Álgebra Linear
(ALI0001 – CCI-192-02U)

Independência e Dependência Linear

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula do dia 05 de abril de 2023.

UDESC

Introdução: Dependência e Independência Linear

- Os conceitos de independência e dependência linear nos permitirão generalizar a ideia de vetores colineares e/ou coplanares estudada em GAN para elementos de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
- Lembre que os elementos $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ são colineares se, e somente se, existir um escalar $k \in \mathbb{R}$ tal que $v_1 = kv_2$ (ou seja, um elemento é múltiplo do outro).
- Essa igualdade pode ser reescrita como

$$v_1 - kv_2 = \overrightarrow{0_V} \quad \Rightarrow \quad 1.v_1 - kv_2 = \overrightarrow{0_V}.$$

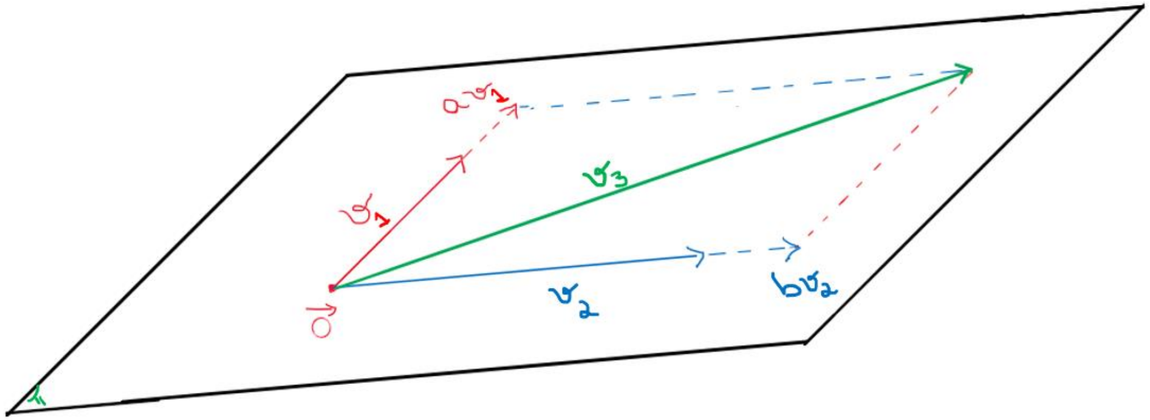
- Perceba que a última igualdade consiste em uma combinação linear (do lado esquerdo) entre os elementos v_1, v_2 que resulta no elemento nulo $(\overrightarrow{0_V})$ de V. Além disso, tal combinação linear nula admite como coeficientes os escalares $a_1 = 1 \neq 0$ e $a_2 = k$.
- Portanto, podemos considerar que $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ são colineares quando uma combinação nula $a_1v_1 + a_2v_2 = \overrightarrow{0_V}$ admitir algum coeficiente diferente de zero ($a_1 \neq 0$ **ou** $a_2 \neq 0$).
- Quando isso ocorrer, diremos que v_1, v_2 são linearmente dependentes.
- De forma análoga, diremos que v_1, v_2 **NÃO** são linearmente dependentes quando o comportamento anterior não ocorrer, ou seja, quando TODA combinação linear nula $a_1v_1 + a_2v_2 = \overrightarrow{0_V}$ for possível somente quando ambos os escalares forem iguais a zero ($a_1 = 0$ e $a_2 = 0$). Nesse caso, diremos que v_1, v_2 são linearmente independentes.

Introdução: Dependência e Independência Linear

- Situações análogas podem ocorrer com uma quantidade maior de elementos. Por exemplo, os elementos $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ são coplanares se e somente pudermos escrever

$$v_3 = av_1 + bv_2$$

para escalares $a, b \in \mathbb{R}$ (veja a figura ao lado).



