公開鍵暗号1

光成滋生

last update: 2025/10

概要

目的

- 共通鍵暗号やMAC, AEADに必要な秘密鍵を共有する方法を学ぶ
- 相手が本当の相手であることを検証するための署名やその応用, PKIを学ぶ

目次

用語一覧

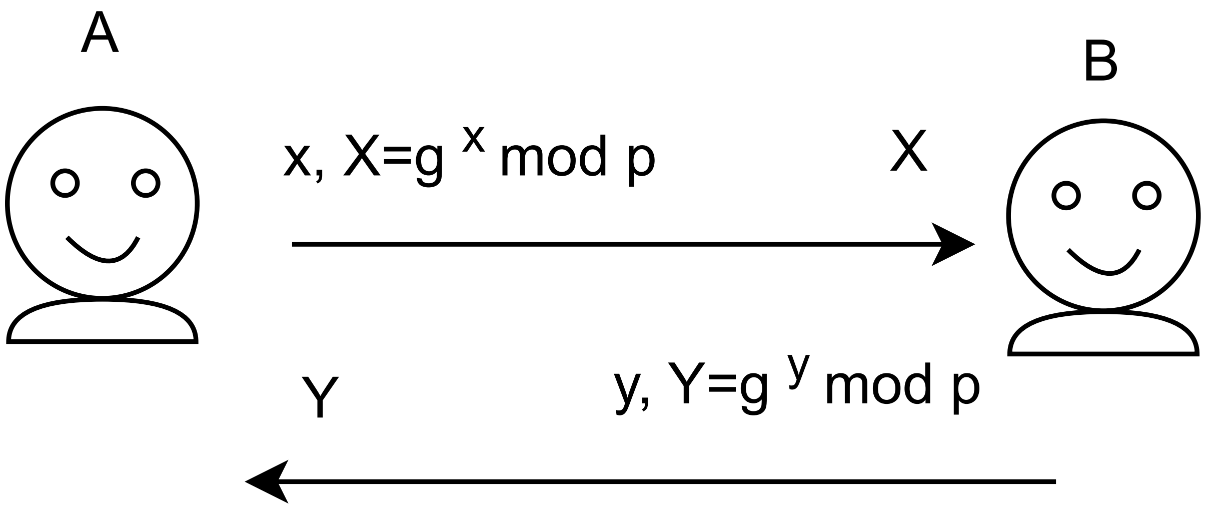
- 公開鍵暗号, DH鍵共有, DLP, DHP
- 楕円曲線, ECDH鍵共有, 群, スカラー倍算
- 有限体, Euclidの互除法, 逆元
- 二項定理, Fermatの小定理
- 加法公式
- 能動的な攻撃者, AitM攻撃
- 署名, sEUF-CMA
- ECDSA, RSASSA-PKCS1-v1_5, RSASSA-PSS
- sshの公開鍵認証, PKI

DH (Diffie-Hellman) 鍵共有

盗聴者のいる通信経路で安全に通信する方法

AとBの間の鍵共有

- p: 素数, g: 0でない整数 ($0 < g < p$) を選び p と g を共有する（public）
- A は $x \in [1, p-1]$ をランダムに選んで $X := g^x \bmod p$ （p で割った余り）を B に送る
- B は $y \in [1, p-1]$ をランダムに選んで $Y := g^y \bmod p$ を A に送る
- A は $s_1 = Y^x \bmod p$, B は $s_2 = X^y \bmod p$ を計算する



これでうまくいくのか?

$$s_1 = s_2 = s$$

- 整数 a, b に対して $(a \bmod p) \times (b \bmod p) \bmod p = (a \times b) \bmod p$
- よって $a^b \bmod p = (a \bmod p)^b \bmod p$
- $s_1 = Y^x \bmod p = (g^y \bmod p)^x \bmod p = (g^y)^x \bmod p = g^{xy} \bmod p = s_2$
  - 以降、煩雑なので $\bmod p$ は省略する

安全なのか?

- 盗聴者は p, g, X, Y を盗聴できる
- 盗聴者はこれらの情報から s を計算できるか?
- $X = g^x$ が分かっているのだから、$g, g^2, g^3, \ldots$ と計算して $X = g^x$ となる x を探せばよい
- そうすれば $Y^x = g^{xy} = s$ も計算できる
  - p が十分大きいと、x を見つけるのが困難であることが知られている

離散対数問題 DLP (Discrete Logarithm Problem)

定式化

- p, g, X が与えられたとき、$X = g^x \bmod p$ となる x を求める問題
  - $y = a^x$ のとき $x = \log_a y$ を底 a について y の対数と呼んだ
  - 今回はその整数版なので離散対数という

DLP を解くコスト

- 2025年現在, 大きなpについて一般数体篩法 GNFS (General Number Field Sieve) が最良の手法
- 計算コストは $L_p[1/3, (64/9)^{1/3}]$
  - $L_p[a, c] := \exp\left((c + o(1))(\log p)^a (\log\log p)^{1-a}\right)$: 準指数時間
  - $f(x)$ が $o(g(n))$ であるとは $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$ であること
  - $L_p[1, c] \sim p^c$（$\log p$ の指数時間）, $L_p[0, c] \sim (\log p)^c$（$\log p$ の多項式時間）
- 例えば $p = 2^{2048}$ で 2^{116}, $p = 2^{3000}$ で 2^{137} 程度
  - 3000bit の素数を使うと128bitセキュリティの安全性があるとみなせる

DH問題

DLP が困難だけでOKか?

- x, y を求められなくても直接 s を求める方法があるかもしれない

DHP (Diffie-Hellman Problem)

- $p, g, X = g^x \bmod p, Y = g^y \bmod p$ が与えられたとき $s = g^{xy} \bmod p$ を求めよ

DLPとDHPの関係

- 先程見たようにDLPが解ければDHPも解ける
  - 問題としてはDHPの方が易しい
  - 2025年現在, DHPを解く最良の手法はDLPを解くこと
  - DHPがDLPより真に易しいか・同じぐらいの難しさかは不明

安全性の言い換え

- DHPが困難ならDH鍵共有は安全

PQC (Post-Quantum Cryptography)

量子計算機に対しても安全な暗号技術

- 耐量子計算機暗号
- $\log p$ の多項式時間でDLPを解く量子アルゴリズムが知られている
- 量子計算機が実用化されるとDH鍵共有は安全でなくなる
- 量子計算機に安全な鍵共有方法が必要

ML-KEM (Module-Lattice Key Encapsulation Mechanism)

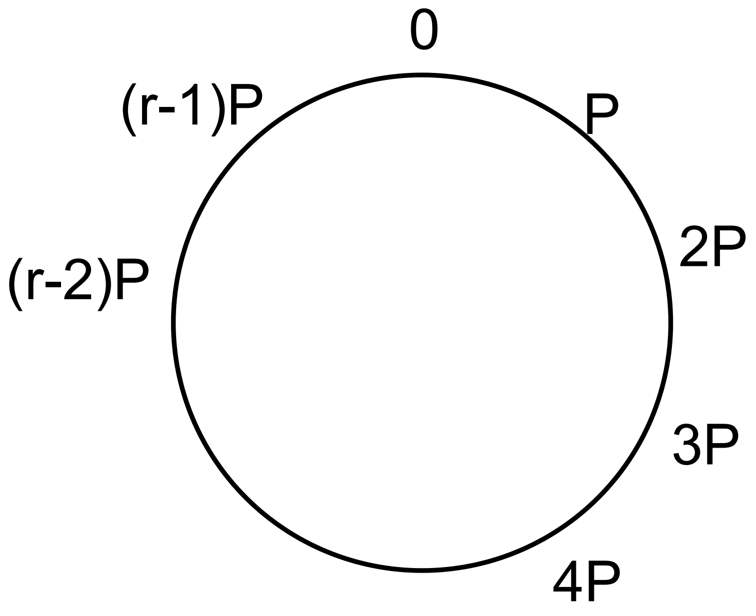
- FIPS 203: 2024年NISTで標準化された
- ブラウザ Chrome, Edge, Firefoxなどで利用可能になってきている
  - Cloudflare Research
- 詳細は講義の後半で

