Cheatsheet Analysis 1

Amos Herz

FS 2021

1 Komplexe und Reelle Zahlen

1.1 Archimedisches Prinzip

Archimedisches Prinzip

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq n \cdot x$.

1.2 Supremum und Infimum

Definition: $A \subset \mathbb{R}$ heisst von oben [unten] beschränkt falls es $x \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $x \geq a$ [$x \leq a$] für alle $a \in A$. x heisst dann obere [untere] Schranke von A. Falls $x \in A$ und x obere [untere] SChranke von A, ist x das Maximum [Minimum] von A.

Supremum und Infimum

Falls $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ v.o.b [v.u.b] ist, gibt es eine kleinste obere Schranke [grösste untere Schranke] x von A. x heisst dann Supremum [Infimum] von A.

2 Folgen und Reihen

2.1 Konvergenz mit ϵ-Def

Definition

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen L
$\iff \lim_{n\to\infty} a_n = L$ (i.e. $\exists L \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0$ die Menge $n \in \mathbb{N} : a_n \notin]L-\epsilon, L+\epsilon[$ endlich ist)
$\iff \forall \epsilon > 0\ \exists N > 1\ \forall n \geq N :\ |a_n - L| < \epsilon$.

Wir dürfen (o.B.d.A.) annehmen, dass ϵ durch eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ beschränkt ist.

Divergenz

Eine Folge a_n ist divergent (notiert $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$) falls:

$$\forall K > 0 \exists N = N(K) \in \mathbb{N}, \text{ sodass } \forall n \geq N : |a_n| > K$$

2.2 Konvergenz con Folgen

Bemerkung: konvergent $\implies$ beschränkt, aber nicht umgekehrt!
Bemerkung: (a_n) konvergent $\iff$ (a_n) beschränkt **und** $\liminf a_n = \limsup a_n$

Einschliessungskriterium

Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ und $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \geq k$, dann $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$.

Weierstrass

- Sei a_n monoton wachsend und nach oben beschränkt $\Rightarrow a_n$ konvergiert mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n :\ n \geq 1\}$.
- a_n monoton fallend und nach unten beschränkt $\Rightarrow a_n$ konvergiert mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n :\ n \geq 1\}$.

Cauchy-Kriterium

Eine Folge (a_n) heisst **Cauchy-Folge** falls $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1$ sodass $\forall n, m \geq N_\epsilon$ impliziert, dass $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Bemerkung: Für eine Cauchy-Folge (a_n) gilt:

- (a_n) cauchy $\Rightarrow$ (a_n) beschränkt
- (a_n) cauchy $\Leftrightarrow$ (a_n) konvergent

2.3 Teilfolge

Eine Teilfolge von a_n ist eine Folge b_n wobei $b_n = a_{l(n)}$ und l eine Funktion mit $l(n) < l(n+1) \quad \forall n \geq 1$ (z.B. $l = 2n$ für jedes gerade Folgenglied).

Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

2.4 Limes Superior und Limes Inferior

Limes superior & inferior

$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m\geq n} x_m\right)$
$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{m\geq n} x_m\right)$

2.5 Strategie - Konvergenz von Folgen

1. Bei Brüchen: Grösste Potenz von n kürzen. Alle Brüche der Form $\frac{a}{n^a}$ streichen, da diese nach 0 gehen wenn $n \to 0$.
2. Bei Wurzeln in Summe im Nenner: Multiplizieren des Nenners und Zählers mit der Differenz der Summe im Nenner. (z.B. $(a+b)$ mit $(a-b)$ multiplizieren)
3. Bei rekursiven Folgen: Anwendung von Weierstrass zur monotonen Konvergenz
4. Einschliessungskriterium (Sandwich-Theorem) anwenden.
5. Mit bekannter Folge vergleichen.
6. Grenzwert durch einfaches Umformen ermitteln.
7. Limit per Definition der Konvergenz zeigen.
8. Anwendung des Cauchy-Kriteriums.
9. Suchen eines konvergenten Majorant.
10. Weinen und die Aufgabe überspringen.

2.6 Strategie - Divergenz von Folgen

1. Suchen einer divergenten Vergleichsfolge.
2. Bei alternierenden Folgen: Zeige, dass Teilfolgen nicht gleich werden ($\lim_{n\to\infty} a_{p1(n)} \neq \lim_{n\to\infty} a_{p2(n)}$), mit z.B. gerade/ungerade als Teilfolgen.

2.7 Reihe Konvergenz Definition

Definition

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist **konvergent**, falls die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall definirien wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$$

2.8 Reihenarithmetik

Reihenarithmetik

Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent sind, dann gilt:

- $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + (\sum_{k=1}^{\infty} b_k)$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

2.9 Absolute Konvergenz

Definition

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst **absolut konvergent**, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Eine absolut konvergente Reihe ist auch konvergent, es gilt

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

.

2.10 Konvergenz von Reihen

Cauchy-Kriterium für Reihen

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, falls

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1 \text{ mit } |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \epsilon,\ \forall m \geq n > N$$

.

Nullfolgenkriterium

Wenn für eine Folge $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$ ist, dann divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Proof: a_n konvergiert $\Rightarrow s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ konvergiert. Das heisst, es existiert ein Grenzwert s, sodass $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

Vergleichssatz

Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit $0 \leq a_k \leq b_k, \forall k \geq K \geq 1$ sind, so gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

Als Vergleichsreihe (Majorant / Minorant) eignet sich oft eine Reihe der folgenden Kategorien:

- **Geometrische Reihe:** $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergiert für $|q| \geq 1$ und konvergiert zu $\frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$
- **Zeta-Funktion** $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ divergiert für $s \leq 1$ und konvergiert für $s > 1$.

Des weiteren gilt folgendes:

- Sei $(S_n) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ mit $|q| < 1$, dann ist (S_n) konvergent und $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$,
  $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$
- $(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ konvergiert

Leibnizkriterium

Wenn $a_n \geq 0, \forall n \geq 1$ monoton fallend und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist, dann konvergiert $S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ und $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$.

Quotienten-/Wurzelkriterium

Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq 0 \; \forall n \geq 1$. Sei:

- $q = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$
- $q = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Falls gilt:

- $q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.
- $q = 1 \Rightarrow$ keine Aussage.
- $q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

2.11 Potenzreihen

Definition: Eine Potenzreihe ist eine Reihe von der Form $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot z^k$, wobei $(c_k)_{k\geq 0}$ eine Folge ist.

Konvergenzradius

Der Konvergenzradius ρ einer Potenzreihe entrspricht:

$$\rho \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

DIe Potenzreihe konergiert absolut für alle $|z| < \rho$ und divergiert für alle $|z| > \rho$. Der Fall $|z| = \rho$ musst jeweils noch separat geprüft werden.
EIne Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius ρ konvergiert gleichmässig auf $[-\rho, \rho]$, inbesondere ist $f :]-\rho, \rho[\to \mathbb{R}$ stetig.

