# Álgebra Linear
(ALI0001 – CCI-192-02U)

## Subespaços gerados

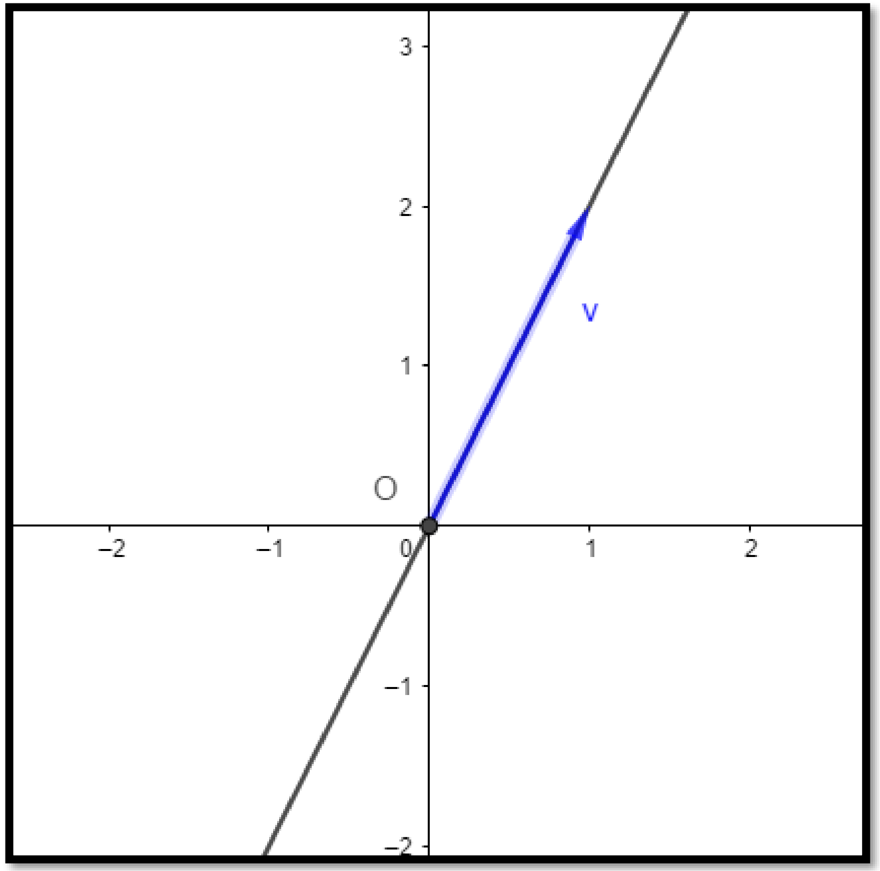
**Professor:** Marnei Luis Mandler

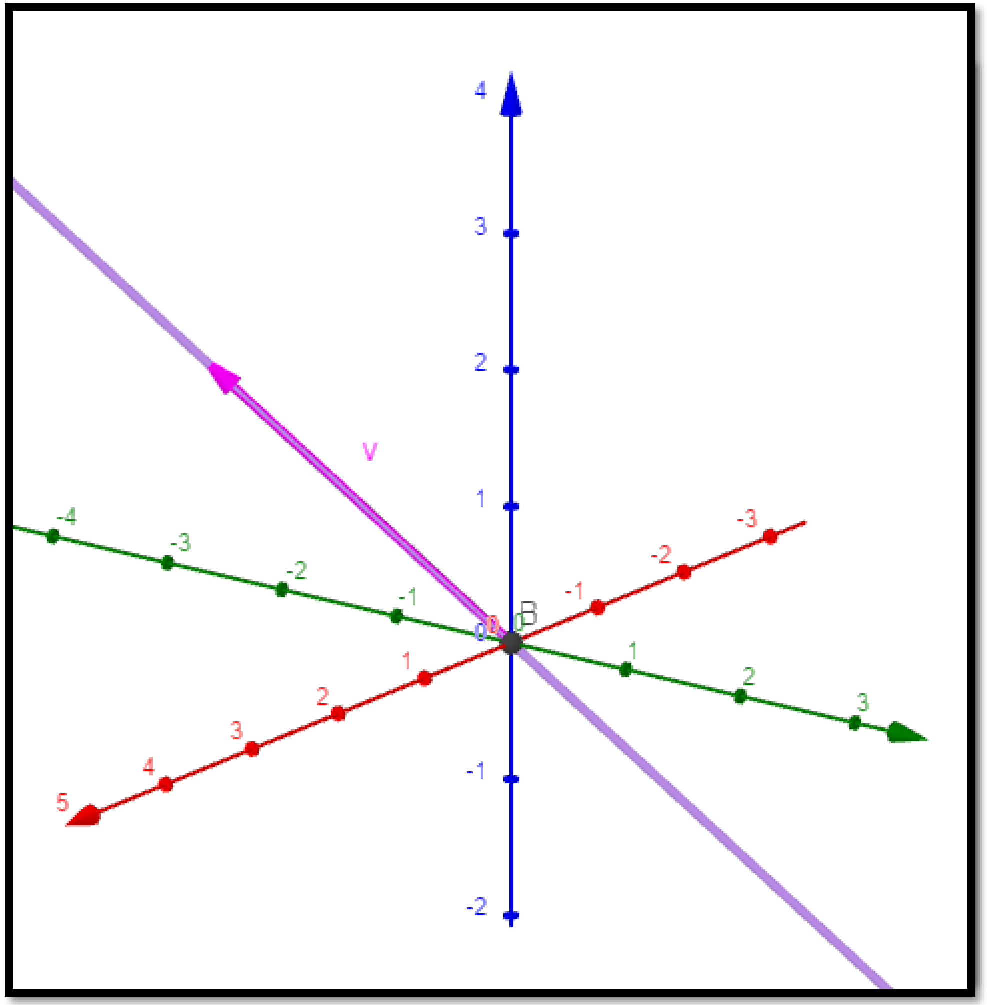
Aula do dia 10 de abril de 2023.

UDESC

# Introdução: Subespaços Gerados

- Em $\mathbb{R}^2$ ou em $\mathbb{R}^3$, com um vetor não nulo $v$ é possível determinar (gerar) toda uma **reta** $S$ que passa pela origem:



