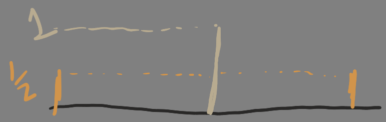
جلسه‌ی هفتم آمار و احتمال مهندسی "دکتر ربیعی زارچی - دانشگاه شریف"



امید ریاضی	Expected Value	مقدار متوسط یک متغیر تصادفی
واریانس	Variance	توزیع متغیر تصادفی حول امید ریاضی

به رنج متغیر تصادفی مجموعه‌ی ساپورت گفته می‌شود.

$$Var(X) = E[(X - \underbrace{E(X)}_{\mu})^2] = \sum_{x \in R_X} \mathbb{P}(X = x)(x - \mu)^2$$

$$= \sum_{x \in R_X} \mathbb{P}(X = x)(x^2 + \mu^2 - 2\mu x) = E(X^2) - (E(X))^2$$

یه رابطه‌ی خیلی مهم

$$\boxed{Var = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2}$$

خاصیت واریانس

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

توزیع برنولی

آقای با اسم برنولی یک آزمایش پرتاب سکه با متغیر تصادفی به شکل زیر تعریف کرد.

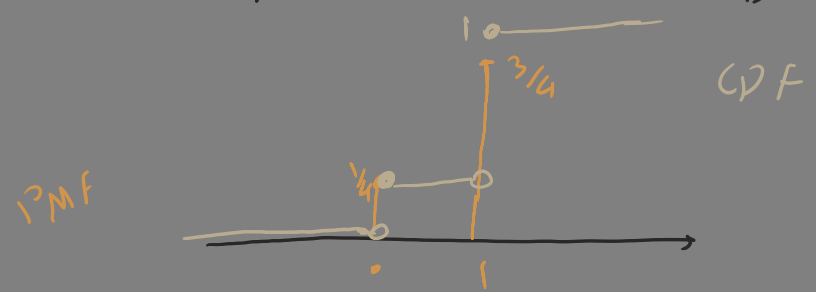
$$X = \begin{cases} 1 & p = 3/4 \\ 0 & 1 - p = q = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{E(X) = \sum \mathbb{P}(X = x)\, x = 1 \times p + (1 - p) \times 0 = 1 \times p = p}$$

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq}$$

$$X \sim E(p)$$

اینکه یک متغیر تصادفی از توزیع برنولی پیروی میکنه رو به این شکل هم نمایش میدیم



توزیع باینومیال (دوجمله‌ای)

n بار پرتاب یک سکه با توزیع برنولی

$$X = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases} \qquad X \sim E(p)$$

$Y =$ تعداد 1 آمدن در n بار پرتاب $\qquad Y = \text{Binomial}$

$$\boxed{PMF(Y=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

دلیل این رابطه هم تا حدود زیادی واضح هست. چون ما می‌خواهیم در n بار پرتاب سکه دقیقاً k بار رو بیاید و n-k بار پشت. پس k تا را از n انتخاب می‌کنیم که هر کدام با احتمال p انجام بپذیرند پس در p^k ضرب می‌کنیم. n-k تای باقی‌مانده با احتمال $(1-p)$ اتفاق می‌افتند که در $(1-p)^{n-k}$ ضرب می‌کنیم.

$$\boxed{E(Y) = np}$$

با روابط دبیرستانی ببریم جلو ثابت میشه

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \;\ldots\ldots\; = np$$

راه حل راحت‌تر:

قضیه

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n: \quad E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

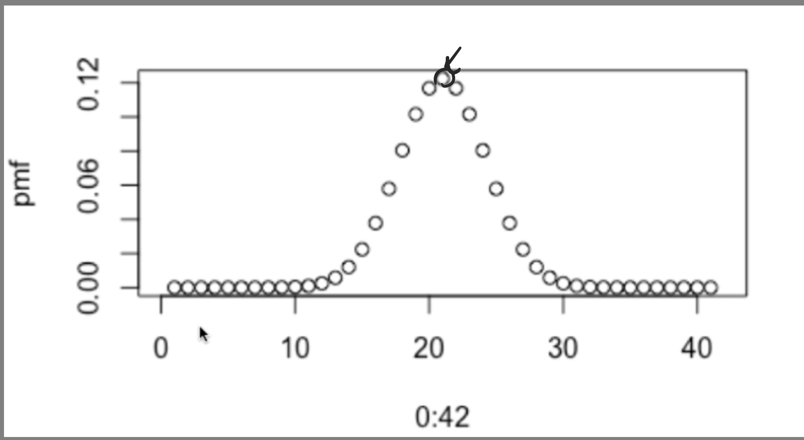
اثبات این قضیه بمونه برای آینده :)

با استفاده از قضیه‌ی بالا می‌خواهیم رابطه‌ی np را ثابت کنیم. $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$ می‌دونیم که X_i ها یعنی در پرتاب i ام سکه رو آمده باشد. در این شرایط $E(X_i)$ برابر با p خواهد بود. پس رابطه ثابت می‌شود.

قضیه

if $\forall x_i, x_j$: x_i, x_j مستقل باشند then: $Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)$

$$\Rightarrow \boxed{Var(Y) = npq = np(1-p)}$$



تابع PMF برای توزیع دو جمله‌ای. محور x برابر با تعداد دفعات رو آمدن در پرتاب‌هاست. (کل پرتاب‌ها = 42). محور y برابر با احتمال وقوع این رویداد است. برای مثال در نقطه‌ی مشخص شده احتمال 21 بار رو آمدن در 42 بار پرتاب برابر با 0.12 هست که از رابطه‌ی

$\mathbb{P}(n,k) = \binom{n}{k} p^n (1-p)^{n-k}$ به دست آمده.

نکته: این نمودار حاصل انجام یک آزمایش واقعی پرتاب سکه توسط 42 دانشجوی حاضر در کلاس بود. دانشجوها 42 بار آزمایش پرتاب سکه را تکرار کردند.