

# 量子計算機と暗号解読

光成滋生

last update: 2025/10

# 概要

## 古典計算機

- 現在（古典）計算機はビット (0 or 1) を基本単位として計算
- 論理ゲート: AND, OR, NOTなどのビット演算の組合せ

## 量子計算機 QC (Quantum Computer)

- 量子力学で記述される量子状態を利用した計算機
  - 攻撃: 量子計算機を利用して暗号技術を破る量子アルゴリズム
  - 対策: 耐量子計算機暗号（量子計算機が登場しても安全な現在の計算機で実行できる暗号）
  - 量子鍵配達（量子暗号）: 量子の性質を利用した秘密鍵を共有する技術

## 粒子と波

- 粒子は1個, 2個と数えられ, 同じ場所に複数個存在できない
- 波は数えられない広がりを持った状態
- 複数の波が重なり合って干渉する

## 粒子と波の両方の性質をもった状態

- 電子, 光子, 原子などの量子状態を最小単位 (qubit) として制御することで計算

## 量子計算機の方式例

- 超電導・イオントラップ・中性原子・光など
  - それぞれの方式の詳細は本講演の範囲外
- 量子状態の持続時間（コヒーレンス時間）・速度・エラー率・動作温度が一長一短
- qubit を増やすだけでなく、エラー率の低減・大規模化・運用コストなども課題

## 誤り訂正

- 量子状態は外部環境の影響を受けやすく誤りが発生しやすい
- 誤り訂正の技術を使って複数の物理qubitで1個の論理qubitを表す
- 実際に計算できるためには誤り耐性量子計算FTQC (Fault-Tolerant QC) が必要
- 実用的なものは100万 qubit程度必要と言われている

# 量子計算機の実装例

## 超伝導方式

- Google: 2019年 53 qubit, 2024年 105 qubit
- IBMのロードマップ: 2021年 127 qubit, 2022年 433 qubit, 2023年 1121 qubit Condor
- 大阪大学: 2023年 64 qubit, 富士通と理研: 2025年 256 qubit

## イオントラップ方式

- 2023/6: IonQが29 qubit, 2025: Quantinuum 56 qubit
- 2025/6: 1qubitで1/670万のエラー率

## 中性原子方式

- 2023/10: Atom Computing 1180 qubit
- 2025/9: 6100 qubit, 0.02%のエラー率
- その他: 電子, 光, マイクロ波 etc.

# 量子計算機に必要な線形代数の復習

## 行列

- 複素数を縦に  $n$  個、横に  $m$  個並べた  $A = (a_{ij})$  ( $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ) を  $n$  行  $m$  列 (複素) 行列という
  - その全体を  $M_{n,m}(\mathbb{C})$  と書く ( $n = m$  のときは  $n$  次正方行列で  $M_n(\mathbb{C})$  と書く)
- $A \in M_{n,m}(\mathbb{C}), B \in M_{m,l}(\mathbb{C})$  に対して行列の積  $AB := ((\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj})_{ij}) \in M_{n,l}(\mathbb{C})$
- $A^T$ : 行列  $A$  の転置行列  $A^T := (a_{ji})$  は  $m$  行  $n$  列の行列
- $A$  のエルミート共役:  $A^\dagger := \overline{A}^T = (\overline{a_{ji}})$  ( $\overline{a_{ji}}$  は  $a_{ij}$  の複素共役)
  - $(AB)^\dagger = \overline{(AB)_{ji}} = \overline{(\sum a_{jk} b_{ki})} = B^\dagger A^\dagger$

## ベクトル

- $n$  次元縦ベクトル  $v, w \in M_{n,1}(\mathbb{C})$  の内積:  $v \cdot w := v^\dagger w = \sum_{i=0}^n \overline{v_i} w_i \in \mathbb{C}$
- $v$  のノルム (長さ):  $|v| := \sqrt{v \cdot v}$ , 単位ベクトル: ノルムが1のベクトル
- $n$  個の  $n$  次元縦ベクトル  $e_1, \dots, e_n$  が  $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$  のとき  $\{e_i\}$  を正規直交基底という
  - $\{e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T\}$  ( $i$  番目だけ1) は標準基底

# ユニタリ行列

## 量子力学の演算に必要な行列

- ユニタリ行列:  $U^\dagger U = I$  を満たす  $n$  次行列  $U$  ( $I$  は単位行列) , その全体を  $U(n)$  と書く
- $U \in U(n)$  なら  $U^{-1} = U^\dagger$  なので  $U$  は可逆
- ユニタリ行列はベクトルの長さを変えない
  - $v$  が  $|v| = l$  なら  $l^2 = v^\dagger v = v^\dagger (U^\dagger U)v = (Uv)^\dagger (Uv) = |Uv|^2$  なので  $|Uv| = l$
  - 同様に  $\{e_i\}$  が正規直交基底なら  $\{Ue_i\}$  も正規直交基底  $((Ue_i)^\dagger (Ue_j) = \delta_{ij})$
  - 特に  $U$  は単位ベクトルを単位ベクトルに移す

