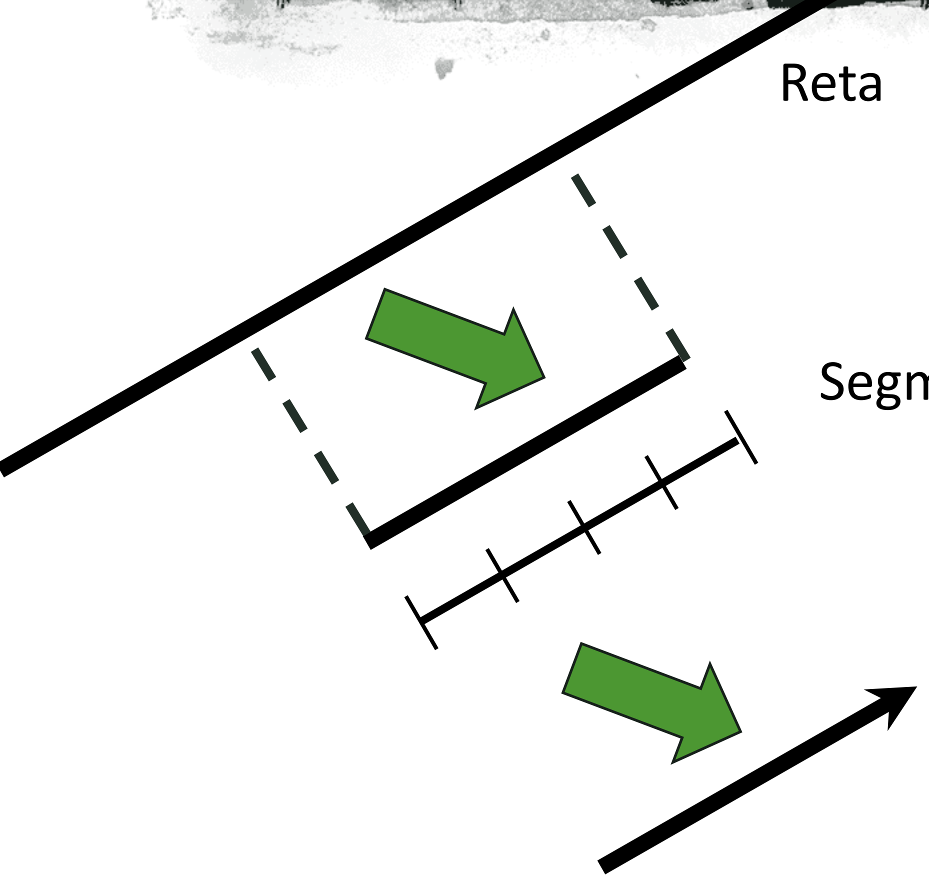
Recapitulação do conteúdo de Geometria Analítica até então ministrado

(com destaque para projeção ortogonal)

Estrutura desta apresentação

- Semana 01: Definição e exemplos de vetor;
- Semana 02: Interpretação geométrica;
- Semana 03: Interpretação analítica;
- Semana 04: Produto escalar;
- Projeção ortogonal.

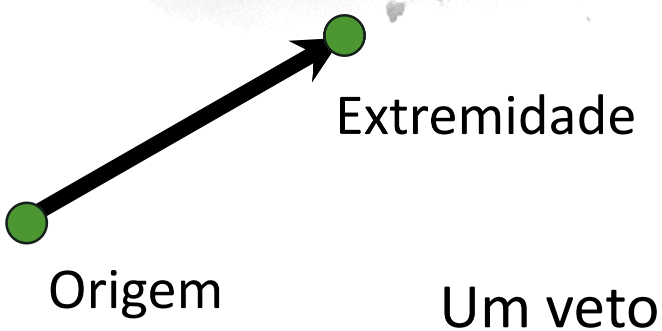
Semana 01: definição e exemplos de vetor



