1 Komplexe und Reelle Zahlen

1.1 Archimedisches Prinzip

Archimedisches Prinzip

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq n \cdot x$.

1.2 Supremum und Infimum

Definition: $A \subset \mathbb{R}$ heisst von oben [unten] beschränkt falls es $x \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $x \geq a$ [$x \leq a$] für alle $a \in A$. x heisst dann obere [untere] Schranke von A. Falls $x \in A$ und x obere [untere] SChranke von A, ist x das Maximum [Minimum] von A.

Supremum und Infimum

Falls $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ v.o.b [v.u.b] ist, gibt es eine kleinste obere Schranke [grösste untere Schranke] x von A. x heisst dann Supremum [Infimum] von A.

2 Folgen und Reihen

2.1 Konvergenz mit ϵ-Def

Definition

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen L
$\iff \lim_{n\to\infty} a_n = L$ (i.e. $\exists L \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0$ die Menge $n \in \mathbb{N} : a_n \notin]L-\epsilon, L+\epsilon[$ endlich ist)
$\iff \forall \epsilon > 0\ \exists N > 1\ \forall n \geq N :\ |a_n - L| < \epsilon$.

Wir dürfen (o.B.d.A.) annehmen, dass ϵ durch eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ beschränkt ist.

2.2 Konvergenz con Folgen

Bemerkung: konvergent $\implies$ beschränkt, aber nicht umgekehrt!
Bemerkung: (a_n) konvergent $\iff$ (a_n) beschränkt **und** $\liminf a_n = \limsup a_n$

Einschliessungskriterium

Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ und $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \geq k$, dann $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$.

Weierstrass

- Sei a_n monoton wachsend und nach oben beschränkt $\Rightarrow a_n$ konvergiert mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n :\ n \geq 1\}$.
- a_n monoton fallend und nach unten beschränkt $\Rightarrow a_n$ konvergiert mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n :\ n \geq 1\}$.

Cauchy-Kriterium

Eine Folge (a_n) heisst **Cauchy-Folge** falls $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1$ sodass $\forall n, m \geq N_\epsilon$ impliziert, dass $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Bemerkung: Für eine Cauchy-Folge (a_n) gilt:

- (a_n) cauchy $\Rightarrow (a_n)$ beschränkt
- (a_n) cauchy $\Leftrightarrow (a_n)$ konvergent

2.3 Teilfolge

Eine Teilfolge von a_n ist eine Folge b_n wobei $b_n = a_{l(n)}$ und l eine Funktion mit $l(n) < l(n+1) \quad \forall n \geq 1$ (z.B. $l = 2n$ für jedes gerade Folgenglied).

Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

2.4 Limes Superior und Limes Inferior

Limes superior & inferior

$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m\geq n} x_m\right)$
$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{m\geq n} x_m\right)$

2.5 Strategie - Konvergenz von Folgen

1. Bei Brüchen: Grösste Potenz von n kürzen. Alle Brüche der Form $\frac{a}{n^a}$ streichen, da diese nach 0 gehen wenn $n \to 0$.
2. Bei Wurzeln in Summe im Nenner: Multiplizieren des Nenners und Zählers mit der Differenz der Summe im Nenner. (z.B. $(a+b)$ mit $(a-b)$ multiplizieren)
3. Bei rekursiven Folgen: Anwendung von Weierstrass zur monotonen Konvergenz
4. Einschliessungskriterium (Sandwich-Theorem) anwenden.
5. Mit bekannter Folge vergleichen.
6. Grenzwert durch einfaches Umformen ermitteln.
7. Limit per Definition der Konvergenz zeigen.
8. Anwendung des Cauchy-Kriteriums.
9. Suchen eines konvergenten Majorant.
10. Weinen und die Aufgabe überspringen.

2.6 Strategie - Divergenz von Folgen

1. Suchen einer divergenten Vergleichsfolge.
2. Bei alternierenden Folgen: Zeige, dass Teilfolgen nicht gleich werden ($\lim_{n\to\infty} a_{p_1(n)} \neq \lim_{n\to\infty} a_{p_2(n)}$), mit z.B. gerade/ungerade als Teilfolgen.

2.7 Reihe Konvergenz Definition

Definition

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist **konvergent**, falls die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall definirien wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$$

2.8 Reihenarithmetik

Reihenarithmetik

Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent sind, dann gilt:

- $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + (\sum_{k=1}^{\infty} b_k)$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

2.9 Absolute Konvergenz

Definition

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst **absolut konvergent**, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Eine absolut konvergente Reihe ist auch konvergent, es gilt

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

.

2.10 Konvergenz von Reihen

Cauchy-Kriterium für Reihen

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, falls

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1 \text{ mit } |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \epsilon,\ \forall m \geq n > N$$

.

Nullfolgenkriterium

Wenn für eine Folge $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$ ist, dann divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Vergleichssatz

Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit $0 \leq a_k \leq b_k, \forall k \geq K \geq 1$ sind, so gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

Als Vergleichsreihe (Majorant / Minorant) eignet sich oft eine Reihe der folgenden Kategorien:

- **Geometrische Reihe:** $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergiert für $|q| \geq 1$ und konvergiert zu $\frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$
- **Zeta-Funktion** $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ divergiert für $s \leq 1$ und konvergiert für $s > 1$.