2.12 Doppelreihen

Definition: Gegeben eine Doppelfolge $(a_{ij})_{i,j\geq 0}$ so können $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = A_0 + A_1 + ...$ und $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} = B_0 + B_1 + ...$ beide konvergent sein mit verschiedenen Grenzwerten. Wir nennen $\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}$ eine Doppelreihe. Wenn die Reihe bsolut konvergiert, so sind beide Grenzwerte gleich und jere Anordnung knvergiert zum selben Grenzwert.

Das Cauchy Produkt

Das Cauchy Produkt zweier Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ ist die Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(a_{n-j} \cdot b_j) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + ...$$

Falls beide Reihen **absolut** konvergieren, so konvergiert auch das Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}b_j\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$$

2.13 Integral Test

Integral Test

Sei $f(x)$ eine stetige, positive und monoton fallende Funktion auf $[k, \infty[$ und $f(n) = a_n$:

$$\int_k^{\infty} f(x)\,dx \text{ konvergiert } \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

$$\int_k^{\infty} f(x)\,dx \text{ divergiert } \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

2.13.1 Strategie - Konvergenz von Reihen

1. Ist der Partialsummen nach oben beschränkt? Wenn Ja, konvergiert die Reihe
2. Ist Reihe ein bekannter Typ? (Teleskopieren, Geometrische/Harmonis Reihe, Zetafunktion, ...)
3. Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$? Wenn nein, divergiert die Reihe (*Nullfolgekriterium*)
4. Quotientenkriterium & Wurzelkriterium anwenden
5. Vergleichssatz anwenden, Vergleichsreihen suchen
6. Leibnizkriterium anwenden

3 Funktionen und Stetigkeit

3.1 Stetigkeit Definitionen

Sei $f : D \to \mathbb{R}^d, x \to f(x)$ eine Funktion in $D \subseteq \mathbb{R}^d$.

Definition

f ist in $x_0 \in D$ stetig, falls für jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ folgendes gilt:

$$f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

f ist stetig auf D, falls sie in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.

ϵ-Definition

Punktweise stetig: $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in einem Punkt x_0 falls:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Gleichmässig stetig:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Bemerkung: In der punktweisen Stetigkeit ist das δ von x_0 und ϵ abhängig ($delta(\epsilon, x_0)$), während in der gleichmässigen Stetigkeit das δ nur von ϵ abhängen darf ($\delta(\epsilon)$).

Falls f und g den gleichen Definitions-/Bildbereich haben und in x_0 stetig sind, dann sind auch

$$f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g, \frac{f}{g}, |f|, \max(f, g), \min(f, g)$$

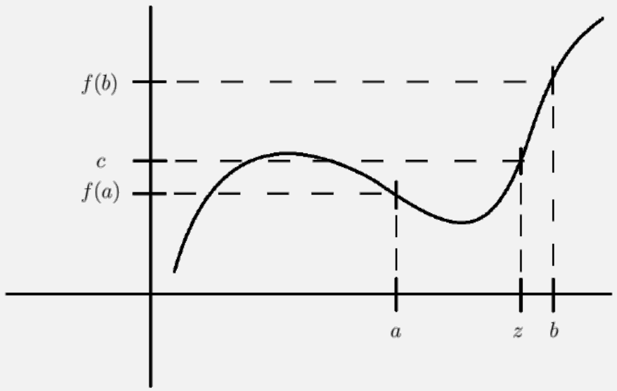
stetig in x_0.

Bemerkung: Polynomiale Funktionen und trigonometrsiche (sin und cos) Funktionen) sind auf $\mathbb{R}$ stetig.

3.2 Zwischenwertsatz

Zwischenwertsatz

Wenn $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $a, b \in I$ ist, dann gibt es für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $a \leq z \leq b$ mit $f(z) = c$.



Wird häufig verwendet um zu zeigen, das eine Funktion einen gewissen Wert annimmt.

Daraus folgt, dass ein Polynom mit ungeradem Grad mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt.

3.3 Min-Max Satz

Ein Intervall $I \in \mathbb{R}$ ist kompakt, falls es von der Form $I = [a, b]$ mit $a \leq b$ ist.

Min-Max-Satz
Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I. Dann gibt es $u, v \in I$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v), \forall x \in I$$

Insbesondere ist f **beschränkt**.

3.4 Satz über die Umkehrabbildung

Satz über die Umkehrabbildung
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton und sei $J = f(I) \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $f^{-1} : J \to I$ stetig und streng monoton.

Stetigkeit der Verknüpfung
Sei $f : D_1 \to D_2, g : D_2 \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D_1$. Falls f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig ist, dann ist $g \bigcirc f : D_1 \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig.

Die reelle Exponentialfunktion
$\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv. Auch die Umkehrfunktion $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ hat diese Eigenschaften.

3.5 Konvergenz von Funktionenfolgen

Punktweise Konvergenz
Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ falls für alle $x \in D$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Alternativ:

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in D, \exists N \geq 1, \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Gleichmässige Konvergenz
Die Folge (f_n) konvergiert gleichmässig in D gegen f falls gilt

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N,\ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Die Funktionenfolge (g_n) ist gleichmässig konvergent, falls für alle $x \in D$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ existiert und die Folge (g_n) gleichmässig gegen g konvergiert.

Bemerkung: In uniform convergence, N does **not** depend on x, we hve to find one which works for all x. On the other hand, for pointwise convergence, N can depend on both ϵ and x.

Bemerkung: Wenn eine Funktionenfolge aus stetigen Funktionen besteht und gleichmässig gegen eine Funktion f konvergiert, dann ist f stetig.

3.5.1 Strategie: Konvergenz von Funktionenfolgen

1. Punktweiser Limes von f_n auf D finden.
2. Prüfe auf gleichmässige Konvergenz:
   - i Indirekte Methode: f unstetig bedeutet keine gleichmässige Konvergenz, f stetig, monoton wachsend und D kompakt bedeuted gleichmässige Konvergenz.
   - ii Direkte Methode: Berechne $sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)|$ (evtl. Ableitung von $|f_n(x) - f(x)|$ gleich Null setzen). Danach Limes für $n \to \infty$ von $sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)|$ berechnen, falls dieser Null ist, so konvergiert f_n gleichmässig.
3. Prüfe auf **nicht** gleichmässige Konvergenz:
   (a) Assume $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
   (b) Choose x and n for which $|f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon$ for some ϵ.

3.6 Konvergenz von FunktionenReihen

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig, falls die durch $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

Sei f_n eine Folge stetiger Funktionen. Ausserdem ist $|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmässig und deren Grenzwert ist eine in D stetige Funktion.