- Como antes, a igualdade anterior pode ser reescrita como

$$av_1 + bv_2 - 1.v_3 = \overrightarrow{0_V}.$$

- Novamente, a última igualdade consiste em uma combinação linear entre os elementos v_1, v_2, v_3 que resulta no elemento nulo $(\overrightarrow{0_V})$ de V. Além disso, tal combinação linear nula admite como coeficientes os escalares $a_1 = a$, $a_2 = b$ e $a_3 = -1 \neq 0$.
- Como um dos coeficientes da combinação linear nula é diferente de zero (nesse caso $a_3 \neq 0$), podemos dizer que v_1, v_2, v_3 são linearmente dependentes.
- Para $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ serem linearmente independentes (isto é, NÃO serem linearmente dependentes), é necessário que TODA combinação linear nula $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = \overrightarrow{0_V}$ seja satisfeita somente quando ambos os escalares forem iguais a zero, isto é, quando

$$a_1 = 0 \ \text{ e } a_2 = 0 \ \text{ e } \ a_3 = 0 \,.$$

Independência/Dependência Linear

As ideias anteriores podem ser ampliadas para uma quantidade genérica de elementos pertencentes a um espaço vetorial V qualquer, bastando analisar o que ocorre com a combinação linear nula dos elementos, conforme indica a definição a seguir:

Definição: Seja V um espaço vetorial qualquer e considere os elementos

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V.$$

Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ é linearmente independente (ou que os vetores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ são linearmente independentes) quando a combinação linear nula

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = \overrightarrow{0_V} \qquad (*)$$

implicar obrigatoriamente que

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0.$$

Caso exista algum escalar $a_i \neq 0$ que satisfaça a combinação linear nula dada em $(*)$, dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ é linearmente dependente (ou que os vetores $v_1, v_2, v_3, \dots, \dots, v_n$ são linearmente dependentes.

Abreviação: Usaremos a abreviação “LI” para nos referirmos a vetores linearmente independentes, e a abreviação “LD” para nos referir a vetores linearmente dependentes.

Exercícios Resolvidos em aula

Exercício 1) Verifique se os elementos dados são linearmente independentes ou dependentes, considerando V munido das operações usuais em

a) Em $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,-2,3)$, $v_2 = (-4,9,-5)$ e $v_3 = (-1,6,25)$.

b) Em $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,4,-2)$, $v_2 = (-2,-7,5)$ e $v_3 = (3,5,-14)$.

c) Em $V = M(2,2)$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$.

d) Em $V = P_3$, $p_1(x) = 1 - x + 2x^2 + 3x^3$, $p_2(x) = 4 - 3x - 2x^2 - 2x^3$

$$p_3(x) = -1 + 2x - 11x^2 - 4x^3 \quad \text{e} \quad p_4(x) = 5 - 3x - 7x^2 + 26x^3.$$

Eco 2) Seja $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \ \text{e} \ y > 0\}$, munido das operações não usuais

$$(x,y) + (a,b) = (xa, yb)$$

$$k(x,y) = (x^k, y^k).$$

Verifique se os elementos $v_1 = (3,5)$ e $v_2 = (9, 1/5)$ são linearmente independentes ou dependentes.

Solução: Todos os exercícios foram resolvidos durante a aula.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 1) Em $V=\mathbb{R}^3$, verifique se os elementos $v_1=(1,0,-1)$, $v_2=(1,1,0)$ e $v_3=(1,1,-1)$ são LI ou LD.

Solução: Vamos analisar o que ocorre com os escalares a_1, a_2, a_3 da combinação linear nula formada com v_1, v_2, v_3 dada por

$$a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=\vec{0}.$$

Substituindo as coordenadas dos vetores, obtemos

$$a_1(1,0,-1)+a_2(1,1,0)+a_3(1,1,-1)=(0,0,0)$$

ou seja

$$(a_1+a_2+a_3, a_2+a_3, -a_1-a_3)=(0,0,0).$$

Com isso, chegamos em um sistema linear homogêneo, cuja solução é:

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=0 \\ a_2+a_3=0 \\ -a_1-a_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_2=-a_3 \\ a_1=-a_3 \end{matrix} \Rightarrow -a_3-a_3+a_3=0 \Rightarrow \begin{matrix} a_3=0 \\ a_2=0. \\ a_1=0 \end{matrix}$$

Como obtemos que $a_1=a_2=a_3=0$, os elementos são LI, e por isso, v_1, v_2, v_3 não são coplanares. Isso significa que nenhum elemento é uma combinação linear dos demais.