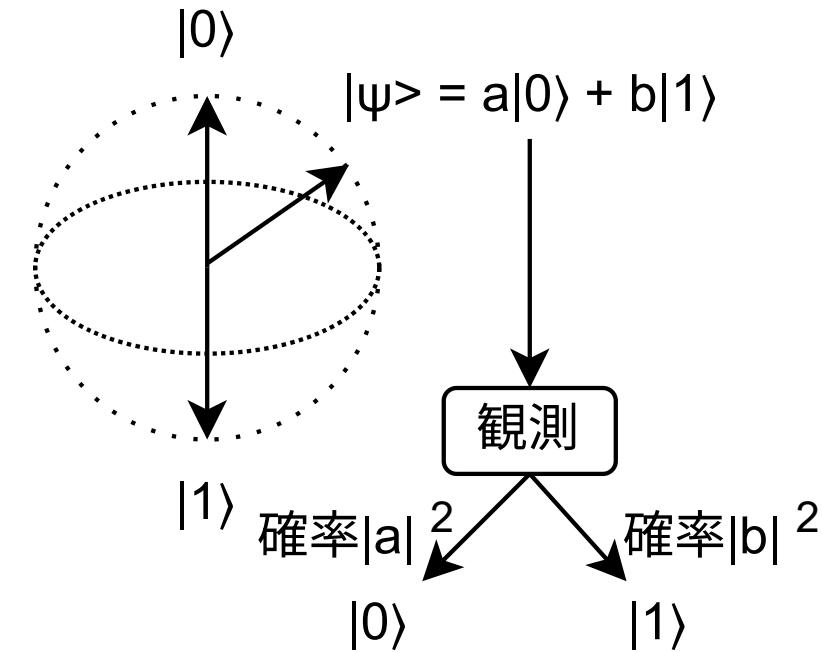
## 固有値と固有ベクトル

- $A$ : 行列,  $v$ : ベクトル,  $\lambda \in \mathbb{C}$  について  $Av = \lambda v$  を満たすとき  $v$ :  $A$  の固有ベクトル,  $\lambda$ : 固有値
- $A$  がユニタリ行列のとき  $|v| = 1$  とすると  $|v| = |Av| = |\lambda||v|$  なので  $|\lambda| = 1$ 
  - ユニタリ行列の固有値は絶対値が1の複素数なので  $\lambda = e^{i\theta}$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) と表せる

# 量子計算機の基礎

## QC の演算の基本単位: 量子ビット (qubit)

- 1 qubit とは複素2次元単位ベクトル  $v := (a, b)^T \in M_{2,1}(\mathbb{C})$ 
  - $|v| = 1$  より  $|a|^2 + |b|^2 = 1$
  - $v = a(1, 0)^T + b(0, 1)^T$  は標準基底による表現
  - 慣習的にベクトル  $v$  と標準基底  $\{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$  を  $|\psi\rangle, \{|0\rangle, |1\rangle\}$  と書き  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  と表記する  
 $ab \neq 0$  のとき  $|\psi\rangle$  は  $|0\rangle, |1\rangle$  の混合状態という



## 観測の原理

- $|\psi\rangle$  を基底  $(|0\rangle, |1\rangle)$  に従って「観測」すると  $|a|^2$  の確率で  $|0\rangle$ ,  $|b|^2$  の確率で  $|1\rangle$  が得られる

## 位相

- $\theta \in [0, 1]$  について  $|e^{i\theta}| = 1$  なので  $|\psi'\rangle := e^{i\theta}|\psi\rangle$  の観測結果は  $|\psi\rangle$  の観測結果と同じ分布
- $|\psi\rangle$  と  $|\psi'\rangle$  は物理的に区別がつかない: 位相変換に対して不变,  $e^{i\theta}$  を位相因子という

# 量子ゲート

## qubitの状態を変換する演算

- 1 qubit  $|\psi\rangle = (a, b)^T$  に対して  $U \in U(2)$  を掛ける操作:  $|\psi\rangle \mapsto U|\psi\rangle$  を量子ゲートという
  - $U$  はユニタリ行列なので  $|U|\psi\rangle| = ||\psi\rangle| = 1$  であり,  $U|\psi\rangle$  もqubitの状態を表す
- ユニタリ行列は可逆なので量子ゲートは可逆な変換しかできない
  - 例えば古典の AND ゲートは不可逆なので量子ゲートでは実現できない
  - 後述する複数のqubitを用いて  $(x, y, z) \mapsto (x, y, z \oplus (x \wedge y))$  のような形で実現する

