

## 1 Komplexe und Reelle Zahlen

### 1.1 Archimedisches Prinzip

#### Archimedisches Prinzip

Sei  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x > 0$  und  $y \in \mathbb{R}$ . Dann gibt es  $n \in \mathbb{N}$  mit  $y \leq n \cdot x$ .

### 1.2 Supremum und Infimum

**Definition:**  $A \subset \mathbb{R}$  heisst von oben [unten] beschränkt falls es  $x \in \mathbb{R}$  gibt, sodass  $x \geq a$  [ $x \leq a$ ] für alle  $a \in A$ .  $x$  heisst dann obere [untere] Schranke von  $A$ . Falls  $x \in A$  und  $x$  obere [untere] Schranke von  $A$ , ist  $x$  das Maximum [Minimum] von  $A$ .

#### Supremum und Infimum

Falls  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$  v.o.b [v.u.b] ist, gibt es eine kleinste obere Schranke [grösste untere Schranke]  $x$  von  $A$ .  $x$  heisst dann Supremum [Infimum] von  $A$ .

## 2 Folgen und Reihen

### 2.1 Konvergenz mit $\epsilon$ -Def

#### Definition

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $L$   
 $\iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  (i.e.  $\exists L \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0$  die Menge  $n \in \mathbb{N} : a_n \notin ]L - \epsilon, L + \epsilon[$  endlich ist)  
 $\iff \forall \epsilon > 0 \exists N > 1 \forall n \geq N : |a_n - L| < \epsilon$ .

Wir dürfen (o.B.d.A.) annehmen, dass  $\epsilon$  durch eine Konstante  $C \in \mathbb{R}$  beschränkt ist.

#### Divergenz

Eine Folge  $a_n$  ist divergent (notiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ) falls:

$$\forall K > 0 \exists N = N(K) \in \mathbb{N}, \text{ sodass } \forall n \geq N : |a_n| > K$$

### 2.2 Konvergenz con Folgen

**Bemerkung:** konvergent  $\implies$  beschränkt, aber nicht umgekehrt!

**Bemerkung:**  $(a_n)$  konvergent  $\iff (a_n)$  beschränkt **und**  $\liminf a_n = \limsup a_n$

#### Einschlusskriterium

Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$  und  $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \geq k$ , dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$ .

#### Weierstrass

- Sei  $a_n$  monoton wachsend und nach oben beschränkt  $\Rightarrow a_n$  konvergiert mit Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$ .
- $a_n$  monoton fallend und nach unten beschränkt  $\Rightarrow a_n$  konvergiert mit Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$ .

#### Cauchy-Kriterium

Eine Folge  $(a_n)$  heisst **Cauchy-Folge** falls  $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1$  sodass  $\forall n, m \geq N \implies |a_n - a_m| < \epsilon$ .

**Bemerkung:** Für eine Cauchy-Folge  $(a_n)$  gilt:

- $(a_n)$  cauchy  $\Rightarrow (a_n)$  beschränkt
- $(a_n)$  cauchy  $\iff (a_n)$  konvergent

### 2.3 Teilfolge

Eine Teilfolge von  $a_n$  ist eine Folge  $b_n$  wobei  $b_n = a_{l(n)}$  und  $l$  eine Funktion mit  $l(n) < l(n+1) \quad \forall n \geq 1$  (z.B.  $l = 2n$  für jedes gerade Folgenglied).

#### Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

### 2.4 Limes Superior und Limes Inferior

#### Limes superior & inferior

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \inf_{m \geq n} x_m \right)$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{m \geq n} x_m \right)$$

### 2.5 Strategie - Konvergenz von Folgen

1. Bei Brüchen: Grösste Potenz von  $n$  kürzen. Alle Brüche der Form  $\frac{a}{n^a}$  streichen, da diese nach 0 gehen wenn  $n \rightarrow 0$ .
2. Bei Wurzeln in Summe im Nenner: Multiplizieren des Nenners und Zählers mit der Differenz der Summe im Nenner. (z.B.  $(a+b)$  mit  $(a-b)$  multiplizieren)
3. Bei rekursiven Folgen: Anwendung von Weierstrass zur monotonen Konvergenz
4. Einschlusskriterium (Sandwich-Theorem) anwenden.
5. Mit bekannter Folge vergleichen.
6. Grenzwert durch einfaches Umformen ermitteln.
7. Limit per Definition der Konvergenz zeigen.
8. Anwendung des Cauchy-Kriteriums.
9. Suchen eines konvergenten Majorant.
10. Weinen und die Aufgabe überspringen.

### 2.6 Strategie - Divergenz von Folgen

1. Suchen einer divergenten Vergleichsfolge.
2. Bei alternierenden Folgen: Zeige, dass Teilfolgen nicht gleich werden ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{p_1(n)} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} a_{p_2(n)}$ ), mit z.B. gerade/ungerade als Teilfolgen.

## 2.7 Reihe Konvergenz Definition

#### Definition

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist **konvergent**, falls die Folge  $(S_n)_{n \geq 1}$  der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall definieren wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

## 2.8 Reihenarithmetik

#### Reihenarithmetik

Wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  konvergent sind, dann gilt:

- $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  konvergent und  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) + \left( \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right)$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k$  konvergent und  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

## 2.9 Absolute Konvergenz

#### Definition

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heisst **absolut konvergent**, falls  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergiert. Eine absolut konvergente Reihe ist auch konvergent, es gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

## 2.10 Konvergenz von Reihen

#### Cauchy-Kriterium für Reihen

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist genau dann konvergent, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 \text{ mit } \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \epsilon, \quad \forall m \geq n > N$$

#### Nullfolgenkriterium

Wenn für eine Folge  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$  ist, dann divergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

#### Vergleichssatz

Wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  Reihen mit  $0 \leq a_k \leq b_k, \forall k \geq K \geq 1$  sind, so gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

Als Vergleichsreihe (Majorant / Minorant) eignet sich oft eine Reihe der folgenden Kategorien:

- **Geometrische Reihe:**  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  divergiert für  $|q| \geq 1$  und konvergiert zu  $\frac{1}{1-q}$  für  $|q| < 1$
- **Zeta-Funktion**  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  divergiert für  $s \leq 1$  und konvergiert für  $s > 1$ .