Des weiteren gilt folgendes:

- Sei $(S_n) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ mit $|q| < 1$, dann ist (S_n) konvergent und $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$,
  $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$
- $(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ konvergiert

Leibnizkriterium
Wenn $a_n \geq 0, \forall n \geq 1$ monoton fallend und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist, dann konvergiert $S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ und $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$.

Quotienten-/Wurzelkriterium
Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq 0 \ \forall n \geq 1$. Sei:
- $q = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$
- $q = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Falls gilt:
- $q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.
- $q = 1 \Rightarrow$ keine Aussage.
- $q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

2.11 Potenzreihen

Definition: Eine Potenzreihe ist eine Reihe von der Form $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot z^k$, wobei $(c_k)_{k\geq 0}$ eine Folge ist.

Konvergenzradius
Der Konvergenzradius ρ einer Potenzreihe entrspricht:

$$\rho \begin{cases} +\infty & \text{falls } \mathrm{limsup}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\mathrm{limsup}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \mathrm{limsup}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

DIe Potenzreihe konergiert absolut für alle $|z| < \rho$ und divergiert für alle $|z| > \rho$. Der Fall $|z| = \rho$ musst jeweils noch separat geprüft werden.
EIne Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius ρ konvergiert gleichmässig auf $[-\rho, \rho]$, inbesondere ist $f :] - \rho, \rho[\to \mathbb{R}$ stetig.

2.12 Doppelreihen

Definition: Gegeben eine Doppelfolge $(a_{ij})_{i,j\geq 0}$ so können $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = A_0 + A_1 + ...$ und $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} = B_0 + B_1 + ...$ beide konvergent sein mit verschiedenen Grenzwerten. Wir nennen $\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}$ eine Doppelreihe. Wenn die Reihe bsolut konvergiert, so sind beide Grenzwerte gleich und jere Anordnung knvergiert zum selben Grenzwert.

Das Cauchy Produkt
Das Cauchy Produkt zweier Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ ist die Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(a_{n-j} \cdot b_j) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + ...$$

Falls beide Reihen **absolut** konvergieren, so konvergiert auch das Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}b_j\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$$

2.13 Integral Test

Integral Test
Sei $f(x)$ eine stetige, positive und monoton fallende Funktion auf $[k, \infty[$ und $f(n) = a_n$:

$$\int_k^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergiert } \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

$$\int_k^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ divergiert } \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

2.13.1 Wichtige Reihen

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

2.13.2 Strategie - Konvergenz von Reihen

1. Ist Reihe ein bekannter Typ? (Teleskopieren, Geometrische/Harmonische Reihe, Zetafunktion, ...)
2. Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$? Wenn nein, divergiert die Reihe (*Nullfolgekriterium*)
3. Quotientenkriterium & Wurzelkriterium anwenden
4. Vergleichssatz anwenden, Vergleichsreihen suchen
5. Leibnizkriterium anwenden

3 Funktionen und Stetigkeit

3.1 Stetigkeit Definitionen

Sei $f : D \to \mathbb{R}^d, x \to f(x)$ eine Funktion in $D \subseteq \mathbb{R}^d$.

Definition
f ist in $x_0 \in D$ stetig, falls für jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ folgendes gilt:

$$f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

f ist stetig auf D, falls sie in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.

ϵ-Definition
Punktweise stetig: $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in einem Punkt x_0 falls:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Gleichmässig stetig:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Bemerkung: In der punktweisen Stetigkeit ist das δ von x_0 und ϵ abhängig ($delta(\epsilon, x_0)$), während in der gleichmässigen Stetigkeit das δ nur von ϵ abhängen darf ($\delta(\epsilon)$).

Falls f und g den gleichen Definitions-/Bildbereich haben und in x_0 stetig sind, dann sind auch

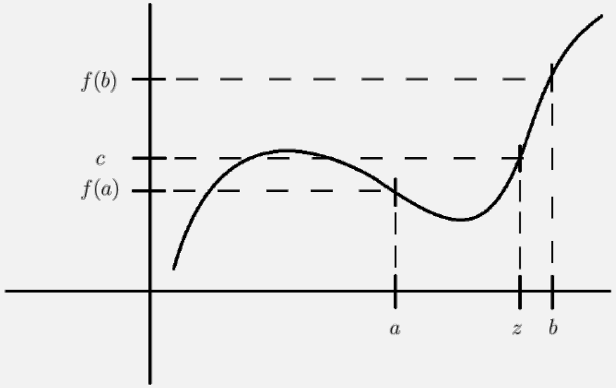
$$f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g, \frac{f}{g}, |f|, \max(f, g), \min(f, g)$$

stetig in x_0.

Bemerkung: Polynomiale Funktionen und trigonometrsiche (sin und cos) Funktionen) sind auf $\mathbb{R}$ stetig.

3.2 Zwischenwertsatz

Zwischenwertsatz
Wenn $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $a, b \in I$ ist, dann gibt es für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $a \leq z \leq b$ mit $f(z) = c$.



Wird häufig verwendet um zu zeigen, das eine Funktion einen gewissen Wert annimmt.

