**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**Механіко-математичний факультет**

**Кафедра математичної фізики**

**«ЗАТВЕРДЖУЮ»**

Заступник декана

#### з навчально-виховної роботи

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

«\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_ року

## **РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

#### **Рівняння математичної фізики**

**для студентів**

галузі знань 0402 фізико-математичні науки

напрям підготовки 040202 – механіка

##### КИЇВ – 2017

Робоча програма **«Рівняння математичної фізики»**

для студентів *галузі знань/напрям підготовки/* 0402 фізико-математичні науки/ 040202 – механіка

«\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2017 року – 22 с.

Розробники: Ловейкін Андрій Вячеславович, канд. фіз.-мат. наук, доцент  
Вакал Євген Сергійович, канд. фіз.-мат. наук, доцент  
Креневич Андрій Павлович, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Робоча програма дисципліни «*Рівняння математичної фізики****»*** затверджена на засіданні кафедри математичної фізики

Протокол № 8 від “6” квітня 2017 року

Завідувач кафедри \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ В.Г. Самойленко

(підпис)

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 20\_\_\_ року

Схвалено науково-методичною комісією механіко-математичного факультету

Протокол від «24» квітня 2017 року №9

Голова науково-методичної комісії \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ О.О.Курченко

(підпис)

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 20\_\_\_ року

© Ловейкін А.В., 2017 рік

© Вакал Є.С., 2017 рік

© Креневич А.П., 2017 рік

**ВСТУП**

Навчальна дисципліна «Рівняння математичної фізики» є складовою освітньої програми підготовки фахівців за освітнім рівнем «бакалавр» галузі знань 0402 фізико-математичні науки за напрямом підготовки 040202 – механіка.

Дана дисципліна є обов'язковою.

Викладається у **V** та **VI** семестрах **3** курсув обсязі **210 год**. *(****7*** *(****4 в V семестрі та 3 в VI семестрі****)* ***кредитів ECTS****)*зокрема: *лекції – всього 76 год. (36 год. у V семестрі та 40 год. у VI семестрі), практичні – 24 год. (12 год. у* *V семестрі та 12 год. у VI семестрі), самостійна робота – 106 год. (70 год. у V семестрі та 36 год. у VI семестрі).* У курсі передбачено 4*змістовних модулі* та 4 *модульні* *контрольні роботи*. Завершується дисципліна **заліком** **у V та іспитом у VI семестрах.**

**Мета дисципліни** – оволодіння сучасними методами, теоретичними положеннями та основними розв’язання задач, пов’язаних із лінійними диференціальними рівняннями математичної фізики.

**Завдання** – підготувати студентів до використання методів розв’язання задач математичної фізики в задачах механіки.

**Структура курсу:**основні поняття теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП), фізичні процеси, що приводять до задач математичної фізики, класифікація лінійних ДРЧП 2-го порядку, задача Коші для хвильового рівняння, крайові задачі для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності, задача Штурма-Ліувілля, метод Фур’є, гармонічні функції, крайові задачі для рівнянь Лапласа та Пуассона, теорія потенціалу.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

**знати:**  означення ДРЧП та його порядку, означення розв’язку ДРЧП, типи лінійних ДРЧП 2-го порядку та їх канонічні форми, основні типи задач для лінійних ДРЧП математичної фізики, теореми єдиності розв’язків цих задач, властивості власних чисел та власних функцій задачі Штурма-Ліувілля, схему методу Фур’є;

**вміти:**  записувати математичні моделі процесів розповсюдження коливань, розподілу тепла, стаціонарних процесів (задачі математичної фізики), визначати тип лінійного ДРЧП 2-го порядку та зводити його до канонічної форми, розв’язувати задачі Коші для класичного хвильового рівняння та рівнянь гіперболічного типу, знаходити власні числа та власні функції задач Штурма-Ліувілля, розв’язувати методом Фур’є крайові задачі для хвильового рівняння, рівняння теплопровідності, рівнянь Лапласа та Пуассона.

**Місце дисципліни *(****в структурно-логічній схемі підготовки фахівців відповідного напряму)*. Обов’язкова навчальна дисципліна „Рівняння математичної фізики” є складовою освітнього циклу підготовки фахівців освітнього рівня „бакалавр”.

**Зв’язок з іншими дисциплінами**. Рівняння математичної фізики є базовою дисципліною для вивчення таких дисциплін як «Теорія пружності», «Теоретична гідромеханіка», «Механіка суцільних середовищ».

**Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти.** Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою. У змістовий модуль 1 (ЗМ1) входять теми 1-2, у змістовий модуль 2 (ЗМ2) входять теми 3-5, у змістовий модуль 3 (ЗМ3) входять теми 6-8, у змістовий модуль 4 (ЗМ4) входять теми 9-10. Обов’язковим для допуску до заліку в V семестрі є написання 1-ї та 2-ї модульних контрольних робіт з кількістю балів не менше 12 (1-ша) та 13 (2-га), для іспиту в VI семестрі є написання 3-ї та 4-ї модульних контрольних робіт з кількістю балів не менше 12 кожна. У період з 24.01 по 28.02 студенти один раз на тиждень повинні на електронну адресу викладача надсилати виконані ними завдань самостійної роботи, які передбачені в цій робочій програмі. За результатами виконаних у цей період завдань студент повинен отримати не менше 5 балів.

*Оцінювання за формами контролю:*

V семестр

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***ЗМ1*** | | ***ЗМ2*** | |
| *Min. – балів* | *Max. – балів* | *Min. – балів* | *Max. – балів* |
| Активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи | 5 | 10 | 5 | 10 |
| Модульна контрольна  робота 1 | 12 | 20 |  |  |
| Модульна контрольна  робота 2 |  |  | 13 | 20 |

VI семестр

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***ЗМ3*** | | ***ЗМ4*** | |
| *Min. – балів* | *Max. – балів* | *Min. – балів* | *Max. – балів* |
| Виконання студентом  завдань для самостійної  роботи  у період з 24 січня  по 28 лютого | 5 | 8 |  |  |
| Активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи | 3 | 6 | 3 | 6 |
| Модульна контрольна  робота 3 | 12 | 20 |  |  |
| Модульна контрольна  робота 4 |  |  | 12 | 20 |

Студенти, які протягом семестру набрали сумарно меншу кількість балів ніж *критично-розрахунковий мінімум 35* *балів,* для одержання заліку або іспиту обов’язково повинні написати на потрібну кількість балів додаткову контрольну роботу за матеріалом відповідного семестру та доскладають домашні завдання для підвищення балів за виконання самостійної роботи*.*

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі МКР здійснюються у відповідності до „Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу” від 1 жовтня 2010 року.

Форма заліку у V семестрі – письмова. Залікове завдання складається з 5‑ти питань: 2-х теоретичних та 3-х задач. Теоретичні питання оцінюються від 0 до 5 балів кожне, задачі – від 0 до 10 балів кожна. Всього під час складання можна отримати від 0 до 40 балів.

Форма іспиту в VI семестрі – письмово-усна. Екзаменаційний білет іспиту складається з 4-х завдань, перші два з яких є теоретичними, два інших – задачі. Кожне завдання оцінюються від 0 до 8 балів. Додатково від 0 до 8 балів студент отримує за усне опитування. Всього за іспит можна отримати від 0 до 40 балів.

***Розрахунок балів, які студент отримує при успішній здачі іспиту:***

V семестр

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Змістовий  модуль 1 | Змістовий  модуль 2 | Залік | Підсумкова  оцінка |
| *Мінімум* | *17* | *18* | *25* | *60* |
| **Максимум** | **30** | **30** | **40** | **100** |

VI семестр

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Змістовий  модуль 3 | Змістовий  модуль 4 | Іспит | Підсумкова  оцінка |
| *Мінімум* | *20* | *15* | *25* | *60* |
| **Максимум** | **34** | **26** | **40** | **100** |

***При цьому, кількість балів:***

* **1-34** відповідає оцінці «незадовільно» з обов’язковим повторним вивченням дисципліни;
* **35-59** відповідає оцінці «незадовільно» з можливістю повторного складання;
* **60-64** відповідає оцінці «задовільно» («достатньо»);
* **65-74** відповідає оцінці «задовільно»;
* **75 - 84** відповідає оцінці «добре»;
* **85 - 89** відповідає оцінці «добре» («дуже добре»);
* **90 - 100** відповідає оцінці «відмінно».

**Шкала відповідності** *(за умови іспиту)*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *За 100 – бальною шкалою* | *За національною шкалою* | |
| 90 – 100 | 5 | відмінно |
| 85 – 89 | 4 | добре |
| 75 – 84 |
| 65 – 74 | 3 | задовільно |
| 60 – 64 |
| 35 – 59 | 2 | незадовільно |
| 1 – 34 |

**Шкала відповідності** *(за умови заліку)*

|  |  |
| --- | --- |
| *За 100 – бальною шкалою* | *За національною шкалою* |
| 90 – 100 | Зараховано |
| 85 – 89 |
| 75 – 84 |
| 65 – 74 |
| 60 – 64 |
| 1 – 59 | не зараховано |

**ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**V СЕМЕСТР**

**Змістовий модуль 1. Постановка задач математичної фізики. Класифікація диференціальних рівнянь у частинних похідних**

**Тема 1.** **Фізичні процеси, що приводять до задач математичної фізики   
 (*10 год.*)**

*Розглядаються математичні моделі процесів розповсюдження коливань у різноманітних середовищах, які приводять до крайових задач для хвильового рівняння, процесів розподілу тепла у різних тілах, які приводять до крайових задач для рівняння теплопровідності, а також стаціонарні процеси: стаціо­нарний розподіл температури, електростатичне поле, стаціонарна течія рідині, які приводять до крайових задач для рівнянь Лапласа та Пуассона.*

