UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS (CCT)
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA (DMAT)
GRUPO COLABORATIVO DE ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR*

QUARTA LISTA DE EXERCÍCIOS DE ALI-001**

OPERADORES LINEARES

Questões:

1. Encontre a lei e a matriz canônica do operador linear no plano que realiza uma projeção sobre a reta $y = 5x$. A seguir, verifique se o operador é invertível e, caso seja, encontre sua inversa.

2. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador dado por $T = C_h \circ R$, em que R representa a reflexão em torno da reta $y - 2x = 0$ e C_h representa um cisalhamento horizontal de fator -2. Determine a lei de T.

3. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador dado por $T = C \circ P \circ C_v$, em que C_v representa o cisalhamento vertical de fator -4, P é a projeção sobre a reta $x = -3y$ e C representa a contração de fator $1/10$. Determine a lei de T.

4. Usando inversão matricial, mostre que
   a) O inverso do operador que realiza uma reflexão em torno da reta $y = x$ é a reflexão em torno da própria reta $y = x$.
   b) O inverso do operador que realiza uma reflexão em torno de um eixo coordenado é a própria reflexão em torno daquele próprio eixo.
   c) O inverso do operador que realiza um cisalhamento horizontal de fator k é um cisalhamento horizontal de fator $-k$.

5. No plano, uma rotação anti-horária de $45°$ é seguida por uma dilatação de fator $\sqrt{3}$. Determine a lei do operador T que representa essa transformação no plano.

6. Determine a lei do operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que representa uma reflexão em torno da reta $y = -x$, seguida de uma dilatação de fator 2, seguida de um cisalhamento vertical de fator 3. A seguir, verifique se esse operador é invertível. Caso seja, encontre a lei do operador inverso.

7. Analise se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "Se $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma rotação de um ângulo θ (em sentido anti-horário) em torno da origem, seguida de uma dilatação de fator 2 então T^{-1} é uma contração de fator $1/2$, seguida de uma rotação de um ângulo $-\theta$ em torno da origem.

* Professores participantes do Grupo Colaborativo no semestre 2023/1: Katiani da Conceição Loureiro, Graciela Moro e Marnei Luis Mandler.

8. Encontre o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido pela rotação de $\pi/6$ (em sentido anti-horário), seguida de uma reflexão em torno da reta $y = 2x$. A seguir, represente geometricamente a imagem do retângulo de vértices $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,2)$ e $D(0,2)$ por meio desse operador.

9. (ENADE-2021) Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado pela reflexão em torno do eixo x, seguida da rotação de $\pi/2$ no sentido anti-horário e da dilatação de fator 2. Com base nessas informações, é correto afirmar que $T(20{,}24)$ é igual a:
   a) $(40, 48)$. b) $(48, 40)$ c) $(40, -48)$ d) $(48, -40)$ e) $(-48, -40)$

10. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear que realiza uma rotação anti-horária de ângulo $\theta = \frac{3\pi}{2}$ em torno da origem, seguida de um cisalhamento vertical de fator -5, seguido de uma dilatação de fator 41, seguida de uma reflexão em torno da reta $y = -9x$. Determine a lei de T.

11. O operador linear $T(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2}x + \sqrt{2}z,\ y,\ \sqrt{2}x - \sqrt{2}z\right)$ representa a rotação de um ângulo θ em torno do eixo y. Determine o valor do ângulo de rotação.

12. Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido pela reflexão de um vetor $v = (x, y, z)$ em torno da origem. Determine a lei do operador T^{-1}.

13. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear que realiza a projeção sobre o plano $x + y + z = 0$. Determine a lei desse operador. A seguir, encontre uma base para o núcleo e para o conjunto imagem desse operador. Por fim, verifique se o operador é invertível ou não.

14. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador definido pelo triplo da reflexão do vetor $v = (x, y, z)$ em torno do plano $2x - y + z = 0$. Encontre a lei de $T(x, y, z)$. A seguir, verifique se esse operador é invertível e, caso positivo, encontre a lei do operador inverso.

