UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA	CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS (CCT) DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA (DMAT) GRUPO COLABORATIVO DE ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR*

GABARITO DA TERCEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS DE ALI-001**

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

RESPOSTAS:

1. a) $T(-6u_1+7u_2)=-33u_1+58u_2$ b) $T(u_1-u_2)=5u_1-9u_2$ c) $T(u_2-u_1)=-5u_1+9u_2$.

2. a) T é linear. b) T não é linear. c) T é linear. d) T não é linear.
   e) T não é linear. f) T é linear. g) T não é linear. h) T não é linear.
   i) T é linear. j) T não é linear. k) T é linear. l) S é linear. m) S não é linear.

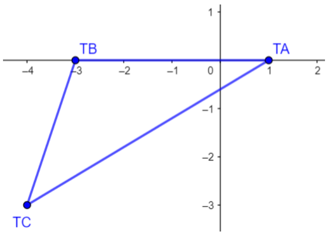
3. a) T é linear. b) T não é linear c) T é linear. d) T não é linear.

4. a) T é linear. b) T não é linear c) T é linear d) T não é linear
   e) T é linear f) T não é linear g) T é linear

5. a) É transformação linear, com $T(x,y)=(2x,2y)$.
   b) Não é transformação linear. Note que $T(0,0)\neq(0,0)$.
   c) Não é linear.
   d) É transformação linear, com $T(x,y)=(-x+2y,2x-y)$.

6. $T(x,y)=\frac{1}{7}(3x-y,-9x-4y,\ 5x+10y)$ e $T(2,-3)=\frac{1}{7}(-11,19,5)$.

7. $T(A)=(1,0)$, $T(B)=(-3,0)$ e $T(C)=(-4,-3)$. A imagem do triângulo ABC é



8. $T(x,y,z)=(-x+y+z,x-y+z,-2x+2y+2z)$.

9. a) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=(a+2b-3c-2d,3a+7b-5c+8d,-2a-4b+9c-11d)$;
   b) $\beta_{N(T)}=\left\{\begin{bmatrix} 85 & -34 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\right\}$, $\dim N(T)=1$.
   $\beta_{Im(T)}=\{(1,3,-2),(2,7,-4),(-3,-5,9)\}$, $\dim Im(T)=3$.

* Professores participantes do Grupo Colaborativo no semestre 2023/1: Graciela Moro, Katiani da Conceição Loureiro e Marnei Mandler.

10.

a) $\beta_{N(T)} = \emptyset$, $\dim N(T) = 0$. $\beta_{Im(T)} = \{(1,1,2,0),(1,-1,0,2)\}$; $\dim Im(T) = 2$.

b) $\beta_{N(T)} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\right\}$, $\dim N(T) = 1$. $\beta_{Im(T)} = \{(1,1,0,0),(0,1,1,2),(0,1,0,1)\}$; $\dim Im(T) = 3$.

c) $\beta_{N(T)} = \emptyset$, $\dim N(T) = 0$. $\beta_{Im(T)} = \{1 + x + 2x^2, 1 - x + x^2, 1 + 2x + 9x^2\}$; $\dim Im(T) = 3$.

d) $\beta_{N(T)} = \emptyset$, $\dim N(T) = 0$. $\beta_{Im(T)} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}$; $\dim Im(T) = 2$.

e) $\beta_{N(T)} = \left\{\begin{bmatrix} -111 & -7 \\ -32 & 48 \end{bmatrix}\right\}$, $\dim N(T) = 1$. $\beta_{Im(T)} = \{(1,0,-1),(7,0,9),(-5,3,0)\}$; $\dim Im(T) = 3$.

f) $\beta_{N(T)} = \emptyset$, $\dim N(T) = 0$. $\beta_{Im(T)} = \{(-5,-1,2,-4),(-1,2,-3,4),(10,1,5,-5)\}$; $\dim Im(T) = 3$.

g) $\beta_{N(T)} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$, $\dim N(T) = 3$. $\beta_{Im(T)} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$; $\dim Im(T) = 1$.

h) $\beta_{N(T)} = \{1 + 2x + 3x^2\}$, $\dim N(T) = 1$. $\beta_{Im(T)} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\right\}$ $\dim Im(T) = 3$.

i) $\beta_{N(T)} = \{(-2,-3,0,1)\}$, $\dim N(T) = 1$. $\beta_{Im(T)} = \{(1,-1,2),(-2,2,-3),(-3,-1,5)\}$; $\dim Im = 3$.

j) $\beta_{N(T)} = \{1 + x + x^2\}$, $\dim N(T) = 1$. $\beta_{Im(T)} = \{1 + 5x, 2 - 9x\}$; $\dim Im(T) = 2$.

k) $\beta_{N(T)} = \{(-63,-18,1,4)\}$, $\dim N(T) = 1$. $\beta_{Im(T)} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & -11 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}\right\}$; $\dim Im(T) = 3$.

l) $\beta_{N(T)} = \left\{\begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -17 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$, $\dim N(T) = 2$. $\beta_{Im(T)} = \{(1,-2,3),(-2,5,-8)\}$; $\dim Im(T) = 2$.

11. a) $\beta_{N(T)} = \{(1,-1,1)\}$, $\dim N(T) = 1$.

b) $\beta_{N(T)\cap Im(T)} = \emptyset$, $\dim N(T) \cap Im(T) = 0$.

c) $\beta_{N(T)+Im(T)} = \{(1,-1,1),(1,1,0),(1,1,2)\}$, $\dim(N(T) + Im(T)) = 3$.

12. $T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a - 2b - c & -3b \\ b & -b \end{bmatrix}$.

13. Existem diversas transformações $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que satisfazem a condição do enunciado. Um exemplo é $T(x, y, z, w) = (0, y - x, z - x, 0)$.

14. a) Apenas $p_1(x) = 2 \in N(T)$ e apenas $p_2(x) = x^2 \in Im(T)$.

b) $N(T) = \{p(x) \in P_2,\ p(x) = a\} = \{a + bx + cx^2 \in P_2;\ b = 0, c = 0\}$.

$Im(T) = \{p(x) \in P_2, p(x) = bx + 2cx^2\} = \{bx + 2cx^2 \in P_2;\ b, c \in \mathbb{R}\}$.

15. Basta mostrar que $N(T) \subseteq V$ e $Im(T) \subseteq W$ são fechados para as operações de adição e de multiplicação por escalar.

16. A lei da transformação é $T(x, y, z) = (2a + 5b + c) + (3a + 4b + 5c)x + (-3a - 5b - 4c)x^2$.

$\beta_{N(T)} = \{(-3, 1, 1)\}$. $\beta_{Im(T)} = \{2 + 3x - 3x^2,\ 5 + 4x - 5x^2\}$.

17. a) Existem diversas $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\dim N(T) = 1$. Um exemplo é $T(x,y,z) = (x,0,0)$.

b) Existem diversas $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $N(T) = \{(0,0,0)\}$. Um exemplo é $T(x,y,z) = (x,y,z)$.

c) Existe uma única $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Im(T) = \{(0,0,0)\}$, dada por $T(x,y,z) = (0,0,0)$.

d) Existem diversas $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = -x\}$. Um exemplo é $T(x,y,z) = (x+z, y, x+z)$.

e) Existem diversas $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Im(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ y = 2x - z\}$. Um exemplo é $T(x,y,z) = (x+y, 2x+y-z, y+z)$.

18. a) $T(a+bx+cx^2) = (a+c) + (a+b+c)x + (b-2c)x^2$

b) Sim, pois $N(T) = \{\vec{0}_{P_2}\} = \{0 + 0x + 0x^2\}$.

c) Sim, pois $Im(T) = P_2$.

d) Sim, pois é injetora e sobrejetora.

19. a) $T(x,y) = \begin{bmatrix} -x+y & x-y \\ x-y & -x+y \end{bmatrix}$.

b) $T(1000, 999) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

c) Não, pois T não é injetora ($\dim N(T) = 1 \neq 0$) e nem sobrejetora ($\dim Im(T) = 1 \neq 4$).

20. a) T é injetora, não é sobrejetora, não é bijetora.

b) T não é injetora, nem sobrejetora, nem bijetora.

c) T é injetora, não é sobrejetora, não é bijetora.

d) T é injetora, não é sobrejetora, não é bijetora.

e) T não é injetora, é sobrejetora, não é bijetora.

f) T é injetora, não é sobrejetora, não é bijetora.

g) T não é injetora, não é sobrejetora, não é bijetora.

h) T não é injetora, não é sobrejetora, não é bijetora.

i) T não é injetora, é sobrejetora, não é bijetora.

j) T não é injetora, é sobrejetora, não é bijetora.

k) T é injetora, não é sobrejetora, não é bijetora.

l) T não é injetora, nem sobrejetora, nem bijetora.

21. $k = -54$.

22. a) T é injetora, pois $N(T) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^4}\}$. T é sobrejetora, pois $Im(T) = M(2,2)$. T é bijetora.

b) T não é injetora, pois $\dim N(T) = 1$. T não é sobrejetora, pois $Im(T) \neq \mathbb{R}^3$. T não é bijetora.

c) T é injetora, pois $N(T) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\}$. T não é sobrejetora, pois $Im(T) \neq P_3$. T não é bijetora.

