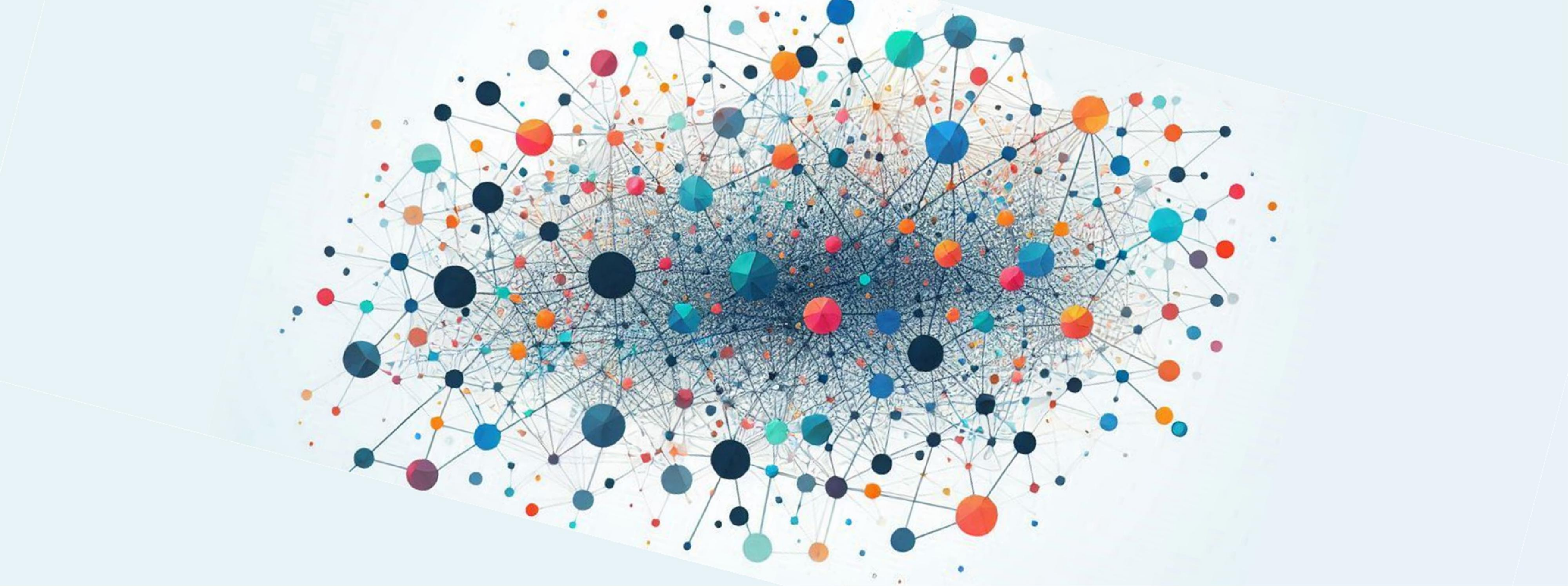
دانشگاه تهران
پردیس دانشکده های فنی
دانشکده علوم مهندسی

الگوریتم‌های گراف و شبکه

rabedian@ut.ac.ir



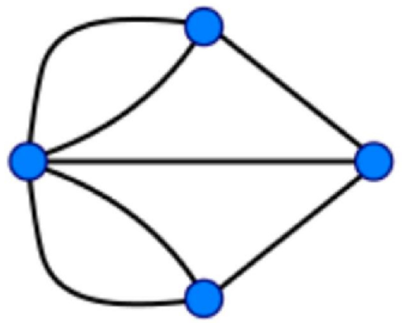
تورهای اویلری و دورهای همیلتونی

تورهای اویلری

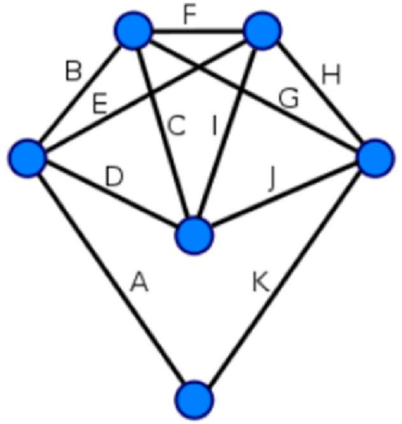
در گراف G تور اویلری به مسیری گفته می‌شود که در آن هر یال دقیقا یک بار پیمایش شود. اگر راس ابتدایی و انتهایی این گذر یکسان باشد آن را دور اویلری می‌نامیم.