Grandeza vetorial

1. Direção
2. Comprimento
3. Sentido

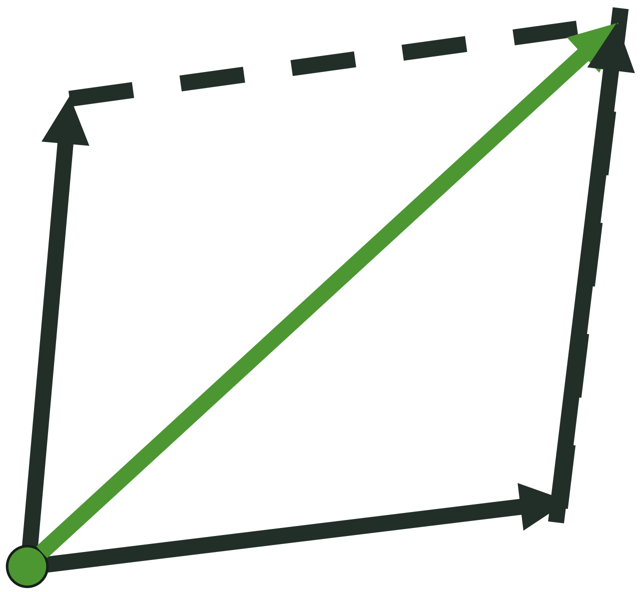
Semana 01: definição e exemplos de vetor



Um vetor é o conjunto de todos segmentos orientados equipolentes (ou seja, de mesmo comprimento, direção e sentido) a um segmento orientado determinado. Os segmentos equipolentes são então chamados de representantes do vetor.

Semana 01: definição e exemplos de vetores

- Notação
  - Segmento orientado: AB, A origem e B extremidade
  - Comprimento do segmento AB : $\overline{AB}$
  - Vetor com AB como representante: $\overrightarrow{AB}$ ou $B - A$
  - Módulo do vetor: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$
- Casos Particulares
  - Vetor nulo;
  - Vetor oposto;
  - Vetor unitário;
  - Versor de um vetor;
  - Vetores colineares e coplanares.



Semana 02: interpretação geométrica

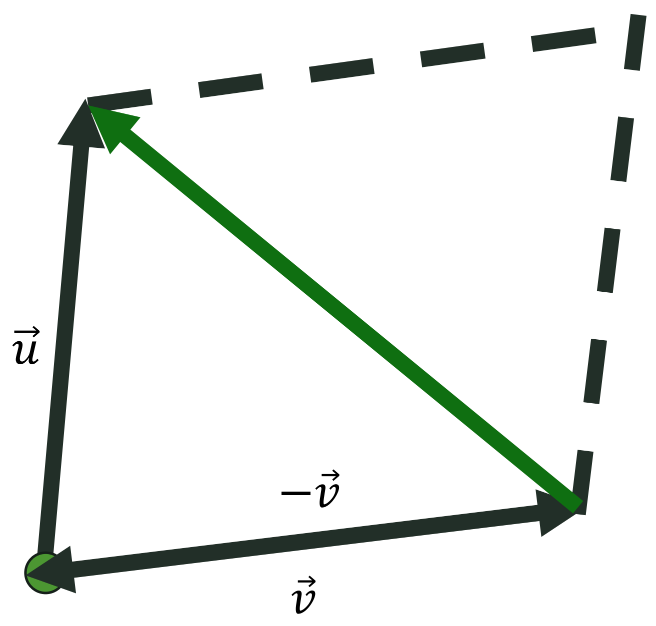
- Adição:
  - Regra do Paralelogramo
  - Concatenação

Semana 02: interpretação geométrica

- Multiplicação por escalar

$$\vec{p} = \alpha\vec{v}$$

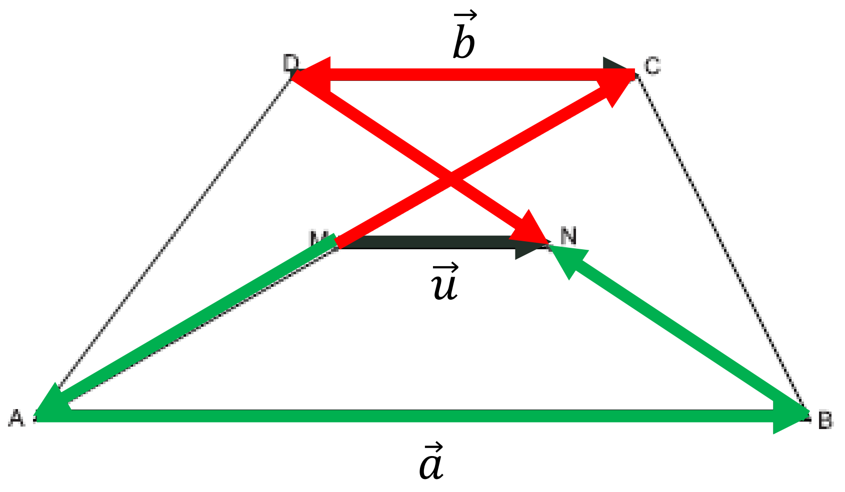
  - Módulo: $|\vec{p}| = |\alpha||\vec{v}|$;
  - Direção: não muda;
  - Sentido: igual ao de $\vec{v}$ se $\alpha > 0$, contrário de $\vec{v}$ se $\alpha < 0$.



