Técnicas de Demonstração

Lista 1

I)

1.

Um inteiro é divisível por 6 $\rightarrow$ 2 vezes esse inteiro é divisível por 4

- Por prova direta:

Se um inteiro x é divisível por 6, então $x = 6n, n \in \mathbb{Z}$.

$$2x = 2 \cdot 6n$$

$$= 12n$$

$$= 4 \cdot (3n)$$

Consideramos que $3n = m \in \mathbb{Z}$.

Assim, $2x = 4m, m \in \mathbb{Z}$, ou seja, $2x$ é divisível por 4.

2.

xy é ímpar $\Leftrightarrow$ x e y são ímpares

(1) xy é ímpar $\rightarrow$ x e y são ímpares

- Por contraposição:

$\neg$(x e y são ímpares) $\rightarrow$ $\neg$(xy é ímpar)
x ou y é par $\rightarrow$ xy é par

caso 1: somente x é par

Se x é par, então $x = 2n, n \in \mathbb{N}$. E y é ímpar, então, $y = 2m + 1, m \in \mathbb{N}$.

$$xy = 2n \cdot (2m + 1)$$

$$= 4mn + 2n$$

$$= 2 \cdot (2mn + n)$$

Consideramos que $2mn + n = z \in \mathbb{N}$.

Assim, $xy = 2z, z \in \mathbb{N}$, ou seja, xy é par.

caso 2: somente y é par

Demonstração análoga à do caso 1.

caso 3: ambos são pares

Se x e y são pares, então $x = 2n, n \in \mathbb{N}$ e $y = 2m, m \in \mathbb{N}$.

$$xy = 2n \cdot 2m$$

$$= 4mn$$

$$= 2 \cdot (2mn)$$

Consideramos que $2mn = z \in \mathbb{N}$.

Assim, $xy = 2z, z \in \mathbb{N}$, ou seja, xy é par.

(1) foi provado.

(2) x e y são ímpares → xy é ímpar

- Por prova direta:

Se x e y são ímpares, então $x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$ e $y = 2m + 1, m \in \mathbb{N}$.

$$xy = (2n + 1) \cdot (2m + 1)$$

$$= 4mn + 2n + 2m + 1$$

$$= 2 \cdot (2mn + n + m) + 1$$

Consideramos que $2mn + n + m = z \in \mathbb{N}$.

Assim, $xy = 2z + 1, z \in \mathbb{N}$, ou seja, xy é ímpar.

(2) foi provado.

3.

Um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo → esse número é 0

- Por absurdo:

Supondo $x + x = x$ e $x \neq 0$.

$$x + x = x$$

$$2x = x$$

Como $x \neq 0$, podemos dividir a equação por x.

$$2 = 1$$

Chegamos em um absurdo, ou seja, é impossível satifazer a condição com $x \neq 0$. Assim, $x = 0$.

4.

n é um inteiro par (4 ≤ n ≤ 12) → n é a soma de dois números primos

- Por exaustão:

$$n = 4 \Rightarrow 4 = 2 + 2$$
$$n = 6 \Rightarrow 6 = 3 + 3$$
$$n = 8 \Rightarrow 8 = 5 + 3$$
$$n = 10 \Rightarrow 10 = 7 + 3$$
$$n = 12 \Rightarrow 12 = 5 + 7$$

Foi provado para todos os inteiros pares n, $4 \leq n \leq 12$, que n pode ser escrito como a soma de dois primos.

5.

x e y são inteiros ímpares → a soma deles é par

- Por prova direta:

x e y são inteiros ímpares, então, $x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$ e $y = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} x + y &= (2n + 1) + (2m + 1) \\ &= 2n + 2m + 2 \\ &= 2 \cdot (n + m + 1) \end{aligned}$$

Consideramos que $n + m + 1 = z \in \mathbb{Z}$.
Assim, $x + y = 2z, z \in \mathbb{Z}$, ou seja, $x + y$ é par.

6.

x e y são inteiros consecutivos → o produto deles é par

- Por prova direta:

caso 1: x é par
Se x é par, então $x = 2n, n \in \mathbb{Z}$. E $y = x + 1$, logo, $y = 2n + 1$.

$$xy = 2n \cdot (2n + 1)$$
$$= 4n^2 + 2n$$
$$= 2 \cdot (2n^2 + n)$$

Consideramos que $2n^2 + n = m \in \mathbb{Z}$.
Assim, $xy = 2m, m \in \mathbb{Z}$, logo, xy é par.

caso 2: x é ímpar

Se x é ímpar, então $x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$. E $y = x + 1$, logo, $y = 2n + 2$.

$$xy = (2n + 1) \cdot (2n + 2)$$

$$= 4n^2 + 2n + 4n + 2$$
$$= 4n^2 + 6n + 2$$
$$= 2 \cdot (2n^2 + 3n + 1)$$

Consideramos que $2n^2 + 3n + 1 = m \in \mathbb{Z}$.

Assim, $xy = 2m, m \in \mathbb{Z}$, ou seja, xy é par.

7.

o produto de x e y não é divisível por n $\rightarrow$ x e y não são divisíveis por n

- Por contraposição:

$\neg$(x e y não são divisíveis por n) $\rightarrow$ $\neg$(xy não é divisível por n)
x ou y é divisível por n $\rightarrow$ xy é divisível por n

caso 1: apenas x é divisível por n

Se x é divisível por n, então $x = kn, k \in \mathbb{Z}$.

$$xy = kn \cdot y$$

$$= n \cdot (ky)$$

Consideramos que $ky = z \in \mathbb{Z}$.

