MDI0002 – Matemática Discreta
Videoaula 07
Relações

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2020

Relações: intuição muito próxima do conceito formal

- parentesco
- maior ou igual
- igualdade
- faz fronteira com
- pertence
- está contido

Dentro da computação, os exemplos de mais destaque são os bancos de dados relacionais e a teoria de grafos.

Relações binárias: relacionam dois elementos de cada vez

Seguindo o mesmo raciocínio: relações ternárias, quaternárias, unárias, etc.

Relações podem ser sobre coleções que não são conjuntos

- exemplo: a relação "está contido" sobre todos os conjuntos

Na disciplina, o enfoque será em relações binárias e *pequenas*

Definição (Relação)

Uma **relação** binária R de A em B é

$$R \subseteq A \times B$$

Observações: $R \subseteq A \times B$ ou $R : A \to B$

- A: domínio, origem ou conjunto de partida
- B: contra-domínio, codomínio, destino ou conjunto de chegada
- Se $\langle a, b \rangle \in R$, dizemos que a se relaciona com b
  - notação alternativa: aRb

Seja $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$

- $\varnothing$ é relação de A em B (e de A em C, de B em A, de A em A, ...)
- $A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle\}$ é relação com origem em A e destino em B
- $\{\langle a, a\rangle\} \subseteq A \times B$ é a relação de igualdade
- $<= \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$ é a relação "menor" de C em C
- $R : C \to B$ tal que $R = \{\langle 0, a\rangle, \langle 1, b\rangle\}$

Relação não necessariamente relaciona entidades de um mesmo conjunto

- exemplo: listagem de contatos do celular relaciona pessoas com números de telefone
- relacionar entidades de um mesmo conjunto: especialmente importante

Definição (Endorrelação)

Seja A um conjunto. Uma relação $R : A \to A$ é uma **endorrelação**. Dizemos que R *é uma relação em* A.

Notação: $\langle A, R\rangle$

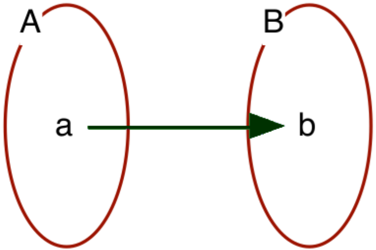
Exemplos:

- $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$
- $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$
- $\langle \mathbb{Q}, = \rangle$
- $\langle 2^A, \subseteq \rangle$
- $\langle 2^A, \subset \rangle$

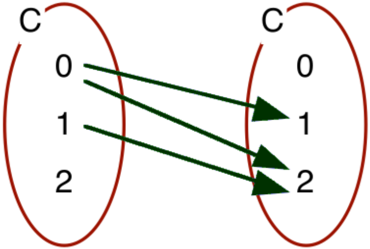
Representação gráfica de Relações

- ligação por setas entre os elementos relacionados

par $\langle a, b \rangle$ de $R : A \to B$



para $C = \{0, 1, 2\}$, a relação $\langle C, < \rangle = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$



- $R : A \to A$ pode ser vista como grafo
- Tem-se que
  - toda endorrelação é um grafo
  - nem todo grafo é uma endorrelação
- Teoria dos Grafos
  - conceitos introduzidos em disciplina específica
  - usaremos Grafos Dirigidos
  - nodos, lugares, vértices
  - arestas, caminhos, setas

- Visão mais clara do relacionamento e de propriedades
- Conveniente para relações com poucos pares

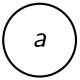
Uma endorrelação $R : A \to A$ como grafo

- Nodos: elementos de A
- Arestas: pares da relação

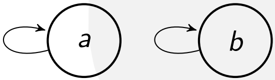
Exemplos

Sejam $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$

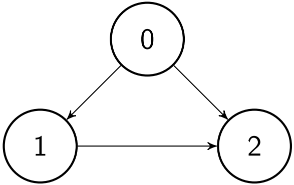
$\varnothing : A \to A$



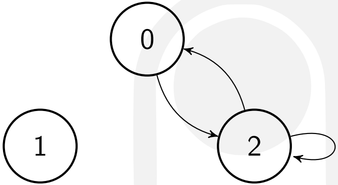
$\langle B, = \rangle$



$\langle C, < \rangle$



$R = \{\langle 0, 2\rangle, \langle 2, 0\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$ em C