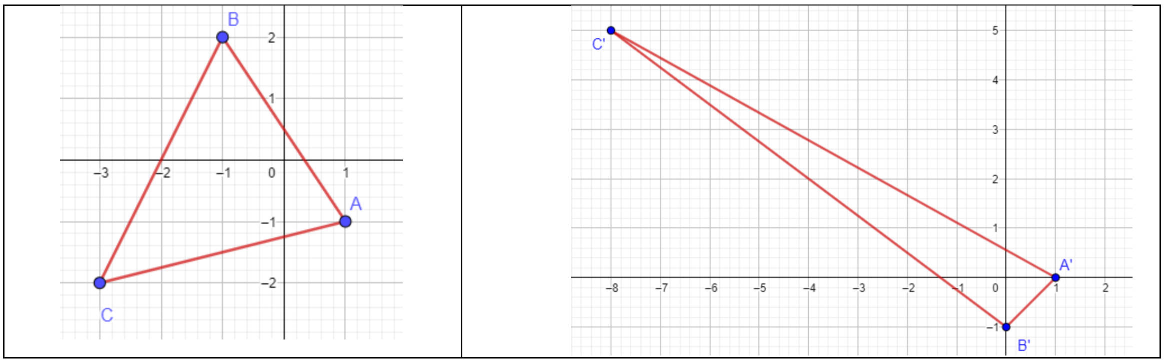
15. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador que realiza a rotação de $\pi/2$ em torno do eixo z, seguida de uma rotação de $\pi/3$ em torno do eixo y. Encontre a lei $T(x, y, z)$. A seguir, determine se esse operador é invertível e, em caso positivo, encontre a lei do operador inverso.

16. Determine a lei do operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que efetua a reflexão em torno de $5x + y - 2z = 0$.

17. Determine a lei do operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que efetua a projeção sobre a reta de interseção entre os planos $-3x - y + 4z = 0$ e $5x + 2y - 7z = 0$.

18. Determine a lei do operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que efetua a reflexão em torno da reta de interseção entre os planos $-3x - y + 4z = 0$ e $5x + 2y - 7z = 0$.

19. Encontre a lei do operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma o triângulo ABC (exibido na Figura à esquerda) no triângulo $A'B'C'$ (exibido na figura à direita). A seguir, verifique se T é invertível e, caso positivo, encontre o operador inverso.



20. Determine a lei do operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma a Figura 1 na Figura 2, dadas abaixo:

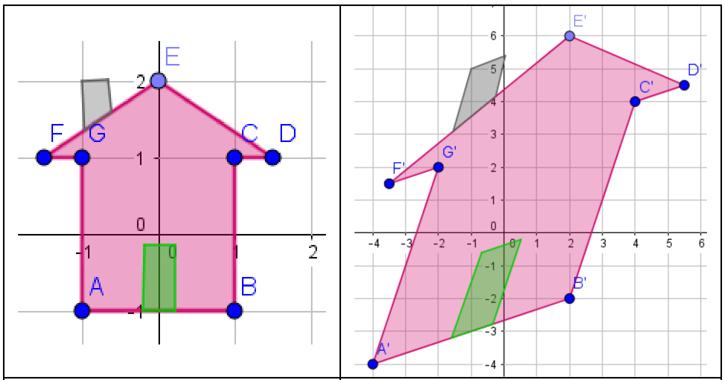
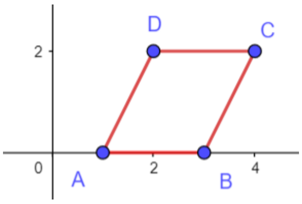


Figura 1	**Figura 2**

21. Ao aplicar a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ a todos os pontos do paralelogramo $ABCD$ exibido na figura abaixo



obtém-se como imagem o quadrilátero exibido na alternativa: