Introdução à árvores binárias

Estruturas de dados II

Prof. Allan Rodrigo Leite

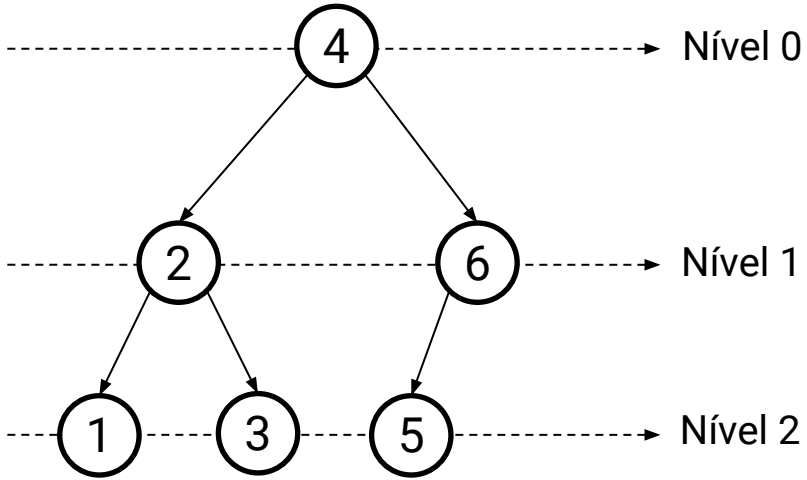
Introdução

- Estruturas de dados tradicionais
  - Listas representam dados de maneira sequencial
  - Árvores são adequadas para representação hierárquica
    - Árvores possui uma definição recursiva
    - Cada nó da árvore forma uma subárvore

- Uma árvore é composta por
  - Um conjunto de nós
  - Um dos nós é denominado raiz
  - Cada nó pode ter múltiplos filhos
  - Os nós que não possuem filhos são chamados de folhas

Introdução

- Estrutura de uma árvore
  - Nós representam os vértices da árvore
  - Arestas conectam dois vértices
  - Níveis da árvore



Introdução

- Maneiras para representar visualmente uma árvore

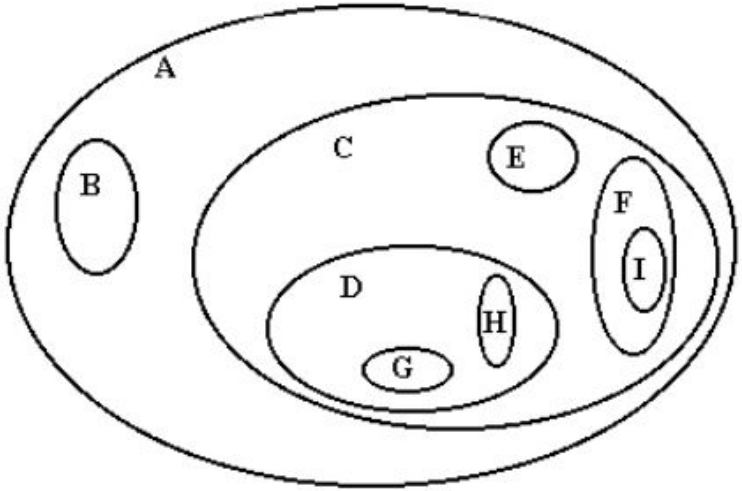
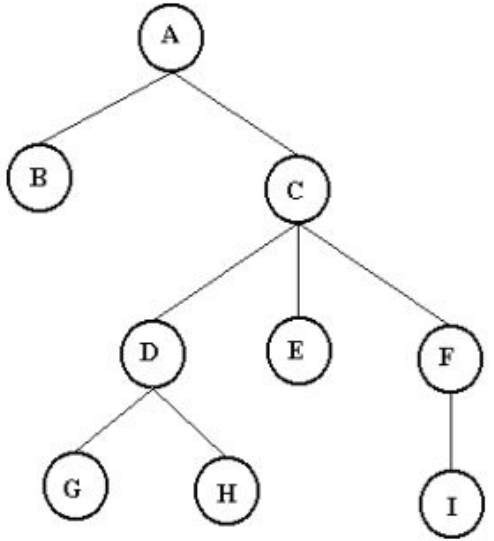