3.7 Potenzreihen

Potenzreihe
Potenzreihen sind Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 wird als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ definiert.

Konvergenzradius
Der Konvergenzradius einer Potenzreihe um einen Entwicklungspunkt x_0 ist die grösste Zahl r, so dass die Potenzreihe für alle x mit $|x - x_0| < r$ konvergiert. Falls die Reihe für alle x konvergiert, ist der Konvergenzradius r unendlich. Sonst:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

3.7.1 Definitionen per Potenzreihen

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad r = \infty$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad r = \infty$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad r = \infty$$

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \qquad r = 1$$

3.8 Grenzwerte von Funktionen

Häufungspunkt
$x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt der Menge D falls:

$$\forall \delta > 0 : (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}) \cap D \neq \varnothing$$

Grenzwert - Funktionen
Wenn $f : D \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D ist, dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$ ($\lim_{x\to x_0} f(x) = A$), falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$, so dass:

$$\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}) : |f(x) - A| < \epsilon$$

Alternativ:

$$|f(x) - A| < \epsilon \text{ whenever } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Beispiel: Prove that $\lim_{x\to 1}(x^2 + 3) = 4$.
Proof: Begin by letting $\varepsilon > 0$ be given. Find $\delta > 0$ (dependent on ε) so that if $0 < |x-1| < \delta$, then $|f(x)-4| < \varepsilon$. Begin with $|f(x)-4| < \varepsilon$ and solve for $|x - 1|$.
$\Rightarrow \ldots \Rightarrow |x - 1||x + 1| < \varepsilon$.
Assume now $\delta \leq 1 \Rightarrow |x-1| < \delta \leq 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$ so that $1 < |x + 1| < 3$.
Follows $|x - 1||x + 1| < |x - 1| \cdot 3 < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \frac{\epsilon}{3}$.
Take now $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{3}\}$. Thus if $0 < |x - 1| < \delta$, it follows that $|f(x) - 10| < \epsilon$.

Limes $\to -\infty / +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}[\lim_{x\to+\infty}]f(x) = L$$

$$\Leftrightarrow |f(x) - L| < \epsilon\ \forall x \in D \text{ with } x < K[x > K]$$

3.9 Linksseitiger und Rechtsseitiger Grenzwert

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von $D\cap]x_0, +\infty[$. Falls der Grenzwert der eingeschränkten Funktion f im Bereich $D\cap]x_0, +\infty[$ für $x \to x_0$ existiert, wird er mit $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ bezeichnet und nennt sich **rechtsseitiger Grenzwert** von f bei x_0. Das Analoge gilt für

den **linksseitigen Grenzwert**.
Wir erweitern diese Definition auf $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap]x_0, x_0+\delta[: f(x) < \frac{1}{\epsilon}$$

und analog für $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap]x_0, x_0+\delta[: f(x) < \frac{1}{-\epsilon}$$

Für den linksseitigen Grenzwert gilt das Analoge.
Alternativ: Man sagt $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ falls gilt:

$$\forall \epsilon\ \exists \delta\ |f(x) - L| < \epsilon \text{ whenever } 0 < x - a < \delta \text{ (oder } a < x < a + \delta)$$

Man sagt $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ falls gilt:

$$\forall \epsilon\ \exists \delta\ |f(x) - L| < \epsilon \text{ whenever } -\delta < x - a < 0 \text{ (oder } a - \delta < x < a)$$

4 Ableitungen

4.1 Differenzierbarkeit

Differenzierbar
f ist **in x_0 differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Wenn dies der Fall ist, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ oder $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x0)$ bezeichnet. f ist **differenzierbar**, falls f für jedes Häufungspunkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist.

Bemerkung: Die Tangente zu x_0 ist definiert durch: $g(x) := f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Differenzierbarkeit nach Weierstrass
$f : D \to R$ ist in x_0 differenzierbar (x_0 Haufungspunkt von D) $\iff$ Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \to \mathbb{R}$ mit:

1. $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
2. $r(x_0) = 0$, r stetig in x_0.

Falls f differenzierbar ist, dann ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.

Variation: Eine kunktion f ist genau dann in x_0 differenzierbar falls eine Funktion $\phi(x) = f'(x_0) + r(x)$ gibt, so dass $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$, $\forall x \in D$ und ϕ in x_0 stetig ist. In diesem fall gilt $\phi(x_0) = f'(x_0)$.

Bemerkung: Die Tangentengleichung von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Höhere Ableitungen

1. Für $n \geq 2$ ist f n-mal differenzierbar in D falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ die n-te Ableitung von f.
2. f ist n-mal stetig differenzierbar in D, falls sie n-mal differenzierbar und $f^{(n)}$ in D stetig ist.
3. f ist in D glatt, falls sie $\forall n \geq 1$ n-mal differenzierbar ist ("unendlich differenzierbar").

Bemerkung: $\exp(x), \sin(x), \cos(x), \sinh(x), \cosh(x), \tanh(x), \ln(x), \arcsin(x), \arccos(x), \mathrm{arccot}(x), \arctan(x)$ und alle Polynome sind glatte Funktionen. $\tan(x)$ ist auf $\mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi\}$, $\cot(x)$ auf $\mathbb{R}\backslash\{k\pi\}$ glatt.
Zeigen, dass eine Funktion in x_0 nicht differenzierbar ist:

- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$
- f nicht stetig in $x_0 \Rightarrow f$ nicht differenzierbar in x_0
- $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Beispiel: Zeige, dass $\sqrt{x}$ nicht in $x_0 = 0$ differenzierbar ist: $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$, daher nicht differenzierbar in $x_0 = 0$.

4.2 Ableitungsregeln

Linearität der Ableitung
$(\alpha \cdot f(x) + g(x))' = \alpha \cdot f'(x) + g'(x)$

Produktregel
$(f(x) + g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Quotientenregel
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Kettenregel
$(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$

Potenzregel
$(c \cdot x^a)' = c \cdot a \cdot x^{a-1}$

Umkehrfunktion
Sei $f(x)$ differenzierbar und invertierbar.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Rule de L'Hôpital
Für Grenzwerte, die auf einen unbestimmten Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ führen, gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.3 Hohereableitungsregeln

Sei $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar.