Des weiteren gilt folgendes:

- Sei  $(S_n) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$  mit  $|q| < 1$ , dann ist  $(S_n)$  konvergent und  $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-q}$
- $(S_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  konvergiert

#### Leibnizkriterium

Wenn  $a_n \geq 0, \forall n \geq 1$  monoton fallend und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ist, dann konvergiert  $S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$  und  $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$ .

#### Quotienten-/Wurzelkriterium

Sei  $(a_n)$  eine Folge mit  $a_n \neq 0 \forall n \geq 1$ . Sei:

- $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$
- $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$ .

Falls gilt:

- $q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert absolut.
- $q = 1 \Rightarrow$  keine Aussage.
- $q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergiert.

## 2.11 Potenzreihen

**Definition:** Eine Potenzreihe ist eine Reihe von der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot z^k$ , wobei  $(c_k)_{k \geq 0}$  eine Folge ist.

#### Konvergenzradius

Der Konvergenzradius  $\rho$  einer Potenzreihe entspricht:

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

Die Potenzreihe konvergiert absolut für alle  $|z| < \rho$  und divergiert für alle  $|z| > \rho$ . Der Fall  $|z| = \rho$  muss jeweils noch separat geprüft werden.

Eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius  $\rho$  konvergiert gleichmässig auf  $[-\rho, \rho]$ , insbesondere ist  $f : ]-\rho, \rho[ \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

## 2.12 Doppelreihen

**Definition:** Gegeben eine Doppelfolge  $(a_{ij})_{i,j \geq 0}$  so können  $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = A_0 + A_1 + \dots$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} = B_0 + B_1 + \dots$  beide konvergent sein mit verschiedenen Grenzwerten. Wir nennen  $\sum_{i,j \geq 0} a_{ij}$  eine Doppelreihe. Wenn die Reihe bsolut konvergiert, so sind beide Grenzwerte gleich und jere Anordnung knvergiert zum selben Grenzwert.

#### Das Cauchy Produkt

Das Cauchy Produkt zweier Reihen  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  und  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$  ist die Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (a_{n-j} \cdot b_j) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots$$

Falls beide Reihen **absolut** konvergieren, so konvergiert auch das Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j \right) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

## 2.13 Integral Test

#### Integral Test

Sei  $f(x)$  eine stetige, positive und monoton fallende Funktion auf  $[k, \infty[$  und  $f(n) = a_n$ :

$$\int_k^{\infty} f(x) \, dx \text{ konvergiert} \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

$$\int_k^{\infty} f(x) \, dx \text{ divergiert} \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

### 2.13.1 Wichtige Reihen

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

### 2.13.2 Strategie - Konvergenz von Reihen

1. Ist Reihe ein bekannter Typ? (Teleskopieren, Geometrische/Harmonische Reihe, Zetafunktion, ...)
2. Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ? Wenn nein, divergiert die Reihe (*Nullfolgekriterium*)
3. Quotientenkriterium & Wurzelkriterium anwenden
4. Vergleichssatz anwenden, Vergleichsreihen suchen
5. Leibnizkriterium anwenden

## 3 Funktionen und Stetigkeit

### 3.1 Stetigkeit Definitionen

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d, x \rightarrow f(x)$  eine Funktion in  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ .

#### Definition

$f$  ist in  $x_0 \in D$  stetig, falls für jede Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$  folgendes gilt:

$$f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$$

$f$  ist stetig auf  $D$ , falls sie in jedem  $x_0 \in D$  stetig ist.

#### $\epsilon$ -Definition

**Punktweise stetig:**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in einem Punkt  $x_0$  falls:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

**Gleichmässig stetig:**

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

**Bemerkung:** In der punktweisen Stetigkeit ist das  $\delta$  von  $x_0$  und  $\epsilon$  abhängig ( $\delta(\epsilon, x_0)$ ), während in der gleichmässigen Stetigkeit das  $\delta$  nur von  $\epsilon$  abhängen darf ( $\delta(\epsilon)$ ).

Falls  $f$  und  $g$  den gleichen Definitions-/Bildbereich haben und in  $x_0$  stetig sind, dann sind auch

$$f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g, \frac{f}{g}, |f|, \max(f, g), \min(f, g)$$

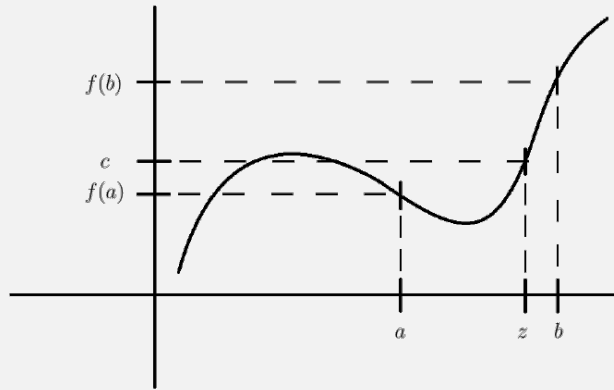
stetig in  $x_0$ .

**Bemerkung:** Polynomiale Funktionen und trigonometrische (sin und cos) Funktionen) sind auf  $\mathbb{R}$  stetig.

### 3.2 Zwischenwertsatz

#### Zwischenwertsatz

Wenn  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a, b \in I$  ist, dann gibt es für jedes  $c$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  ein  $a \leq z \leq b$  mit  $f(z) = c$ .