Daraus folgt, dass ein Polynom mit ungeradem Grad mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt.

3.3 Min-Max Satz

Ein Intervall $I \in \mathbb{R}$ ist kompakt, falls es von der Form $I = [a, b]$ mit $a \leq b$ ist.

Min-Max-Satz
Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I. Dann gibt es $u, v \in I$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v), \forall x \in I$$

Insbesondere ist f **beschränkt**.

3.4 Satz über die Umkehrabbildung

Satz über die Umkehrabbildung
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton und sei $J = f(I) \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $f^{-1} : J \to I$ stetig und streng monoton.

Stetigkeit der Verknüpfung
Sei $f : D_1 \to D_2, g : D_2 \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D_1$. Falls f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig ist, dann ist $g \bigcirc f : D_1 \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig.

Die reelle Exponentialfunktion
$\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv. Auch die Umkehrfunktion $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ hat diese Eigenschaften.

3.5 Konvergenz von Funktionenfolgen

Punktweise Konvergenz
Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ falls für alle $x \in D$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Alternativ:

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in D, \exists N \geq 1, \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Gleichmässige Konvergenz
Die Folge (f_n) konvergiert gleichmässig in D gegen f falls gilt

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N,\ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Die Funktionenfolge (g_n) ist gleichmässig konvergent, falls für alle $x \in D$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ existiert und die Folge (g_n) gleichmässig gegen g konvergiert.

Bemerkung: Wenn eine Funktionenfolge aus stetigen Funktionen besteht und gleichmässig gegen eine Funktion f konvergiert, dann ist f stetig.

3.6 Konvergenz von FunktionenReihen

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig, falls die durch $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

Sei f_n eine Folge stetiger Funktionen. Ausserdem ist $|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmässig und deren Grenzwert ist eine in D stetige Funktion.

3.7 Potenzreihen

Potenzreihe
Potenzreihen sind Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 wird als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ definiert.

Konvergenzradius
Der Konvergenzradius einer Potenzreihe um einen Entwicklungspunkt x_0 ist die grösste Zahl r, so dass die Potenzreihe für alle x mit $|x - x_0| < r$ konvergiert. Falls die Reihe für alle x konvergiert, ist der Konvergenzradius r unendlich. Sonst:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

3.7.1 Definitionen per Potenzreihen

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad r = \infty$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad r = \infty$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad r = \infty$$

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \qquad r = 1$$

3.8 Grenzwerte von Funktionen

Häufungspunkt
$x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt der Menge D falls:

$$\forall \delta > 0 : (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) \cap D \neq \varnothing$$

Grenzwert - Funktionen
Wenn $f : D \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D ist, dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$ ($\lim_{x\to x_0} f(x) = A$), falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$, so dass:

$$\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) : |f(x) - A| < \epsilon$$

Alternativ:

$$|f(x) - A| < \epsilon \text{ whenever } 0 < |x - x_0| < \delta$$

3.9 Linksseitiger und Rechtsseitiger Grenzwert

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von $D \cap]x_0, +\infty[$. Falls der Grenzwert der eingeschränkten Funktion f im Bereich $D \cap]x_0, +\infty[$ für $x \to x_0$ existiert, wird er mit $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ bezeichnet und nennt sich **rechtsseitiger Grenzwert** von f bei x_0. Das Analoge gilt für den **linksseitigen Grenzwert**.
Wir erweitern diese Definition auf $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[: f(x) < \frac{1}{\epsilon}$$

und analog für $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[: f(x) < \frac{1}{-\epsilon}$$

Für den linksseitigen Grenzwert gilt das Analoge.
Alternativ: Man sagt $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ falls gilt:

$$\forall \epsilon\ \exists \delta\ |f(x) - L| < \epsilon \text{ whenever } 0 < x - a < \delta \text{ (oder } a < x < a + \delta)$$

Man sagt $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ falls gilt:

$$\forall \epsilon\ \exists \delta\ |f(x) - L| < \epsilon \text{ whenever } -\delta < x - a < 0 \text{ (oder } a - \delta < x < a)$$

4 Ableitungen

4.1 Differenzierbarkeit

Differenzierbar
f ist **in x_0 differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert. Wenn dies der Fall ist, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ oder $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x0)$ bezeichnet. f ist **differenzierbar**, falls f für jedes Häufungspunkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist.

Bemerkung: Die Tangente zu x_0 ist definiert durch: $g(x) := f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$.

Differenzierbarkeit nach Weierstrass
$f : D \to R$ ist in x_0 differenzierbar (x_0 Haufungspunkt von D) $\iff$ Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \to \mathbb{R}$ mit:

1. $f(x) = f(x_0) + c(x-x_0) + r(x)(x-x_0)$
2. $r(x_0) = 0$, r stetig in x_0.

Falls f differenzierbar ist, dann ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.

Variation: Eine kunktion f ist genau dann in x_0 differenzierbar falls eine Funktion $\phi(x) = f'(x_0) + r(x)$ gibt, so dass $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x-x_0)$, $\forall x \in D$ und ϕ in x_0 stetig ist. In diesem fall gilt $\phi(x_0) = f'(x_0)$.