Perceba que o sistema homogêneo obtido é SPD (admite somente solução trivial).

Exemplos Resolvidos

Exemplo 2) Em $V=\mathbb{R}^3$, verifique se os vetores $v_1=(2,-1,3)$, $v_2=(-1,0,-2)$ e $v_3=(2,-3,1)$ são LI ou LD.

Solução: Vamos analisar o que ocorre com os escalares a_1, a_2, a_3 da combinação linear nula formada com v_1, v_2, v_3 dada por

$$a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=\vec{0}.$$

Substituindo as coordenadas dos vetores, obtemos

$$a_1(2,-1,3)+a_2(-1,0,-2)+a_3(2,-3,1)=(0,0,0)$$

ou seja

$$(2a_1-a_2+2a_3,-a_1-3a_3,3a_1-2a_2+a_3)=(0,0,0).$$

Com isso, chegamos em um sistema linear homogêneo, cuja solução é: :

$$\begin{cases}2a_1-a_2+2a_3=0\\ -a_1-3a_3=0\\ 3a_1-2a_2+a_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{c} \\ a_1=-3a_3\\ -9a_3-2a_2+a_3=0\end{array}\Rightarrow\begin{array}{c}0=0\\ a_1=-3a_3\\ a_2=-4a_3\end{array}\Rightarrow\begin{array}{c}a_3\in\mathbb{R}\\ a_1=-3a_3\\ a_2=-4a_3\end{array}$$

Exemplos Resolvidos

Assim, obtemos que o sistema homogêneo obtido é possível e indeterminado (SPI) com suas infinitas soluções (não triviais) dadas por

$$a_1 = -3a_3, \qquad a_2 = -4a_3, \qquad a_3 \in \mathbb{R}.$$

Como existem infinitas soluções para o sistema, os escalares não são todos obrigatoriamente nulos (veja que, tomando $a_3 = 1$, temos $a_1 = -3$ e $a_2 = -4$ que satisfazem a combinação linear nula).

Portanto, os vetores dados são LD. Isso significa que os elementos v_1, v_2, v_3 são coplanares.

OBS: Como a_3 é a variável livre da solução do sistema homogêneo e a_3 está associada ao vetor v_3, temos que v_3 é coplanar com v_1 e v_2. Isso indica que, dentre os três vetores dados, v_3 não contribui para a combinação linear, e portanto, poderia ser "descartado" sem prejuízos às combinações lineares formadas entre os três elementos.

Exercício Proposto 1: Considerando os elementos do exemplo anterior, mostre que v_3 pode ser escrito como uma combinação linear de v_1 e v_2.

Observações Gerais

Note que, nos dois exemplos anteriores, tivemos que resolver um sistema homogêneo, que sabemos que sempre é possível (pois admite pelo menos a solução trivial).

Isso é um fato geral, ou seja, sempre que tivermos que analisar a dependência/independência linear de elementos recairemos em um sistema homogêneo!

No Exemplo 1, o sistema homogêneo era possível e determinado (SPD), admitindo somente a solução trivial e os elementos eram LI.

Isso também é um fato geral, ou seja, sempre que obtivermos um sistema homogêneo SPD, os elementos correspondentes serão LI.

Já no Exemplo 2, o sistema homogêneo era possível e indeterminado (SPI), admitindo infinitas soluções, e não somente a trivial.

Esse também é um fato geral, ou seja, sempre que obtivermos um sistema homogêneo SPI, os elementos correspondentes serão L.D.