Diagrama de inclusão

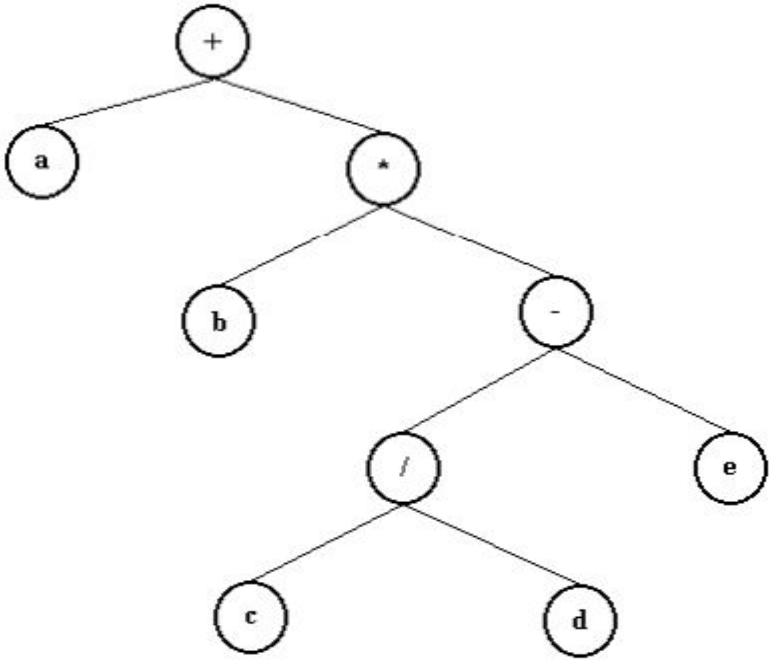


Representação hierarquica

Introdução

- Exemplo de uso de árvores para representar expressões aritméticas

```
(a + (b * (c / d – e)))
```



Introdução

- Conceitos básicos
  - Cada nó pode possuir um único nó pai
  - Cada nó possui uma coleção de nós filhos
    - Esta coleção pode ser vazia
    - Árvores binárias possuem, no máximo, dois nós filhos
  - O nó raiz não possui nó pai
  - Os nós folhas possuem uma coleção vazia de filhos
  - Grau de um nó representa a quantidade de ligações com nós vizinhos
    - Grau de saída de um nó representa a quantidade de filhos do nó em questão
    - Grau de uma árvore representa a maior quantidade de filhos entre os nós
  - Uma floresta é uma coleção de árvores

Introdução

- Conceitos básicos (cont.)
  - Caminho
    - É a uma sequência de nós distintos ligados pela relação de pai e filho
    - Existe apenas um caminho da raiz para qualquer nó
    - O comprimento de um caminho refere-se ao número de nós contidos
  - Profundidade
    - Comprimento do maior caminho da raiz até o nó folha mais distante
    - Profundidade é uma medida de altura da árvore
  - Largura
    - Maior número de filhos dos nós pertencentes ao mesmo nível

Introdução

- Conceitos básicos (cont.)
  - Árvore cheia de grau D
    - Todos os nós possuem o mesmo número de filhos, exceto os nós folha
  - Árvore cheia de grau 2
    - Todos os nós possuem dois filhos, exceto os nós folha
    - São chamadas de árvores binárias cheias (perfeitamente balanceadas)
    - Pode ser implementadas sequencialmente por vetor
  - Exemplo de árvore binária para representação de expressões aritméticas
    - Nós folhas representam os operandos (números)
    - Nós internos representam os operadores

Árvores binárias

- Representação em C

```
typedef struct no {
    struct no* pai;      //ponteiro para o nó pai
    struct no* esquerda; //ponteiro para o nó filho a esquerda
    struct no* direita;  //ponteiro para o nó filho a direita
    float v;             //conteúdo de um nó arbitrário da árvore
} No;

typedef struct arvore {
    struct no* raiz;
} Arvore;
```

Árvores binárias

- Operações básicas
  - Criar uma estrutura de árvore
  - Inserir um novo elemento no árvore
  - Remover o elemento da árvore
  - Verificar se a árvore está vazia
  - Liberar memória da árvore
  - Percorrer os caminhos da árvore

Árvores binárias

- Criar uma árvore binária

```
Arvore* cria() {
     Arvore *arvore;
     arvore = malloc(sizeof(Arvore));
     arvore->raiz = NULL;

     return arvore;
}
```

- Criar uma árvore binária

```
int vazia(Arvore* arvore) {
     return (arvore->raiz == NULL);
}
```

Árvores binárias

- Adicionar um elemento na árvore

```
No* adiciona(Arvore* arvore, No* pai, float valor) {
     No *no = malloc(sizeof(No));

     no->pai = pai;
     no->esquerda = NULL;
     no->direita = NULL;
     no->valor = valor;

     if (pai == NULL) {
          arvore->raiz = no;
     }

     return no;
}
```

Árvores binárias

- Remover um elemento na árvore

```
void remove(Arvore* arvore, No* no) {
    if (no->esquerda != NULL)
        remove(arvore, no->esquerda);

    if (no->direita != NULL)
        remove(arvore, no->direita);

    if (no->pai == NULL) {
        arvore->raiz = NULL;
    } else {
        if (no->pai->esquerda == no)
            no->pai->esquerda = NULL;
        else
            no->pai->direita = NULL;
    }
    free(no);
}
```

Árvores binárias

- Percorrer a árvore

```
void percorrer(No* no) {
    if (no != NULL) {
        printf("%f", no->valor);

        percorrer(no->esquerda);
        percorrer(no->direita);
    }
}
```

Árvores binárias

- Busca em árvore
  - Estratégia para visitar os nós de uma árvore

  - Busca em profundidade
    - Elementos são visitados intercalando os níveis da árvore
    - O resultado da busca a partir da raiz forma múltiplos caminhos

  - Busca em largura
    - Elementos são visitados no mesmo nível da árvore
    - Em seguida é realizada a mesma busca no próximo nível da árvore
    - Precisa ser conhecido quais nós pertencem a cada nível

Árvores binárias

- Busca em profundidade
  - A busca ocorre visitando os nós filhos da esquerda para a direita
  - O processo ocorre iterativamente a cada subárvore explorada
    - Estratégias de busca em árvore binária: *pre-order*, *in-order* e *pos-order*

  - *Pre-order*
    - Raiz, esquerda, direita
  - *In-order*
    - Esquerda, raiz e direita
  - *Pos-order*
    - Esquerda, direita e raiz

Árvores binárias

- Árvores ordenadas
  - Os valores dos nós são dispostos de forma hierárquica e ordenados
  - O nó da esquerda possui um valor (chave) menor que o nó atual
  - O nó da direita possui um valor (chave) maior que o nó atual

- Altura e largura máxima são as dimensões da árvore
  - Esforço computacional de busca é proporcional às dimensões da árvore
  - Isto é, o esforço computacional depende da altura e largura da árvore

Árvores binárias

- Balanceamento de árvores
  - Árvore degenerada
    - Ocorre quando cada nó possui uma única subárvore associada
    - Neste caso a árvore representa uma estrutura linear
    - Percorrer nesta árvore corresponde a complexidade *N* (linear)

  - Árvore cheia
    - Possui um balanceamento perfeito
    - Todos os nós possuem dois filhos ou são folhas
    - Percorrer nesta árvore corresponde a complexidade *log N* (logarítmica)

Árvores binárias

- Estrutura de uma árvore binária genérica

```
typedef struct no {
    struct no* pai;      //ponteiro para o nó pai
    struct no* esquerda; //ponteiro para o nó filho a esquerda
    struct no* direita;  //ponteiro para o nó filho a direita
    void* valor;         //conteúdo genérico do nó
} No;

typedef struct arvore {
    struct no* raiz; //raiz da árvore
    int tamanho;     //tamanho do valor dos nós (em bytes)
} Arvore;
```

Árvores binárias

- Como tornar genérica a operação de pesquisa?

- Técnica baseada em *callback*
  - Permite separação entre
    - Comportamento para percorrer os elementos da estrutura de dados
    - Ação realizada sobre cada elemento visitado na iteração

  - Função para percorrer é genérica
    - A parte específica é o que será feito a cada elemento visitado
    - Isto é, a operação de *callback*

Árvores binárias

- Implementação ocorre por meio de ponteiro de funções
  - Nome de uma função representa o endereço da função