Wird häufig verwendet um zu zeigen, dass eine Funktion einen gewissen Wert annimmt.

Daraus folgt, dass ein Polynom mit ungeradem Grad mindestens eine Nullstelle in  $\mathbb{R}$  besitzt.

### 3.3 Min-Max Satz

Ein Intervall  $I \in \mathbb{R}$  ist kompakt, falls es von der Form  $I = [a, b]$  mit  $a \leq b$  ist.

#### Min-Max-Satz

Sei  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf einem kompakten Intervall  $I$ . Dann gibt es  $u, v \in I$  mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v), \forall x \in I$$

Insbesondere ist  $f$  beschränkt.

### 3.4 Satz über die Umkehrabbildung

#### Satz über die Umkehrabbildung

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton und sei  $J = f(I) \subseteq \mathbb{R}$ . Dann ist  $f^{-1} : J \rightarrow I$  stetig und streng monoton.

#### Stetigkeit der Verknüpfung

Sei  $f : D_1 \rightarrow D_2, g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D_1$ . Falls  $f$  in  $x_0$  und  $g$  in  $f(x_0)$  stetig ist, dann ist  $g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  stetig.

#### Die reelle Exponentialfunktion

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv. Auch die Umkehrfunktion  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  hat diese Eigenschaften.

### 3.5 Konvergenz von Funktionenfolgen

#### Punktweise Konvergenz

Die Funktionenfolge  $(f_n)$  konvergiert punktweise gegen eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  falls für alle  $x \in D$  gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

#### Alternativ:

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in D, \exists N \geq 1, \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

#### Gleichmässige Konvergenz

Die Folge  $(f_n)$  konvergiert gleichmässig in  $D$  gegen  $f$  falls gilt

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Die Funktionenfolge  $(g_n)$  ist gleichmässig konvergent, falls für alle  $x \in D$  der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$  existiert und die Folge  $(g_n)$  gleichmässig gegen  $g$  konvergiert.

**Bemerkung:** Wenn eine Funktionenfolge aus stetigen Funktionen besteht und gleichmässig gegen eine Funktion  $f$  konvergiert, dann ist  $f$  stetig.

### 3.6 Konvergenz von FunktionenReihen

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  konvergiert gleichmässig, falls die durch  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$  definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

Sei  $f_n$  eine Folge stetiger Funktionen. Ausserdem ist  $|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  konvergiert. Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  gleichmässig und deren Grenzwert ist eine in  $D$  stetige Funktion.

### 3.7 Potenzreihen

#### Potenzreihe

Potenzreihen sind Reihen der Form  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $x_0$  wird als  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  definiert.

#### Konvergenzradius

Der Konvergenzradius einer Potenzreihe um einen Entwicklungspunkt  $x_0$  ist die grösste Zahl  $r$ , so dass die Potenzreihe für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < r$  konvergiert. Falls die Reihe für alle  $x$  konvergiert, ist der Konvergenzradius  $r$  unendlich. Sonst:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

#### 3.7.1 Definitionen per Potenzreihen

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad r = \infty$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad r = \infty$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad r = \infty$$

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad r = 1$$

### 3.8 Grenzwerte von Funktionen

#### Häufungspunkt

$x_0 \in \mathbb{R}$  ist ein Häufungspunkt der Menge  $D$  falls:

$$\forall \delta > 0 : (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$$

#### Grenzwert - Funktionen

Wenn  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$  ein Häufungspunkt von  $D$  ist, dann ist  $A \in \mathbb{R}$  der Grenzwert von  $f(x)$  für  $x \rightarrow x_0$  ( $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ), falls  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ , so dass:

$$\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}) : |f(x) - A| < \epsilon$$

#### Alternativ:

$$|f(x) - A| < \epsilon \text{ whenever } 0 < |x - x_0| < \delta$$

### 3.9 Linksseitiger und Rechtsseitiger Grenzwert

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$  ein Häufungspunkt von  $D \cap ]x_0, +\infty[$ . Falls der Grenzwert der eingeschränkten Funktion  $f$  im Bereich  $D \cap ]x_0, +\infty[$  für  $x \rightarrow x_0$  existiert, wird er mit  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  bezeichnet und nennt sich **rechtsseitiger Grenzwert** von  $f$  bei  $x_0$ . Das Analoge gilt für den **linksseitigen Grenzwert**.

Wir erweitern diese Definition auf  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$  falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap ]x_0, x_0 + \delta[ : f(x) < \frac{1}{\epsilon}$$

und analog für  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap ]x_0, x_0 + \delta[ : f(x) < \frac{1}{-\epsilon}$$

Für den linksseitigen Grenzwert gilt das Analoge.

**Alternativ:** Man sagt  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$  falls gilt:

$$\forall \epsilon \exists \delta |f(x) - L| < \epsilon \text{ whenever } 0 < x - a < \delta \text{ (oder } a < x < a + \delta)$$

Man sagt  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$  falls gilt:

$$\forall \epsilon \exists \delta |f(x) - L| < \epsilon \text{ whenever } -\delta < x - a < 0 \text{ (oder } a - \delta < x < a)$$

4 Ableitungen

4.1 Differenzierbarkeit

Differenzierbar

$f$  ist in  $x_0$  **differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Wenn dies der Fall ist, wird der Grenzwert mit  $f'(x_0)$  oder  $\frac{df}{dx}(x_0)$  bezeichnet.  $f$  ist **differenzierbar**, falls  $f$  für jedes Häufungspunkt  $x_0 \in D$  differenzierbar ist.

**Bemerkung:** Die Tangente zu  $x_0$  ist definiert durch:  $g(x) := f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ .

Differenzierbarkeit nach Weierstrass

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $x_0$  differenzierbar ( $x_0$  Häufungspunkt von  $D$ )  $\iff$  Es gibt  $c \in \mathbb{R}$  und  $r : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit:

- $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
- $r(x_0) = 0$ ,  $r$  stetig in  $x_0$ .

Falls  $f$  differenzierbar ist, dann ist  $c = f'(x_0)$  eindeutig bestimmt.

**Variation:** Eine Funktion  $f$  ist genau dann in  $x_0$  differenzierbar falls eine Funktion  $\phi(x) = f'(x_0) + r(x)$  gibt, so dass  $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$ ,  $\forall x \in D$  und  $\phi$  in  $x_0$  stetig ist. In diesem Fall gilt  $\phi(x_0) = f'(x_0)$ .

**Bemerkung:** Die Tangentengleichung von  $f$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  ist  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

Höhere Ableitungen

- Für  $n \geq 2$  ist  $f$   $n$ -mal differenzierbar in  $D$  falls  $f^{(n-1)}$  in  $D$  differenzierbar ist. Dann ist  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$  die  $n$ -te Ableitung von  $f$ .
- $f$  ist  $n$ -mal stetig differenzierbar in  $D$ , falls sie  $n$ -mal differenzierbar und  $f^{(n)}$  in  $D$  stetig ist.
- $f$  ist in  $D$  glatt, falls sie  $\forall n \geq 1$   $n$ -mal differenzierbar ist ("unendlich differenzierbar").

**Bemerkung:**  $\exp(x), \sin(x), \cos(x), \sinh(x), \cosh(x), \tanh(x), \ln(x), \arcsin(x), \arccos(x), \operatorname{arccot}(x), \arctan(x)$  und alle Polynome sind glatte Funktionen.  $\tan(x)$  ist auf  $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$ ,  $\cot(x)$  auf  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$  glatt.

4.2 Ableitungsregeln

Linearität der Ableitung

$$(\alpha \cdot f(x) + g(x))' = \alpha \cdot f'(x) + g'(x)$$

Produktregel

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Kettenregel

$$(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

Potenzregel

$$(c \cdot x^a)' = c \cdot a \cdot x^{a-1}$$

Rule de L'Hôpital

Für Grenzwerte, die auf einen unbestimmten Ausdruck der Form  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$  führen, gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.3 Höhereableitungsregeln

Sei  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbar.

Linearität der Ableitung

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

Produktregel

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

**Bemerkung:**  $\frac{f}{g}$  ist  $n$ -mal differenzierbar falls  $g(x) \neq 0, \forall x \in D$  und  $(g \circ f)$  ist  $n$ -mal differenzierbar.

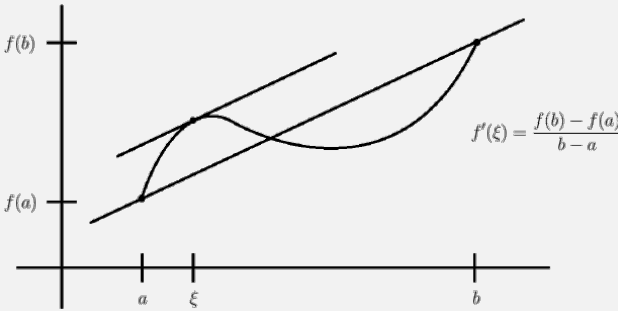
4.4 Sätze zur Ableitung

Satz von Rolle

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar. Wenn  $f(a) = f(b)$ , dann gibt es ein  $\xi \in ]a, b[$  mit  $f'(\xi) = 0$ .

Mittelwertsatz (Lagrange)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar. Dann gibt es  $\xi \in ]a, b[$  mit  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \iff f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .



4.5 Taylorreihen

Jede glatte, d.h. beliebig oft differenzierbare, Funktion  $f \in C^\infty$  kann als Potenzreihe angenähert werden.

Taylor-Polynom

Das  $n$ -te Talyor-Polynom  $T_n f(x; a)$  an einer Entwicklungsstelle  $a$  ist definiert als:

$$T_n f(x; a) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x - a)^k$$
$$= f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2} \cdot (x - a)^2 + \dots$$

mit Rest:

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1} \text{ für ein } \xi \in ]a, x[$$

Taylorreihe

Die unendliche Reihe

$$Tf(x; a) := T_\infty = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n$$

wird Taylorreihe von  $f$  an Stelle  $a$  genannt.

**Bemerkung:** Sei  $\sum_{n=0}^\infty c_n x^n$  eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius  $p > 0$ . Dann ist  $f(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n (x - x_0)^n$  auf  $]x_0 - p, x_0 + p[$  differenzierbar und  $f'(x) = \sum_{k=1}^\infty k c_k (x - x_0)^{k-1}$  für alle  $x \in ]x_0 - p, x_0 + p[$ .

4.6 Kurvendiskussion und Varie

4.7 Surjektivität und injektivität

Definition

Es seien  $X$  und  $Y$  Mengen, sowie  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

**Surjektivität:** Die Abbildung  $f$  heißt surjektiv, wenn es zu jedem  $y \in Y$  (mindestens) ein  $x \in X$  mit  $f(x) = y$  gibt.

**Injektivität:** Die Abbildung  $f$  heißt injektiv, wenn es zu jedem Element  $y \in Y$  höchstens ein (also eventuell gar kein) Element  $x \in X$  gibt, das darauf zielt, wenn also nie zwei oder mehr verschiedene Elemente der Definitionsmenge auf dasselbe Element der Zielmenge abgebildet werden:  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .

Injektivität zeigen

$f$  injektiv  $\iff f$  streng monoton  $\iff f' > 0$  oder  $f' < 0$ .

Surjektivität zeigen

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$  zeigen
- Sei nun  $y \in ]a, b[$  beliebig. Wegen der Grenzwerte von  $f$  gilt:  $\exists x_1 < x_2 : f(x_1) < y < f(x_2)$ . Mit dem Zwischenwertsatz gilt dann:  $\exists c \in [x_1, x_2] : f(c) = y$  und somit ist  $f$  surjektiv.