Linearität der Ableitung
$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

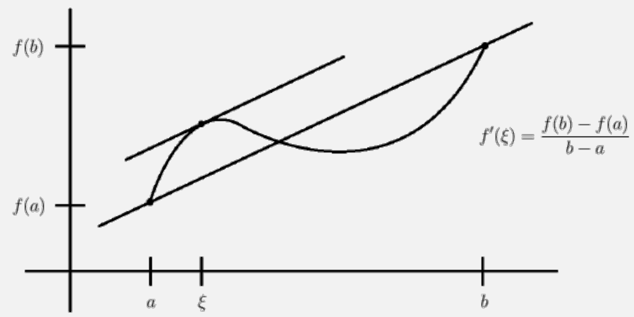
Produktregel
$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$

Bemerkung: $\frac{f}{g}$ ist n-mal differenzierbar falls $g(x) \neq 0, \forall x \in D$ und $(g \circ f)$ ist n-mal differenzierbar.

4.4 Sätze zur Ableitung

Satz von Rolle
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Wenn $f(a) = f(b)$, dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

Mittelwertsatz (Lagrange)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in]a, b[$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



4.5 Taylorreihen

Jede glatte, d.h. beliebig oft differenzierbare, Funktion $f \in C^\infty$ kann als Potenzreihe angenähert werden.

Taylor-Polynom
Das n-te Talyor-Polynom $T_n f(x; a)$ an einer Entwicklungsstelle a ist definiert als:

$$T_n f(x; a) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^k$$

$= f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2} \cdot (x - a)^2 + \ldots$
mit Rest:

$$\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)}(x - a)^{n+1} \text{ für ein } \xi \in]a, x[$$

Taylorreihe
Die unendliche Reihe

$$Tf(x;a) := T_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

wird Taylorreihe von f an Stelle a genannt.

Bemerkung: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $p > 0$. Dann ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_l (x-x_0)^n$ auf $]x_0 - p, x_0 + p[$ differenzierbar und $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x-x_0)^{k-1}$ für alle $x \in]x_0 - p, x_0 + p[$.

4.6 Kurvendiskussion und Varie

4.7 Surjektivität und injektivität

Definition
Es seien X und Y Mengen, sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung.
Surjektivität: Die Abbildung f heißt surjektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ (mindestens) ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.
Injektivität: Die Abbildung f heißt surjektiv, wenn es zu jedem Element $y \in Y$ höchstens ein (also eventuell gar kein) Element $x \in X$ gibt, das darauf zielt, wenn also nie zwei oder mehr verschiedene Elemente der Definitionsmenge auf dasselbe Element der Zielmenge abgebildet werden: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Injektivität zeigen
f injektiv $\Leftrightarrow$ f streng monoton $\Leftrightarrow$ $f' > 0$ oder $f' < 0$.

Surjektivität zeigen

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ zeigen
2. Sei nun $y \in]a,b[$ beliebig. Wegen der Grenzwerte von f gilt: $\exists x_1 < x_2 : f(x_1) < y < f(x_2)$. Mit dem Zwischenwertsatz gilt dann: $\exists c \in [x_1, x_2] : f(c) = y$ und somit ist f surjektiv.

4.7.1 Konvexität und Konkavität

Definition
f ist [streng] konvex (auf I) falls f für alle $x \leq [<] y, x, y \in I$ und $\lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \quad \leq [<] \quad \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Bemerkungen

1. Die Summe zweier konvexer Funktionen ist konvex
2. f ist genau dann konvex, falls f für $x_0 \leq x \leq x_1$ in I gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

3. Die Funktion f ist genau dann [streng] konvex, falls f' [streng] monoton wachsend ist.

Bemerkung: Alle Aussagen gelten auch für **Konkavität**, wir müssen nur das Ungleichzeichen umkehren

4.7.2 Begriffe und Korollare

Es gilt:

- $f'(x) = 0 \forall x \Rightarrow f(x)$ konstant
- $f'(x) = g'(x) \forall x \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ s.t. $f(x) = g(x) + c$
- $f'(x) \geq (>)\ 0 \forall x \Rightarrow f(x)$ (strikt) monoton wachsend
- $f'(x) \leq (<)\ 0 \forall x \Rightarrow f(x)$ (strikt) monoton fallend

Kritische Punkte
Punkte in welchen $f'(x) = 0$ gilt oder $f'(x), f(x)$ nicht existieren, nennen wir kritische Punkte.

Bemerkung:

- n gerade und x_0 lokale Extremstelle $\Rightarrow f^{(n+1)}(x_0) = 0$
- n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ eine strikt lokale Minimalstelle
- n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ eine strikt lokale Maximalstelle

4.7.3 Komplette Kurvendiskussion

Symmetrie:

- Achsensymmetrisch/Gerade: $\forall x \in D : f(-x) = f(x)$
- Punktsymmetrisch/Ungerade: $\forall x \in D : f(-x) = -f(x)$

Grenzverhalten:

- Limes für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ bestimmen
- Limes für alle kritische Punkte bestimmen

Nullstellen:

- Punkte berechnen wo $f(x) = 0$ gilt
- Punkte bestimmen wo $f(0) = a$ gilt

Extremstellen:

1. Berechnung aller kritischen Punkte (u.a. (Grenz-) Werte des Intervalls)
2. Berechnung der ersten Ableitung und der Punkte, wo $f'(x_E) = 0$ gilt.
3. Berechnung der zweiten Ableitung und von $f''(x_E) = a$:
   - $a < 0$: lokales Maximum
   - $a > 0$: lokales Minimum
   - $a = 0$: keine Assage moglich

Settelpunkte: Berechnung der Punkte wo gilt:

- $f''(x_S) = 0$
- $f'''(x_S) \neq 0$
- $f'(x_S) \neq 0$

Wendelpunkte: Berechnung der Punkte wo gilt:

- $f''(x_W) = 0$
- $f'''(x_S) \neq 0$
- $f'(x_S) = 0$

Krümmung: Berechnung der Zweiten Ableitung:

- $f''(x) > 0 \to$ linksgekrümmt (konvex)
- $f''(x) < 0 \to$ rechtsgekrümmt (konkav)

5 Integrale

5.1 Riemann-Integral

Partitionierung
Wir teilen das Intervall $I = [a,b]$ in n Teilintervalle auf. Das gibt uns eine Menge von Grenzpunkten $x_0 ... x_n$. Es gilt also: $P := x_0 = a, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b$.
Ein Teilintervall I_i ist gegeben durch $I_i = [x_{i-1}, x_i]$.

Stützstelle
Aus jedem Teilintervall I_i wählen wir einen Punkt ξ_i. Das gibt uns die Menge der Stützstellen $\xi_1 ... \xi_n$.
$\xi = \xi_1 ... \xi_n$, wobei $\xi_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$.

