公開鍵暗号3

光成滋生

last update: 2025/11/06

目次

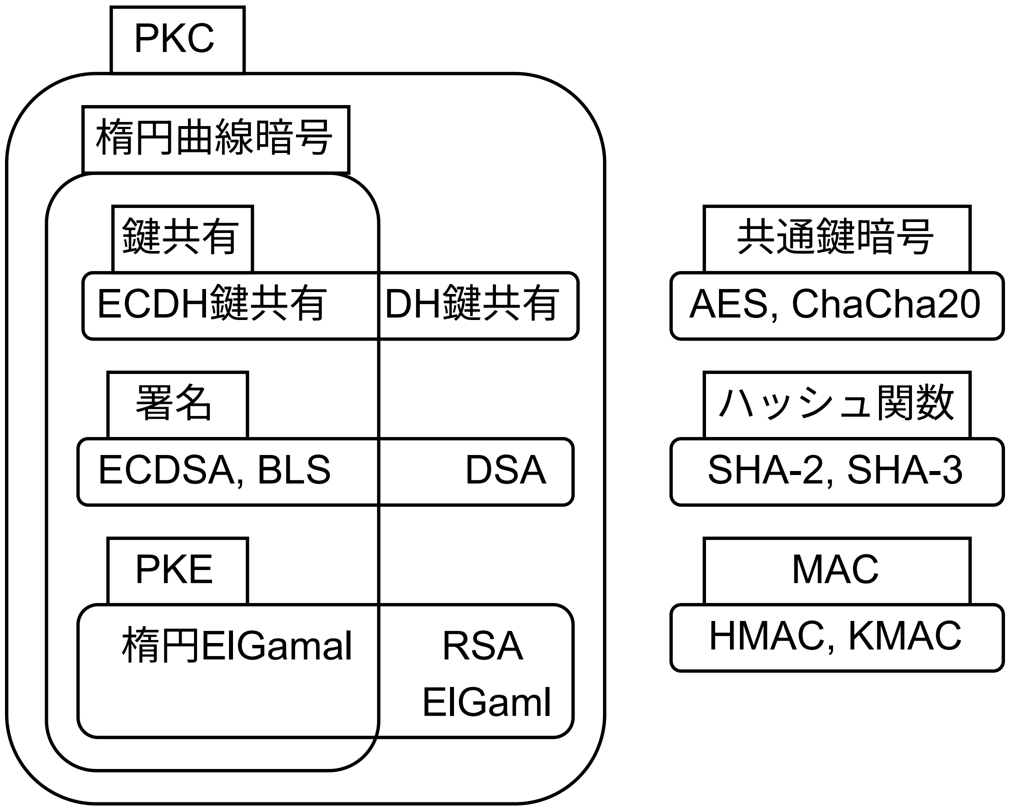
用語一覧

- 公開鍵暗号, PKE, PKC, IND-CPA安全, IND-CCA安全, 頑強性, 強秘匿性, RSA-OAEP, ハイブリッド暗号, FO変換, 前方秘匿性

公開鍵暗号

PKEとPKC

- 「公開鍵暗号」には二種類の意味がある
- PKE (Public Key Encryption)
  - 公開鍵で暗号化して秘密鍵で復号する暗号方式
    公開鍵暗号化・公開鍵暗号方式とも
- PKC (Public Key Cryptography)
  - 公開情報と秘密情報を組み合わせた暗号技術全般
  - 鍵共有, 署名, 暗号化などを含む
    - 今まで紹介してきたのは鍵共有と署名



機能と構成要素

- 準同型暗号: 暗号文のまま演算ができる暗号（機能面による命名）
- 楕円曲線暗号: 楕円曲線を使った暗号技術全般（構成要素による命名）
  - 他にペアリング暗号・格子暗号など