4.7.1 Konvexität und Konkavität

**Definition**  
 $f$  ist [streng] konvex (auf  $I$ ) falls  $f$  für alle  $x \leq [<]y, x, y \in I$  und  $\lambda \in [0, 1]$ :  
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq [<] \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

**Bemerkungen**  
1. Die Summe zweier konvexer Funktionen ist konvex  
2.  $f$  ist genau dann konvex, falls  $f$  für  $x_0 \leq x \leq x_1$  in  $I$  gilt:  
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$
  
3. Die Funktion  $f$  ist genau dann [streng] konvex, falls  $f'$  [streng] monoton wachsend ist.

**Bemerkung:** Alle Aussagen gelten auch für **Konkavität**, wir müssen nur das Ungleichzeichen umkehren

4.7.2 Begriffe und Korollare

Es gilt:

- $f'(x) = 0 \forall x \Rightarrow f(x)$  konstant
- $f'(x) = g'(x) \forall x \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$  s.t.  $f(x) = g(x) + c$
- $f'(x) \geq (>) 0 \forall x \Rightarrow f(x)$  (strikt) monoton wachsend
- $f'(x) \leq (<) 0 \forall x \Rightarrow f(x)$  (strikt) monoton fallend

**Kritische Punkte**  
Punkte in welchen  $f'(x) = 0$  gilt oder  $f'(x), f(x)$  nicht existieren, nennen wir kritische Punkte.

**Bemerkung:**

- $n$  gerade und  $x_0$  lokale Extremstelle  $\Rightarrow f^{(n+1)}(x_0) = 0$
- $n$  ungerade und  $f^{(n+1)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$  eine strikt lokale Minimalstelle
- $n$  ungerade und  $f^{(n+1)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$  eine strikt lokale Maximalstelle

4.7.3 Komplette Kurvendiskussion

**Symmetrie:**

- Achsensymmetrisch/Gerade:  
 $\forall x \in D : f(-x) = f(x)$
- Punktsymmetrisch/Ungerade:  
 $\forall x \in D : f(-x) = -f(x)$

**Grenzverhalten:**

- Limes für  $x \rightarrow +\infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  bestimmen
- Limes für alle kritische Punkte bestimmen

**Nullstellen:**

- Punkte berechnen wo  $f(x) = 0$  gilt
- Punkte bestimmen wo  $f(0) = a$  gilt

**Extremstellen:**

- Berechnung aller kritischen Punkte (u.a. (Grenz-) Werte des Intervalls)
- Berechnung der ersten Ableitung und der Punkte, wo  $f'(x_E) = 0$  gilt.
- Berechnung der zweiten Ableitung und von  $f''(x_E) = a$ :
  - $a < 0$ : lokales Maximum
  - $a > 0$ : lokales Minimum
  - $a = 0$ : keine Aussage möglich

**Settelpunkte:** Berechnung der Punkte wo gilt:

- $f''(x_S) = 0$
- $f'''(x_S) \neq 0$
- $f'(x_S) \neq 0$

**Wendelpunkte:** Berechnung der Punkte wo gilt:

- $f''(x_W) = 0$
- $f'''(x_S) \neq 0$
- $f'(x_S) = 0$

**Krümmung:** Berechnung der Zweiten Ableitung:

- $f''(x) > 0 \rightarrow$  linksgekrümmt (konvex)
- $f''(x) < 0 \rightarrow$  rechtsgekrümmt (konkav)

5 Integrale

5.1 Riemann-Integral

**Partitionierung**  
Wir teilen das Intervall  $I = [a, b]$  in  $n$  Teilintervalle auf. Das gibt uns eine Menge von Grenzpunkten  $x_0 \dots x_n$ . Es gilt also:  $P := x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ .  
Ein Teilintervall  $I_i$  ist gegeben durch  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ .

**Stützstelle**  
Aus jedem Teilintervall  $I_i$  wählen wir einen Punkt  $\xi_i$ . Das gibt uns die Menge der Stützstellen  $\xi_1 \dots \xi_n$ .  
 $\xi = \xi_1 \dots \xi_n$ , wobei  $\xi_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$ .

**Riemann-Summe**  
Gegeben sei eine stetige Funktion  $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , sowie eine Partitionierung  $P$  in  $n$  Teile und Stützstellen  $\xi$ . Dann ist die Riemannsche Summe definiert durch:  
$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

**Ober- und Untersumme**  
Mithilfe der Parition können wir nun die Unertsumme/Obersumme einer Funktion definieren:  
$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n f_i \delta_i, \quad f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$
  
$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n F_i \delta_i, \quad F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$
  
Sei nun  $\mathcal{P}(I)$  die Menge alle Partitionen von  $I$ , definieren wir:  
$$s(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P) \text{ und } S(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P)$$

**Riemann-integrierbar**  
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist Riemann-integrierbar, falls  $s(f) = S(f)$ . In diesem Fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert als:  
$$s(f) := \int_a^b f(x) \, dx = S(f)$$
  
**Alternativ:**  $f$  ist genau dann integrierbar wenn gilt:  
$$\forall \epsilon > 0, \exists P : |s(f, P) - S(f, P)| < \epsilon$$

**Bemerkung:**

- $f$  stetig in  $[a, b] \implies f$  integrierbar über  $[a, b]$
- $f$  monoton in  $[a, b] \implies f$  integrierbar über  $[a, b]$

Wenn  $f, g$  beschränkt und integrierbar sind, dann sind  
$$f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g, |f|, \max(f, g), \min(f, g), \frac{f}{g}$$
integrierbar.