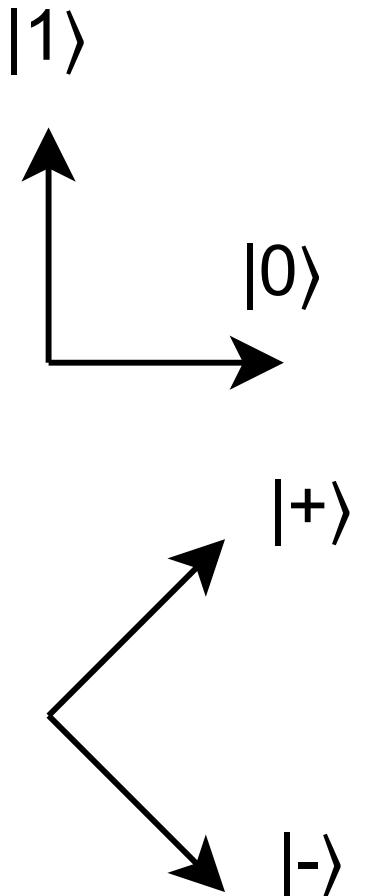
## 複製不可能性定理 (no-cloning theorem)

- 未知の量子状態の複製は不可能
- ユニタリ行列の性質から導かれる
  - 古典的な誤り訂正を適用できない
  - 量子誤り訂正符号という異なる手法・理論がひとつ

# 量子ゲートの例

## 代表的な量子ゲート

- X (NOT) ゲート:  $X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 
  - $X|0\rangle = |1\rangle = (1, 0)^T, X|1\rangle = |0\rangle = (0, 1)^T$ : 基底の反転
- アダマールゲート:  $H := (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 
  - $|+\rangle := H|0\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle) = (1/\sqrt{2})(1, 1)^T$
  - $|-\rangle := H|1\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle - |1\rangle) = (1/\sqrt{2})(1, -1)^T$
- 位相回転:  $R(\theta) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$ 
  - $R(\theta)|0\rangle = |0\rangle, R(\theta)|1\rangle = e^{i\theta}|1\rangle$ 
    - $|1\rangle$  の位相を  $\theta$ だけ回転させる
  - $T := R(\pi/4), S := R(\pi/2)$  と略記することが多い ( $T^2 = S$ )



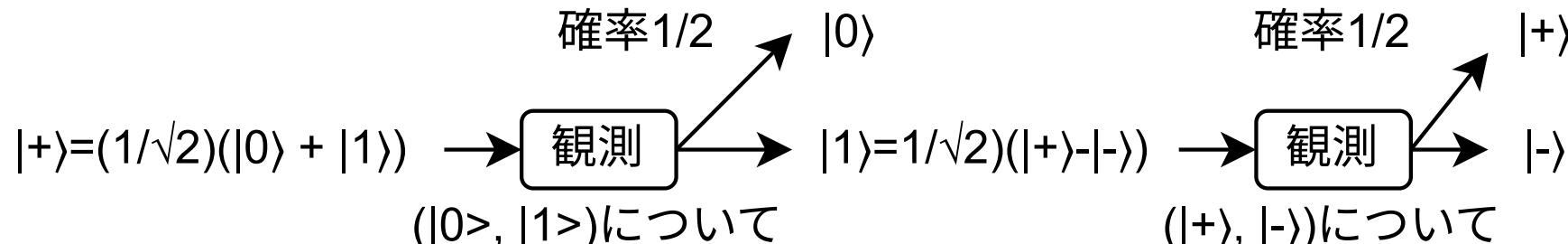
# 異なる基底での観測

## 相互関係

- $|+\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle)$ ,  $|-\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle - |1\rangle)$
- $|0\rangle = (1/\sqrt{2})(|+\rangle + |-\rangle)$ ,  $|1\rangle = (1/\sqrt{2})(|+\rangle - |-\rangle)$

## 基底を取り替えて観測する

- $(|0\rangle, |1\rangle)$  以外の基底でも観測できる
- $(|+\rangle, |-\rangle)$  も別の基底なので  $|+\rangle, |-\rangle$  で観測してみる
- $|0\rangle$  を  $(|0\rangle, |1\rangle)$  に関して観測すると確率 1 で  $|0\rangle$
- $|0\rangle$  を  $(|+\rangle, |-\rangle)$  に関して観測すると確率 1/2 で  $|+\rangle$  か  $|-\rangle$