楕円曲線

楕円曲線 EC (Elliptic Curve) とは

- 「楕円」でも「曲線」でも無い「楕円曲線」という数学用語
    - イメージ的には「複素曲線」で浮輪の表面のようなもの
    - 代数的な定義は後述

楕円曲線の点集合

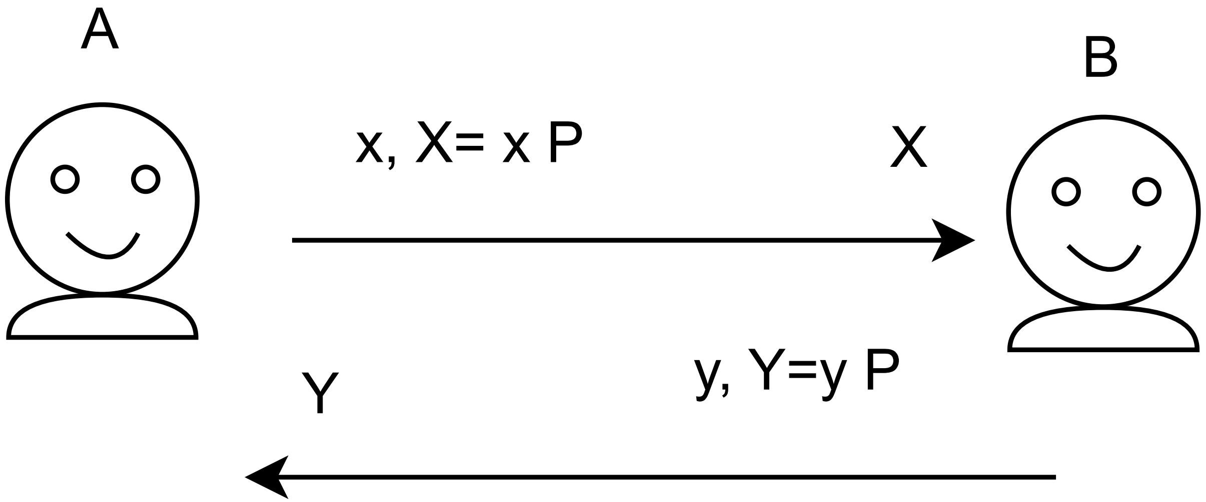


- G を $\{0, P, 2P, \ldots, (r-1)P\}$ という形で表せる楕円曲線の r 個の点集合とする
    - G には $aP \pm bP := ((a \pm b) \bmod r)P$ という加減算が定義されている
    - $(aP + bP) + cP = aP + (bP + cP) = (a + b + c)P$
    - $aP := P + P + \cdots + P$（a 個の P の和）, $a(bP) = (ab)P$
    - 0 は整数の0に相当する点, $-aP := (r - a)P$ とする

ECDH鍵共有

DH鍵共有の類推

- A は $x \in [1, r-1]$ をランダムに選んで $X := xP$ を B に送る
- B は $y \in [1, r-1]$ をランダムに選んで $Y := yP$ を A に送る
- A は $s_1 = xY = xyP$, B は $s_2 = yX = yxP = xyP$ を計算する



DH鍵共有との比較

- g^x, g^y の代わりに xP, yP. g^{xy} の代わりに xyP

ECDH鍵共有の安全性

DLPとDHPの楕円曲線版

- ECDLP: $P, X = xP$ が与えられたとき x を求めよ
- ECDHP: $P, X = xP, Y = yP$ が与えられたとき xyP を求めよ

ECDHPの難しさ

- 2025年現在, ECDHPを解く最良の手法はECDLPを解くこと
  - DHPと同様にECDHPがECDLPより真に易しいか・同じぐらいの難しさかは不明
- DH鍵共有が3000bitで128bitセキュリティだったのに対して
  ECDH鍵共有は256bitの小さい鍵で同じセキュリティレベル

ECDHの量子計算機に対する安全性

- n bitのECDHは $O(n^3)$ の多項式時間で解けるので安全ではないが
  TLS1.3で標準的に使われている鍵共有手法

抽象的な定義

DHとECDHの共通点

- どちらも群構造を利用している

群とは集合 G が次の性質を満たすもの

- $f: G \times G \to G$ が存在し, $f(a, b)$ を $a \cdot b$ と書く（ab と書くことも）
  - 結合則: $(ab)c = a(bc)$ for $\forall a, b, c \in G$
  - 単位元: $e \in G$ が存在して$ea = ae = a$（$e = 1$ と書くことがある）
  - 逆元: $\forall a \in G$ に対して $a^{-1} \in G$ が存在して $aa^{-1} = a^{-1}a = e$

可換群

- 群 G について $\forall a, b \in G$ に対して $ab = ba$ が成り立つ
- このとき ab を $a + b$ と書き, 単位元を $e = 0$, 逆元を $-a$ と書くことがある（加法群という）

群の例

整数の集合 $G := \mathbb{Z}$

- $a, b \in G$ に対して $f(a, b) := a + b$, 0が単位元の可換群

0以外の有理数の集合 $G := \mathbb{Q}^*$

- $a, b \in G$ に対して $f(a, b) := ab$, 1が単位元の可換群

2行2列の実数行列で逆行列を持つ行列の集合 $G := GL_2(\mathbb{R})$

- $a, b \in G$ に対して $f(a, b) := ab$（行列の積）, 単位行列が単位元の非可換な群

p で割った余りで考える集合 $G := \langle g \rangle := \{1, g^1, g^2, \ldots, g^{r-1}\}$

- $a, b \in G$ に対して $f(a, b) := ab$, 1が単位元の可換群

楕円曲線の点の部分集合 $G := \{0, P, \ldots, (r-1)P\}$: 可換群

巡回群

群 G が巡回群であるとは

- $g \in G$ に対して $\langle g \rangle := \left\{e, g, g^2, g^3, \ldots\right\}$ を g で生成される部分群（巡回群）という
  - $\langle e \rangle = \{e\}$.
- $g^r = e$ となる r が存在すれば $\langle g \rangle = \left\{e, g, g^2, \ldots, g^{r-1}\right\}$ となり有限巡回群という
  - r を $\langle g \rangle$ の位数といい $r = |\langle g \rangle|$ と書く
- 巡回群は可換群である
  - $a, b \in \langle g \rangle$ に対して $a = g^x, b = g^y$ と書けて $ab = g^{x+y} = g^{y+x} = ba$

有限巡回群 $G = \langle g \rangle$ に関するDH鍵共有

- $x, y \in [1, r-1]$ をランダムに選んで $X = g^x, Y = g^y$ を交換し g^{xy} を共有する
- DH鍵共有とECDHの鍵共有は $f(a, b)$ を ab と書くか $a + b$ と書くかの違いだけ
- 実際論文によっては楕円曲線の演算を g^a の形で書いてあるものもある（講義では $+$ を使う）

スカラー倍算の計算

nP の計算

- $nP = P + \cdots + P$（n 個の P の和）を逐次的に計算すると $O(n)$ かかる
- $n \approx r \approx 2^{256}$ なら不可能

バイナリ法

- n を2進数で表現する $n = \sum_{i=0}^{L-1} n_i 2^i$. ($n_i \in \{0, 1\}, L \approx \log_2 r \approx 256$)
- $2^i P$ ($i = 0, \ldots, L-1$) を計算する（2倍していくだけなので $L-1$ 回でOK）
- $nP = \sum_{i=0}^{L-1} n_i 2^i P$ なので $n_i = 1$ となる i だけ $2^i P$ を加算する

演算コスト

- 2倍算(D: $2P$) : $L-1$ 回
- 加算(A: $P+Q$) : n はランダムなので平均的に半分ぐらいが $n_i = 1$. よって $L/2$ 回
- 合計 $(L-1)D + (L/2)A$