Semana 02: interpretação geométrica

- Subtração:

Note que $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\vec{v}$, ou seja, basta utilizar as duas operações anteriores.



$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$$

+

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}$$

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DN}$$

Como $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MC}$ e $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{DN}$,

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$

Assim,

$$2\vec{u} = \vec{a} - \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}$$

Exemplo: Sejam M e N os pontos médios das diagonais AC e BD, respectivamente, do trapézio $ABCD$ representado na figura acima. Sendo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$, escreva o vetor $\vec{u}$ em função de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Semana 03: interpretação analítica

- Com quaisquer dois vetores não colineares no $\mathbb{R}^2$, ou 3 vetores não coplanares no $\mathbb{R}^3$, conseguem-se criar todos os outros vetores do determinado conjunto, por intermédio de uma combinação linear. Ou seja, no $\mathbb{R}^2$, considerando os vetores não colineares como $\vec{u}$ e $\vec{v}$, qualquer vetor $\vec{w}$ poderá ser escrito como

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

Semana 03: interpretação analítica

- Escolheu-se no $\mathbb{R}^2$ os vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ e, no $\mathbb{R}^3$, os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$, o que possibilitou determinar a representação analítica dos vetores como:
  - No $\mathbb{R}^2$, $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y)$
  - No $\mathbb{R}^3$, $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$
- As operações ficam (no $\mathbb{R}^3$)
  - $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
  - $\alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$

Semana 03: interpretação analítica

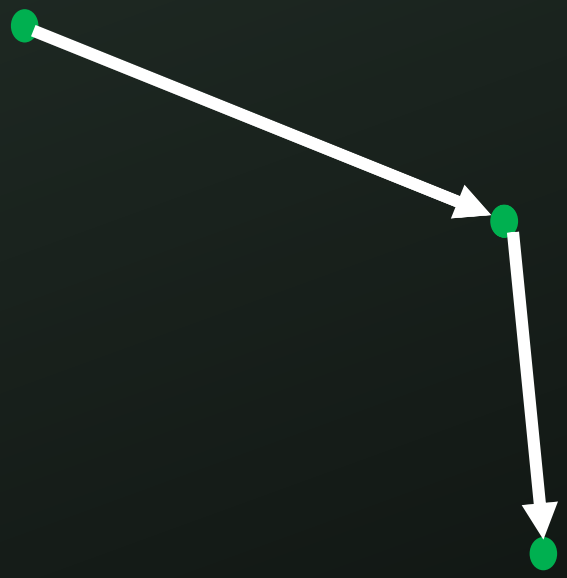
- Os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ serão paralelos (colineares) se

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Esta é conhecida como a condição de paralelismo entre dois vetores

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$
$$= (1,5,1) - (3, a, b)$$
$$= (-2,5 - a, 1 - b)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B$$
$$= (-3,13,7) - (1,5,1)$$
$$= (-4,8,6)$$



Aplicando a condição de paralelismo,

$$\frac{-2}{-4} = \frac{5 - a}{8} = \frac{1 - b}{6}$$

Exemplo: Determine a e b de modo que os pontos $A(3, a, b)$, $B(1,5,1)$ e $C(-3,13,7)$ sejam colineares .