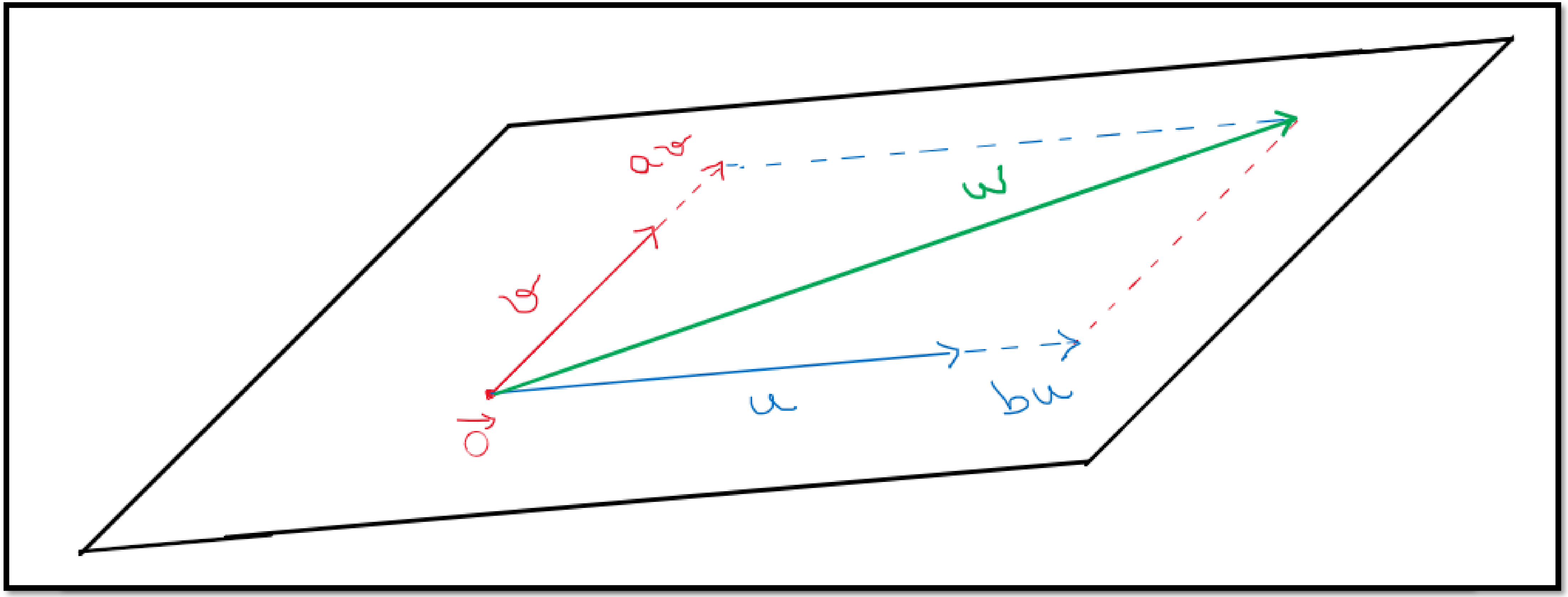

Se $w$ é qualquer outro vetor pertencente à reta $S$, temos que

$$w = av, \quad \text{com } a \in \mathbb{R}.$$

$w$ é uma combinação linear de $v$.

# Introdução: Subespaços Gerados

- Da mesma forma, com dois vetores não colineares $u, v$ de $\mathbb{R}^3$ é possível gerar todo um **plano** em $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem:




Se $w$ é qualquer outro vetor pertencente ao plano, temos que

$$w = av + bu$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

$w$ é uma combinação linear de $u, v$.

# Introdução

- Em ambos os casos, as expressões obtida para $w$, dadas respectivamente por

$$w = av \qquad \text{e} \qquad w = av + bu$$

são uma combinação linear do(s) respectivo(s) "vetor(es) gerador(es)" da reta ou do plano.

- Vamos generalizar tais situações, determinando o conjunto que é **gerado** por qualquer quantidade finita de elementos $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ em um espaço vetorial $V$ qualquer.
- Esse conjunto deve ser formado por todos os elementos de $V$ que podem ser escritos como uma combinação linear dos elementos fixados $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \in V$.
- Vamos verificar que tal conjunto é fechado para as operações de adição e de multiplicação por escalar definidas em $V$.
- Por isso, tal conjunto será um subespaço vetorial de $V$.
- Vamos chamar esse conjunto de "Subespaço Gerado".
- Os elementos $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \in V$ que dão origem a tal subespaço gerado serão chamados de geradores do subespaço gerado.

# Subespaço Gerado

**Definição:**

Seja $V$ um espaço vetorial e considere $A = \{v_1, v_2, v_{3,} \dots, v_n\} \subset V$ um subconjunto finito.

O conjunto de todos os infinitos elementos de $V$ que são escritos como combinação linear dos elementos de $A$, definido como

$$S = \{w \in V;\ w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \cdots + a_n v_n\},$$

com $a_1, a_2, a_{3,} \dots, a_n \in \mathbb{R}$, é chamado de subespaço gerado por $A$ ou por $v_1, v_2, v_{3,} \dots, v_n$.

Notação:

$$S = ger\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\} \qquad \text{ou} \qquad S = ger\{A\}.$$

Observações:

- Os elementos $v_1, v_2, v_{3,} \dots, v_n$ são chamados de geradores de $S$, enquanto que $A$ é dito conjunto gerador de $S$.
- Note que $v_1, v_2, v_{3,} \dots, v_n \in S$, ou seja, $A \subset S$. $\qquad v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \cdots + 0v_n$
- Notações alternativas: $S = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_n]$

ou $S = span\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$.

# $S$ é um subespaço vetorial de $V$

Teorema: $S = ger\{v_1, v_2, v_3 \cdots, v_n\}$ é um subespaço vetorial de $V$.