PKEの定義

PPTアルゴリズムの組 $\Pi : (Keygen, Enc, Dec)$ がPKEであるとは

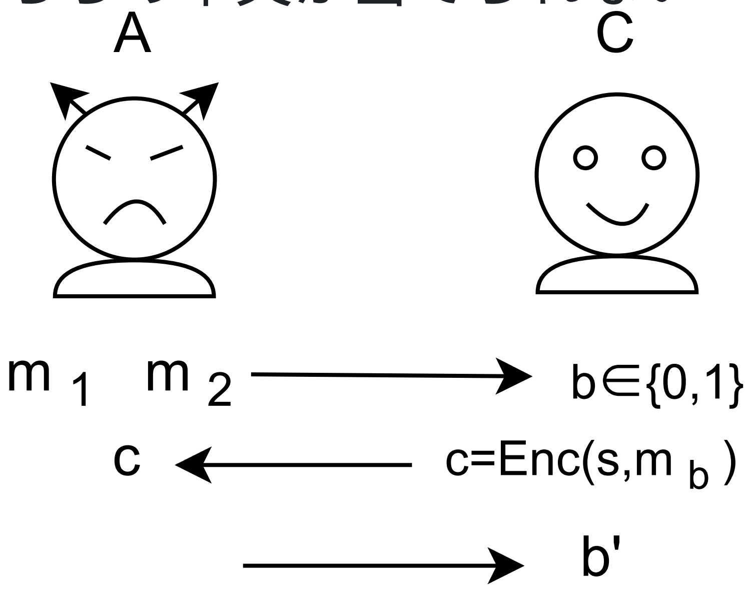
- KeyGen: 鍵生成
  - $KeyGen(1^\lambda) \to (pk, sk)$: λ: セキュリティパラメータ, pk: 公開鍵, sk: 秘密鍵
  - 平文空間 $\mathcal{M}$ も決まる
- Enc: 平文 $m \in \mathcal{M}$ の暗号化
  - $Enc(pk, m) \to c$
- Dec: 暗号文 c の復号（Decは決定的アルゴリズム）
  - $Dec(sk, c) \to m$
- 正当性: 任意の $m \in \mathcal{M}$ に対して $Dec(sk, Enc(pk, m)) = m$

PKEとIND-CPA安全

IND-CPA安全 （再掲）

- 自分で選んだ平文 m_1, m_2 のどちらかの暗号文 c をもらってもどちらの平文か当てられない

平文当てゲーム $\mathrm{Exp}(\lambda)$: 実験 (experiment)



1. 挑戦者 C (Challenger): $s = KeyGen(1^\lambda)$
2. 攻撃者 A (Adversary): $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ を選ぶ
3. C: $b \in \{0,1\}$ を選び $c = Enc(s, m_b)$ を A に送る
4. A: c から $b' \in \{0,1\}$ を推測して $b = b'$ ならAの勝ち

- IND-CPA安全とは $Adv_{Exp}(\lambda) := \left|\Pr\left[Exp(\lambda) = 1\right] - \frac{1}{2}\right| < \mathtt{negl}(\lambda)$ for ∀ PPT Algo Exp

共通鍵暗号とPKEの違い

- PKEでは任意の m の暗号文を自分で作れる $c = Enc(pk, m)$ のでIND-CPA安全は必須条件

安全ではないPKEの例

RSA関数をそのまま使うRSA暗号（RSA$_0$ とここでは表記）

- $KeyGen(1^\lambda)$: RSA関数の設定
  - 素数 p, q と (e, d) を $ed \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$ となるように選び $n := pq$ とする
  - $pk := (n, e), sk := (p, q, d), \mathcal{M} := [0, n-1]$
- $Enc(pk, m)$: $m \in \mathcal{M}$ に対して $c = m^e \bmod n$
- $Dec(sk, c)$: $m = c^d \bmod n$

RSA$_0$ はIND-CPA安全ではない

- $c = Enc(pk, m_b)$ をもらったら $c_i := Enc(pk, m_i)$ $(i = 1, 2)$ を計算して
  $c = c_1$ か $c = c_2$ かを調べればどちらの平文を暗号化したのか当てられる
- より一般にPKEの暗号化 Enc が決定的アルゴリズムならばIND-CPA安全ではない
  - IND-CPA安全なPKEの暗号化はPPTアルゴリズムでなければならない
  - 便宜上, 暗号化に使った乱数 r を明示的に $Enc(s, m; r)$ と書くことがある

（楕円）ElGamal暗号

定義

- KeyGen: 楕円曲線を用いて位数 r の巡回群 $G = \langle P \rangle = \{0, P, 2P, \ldots, (r-1)P\}$ を選ぶ
  - $s \underset{U}{\leftarrow} [1, r-1]$: 秘密鍵, $Q = sP$: 公開鍵, $\mathcal{M} = G$
- Enc: $M \in G$ に対して $k \underset{U}{\leftarrow} [1, r-1]$ を選び $c := Enc(Q, M; k) := (kP, M + kQ)$
- Dec: $c = (A, B)$ に対して $Dec(s, c) = B - sA$