Bemerkung: Die Tangentengleichung von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

Höhere Ableitungen

1. Für $n \geq 2$ ist f n-mal differenzierbar in D falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ die n-te Ableitung von f.
2. f ist n-mal stetig differenzierbar in D, falls sie n-mal differnzierbar und $f^{(n)}$ in D stetig ist.
3. f ist in D glatt, falls sie $\forall n \geq 1$ n-mal differenzierbar ist ("unendlich differenzierbar").

Bemerkung: $\exp(x), \sin(x), \cos(x), \sinh(x), \cosh(x), \tanh(x), \ln(x), \arcsin(x), \arccos(x), \mathrm{arccot}(x), \arctan(x)$ und alle Polynome sind glatte Funktionen. $\tan(x)$ ist auf $\mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi\}$, $\cot(x)$ auf $\mathbb{R}\backslash\{k\pi\}$ glatt.

4.2 Ableitungsregeln

Linearität der Ableitung
$(\alpha \cdot f(x) + g(x))' = \alpha \cdot f'(x) + g'(x)$

Produktregel
$(f(x) + g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

Quotientenregel
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Kettenregel
$(f(g(x)))' = g'(x)\cdot f'(g(x))$

Potenzregel
$(c\cdot x^a)' = c\cdot a\cdot x^{a-1}$

Rule de L'Hôpital
Für Grenzwerte, die auf einen unbestimmten Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ führen, gilt:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.3 Hohereableitungsregeln

Sei $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar.

Linearität der Ableitung
$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

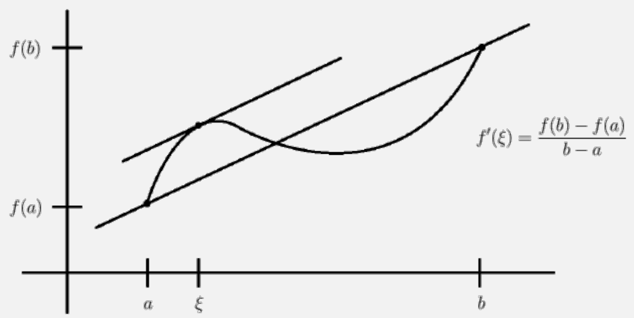
Produktregel
$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}\cdot g^{(n-k)}$

Bemerkung: $\frac{f}{g}$ ist n-mal differenzierbar falls $g(x) \neq 0, \forall x \in D$ und $(g\circ f)$ ist n-mal differenzierbar.

4.4 Sätze zur Ableitung

Satz von Rolle
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar. Wenn $f(a) = f(b)$, dann gibt es ein $\xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

Mittelwertsatz (Lagrange)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in]a,b[$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



4.5 Taylorreihen

Jede glatte, d.h. beliebig oft differenzierbare, Funktion $f \in C^\infty$ kann als Potenzreihe angenähert werden.

Taylor-Polynom
Das n-te Talyor-Polynom $T_n f(x;a)$ an einer Entwicklungsstelle a ist definiert als:

$$T_n f(x;a) := \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^k$$

$= f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2 + \ldots$

Taylorreihe
Die unendliche Reihe

$$Tf(x;a) := T_\infty = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(n)(a)}{n!}\cdot(x-a)^n$$

wird Taylorreihe von f an Stelle a genannt.

Bemerkung: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $p > 0$. Dann ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_l(x-x_0)^n$ auf $]x_0 - p, x_0 + p[$ differenzierbar und $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-x_0)^{k-1}$ für alle $x \in]x_0 - p, x_0 + p[$.

4.6 Kurvendiskussion und Varie

4.7 Surjektivität und injektivität

Definition
Es seien X und Y Mengen, sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung.
Surjektivität: Die Abbildung f heißt surjektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ (mindestens) ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.
Injektivität: Die Abbildung f heißt surjektiv, wenn es zu jedem Element $y \in Y$ höchstens ein (also eventuell gar kein) Element $x \in X$ gibt, das darauf zielt, wenn also nie zwei oder mehr verschiedene Elemente der Definitionsmenge auf dasselbe Element der Zielmenge abgebildet werden: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Injektivität zeigen
f injektiv $\Leftrightarrow f$ streng monoton $\Leftrightarrow f' > 0$ oder $f' < 0$.

Surjektivität zeigen

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$und $\lim_{x\to-\infty} = a$ zeigen
2. Sei nun $y \in]a,b[$ beliebig. Wegen der Grenzwerte von f gilt: $\exists x_1 < x_2 : f(x_1) < y < f(x_2)$. Mit dem Zwischenwertsatz gilt dann: $\exists c \in [x_1, x_2] : f(c) = y$ und somit ist f surjektiv.