# 複数個のqubit

## テンソル積

- 2個の2次元ベクトルの基底を組み合わせて4次元ベクトル空間の基底を作る（合成系という）
  - $(a, b) \otimes (c, d) := (ac, ad, bc, bd)$  （表記の都合で横ベクトルで表す）
- 独立に準備された2個の1 qubit  $|\psi_1\rangle$  と  $|\psi_2\rangle$  がある状態を  $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$  と表す
- 複素4次元ベクトル空間  $\mathcal{H}$  の基底
  - $|00\rangle := |0\rangle \otimes |0\rangle = (1, 0) \otimes (1, 0) = (1, 0, 0, 0)$
  - $|01\rangle := |0\rangle \otimes |1\rangle = (1, 0) \otimes (0, 1) = (0, 1, 0, 0)$
  - $|10\rangle := |1\rangle \otimes |0\rangle = (0, 1) \otimes (1, 0) = (0, 0, 1, 0)$
  - $|11\rangle := |1\rangle \otimes |1\rangle = (0, 1) \otimes (0, 1) = (0, 0, 0, 1)$
- 一般に  $\mathcal{H}$  の元は  $c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle$  ( $c_{ij} \in \mathbb{C}, \sum |c_{ij}|^2 = 1$ ) の形
  - この基底で観測したとき  $|ij\rangle$  が得られる確率は  $|c_{ij}|^2$
- $n$  個のqubitの状態は  $2^n$  次元複素ベクトルとなる
  - $|i_0 i_1 \cdots i_{n-1}\rangle$  を  $i$  を2進数展開( $i = \sum_k i_k 2^k$ ) したものとみなして  $|i\rangle$  と略記する

# 量子もつれ (Entanglement)

## 合成系の中でテンソル積で表現できない状態

- テンソル積で表現できる例
  - $(1/\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = (1/\sqrt{2})(|00\rangle + |10\rangle)$
  - $(1/\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (1/\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle) = (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)/2$
- テンソル積で表現できない例
  - $|\psi\rangle := (1/\sqrt{2})(|00\rangle + |11\rangle)$ 
    - $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$  と表現できない
      - $|\psi_1\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, |\psi_2\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$  とすると  
 $ac = 1/\sqrt{2}, bd = 1/\sqrt{2}, ad = 0, bc = 0$  となり矛盾
- このように状態が各qubitの状態のテンソル積で表現できないとき  
 $|\psi\rangle$  は**量子もつれの状態**にあるという

# 部分測定

## 部分測定の例

- $|\psi\rangle = s|00\rangle + t|01\rangle + u|10\rangle + v|11\rangle$  とする
- 1個目のqubitについて測定して  $|0\rangle$  となるのは  $s|00\rangle$  か  $t|01\rangle$  のどちらかで確率は  $|s|^2 + |t|^2$ 
  - 測定後の状態は  $|\psi'\rangle = s|00\rangle + t|01\rangle$  を正規化したもの
    - ベクトル  $v \neq 0$  の正規化とはノルムを1にすること:  $v \mapsto v/|v|$
  - $||\psi'\rangle|^2 = |s|^2 + |t|^2$  なので  $|\psi'_0\rangle := |\psi'\rangle/|\psi'| = (s|00\rangle + t|01\rangle)/\sqrt{|s|^2 + |t|^2}$
- 同様に  $|1\rangle$  となる確率は  $|u|^2 + |v|^2$ , 測定後は  $|\psi'_1\rangle := (u|10\rangle + v|11\rangle)/\sqrt{|u|^2 + |v|^2}$

## テンソル積の場合

- $|\psi_1\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, |\psi_2\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$  で  $a, b, c, d > 0, |\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$  なら  $s = ac, t = ad, u = bc, v = bd$  となり  $|s|^2 + |t|^2 = |a|^2(|c|^2 + |d|^2) = |a|^2$
- 確率  $a^2$  で  $|\psi'_0\rangle = (ac|00\rangle + ad|01\rangle)/a = |0\rangle \otimes |\psi_2\rangle$
- 確率  $b^2$  で  $|\psi'_1\rangle = (bc|10\rangle + bd|11\rangle)/b = |1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ . 第2qubitはどちらも同じ (独立)

# 部分測定後の独立性

## 量子もつれの場合

- $|\psi\rangle = (1/\sqrt{2})(|00\rangle + |11\rangle)$  の場合
- 1個目のqubitを観測して  $|0\rangle$  が得られる確率は  $1/2$ , 測定後の状態は  $|00\rangle$
- 1個目のqubitを観測して  $|1\rangle$  が得られる確率は  $1/2$ , 測定後の状態は  $|11\rangle$ 
  - 1個目のqubitが  $|0\rangle$  ならば2個目も  $|0\rangle$ , 1個目が  $|1\rangle$  なら2個目も  $|1\rangle$