楕円曲線のためにしばらく数学の準備

合同

- 整数 $m(>0), a, b$ に対して $a \equiv b \pmod m$ とは $(a-b) \bmod p = 0$ のときをいう
  - m で割った余りが同じ. このとき a と b は m を法として合同という
  - 注意: 「$a \bmod m$」は a を m で割った余り（0以上 m 未満の整数）

整数環

- 整数 $m(>0)$ に対して集合 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} := \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ とする（$\mathbb{Z}/m$ と略記する）
- 加減算: $a \pm b := (a \pm b) \bmod p$. 乗法: $ab := (ab) \bmod p$ for $a, b \in \mathbb{Z}/m$
  - 加算と乗算は可換: $a+b=b+a, ab=ba$
  - 加法に関する単位元 0: $a+0=a$, 乗法に関する単位元 1: $a \times 1 = a$
  - 結合法則: $(a+b)+c=a+(b+c), (ab)c=a(bc)$
  - 分配法則: $a(b+c)=ab+ac$
- これらを満たすものを可換環という

除算の定義

思考

- $\mathbb{Z}/m \ni a, b (\neq 0)$ に対して除算 a/b を定義したいがa/b は整数にならない場合がある
- まず逆数 $1/a$ を考える

逆数とは

- $ax = 1$ となる x が a の逆数
- 整数環でも $ab \equiv 1 \pmod m$ となる b があれば b を a の逆数と呼んでよいのでは
- 例えば $m = 7$ のとき $3 \times 5 \equiv 1 \pmod 7$ なので 3 の逆数 $1/3 = 5$ とする
- 例えば $m = 6$ のとき $3 \times x \not\equiv 1 \pmod 6$ なので 3 の逆数は存在しない
  - $3 \times 1 \equiv 3, 3 \times 2 \equiv 0, 3 \times 3 \equiv 3, 3 \times 4 \equiv 0, 3 \times 5 \equiv 3$

有限体

素数 p に対する整数環

- $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$
- **定理**: $\forall a \in {\mathbb{F}_p}^* := \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ に対して a の逆数が存在する
  - つまり $ab \equiv 1 \pmod{p}$ となる $b \in {\mathbb{F}_p}^*$ が存在する
- $\mathbb{F}_p$ は四則演算ができる
  - 逆元の存在: $a \in {\mathbb{F}_p}^*$ に対して $a^{-1} \in {\mathbb{F}_p}^*$ が存在して $aa^{-1} = 1$
  - 問: 逆元は存在すればただ一つしかないことを示せ
- このとき $\mathbb{F}_p$ を有限体という
  - 無限集合だけど四則演算が出来るものを体という
  - 有理数の集合 $\mathbb{Q}$, 実数の集合 $\mathbb{R}$, 複素数の集合 $\mathbb{C}$ も体

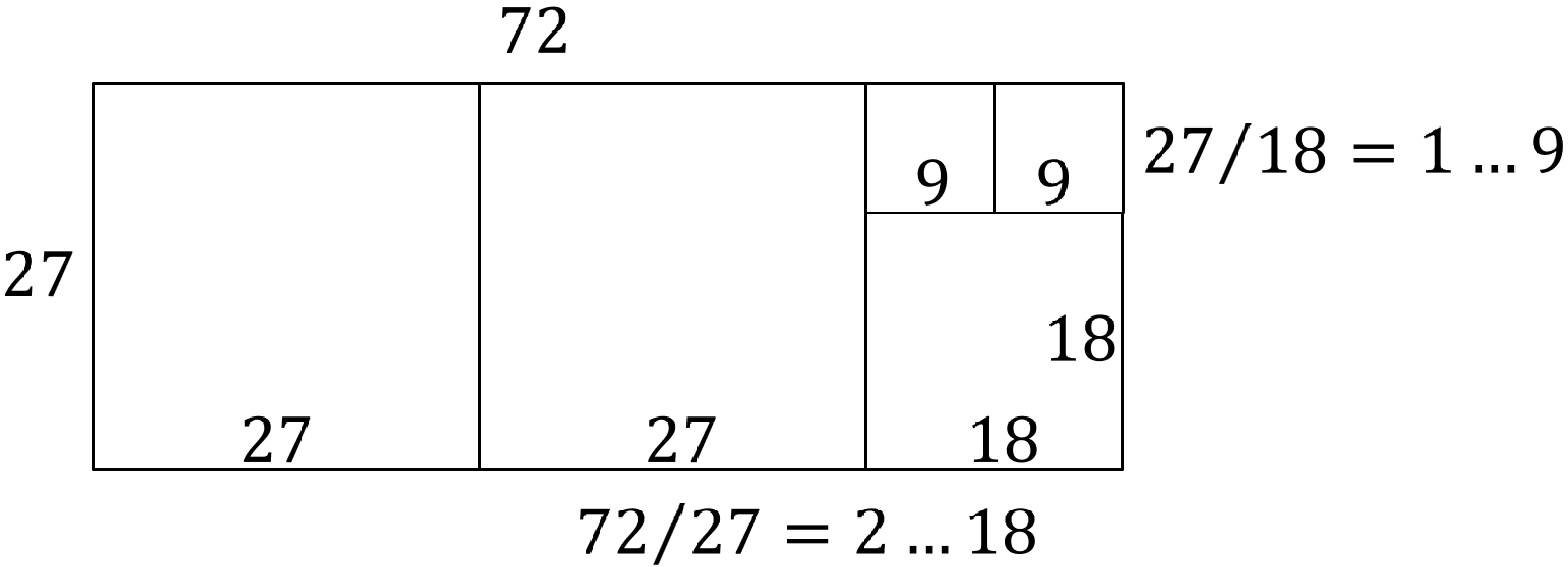
Euclidの互除法

最大公約数 $\gcd(a,b)$ の性質

- $\gcd(a,0)=a, \gcd(a,b)=\gcd(b,a)$.
- $\gcd(a,b)=\gcd(a-b,b)$
  - $c:=\gcd(a,b), c':=\gcd(a-b,b)$ とすると $a=ca', b=cb'$ と書けて
    $a-b=c(a'-b')$. よって c は $a-b$ と b の公約数となり，c' の最大性から $c\le c'$.
    同様に $a-b=c'x, b=c'y$ と書くと $a=c'(x+y)$. よって c' は a と b の公約数となり，
    c の最大性から $c'\le c$. よって $c=c'$.
- $b\neq 0$ のとき $\gcd(a,b)=\gcd(a \bmod b, b)$.
  - a を b で割った余りになるまで $a-b$ に置き換えることを繰り返す
- $c=\gcd(a,b)$ に対して $b=0$ なら $c=a$ で終了
  - $b>0$ なら $r_0:=a \bmod b$ として $c=\gcd(r_0,b)=\gcd(b,r_0)$. $r_0=0$ なら終了
  - $r_0>0$ なら $r_1:=b \bmod r_0$ として $c=\gcd(r_1,r_0)$. $r_1=0$ なら終了
  - これを繰り返すといずれ終了し c が求まる

$\gcd(72, 27)$ の例

72と27の長方形を書く



- $\gcd(72, 27) = \gcd(18, 27) = \gcd(27, 18) = \gcd(9, 18) = \gcd(18, 9) = 9$

拡張Euclidの互除法

a, b に対して $ax + by = \gcd(a, b)$ となる整数 x, y が存在し求められる

- 先程の例で4回で終わったとする
  - $r_0 := a \bmod b$: $a = q_0 b + r_0$.
  - $r_1 := b \bmod r_0$: $b = q_1 r_0 + r_1$.
  - $r_2 := r_0 \bmod r_1$: $r_0 = q_2 r_1 + r_2$.
  - $r_3 := r_1 \bmod r_2 = 0$: $r_1 = q_3 r_2 + r_3$.
- これを順に代入すると
- $\gcd(a, b) = \gcd(r_0, r_1) = r_2 = r_0 - q_2 r_1 = r_0 - q_2(b - q_1 r_0)$
  $= (1 + q_1 q_2) r_0 + b(-q_2) = (1 + q_1 q_2)(a - b q_0) + b(-q_2)$
  $= a(1 + q_1 q_2) + b(-q_0 q_1 q_2 - q_2) = ax + by$ となる (x, y) が求まった