4.7.1 Konvexität und Konkavität

Definition

f ist [streng] konvex (auf I) falls f für alle $x \leq [<] y, x, y \in I$ und $\lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \quad \leq [<] \quad \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Bemerkungen

1. Die Summe zweier konvexer Funktionen ist konvex
2. f ist genau dann konvex, falls f für $x_0 \leq x \leq x_1$ in I gilt:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

3. Die Funktion f ist genau dann [streng] konvex, falls f' [streng] monoton wachsend ist.

Bemerkung: Alle Aussagen gelten auch für **Konkavität**, wir müssen nur das Ungleichzeichen umkehren

4.7.2 Begriffe und Korollare

Es gilt:

- $f'(x) = 0 \forall x \Rightarrow f(x)$ konstant
- $f'(x) = g'(x) \forall x \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ s.t. $f(x) = g(x) + c$
- $f'(x) \geq \ (>)\ 0 \forall x \Rightarrow f(x)$ (strikt) monoton wachsend
- $f'(x) \leq \ (<)\ 0 \forall x \Rightarrow f(x)$ (strikt) monoton fallend

Kritische Punkte

Punkte in welchen $f'(x) = 0$ gilt oder $f'(x), f(x)$ nicht existieren, nennen wir kritische Punkte.

Bemerkung:

- n gerade und x_0 lokale Extremstelle $\Rightarrow f^{(n+1)}(x_0) = 0$
- n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ eine strikt lokale Minimalstelle
- n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ eine strikt lokale Maximalstelle

4.7.3 Komplette Kurvendiskussion

Symmetrie:

- Achsensymmetrisch/Gerade: $\forall x \in D : f(-x) = f(x)$
- Punktsymmetrisch/Ungerade: $\forall x \in D : f(-x) = -f(x)$

Grenzverhalten:

- Limes für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ bestimmen
- Limes für alle kritische Punkte bestimmen

Nullstellen:

- Punkte berechnen wo $f(x) = 0$ gilt
- Punkte bestimmen wo $f(0) = a$ gilt

Extremstellen:

1. Berechnung aller kritischen Punkte (u.a. (Grenz-) Werte des Intervalls)
2. Berechnung der ersten Ableitung und der Punkte, wo $f'(x_E) = 0$ gilt.
3. Berechnung der zweiten Ableitung und von $f''(x_E) = a$:
   - $a < 0$: lokales Maximum
   - $a > 0$: lokales Minimum
   - $a = 0$: keine Assage moglich

Settelpunkte: Berechnung der Punkte wo gilt:

- $f''(x_S) = 0$
- $f'''(x_S) \neq 0$
- $f'(x_S) \neq 0$

Wendelpunkte: Berechnung der Punkte wo gilt:

- $f''(x_W) = 0$
- $f'''(x_S) \neq 0$
- $f'(x_S) = 0$

Krümmung: Berechnung der Zweiten Ableitung:

- $f''(x) > 0 \to$ linksgekrümmt (konvex)
- $f''(x) < 0 \to$ rechtsgekrümmt (konkav)

5 Integrale

5.1 Riemann-Integral

Partitionierung

Wir teilen das Intervall $I = [a,b]$ in n Teilintervalle auf. Das gibt uns eine Menge von Grenzpunkten $x_0 ... x_n$. Es gilt also: $P := x_0 = a, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b$.
Ein Teilintervall I_i ist gegeben durch $I_i = [x_{i-1}, x_i]$.

Stützstelle

Aus jedem Teilintervall I_i wählen wir einen Punkt ξ_i. Das gibt uns die Menge der Stützstellen $\xi_1 ... \xi_n$.
$\xi = \xi_1 ... \xi_n$, wobei $\xi_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$.

Riemann-Summe

Gegeben sei eine stetige Funktion $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$, sowie eine Partitionierung P in n Teile und Stützstellen ξ. Dann ist die Riemannsche Summe definiert durch:

$$S(f,P,\xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Ober- und Untersumme

Mithilfe der Parition können wir nun die Unertsumme/Obersumme einer Funktion definirien:

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i, \quad f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta_i, \quad F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

Sei nun $\mathcal{P}(I)$ die Menge alle Partitionen von I, definieren wir:

$$s(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f,P) \text{ und } S(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f,P)$$

Riemann-integrierbar

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar, falls $s(f) = S(f)$. In diesem Fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert als:

$$s(f) := \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = S(f)$$

Alternativ: f ist genau dann integrierbar wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0, \exists P : |s(f,P) - S(f,P)| < \epsilon$$

Bemerkung:

- f stetig in $[a,b] \implies f$ integrierbar über $[a,b]$
- f monoton in $[a,b] \implies f$ integrierbar über $[a,b]$

Wenn f, g beschränkt und integrierbar sind, dann sind

$$f+g, \lambda \cdot f, f \cdot g, |f|, \max(f,g), \min(f,g), \frac{f}{g}$$

integrierbar.

5.2 Sätze & Umgleichungen

Umgleichungen

- $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b] \to \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$
- $\left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$
- $\left| \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x} \sqrt{\int_a^b g^2(x) \, \mathrm{d}x}$

Mittelwertsatz

Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

Daraus folgt auch, dass wenn $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ wobei f stetig, g beschränkt und integrierbar mit $g(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$ ist, dann gibt es:

$$\xi \in [a,b] \qquad \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$$

5.3 Stammfunktionen

Stammfunktion
Eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst Stammfunktion von f, falls F (stetig) differenzierbar in $[a, b]$ ist und $F' = f$ in $[a, b]$ gilt.

Bemerkung: "f integrierbar" impliziert *nicht*, dass eine Stammfunktion existiert. Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0 \\ 1, & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Hauptsatz Differential-/Integralrechnung
Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t, \ \ a \leq x \leq b$$

ist in $[a, b]$ stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$$

Eine äquivalente Darstellung wäre:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

.