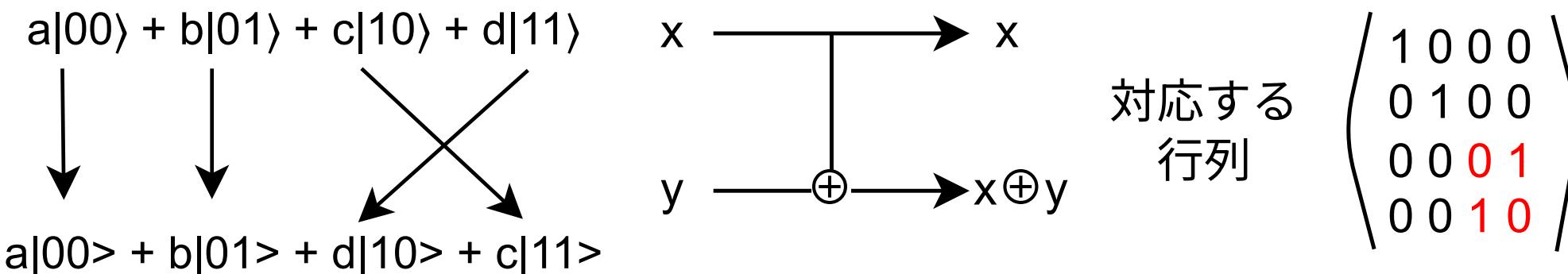
## 2個のqubitが独立でない

- 1個目のqubitの状態が決まると2個目の状態も決まる
  - 2個のqubitは離れた状態でも成り立つ
  - 量子テレポーテーションや量子暗号（量子鍵配達）のキーとなる現象

# CNOT (Controlled NOT) ゲート

## 2個のqubitに対する量子ゲート

- $CNOT(a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle) := a|00\rangle + b|01\rangle + d|10\rangle + c|11\rangle$ 
  - 後ろ2個の基底の係数を入れ代わる



- 状態  $|xy\rangle$  ( $x, y \in \{0, 1\}$ ) に対して  $x = 0$  のとき  $y$  はそのまま,  $x = 1$  のとき  $y$  は反転
- $(x, y) \mapsto (x, x \oplus y)$  と表せる
- $x = (1/\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle)$ ,  $y = |0\rangle$  とすると  $x \otimes y = (1/\sqrt{2})(|00\rangle + |10\rangle)$
- $CNOT(x \otimes y) = (1/\sqrt{2})(|00\rangle + |11\rangle)$  となり量子もつれの状態になる
- **量子計算の普遍性:**  $H, T, CNOT$  の組合せで任意の量子ゲートを近似できる
  - これら (と  $S = T^2$  も追加して) を使って量子回路を組み立てる

# 2qubitに対するアダマールゲート

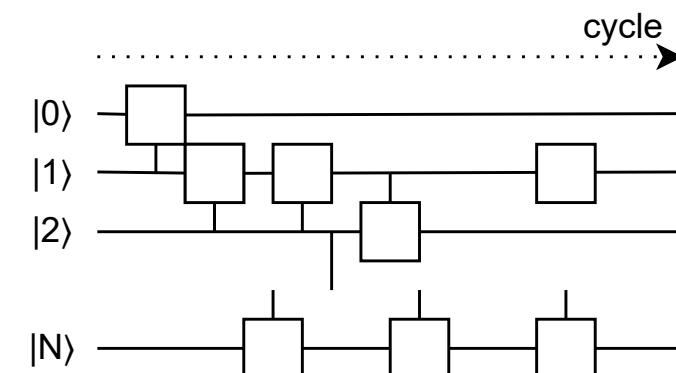
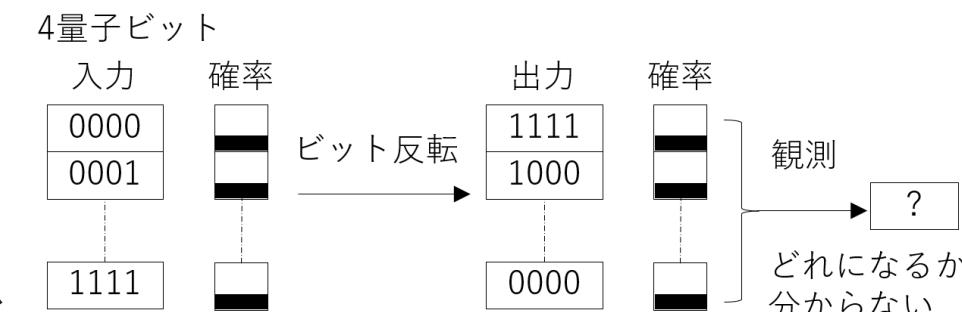
$H \otimes H = H^{\otimes 2}$  と表記

- $H = (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  なので
  - $H^{\otimes 2}|00\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$
  - $H^{\otimes 2}|01\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$
  - $H^{\otimes 2}|10\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$
  - $H^{\otimes 2}|11\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$
- $H^{\otimes 2}|i\rangle = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 (-1)^{i \cdot j} |j\rangle$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ )
  - $i \cdot j$  は  $i, j$  を2進数展開したときの各桁の積の和 ( $\text{mod } 2$ )
  - 例えば  $i = 2 = 10_2, j = 3 = 11_2$  のとき  $i \cdot j = 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1$
- $H^{\otimes n}|i\rangle = (1/2^{n/2}) \sum_{j=0}^{2^n-1} (-1)^{i \cdot j} |j\rangle$  ( $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ )

# 量子計算機における計算

## 量子計算機の演算処理

- $n$  qubitの状態は  $2^n$  通りのパターンが重なり合った状態
  - $|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} c_i |i\rangle$  ( $c_i \in \mathbb{C}, \sum |c_i|^2 = 1$ )
- $|\psi\rangle$  に標準量子ゲートなどを順番に作用させる回路を作る
  - 遠いところはSWAP演算（3個のCNOTで構成）などの組合せ
- 最終的には観測しないと結果を得られない
  - そのとき  $|c_i|^2$  の確率で  $|i\rangle$  に確定し、これが計算結果
  - もし  $|c_0| = \dots = |c_{2^n-1}|$  ならどの  $|i\rangle$  が得られるかランダム
- 望ましい答えが観測されるように  $|c_i|$  を大きくするのが肝
  - 古典計算機における分岐・ループ処理は存在しない
  - 基本的に10回ループする処理は10回分の量子ゲートを展開する
  - 全体的には古典のFPGAの回路設計にイメージが近い



# 一般の関数に対する量子ゲート

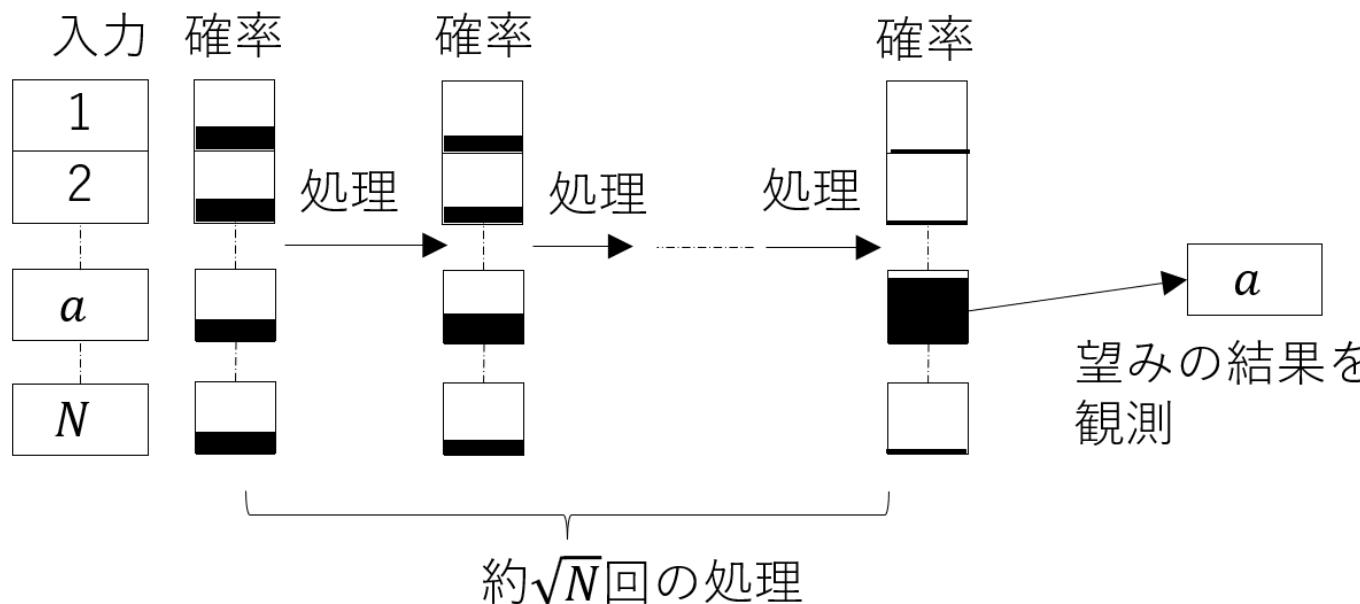
## 補助ビット (ancilla) の導入

- 関数  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  に対して  
 $U_f : |x\rangle \otimes |y\rangle \mapsto |x\rangle \otimes |y \oplus f(x)\rangle$  と定義する
  - $x$ :  $n$  qubit,  $y$ : 1 qubit ( $y$  が補助ビット)
- このとき  $U_f$  はユニタリ行列になる
  - $U_f(U_f(|x\rangle \otimes |y\rangle)) = |x\rangle \otimes |y \oplus f(x) \oplus f(x)\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle$ , つまり  $U_f^{-1} = U_f$
- 位相キックバック
  - $|y\rangle := |-\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle - |1\rangle)$  とする
    - $f(x) = 0$  のとき  $U_f(|x\rangle \otimes |-\rangle) = |x\rangle \otimes |-\rangle$
    - $f(x) = 1$  のとき  $U_f(|x\rangle \otimes |-\rangle) = -|x\rangle \otimes |-\rangle$
    - つまり  $U_f(|x\rangle \otimes |-\rangle) = (-1)^{f(x)} |x\rangle \otimes |-\rangle$
  - $f(x)$  を位相部分に埋め込む演算  $U_f(|x\rangle) = (-1)^{f(x)} |x\rangle$  とみなす