Justificativa: Vamos verificar que $S$ é fechado para a adição e a para a multiplicação por escalar.

Sejam $w$ e $u \in S = ger\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$.

Logo, pela definição de subespaço gerado, temos que

$$w = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \cdots + a_nv_n$$

$$u = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + \cdots + b_nv_n$$

com $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Assim, temos que:

$$i)\ w + u = (a_1+b_1)v_1 + (a_2+b_2)v_2 + (a_3+b_3)v_3 + \cdots + (a_n+b_n)v_n$$

com $a_i + b_i \in \mathbb{R}$ e $w + u$ é uma combinação linear dos elementos $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$.

Portanto, $w + u \in S$.

$$ii)\ kw = (ka_1)v_1 + (ka_2)v_2 + (ka_3)v_3 \cdots + (ka_n)v_n$$

com $ka_i \in \mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{R}$ e $kw$ é uma combinação linear dos elementos $v_1, v_2, \cdots, v_n$.

Portanto, $kw \in S$.

Desta forma, $S = ger\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é um subespaço vetorial de $V$.

# Exercícios

Exercício 1) Em $V = \mathbb{R}^3$, munido das operações usuais, considere os elementos

$$v_1 = (1, -3, 8), \quad v_2 = (2, -5, 9) \quad v_3 = (3, -2, -25).$$

a) Determine o subespaço gerado por $v_1, v_2$ e $v_3$.

b) Verifique se $w = (-7, 10, 19) \in ger\{v_1, v_2, v_3\}$.

b) Verifique se $w = (6, -11, -1) \in ger\{v_1, v_2, v_3\}$.

Exercício 2) Em $V = M(2,2)$, munido das operações usuais, considere os elementos

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine o subespaço gerado por $A_1, A_2, A_3$ e $A_4$.

b) Verifique se $A = \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ 11 & -8 \end{bmatrix} \in ger\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

c) Verifique se $B = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \in ger\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

# Exercícios

Exemplo 3) Em $V = P_3$, munido das operações usuais, considere os elementos

$p_1(x) = 1 + 2x - 4x^2 + 6x^3$, $p_2(x) = -3 + 5x + 4x^2 - 7x^3$, $p_3(x) = 4 + 2x + 8x^2 - x^3$.

a) Determine o subespaço gerado por $p_1, p_2$ e $p_3$.

b) Verifique se $p_1, p_2, p_3$ são LI ou LD.

c) Verifique se $p(x) = -1 + 3x - 2x^2 + 4x^3 \in ger\{p_1, p_2, p_3\}$.

Os três exercícios foram resolvidos durante a aula.

A seguir, são listados outros exemplos resolvidos.

# Exemplos Resolvidos

Exemplo 1) Determine o subespaço de $V = \mathbb{R}^3$ que é gerado pelos elementos

$$v_1 = (1, -5, 7) \quad \text{e} \quad v_2 = (-4, 21, -19).$$

Solução: Vamos determinar o subespaço $S = ger\{v_1, v_2\}$.

Para isso, consideramos $w = (x, y, z) \in S = ger\{v_1, v_2\}$.

Logo, devem existir $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

ou seja,

$$(x, y, z) = a_1(1, -5, 7) + a_2(-4, 21, -19) = (a_1 - 4a_2, -5a_1 + 21a_2, 7a_1 - 19a_2).$$

Igualando as respectivas coordenadas, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} a_1 - 4a_2 = x \\ -5a_1 + 21a_2 = y \\ 7a_1 - 19a_2 = z \end{cases},$$

que desejamos que seja possível (SPD ou SPI):

Escalonando a matriz ampliada do sistema:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & |\, x \\ -5 & 21 & |\, y \\ 7 & -19 & |\, z \end{bmatrix}$$