Para a,

$$\frac{-2}{-4} = \frac{5-a}{8}$$

$$-2 \cdot 8 = -4(5-a)$$

$$-16 = -20 + 4a$$

$$4 = 4a \;\Rightarrow\; a = 1$$

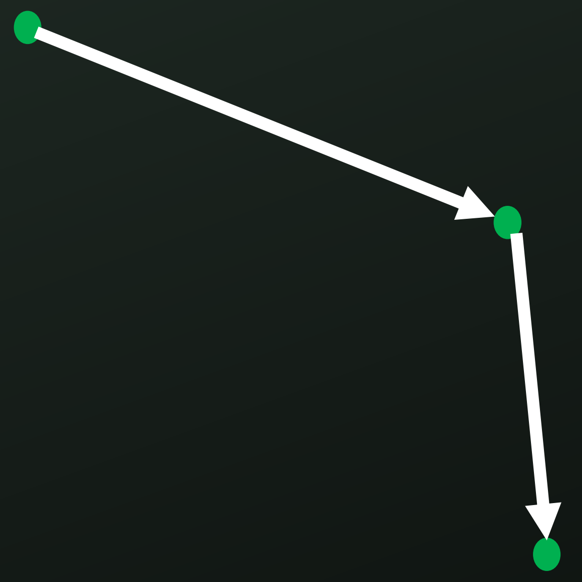
Para b,

$$\frac{-2}{-4} = \frac{1-b}{6}$$

$$-2 \cdot 6 = -4(1-b)$$

$$-12 = -4 + 4b$$

$$-8 = 4b \;\Rightarrow\; b = -2$$



Exemplo: Determine a e b de modo que os pontos $A(3, a, b)$, $B(1,5,1)$ e $C(-3,13,7)$ sejam colineares .

Semana 04: produto escalar

- Sendo $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, o produto escalar (ou produto interno usual) de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com notação $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, é o número real

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Semana 04: produto escalar

- A partir do produto escalar, pode-se definir:
  - O **módulo** de um vetor $\vec{v}$ como o número real não negativo

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

  - O **versor** de um vetor $\vec{v}$ como o vetor

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Semana 04: produto escalar

- A **distância** entre os pontos A e B como

$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

- O **ângulo** entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como

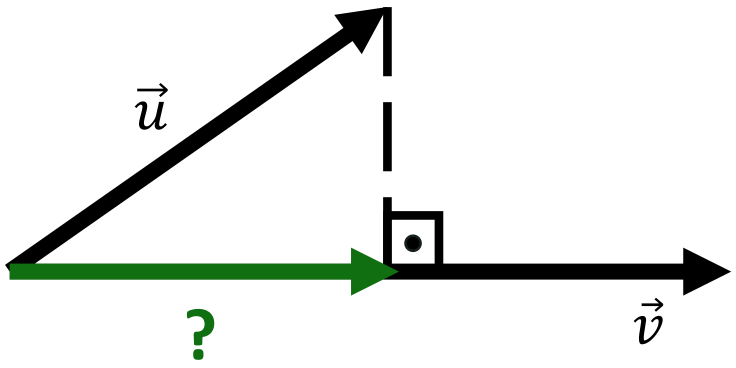
$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

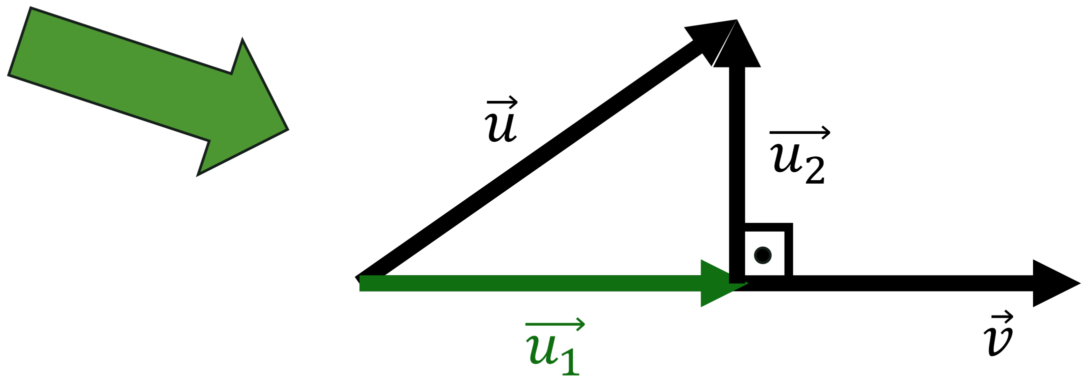
- Da fórmula para o ângulo, pode-se obter que, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem ortogonais, então

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

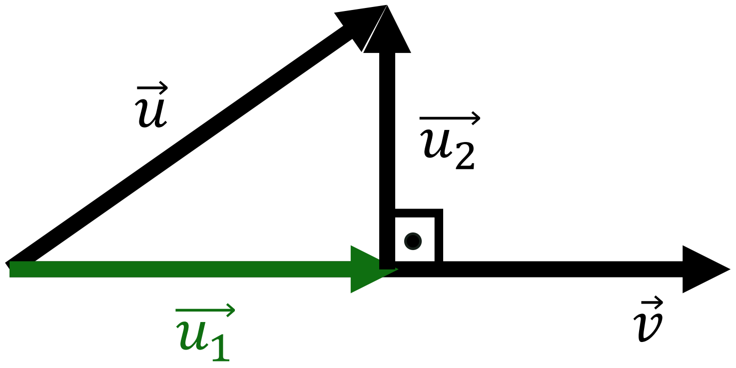
Esta é a **condição de ortogonalidade** entre dois vetores.