Quando os elementos são LD (e o sistema associado SPI, com variável(is) livre(s)), teremos que pelo menos um dos elementos (em geral o(s) elemento(s) associado(s) à(s) variável(eis) livre(s)) sempre pode ser descartado da respectiva combinação linear, sem causar nenhum prejuízo.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 3) Em $V = M(2,2)$, determine se as matrizes $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ são LI ou LD.

Solução: Vamos analisar o que ocorre com os escalares a_1, a_2, a_3 da combinação linear

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = \vec{0}.$$

Substituindo as matrizes, obtemos

$$a_1\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Efetuando as operações matriciais, encontramos que

$$\begin{bmatrix} -a_1 + 2a_2 + 3a_3 & 2a_1 - 3a_2 - 4a_3 \\ -3a_1 + 3a_2 + 3a_3 & a_1 + a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Com isso, chegamos no sistema linear homogêneo:

Exemplos Resolvidos

$$\begin{cases} -a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ 2a_1 - 3a_2 - 4a_3 = 0 \\ -3a_1 + 3a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \end{cases}$$

que é um sistema possível e indeterminado (SPI) cujas infinitas soluções (resolva o sistema como exercício) são dadas por

$$a_1 = -a_3 \qquad a_2 = -2a_3 \qquad a_3 \in \mathbb{R}.$$

Como chegamos em um sistema homogêneo SPI, existem escalares diferentes de zero que satisfazem a combinação linear nula.

Portanto, as matrizes dadas são LD.

Note que, se descartarmos a matriz A_3 (que está associada à variável livre a_3) o conjunto formado por $\{A_1, A_2\}$ se torna LI.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 4) Em $V = P_3$, determine se os polinômios

$$p(x) = 1 - x^2, \quad q(x) = 1 + x, \quad r(x) = 1 - x - x^3 \quad \text{e} \quad s(x) = x^2 + x^3$$

são LI ou LD.

Solução: Vamos analisar o que ocorre com os escalares a, b, c e d da combinação linear

$$ap(x) + bq(x) + cr(x) + ds(x) = \vec{0}.$$

Substituindo os polinômios, obtemos

$$a(1 - x^2) + b(1 + x) + c(1 - x - x^3) + d(x^2 + x^3) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

ou seja

$$(a + b + c) + (b - c)x + (-a + d)x^2 + (-c + d)x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3.$$

Com isso, chegamos no sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b - c = 0 \\ -a + d = 0 \\ -c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} b = c \\ \\ d = c \end{array} \Rightarrow a = d = c \Rightarrow c + c + c = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \\ d = 0 \end{array}$$

Como obtemos $a = b = c = d = 0$, o sistema é SPD e os polinômios dados são LI.
Isso significa que nenhum dos polinômios é descartável da combinação linear!

Exemplos Resolvidos

Exemplo 5) Sejam u, v, w elementos linearmente independentes de um espaço vetorial V qualquer. Determine se os novos elementos $u - v$, $v - w$, $w - u$ são linearmente independentes ou dependentes.

Solução: Para determinar a independência ou dependência linear de $u - v, v - w,\ w - u$ vamos analisar o que ocorre com os escalares a, b, c da combinação linear nula

$$a(u - v) + b(v - w) + c(w - u)\ = \vec{0}.$$

Efetuando as multiplicações e reorganizando os termos, obtemos que

$$(a - c)u + (-a + b)v + (-b + c)w\ = \vec{0}.$$

Note que essa última igualdade é uma combinação linear nula dos elementos u, v, w , que por hipótese, sabemos que é LI. Assim, os escalares dessa última combinação linear devem ser todos nulos, ou seja, chegamos no sistema homogêneo

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ -a + b = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = c \\ \\ b = c \end{matrix} \Rightarrow -c + c = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} a = c \\ c \in \mathbb{R} \\ b = c \end{matrix}$$

Como o sistema é SPI, os elementos $u - v, v - w, w - u$ são LD.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 6) Sejam u, v, w elementos linearmente independentes de um espaço vetorial V qualquer. Determine se os novos elementos $u+v,\ \ 2u+2v-w,\ \ 2u-v+5w$ são linearmente independentes ou dependentes.