正当性

- $Dec(s, Enc(Q, M; k)) = (M + kQ) - s(kP) = M + ksP - skP = M$

加法準同型暗号

暗号文の加算ができる暗号

- 暗号文 $c_1 = Enc(m_1), c_2 = Enc(m_2)$ に対して $c_1 + c_2$ が定義できて $Dec(c_1 + c_2) = m_1 + m_2$ となっている暗号
- 同じ平文の暗号文を同一視すれば $Enc(m_1) + Enc(m_2) = Enc(m_1 + m_2)$
  - このような写像を準同型写像という
  - $Enc(0)$ が暗号文空間の単位元, $Enc(-m)$ が $Enc(m)$ の逆元

ElGamal暗号は加法準同型暗号

- $c_i := Enc(Q, M_i; k_i) = (A_i, B_i)$ に対して $c_1 + c_2 := (A_1 + A_2, B_1 + B_2)$ と定義
- $c_1 + c_2 = ((k_1 + k_2)P, (M_1 + M_2) + (k_1 + k_2)Q) = Enc(Q, M_1 + M_2; k_1 + k_2)$

楕円ElGamal暗号はIND-CPA安全

安全性仮定の根拠は?

- IND-CPAのゲームで攻撃者 A は $c = Enc(Q, M_b; k)$ を受け取る
  自分で M_i $(i = 1, 2)$ の暗号文 $c_i := Enc(Q, M_i; k_i)$ を作り比較する
- $c - c_1, c - c_2$ はどちらかが0の暗号文なのでそれを判別できるか否かが焦点
- c' が 0 の暗号文かどうか判定できるか否かが焦点
  - $Enc(Q; M; k) = (kP, M + kQ)$ なので2番目の成分が kQ か $M + kQ$ かの違い

DDH問題 (Decisional DH problem)

- $G = \langle P \rangle \ni P, aP, bP, cP$ が与えられたとき $c = ab$ かを判定する問題
  - もし DH問題が解けるなら P, aP, bP から abP を求めて cP と比較すればDDHは解ける