5.4 Integrationsregeln

Sei $I \subset R$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

1. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten $a + c$, $b + c$ in I enthalten ist:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(t + c)\mathrm{d}t$$

2. Seien $a, b, c \in R$, sodass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten $a \cdot c, b \cdot c$ in I enthalten ist:

$$\int_a^b f(ct)\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)\ \mathrm{d}x$$

Linearität

$$\int u \cdot f(x) + v \cdot g(x)\ \mathrm{d}x = u \int f(x)\ \mathrm{d}x + v \int g(x)\ \mathrm{d}x$$

Gebietsadditivität

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x, \ \ c \in [a, b]$$

Partielle Integration

$$\int f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x$$

- Grundsätzlich gilt: Polynome ableiten $(g(x))$, wo das Integral periodisch ist $(\sin, \cos, e^x, ...)$ integrieren $(f'(x))$
- Teils ist es nötig, mit 1 zu multiplizieren, um partielle Integration anwenden zu können (z.B. $\int \log(x)\ \mathrm{d}x$)
- Muss eventuell mehrmals angewendet werden

Substitution
Um $\int_a^b f(g(x))\ \mathrm{d}x$ zu berechnen: Ersetze $g(x)$ durch u und integriere $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$.
Auch:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$$

- $g'(x)$ muss sich irgendwie herauskürzen, sonst nutzlos.
- Grenzen substituieren nicht vergessen.
- Alternativ kann auch das unbestimmte Integral berechnet werden und dann u wieder durch x substituiert werden.

Partialbruchzerlegung
Seien $p(x), q(x)$ zwei Polynome. $\int \frac{p(x)}{q(x)}$ wird wie folgend berechnet:

1. Falls $\deg(p) \geq \deg(q)$, führe eine Polynomdivision durch. Dies führt zum Integral $\int a(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$.
2. Berechne die Nullstellen von $q(x)$.
3. Pro Nullstelle: Einen Partialbruch erstellen.
   - Einfach, reell: $x_1 \to \frac{A}{x-x_1}$
   - n-fach, reell: $x_1 \to \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$
   - Einfach, komplex: $x^2 + px + q \to \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$
   - n-fach, komplex: $x^2 + px + q \to \frac{A_1x+b_1}{x^2+px+q} + \ldots$
4. Parameter $A_1, \ldots, A_n$ (bzw. $B_1, \ldots, B_n$) bestimmen. (x jeweils gleich Nullstelle setzen, umformen und lösen).

5.5 Integration von konvergenten Reihen

Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen, die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt, integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Weiter gilt, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf $[a, b]$gleichmässig konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x$$

Sei nun $f(x) = \sum c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für jedes $0 \leq r \leq \rho$, f auf $[-r, r]$ integrierbar und es gilt $\forall x \in [-\rho, \rho]$:

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}$$

5.6 Euler-McLaurin Formel

Die Formel hilft Summen wie $1^l + 2^l + 3^l + ... + n^l$ abzuschatzen. Fur die Formel brauchen wir die Bernoulli Polynome $B_n(x)$, sowie die Bernoulli Zahlen $B_n(0)$. Wir brauchen dafur Polynome welche durch die folgenden Eigenschaften bestimmt sind:

1. $P_k' = P_{k-1}, k > 1$
2. $\int_0^1 P_k(x)\ \mathrm{d}x = 0, \forall k \geq 1$

Für das k-te Bernoulli Polynom gilt: $B_k(x) = k!P_k(x)$. Wir definieren weiter $B_0 = 1$ und alle anderen Bernoulli Zahlen rekursiv: $B_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i = 0$.
Somit erhalten wir für das Bernoulli Polynom folgenden Definition:

$$B_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B_i x^{k-i}$$

Hier ein paar Bernoulli Polynome: $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$. Nun definieren wir noch:

$$\tilde{B}_k(x) = \begin{cases} B_k(x) & \forall x : 0 \leq x < 1 \\ B_k(x - n) & \forall x : n \leq x < n + 1 \end{cases}$$

Somit kommen wir aud die Euler-McLaurin Summationsformel:

Euler-McLaurin Summationsformel
Sei $f : [0, n] \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar. Dann gilt:
Für $k = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \int_0^n \tilde{B}_1(x)f'(x)\ \mathrm{d}x$$

Für $k > 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) +$$

$$\sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^j B_j}{j!}(f^{(j-1)}(n) + f^{(j-1)}(0)) + \tilde{R}_k$$

wobei

$$\tilde{R}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \tilde{B}_k(x)f^{(k)}(x)\ \mathrm{d}x$$

Example

$$1^l + 2^l + 3^l + ... + n^l \text{ wobei } l \geq 1, l \in \mathbb{N}$$

Angewandt auf $f(x) = x^l$ und $k = l + 1$ folgt für alle $l \geq 1$:

$$1^l + 2^l + 3^l + ... + n^l = \frac{1}{l+1} \sum_{j=0}^{l} (-1)^j B_j \binom{l+1}{j} n^{l+1-j}$$

5.7 Stirling'sche Formel

Die Stirling'sche Formel macht eine Aussage über das Verhalten der Fakultät:

$$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{e^n} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{e^n}} = 1$$

Wir benützen jetzt die Euler-McLaurin FOrmel um eine präzise Aussage zuerhalten:

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{e^n}\cdot \exp\left(\frac{1}{12n} + R_3(n)\right)$$

wobei

$$|R_3(n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216}\cdot\frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1$$

5.8 Uneigentliche Integral

Uneigentliche Integral

Sei $f[a,\infty[\to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a,b]$ für alle $a < b$. Falls:

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

existiert, wir bezeichnen den Grenzwert mit

$$\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$$

und sagen, dass f auf $[a,\infty[$ integrierbar ist.