**Тема 2.** **Класифікація лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних 2-го порядку *(6 год.)***

*Розглядаються загальні питання класифікацій лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку, класифікація лінійних диференці­альних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку з 2-ма незалеж­ними змінними та їх зведення до канонічної форми.*

**Змістовий модуль 2. Задача Коші для хвильового рівняння. Крайові задачі для нестаціонарних рівнянь**

**Тема 3. Задача Коші для хвильового рівняння (*10 год.*)**

*Розглядається загальна постановка класичної задачі Коші для хвильово­го рівняння, означення класичного розв’язку, методи побудови розв’язків задач Коші для однорідного та неоднорідного хвильових рівнянь, єдиність та неперервна залежність класичного розв’язку від даних задачі. Також розгляда­ються крайові задачі для хвильового рівняння у напівобмежених областях.*

**Тема 4. Крайові задачі для хвильового рівняння (*6 год.*)**

*Розглядається загальна постановка крайової задачі для хвильового рів­няння, означення класичного розв’язку такої задачі, його єдиність та неперерв­на залежність від даних задачі.*

**Тема 5. Крайові задачі для рівняння теплопровідності (*4 год.*)**

*Розглядається загальна постановка крайової задачі для рів­няння тепло­провідності, означення класичного розв’язку такої задачі, його єдиність та неперерв­на залежність від даних задачі.*

**VI СЕМЕСТР**

**Змістовий модуль 3. Метод Фур’є розв’язання крайових задач для нестаціонарних рівнянь**

**Самостійна робота з теми 6: Задача Штурма-Ліувілля.**

*(у період з 24 січня по 28 лютого* ***(8 год.*** *самостійної роботи****)***

**Тема 7. Метод Фур’є розв’язання крайових задач для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності на відрізку (*10 год.*)**

*Розглядаються загальні схеми методу Фур’є, які дозволяють розв’язу­вати крайові задачі для однорідних та для неоднорідних хвильового рівняння та рівняння теплопровідності, застосування цих схем до розв’язання крайових задач для нестаціонарних рівнянь на відрізку.*

**Тема 8. Метод Фур’є розв’язання крайових задач для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності у багатовимірних областях (*10 год.*)**

*Розглядається застосування методу Фур’є для розв’язання крайових задач для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності в багатовимірних областях, також розглядаються суміжні питання, пов’язані із криволінійними координатами, спеціальними функціями, що використовуються у багатовимірних областях.*

**Змістовий модуль 4 Крайові задачі для стаціонарних рівнянь**

**Тема 9.** **Гармонічні функції (*8 год.*)**

*Розглядаються гармонічні функції та їх основні властивості.*

**Тема 10.** **Крайові задачі для рівнянь Лапласа та Пуассона (*10 год.*)**

*Розглядаються загальні постановки крайових задач для рівнянь Лапласа та Пуассона, означення класичних розв’язків цих задач, теореми єдиності розв’язків, методи їх побудови.*

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ, ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ   
ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

V семестр

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №  теми | Назва теми | Кількість годин | | | | |
| Лекції | Практичні  заняття | Самост. робота | Контр. модульна робота | Інші  форми контролю |
| **Змістовий модуль 1. Постановка задач математичної фізики. Класифікація диференціальних рівнянь у частинних похідних** | | | | | | |
| 1 | Фізичні процеси, що приводять до задач математичної фізики | 10 | 2 | 20 |  |  |
| 2 | Класифікація лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних 2-го порядку | 6 | 4 | 10 | 2 |  |
| **Змістовий модуль 2. Задача Коші для хвильового рівняння. Крайові задачі для нестаціонарних рівнянь** | | | | | | |
| 3 | Задача Коші  для хвильового рівняння | 10 | 6 | 20 |  |  |
| 4 | Крайові задачі  для хвильового рівняння | 6 |  | 10 |  |  |
| 5 | Крайові задачі  для рівняння теплопровідності | 4 |  | 10 | 2 |  |
| Всього годин за V семестр | | 36 | 12 | 70 |  |  |

VI семестр

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №  теми | Назва теми | Кількість годин | | | | |
| Лекції | Практичні  заняття | Самост. робота | Контр. модульна робота | Інші  форми контролю |
| **Змістовий модуль 3. Метод Фур’є розв’язання крайових задач для нестаціонарних рівнянь** | | | | | | |
| 6 | *Самостійна робота* у період з 24 січня по 28 лютого:  Задача Штурма-Ліувілля |  |  | 8 |  |  |
| 7 | Метод Фур’є розв’язання крайових задач для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності на відрізку | 10 | 4 | 5 |  |  |
| 8 | Метод Фур’є розв’язання крайових задач для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності у багатовимірних областях | 10 | 2 | 5 |  |  |
| **Змістовий модуль 4 Крайові задачі для стаціонарних рівнянь** | | | | | | |
| 9 | Гармонічні функції | 8 |  | 8 |  |  |
| 10 | Крайові задачі для рівнянь Лапласа та Пуассона | 12 | 6 | 10 | 2 |  |
| Всього годин за VI семестр | | 40 | 6 | 36 |  |  |