5.2 Sätze & Ungleichungen

**Ungleichungen**

- $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b] \rightarrow \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$
- $\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$
- $\left| \int_a^b f(x)g(x) \, dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) \, dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) \, dx}$

**Mittelwertsatz**  
Wenn  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, dann gibt es  $\xi \in [a, b]$  mit  $\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi)(b - a)$ .

Daraus folgt auch, dass wenn  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wobei  $f$  stetig,  $g$  beschränkt und integrierbar mit  $g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$  ist, dann gibt es:

$$\xi \in [a, b] \quad \int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(\xi) \int_a^b g(x) \, dx$$



5.3 Stammfunktionen

**Stammfunktion**  
Eine Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heisst Stammfunktion von  $f$ , falls  $F$  (stetig) differenzierbar in  $[a, b]$  ist und  $F' = f$  in  $[a, b]$  gilt.

**Bemerkung:** “ $f$  integrierbar” impliziert *nicht*, dass eine Stammfunktion existiert. Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0 \\ 1, & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

**Hauptsatz Differential-/Integralrechnung**  
Sei  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt, \quad a \leq x \leq b$$

ist in  $[a, b]$  stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Eine äquivalente Darstellung wäre:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

5.4 Integrationsregeln

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt:

- Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , sodass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten  $a + c, b + c$  in  $I$  enthalten ist:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x) \, dx = \int_a^b f(t+c) \, dt$$

- Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , sodass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten  $a \cdot c, b \cdot c$  in  $I$  enthalten ist:

$$\int_a^b f(ct) \, dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x) \, dx$$

**Linearität**

$$\int u \cdot f(x) + v \cdot g(x) \, dx = u \int f(x) \, dx + v \int g(x) \, dx$$

**Gebietsadditivität**

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx, \quad c \in [a, b]$$

**Partielle Integration**

$$\int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \, dx$$

- Grundsätzlich gilt: Polynome ableiten ( $g(x)$ ), wo das Integral periodisch ist ( $\sin, \cos, e^x, \dots$ ) integrieren ( $f'(x)$ )
- Teils ist es nötig, mit 1 zu multiplizieren, um partielle Integration anwenden zu können (z.B.  $\int \log(x) \, dx$ )
- Muss eventuell mehrmals angewendet werden

**Substitution**  
Um  $\int_a^b f(g(x)) \, dx$  zu berechnen: Ersetze  $g(x)$  durch  $u$  und integriere  $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \frac{du}{g'(x)}$ .  
Auch:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) \, dt$$

- $g'(x)$  muss sich irgendwie herauskürzen, sonst nutzlos.
- Grenzen substituieren nicht vergessen.
- Alternativ kann auch das unbestimmte Integral berechnet werden und dann  $u$  wieder durch  $x$  substituiert werden.

**Partialbruchzerlegung**  
Seien  $p(x), q(x)$  zwei Polynome.  $\frac{p(x)}{q(x)}$  wird wie folgend berechnet:

- Falls  $\deg(p) \geq \deg(q)$ , führe eine Polynomdivision durch. Dies führt zum Integral  $\int a(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ .
- Berechne die Nullstellen von  $q(x)$ .
- Pro Nullstelle: Einen Partialbruch erstellen.
  - Einfach, reell:  $x_1 \rightarrow \frac{A}{x-x_1}$
  - $n$ -fach, reell:  $x_1 \rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$
  - Einfach, komplex:  $x^2 + px + q \rightarrow \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$
  - $n$ -fach, komplex:  $x^2 + px + q \rightarrow \frac{A_1x+b_1}{x^2+px+q} + \dots$
- Parameter  $A_1, \dots, A_n$  (bzw.  $B_1, \dots, B_n$ ) bestimmen. ( $x$  jeweils gleich Nullstelle setzen, umformen und lösen).

5.5 Integration von konvergenten Reihen

Sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen, die gleichmässig gegen eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Dann ist  $f$  beschränkt, integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

Weiter gilt, wenn  $\sum_{n=0}^\infty f_n$  auf  $[a, b]$  gleichmässig konvergiert

$$\sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b \sum_{n=0}^\infty f_n(x) \, dx$$

Sei nun  $f(x) = \sum c_k x^k$  eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann ist für jedes  $0 \leq r \leq \rho$ ,  $f$  auf  $[-r, r]$  integrierbar und es gilt  $\forall x \in [-\rho, \rho]$ :

$$\int_0^x f(t) \, dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}$$

5.6 Euler-McLaurin Formel

Die Formel hilft Summen wie  $1^l + 2^l + 3^l + \dots + n^l$  abzuschätzen. Für die Formel brauchen wir die Bernoulli Polynome  $B_n(x)$ , sowie die Bernoulli Zahlen  $B_n(0)$ . Wir brauchen dafür Polynome welche durch die folgenden Eigenschaften bestimmt sind:

- $P'_k = P_{k-1}, k > 1$
- $\int_0^1 P_k(x) \, dx = 0, \forall k \geq 1$

Für das  $k$ -te Bernoulli Polynom gilt:  $B_k(x) = k!P_k(x)$ . Wir definieren weiter  $B_0 = 1$  und alle anderen Bernoulli Zahlen rekursiv:  $B_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} B_i = 0$ .