Auch hier können wir das Minoranten / Majoranten Kriterium verwenden. Weiter gilt, dass wenn die Funktion $f : [1,\infty[\to [0,\infty[$monoton fallend ist. Die Reihe genau dann konvergiert, wenn $\int_1^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$ konvergiert.

$f :]a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar, falls:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert mit $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ bezeichnet.

5.9 Gamma Funktion

DIe Gamma Funktion wir dafür gebraucht um die Funktion $n \mapsto (n-1)!$ zu interpolieren. Für $s > 0$ definieren wir:

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\ \mathrm{d}x = (s-1)!$$

Die Gamma Funktion konvergiert für alle $s > 0$ und hat folgende weiter Eingeschaften:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
3. Γ ist logaritmisch konvex, d.h.:

$$\Gamma(\lambda x + (2-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

für alle $x, y > 0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$

Die Gamma Funktion ist die einzige Funktion $]0,\infty[\to]0,\infty[$ die (1), (2) und (3) erfüllt. Zudem gilt:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)...(x+n)} \quad \forall x > 0$$

6 Trigonometrie

6.1 Hyperbol Funktionen

1. $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$
2. $\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbb{R}\to[1,\infty[$
3. $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} : \mathbb{R}\to[-1,1[$

6.2 Regeln

6.2.1 Periodizität

- $\sin(\alpha+2\pi) = \sin(\alpha) \quad \cos(\alpha+2\pi) = \cos(\alpha)$
- $\tan(\alpha+\pi) = \tan(\alpha) \quad \cot(\alpha+\pi) = \cot(\alpha)$

6.2.2 Parität

- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$

6.2.3 Ergänzung

- $\sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha) \quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi-\alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(\pi-\alpha) = -\cot(\alpha)$

6.2.4 Komplemente

- $\sin(\pi/2-\alpha) = \cos(\alpha) \quad \cos(\pi/2-\alpha) = \sin(\alpha)$
- $\tan(\pi/2-\alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(\pi/2-\alpha) = -\cot(\alpha)$

6.2.5 Doppelwinkel

- $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin(\alpha)$
- $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

6.2.6 Addition

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

6.2.7 Subtraktion

- $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

6.2.8 Multiplikation

- $\sin(\alpha)\sin(\beta) = -\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}$
- $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$
- $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

6.2.9 Potenzen

- $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1-\sin(2\alpha))$
- $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$
- $\tan^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$

6.2.10 Diverse

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\sinh^2(\alpha) - \cosh^2(\alpha) = 1$
- $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$ und $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

Wichtige Werte

deg	0°	30°	45°	60°	90°	180°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0

7 Nützliche Sätze

Bogenlänge

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}$$

Bernoulli Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + n\cdot x \quad \forall n\in\mathbb{N}, x > -1$$

Young'sche Ungleichung

$$\forall\epsilon > 0, \forall x,y\in\mathbb{R} : 2|xy| \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon}y^2$$

Binomialsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

7.1 Bekannte Taylorreihen

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^9)$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^9)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^6)$$

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\mathcal{O}(x^5)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \mathcal{O}(x^4)$$

8 Tabellen

8.1 Typische Grenzwerte

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$
$\lim_{x\to-\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = 0$	$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^m} = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x\to+\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$	$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^b = 1$	$\lim_{x\to 0} (1+\frac{1}{x})^b = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} x^a q^x = 0, \forall 0 \le q < 1$	$\lim_{x\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$
$\lim_{x\to\pm\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$	$\lim_{x\to\pm\infty} (1-\frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$
$\lim_{x\to\pm\infty} (1+\frac{k}{x})^{mx} = e^{km}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$
$\lim_{x\to 0} x\log(x) = 0$	$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1)-x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan(x)} = 1$	$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+k}\right)^x = e^{-k}$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a) \forall a > 0$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x} = a$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} = 1$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2^x} = 0$