**V СЕМЕСТР**

**Змістовий модуль 1. Постановка задач математичної фізики. Класифікація диференціальних рівнянь у частинних похідних**

**Тема 1.** **Фізичні процеси, що приводять до задач математичної фізики**  (10 год. лекцій)

1. Математичні моделі, що описують малі повздовжні коливання пружного стержня – 2 год.
2. Математична модель акустичних коливань – 2 год.
3. Математична модель, що описує розподіл тепла в стержні – 2 год.
4. Стаціонарні фізичні процеси та їх математичні моделі. – 2 год.
5. Основні типи задач математичної фізики. Поняття про коректність задач. – 2 год.
6. Постановка задач математичної фізики – 2 год.

*Самостійна робота* 20 год. (опрацювання лекційного матеріалу і виконання домашніх та індивідуальних завдань).

*Контрольні питання і завдання:*

1. Основні фізичні закони, що використовуються при описанні коливань стержня.
2. Запишіть хвильове рівняння.
3. Фізичний зміст початкових та крайових умов для хвильового рівняння.
4. Яка структура крайової задачі для хвильового рівняння?
5. Основні фізичні закони, що використовуються при описанні процесу розподілу тепла в стержні.
6. Запишіть рівняння теплопровідності.
7. Фізичний зміст початкових та крайових умов для рівняння теплопровідності.
8. Яка структура крайової задачі для рівняння теплопровідності?
9. Яка задача називається коректно поставлено?

**Тема 2. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних 2-го порядку** (6 год. лекцій)

1. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідними 2-го порядку в точці*.* – 2 год.
2. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідними 2-го порядку з 2-ма незалежними змінними у області*.* – 4 год.
3. Класифікація та зведення до канонічної форми лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. – 2 год.
4. Класифікація та зведення до канонічної форми лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку з 2-му незалежними змінними. – 2 год.

*Самостійна* *робота* 10год. (опрацювання лекційного матеріалу, виконання домашніх завдань та індивідуальних)

*Контрольні питання і завдання:*

1. Як визначається тип лінійного диференціального рівняння з частинними похідними 2-го порядку в точці? Які типи ви знаєте?
2. Як звести до канонічної форми лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами?
3. Як визначається тип лінійного диференціального рівняння з частинними похідними 2-го порядку з 2-ма незалежними змінними? Я виглядає канонічна форма рівняння в залежності від типу?
4. Як звести до канонічної форми лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними 2-го порядку з 2-ма незалежними змінними?

**Типове завдання модульної контрольної роботи № 1**

1. Поставити задачу про малі повздовжні коливання однорідного пружного стержня сталого поперечного перерізу, які викликані дією зовнішніх сил, прикладених по всій його довжині із масовою густиною , якщо з боку навколишнього середовища діє опір, пропорційний швидкості. Кінці стержня жорстко закріплені. В початковий момент часу точкам стержня були надані початкові відхилення, початкові швидкості відсутні. *Вивести рівняння задачі.*

2. Поставити задачу про розподіл температури в тонкому однорідному стержні сталого поперечного перерізу з теплоізольованою бічною поверхнею. На лівому кінці стержня заданий тепловий потік, а правий кінець затиснений у масивну клему з високою теплопровідністю та теплоємністю . В початковий момент часу температура провідника нульова. *Вивести крайові умови.*

Визначити типи рівнянь та звести їх до канонічної форми:

3. ;

4. .

**Змістовий модуль 2. Задача Коші для хвильового рівняння. Крайові задачі для нестаціонарних рівнянь**

**Тема 3. Задача Коші для хвильового рівняння** (10 год. лекцій)

1. Постановка задачі Коші. Означення класичного розв’язку. Задача Коші для однорідного хвильового рівняння з 1-ю просторовою змінною. Метод характеристик. Формула д’Аламбера. – 2 год.
2. Задача Коші для однорідного хвильового рівняння з 3-ма просторовими змінними. Метод усереднення. Формула Кірхгофа. – 2 год.
3. Задача Коші для неоднорідного хвильового рівняння. Метод Дюамеля*.* – 2 год.
4. Неперервна залежність класичного розв’язку задачі Коші для хвильового рівняння. – 2 год.
5. Крайові задачі для хвильового рівняння у напівобмежених областях, метод продовження. – 2 год.
6. Застосування методу характеристик до розв’язання задач Коші для хвильового рівняння. – 2 год.
7. Застосування методу характеристик до розв’язання задач Коші для рівнянь гіперболічного типу. – 2 год.
8. Крайові задачі для хвильового рівняння на півосі. – 2 год.