有限体の逆元

拡張Euclidの互除法を用いて逆元を求める

- $\forall a \in {\mathbb{F}_p}^*$ に対して a と p は互いに素である（p は素数だから）
    - つまり $\gcd(a, p) = 1$
- 互除法を用いて $ax + py = \gcd(a, p) = 1$ となる整数 x, y が存在する
- これは $ax \equiv 1 \pmod{p}$, つまり $x \bmod p$ は a の逆数

$\mathbb{Z}/m$ が有限体になる条件

- m が合成数 $m = uv\,(u, v > 1)$ のとき, $uv \equiv 0 \pmod{m}$ なので u の逆数は存在しない
- よって $\mathbb{Z}/m$ が有限体になる必要十分条件は m が素数である

別の方法も紹介する

二項定理

組合せ（組み合わせ）の数

- n 個の中から k 個選ぶ組合せ $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$. 例 $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ が成り立つ
  - 問題: 数学的帰納法を使って証明せよ
- 素数 p と $0 < k < p$ に対して $\binom{p}{k}$ は p の倍数
  - $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ の分子に p があり, 分母に p がない
- $(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}$
  - $(x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k y^{p-k} \equiv x^p + y^p \pmod{p}$
- $x^p \equiv x \pmod{p}$
  - $x^p \equiv (1 + (x-1))^p \equiv 1 + (x-1)^p \equiv 1 + \cdots + 1 \equiv x \pmod{p}$

Fermatの小定理

素数 p と $a \in {\mathbb{F}_p}^*$ に対して $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

- $a^p \equiv a \pmod p$ より $a(a^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod p$
- a と p は互いに素なので $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p$.

逆元の計算

- Fermatの小定理より $a \in {\mathbb{F}_p}^*$ に対して $a(a^{p-2}) \equiv 1 \pmod p$.
- これは $a^{-1} = a^{p-2} \bmod p$ を意味するので逆元を計算できる

注意

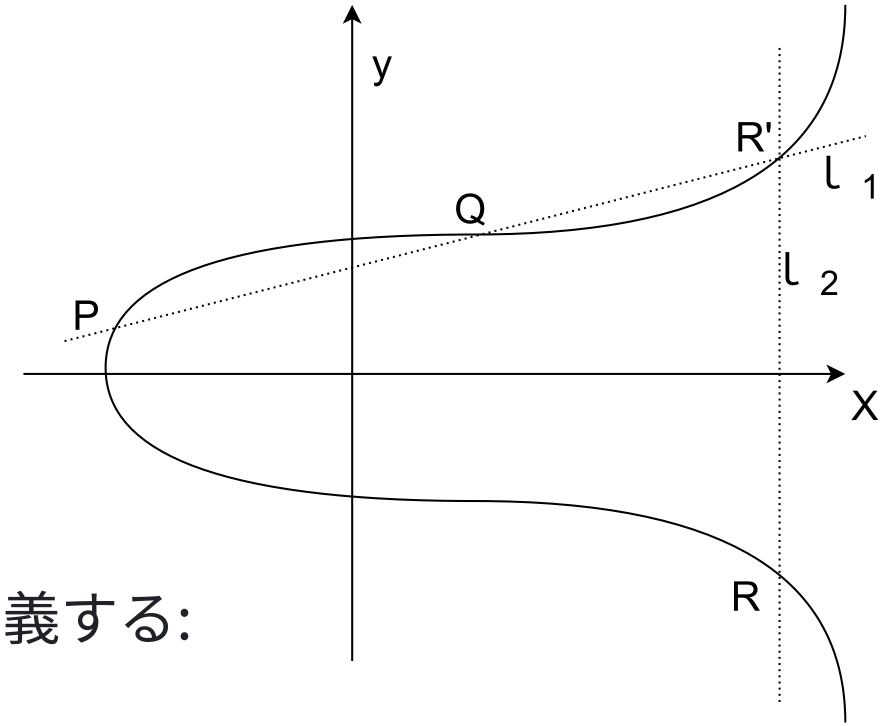
- $a = 0$ のときは $a^{p-2} = 0$ になってしまう（そもそも逆元は存在しない）

楕円曲線の定義

体 K 上の楕円曲線 E/K とは

- $E(K) := \{(x,y) \in K^2 \mid y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{O\}$
  - 条件: $a, b \in K$ で $4a^3 + 27b^2 \neq 0$（$x^3 + ax + b = 0$ が重解を持たない）

実数上のグラフ



- E の定義方程式 $y^2 = x^3 + ax + b$ のグラフと O の集合
- x 軸に対して対象
- O をシンボル的に無限遠点とする（$(0,0)$ ではない）

楕円曲線に加算を定義する

- 一般の $P, Q \in E(K)$ について $P + Q \in E(K)$ を次で定義する:
  P と Q を通る直線 l_1 と $E(K)$ の交点 R' をとり,
  R' の y 座標の符号を反転させた点を $R' := P + Q$ とする

定義概要

特別な点や関係のとき

- $P + O := O + P := P$ for $\forall P \in E(K), -O := O$
- $P = (x, y)$ について $-P := (x, -y)$
- $P = Q$ のとき P における接線を考える
- $Q = -P$ のとき直線は y 軸に並行となり $P + (-P) := O$ とする

$G := E(K)$ が群であることの確認

- 単位元と逆元は定義から自明
- 結合則: $(P + Q) + R = P + (Q + R)$ for $\forall P, Q, R \in E(K)$
  - グラフのデモ: desmos
  - 実はこれを証明するのはとても大変（普通は代数幾何や複素解析の知識を利用）
  - 初等的な証明: K. Nuida, An Elementary Linear-Algebraic Proof without Computer-Aided Arguments for the Group Law on Elliptic Curves, 2020

加法公式の導出

$P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2), R = (x_3, y_3)$ とする

- 直線 l_1 : PQ の傾き $\lambda := (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$（$x_1 \neq x_2$ のとき）
- $y = \lambda(x - x_1) + y_1$ を $y^2 = x^3 + ax + b$ に代入整理
- $x^3 - \lambda^2 x^2 + (a + 2\lambda(\lambda x_1 - y_1))x + b - (\lambda x_1 - y_1)^2 = 0$
- 3次方程式の解と係数の関係: $x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2$ より $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$
- これを l_1 に代入して R' の y 座標が求まるので $y_3 = -\lambda(x_3 - x_1) - y_1$

$x_1 = x_2$ のとき

- $P = Q$ なら P における接線 l_1 の傾きは定義方程式を微分して
  $2yy' = 3x^2 + a$ より $\lambda = (3x_1^2 + a)/(2y_1)$. 後は上記と同様
- $P \neq Q$ なら $P + Q = R = O$ と定義した

楕円曲線の演算の定義まとめ

単位元

- 任意の $P \in E(K)$ に対して $P + O = O + P = P$

逆元

- $-O := O$
  任意の $P := (x, y) \in E(K) \setminus \{O\}$ に対して $-P := (x, -y), P + (-P) = O$

加法

- O でない任意の $P := (x_1, y_1), Q := (x_2, y_2) \neq -P$ に対して
  $x_3 := \lambda^2 - (x_1 + x_2), y_3 := -\lambda(x_3 - x_1) - y_1$ とすると $P + Q = (x_3, y_3)$
  ただし

$$\lambda := \begin{cases} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & (x_1 \neq x_2) \\ \frac{3x_1^2 + a}{2y_1} & (x_1 = x_2) \end{cases}$$

問題

楕円曲線の群の演算の定義

- $x_1 = x_2$ かつ $y_1 = 0$ のときはどうなるか

mod pのDH鍵共有

- p を大きな素数, $P \in [1, p-1]$ をランダムに固定・共有し
  $a \in [1, p-1]$ をランダムに選び aP を相手に送る方式のDH鍵共有は安全か