# Groverのアルゴリズム

$N$  個のデータから特定の条件を満たすものを一つ探す

- 関数  $f(x) = 1$  if  $x = a$ , それ以外は0において  $f(x) = 1$  となる  $x = a$  を探す
- 古典計算機なら平均  $N/2$  回の試行が必要
- Groverのアルゴリズムは  $O(\sqrt{N})$  回の量子クエリで可能
  - $O(\sqrt{N})$  回のクエリで十分高い確率で  $f(x) = 1$  なる  $x$  が見つかるということ



# Shorのアルゴリズム

$n = pq$  ( $p, q$  は素数) を素因数分解するアルゴリズム

- 位数計算問題: 与えられた  $g \in [1, n - 1]$  の位数を求める問題
  - $g$  の位数:  $g^r \equiv 1 \pmod{n}$  となる最小の正整数
- 位数が見つかり  $r$  が偶数ならば  $(g^{r/2} - 1)(g^{r/2} + 1) \equiv 0 \pmod{n}$ 
  - このとき有意な確率で  $g^{r/2} - 1$  と  $g^{r/2} + 1$  のどちらかは  $n$  の非自明な約数を持つ
  - 見つからなければ別の  $g$  でやり直す
  - 最大公約数は古典計算機で高速に求められるので  $p, q$  が得られる
- 位数計算問題を量子計算機で解き, 全体で  $O((\log n)^3)$  で素因数分解できる

# QFT (Quantum Fourier Transform)

## 量子フーリエ変換

- 古典フーリエ変換の量子版
- $n$  qubit の  $|x\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x_j |j\rangle$ ,  $N := 2^n$
- QFTは  $|j\rangle$  を  $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \exp(2\pi i j k / N) |k\rangle$  に変換する ( $|j\rangle$  という状態と位相の相互変換)
  - $O(n^2)$  個の量子ゲート,  $O(n^2)$  ステップで実現可能

## 古典FFT

- $x_k$  を  $X_j := (1/\sqrt{N}) \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp(-2\pi i j k / N)$  に変換する
- 逆変換は  $x_k = (1/\sqrt{N}) \sum_{j=0}^{N-1} X_j \exp(2\pi i j k / N)$
- $x_l = (1/\sqrt{N}) \sum_{j=0}^{N-1} X_j \exp(2\pi i j l / N) = (1/N) \sum_{j,k} x_k \exp(2\pi i j(l-k)/N)$ 
  - $\sum_j \exp(2\pi i j(l-k)/N) = N\delta_{lk}$

# 量子位相推定 QPE (Quantum Phase Estimation)

## ユニタリ行列 $U$ の固有値を求める

- $U$  の固有値は絶対値が 1 なので  $e^{2\pi i \theta}$  ( $\theta \in [0, 1]$ ) と表せる
- $U$  の固有ベクトル  $|\psi\rangle$  が与えられたとき  $U|\psi\rangle = e^{2\pi i \theta}|\psi\rangle$  となる  $\theta$  を  $m$  桁の精度で求める

## 大まかな手順

- $|0^{\otimes m}\rangle$  にアダマールゲートを作用させて  $(1/2^{m/2}) \sum_{k=0}^{2^m-1} |k\rangle$  を作る
- $U^k$  を作用:  $|k\rangle \mapsto \exp(2\pi i k \theta) |k\rangle$ 
  - 結果:  $(1/2^{m/2}) \sum_{k=0}^{2^m-1} e^{2\pi i k \theta} |k\rangle \otimes |\psi\rangle$
- 逆QFTを作用:  $|k\rangle \mapsto (1/2^{m/2}) \sum_{j=0}^{2^m-1} \exp(-2\pi i j k / 2^m) |j\rangle$ 
  - 結果:  $(1/2^m) \sum_{k,j} \exp(2\pi i k(2^m \theta - j) / 2^m) |j\rangle \otimes |\psi\rangle$
- 測定:
  - ある  $j$  について  $2^m \theta = j$  なら  $|j\rangle |\psi\rangle$  なので  $j$  が求まる
  - $\theta \approx j/2^m$  なら 40% 程度の確率で  $|j\rangle |\psi\rangle$  になる

# QPEを用いた位数計算の概略

演算  $U|x\rangle := |gx \bmod n\rangle$

- このとき  $U|j\rangle = \exp(2\pi ij/r)|w_j\rangle$   
 $|w_j\rangle := (1/\sqrt{r}) \sum_{k=0}^{r-1} \exp(-2\pi ikj/r)|g^k \bmod n\rangle$  となることが知られている
- 固有値に  $j/r$  が含まれている
- QPEにより  $j/r$  の近似値が求まる
  - $(1/\sqrt{r}) \sum_j |w_j\rangle = |1\rangle$  なので  $|1\rangle$  に対してQPEを適用しても位相が求まる
  - 連分数展開の技法を使って正確な値を求める
- QPEで必要な  $U^{2^k}|x\rangle = |g^{2^k}x \bmod n\rangle$  は  $g^{2^k}x \bmod n$  を古典計算機で事前に求めておく