Riemann-Summe
Gegeben sei eine stetige Funktion $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$, sowie eine Partitionierung P in n Teile und Stützstellen ξ. Dann ist die Riemannsche Summe definiert durch:

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Ober- und Untersumme
Mithilfe der Parition können wir nun die Unertsumme/Obersumme einer Funktion definirien:

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i, \quad f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta_i, \quad F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

wobei $\delta_i = x_i - x_{i-1}$.
Sei nun $\mathcal{P}(I)$ die Menge alle Partitionen von I, definieren wir:

$$s(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f,P) \text{ und } S(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f,P)$$

Riemann-integrierbar
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar, falls $s(f) = S(f)$. In diesem Fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert als:

$$s(f) := \int_a^b f(x)\ dx = S(f)$$

Alternativ: f ist genau dann integrierbar wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0, \exists P : |s(f,P) - S(f,P)| < \epsilon$$

Bemerkung: Sei $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ und $m = \max_{1\leq i\leq n}\{x_i - x_{i-1}\}$. Dann:

$$\lim_{m\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\delta_i = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

often benutzen wir $\delta_i = \frac{b-a}{n}$ und $\xi_i = a + \left(\frac{b-a}{n}\right) i$ so dass:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\delta_i$$

Bemerkung:

- f stetig in $[a,b] \implies f$ integrierbar über $[a,b]$
- f monoton in $[a,b] \implies f$ integrierbar über $[a,b]$

Wenn f, g beschränkt und integrierbar sind, dann sind

$$f+g, \lambda\cdot f, f\cdot g, |f|, \max(f,g), \min(f,g), \frac{f}{g}$$

integrierbar.

Beispiel: Zu zeigen: $f(x) = x^2, x\in[0,1]$ ist Riemann-inetgrierbar.
Beweis: Wählen wir $P = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ mit $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$
Da f wachsend in $[0,1]$ für $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$f_i = x_{k-1}^2 = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2, \quad F_i = x_k^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2, \quad \delta_i = \frac{1}{n}$$

Jetzt:

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} = \ldots = \frac{1}{3} - \frac{3n-1}{6n^2}$$

und

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} = \ldots = \frac{1}{3} + \frac{3n-1}{6n^2}$$

Da $s(f,P) \leq \frac{1}{3} \leq S(f,P)$ und $S(f,P) - s(f,P) = \frac{1}{n} \to 0$ für $n \to +\infty$, f ist Rieman-integrierbar.

5.2 Sätze & Umgleichungen

Umgleichungen

- $f(x) \leq g(x), \forall x\in[a,b] \to \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$
- $\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$
- $\left|\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\ \mathrm{d}x}$

Mittelwertsatz
Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

Daraus folgt auch, dass wenn $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ wobei f stetig, g beschränkt und integrierbar mit $g(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$ ist, dann gibt es:

$$\xi \in [a,b] \qquad \int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

5.3 Stammfunktionen

Stammfunktion
Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst Stammfunktion von f, falls F (stetig) differenzierbar in $[a,b]$ ist und $F' = f$ in $[a,b]$ gilt.

Bemerkung: "f integrierbar" impliziert *nicht*, dass eine Stammfunktion existiert. Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0 \\ 1, & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Hauptsatz Differential-/Integralrechnung
Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t, \ a \leq x \leq b$$

ist in $[a,b]$ stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$$

Eine äquivalente Darstellung wäre:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

.

5.4 Integrationsregeln

Sei $I \subset R$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

1. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten $a+c$, $b+c$ in I enthalten ist:
$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(t+c)\mathrm{d}t$$
2. Seien $a, b, c \in R$, sodass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten $a\cdot c, b\cdot c$ in I enthalten ist:
$$\int_a^b f(ct)\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)\ \mathrm{d}x$$

Linearität

$$\int u\cdot f(x) + v\cdot g(x)\ \mathrm{d}x = u\int f(x)\ \mathrm{d}x + v\int g(x)\ \mathrm{d}x$$

Gebietsadditivität

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x, \ c \in [a,b]$$

Partielle Integration

$$\int f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x$$

- Grundsätzlich gilt: Polynome ableiten ($g(x)$), wo das Integral periodisch ist ($\sin, \cos, e^x$,...) integrieren ($f'(x)$)
- Teils ist es nötig, mit 1 zu multiplizieren, um partielle Integration anwenden zu können (z.B. $\int \log(x)\ \mathrm{d}x$)
- Muss eventuell mehrmals angewendet werden

Substitution
Um $\int_a^b f(g(x))\ \mathrm{d}x$ zu berechnen: Ersetze $g(x)$ durch u und integriere $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$.
Auch:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$$

- $g'(x)$ muss sich irgendwie herauskürzen, sonst nutzlos.
- Grenzen substituieren nicht vergessen.
- Alternativ kann auch das unbestimmte Integral berechnet werden und dann u wieder durch x substituiert werden.

Partialbruchzerlegung
Seien $p(x), q(x)$ zwei Polynome. $\int\frac{p(x)}{q(x)}$ wird wie folgend berechnet:

1. Falls $\deg(p) \geq \deg(q)$, führe eine Polynomdivision durch. Dies führt zum Integral $\int a(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$.
2. Berechne die Nullstellen von $q(x)$.
3. Pro Nullstelle: Einen Partialbruch erstellen.
   - Einfach, reell: $x_1 \to \frac{A}{x-x_1}$
   - n-fach, reell: $x_1 \to \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$
   - Einfach, komplex: $x^2 + px + q \to \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$
   - n-fach, komplex: $x^2 + px + q \to \frac{A_1x+b_1}{x^2+px+q} + \ldots$
4. Parameter $A_1, \ldots, A_n$ (bzw. $B_1, \ldots, B_n$) bestimmen. (x jeweils gleich Nullstelle setzen, umformen und lösen).

5.5 Integration von konvergenten Reihen

Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen, die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt, integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Weiter gilt, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf $[a,b]$gleichmässig konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x$$

Sei nun $f(x) = \sum c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für jedes $0 \leq r \leq \rho$, f auf $[-r,r]$ integrierbar und es gilt $\forall x \in [-\rho, \rho]$:

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+1}x^{k+1}$$

5.6 Euler-McLaurin Formel

Die Formel hilft Summen wie $1^l + 2^l + 3^l + ... + n^l$ abzuschatzen. Fur die Formel brauchen wir die Bernoulli Polynome $B_n(x)$, sowie die Bernoulli Zahlen $B_n(0)$. Wir brauchen dafur Polynome welche durch die folgenden Eigenschaften bestimmt sind:

1. $P_k' = P_{k-1}, k > 1$
2. $\int_0^1 P_k(x)\ \mathrm{d}x = 0, \forall k \geq 1$

Für das k-te Bernoulli Polynom gilt: $B_k(x) = k!P_k(x)$. Wir definieren weiter $B_0 = 1$ und alle anderen Bernoulli Zahlen rekursiv: $B_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i = 0$.
Somit erhalten wir für das Bernoulli Polynom folgenden Definition:

$$B_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B_i x^{k-i}$$

Bernoulli Polynome und Zahlen:

n	$B_n(x)$	B_n
0	1	1
1	$x - \frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$
2	$x^2 - x + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$	0
4	$x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$
5	$x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$	0
6	$x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$	$\frac{1}{42}$