8.2 Ableitungen und Stammfunktionen

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$
c	0
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	x^a
$\frac{1}{a\cdot(n+1)}(ax+b)^{n+1}$	$(ax+b)^n$
$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x^\alpha, \alpha \neq -1$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{x}$
$\frac{n}{n+1}x^{\frac{1}{n}+1}$	$\sqrt[n]{x}$
e^x	e^x
$\ln(\|x\|)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a \|x\|$	$\frac{1}{x\ln a} = \log_a(e)\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$	$\frac{1}{-\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$
$\operatorname{arcsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arccosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arctanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\frac{1}{f(x)}$	$\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$
a^{cx}	$a^{cx} \cdot c \ln a$
x^x	$x^x \cdot (1 + \ln x) \quad x>0$
$(x^x)^x$	$(x^x)^x (x + 2x \ln(x)) \quad x>0$
$x^{(x^x)}$	$x^{(x^x)} (x^{x-1} + \ln x \cdot x^x (1 + \ln x))$
$\frac{1}{a} \ln(ax + b)$	$\frac{1}{ax+b}$
$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln \lvert cx + d \rvert$	$\frac{ax+b}{cx+d}$
$\frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert$	$\frac{1}{x^2-a^2}$
$\frac{x}{2} f(x) + \frac{a^2}{2} \ln(x + f(x))$	$\sqrt{a^2 + x^2}$
$\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{\lvert a \rvert}$	$\sqrt{a^2 - x^2}$
$\frac{x}{2} f(x) - \frac{a^2}{2} \ln(x + f(x))$	$\sqrt{x^2 - a^2}$
$\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$
$\arcsin(\frac{x}{\lvert a \rvert})$	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
$\frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a})$	$\frac{1}{x^2+a^2}$
$-\frac{1}{a} \cos(ax + b)$	$\sin(ax + b)$
$\frac{1}{a} \sin(ax + b)$	$\cos(ax + b)$
$-\ln \lvert \cos(x) \rvert$	$\tan(x)$
$\ln \lvert \sin(x) \rvert$	$\cot(x)$
$\ln \left\lvert \tan(\frac{x}{2}) \right\rvert$	$\frac{1}{\sin(x)}$
$\ln \left\lvert \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \right\rvert$	$\frac{1}{\cos(x)}$
$\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$	$\sin^2(x)$
$\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$	$\cos^2(x)$
$\tan(x) - x$	$\tan^2(x)$
$-\cot(x) - x$	$\cot^2(x)$
$x \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2}$	$\arcsin(x)$
$x \arccos(x) - \sqrt{1 - x^2}$	$\arccos(x)$
$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$	$\arctan(x)$
$\ln(\cosh(x))$	$\tanh(x)$

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$
$\ln \lvert f(x) \rvert$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$x \cdot (\ln \lvert x \rvert - 1)$	$\ln \lvert x \rvert$
$\frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} \quad n \neq -1$	$\frac{1}{x} (\ln x)^n$
$\frac{1}{2n} (\ln x^n)^2 \quad n \neq 0$	$\frac{1}{x} \ln x^n$
$\ln \lvert \ln x \rvert \quad x>0, x \neq 1$	$\frac{1}{x \ln x}$
$\frac{1}{b \ln a} a^{bx}$	a^{bx}
$\frac{cx-1}{c^2} \cdot e^{cx}$	$x \cdot e^{cx}$
$\frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) \quad n \neq -1$	$x^n \ln x$
$\frac{e^{cx}(c \sin(ax+b) - a \cos(ax+b))}{a^2+c^2}$	$e^{cx} \sin(ax+b)$
$\frac{e^{cx}(c \cos(ax+b) + a \sin(ax+b))}{a^2+c^2}$	$e^{cx} \cos(ax+b)$

8.3 Ableitungen

$\mathbf{F(x)}$	$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$
-	$(f^{-1})'(y_0)$	$\frac{1}{f'(x_0)}$
$\frac{x^{-a+1}}{a+1}$	$\frac{1}{x^a}$	$\frac{a}{x^{a+1}}$
$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$x^a (a \neq 1)$	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{k \ln(a)} a^{kx}$	a^{kx}	$k a^{kx} \ln(a)$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3} x^{2/3}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin(2x))$	$\sin^2(x)$	$2\sin(x)\cos(x)$
$\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin(2x))$	$\cos^2(x)$	$-2\sin(x)\cos(x)$
$-\ln \lvert \cos(x) \rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ $1 + \tan^2(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\log(\cosh(x))$	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\ln \lvert \sin(x) \rvert$	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$c \cdot e^{cx}$
$x(\ln \lvert x \rvert - 1)$	$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2}(\ln(x))^2$	$\frac{\ln(x)}{x}$	$\frac{1-\ln(x)}{x^2}$
$\frac{x}{\ln(a)}(\ln \lvert x \rvert - 1)$	$\log_a \lvert x \rvert$	$\frac{1}{\ln(a) x}$

8.4 Integrale

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{F(x)}$
$\int f'(x)f(x)\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{2}(f(x))^2$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{d}x$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$	$\sqrt{\pi}$
$\int (ax+b)^n\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$
$\int x(ax+b)^n\ \mathrm{d}x$	$\frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
$\int (ax^p+b)^n x^{p-1}\ \mathrm{d}x$	$\frac{(ax^p+b)^{n+1}}{ap(n+1)}$
$\int (ax^p+b)^{-1} x^{p-1}\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{ap}\ln\lvert ax^p+b\rvert$
$\int \frac{ax+b}{cx+d}\ \mathrm{d}x$	$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln\lvert cx+d\rvert$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$
$\int \frac{1}{x^2-a^2}\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
$\int \sqrt{a^2+x^2}\ \mathrm{d}x$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$

9 Graphen