能動的な攻撃者

ECDHで鍵共有を行い共通鍵暗号で暗号化

- 受動的な攻撃者（盗聴者）に対しては安全
- 能動的な攻撃者（改竄者）に対しては安全ではない

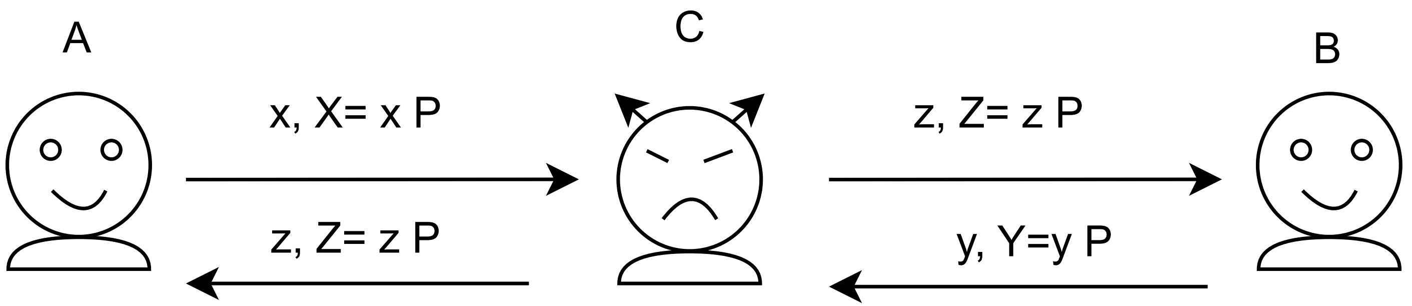
敵対的中間者攻撃 AitM (Adversary in the Middle) 攻撃

- A と B の間に改竄者が入り込んで盗聴・改竄を行う攻撃
- 以前は MitM (Man in the Middle) 攻撃
- フィッシング詐欺などのアプリケーションレベルの攻撃も含まれる

ECDH鍵共有へのAitM攻撃

A と B の間に改竄者 C が入り込む

- A は x を選び $X = xP$ を B に送ったつもり
  - C は X を盗聴し、代わりに z を選び $Z = zP$ を B に送る
  - B は A から X を受け取ったつもりだが実は Z を受け取っている
- B は y を選び $Y = yP$ を A に送ったつもり
  - C は Y を盗聴し、代わりに $Z = zP$ を A に送る
  - A は B から Y を受け取ったつもりだが実は Z を受け取っている



- A は $s_A = xZ = xzP$, B は $s_B = yZ = yzP$ を秘密鍵として使う
- C は $s_A = zX, s_B = zY$ の両方を取得できる

AitM攻撃への対策

署名とは

- ペンや判子などの物理的な署名をデジタル上で実現する暗号技術
    - デジタル署名とも

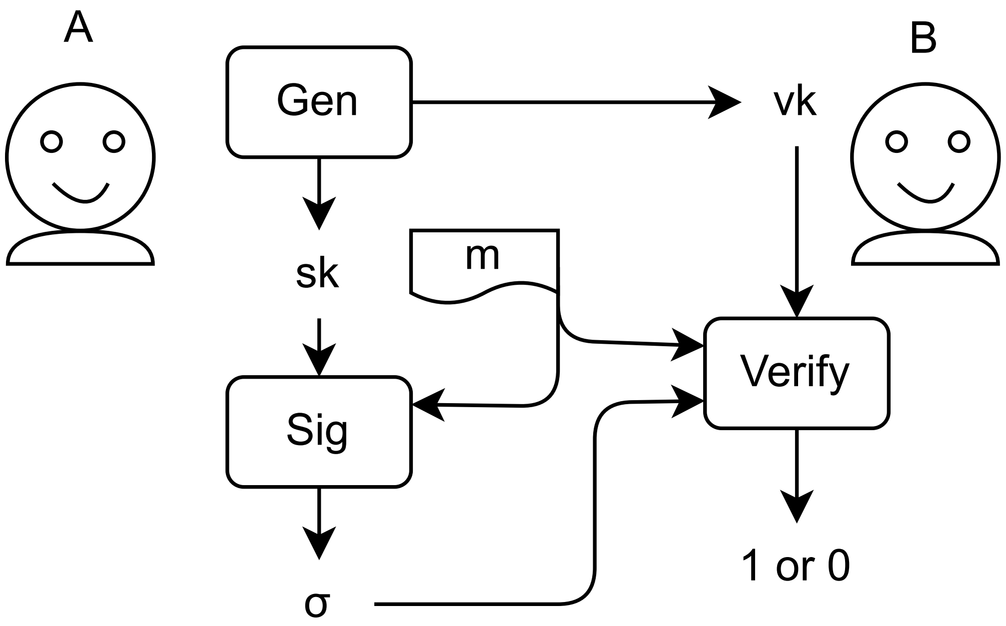
物理的な署名との違い

- コンピュータ上ではデジタルな契約書は簡単にコピーできてしまう
- それだけでは本物か偽物か区別ができない
- 署名者だけが作成できる仕組みを実現する必要性

署名の定義

次の三つ組のアルゴリズム

- 鍵生成 1^λ を入力とし署名鍵 sk と検証鍵 vk を出力
  - $Gen(1^\lambda) = (sk, vk)$
  - メッセージ空間 $\mathcal{M}$ も決まる
- 署名生成 sk と $m \in \mathcal{M}$ から署名 σ を出力
  - $Sig(sk, m) = \sigma$
  - 暗に vk を入力することもある
- 検証 (vk, m, σ) を入力し正当なら1, 不正なら0を出力
  - $Ver(vk, m, \sigma) \in \{0, 1\}$



用語

- 署名鍵 sk は秘密にするので秘密鍵, 検証鍵 vk は他人に見せるので公開鍵ともいう
- 署名アルゴリズム・署名生成・生成された署名を全部「署名」ということが多い

署名の性質

正当性

- 正しい署名鍵を使って署名すれば正しいと判定される（確率が1）：
  $Pr[Ver(vk, m, Sig(sk, m))) = 1 \mid Gen(1^\lambda) = (sk, vk), m \underset{U}{\leftarrow} \mathcal{M}] = 1$

偽造できない

- 署名鍵を持っている人しか正しい署名を作れない
- 偽のメッセージに対する署名を作れない
- 否認できない
  - MACは $sk = vk$ だったのでAとBの両方が正当なMAC値を生成できた
  - 署名は A しか署名できないので A は署名したことを否認できない
  - MACの上位互換
    - ただし一般的にMACの方が高速なので用途に応じて使い分ける