به گرافی که دور اویلری داشته باشد گراف اویلری و به گرافی که تور اویلری داشته باشد اما دور اویلری نداشته باشد نیمه‌اویلری می‌گوییم.

به عنوان مثال در شکل شماره ۱ تور اویلری‌ای وجود ندارد اما در شکل شماره ۲ دنباله یال‌های A, K, J, D, B, F, H, G, C, I, E یک تور اویلری را تشکیل می‌دهد.



شکل۱



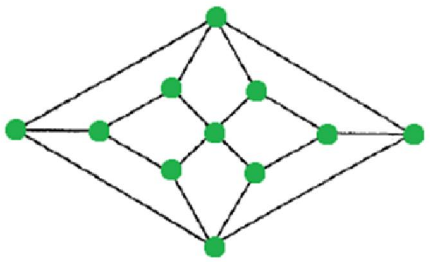
شکل۲

قضیه ۴-۱ یک گراف همبند ناتهی، اویلری است اگر و تنها اگر دارای هیچ راس فردی نباشد.

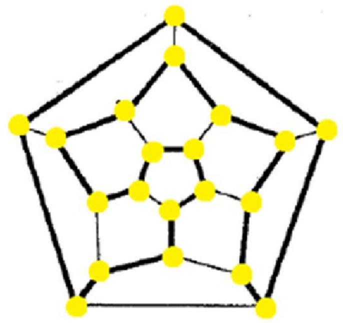
نتیجه ۴-۱ یک گراف همبند دارا گذرگاه اویلری است اگر و تنها اگر حداکثر دو راس فرد داشته باشد.

دور همیلتونی

مسیری که شامل تمام راس‌های G باشد یک مسیر همیلتونی از G نامیده می‌شود. به‌طور مشابه، یک دور همیلتونی از G دوری است که شامل تمام راس‌های G باشد. گرافی که شامل یک دور همیلتونی باشد، گراف همیلتونی نامیده می‌شود.



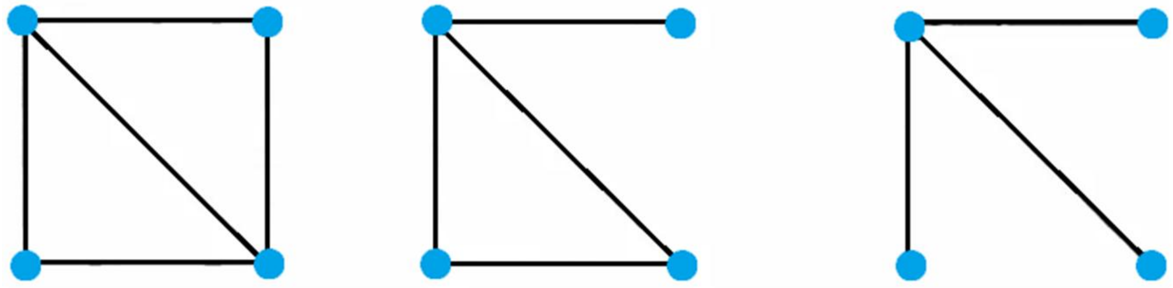
شکل۴- گراف هرشل



شکل۳- دوازده وجهی

از آن‌جاکه گراف هرشل دوبخشی است و تعداد راس‌های آن فرد است، یک گراف ناهمیلتونی می‌باشد.

درواقع هر دور همیلتونی با حذف یکی از یال‌ها به مسیر همیلتونی تبدیل می‌شود. اگر در یک مسیر همیلتونی، رئوس آغازی و پایانی مجاور باشند، می‌توان آن را به دور همیلتونی تعمیم داد. البته یک گراف غیر همیلتونی، ممکن است یک مسیر همیلتونی داشته باشد. بنابراین، مسیر همیلتونی، همیشه نشان دهنده وجود یک مدار همیلتونی نیست. به‌عنوان مثال، شکل زیر نشان دهنده این امر است:

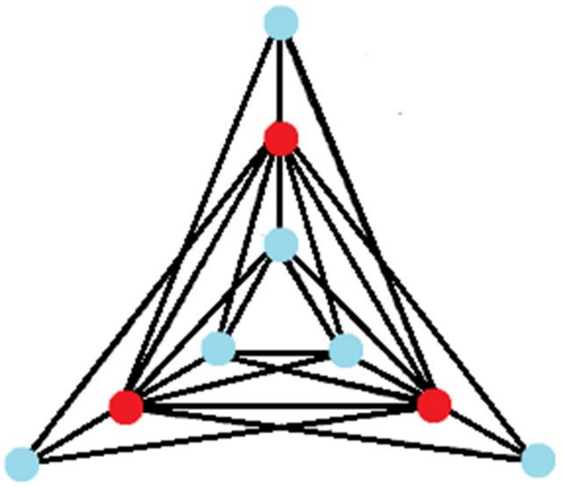


شکل۴

برخلاف گراف‌های اویلری، تاکنون هیچ شرط لازم و کافی غیربدیهی، برای همیلتونی بودن گراف‌ها شناخته نشده است. در خقیقت مساله‌ی پیدا کردن چنین شرطی یکی از مهم‌ترین مسائل حل نشده در نظریه گراف‌ها می‌باشد.

قضیه ۴-۲ اگر G همیلتونی باشد، آن‌گاه به‌ازای هر زیرمجموعه محض ناتهی S از V داریم:

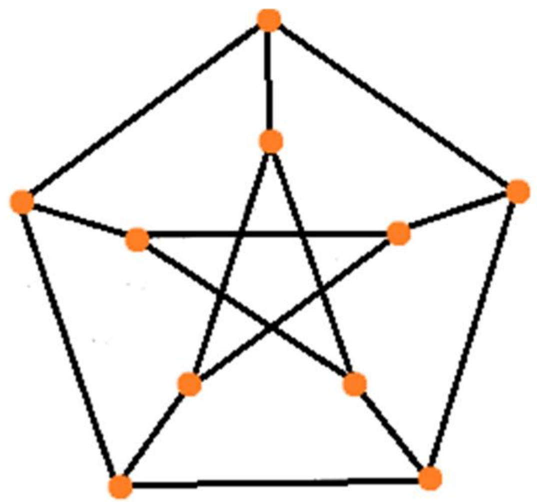
$$\omega(G - S) \leq |S|$$



شکل۵

شکل روبه‌رو ۹راس دارد که به برداشتن ۳راس قرمز رنگ، چهار مولفه باقی می‌ماند.
بنابراین قضیه ۴-۲ برقرار است و در نتیجه این گراف ناهمیتونی است.

در اسلاید قبل دیدیم که می‌شود از قضیه ۴-۲ برای نشان دادن این‌که گراف خاصی ناهمیلتونی است استفاده کرد. اما از این قضیه نمی‌توان برای همه‌ی گراف‌ها استفاده کرد. به‌عنوان مثال گراف زیر (گراف پیترسون) ناهمیلتونی است ولی این مطلب را نمی‌توان از قضیه ۴-۲ نتیجه گرفت.



شکل۶

شرط کافی برای همیلتونی بودن گراف G

از آن‌جایی که یک گراف همیلتونی است اگر و تنها اگر گراف ساده زمینه آن همیلتونی باشد. بنابراین کافی است بحث خود را بر روی گراف‌های ساده متمرکز کنیم.

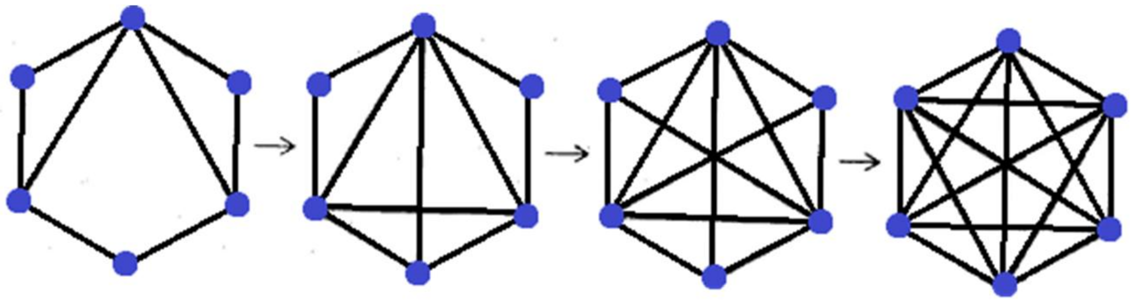
قضیه ۴-۳ اگر G یک گراف ساده با شرط $v \geq 3$ و $\delta \geq \frac{v}{2}$ باشد، دراین‌صورت G همیلتونی است.

لم ۴-۴-۱ فرض کنید G یک گراف ساده بوده، u و v دو راس غیرممجاور باشند، به‌طوری‌که $d(u) + d(v) \geq v$، دراین‌صورت G همیلتونی خواهد بود اگر و تنها اگر $G + uv$ همیلتونی باشد.

اگر در گراف G،زوج راس‌های غیرمجاوری که مجموعه درجات آن‌ها حداقل v است، به‌یکدیگر وصل کنیم و این‌کار را به‌طور بازگشتی تکرار کنیم تا دیگر چنین دو راسی باقی نمانده باشد، به گرافی می‌رسیم که آن‌را بستار G نامیده و با $c(G)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۴-۴-۲ $c(G)$ خوش تعریف است.

در این مثال $c(G)$ یک گراف کامل است، ولی باید توجه داشت این حالت الزاما همیشه رخ نمی‌دهد.

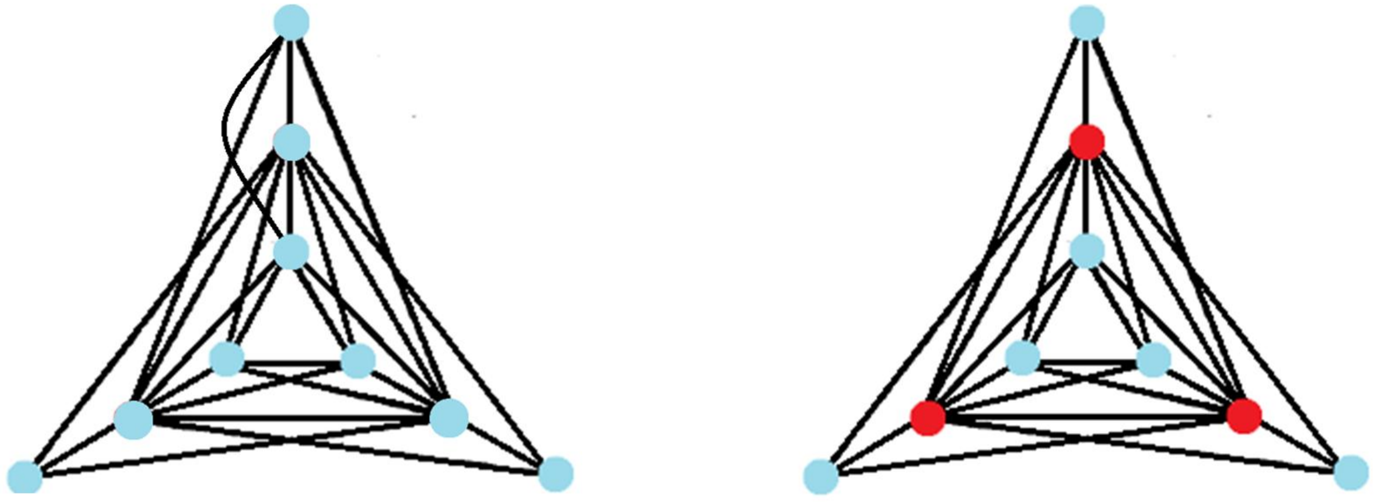


شکل۷

قضیه ۴-۴ یک گراف ساده، همیلتونی است اگر و تنها اگر بستار آن همیلتونی باشد.

نتیجه ۴-۴ اگر G یک گراف ساده با شرط $v \geq 3$ و $c(G)$ یک گراف کامل باشد، در این‌صورت G همیلتونی است.

در شکل زیر واضح است که بستار این گراف کامل است. بنابراین طبق نتیجه ۴-۴ گراف همیلتونی است.

