Produto Vetorial e Misto - Exemplos

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -6\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} - \left(-2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}\right)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -6\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} + 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-4,1,-2)$$

Note que

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (1,2,-1) \cdot (-4,1,-2)$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2)$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = -4 + 2 + 2 = 0$$

e

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (2,2,-3) \cdot (-4,1,-2)$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = -8 + 2 + 6 = 0$$

$$\therefore \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u} \text{ e } \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$$

Exemplo 01: Dados $\vec{u} = (1,2,-1)$ e $\vec{v} = (2,2,-3)$, calcule $\vec{u} \times \vec{v}$.

Duas maneiras de resolver este exercício são apresentadas.

Maneira 1) Utilizando a condição de ortogonalidade e reescrevendo os vetores como

$$\vec{w} = (a, 5, -4)$$

$$\vec{u} = (a-1,2,4)$$

é necessário $\begin{cases} \vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} (a, 5, -4) \cdot \left(-28,0,-\frac{7}{2}\right) = 0 \\ (a-1,2,4) \cdot \left(-28,0,-\frac{7}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -28a + 0 + 14 = 0 \\ -28(a-1) + 0 - 14 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 28a = 14 \\ -28a + 28 = 14 \end{cases}$$

De ambas equações, tem-se $a = \frac{1}{2}$.

Exemplo 02: Calcule o valor de a para que o vetor $\vec{v} = \left(-28,0,-\frac{7}{2}\right)$ seja mutuamente ortogonal a $\vec{w} = a\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$ e $\vec{u} = (a-1)\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

Maneira 2) O vetor $\vec{v}$ deve ser paralelo a $\vec{w} \times \vec{u}$

$$\vec{w} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 5 & -4 \\ a-1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{w} \times \vec{u} = 20\vec{i} - 4(a-1)\vec{j} + 2a\vec{k} \\ -\left[-8\vec{i} + 4a\vec{j} + 5(a-1)\vec{k}\right]$$

$$\vec{w} \times \vec{u} = (20+8, -4a+4-4a, 2a-5a+5)$$

$$\vec{w} \times \vec{u} = (28, -8a+4, -3a+5)$$

Para que sejam paralelos,

$$-8a + 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{-28}{28} = \frac{-\frac{7}{2}}{-3a+5}$$

$$-1(-3a+5) = -\frac{7}{2}$$

$$3a = -\frac{7}{2} + 5 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Exemplo 02: Calcule o valor de a para que o vetor $\vec{v} = \left(-28,0,-\frac{7}{2}\right)$ seja mutuamente ortogonal a $\vec{w} = a\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$ e $\vec{u} = (a-1)\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

1. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$, qualquer que seja $\vec{u}$.
2. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
3. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
4. $(\mathrm{m}\vec{u}) \times \vec{v} = \mathrm{m}(\vec{u} \times \vec{v}), \mathrm{m} \in \mathbb{R}$

Neste caso, devem-se utilizar as propriedades do produto vetorial. Da propriedade 3,

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{u} + (\vec{u} + \vec{v}) \times (-\vec{v})$$

De 2,

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = -\vec{u} \times (\vec{u} + \vec{v}) - (-\vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v})$$

De 4,

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = -\vec{u} \times (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{u} + \vec{v})$$

Exemplo 03: Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores no espaço, mostre que $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{v} \times \vec{u}$.

1. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$, qualquer que seja $\vec{u}$.
2. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
3. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
4. $(\mathrm{m}\vec{u}) \times \vec{v} = \mathrm{m}(\vec{u} \times \vec{v}), \mathrm{m} \in \mathbb{R}$

Exemplo 03: Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores no espaço, mostre que $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{v} \times \vec{u}$.

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = -\vec{u} \times (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{u} + \vec{v})$$

Da propriedade 3,

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = -\vec{u} \times \vec{u} - \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u} + \vec{v} \times \vec{v}$$

De 1 e 2,

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = -\vec{0} + \vec{v} \times \vec{u} + \vec{v} \times \vec{u} + \vec{0}$$

Assim,

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{v} \times \vec{u}$$

Para que três vetores sejam coplanares, o produto misto deles deve ser nulo.

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -4-4-4-(-1+8+8)$$

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -12-15 = -27$$

$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \neq 0$, logo os vetores não são coplanares.