23. Basta usar a definição de injetividade e propriedades do núcleo.

24. a) $\dim N(T) = 4$. b) $\dim N(T) = 2$. c) $\dim N(T) = 0$. d) $\dim N(T) = 0$.

25. a) $\dim Im(T) = 3$. b) $\dim Im(T) = 10$. c) $\dim Im(T) = 4$. d) $\dim Im(T) = 8$.

26. a) Não existe $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a origem, pois se $\dim N(T) = 0$, o Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem fornece que $\dim Im\,(T) = 4$, o que é impossível, pois $Im(T) \subseteq \mathbb{R}^2$.

b) Não existe $T: P_4 \to M(3,2)$ que seja sobrejetiva, pois se $\dim Im(T) = 6$, o Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem fornece que $\dim N(T) = -1$, o que é impossível.

c) Não existe $T: P_2 \to \mathbb{R}^2$ que seja injetiva, pois se $\dim N(T) = 0$, o Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem fornece que $\dim Im\,(T) = 3$, o que é impossível, pois $Im(T) \subseteq \mathbb{R}^2$.

d) Não existe $T: P_9 \to M(3,3)$ que seja bijetora, pois se $\dim N(T) = 0$, o Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem fornece que $\dim Im\,(T) = \dim P_9 = 10$, o que é impossível, pois $Im(T) \subseteq M(3,3)$.

e) Não existe $T: P_6 \to \mathbb{R}^6$ tal que $\dim N(T) = \dim Im(T)$, pois se isso fosse válido, o Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem forneceria que $\dim N(T) = 7/2$, o que é impossível.

f) Não existe tal $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, pois nesse caso teríamos $\dim N(T) = 2$ e $\dim Im(T) = 1$, o que contraria o Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem, já que $\dim(\mathbb{R}^4) \neq 2 + 1 = \dim N(T) + \dim Im(T)$.

g) Não existe $T: P_5 \to M(2,2)$ tal que $\dim N(T) = 1$, pois nesse caso o Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem forneceria que $\dim Im(T) = 6 - 1 = 5$, o que é impossível, pois $Im(T) \subseteq M(2,2)$.

h) Não existe $T: P_8 \to \mathbb{R}^8$ tal que $\dim N(T) = 2$ e $\dim Im(T) = 6$, pois nesse caso o Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem forneceria que $\dim P_8 = 2 + 6$, o que é falso, pois $\dim P_8 = 9$.

i) Pode existir $T: P_7 \to \mathbb{R}^{10}$ tal que $2 \leq \dim Im(T) \leq 8$, pois nesse caso o Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem forneceria que $2 \leq 8 - \dim N(T) \leq 8$, ou seja, $0 \leq \dim N(T) \leq 6$, o que é possível pois $N(T) \subseteq P_7$ e $\dim P_7 = 8$.

j) Pode existir $T: M(4,3) \to P_{10}$ tal que $1 \leq \dim N(T) \leq 7$, pois nesse caso o Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem forneceria que $1 \leq 12 - \dim Im(T) \leq 7$, ou seja, $5 \leq \dim Im(T) \leq 11$, o que é possível pois $Im(T) \subseteq P_{10}$ e $\dim P_{10} = 11$.

27. a) Não, pois pelo teorema da dimensão do núcleo e da imagem tem-se que $\dim Im(T) \leq 5$.

b) Não, pois o conjunto $\{(1,1), (2,2)\}$ não forma uma base para $\mathbb{R}^2$.

c) Sim, pois $T(p(x) + q(x)) = T(p(x)) + T(q(x))$ e $T(kp(x) = kT\big(p(x)\big)$.

d) O núcleo de T é uma reta que passa pela origem, pois é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ com $\dim N(T) = 1$.

28. a) $[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

b) $posto\Big([T]_\alpha^\beta\Big) = 4,\ nulidade\Big([T]_\alpha^\beta\Big) = 0$. c) $\dim N(T) = 0$ e $\dim Im(T) = 4$.

29. $u = (x, 0)$ e $v = (x, -3x)$, com $x \in \mathbb{R}$.

30. $\dim N(T) = 0$ e $\dim Im(T) = n$.

31. a) $T(x, y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}, 2x + y\right)$.

b) $\beta_{N(T)} = \emptyset, \dim(N(T)) = 0$ e $\beta_{Im(T)} = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right); \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\}, \dim(Im(T)) = 2.$

c) Uma possibilidade é $\gamma = \{(1,1,1), (1,0,0), (-1, -1,2)\}$.