*Самостійна робота* 20год. (опрацювання лекційного матеріалу, виконання домашніх та індивідуальних завдань, розгляд питань:

1. Обґрунтування формули Кірхгофа.
2. Задача Коші для однорідного хвильового рівняння з 2-ма просторовими змінними. Метод спуску. Формула Пуассона.
3. Якісна картина розповсюдження коливань.)

*Контрольні питання і завдання:*

1. Запишіть постановку класичної задачі Коші для хвильового рівняння. Дайте означення розв’язку цієї задачі.
2. Запишіть формулу д’Аламбера.
3. Основна ідея методу Дюамеля?
4. Основна ідея методу характеристик.
5. Основна ідея методу продовження.

**Тема 4. Крайові задачі для хвильового рівняння** (6 год. лекцій)

1. Формули Гріна для оператора Лапласа. Загальна постановка крайової задачі для хвильового рівняння. Означення розв’язку задачі. Інтеграл енергії. – 2 год.
2. Єдиність та неперервна залежність розв’язку крайової задачі для хвильового рівняння від даних задачі. – 4 год.

*Самостійна робота* 10 год. (опрацювання лекційного матеріалу).

*Контрольні питання і завдання:*

1. Загальна постановка крайової задачі для хвильового рівняння.
2. Означення розв’язку крайової задачі для хвильового рівняння.
3. Інтеграл енергії. Лема про зображення інтегралу енергії через дані задачі.
4. Теорема про єдиність розв’язку крайової задачі для хвильового рівняння.
5. Теорема про неперервну залежність розв’язку крайової задачі для хвильового рівняння від даних задачі.

**Тема 5. Крайові задачі для рівняння теплопровідності** (4 год. лекцій)

1. Постановка основних крайових задач для рівняння теплопровідності. Означення розв‘язків задач. Принцип максимуму. – 2 год.
2. Єдиність та неперервна залежність класичного розв’язку І крайової задачі для рівняння теплопровідності. Єдиність класичного розв’язку крайової задачі для рівняння теплопровідності у загальному випадку. – 2год.

*Самостійна робота* 10 год. (опрацювання лекційного матеріалу).

*Контрольні питання і завдання:*

1. Постановка основних крайової задачі для рівняння теплопровідності.
2. Означення розв’язків крайових задач для рівняння теплопровідності.
3. Принцип максимуму для рівняння теплопровідності.
4. Теорема про єдиність розв’язку І крайової задачі для рівняння теплопровідності.
5. Теорема про неперервну залежність розв’язку І крайової задачі для рівняння теплопровідності від даних задачі.
6. Теорема про єдиність розв’язку крайової задачі для рівняння теплопровідності у загальному випадку.

**Типове завдання модульної контрольної роботи № 2.**

1. Розв’язати задачу Коші методом характеристик  
    
2. Розв’язати задачу Коші методом характеристик



1. Розв’язати крайову задачу та визначити умови, за яких вона матиме класичний розв’язок

****

**Перелік питань на залік за V семестр**

1. Малі повздовжні коливання пружного стержня: виведення рівняння, початкові та крайові умови.
2. Акустичні коливання: рівняння, початкові та крайові умови.
3. Розподіл тепла в стержні: виведення рівняння, початкові та крайові умови.
4. Розподіл тепла в об’ємному тілі: рівняння, початкові та крайові умови.
5. Стаціонарний розподіл тепла у тілі: рівняння та крайові умови.
6. Стаціонарна течія ідеальної нестисливої рідини: рівняння, крайові умови, умова поведінки на нескінченності.
7. Основні типи задач математичної фізики. Поняття про коректність.
8. Класифікація лінійних ДРЧП 2-го порядку в точці.
9. Зведення до канонічної форми лінійних ДРЧП 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.
10. Класифікація лінійних ДРЧП 2-го порядку з 2-ма незалежними змінними в області. Характеристики.
11. Зведення до канонічної форми лінійних ДРЧП 2-го порядку з 2-ма незалежними змінними гіперболічного, параболічного та еліптичного типів.
12. Постановка задачі Коші. Означення розв’язку.
13. Вільні коливання нескінченної струни або стержня, 1-вимірна задача Коші. Метод характеристик. Формула д’Аламбера.
14. Задача Коші для неоднорідного хвильового рівняння. Метод Дюамеля.
15. Єдність та неперервна залежність класичного розв’язку задачі Коші.
16. Якісна картина розповсюдження коливань у 1-, 2- та 3-вимірних середовищах. Принцип Гюйгенса, явище дифузії хвиль.
17. Крайові задачі для напівобмежених середовищ. Метод продовження.
18. Формули Гріна для оператора Лапласа.
19. Загальна постановка крайових задач для хвильового рівняння.
20. Означення розв’язку крайової задачі для хвильового рівняння.
21. Інтеграл енергії. Лема про зображення інтегралу енергії.
22. Єдиність розв’язку крайової задачі для хвильового рівняння.
23. Неперервна залежність розв’язку крайової задачі для хвильового рівняння від даних задачі.
24. Постановка основних крайових задач для рівняння теплопровідності.
25. Означення розв’язків крайових задач для рівняння теплопровідності
26. Принцип максимуму.
27. Єдиність та неперервна залежність розв’язку І крайової задачі для рівняння теплопровідності.
28. Єдиність розв’язку крайової задачі для рівняння теплопровідності у загальному випадку.