Nun definieren wir noch:

$$\tilde{B}_k(x) = \begin{cases} B_k(x) & \forall x : 0 \leq x < 1 \\ B_k(x-n) & \forall x : n \leq x < n+1 \end{cases}$$

Somit kommen wir aud die Euler-McLaurin Summationsformel:

Euler-McLaurin Summationsformel

Sei $f : [0, n] \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar. Dann gilt:
Für $k = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \int_0^n \tilde{B}_1(x) f'(x)\ \mathrm{d}x$$

Für $k > 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) +$$

$$\sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^j B_j}{j!}(f^{(j-1)}(n) + f^{(j-1)}(0)) + \tilde{R}_k$$

wobei

$$\tilde{R}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \tilde{B}_k(x) f^{(k)}(x)\ \mathrm{d}x$$

Example

$$1^l + 2^l + 3^l + ... + n^l \text{ wobei } l \geq 1, l \in \mathbb{N}$$

Angewandt auf $f(x) = x^l$ und $k = l + 1$ folgt für alle $l \geq 1$:

$$1^l + 2^l + 3^l + ... + n^l = \frac{1}{l+1} \sum_{j=0}^{l} (-1)^j B_j \binom{l+1}{j} n^{l+1-j}$$

5.7 Stirling'sche Formel

Die Stirling'sche Formel macht eine Aussage über das Verhalten der Fakultät:

$$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{e^n}} = 1$$

Wir benützen jetzt die Euler-McLaurin FOrmel um eine präzise Aussage zuerhalten:

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n} \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} + R_3(n)\right)$$

wobei

$$|R_3(n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1$$

5.8 Uneigentliche Integral

Uneigentliche Integral

Sei $f[a, \infty[\to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $a < b$. Falls:

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

existiert, wir bezeichnen den Grenzwert mit

$$\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$$

und sagen, dass f auf $[a, \infty[$ integrierbar ist.

Auch hier können wir das Minoranten / Majoranten Kriterium verwenden. Weiter gilt, dass wenn die Funktion $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$monoton fallend ist. Die Reihe genau dann konvergiert, wenn $\int_1^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$ konvergiert.

$f :]a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar, falls:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert mit $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ bezeichnet.

5.9 Gamma Funktion

DIe Gamma Funktion wir dafür gebraucht um die Funktion $n \mapsto (n-1)!$ zu interpolieren. Für $s > 0$ definieren wir:

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\ \mathrm{d}x = (s-1)!$$

Die Gamma Funktion konvergiert für alle $s > 0$ und hat folgende weiter Eingeschaften:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$
3. Γ ist logaritmisch konvex, d.h.:

$$\Gamma(\lambda x + (2 - \lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

für alle $x, y > 0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$

Die Gamma Funktion ist die einzige Funktion $]0, \infty[\to]0, \infty[$ die (1), (2) und (3) erfüllt. Zudem gilt:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)...(x+n)} \quad \forall x > 0$$

6 Verschiedene Aufgaben

1. Zeige, dass das Chuchy Produkt der beiden ditergenten Reihen $2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots$ und $-1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$ absolut

konvergiert.
Beweis: Wir definieren:

$$a_i = \begin{cases} 2, & i = 0 \\ 2^i, & i = 1, 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

und

$$b_j = \begin{cases} -1, & j = 0 \\ 1, & j = 1, 2, 3, 4, \ldots. \end{cases}$$

und berechnen

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \cdot b_j \right) &= a_0 \cdot b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \cdot b_j \right) \\ &= a_0 \cdot b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \\ &\quad + \cdots + 2^1 + 2) \\ &= -2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} \\ &\quad \cdots + 2^1 + 2) \\ &= -2 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 + (1 + 2 + 2^2 + \\ &\quad + \cdots + 2^{n-1}) - 2^n) \\ &= -2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1-2^n}{1-2} - 2^n \right) \\ &= -2 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(1 - (1-2^n) - 2^n)}_{=0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \text{ mit } c_0 = -2 \text{ und } c_n = 0 \ \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

Offensichtlich konvergiert also das Cauchy produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$

2. Zeige, dast für $a < 0$ gilt

$$\lim_{x \to 0^+} x^a = +\infty$$

Beweis: Wir gehen ähnlich vor wie im Beispiel 3.54. Aus Beispiel 3.53 wissen wir, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $\delta(n) > 0$ so, dass

$$0 < x < \delta(n) \Longrightarrow \ln(x) < -n$$

Jetzt ist aber $a < 0$, somit erhalten wir nach multiplizieren mit a die neue Ungleichung

$$a \ln(x) > -an$$

Da exp streng monoton ist, erhalten wir:

$$x^n = \exp\left(\ln\left(x^n\right)\right) = \exp(a \ln(x)) > \exp(-an)$$

und da $-an > 0$, crhalten wir $\lim_{n\to\infty} \exp(-an) = +\infty$. Nun sei x_n cine positive Nullfolge die gegen 0 strebt. Ohne den Grenzwert von x_n^4 zu verändern, können wit annehmen, dase $0 < x_n < \delta(n)$. Dann erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} (x_a)^n > \lim_{n\to\infty} \exp(-an) = +\infty$$

Daraus schliessen wir

$$\lim_{x\to 0^+} x^n = +\infty$$

3. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ oder } x \in \mathbb{R}\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ , mit } p, q \in \mathbb{N}_{>0} \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

Zeige, dass f integrierbar ist.

Beweis: Erste Beobachtung: jedes Interval $[x_{i-1}, x_i]$ beinhaltet eine irrationale Zahl, solange $x_{i-1} \neq x_i$. Damit ist für jede Partition P von $[0,1]$ die Untersumme $s(f,P)$ gleich 0.
Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{n}$ und B_n die Menge aller "koprimen Brüche" mit Nenner kleiner gleich n :

$$B_{\mathrm{a}} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} + \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n} \right\}$$