# 量子計算機によるECDLPの解読

## ECDLPからQPEへ

- $\langle P \rangle: E(\mathbb{F}_p)$  上の素数位数  $n$  の巡回群.  $Q \in \langle P \rangle$  に対して  $Q = xP$  となる  $x$  を見つける
- $|0, 0\rangle|0\rangle$  にアダマールゲートを作用させて  $(1/n) \sum_{a,b} |a, b\rangle|0\rangle$  を作る
- $U|a, b\rangle|0\rangle := |a, b\rangle|aP + bQ\rangle$  を作用させる
  - 結果:  $(1/n) \sum_{a,b} |a, b\rangle|aP + bQ\rangle = (1/n) \sum_{R \in S_R} |a, b\rangle|R\rangle$ ,  
 $S_R := \{(a, b) \mid aP + bQ = R\}$
- 3番目のqubitを測定するとある  $R = cP$  が選ばれ  $(1/\sqrt{|S_R|}) \sum_{(a,b) \in S_R} |a, b\rangle|R\rangle$  になる  
(以降  $|R\rangle$  は固定なので省略)
- 1, 2番目のqubitに2次元版逆QFTを作用させる
  - $|a, b\rangle \mapsto (1/n) \sum_{j,k} \exp(-2\pi i (aj + bk)/n) |j, k\rangle$
  - 結果:  $(1/(n\sqrt{|S_R|})) \sum_{j,k} (\sum_{(a,b) \in S_R} \exp(-2\pi i (aj + bk)/n)) |j, k\rangle$
  - この状態を観測する

# 確率の大きいところ

## $|j, k\rangle$ が観測される確率

- 全体の係数を無視すると、 $v_{j,k} := \sum_{(a,b) \in S_R} \exp(-2\pi i(a j + b k)/n)$  の絶対値の2乗
- $(a, b) \in S_R$  ならば  $aP + b(xP) = cP$  より  $a \equiv c - bx \pmod{n}$
- $aj + bk \equiv (c - bx)j + bk = cj + b(k - xj) \pmod{n}$
- $k - xj \equiv 0 \pmod{n}$  ならば  $v_{j,k} = \sum_b \exp(-2\pi i c j / n) = n \exp(-2\pi i c j / n)$ 
  - 位相が揃って確率が最大化. それ以外は打ち消しあって小さくなる
  - つまり  $k \equiv xj \pmod{n}$  となる  $k, j$  が選ばれる確率が高い
  - 複数回実行して  $x$  を求める
- 全体で  $O((\log p)^3)$  で解けることが知られている
- ビット数が少ない分, 原理的に素因数分解よりも効率よく求められる

# 素因数分解の評価

## 理論的には

- Beauregard (2003)の見積もりで  $n$  bitの数の素因数分解に  $2n + 3$  bit必要

## 実際に必要なqubitの見積もり

- Gidney and Ekerå (2019) : 2048 bit RSAを解くにはエラー率0.1% 2000万 qubit, 8時間
- Gidney (2025) (未査読) : 2048 bit RSAを解くにはエラー率0.1% 100万 qubit, 1週間

## 実際に解読できたパターン

- 2001 IBM :  $15 = 3 \times 5$
- 2012 Josephson phase qubi :  $21 = 3 \times 7$
- 2019 IBM : 35を素因数分解しようとしたが失敗
- (DLP) 2020 NICT :  $2^x \equiv 1 \pmod{2}$  は解けたが  $4^x \equiv 2 \pmod{7}$  は失敗
- ただし解けた素因数分解は素因数の情報を使ってる (CRYPTREC : それはありなのか)
- もっと大きい素因数分解に成功したものもあるがそれも全数探索 or 素数の性質を使ってる

# 共通鍵暗号への影響

## 攻撃モデル

- Q1: 攻撃者は古典オラクルを使う（量子オラクルを使わない）
  - 公開鍵暗号はこちらのモデル
- Q2: 攻撃者は量子オラクルを使う
  - 共通鍵暗号はこちらのモデルを使うことが多い（実際に攻撃できないことが多い）

## 共通鍵暗号の素朴な安全性評価

- 共通鍵暗号の鍵空間が  $2^n$  なら古典では  $O(2^n)$
- Groverのアルゴリズムを使う (Q2) と、 $O(2^{n/2})$  で解読
- ハッシュ関数の衝突 ( $h(x) = h(x')$  となる  $x \neq x'$ ) を求める問題
  - 古典  $O(2^{n/2})$  で解ける
  - Q2:  $O(2^{n/3})$  で解ける, ただし量子メモリは  $O(2^{n/3})$ : 現実的でない → 当面大丈夫