32. $[T] = [T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

33. Alternativa correta: c).

34. a) $[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$ b) $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$ c) $[T(p)]_\beta = \begin{bmatrix} 20 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}.$

35. a) $(T \circ S)(x, y, z) = (x + 3y - z, x + y + z, x + 2z)$

$(S \circ T)(x, y, z) = (x + 3y + 2z, y, x + y + 2z)$

b) $\beta_{N(T \circ S)} = \{(-2, 1, 1)\}$ e $\beta_{N(S \circ T)} = \{(-2, 0, 1)\}$.

c) $\beta_{Im(T \circ S)} = \{(1, 1,1), (3,1,0\}$ e $\beta_{Im(S \circ T)} = \{(1, 0,1), (3, 1, 1)\}$.

d) $T \circ S$ não é um isomorfismo, pois não é bijetora.

36. Basta mostrar que a matriz canônica $[T] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz a equação matricial

$$[T^2 - I].[T^2 - 9I] = 0,$$

em que 0 é a matriz nula de ordem 3×3.

37. $T(x, y, z) = (S^{-1} \circ R)(x, y, z) = (8x - y + 9z, 4x + 4z, -13x + 2y - 15z)$.

38. a) $(S \circ T)(3 + 2x - x^2) = 2 - 4x^2$.

b) Sim, pois o contradomínio de S é igual ao domínio de T. Ainda, $(T \circ S)(a + bx) = (a + b) + 4bx$ e $(T \circ S)(\pi + \pi x) = 2\pi + 4\pi x$.

39. $T(x, y) = \frac{1}{5}(4x + 2y, 2x + y)$; $\dim N(T) = 1$ e $\dim Im(T) = 1$. T não é invertível, pois não é bijetora.

40. $T(x, y, z) = (x - 2y + z, x, x + 2y + z)$. T é um isomorfismo, pois é bijetora. O isomorfismo inverso é $T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to$ ℝ^3 dado por $T^{-1}(x, y, z) = \left(y, \frac{-x+z}{4}, \frac{x-2y+z}{2}\right)$.

41. $T(a + bx + cx^2) = (a + b, b + c, a - 2c)$

$T^{-1}(a, b, c) = (2a - 2b - c) + (-a + 2b + c)x + (a - b - c)x^2$.

42. Basta aplicar o Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem.

43. a) S é um isomorfismo, pois é bijetora. $S^{-1}(a,b,c) = \left(\frac{a+c}{2}\right) + \left(\frac{a-c}{2}\right)x + bx^2$.

b) $\beta_{N(S\circ T)} = \emptyset$. $\beta_{Im(S\circ T)} = \{(1,0,1),(2,0,0),(2,1,-2)\}$.

c) $[S\circ T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

44. $(S\circ T)(a,b,c,d) = \begin{bmatrix} a-b-c & -b+c \\ a+b & a+d \end{bmatrix}$ é um isomorfismo, pois é bijetora. O isomorfismo inverso é dado por $(S\circ T)^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b+c, -a-b, a+2b+c, -a-b-c+d)$.

45. a) $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & -8 & -1 \\ 17 & -16 & 4 \\ 11 & -3 & 5 \end{bmatrix}$.

b) $T^{-1}(a,b,c) = (29a-15b-2c) + (-15a+8b+c)x + (-17a+9b+c)x^2$.

46. a) $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 14 & -22 \\ 1 & -3 \\ 10 & -17 \end{bmatrix}$.

b) $(T\circ S)(a+bx) = (5a+5b, -7a-9b, 3a-4b)$. $S\circ T$ não está definida, pois o domínio de S é diferente do contradomínio de T.

47. a) $(S\circ T)(x,y) = (-4x+2y, 15x-9y, 20x-12y)$. $T\circ S$ não está definida, pois o domínio de T é diferente do contradomínio de S.

b) S é invertível pois $\det[S] \neq 0$. $S^{-1}(x,y,z) = (-4x+11y-9z, -2x+5y-4z, -x+y-z)$.

c) $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 30 & -12 \\ 20 & -8 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$.

48. $T(a,b,c) = (28a+19b-4c) - ax + (-8a-5b+4c)x^2$.

49. a) $T(x,y) = (2x+y, -x-y)$.

b) $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

c) $T^{-1}(x,y) = (x+y, -x-2y)$.

50. a) Falsa. Seria verdadeiro se, e somente se, T fosse injetora.

b) Falsa. S é uma transformação linear, pois preserva a adição e a multiplicação por escalar.

c) Verdadeira.

d) Verdadeira.

e) Verdadeira.

f) Verdadeira.