**Типовий приклад залікового завдання у V семестрі.**

**Варіант 1**

1. Запишіть загальну постановку крайової задачі для хвильового рівняння.
2. Дайте означення класичного розв’язку І крайової задачі для рівняння теплопровідності.
3. Поставити задачу про розподіл температури в тонкій однорідній проволоці, яка має форму кільця, а на бічній поверхні якої відбувається теплообмін з навколишнім середовищем відомої температури. Проволока нагрівається за допомогою внутрішніх джерел тепла. В початковий момент часу температура проволоки відома.
4. Визначити тип рівняння та звести його до канонічної форми



1. Розв’язати крайову задачу



**Варіант 2**

1. Запишіть постановку задачі Коші для хвильового рівняння.
2. Сформулюйте принцип максимуму для рівняння теплопровідності.
3. Поставити задачу про малі повздовжні коливання однорідного пружного стержня, якщо один з його кінців закріплений жорстко, а на інший діє зовнішня сила опору, пропорційна швидкості.
4. Визначити тип рівняння та звести його до канонічної форми.

.

1. Розв’язати крайову задачу



та встановити умови існування розв’язку.

**VI СЕМЕСТР**

**Змістовий модуль 3. Метод Фур’є розв’язання крайових задач для   
нестаціонарних рівнянь**

**Самостійна робота у період з 24 січня по 28 лютого.**

**Тема 6. Задача Штурма-Ліувілля**. (8 год. самостійної роботи)

*Самостійне завдання 1*. Опрацювати: Глава V. Краевые задачи для уравнений эллиптического типа. § 5.1. Задачи на собственные значения. [1, стр. 327-336] або [2, стр. 243-251].

*Самостійне завдання 2*. Опрацювати: Глава V. Краевые задачи для уравнений эллиптического типа. § 5.2. Задача Штурма-Лиувилля. [1, стр. 336-345] або [2, стр. 252-258].

*Самостійне завдання 3*. Опрацювати: Глава X. Применение метода Фурье. § 5. Общая схема метода Фурье. [4, стр. 129-133].

*Самостійне завдання 4*. Розв’язати задачі Штурма-Ліувілля з усіма комбінаціями крайових умов на кінцях відрізка.

**Тема 7. Метод Фур’є розв’язання крайових задач для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності на відрізку** (10 год. лекцій)

1. Крайові задачі для однорідних нестаціонарних рівнянь на відрізку. Загальна схема 1 методу Фур’є. Вільні коливання обмеженої струни, власні частоти коливань, форми власних коливань. – 2 год.
2. Розподіл тепла всередині теплоізольованого стержня, в якому відсутні внутрішні джерела тепла. – 2 год.
3. Крайові задачі для неоднорідних нестаціонарних рівнянь на відрізку. Загальна схема 2 методу Фур’є. Вимушені коливання обмеженої струни під дією зовнішньої періодичної сили. Явище резонансу. – 2 год.
4. Розподіл тепла всередині теплоізольованого стержня, в якому діють внутрішні джерела тепла. – 2 год.
5. Реалізація методу Фур’є для розв’язання крайових задач на відрізку з неоднорідними крайовими умовами. Вимушені коливання пружного стержня, на один кінець якого діє зовнішня сила. – 2 год.
6. Застосування методу Фур’є до розв’язання крайових задач для однорідних нестаціонарних рівнянь на відрізку. – 2 год.
7. Застосування методу Фур’є до розв’язання крайових задач для неоднорідних нестаціонарних рівнянь на відрізку. – 2 год.

*Самостійна робота* 5год. (опрацювання лекційного матеріалу, виконання індивідуальних завдань).

*Контрольні питання і завдання:*

1. Постановка задачі Штурма-Ліувілля. Означення власних чисел та функцій.
2. Властивості власних чисел та функцій задачі Штурма-Ліувілля.
3. Розвинення функцій у ряди Фур’є за системами власних функцій задач Штурма-Ліувілля.
4. Загальна схема методу Фур’є на відрізку у випадку однорідного рівняння.
5. Загальна схема методу Фур’є на відрізку у випадку неоднорідного рівняння.
6. Застосування методу Фур’є до крайових задач на відрізку із неоднорідними крайовими умовами.