Setze $m = \#B_n$, wähle $k > m$ und $P = \{x_0 \ldots, x_k\}$ eine Partition mit

$$\max_{1 \leq i \leq k} |x_i - x_{i-1}| < \frac{e}{4m},$$

So eine Partition existiert immer, solange wir k gross genug wählen. Mit der Notation aus der Vorlesung gilt somit

$$P = P_{\frac{\varepsilon}{4m}}$$

Da B_n aus m -vielen Elementen besteht. gibt es höchsten $2m$-viele Intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, die B_n schneiden.
Falls $x \notin B_a$. dann ist x entweder irrational (dann folgt $f(x) = 0$) , 0, oder ein Bruch $\frac{p}{q}$ mit p, q teilerfremd und $q > n$ (siehe Definition von B_n!). Aufjedenfall gilt dann $f(x) < \frac{1}{n}$.
Wir schätzen nun die Obwerumme $S(f,P)$ von oben ab:

$$\begin{aligned} S(f,P) &= \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) \cdot \underbrace{\sup_{x \in |x_i, x_{i-1}|} f(x)}_{=f_i} \\ &= \sum_{i \text{ mit} [x_{i-1}, x_i] \cap B_n \neq 0} (x_i - x_{i-1}) \cdot f_i + \\ &+ \sum_{j \text{ mit} [x_{j-1}, x_j] \cap B_n \neq 0} (x_j - x_{j-1}) \cdot f_j \end{aligned}$$

Die erste Summe läuft höchstens über $2m$ Indizes, da es höchstens soviele Intervalle gibt, die B_n schneiden, und es gilt $f_i \leq 1$ (weil $f(x) \leq 1$). In der zweiten Summe können wir f_i mit $\frac{1}{n}$ abschätzen, da das lntervall B_m nicht schneidet und wir $f(y)$ für Element auserthalb von B_n mit $\frac{1}{n}$ oben abgesehätzt haben. Auserdem gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i \text{ mit} (x_{i-1}, x_i) \cap B_n = 0} (x_j - x_{j-1}) &\leq \sum_{j=1}^{k} (x_j - x_{j-1}) \\ &= x_k - x_0 = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Wir werfen alles zusammen und erhalten:

$$\begin{aligned} S(f,P) &\leq 2m \cdot \frac{\varepsilon}{4m} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{n} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Damit wäre $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon, P = P_{\frac{\varepsilon}{4m}}$ gezeigt, und Satz 5.8 besagt nun, dass f integrierbar ist.

4. Beweise, dasa falls

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

positive Konvergenzradius besitzt, so ist der Komvergenaradius von

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$$

gleich $+\infty$
Beweis: Per Definition, ist die Annahme, das $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ existiert. Zur Erinnerung

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_n}$$

Per Definition ist der Konvergenaradius ρ von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{a_n}{n!}}_{b_n} x^n$$

gleich $+\infty$, genau dann wenn

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 0$$

Wir zeigen als letzeres:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|b_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|b_k|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} \cdot k!^{-\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

Mit der Stirling'schen Formel gilt

$$k!^{-1} \approx \left(\frac{\sqrt{2\pi k} k^k}{e^k} \right) = \frac{(2\pi k)^{-\frac{k}{2}} e}{k} = \frac{e}{(\sqrt{2\pi k})^k \cdot k} \to 0$$

für $k \to \infty$. Ausserdem existiert

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sup_{k\geq n} \sqrt[k]{|\, a_k \,|}}_{=:c_n}$$

per Annahme, und somit ist die Folge c_n beschränkt. Also existiert eine $C \in \mathbb{R}$ mit $c_n \leq C$ für alle n, und daher können wir abschätzen:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \sqrt[4]{|b_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} \cdot k!^{-\frac{1}{k}} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} C \cdot k!^{-\frac{1}{k}} \\ &= C \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} k!^{-\frac{1}{k}} \\ &= C \cdot \lim_{n\to\infty} \sup n!^{-\frac{1}{n}} \\ &= C \cdot \lim_{n\to\infty} n!^{-\frac{1}{n}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt haben wir verwenden, dass limsup und lim übereinstimmen wenn der Grenzwert existiert.

7 Trigonometrie

7.1 Hyperbol Funktionen

1. $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
2. $\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to [1, \infty[$
3. $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} : \mathbb{R} \to [-1, 1[$

7.2 Regeln

7.2.1 Periodizität

- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha) \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha) \quad \cot(\alpha + \pi) = \cot(\alpha)$

7.2.2 Parität

- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$

7.2.3 Ergänzung

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot(\alpha)$

7.2.4 Komplemente

- $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha) \quad \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\tan(\pi/2 - \alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(\pi/2 - \alpha) = -\cot(\alpha)$

7.2.5 Doppelwinkel

- $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin(\alpha)$
- $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

7.2.6 Addition

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

7.2.7 Subtraktion

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

7.2.8 Multiplikation

- $\sin(\alpha)\sin(\beta) = -\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}$
- $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$
- $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

7.2.9 Potenzen

- $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \sin(2\alpha))$
- $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$
- $\tan^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$

7.2.10 Diverse

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\sinh^2(\alpha) - \cosh^2(\alpha) = 1$
- $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$ und $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Wichtige Werte

deg	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0

8 Nützliche Sätze

Bogenlänge

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Bernoulli Ungleichung

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$$

Young'sche Ungleichung

$$\forall \epsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R} : 2|xy| \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2$$

Binomialsatz

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

8.1 Komplexe Zahlen

$$z = a + b \cdot \mathrm{i}$$

$$z = r(\cos\omega + \mathrm{i}\sin\omega) = r \text{ cis } \omega = r \cdot e^{\mathrm{i}\omega}$$

Exponent: $z^n = r^n e^{in\omega}$

For the following let $z_1 = a + \mathrm{i} \cdot b$ and $z_2 = c + \mathrm{i} \cdot d$.

Addition/Subtraktion

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\,\mathrm{i}\ ,\ z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)\,\mathrm{i}$$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (ac + bd\,\mathrm{i}^2) + (ad + bc)\,\mathrm{i} = (ac - bd) + (ad + bc)\,\mathrm{i}$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + b\,\mathrm{i})(c - d\,\mathrm{i})}{(c + d\,\mathrm{i})(c - d\,\mathrm{i})} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}$$

8.2 Exponential-Funktion und Logarithmus

- $e \approx 2.72, \ln(1) = 0, \ln(e) = 1$
- $\exp(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ und $\exp(x) > 1, \forall x > 0$
- $1 + x \leq e^x$
- $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ (Bernoullische Ungleichung)
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)
- $\log(x) \leq \sqrt{x}, \forall x > 0$
- $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ und $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(a^b\right) = b \cdot \ln(a)$ und $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
- $e^{\ln(x)} = x$ und $\ln(e^x) = x$
- $x^a = e^{a\ln(x)}$

8.3 Bekannte Taylorreihen

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5)$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^9)$$
$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^9)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$
$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$
$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^6)$$
$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^6)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\mathcal{O}(x^5)$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \mathcal{O}(x^4)$$