- Exemplo
  - Assinatura da função

```
void callback(void* v);
```

  - Declaração do ponteiro para armazenar o endereço da função

```
void *(cb)(void*);
```

onde cb é ponteiro para funções com mesma assinatura que *callback*

Árvores binárias

- Recomendações sobre o uso de *callbacks*
  - Evitar uso de varáveis globais
    - Problemas de concorrência
    - Dificuldade para compreensão do código
  - Passar parâmetros genéricos, se for o caso
    - Pode ter, além do ponteiro do elemento atual, um ponteiro para dados
  - Isolar o comportamento genérico específico do *callback*
    - Reduz o acoplamento entre o cliente e a implementação de lista genérica

Árvores binárias

- Operação de percorrer genérica com suporte a *callback*

```
void percorrer(No* no, void (callback)(void*)) {
    if (no != NULL) {
        callback(no->v);

        percorrer(no->esquerda);
        percorrer(no->direita);
    }
}
```

Árvores binárias

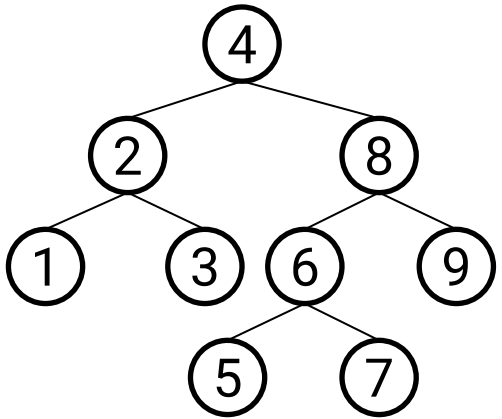
- Uso da operação de *callback*

```
void exibe(void* v) {
    float *f = (float*) f;
    printf("%f\n", v);
}

int main(int argc, char *argv[]){
    Arvore *a = cria();
    //insere valores na árvore...
    percorre(a->raiz, exibe); //passando a função como parâmetro
}
```

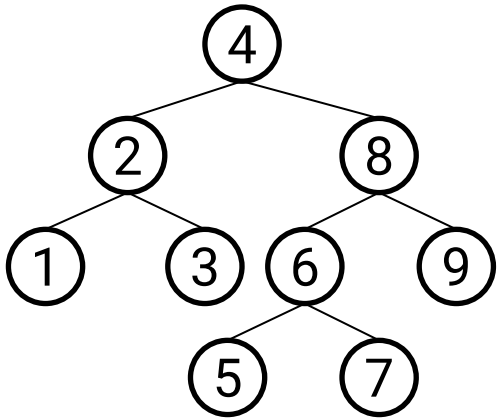
Exercícios

1. Implemente um algoritmo que visite todos os nós de uma árvore binária com uma busca em profundidade *in-order*, *pre-order* e *pos-order*.
   - Exemplo, para a árvore abaixo a saída deve ser:
     - *Pre-order*: 4, 2, 1, 3, 8, 6, 5, 7, 9
     - *In-order*: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
     - *Pos-order*: 1, 3, 2, 5, 7, 6, 9, 8, 4



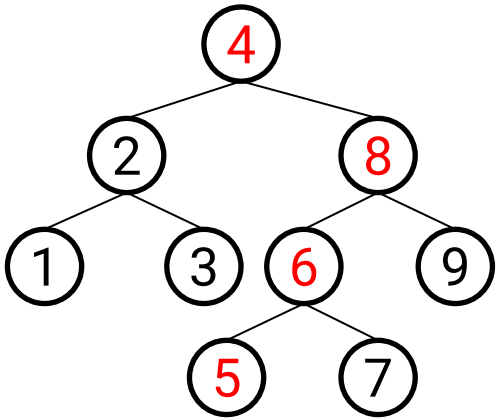
Exercícios

2. Implemente um algoritmo que visite todos os nós de uma árvore binária com uma busca em largura.
    - Exemplo, para a árvore abaixo a saída deve ser: 4, 2, 8, 1, 3, 6, 9, 5, 7