**Тема 7.** **Метод Фур’є розв’язання крайових задач для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності у багатовимірних областях** (10 год. лекцій)

1. Крайові задачі для нестаціонарних рівнянь у прямокутних областях – 2 год.
2. Крайові задачі для нестаціонарних рівнянь в крузі: полярні координати, відокремлення змінних, задача на власні значення та власні функції з умовою періодичності. – 2 год.
3. Функції Бесселя та їх властивості. – 2год.
4. Вільні коливання круглої мембрани, розподіл тепла в циліндрі: розв’язки методом Фур’є – 2 год.
5. Радіальні коливання та радіальний розподіл тепла всередині кулі. – 2 год.
6. Знаходження матриці лінійного відображення, його ядра та образу, зміна матриці при зміні базисів. – 2 год.

*Самостійна робота*5 год. (опрацювання лекційного матеріалу, виконання домашніх та індивідуальних завдань).

*Контрольні питання і завдання:*

1. В чому особливість реалізації методу Фур’є при розв’язанні крайових задач в прямокутнику?
2. Що таке полярні, циліндричні та сферичні координати?
3. В чому особливість реалізації методу Фур’є при розв’язанні крайових задач в крузі?
4. В чому особливість реалізації методу Фур’є при розв’язанні крайових задач в циліндрі?
5. В чому особливість реалізації методу Фур’є при розв’язанні крайових задач в кулі (радіально-симетричний випадок)?

**Типове завдання модульної контрольної роботи № 3.**

Розв'язати крайові задачі методом Фур'є

1.   


2.   


**Змістовий модуль 4. Крайові задачі для стаціонарних рівнянь**

**Тема 9. Гармонічні** **функції**. (8 год. лекцій)

1. Формула Гріна інтегрального зображення двічі неперервно-диференційованої функції. – 2 год.
2. Гармонічні функції. Теорема про середнє. Принцип максимуму та наслідки з нього. Диференційованість. – 2 год.
3. Гармонічна функція всередині кулі та круга, формула Пуассона. – 2 год.
4. Теорема про усувну особливість. Аналог теореми Ліувілля. Перетворення Кельвіна. Поведінка гармонічної функції на нескінченності. – 2 год.

*Самостійна робота* 8 год. (опрацювання лекційного матеріалу і виконання домашніх завдань)

*Контрольні питання і завдання:*

1. Означення гармонічної функціє.
2. Принцип максимуму для гармонічних функцій.
3. Диференційованість гармонічних функцій.
4. Теорема про усувну особливість.
5. Поведінка гармонічної функції на нескінченності

**Тема 10. Крайові задачі для рівнянь Лапласа та Пуассона**. (12 год. лекцій)

1. Постановка внутрішніх та зовнішніх задач Діріхле та Неймана. – 2 год.
2. Теореми єдиності розв’язків внутрішніх та зовнішніх задач Діріхле та Неймана. – 2 год.
3. Рівняння Лапласа у сферичних координатах. Поліноми Лежандра та їх властивості. – 2 год.
4. Функція Гріна крайових задач для рівнянь Пуассона та Лапласа. Методи побудови функцій Гріна. – 2 год.
5. Означення об’ємного потенціалу та потенціалів простого і подвійного шарів. Властивості потенціалів. – 2 год.
6. Розрив потенціалу подвійного шару на поверхні. Розрив нормальної похідної потенціалу простого шару. Зведення внутрішніх та зовнішніх задач для рівняння Лапласа до інтегральних рівнянь. – 2 год.
7. Розв’язання крайових задач для рівняння Лапласа в прямокутнику. – 2 год.
8. Розв’язання крайових задач для рівняння Лапласа всередині та зовні круга – 2 год.
9. Розв’язання крайових задач для рівняння Лапласа всередині та зовні кулі – 2 год.

*Самостійна робота* 10 год. (опрацювання лекційного матеріалу, виконання домашніх та індивідуальних завдань).

*Контрольні питання і завдання:*

1. Постановка основних крайових задач для рівнянь Лапласа та Пуассона.
2. Теореми єдиності розв’язків крайових задач для рівнянь Лапласа та Пуассона.
3. Означення функції Гріна крайових задач для рівнянь Пуассона та Лапласа.
4. Означення об’ємного потенціалу та потенціалів простого і подвійного шарів.
5. Властивості потенціалів.

**Типове завдання модульної контрольної роботи № 4.**

Розв’язати методом Фур’є

1.    


2.    