Assim, $xy = nz, z \in \mathbb{Z}$, ou seja, xy é divisível por n.

caso 2: apenas y é divisível por n

Demonstração análoga à do caso 1.

caso 3: ambos são divisíveis por n

Se x e y são divisíveis por n, então $x = kn, k \in \mathbb{Z}$ e $y = pn, p \in \mathbb{Z}$.

$$xy = kn \cdot pn$$

$$= kpn^2$$
$$= n \cdot (kpn)$$

Consideramos que $kpn = z \in \mathbb{Z}$.

Assim, $xy = nz, z \in \mathbb{Z}$, ou seja, xy é divisível por n.

8.

n é um inteiro ímpar ⇔ 3n + 5 = 6k + 8 para algum inteiro k

(1) n é um inteiro ímpar → 3n + 5 = 6k + 8 para algum inteiro k

- Por prova direta:

Se n é um inteiro ímpar, então $n = 2a + 1, a \in \mathbb{Z}$.

$$3n + 5 = 3 \cdot (2a + 1) + 5$$

$$= 6a + 3 + 5$$

$$= 6a + 8$$

Se tivermos $k = a$:

$$= 6k + 8$$

Assim, existe um valor de k tal que $3n + 5 = 6k + 8$.

(1) foi provado.

(2) 3n + 5 = 6k + 8 para algum inteiro k → n é um inteiro ímpar

- Por prova direta:

$$3n + 5 = 6k + 8$$

$$3n = 6k + 8 - 5$$

$$3n = 6k + 3$$

$$n = \frac{6k + 3}{3}$$

$$n = 2k + 1$$

Assim, temos $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$, ou seja, n é ímpar.

(2) foi provado.

II)

1.

x, y e z são inteiros consecutivos → o produto entre eles é par

- Por prova direta:

caso 1: x é par
Se x é par, então $x = 2n, n \in \mathbb{Z}$;
$y = x + 1$, então $y = 2n + 1$;
$z = x + 2$, então $z = 2n + 2$.

$$xyz = 2n \cdot (2n + 1) \cdot (2n + 2)$$

$$
\begin{aligned}
&= (4n^2 + 2n) \cdot (2n + 2) \\
&= 8n^3 + 8n^2 + 4n^2 + 4n \\
&= 8n^3 + 12n^2 + 4n \\
&= 2 \cdot (4n^3 + 6n^2 + 2n)
\end{aligned}
$$

Consideramos que $4n^3 + 6n^2 + 2n = m \in \mathbb{Z}$.

Assim, $xyz = 2m, m \in \mathbb{Z}$, ou seja, xyz é par.

caso 2: x é ímpar

Se x é ímpar, então $x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$;
$y = x + 1$, então $y = 2n + 2$;
$z = x + 2$, então $z = 2n + 3$.

$$
\begin{aligned}
xyz &= (2n + 1) \cdot (2n + 2) \cdot (2n + 3) \\
&= (4n^2 + 2n + 4n + 2) \cdot (2n + 3) \\
&= (4n^2 + 6n + 2) \cdot (2n + 3) \\
&= 8n^3 + 12n^2 + 12n^2 + 18n + 4n + 6 \\
&= 8n^3 + 24n^2 + 22n + 6 \\
&= 2 \cdot (4n^3 + 12n^2 + 11n + 3)
\end{aligned}
$$

Consideramos que $4n^3 + 12n^2 + 11n + 3 = m \in \mathbb{Z}$.

Assim $xyz = 2m, m \in \mathbb{Z}$, ou seja, xyz é par.

2.

a, b e c são inteiros consecutivos → a soma entre eles é par

- Contra-exemplo:

$a = 2$
$b = 3$
$c = 4$

$a + b + c = 2 + 3 + 4 = 9$

9 é ímpar, portanto, a afirmação é falsa.

3.

x é um inteiro → o produto entre x e seu quadrado é par

- Contra-exemplo:

$x = 1$

$x \cdot x^2 = 1 \cdot 1 = 1$

1 é ímpar, portanto, a afirmação é falsa.

4.

$\mathbf{x > 0} \rightarrow x + \frac{1}{x} \geq \mathbf{2}$

- Por prova direta:

caso 1: $x < 2$
O único caso em que $x > 0$ e $x < 2$, com $x \in \mathbb{Z}$, é $x = 1$.

$$1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$$

Isso satisfaz a condição.

caso 2: $x = 2$

$$x + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} > 2$$

Isso satisfaz a condição.

caso 3: $x > 2$
Como $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$.

Já temos que $x > 2$. Somar x a algo <u>positivo</u> não desfaz a desigualdade.

Logo, $x + \frac{1}{x} > 2$. Isso satisfaz a condição.

5.

n é um número primo → n + 4 é primo

- Contra-exemplo:

$n = 2$

$n + 4 = 2 + 4 = 6$

6 não é primo, portanto, a afirmação é falsa.

6.

n é um inteiro positivo → n é a soma dos quadrados de 2 inteiros

- Contra-exemplo:

$n = 3$

3 só pode ser escrito como $3 + 0$ ou $2 + 1$ e nenhuma das formas satisfaz a condição. Portanto, a afirmação é falsa.

7.

x e y são números racionais → o produto entre x e y é racional

- Por prova direta:

x e y são racionais, logo, podem ser escritos na forma de frações irredutíveis: $x = \frac{a}{b}$; $y = \frac{c}{d}$

$$xy = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

O resultado também pode ser escrito como uma fração irredutível, logo, também é racional.