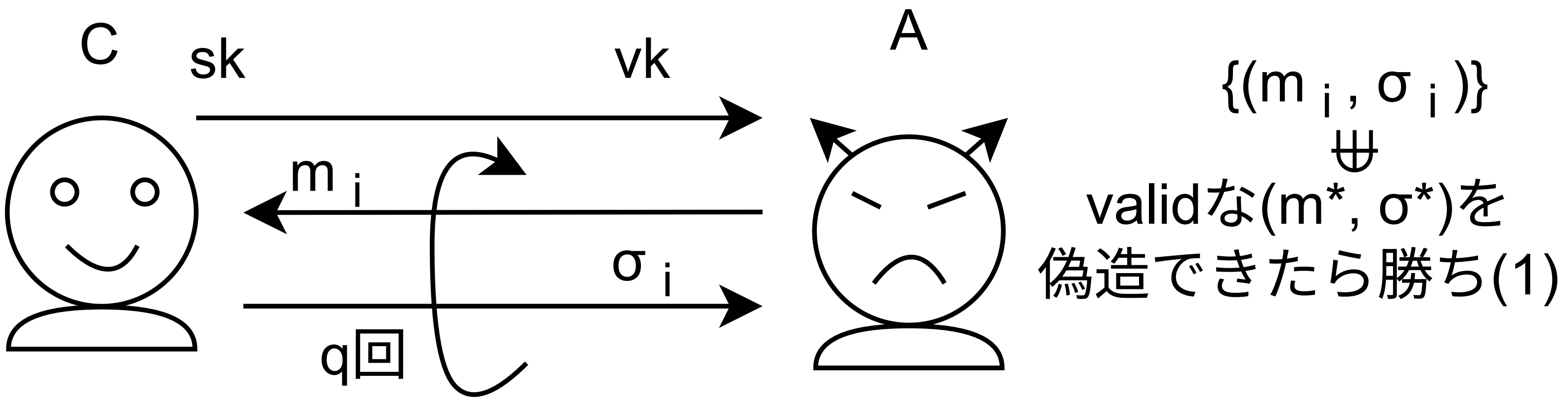
署名の強存在的偽造不可能性 sEUF-CMA

実験 $Exp_{\mathcal{A}}(\lambda)$

- 挑戦者 $\mathcal{C}$ は $Gen(1^\lambda) = (sk, vk)$ を実行し vk を攻撃者 $\mathcal{A}$ に渡す
- $\mathcal{A}$ は q 回 m_i を選び $\mathcal{C}$ に依頼して $\sigma_i = Sig(sk, m_i)$ を得る
- $Ver(vk, m^*, \sigma^*) = 1$ なる $(m^*, \sigma^*) \notin \{(m_i, \sigma_i)\}_{i=1}^{q}$ を作れたら1, それ以外は0を出力

安全性の定義

- どんなPPT攻撃者 $\mathcal{A}$ に対しても優位性 $Adv_{\mathcal{A}}(\lambda) := Pr[Exp_{\mathcal{A}}(\lambda) = 1] < negl(\lambda)$ のとき sEUF-CMA安全という



ECDSA (Elliptic Curve Digital Signature Algorithm)

楕円曲線を用いた署名

- $G := \langle P \rangle = \{O, P, \ldots, (r-1)P\}$: 楕円曲線 $E(\mathbb{F}_p)$ の有限巡回群, H: ハッシュ関数
- $Gen(1^\lambda)$: $s \underset{U}{\leftarrow} {\mathbb{F}_r}^*$ を署名鍵, $S := sP$ を検証鍵とする
- $Sig(s, m)$: $k \underset{U}{\leftarrow} {\mathbb{F}_r}^*$ を選び $R := kP$ の x 座標を t として
  $\sigma := (t, (H(m) + st)/k \bmod r)$ を署名とする
- $Ver(S, m, \sigma = (t, u))$:
  $P' := (H(m)P + tS)/u$ の x 座標が t ならば1, それ以外は0を出力
- 分母が0になる場合はやり直す

正当性の確認

- $P' = (H(m)P + tsP)/((H(m) + st)/k) = kP = R$ なので P' の x 座標は t

RSA (Rivest, Shamir, Adleman) の準備

歴史

- 1977年公開. ただし1970年代初頭にCocksたちが先に考えていた（CESGの発表）

RSA関数の生成

- RSAの落とし戸つき一方向性関数 (trapdoor one-way function): f_e
  - p, q を素数, $n := pq$, 整数 a に対して $f_a(x) := x^a \bmod n$ とする
  - $d, e \in [1, n-1]$ を $de \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$ となる整数とする
    - $e = 65537$ とすることが多い
  - $f_e(x) = x^e \bmod n$ をRSAの落とし戸つき一方向性関数という
  - (n, e) を公開情報, (p, q, d) を秘密情報とする

f_e の性質

- $\forall x \in [0, n-1]$ に対して $f_d(f_e(x)) = f_e(f_d(x)) = x$. すなわち $f_d(x) = f_e^{-1}(x)$
- $f_e : [0, n-1] \to [0, n-1]$ は一方向性置換（全単射）でもある

RSA関数が全単射であること

$x^{ed} \equiv x \pmod{n}$ を示す

- Fermatの小定理より p, q のどちらでも割れない整数 x に対して $x^{p-1} - 1$ は p で割れ, $x^{q-1} - 1$ は q で割れる
  - よって $x^{(p-1)(q-1)} - 1 = (x^{p-1})^{q-1} - 1 = (x^{q-1})^{p-1} - 1$ は p でも q でも割れる
  - p と q は互いに素なので $x^{(p-1)(q-1)} - 1$ は $n = pq$ で割れる: $x^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \pmod{n}$
  - $de \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$ より, ある整数 a を使って $de = 1 + a(p-1)(q-1)$ とすると $x^{ed} = x^{1+a(p-1)(q-1)} = x(x^{(p-1)(q-1)})^a \equiv x \pmod{n}$
- x が p で割れるとき $x^{ed} \equiv 0 \equiv x \pmod{p}$
  - x が q でも割れるならそれは $x = 0$ なので $x^{ed} = 0 \equiv x \pmod{n}$
  - x が q で割れないとすると上記と同様に $x^{ed} \equiv x \pmod{q}$ なので $x^{ed} \equiv x \pmod{n}$

RSA仮定

素因数分解 IF (Integer Factoring)

- $n = pq$ が与えられたとき p, q を求める問題
- 2025年現在, 一般数体篩法 GNFS (General Number Field Sieve) が最良の手法（DLPと同じ）
- 計算コストは $L_n[1/3, (64/9)^{1/3}]$ で
  - 例えば $n = 2^{2048}$ で 2^{116}, $n = 2^{3000}$ で 2^{137} 程度

RSA問題

- $n, e, y := f_e(x)$ が与えられたとき x を求める問題
- RSA仮定: 十分大きな p, q に対してRSA問題はIFと同等に難しい

n から p, q が求まれば

- $(p-1)(q-1)$ が求まるので拡張Euclidの互除法で e の逆元 d が求まる
- IFが解ければRSA問題も解ける / 逆は未解決問題

RSASSA-PKCS1-v1_5

広く使われているRSAを使った署名の一つ RFC-8017

- encode関数: $encode(m) :=$ `0x00|0x01|0xf...f|0x00|T|H(m)`
  - $H(m)$ の先頭に固定値を連結する. `T` は固定バイト列
- $Gen(1^\lambda)$: RSA関数を生成し d を署名鍵, (n, e) を検証鍵とする
- $Sign(d, m)$:
  - $m' := encode(m)$ として $\sigma := f_d(m') = m'^d \bmod n$ を署名とする
  - $\sigma = H(m)^d \bmod n$ ではない
- $Ver((n, e), m, \sigma)$:
  - $m'' := f_e(\sigma) = \sigma^e \bmod n$ と $m' = encode(m)$ を求めて
    $m'' = m'$ なら1, それ以外は0を返す