Somit erhalten wir für das Bernoulli Polynom folgenden Definition:

$$B_k(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i x^{k-i}$$

Hier ein paar Bernoulli Polynome:  $B_0(x) = 1, B_1(x) = x - \frac{1}{2}, B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ . Nun definieren wir noch:

$$\tilde{B}_k(x) = \begin{cases} B_k(x) & \forall x : 0 \leq x < 1 \\ B_k(x-n) & \forall x : n \leq x < n+1 \end{cases}$$

Somit kommen wir auch die Euler-McLaurin Summationsformel:

**Euler-McLaurin Summationsformel**  
Sei  $f : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -mal stetig differenzierbar. Dann gilt:  
Für  $k = 1$ :

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) \, dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \int_0^n \tilde{B}_1(x)f'(x) \, dx$$

Für  $k > 1$ :

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) \, dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^j B_j}{j!} (f^{(j-1)}(n) + f^{(j-1)}(0)) + \tilde{R}_k$$

wobei

$$\tilde{R}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \tilde{B}_k(x)f^{(k)}(x) \, dx$$

**Example**

$$1^l + 2^l + 3^l + \dots + n^l \text{ wobei } l \geq 1, l \in \mathbb{N}$$

Angewandt auf  $f(x) = x^l$  und  $k = l + 1$  folgt für alle  $l \geq 1$ :

$$1^l + 2^l + 3^l + \dots + n^l = \frac{1}{l+1} \sum_{j=0}^l (-1)^j B_j \binom{l+1}{j} n^{l+1-j}$$

5.7 Stirling’sche Formel

Die Stirling’sche Formel macht eine Aussage über das Verhalten der Fakultät:

n! ≈ \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n} \quad \text{bzw.} \quad \lim\_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n}} = 1

Wir benützen jetzt die Euler-McLaurin FOrmel um eine präzise Aussage zuerhalten:

n! = \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n} \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} + R\_3(n)\right)

wobei

|R\_3(n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1

5.8 Uneigentliche Integral

**Uneigentliche Integral**

Sei  $f[a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und integrierbar auf  $[a, b]$  für alle  $a < b$ . Falls:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

existiert, wir bezeichnen den Grenzwert mit

$$\int_a^\infty f(x) \, dx$$

und sagen, dass  $f$  auf  $[a, \infty[$  integrierbar ist.

Auch hier können wir das Minoranten / Majoranten Kriterium verwenden. Weiter gilt, dass wenn die Funktion  $f : [1, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  monoton fallend ist. Die Reihe genau dann konvergiert, wenn  $\int_1^\infty f(x) \, dx$  konvergiert.

$f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar, falls:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) \, dx$$

existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert mit  $\int_a^b f(x) \, dx$  bezeichnet.

5.9 Gamma Funktion

Die Gamma Funktion wir dafür gebraucht um die Funktion  $n \mapsto (n - 1)!$  zu interpolieren. Für  $s > 0$  definieren wir:

\Gamma(s) := \int\_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \, dx = (s - 1)!

Die Gamma Funktion konvergiert für alle  $s > 0$  und hat folgende weitere Eigenschaften:

1. \Gamma(1) = 1

- 2. \Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)
- 3. \Gamma ist logarithmisch konvex, d.h.:

\Gamma(\lambda x + (2 - \lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}

für alle x, y > 0 und 0 \leq \lambda \leq 1

Die Gamma Funktion ist die einzige Funktion ]0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[ die (1), (2) und (3) erfüllt. Zudem gilt:

\Gamma(x) = \lim\_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad \forall x > 0

6 Trigonometrie

6.1 Hyperbol Funktionen

- 1. \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}
- 2. \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty[
- 3. \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1[

6.2 Regeln

6.2.1 Periodizität

- \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha) \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)
- \tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha) \quad \cot(\alpha + \pi) = \cot(\alpha)

6.2.2 Parität

- \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)
- \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)

6.2.3 Ergänzung

- \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)
- \tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot(\alpha)

6.2.4 Komplemente

- \sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha) \quad \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)
- \tan(\pi/2 - \alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(\pi/2 - \alpha) = -\cot(\alpha)

6.2.5 Doppelwinkel

- \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)
- \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)
- \tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}

6.2.6 Addition

- \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)
- \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)
- \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}

6.2.7 Subtraktion

- \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)
- \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)
- \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}

6.2.8 Multiplikation

- \sin(\alpha)\sin(\beta) = -\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2}
- \cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}
- \sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}

6.2.9 Potenzen

- \sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \sin(2\alpha))
- \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))
- \tan^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}

6.2.10 Diverse

- \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1
- \sinh^2(\alpha) - \cosh^2(\alpha) = 1
- \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{und} \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}

Wichtige Werte							
	deg	0°	30°	45°	60°	90°	180°
	rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
	cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
	sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
	tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0

7 Nützliche Sätze

**Bogenlänge**

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

**Bernoulli Ungleichung**

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$$

**Young’sche Ungleichung**

$$\forall \epsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R} : 2|xy| \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2$$

## Binomialsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

## 7.1 Bekannte Taylorreihen

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^9)$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^9)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^6)$$

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \mathcal{O}(x^4)$$

## 8 Tabellen

### 8.1 Typische Grenzwerte

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^m} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+\frac{1}{x})^b = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} (1+\frac{1}{x})^b = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a q^x = 0, \forall 0 \leq q < 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1-\frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1+\frac{k}{x})^{mx} = e^{km}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} x \log(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1)-x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan(x)} = 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+k}\right)^x = e^{-k}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a) \forall a > 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax}-1}{x} = a$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2^x} = 0$

### 8.2 Ableitungen und Stammfunktionen

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$
$c$	$0$
$x^a$	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$	$x^a$
$\frac{1}{a \cdot (n+1)} (ax+b)^{n+1}$	$(ax+b)^n$
$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x^\alpha, \alpha \neq -1$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{x}$
$\frac{n}{n+1} x^{\frac{1}{n}+1}$	$\sqrt[n]{x}$
$e^x$	$e^x$
$\ln( x )$	$\frac{1}{x}$
$\log_a  x $	$\frac{1}{x \ln a} = \log_a(e) \frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$	$\frac{1}{-\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$
$\operatorname{arcsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arccosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arctanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\frac{1}{f(x)}$	$\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$



