igualdade indica que o sistema homogêneo é SPI, com soluções dadas por

$$b = 2a + 3c, \quad d = -3a - 2c$$

com $a, c \in \mathbb{R}$ (variáveis livres).

Com isso, podemos reescrever

$$u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a + 3c \\ c & -3a - 2c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Essa igualdade indica que qualquer vetor do núcleo de T é gerado pelos elementos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

É fácil verificar (faça como exercício) que esses geradores são linearmente independentes (LI). Com isso, obtemos que

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right\}$$

gera o núcleo de T e é LI, portanto é uma base para $N(T)$.

Como temos dois elementos nessa base, temos que

$$\dim\big(N(T)\big) = 2.$$

Exemplos Resolvidos

Exemplo 6) Determine uma base e a dimensão para o núcleo de $T: P_2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(p(x)) = (4p(0),\ p(1),\ p(0) + 7p(1)).$$

Solução: Seja $p(x) = a + bx + cx^2 \in N(T)$.

Aplicando a definição de núcleo para $T: P_2 \to \mathbb{R}^3$, temos que $T\big(p(x)\big) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$ ou seja

$$T(a + bx + cx^2) = (0,0,0).$$

Substituindo a expressão de T, obtemos

$$(4p(0), p(1), p(0) + 7p(1)) = (0,0,0).$$

Como $p(0) = a + b.0 + c.0^2 = a$ e $p(1) = a + b.1 + c.1^2 = a + b + c$ obtemos

$$(4a, a + b + c, a + 7(a + b + c)) = (0,0,0)$$

ou seja

$$(4a, a + b + c, 8a + 7b + 7c) = (0,0,0)$$

E novamente chegamos em um sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} 4a = 0 \\ a + b + c = 0 \\ 8a + 7b + 7c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ b + c = 0 \\ 7b + 7c = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ b = -c \\ 0 = 0 \end{matrix}$$

Exemplos Resolvidos

A última igualdade indica que o sistema homogêneo é SPI, com soluções dadas por

$$a = 0, \qquad b = -c,$$

com $c \in \mathbb{R}$ (variável livre).

Com isso, podemos reescrever

$$p(x) = a + bx + cx^2 \quad = 0 - cx + cx^2 \quad = c(-x + x^2).$$

Essa igualdade indica que qualquer vetor do núcleo de T é gerado pelo elemento

$$-x + x^2$$

Como encontramos um único gerador, o conjunto

$$\beta = \{-x + x^2\}$$

é necessariamente linearmente independente (LI).

Portanto uma base para $N(T)$ é

$$\beta = \{-x + x^2\}$$

e como a base é formada por um único vetor, temos que

$$\dim\big(N(T)\big) = 1.$$

Exemplos Resolvidos

Exemplo 7) Determine uma base e a dimensão para o núcleo de $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ dada por

$$T(a,b,c) = (a-2b+c) + (3a+b-c)x + 5cx^2.$$

Solução: Seja $u = (a,b,c) \in N(T)$.

Aplicando a definição de núcleo para $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$, temos que $T(u) = \vec{0}_{P_2}$ ou seja

$$T(a,b,c) = 0 + 0x + 0x^2.$$

Substituindo a expressão de T, obtemos

$$(a-2b+c) + (3a+b-c)x + 5cx^2 = 0 + 0x + 0x^2.$$

E novamente chegamos em um sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ 3a + b - c = 0 \\ 5c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 2b \\ \\ c = 0 \end{matrix} \Rightarrow 7b = 0 \Rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ b = 0. \\ c = 0 \end{matrix}$$

Com isso, temos que

$$u = (a,b,c) = (0,0,0) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}.$$

Assim, se um vetor pertence ao núcleo de T, então ele é necessariamente o vetor nulo do domínio da transformação. Isso significa que núcleo de T é composto apenas pelo vetor nulo de $\mathbb{R}^3$, ou seja $N(T) = \{(0,0,0)\} = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.

Exemplo e Exercícios

Dessa forma, obtemos que a base para $N(T)$ deve ser o conjunto vazio, ou seja

$$\beta_{N(T)} = \emptyset.$$

Lembre que não podemos incluir o vetor nulo na base, pois sua presença faz com o conjunto seja LD (contrariando a definição de base).

E se incluirmos qualquer outro vetor não nulo na base, ele irá gerar outros vetores além do próprio vetor nulo, ou seja, não irá corresponder ao núcleo que obtivemos nos cálculos anterior.

Assim, como a base para $N(T)$ é vazia, não existe nenhum vetor em sua base e com isso

$$\dim(N(T) = 0.$$