Solução: De forma análoga ao exemplo anterior, para determinar a independência ou dependência linear dos elementos $u+v,\ 2u+2v-w,\ 2u-v+5w$ vamos analisar o que ocorre com os escalares a, b, c da combinação linear nula entre esses elementos :

$$a(u+v)+b(2u+2v-w)+c(2u-v+5w)\ =\vec{0}.$$

Efetuando as multiplicações e reorganizando os termos, obtemos que

$$(a+2b+2c)u+(a+2b-c)v+(-b+5c)w\ =\vec{0}.$$

Note que essa última igualdade é uma combinação linear nula dos elementos u, v, w , que por hipótese, sabemos que é LI. Assim, os escalares dessa última combinação linear devem ser todos nulos, ou seja, chegamos no sistema homogêneo

$$\begin{cases} a+2b+2c=0 \\ a+2b-c=0 \\ -b+5c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ a=-2b+c \\ b=5c \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} -9c+10c+2c=0 \\ a=-9c \\ b=5c \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} c=0 \\ a=0 \\ b=0 \end{array}$$

Portanto, como o sistema é SPD, os elementos $u+v,\ \ 2u+2v-w,\ \ 2u-v+5w$ são LI.

Propriedades da Dependência/Independência Linear

Seja V um espaço vetorial qualquer e $A \subset V$ um subconjunto com uma quantidade finita de elementos.

São válidas as seguintes propriedades:

Propriedade 1: Se $\overrightarrow{0_V} \in A$, então A é linearmente dependente (LD).

Justificativa: Supondo que $A = \{\overrightarrow{0_V}, v_2, \ v_3, \dots, v_n\}$ temos que

$$1.\overrightarrow{0_V} + 0.v_2 + 0.v_3 + \cdots + 0\,.v_n = \overrightarrow{0_V}$$

é uma combinação linear nula dos elementos de A, em que um dos escalares (o primeiro) não é igual a zero. Portanto, A é LD.

Propriedade 2: Se $A = \{v_1\}$ com $v_1 \neq \overrightarrow{0_V}$, então A é linearmente independente.

Justificativa: Se $v_1 \neq \overrightarrow{0_V}$ então a combinação linear nula

$$a_1 v_1 = \overrightarrow{0_V}$$

se torna possível se e somente se

$$a_1 = 0.$$

Portanto, um conjunto formado por um único elemento não nulo é sempre LI.

Propriedades

Propriedade 3: $A = \{v_1,\ v_2,\ v_3, \dots, v_n\}$ é linearmente dependente se e somente se pelo menos um dos seus vetores pode ser escrito como uma combinação linear dos demais.

Justificativa: Seja $A = \{v_1,\ v_2,\ v_3, \dots, v_i, \dots v_n\}$. Temos que

$$A \text{ é LD} \quad \Leftrightarrow \quad \text{existe } a_i \neq 0 \quad \text{tal que} \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_i v_i + \cdots + a_n v_n = \overrightarrow{0_V}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_i = -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \frac{a_2}{a_i} v_2 - \cdots - -\frac{a_n}{a_i} v_n$$

$$\Leftrightarrow \quad v_i \text{ é uma combinação linear de } v_1, v_2, \dots, v_n.$$

OBS: A Propriedade 3 estabelece que em um conjunto LD, pelo menos um dos elementos é uma combinação linear dos demais vetores. Identificamos esse vetor por meio da combinação linear nula da definição de independência linear. Tal vetor estará sempre associado ao escalar que consiste na variável livre do respectivo sistema SPI.

Caso exista mais de uma variável livre na solução de tal sistema SPI, haverá mais de um vetor que pode ser escrito como combinação linear dos demais. Todos esses vetores podem ser considerados “descartáveis” sem causar prejuízos à combinação linear.