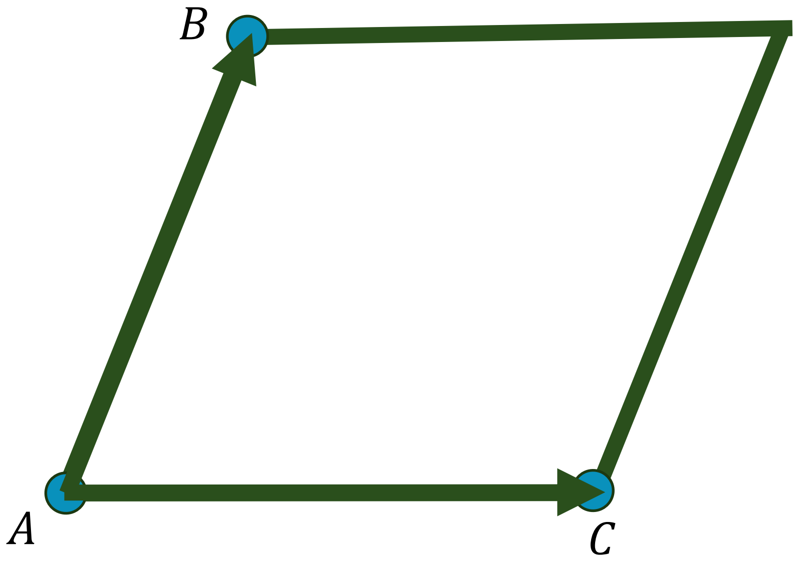
$$(\vec{v},\vec{w},\vec{p}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{v},\vec{w},\vec{p}) = 16-2-2-(4+4+4)$$

$$(\vec{v},\vec{w},\vec{p}) = 12-12 = 0$$

$(\vec{v},\vec{w},\vec{p}) = 0$, logo os vetores são coplanares.

Exemplo 04: Sejam $\vec{u} = (2,2,-1)$, $\vec{v} = (2,-1,2)$, $\vec{w} = (-1,2,2)$ e $\vec{p} = (1,1,4)$. Mostre que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são coplanares, mas $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{p}$ são.



$$\overrightarrow{AB} = \mathrm{B} - \mathrm{A} = (1,1,-1) - (3,2,1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-2,-1,-2)$$

$$\overrightarrow{AC} = \mathrm{C} - \mathrm{A} = (0,1,2) - (3,2,1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-3,-1,1)$$

Da interpretação geométrica do módulo do produto vetorial, sabe-se que $A_P = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$.

Calculando primeiramente o produto vetorial,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo 05: Calcular a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto $A(3,2,1)$ e uma diagonal de extremidades $B(1,1,-1)$ e $C(0,1,2)$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k} - \left(2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -3\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3,8,-1)$$

$$A_P = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$A_P = |(-3,8,-1)|$$

$$A_P = \sqrt{(-3)^2 + 8^2 + (-1)^2}$$

$$A_P = \sqrt{9 + 64 + 1}$$

$$A_P = \sqrt{74}\, u.a.$$

Exemplo 05: Calcular a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto $A(3,2,1)$ e uma diagonal de extremidades $B(1,1,-1)$ e $C(0,1,2)$.

Da interpretação geométrica do produto misto, $V_P = \left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|$. Calculando o produto misto,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -4 \\ m+1 & m & -1 \end{vmatrix}$$

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = -2 + 4(m+1) + 3m$$
$$+3(m+1) + 8m + 1$$

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = -1 + 11m + 4m + 4 + 3m + 3$$

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 6 + 18m$$

Voltando à definição do volume do paralelepípedo,

$$\left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right| = V_P$$

$$|6 + 18m| = 42$$

$$6 + 18m = 42 \text{ ou } 6 + 18m = -42$$

$$18m = 36 \text{ ou } 18m = -48$$

$$m = 2 \text{ ou } m = -\frac{48}{18} = -\frac{8}{3}$$

Exemplo 06: Os vetores $\vec{a} = (2, -1, -3)$, $\vec{b} = (-1,1,-4)$ e $\vec{c} = (m+1, m, -1)$ determinam um paralelepípedo de volume 42. Calcular m.

Dúvidas?