**Перелік питань до іспиту за VI семестр**

1. Малі повздовжні коливання пружного стержня: виведення рівняння, початкові та крайові умови.
2. Акустичні коливання: рівняння, початкові та крайові умови.
3. Розподіл тепла в стержні: виведення рівняння, початкові та крайові умови.
4. Розподіл тепла в об’ємному тілі: рівняння, початкові та крайові умови.
5. Стаціонарний розподіл тепла у тілі: рівняння та крайові умови.
6. Стаціонарна течія ідеальної нестисливої рідини: рівняння, крайові умови, умова поведінки на нескінченності.
7. Основні типи задач математичної фізики. Поняття про коректність.
8. Класифікація лінійних ДРЧП 2-го порядку в точці.
9. Зведення до канонічної форми лінійних ДРЧП 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.
10. Класифікація лінійних ДРЧП 2-го порядку з 2-ма незалежними змінними в області. Характеристики.
11. Зведення до канонічної форми лінійних ДРЧП 2-го порядку з 2-ма незалежними змінними гіперболічного, параболічного та еліптичного типів.
12. Постановка задачі Коші. Означення розв’язку.
13. Вільні коливання нескінченної струни або стержня, 1-вимірна задача Коші. Метод характеристик. Формула д’Аламбера.
14. Задача Коші для неоднорідного хвильового рівняння. Метод Дюамеля.
15. Єдність та неперервна залежність класичного розв’язку задачі Коші.
16. Крайові задачі для напівобмежених середовищ. Метод продовження.
17. Загальна постановка крайової задачі для хвильового рівняння. Означення розв’язку. Інтеграл енергії.
18. Єдиність розв’язку крайової задачі для хвильового рівняння.
19. Неперервна залежність класичного розв’язку крайової задачі для хвильового рівняння.
20. Загальна постановка основних крайових задач для рівняння теплопровідності. Означення розв’язків.
21. Принцип максимуму для рівняння теплопровідності.
22. Єдиність та неперервна залежність розв’язку І крайової задачі для рівняння теплопровідності.
23. Єдиність розв’язку крайової задачі для рівняння теплопровідності у загальному випадку.
24. Основна ідея методу Фур’є.
25. Постановка задачі Штурма-Ліувілля. Властивості оператора Штурма-Ліувілля.
26. Елементарні властивості власних чисел та власних функцій задачі Штурма-Ліувілля.
27. Функція Гріна задачі Штурма-Ліувілля.
28. Зведення задачі Штурма-Ліувілля до інтегрального рівняння.
29. Теорема Стєклова, теорема про повноту системи власних функцій.
30. Крайові задачі для однорідних нестаціонарних рівнянь на відрізку. Схема 1 методу Фур’є.
31. Крайові задачі для неоднорідних нестаціонарних рівнянь на відрізку. Схема 2 методу Фур’є.
32. Крайові задачі для нестаціонарних рівнянь у прямокутних областях. Узагальнення методу Фур’є на багатовимірний випадок.
33. Формула Гріна інтегрального зображення двічі неперервно-дифе­ренційо­ваної функції.
34. Гармонічні функції. Теорема про середнє.
35. Принцип максимуму та наслідки з нього.
36. Диференційованість. Теорема про усувну особливість. Аналог теореми Ліувілля.
37. Перетворення Кельвіна.
38. Поведінка гармонічної функції на нескінченності.
39. Постановка внутрішніх та зовнішніх задач Діріхле та Неймана.
40. Теореми єдиності розв’язків внутрішніх та зовнішніх задач Діріхле та Неймана на площині та у просторі.
41. Функція Гріна крайових задач для рівняння Пуассона.
42. Означення об’ємного потенціалу та потенціалів простого і подвійного шарів.
43. Властивості потенціалів.
44. Розрив потенціалу подвійного шару на поверхні.
45. Розрив нормальної похідної потенціалу простого шару.
46. Зведення внутрішніх та зовнішніх просторових задач для рівняння Лапласа до інтегральних рівнянь.

**Типовий білет для іспиту в другому семестрі**

**Варіант 1**

1.  Вільні коливання нескінченної струни або стержня, 1-вимірна задача Коші. Метод характеристик. Формула д’Аламбера.

2.  Принцип максимуму для гармонічних функцій.

3. Розв’язати крайову задачу



4. Розв’язати крайову задачу



**Варіант 2**

1.  Єдиність розв’язку крайової задачі для рівняння теплопровідності у загальному випадку.

2.  Функція Гріна крайових задач для рівняння Пуассона.

3. Розв’язати крайову задачу



4. Розв’язати крайову задачу



**Рекомендована література**

**Базова:**

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1985.
2. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: Учебник для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Физматгиз, 1962.
4. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966.
6. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1980.
7. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1982.
8. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Рівняння математичної фізики" для студентів механіко-математичного факультету, які навчаються за напрямом підготовки "Механіка" / Упорядники: А.В. Ловейкін, А.П. Креневич, Г.В. Верьовкіна. – Видавничо-полігра­фічний центр "Київський університет". – Київ, 2014.

**Додаткова:**

1. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. Курс лекцій. – К.: Либідь, 1993.
2. Гончаренко В.М. Основы теории уравнений в частных производных. – К.: Вища школа, 1985.
3. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979.
4. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968.
5. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969.