# Exemplos Resolvidos

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & |\, x \\ -5 & 21 & |\, y \\ 7 & -19 & |\, z \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 + 5L_1 \\ L_3 \to L_3 - 7L_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & | & x \\ 0 & 1 & | & y + 5x \\ 0 & 9 & | & z - 7x \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - 9L_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & | & x \\ 0 & 1 & | & y + 5x \\ 0 & 0 & | & z - 7x - 9(y + 5x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & | & x \\ 0 & 1 & | & y + 4x \\ 0 & 0 & | & -52x - 9y + z \end{bmatrix}$$

Assim, o sistema é possível se e somente se

$$posto([A|B]) = posto(A) = 2,$$

ou seja, se e somente se

$$-52x - 9y + z = 0.$$

Portanto:

$$S = ger\{v_1, v_2\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -52x - 9y + z = 0\}.$$

Prova Real: Veja que $v_1 = (1, -5, 7)$ e $v_2 = (-4, 21, -19)$ satisfazem a condição algébrica obtida, pois

$$-52.1 - 9.(-5) + 7 = -52 + 45 + 7 = 0$$

$$-52.(-4) - 9.(21) + (-19) = 208 - 189 - 19 = 0$$

# Exemplos Resolvidos

Exemplo 2) Determine o subespaço de $V = P_3$ gerado pelos elementos

$p_1(x) = 2 + x - 4x^2 + 6x^3,\ \ p_2(x) = -5 - 3x + 4x^2 - 7x^3,\ p_3(x) = 4 + 2x - 9x^2 - 8x^3.$

Solução: Vamos determinar o subespaço $S = ger\{p_1, p_2, p_3\}$.

Para isso, consideramos $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in S = ger\{p_1, p_2, p_3\}$.

Logo, devem existir $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que $p(x) = a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x)$.

Substituindo os elementos, obtemos que

$$a + bx + cx^2 + dx^3 = a_1(2 + x - 4x^2 + 6x^3) + a_2(-5 - 3x + 4x^2 - 7x^3) + a_3(4 + 2x - 9x^2 - 8x^3)$$

$$= (2a_1 - 5a_2 + 4a_3) + (a_1 - 3a_2 + 2a_3)x + (-4a_1 + 4a_2 - 9a_3)x^2 + (6a_1 - 7a_2 - 8a_3)x^3$$

Igualando os respectivos coeficientes, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} 2a_1 - 5a_2 + 4a_3 = a \\ a_1 - 3a_2 + 2a_3 = b \\ -4a_1 + 4a_2 - 9a_3 = c \\ 6a_1 - 7a_2 - 8a_3 = d \end{cases}$$

que deve ser possível (SPD ou SPI):

Escalonando a matriz ampliada

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & a \\ 1 & -3 & 2 & b \\ -4 & 4 & -9 & c \\ 6 & -7 & -8 & d \end{array}\right]$$

# Exemplos Resolvidos

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 4 & & a \\ 1 & -3 & 2 & & b \\ -4 & 4 & -9 & & c \\ 6 & -7 & -8 & & d \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & b \\ 2 & -5 & 4 & a \\ -4 & 4 & -9 & c \\ 6 & -7 & -8 & d \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 + 4L_1 \\ L_4 \to L_4 - 6L_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 & a - 2b \\ 0 & -8 & -1 & c + 4b \\ 0 & 11 & -20 & d - 6b \end{array}\right] \begin{array}{l} L_3 \to L_3 + 8L_2 \\ L_4 \to L_4 - 11L_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 & a - 2b \\ 0 & 0 & -1 & 8a - 12b + c \\ 0 & 0 & -20 & d - 6b - 11(a - 2b) \end{array}\right] \begin{array}{l} L_3 \to -L_3 \\ L_4 \to L_4 - 20L_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 & a - 2b \\ 0 & 0 & 1 & -8a + 12b - c \\ 0 & 0 & 0 & -171a + 256b - 20c + d \end{array}\right]$$

$$d - 6b - 11a + 22b - 20(8a - 12b + c)$$

$$= d - 11a + 16b - 160a + 240b - 20c$$

$$= -171a + 256b - 20c + d$$

# Exemplos Resolvidos

Com isso, o sistema é possível se e somente se

$$posto([A|B]) = posto(A) \ = 3$$

ou seja, se e somente se

$$-171a + 256b - 20c + d = 0.$$

Portanto:

$$S = ger\{p_1, p_2, p_3\} = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3 \ / -171a + 256b - 20c + d = 0\}.$$