$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ conjuntos finitos

- representação de $R : A \to B$ como matriz
- especialmente interessante para implementação

Representação

- n linhas
- m colunas
- $m * n$ posições
- se $a_i R b_j$ então linha i e coluna j é preenchida com o valor 1, caso contrário, recebe valor 0

Sejam $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$

$\varnothing : A \to A$

$\varnothing$	a
a	0

$\langle B, = \rangle$

$=$	a	b
a	1	0
b	0	1

$\langle C, < \rangle$

$<$	0	1	2
0	0	1	1
1	0	0	1
2	0	0	0

$R = \{\langle 0, 2\rangle, \langle 2, 0\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$ em C

$<$	0	1	2
0	0	0	1
1	0	0	0
2	1	0	1

Inversão (troca) das componentes de cada par de uma relação

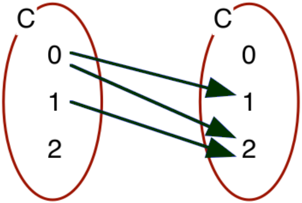
Definição (Relação Inversa)

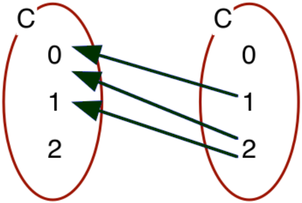
Seja $R \subseteq A \times B$ uma relação. A **relação inversa** (relação dual) é $R^{-1} \subseteq B \times A$ tal que

$$R^{-1} = \{\langle b, a\rangle \mid \langle a, b\rangle \in R\}$$

Sejam $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$

- $=: A \to B$ dada por $\{\langle a, a\rangle\}$
  $=^{-1}: B \to A$ dada por $\{\langle a, a\rangle\}$
- $\{\langle 0, a\rangle, \langle 1, b\rangle\} : C \to B$
  $\{\langle a, 0\rangle, \langle b, 1\rangle\} : B \to C$
- $<: C \to C$ $\qquad <^{-1} \; = \; >: C \to C$





Inversa como matriz ou grafo

- matriz da relação dual: matriz transposta
  - troca linhas por colunas
  - não confundir com *matriz inversa*!!!
- grafo da relação inversa: troca do sentido das arestas

Relação composta: aplicação de uma relação sobre o resultado de outra

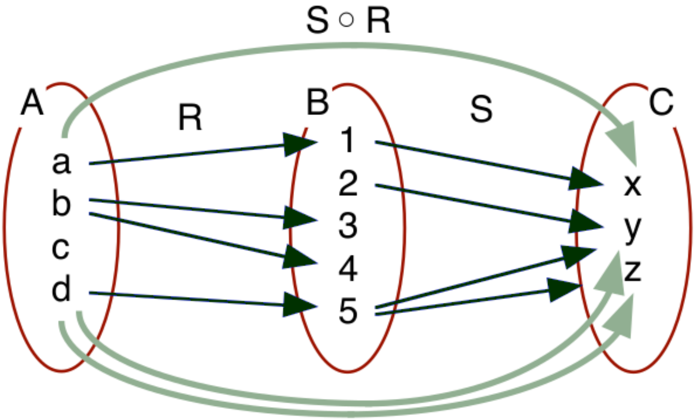
Definição (Composição de Relações)

Sejam $R : A \rightarrow B$ e $S : B \rightarrow C$ relações. A composição de R e S, denotada por $S \circ R : A \rightarrow C$, é o conjunto:

$$\{\langle a, c \rangle \mid \exists b \in B(aRb \wedge bSc)\}$$

$R : A \to B$ e $S : B \to C$, então $S \circ R : A \to C$

- $R = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle b, 4\rangle, \langle d, 5\rangle\}$
- $S = \{\langle 1, x\rangle, \langle 2, y\rangle, \langle 5, y\rangle, \langle 5, z\rangle\}$
- $S \circ R = \{\langle a, x\rangle, \langle d, y\rangle, \langle d, z\rangle\}$



Ainda tem mais!

- Propriedades de relações e de endorrelações
- Fechos de propriedades
- Tipos especiais de endorrelações: equivalência e ordem

Transitivity of equivalence