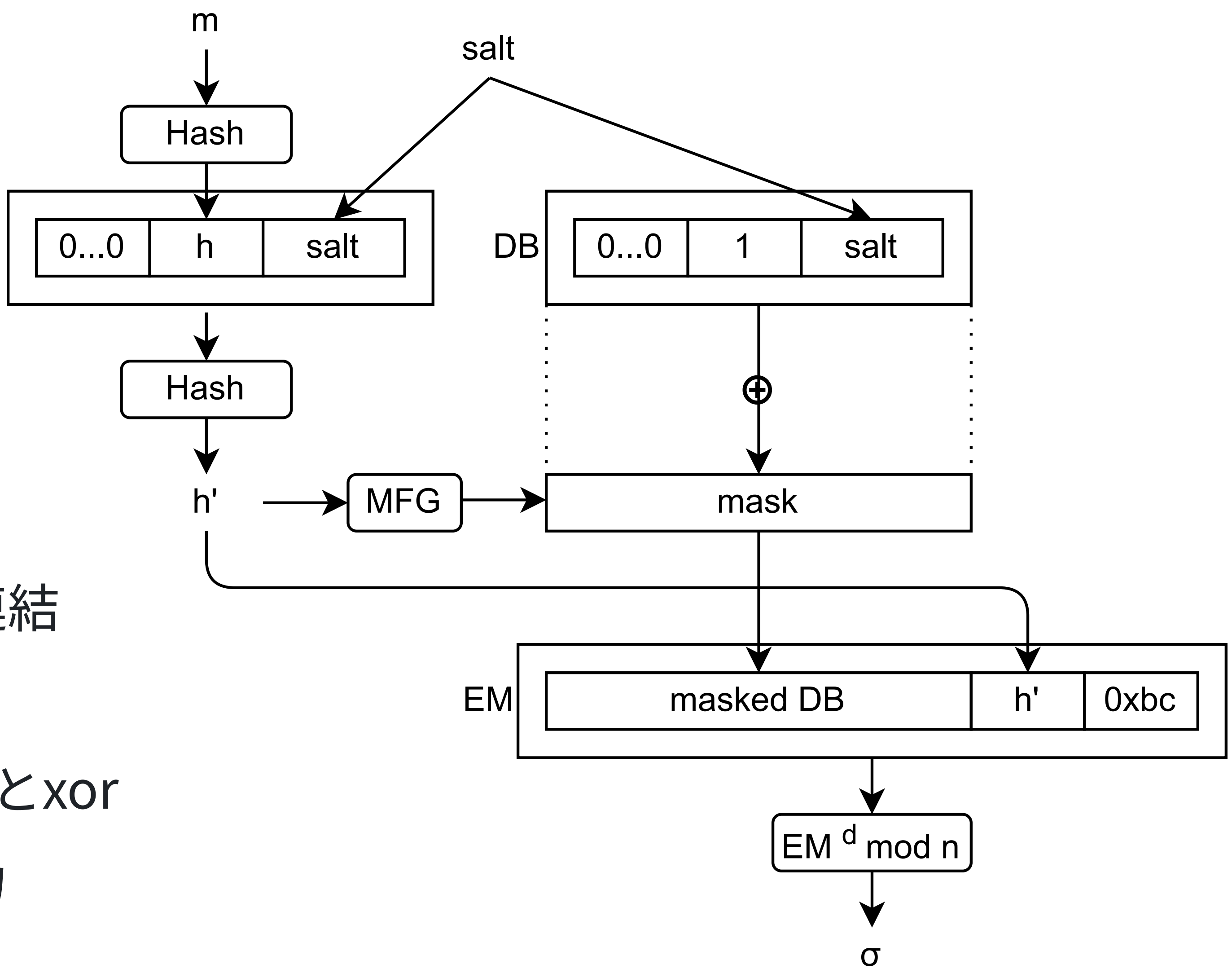
正当性の確認

- $m'' = f_e(f_d(m')) = m'$ が成り立つ

RSASSA-PSS (Probabilistic Signature Scheme)

より安全なRSAを使った署名方式

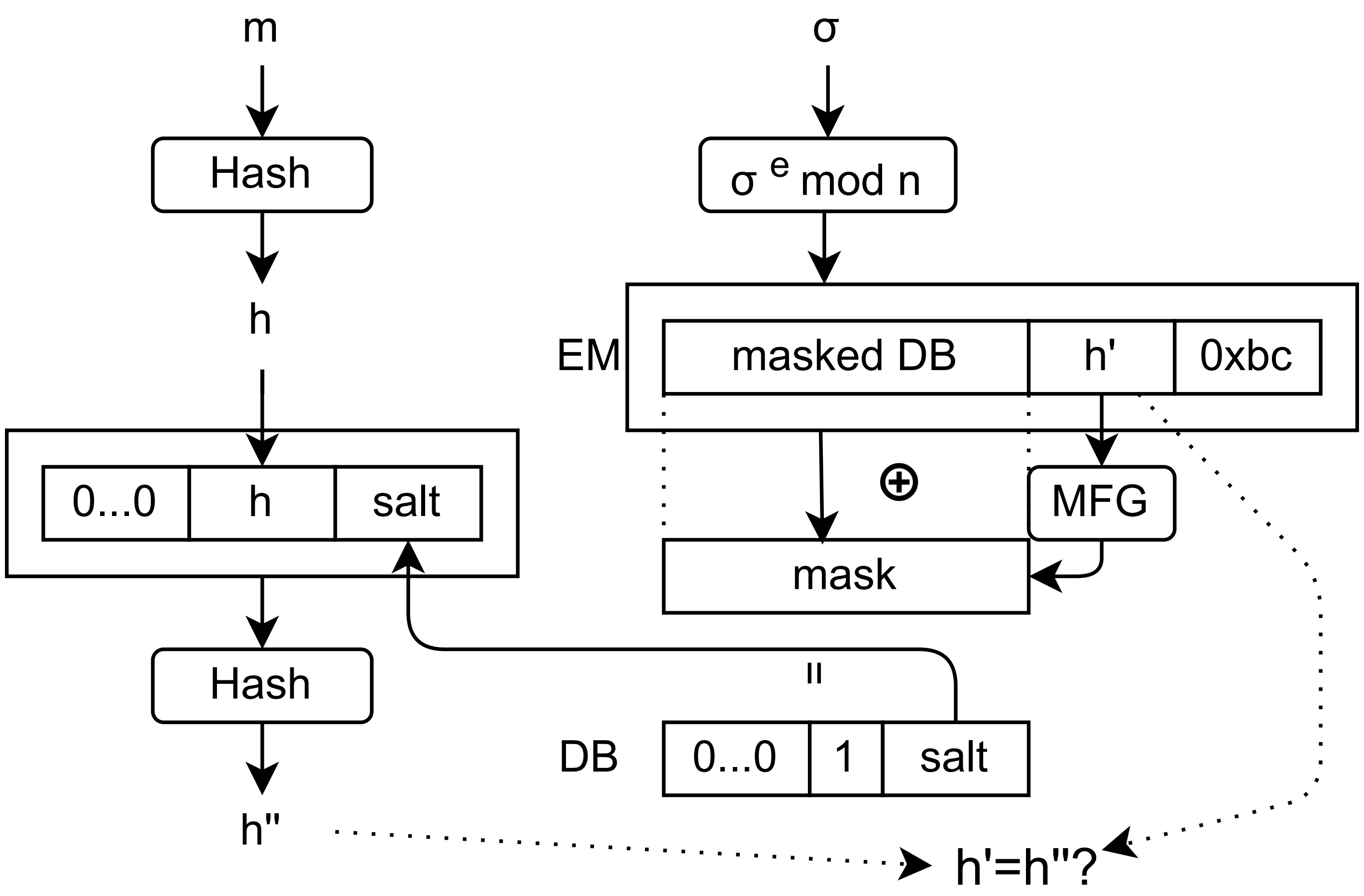
- saltを入力可能にすることで同じ m でも異なる署名を生成できる
- MGF (Mask Generation Function): PRF
  - count:=0, T:=""
  - T := T|Hash(seed|count), count++
- 署名
  - m から $h = H(m)$ を求めて salt と連結
  - もう一度HashしてMGFでmaskを生成
  - maskとsaltを連結してDBを作りmaskとxor
  - それからEMを作りRSA関数で σ を出力



RSASSA-PSSの検証

$Ver(e, m, \sigma)$

- $EM = \sigma^d \bmod n$ を求め
  masked DBとh'を取り出す
- h' からMFGでmaskを生成し
  masked DBとxorしてmaskを復元
- maskからsaltを取り出し
  $h'' = H(0..0|h|salt)$ を計算
- $h' = h''$ ならvalid