Prova Real: Temos que, para

$p_1(x) = 2 + x - 4x^2 + 6x^3$ $\quad -171.2 + 256.1 - 20.(-4) + 6 = -342 + 256 + 80 + 6 = 0.$

$p_2(x) = -5 - 3x + 4x^2 - 7x^3$ $\quad -171.(-5) + 256.(-3) - 20.4 - 7 = 855 - 768 - 80 - 7 = 0.$

$p_3(x) = 4 + 2x - 9x^2 - 8x^3$ $\quad -171.4 + 256.2 - 20.(-9) - 8 = -684 + 512 + 180 - 8 = 0.$

satisfazem a condição algébrica obtida.

Questão: $q(x) = -3 - x + 10x^2 + 13x^3 \in S$?

Vamos verificar se $q(x)$ satisfaz a condição algébrica de $S$. Como

$$-171.(-3) + 256.(-1) - 20.10 + 13 = 513 - 256 - 200 + 13 = 70 \neq 0,$$

temos que $q(x) \notin S$.

# Exemplos Resolvidos

Exemplo 3) Determine o subespaço de $V = M(2,2)$ que é gerado por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

Solução: Vamos determinar o subespaço $S = ger\{A_1, A_2, A_3\}$.

Para isso, consideramos $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in S$.

Logo, devem existir $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 - a_2 + 2a_3 & -a_1 + a_2 - a_3 \\ 2a_1 - 5a_2 + 9a_3 & 3a_1 - 2a_2 + 7a_3 \end{bmatrix}$$

Pela igualdade matricial, obtemos um sistema linear, que deve ser possível (SPD ou SPI):

# Exemplos Resolvidos

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 = a \\ -a_1 + a_2 - a_3 = b \\ 2a_1 - 5a_2 + 9a_3 = c \\ 3a_1 - 2a_2 + 7a_4 = d \end{cases}$$

Escalonando a matriz ampliada do sistema:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ -1 & 1 & -1 & b \\ 2 & -5 & 9 & c \\ 3 & -2 & 7 & d \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \\ L_4 \to L_4 - 3L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 & b+a \\ 0 & -3 & 5 & c-2a \\ 0 & 1 & 1 & d-3a \end{array}\right] L_2 \leftrightarrow L_4$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & d-3a \\ 0 & -3 & 5 & c-2a \\ 0 & 0 & 1 & b+a \end{array}\right] \begin{array}{l} L_3 \to L_3 + 3L_2 \\ L_4 \to L_4 - 2L_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & d-3a \\ 0 & 0 & 8 & c-11a+3d \\ 0 & 0 & 1 & b+a \end{array}\right] L_3 \leftrightarrow L_4$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & d-3a \\ 0 & 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & 8 & c-11a+3d \end{array}\right] L_4 \to L_4 - 8L_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & d-3a \\ 0 & 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & 0 & c-19a+3d-8b \end{array}\right]$$

# Exemplos Resolvidos

Logo, o sistema é possível se e somente se

$$posto([A|B]) = posto(A) \ = 3$$

ou seja, se e somente se

$$-19a - 8b + c + 3d = 0.$$

Portanto:

$$S = ger\{A_1, A_2, A_3\} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2)\,; -19a - 8b + c + 3d = 0\right\}$$

Questão:

- $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \in S?$

Como $\quad -19.(-2) - 8.5 - 4 + 3.2 = 38 - 40 - 4 + 6 = 0,$

temos que $B$ satisfaz a condição algébrica do conjunto e, portanto, $B \in S$.

- $C = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \in S?$

Como $\quad -19.(-3) - 8.7 + 1 + 3.5 = 57 - 56 + 1 + 15 = 17 \neq 0,$

temos que $C$ NÃO satisfaz a condição algébrica do conjunto e, portanto, $C \notin S$.