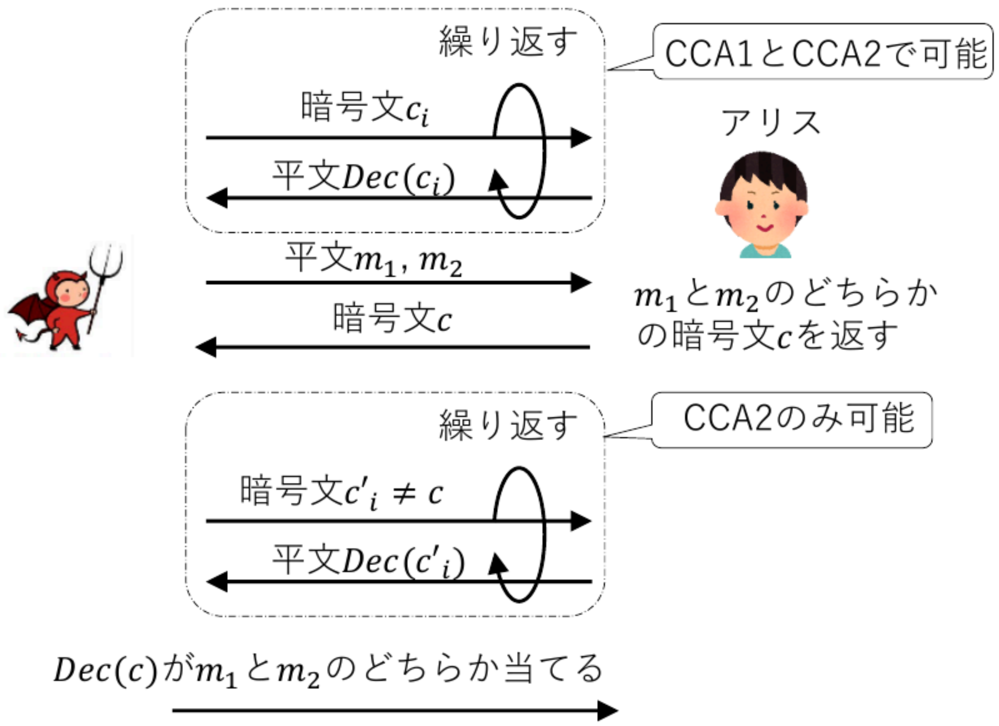
楕円ElGamal暗号はDDH仮定の元でIND-CPA安全

- P, sP, kP が分かっているので残りが ksP かそうでないか判定できない

IND-CCA(1/2)安全（再掲）

選択暗号文攻撃CCA

- 攻撃者 $\mathcal{A}$ は好きな暗号文 $c_i(\neq c)$ を選び
  対応する平文 $m' = Dec(c_i)$ を得られる状況
  - その時 $Dec(c)$ が m_i のどちらか当てられるか?
- CCA1: c を受け取る前のみクエリ可能
- CCA2: c を受け取った後もクエリ可能
- 当てられないならIND-CCA(1/2)安全



ElGamal暗号はIND-CCA2安全ではない

- より一般に準同型暗号はIND-CCA2安全ではない
  - $\mathcal{A}$ は $c = Enc(M)$ に対して $c' = c + Enc(0)$ を作ると $c' \neq c$ なので
    挑戦者に復号してもらうと準同型性から $Dec(c') = Dec(c) + 0 = M$ が分かる
- 注意: ElGamal暗号がDDH仮定の元でIND-CCA1安全かそうでないかは未解決

頑強性 NM（non-malliability）と強秘匿性

強秘匿性

- 暗号文 $c = Enc(m)$ から m のいかなる（サイズ以外の）情報も得られない

頑強性（非展性とも）

- 暗号文 $c = Enc(m)$ から m と関係のある別の暗号文 $c' \neq c$ を作れない

PKEはCCA2攻撃の元で強秘匿性と頑強性は同値

- IND-CCA2 ⇔ NM-CCA2
- 一般には強秘匿性があっても、暗号文をいじれる場合があった（準同型暗号）
- CCA2という強力な攻撃者のモデルを想定した場合、強秘匿性があれば頑強性も保証される
- PKEではIND-CCA2安全が最も強い安全性保証

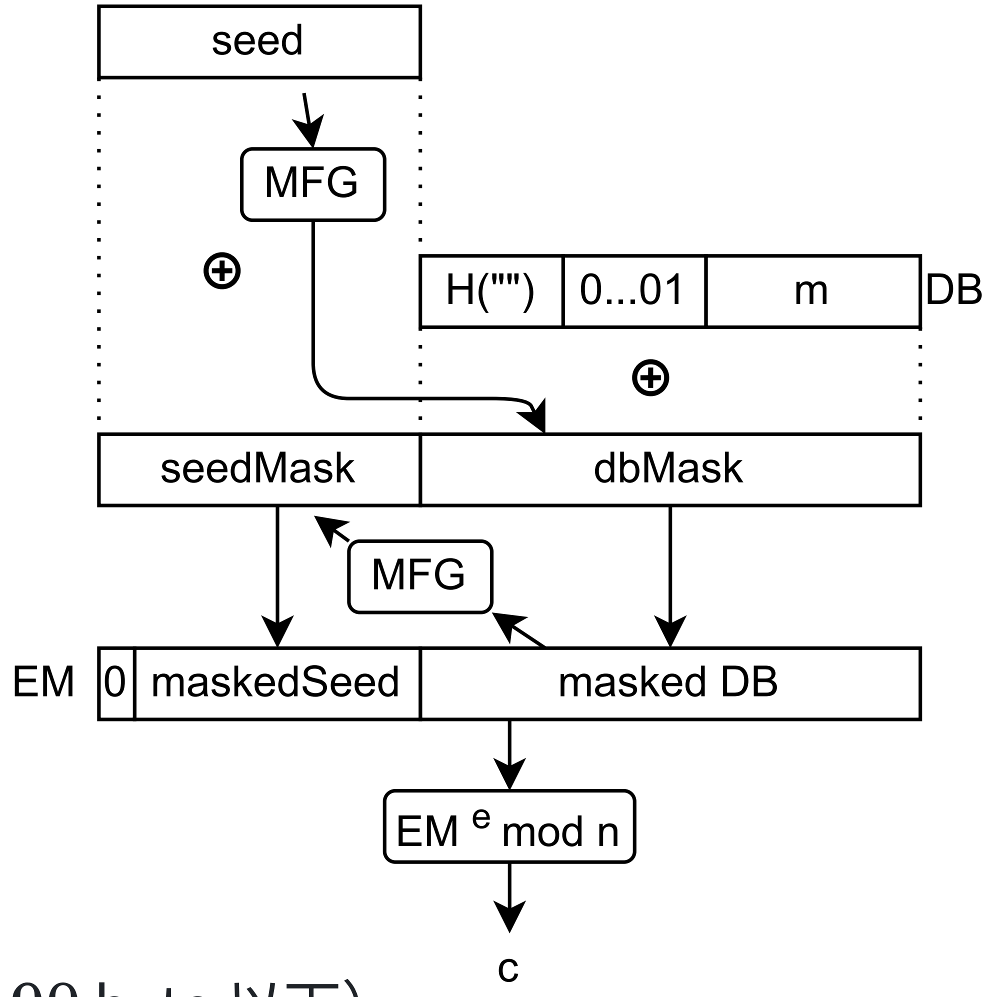
RSA-OAEP (optimal asymmetric encryption padding)