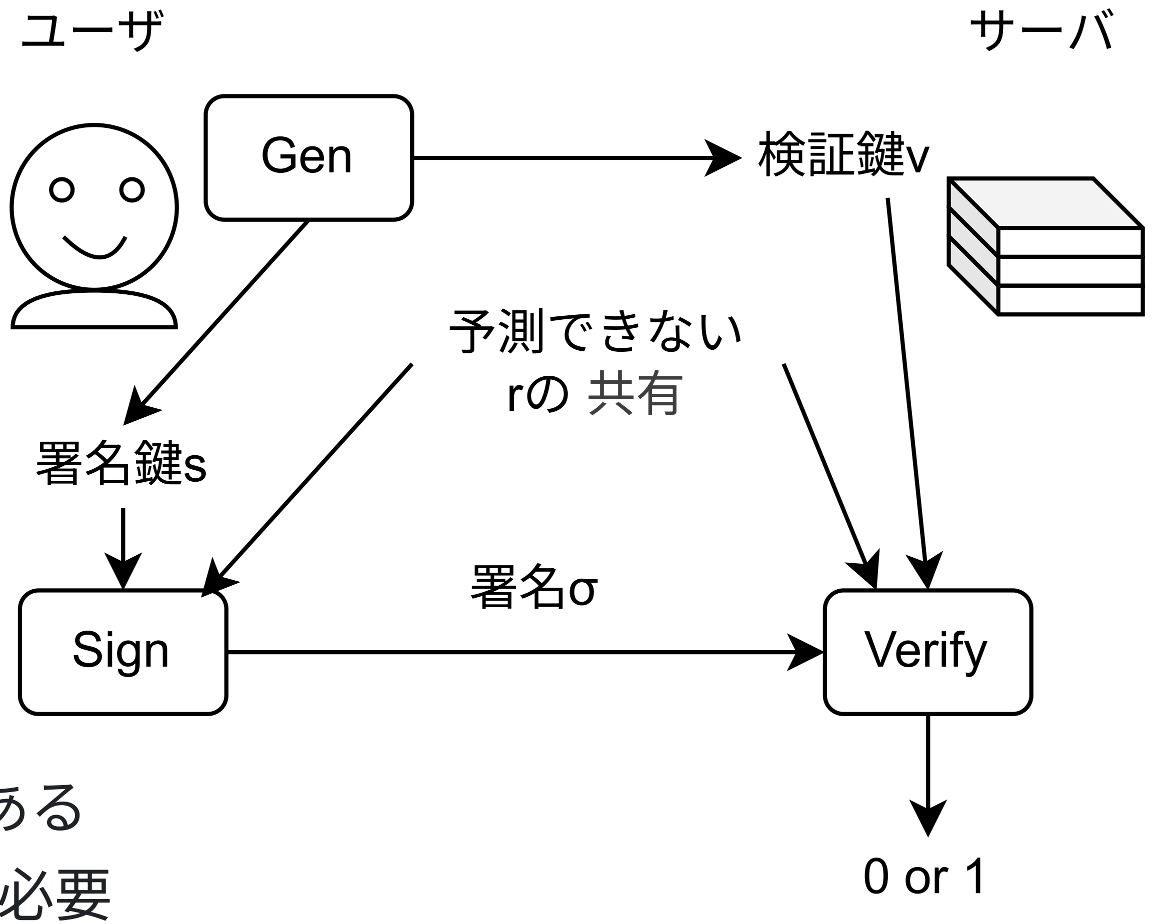
特徴

- saltは途中で復元される
- σ だけからでは h を復元できない
- RSASSA-PKCS1-v1_5と異なり安全性証明がある

sshの公開鍵認証

署名を用いて本人確認する仕組み

- Gen で署名鍵 s と検証鍵 v を生成
  - v をサーバに登録する
- 認証
  - ECDH鍵共有等を元に予測できない r を生成
  - $\sigma = Sign(s, r)$ をサーバに送信
  - サーバは $Verify(v, r, \sigma)$ を確認



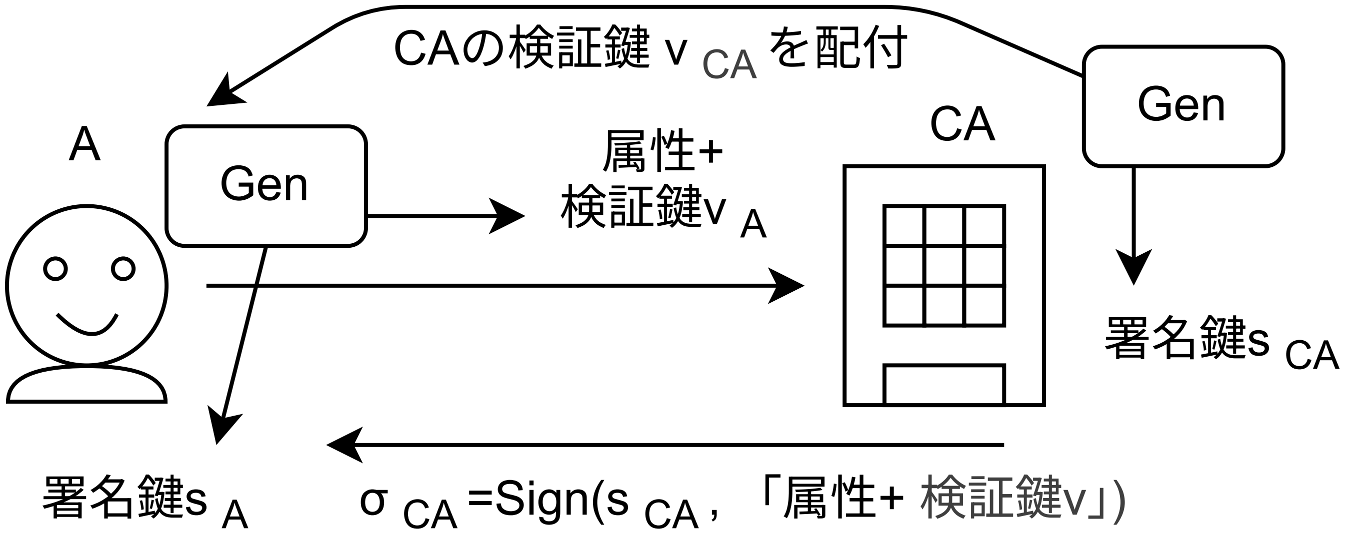
注意

- 検証鍵をサーバに登録するのは慎重にする必要がある
  - 送信には能動的攻撃者に対しても安全な経路が必要
- r は毎回異なる値でなければならない
  - リプレイ攻撃（盗聴者が通信を盗聴して再利用する）を防ぐため

認証局 CA (Certification Authority)

本人確認しその属性と検証鍵（公開鍵）との対応を保証する機関

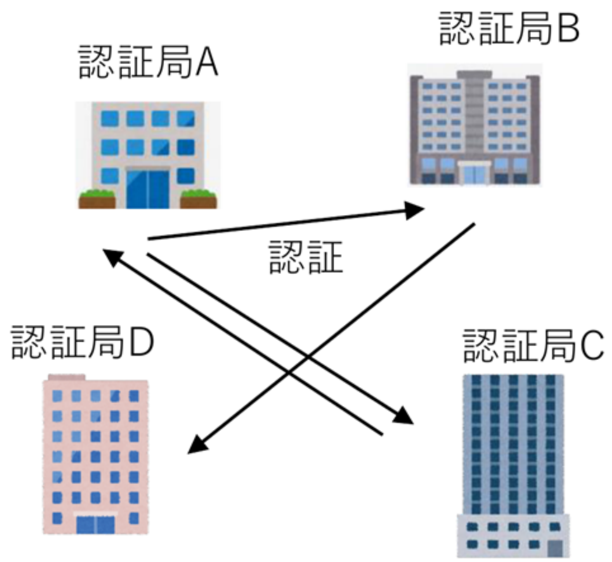
- CAは鍵生成して署名鍵 s_{CA} は厳重管理. 検証鍵 v_{CA} を広く公開
- ユーザ（人とは限らない） A からの申請により検証鍵 v_A と属性 ID_A を確認
- それらの情報に署名鍵 s_{CA} で署名して σ_{CA} を発行
- ユーザの属性がドメインなどのサーバの情報のときサーバ証明書という
- CAは証明書の発行・管理・検証・失効などを行う



公開鍵基盤 PKI (Public Key Infrastructure)

CAの相互認証

- CAが一つでは権限や責任が集中する
- 複数のCAが相互に認証することで分散化・冗長化を実現



ルートCA

- 自分で自身を認証したもの
- 信頼の起点（トラストアンカー）

ルート証明書

- ルートCAが発行する自己署名
- 通常OSやブラウザに組み込まれている