8.4 Wichtige Reihen

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

9 Tabellen

9.1 Typische Grenzwerte

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$
$\lim_{x\to-\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = 0$	$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^m} = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$	$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^b = 1$	$\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^b = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} x^a q^x = 0, \forall 0 \le q < 1$	$\lim_{x\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$
$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$	$\lim_{x\to\pm\infty}(1-\frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$
$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{k}{x})^{mx} = e^{km}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$
$\lim_{x\to 0} x\log(x) = 0$	$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1)-x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan(x)} = 1$	$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+k}\right)^x = e^{-k}$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)\forall a > 0$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x} = a$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} = 1$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2^x} = 0$

Bemerkung: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ für $\forall x > 0$

9.2 Ableitungen und Stammfunktionen

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$
c	0
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	x^a
$\frac{1}{a\cdot(n+1)}(ax+b)^{n+1}$	$(ax+b)^n$
$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x^\alpha, \alpha \neq -1$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{x}$
$\frac{n}{n+1}x^{\frac{1}{n}+1}$	$\sqrt[n]{x}$
e^x	e^x
$\ln(\|x\|)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a \|x\|$	$\frac{1}{x\ln a} = \log_a(e)\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$	$\frac{1}{-\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$
$\operatorname{arcsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arccosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arctanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\frac{1}{f(x)}$	$\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$
a^{cx}	$a^{cx} \cdot c \ln a$
x^x	$x^x \cdot (1 + \ln x) \quad {\scriptstyle x>0}$
$(x^x)^x$	$(x^x)^x(x + 2x\ln(x)) \quad {\scriptstyle x>0}$
$x^{(x^x)}$	$x^{(x^x)}(x^{x-1} + \ln x \cdot x^x(1 + \ln x))$
$\frac{1}{a}\ln(ax+b)$	$\frac{1}{ax+b}$
$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln\lvert cx+d\rvert$	$\frac{ax+b}{cx+d}$
$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$	$\frac{1}{x^2-a^2}$
$\frac{x}{2}f(x) + \frac{a^2}{2}\ln(x + f(x))$	$\sqrt{a^2+x^2}$
$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert}$	$\sqrt{a^2-x^2}$
$\frac{x}{2}f(x) - \frac{a^2}{2}\ln(x + f(x))$	$\sqrt{x^2-a^2}$
$\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$
$\arcsin(\frac{x}{\lvert a\rvert})$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$
$\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$	$\frac{1}{x^2+a^2}$
$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$
$\ln\left\lvert\tan(\frac{x}{2})\right\rvert$	$\frac{1}{\sin(x)}$
$\ln\left\lvert\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right\rvert$	$\frac{1}{\cos(x)}$
$\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$	$\sin^2(x)$
$\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$	$\cos^2(x)$
$\tan(x) - x$	$\tan^2(x)$
$-\cot(x) - x$	$\cot^2(x)$
$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$
$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$
$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$	$\arctan(x)$
$\ln(\cosh(x))$	$\tanh(x)$

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$
$\ln\lvert f(x)\rvert$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$x \cdot (\ln\lvert x\rvert - 1)$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} \quad {\scriptstyle n\neq -1}$	$\frac{1}{x}(\ln x)^n$
$\frac{1}{2n}(\ln x^n)^2 \quad {\scriptstyle n\neq 0}$	$\frac{1}{x}\ln x^n$
$\ln\lvert\ln x\rvert \quad {\scriptstyle x>0, x\neq 1}$	$\frac{1}{x\ln x}$
$\frac{1}{b\ln a}a^{bx}$	a^{bx}
$\frac{cx-1}{c^2} \cdot e^{cx}$	$x \cdot e^{cx}$
$\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) \quad {\scriptstyle n\neq -1}$	$x^n \ln x$
$\frac{e^{cx}(c\sin(ax+b) - a\cos(ax+b))}{a^2+c^2}$	$e^{cx}\sin(ax+b)$
$\frac{e^{cx}(c\cos(ax+b) + a\sin(ax+b))}{a^2+c^2}$	$e^{cx}\cos(ax+b)$

9.3 Trigonometrische Ansätze

f(x)	**F(x)**
$\int_a^b \frac{1}{x^2+1}dx$	$[arctan(x)]_a^b$
$\int_a^b \frac{1}{1-x^2}dx$	$[arctanh(x)]_a^b$
$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$	$[arcsinh(x)]_a^b$
$\int_a^b \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$[arcos(x)]_a^b$
$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$[arcsin(x)]_a^b$
$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$	$[arcosh(x)]_a^b$
$\int_a^b \frac{1}{sin^2(x)}dx$	$-cot(x)$
$\int_a^b \frac{1}{cos^2(x)}dx$	$tan(x)$
$\int_a^b \sqrt{1+x^2}dx$	$\frac{arcsinh(x)+x-\sqrt{x^2+1}}{2}$
$\int_0^{\pi/2} cos(x)$	1
$\int_0^{\pi/2} cos^2(x)$	$\frac{\pi}{4}$
$\int_0^{\pi/2} sin(x)$	1
$\int_0^{\pi/2} sin^2(x)$	$\frac{\pi}{4}$

9.4 Ableitungen

$\mathbf{F(x)}$	$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$
-	$(f^{-1})'(y_0)$	$\frac{1}{f'(x_0)}$
$\frac{x^{-a+1}}{a+1}$	$\frac{1}{x^a}$	$\frac{a}{x^{a+1}}$
$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$x^a(a \neq 1)$	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{k\ln(a)}a^{kx}$ $\ln\lvert x\rvert$	a^{kx} $\frac{1}{x}$	$ka^{kx}\ln(a)$ $-\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3}x^{2/3}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin(2x))$	$\sin^2(x)$	$2\sin(x)\cos(x)$
$\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin(2x))$	$\cos^2(x)$	$-2\sin(x)\cos(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ $1 + \tan^2(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\log(\cosh(x))$	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$c \cdot e^{cx}$
$x(\ln\lvert x\rvert - 1)$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2}(\ln(x))^2$	$\frac{\ln(x)}{x}$	$\frac{1-\ln(x)}{x^2}$
$\frac{x}{\ln(a)}(\ln\lvert x\rvert - 1)$	$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{\ln(a)x}$

9.5 Integrale

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{F(x)}$
$\int f'(x)f(x)\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{2}(f(x))^2$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{d}x$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$	$\sqrt{\pi}$
$\int (ax+b)^n\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$
$\int x(ax+b)^n\ \mathrm{d}x$	$\frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
$\int (ax^p+b)^n x^{p-1}\ \mathrm{d}x$	$\frac{(ax^p+b)^{n+1}}{ap(n+1)}$
$\int (ax^p+b)^{-1} x^{p-1}\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{ap}\ln\lvert ax^p+b\rvert$
$\int \frac{ax+b}{cx+d}\ \mathrm{d}x$	$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln\lvert cx+d\rvert$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$
$\int \frac{1}{x^2-a^2}\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
$\int \sqrt{a^2+x^2}\ \mathrm{d}x$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$

10 Graphen