IND-CCA2安全なRSA暗号

- ランダムオラクルモデルの元で安全性証明がある

m の暗号化

- H: SHA-2 (L=256/8 byte), k:=2048/8 byte
  MGF (Mask Generation Function): H(seed|counter)
  DB = H("") || 0...0 || 0x01 || m
- dbMask = MGF(seed, |DB|): seedは乱数
- maskedDB = DB ⊕ dbMask
- seedMask = MGF(maskedDB, L)
- maskedSeed = seed ⊕ seedMask
- EM = 0x00 || maskedSeed || maskedDB
- c = Enc(e, EM) = $EM^e \bmod n$（m は $k - 2L - 2 = 190$ byte 以下）



ハイブリッド暗号

PKEと共通鍵暗号の組合せ

- PKEは計算コストが高いので大量のデータの暗号化には不向き
- 共通鍵暗号は高速
- ハイブリッド暗号: PKEで共通鍵を共有し, その共通鍵で共通鍵暗号を使う

KEM/DEM フレームワーク

- KEM (key encapsulation mechanism)
  - $\mathrm{KEM.Gen}(1^\lambda) \to (sk, pk)$: 公開鍵生成
  - $\mathrm{KEM.Enc}(pk) \to (K, C)$: 共通鍵 K とその暗号文 C を生成
  - $\mathrm{KEM.Dec}(sk, C) \to K \text{ or } \perp$: 共通鍵 K を復号
- DEM (data encapsulation mechanism)
  - $\mathrm{DEM.Enc}(K, m) \to c$: 共通鍵 K で平文 m を暗号化
  - $\mathrm{DEM.Dec}(K, c) \to m \text{ or } \perp$: 共通鍵 K で暗号文 c を復号

FO（藤崎-岡本）変換

IND-CCA2安全なKEMの構成法

- (Gen, Enc, Dec): PKE, (DEM.Enc, DEM.Dec): 共通鍵暗号, H_1, H_2: ハッシュ関数に対して
- $\mathrm{FO.Gen}(1^\lambda)$: $\mathrm{PKE.Gen}(1^\lambda) \to (pk, sk)$
- $\mathrm{FO.Enc}(pk, m)$: 乱数 r を選び
  $c := (C_1, C_2) := (\mathrm{PKE.Enc}(pk, r; H_2(m\|r)), \mathrm{DEM.Enc}(H_1(r), m))$
- $\mathrm{FO.Dec}(sk, (C_1, C_2)))$:
  $r := \mathrm{PKE.Dec}(sk, C_1), m := \mathrm{DEM.Dec}(H_1(r), C_2)$
  $C_1 = \mathrm{PKE.Enc}(pk, r; H_2(m\|r))$ なら m を返す, そうでなければ $\perp$