Exercícios

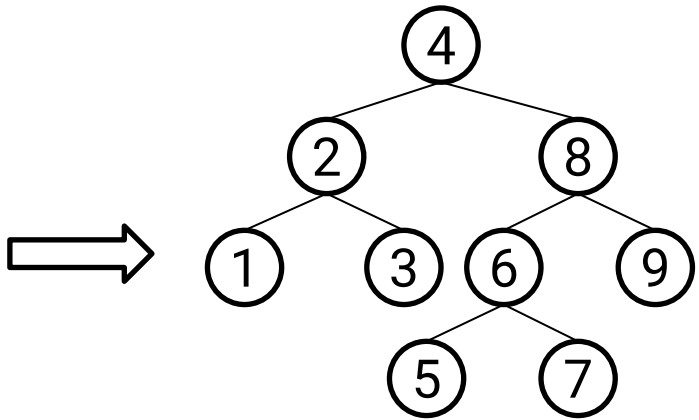
3. Dada uma árvore binária, retorne o número de comparações feitas em uma pesquisa binária para localizar um nó dada uma chave de acesso.
   - Os nós dessa árvore devem respeitar as seguintes regras
     - O valor de cada nó deve ser inteiro
     - O nó filho à esquerda possui um valor menor ou igual ao valor de seu nó pai
     - O nó filho à direita possui um valor maior do que o valor de seu nó pai
     - Exemplo: dada a árvore abaixo e a chave de pesquisa 5, a saída esperada é 4



Exercícios

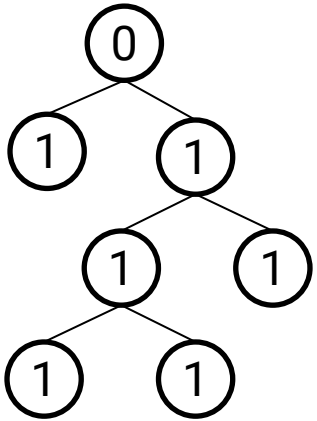
4. Implemente uma função para adicionar nós em uma árvore binária que respeite as regras abaixo necessárias para uma pesquisa binária.
   - O valor de cada nó deve ser inteiro
   - O nó filho à esquerda possui um valor menor ou igual ao valor de seu nó pai
   - O nó filho à direita possui um valor maior do que o valor de seu nó pai
   - Exemplo: deve ser gerada a árvore abaixo ao adicionar 4, 2, 1, 3, 8, 9, 6, 5, 7

```
Arvore *a = cria();
adiciona(a,4);
adiciona(a,2);
adiciona(a,1);
adiciona(a,3);
adiciona(a,8);
adiciona(a,9);
adiciona(a,6);
adiciona(a,5);
adiciona(a,7);
```



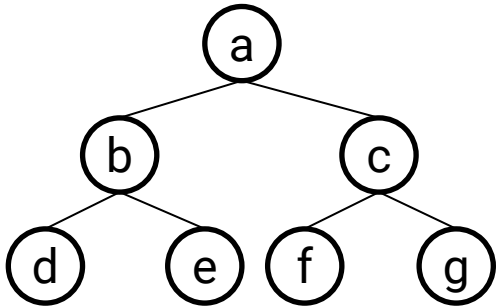
Exercícios

5. Uma árvore *unival* (valor universal) é uma árvore na qual todos os nós abaixo dela possuem o mesmo valor. Dada a raiz de uma árvore binária, conte o número de subárvores *unival*.
    - Exemplo, a árvore abaixo possui 5 subárvores *unival*



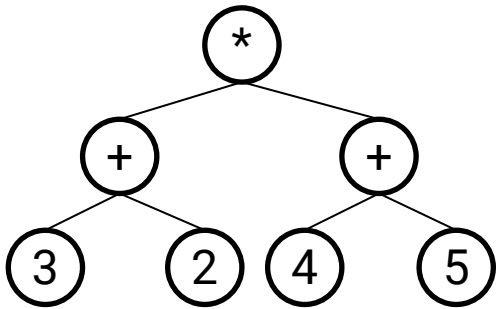
Exercícios

6. Dadas duas listas de nós de uma mesma árvore binária geradas em *pre-order* e *in-order*, escreva um programa capaz de reconstruir a árvore.
    - Exemplo, *pre-order*: [a, b, d, e, c, f, g] e *in-order*: [d, b, e, a, f, c, g], a saída esperada é:



Exercícios

7. Suponha uma expressão aritmética representada como uma árvore binária. Cada folha é um número inteiro e cada nó interno representa uma operação, como +, −, ∗ ou /. Dada a raiz da árvore, escreva um programa que avalia a expressão.
   - Exemplo, dada a árvore abaixo a saída é 45 pois `(3 + 2) * (4 + 5)`



Introdução à árvores binárias

Estruturas de dados II

Prof. Allan Rodrigo Leite