$F(x)$	$F'(x) = f(x)$
$a^{cx}$	$a^{cx} \cdot c \ln a$
$x^x$	$x^x \cdot (1 + \ln x) \quad x > 0$
$(x^x)^x$	$(x^x)^x (x + 2x \ln(x)) \quad x > 0$
$x^{(x^x)}$	$x^{(x^x)} (x^{x-1} + \ln x \cdot x^x (1 + \ln x))$
$\frac{1}{a} \ln(ax + b)$	$\frac{1}{ax+b}$
$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln  cx + d $	$\frac{ax+b}{cx+d}$
$\frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right $	$\frac{1}{x^2-a^2}$
$\frac{x}{2} f(x) + \frac{a^2}{2} \ln(x + f(x))$	$\sqrt{a^2 + x^2}$
$\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{ a }$	$\sqrt{a^2 - x^2}$
$\frac{x}{2} f(x) - \frac{a^2}{2} \ln(x + f(x))$	$\sqrt{x^2 - a^2}$
$\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$
$\arcsin(\frac{x}{ a })$	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
$\frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a})$	$\frac{1}{x^2+a^2}$
$-\frac{1}{a} \cos(ax + b)$	$\sin(ax + b)$
$\frac{1}{a} \sin(ax + b)$	$\cos(ax + b)$
$-\ln  \cos(x) $	$\tan(x)$
$\ln  \sin(x) $	$\cot(x)$
$\ln \left  \tan(\frac{x}{2}) \right $	$\frac{1}{\sin(x)}$
$\ln \left  \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \right $	$\frac{1}{\cos(x)}$
$\frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x))$	$\sin^2(x)$
$\frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x))$	$\cos^2(x)$
$\tan(x) - x$	$\tan^2(x)$
$-\cot(x) - x$	$\cot^2(x)$
$x \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2}$	$\arcsin(x)$
$x \arccos(x) - \sqrt{1 - x^2}$	$\arccos(x)$
$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$	$\arctan(x)$
$\ln(\cosh(x))$	$\tanh(x)$

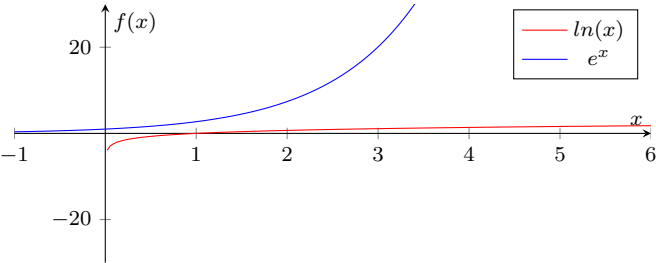
$F(x)$	$F'(x) = f(x)$
$\ln  f(x) $	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$x \cdot (\ln  x  - 1)$	$\ln  x $
$\frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} \quad n \neq -1$	$\frac{1}{x} (\ln x)^n$
$\frac{1}{2n} (\ln x^n)^2 \quad n \neq 0$	$\frac{1}{x} \ln x^n$
$\ln  \ln x  \quad x > 0, x \neq 1$	$\frac{1}{x \ln x}$
$\frac{1}{b \ln a} a^{bx}$	$a^{bx}$
$\frac{cx-1}{c^2} \cdot e^{cx}$	$x \cdot e^{cx}$
$\frac{x^{n+1}}{n+1} \left( \ln x - \frac{1}{n+1} \right) \quad n \neq -1$	$x^n \ln x$
$\frac{e^{cx} (c \sin(ax+b) - a \cos(ax+b))}{a^2 + c^2}$	$e^{cx} \sin(ax+b)$
$\frac{e^{cx} (c \cos(ax+b) + a \sin(ax+b))}{a^2 + c^2}$	$e^{cx} \cos(ax+b)$

### 8.3 Ableitungen

$\mathbf{F}(\mathbf{x})$	$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	$\mathbf{f}'(\mathbf{x})$
-	$(f^{-1})'(y_0)$	$\frac{1}{f'(x_0)}$
$\frac{x^{-a+1}}{a+1}$	$\frac{1}{x^a}$	$\frac{a}{x^{a+1}}$
$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$x^a (a \neq 1)$	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{k \ln(a)} a^{kx}$	$a^{kx}$	$ka^{kx} \ln(a)$
$\ln  x $	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3} x^{2/3}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin(2x))$	$\sin^2(x)$	$2 \sin(x) \cos(x)$
$\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} \sin(2x))$	$\cos^2(x)$	$-2 \sin(x) \cos(x)$
$-\ln  \cos(x) $	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ $1 + \tan^2(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\log(\cosh(x))$	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\ln  \sin(x) $	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$	$e^{cx}$	$c \cdot e^{cx}$
$x(\ln  x  - 1)$	$\ln  x $	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2} (\ln(x))^2$	$\frac{\ln(x)}{x}$	$\frac{1 - \ln(x)}{x^2}$
$\frac{x}{\ln(a)} (\ln  x  - 1)$	$\log_a  x $	$\frac{1}{\ln(a)x}$

8.4 Integrale

f(x)	F(x)
$\int f'(x)f(x) \, dx$	$\frac{1}{2}(f(x))^2$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx$	$\ln  f(x) $
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$	$\sqrt{\pi}$
$\int (ax+b)^n \, dx$	$\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$
$\int x(ax+b)^n \, dx$	$\frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
$\int (ax^p+b)^n x^{p-1} \, dx$	$\frac{(ax^p+b)^{n+1}}{ap(n+1)}$
$\int (ax^p+b)^{-1} x^{p-1} \, dx$	$\frac{1}{ap} \ln  ax^p+b $
$\int \frac{ax+b}{cx+d} \, dx$	$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln  cx+d $
$\int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$
$\int \frac{1}{x^2-a^2} \, dx$	$\frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right $
$\int \sqrt{a^2+x^2} \, dx$	$\frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$



9 Graphen