Projeção ortogonal





Projeção ortogonal



- Note que
  1. Pela colinearidade, $\overrightarrow{u_1} = \alpha\vec{v}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
  2. Pela ortogonalidade, $\overrightarrow{u_2} \cdot \vec{v} = 0$
  3. Pela soma de vetores, $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \vec{u}$

Projeção ortogonal

1. Pela colinearidade, $\overrightarrow{u_1} = \alpha\vec{v}$
2. Pela ortogonalidade, $\overrightarrow{u_2} \cdot \vec{v} = 0$
3. Pela soma de vetores, $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \vec{u}$

De 3,

$$\overrightarrow{u_2} = \vec{u} - \overrightarrow{u_1}$$

Com 1,

$$\overrightarrow{u_2} = \vec{u} - \alpha\vec{v}$$

Substituindo em 2,

$$(\vec{u} - \alpha\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$$

Projeção ortogonal

Desenvolvendo,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} - \alpha \vec{v} \cdot \vec{v} = 0$$

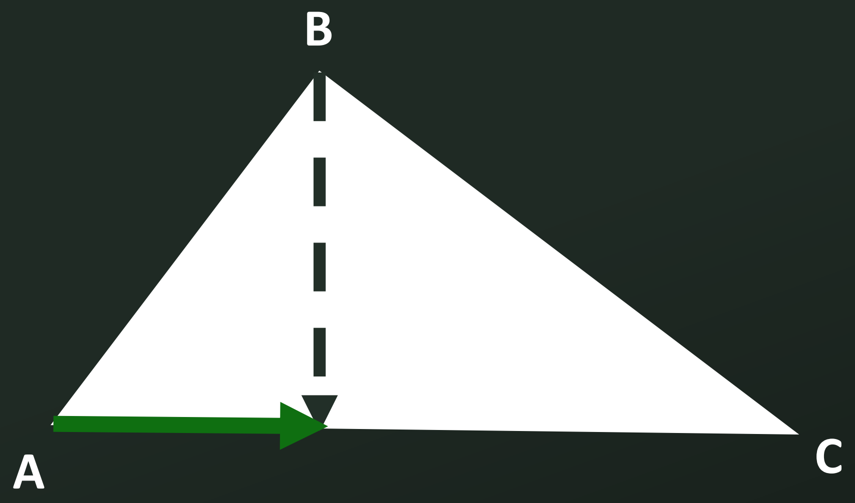
$$\alpha \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Assim,

$$\overrightarrow{u_1} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\right) \vec{v}$$

$$\mathbf{proj}_{\vec{v}}\, \vec{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}}{\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}}\right) \vec{\boldsymbol{v}}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A\\ &= (3,-2{,}8) - (0{,}0{,}2)\\ &= (3,-2{,}6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= C - A\\ &= (-3,-5{,}10) - (0{,}0{,}2)\\ &= (-3,-5{,}8)\end{aligned}$$

$$\mathbf{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v}$$

Exemplo: Dado o triângulo retângulo ABC com ângulo reto em B, determine a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa AC, sendo $A(0{,}0{,}2)$, $B(3,-2{,}8)$ e $C(-3,-5{,}10)$.

$$\mathbf{proj}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}}\right)\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= (3,-2,6)\cdot(-3,-5,8)\\ &= 3\cdot(-3) - 2\cdot(-5) + 6\cdot 8\\ &= -9 + 10 + 48 = 49\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} &= (-3,-5,8)\cdot(-3,-5,8)\\ &= -3\cdot(-3) - 5\cdot(-5) + 8\cdot 8\\ &= 9 + 25 + 64 = 98\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{proj}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} &= \left(\frac{49}{98}\right)(-3,-5,8)\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)(-3,-5,8)\end{aligned}$$

Como se deseja a MEDIDA da projeção, deseja-se o módulo da mesma, logo

$$\left|\mathbf{proj}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{98} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Exemplo: Dado o triângulo retângulo ABC com ângulo reto em B, determine a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa AC, sendo $A(0,0,2)$, $B(3,-2,8)$ e $C(-3,-5,10)$.

Dúvidas?