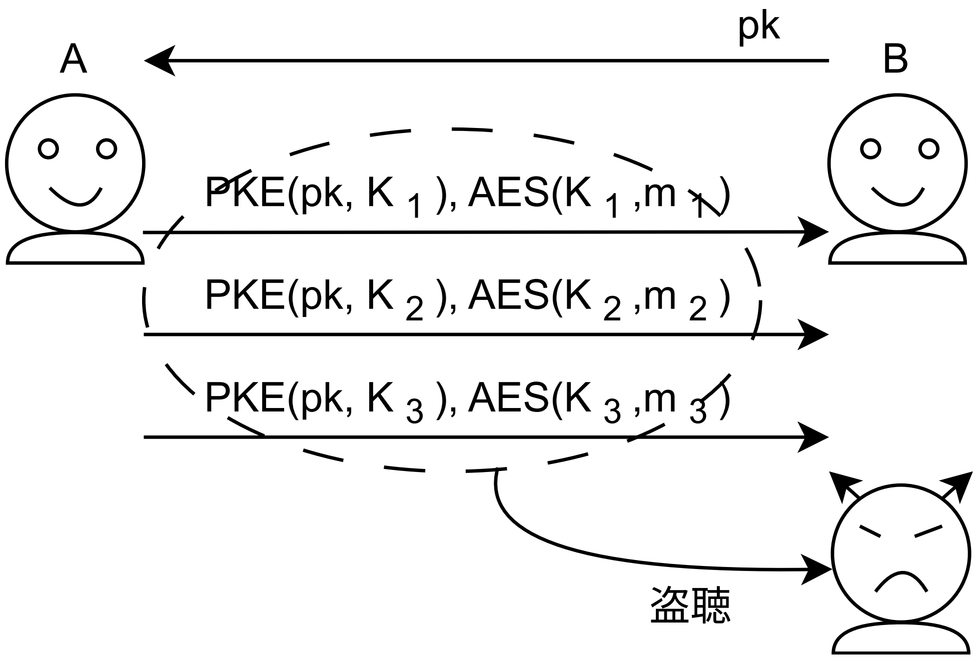
安全性

- PKE: OW (One-Way)-CPA安全（暗号文から平文を得られない）+αの仮定
- DEM: IND-OT (one-time) 安全（1回の使用だけなら安全）
- OW-CPA安全なKEM + IND-OT安全なDEM → FOはランダムオラクルモデルでIND-CCA2安全

PKEと前方秘匿性

前方秘匿性 (forward secrecy)

- 秘密鍵が漏洩しても過去の通信内容が守られる性質

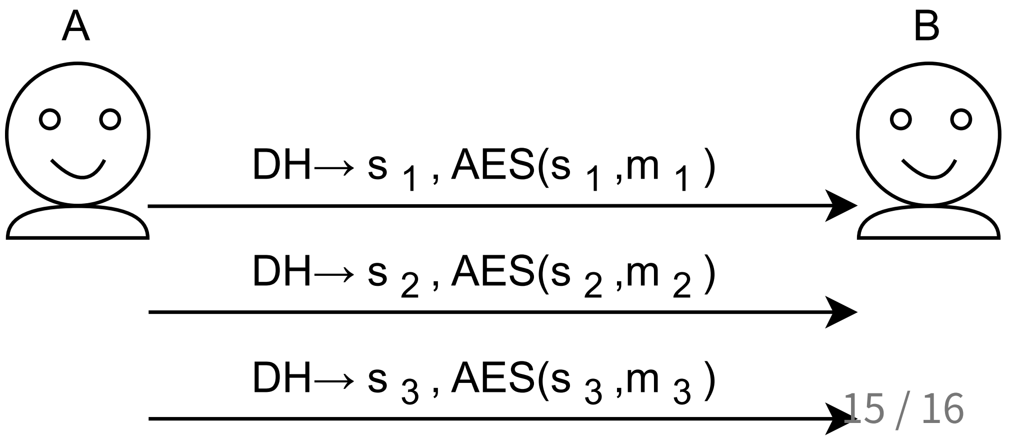


FSがない場合

- 盗聴者は復号できなくても盗聴して暗号文の履歴を保持
- 将来秘密鍵が漏洩すると全ての暗号文を復号できる

DH鍵共有によるFSの実現

- 都度DH共有することで過去の履歴を保持されても安全
- DH時の秘密情報は毎回破棄
  - 漏洩しても影響はそれだけ
- 注意：DH鍵共有自体が破られたら駄目



PRISMとTLSなどのFSへの移行

PRISM

- 2013年アメリカ国家安全保障局NSAによる監視プログラムの存在がSnowdenにより暴露
- インターネットの大部分の通信を監視
- FBIがSnowdenを告訴
  - Lavabit: Snowdenが利用していたメールサービス業者
    - 裁判所がPKEの秘密鍵の提出を要求
    - 読めないサイズのフォントで提出
    - 最終的には電子データの提出/DH鍵共有を使っておけば良かった

TLS 1.3

- PKEの利用を廃止してDH鍵共有に完全移行
- 実はブラウザで使う限りPKEが使われる機会はほぼ無い
- ECHのHPKE（DH鍵共有の片側固定）はFSは満たさない