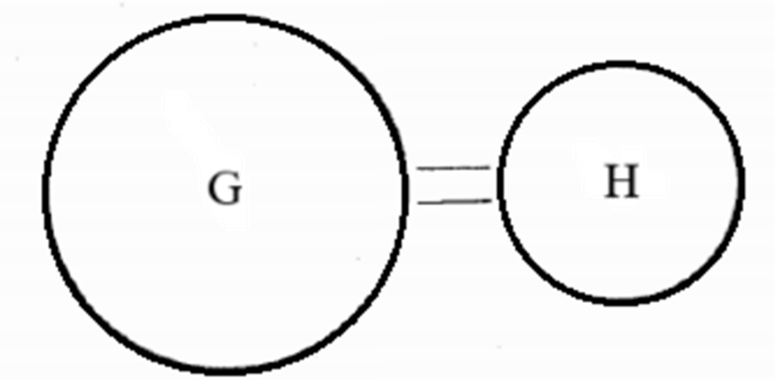


شکل۸- یک گراف همیلتونی

بااستفاده از نتیجه ۴-۴ می‌توان شرط‌های کافی گوناگونی برای همیلتونی بودن یک گراف، براساس درجه راس‌های آن به‌دست آورد. به‌طور مثال، اگر $\delta \geq \frac{v}{2}$ ، واضح است که c(G) کامل خواهد بود. بنابراین می‌توان شرط قضیه ۴-۳ را نتیجه مستقیمی از این قضیه دانست. چویتال شرطی به‌دست آورد که از شرط دیراک کلی‌تر است.

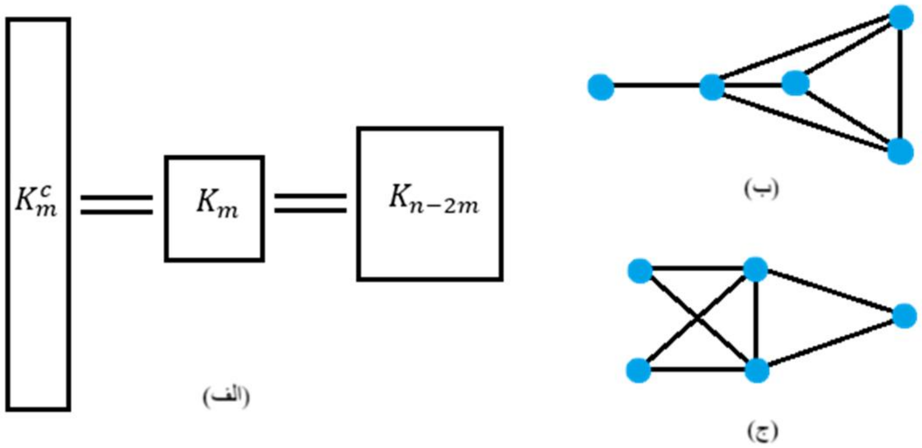
قضیه ۴-۵ فرض کنید G یک گراف ساده با دنباله درجه‌های $(d_1,d_2, \dots ,d_v)$ باشد، به‌طوری‌که $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_v$ و $v \geq 3$، اگر هیچ مقدار mای کوچکتر از $\frac{v}{2}$ وجود نداشته باشد که $d_m \leq m$ و $d_{v-m} \leq v-m$، آنگاه G همیلتونی خواهد بود.

می‌گوییم دنباله اعداد حقیقی $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$، فرا گرفته شده توسط دنباله $(q_1,q_2,\ldots,q_3)$ است، اگر به‌ازای هر $1\leq i \leq n$ داشته باشیم: $p_i \leq q_i$. همچنین می‌گوییم گراف G، فرا گرفته درجه‌ای توسط گراف H است، اگر v(G) = v(H) و دنباله درجه‌های غیرنزولی G توسط دنباله درجه‌های غیرنزولی H فرا گرفته شده باشد. به‌طور مثال ۵-دور، فراگرفته درجه‌ای توسط $k_{2,3}$ می‌باشد، زیرا (2, 2, 2, 2, 2) فراگرفته شده توسط (2, 2, 2, 3, 3) است. خانواده گراف‌های ناهمیلتونی با درجه ماکزیمال (آن‌هایی که توسط هیچ گراف ناهمیلتونی دیگری فراگرفته درجه‌ای نیستند) یک ویژگی ساده دارند که در ادامه به معرفی آن می‌پردازیم. ابتدا نماد اتصال دو گراف را معرفی می‌کنیم. اتصال گراف‌های مجزای G و H که آن‌را با G ∨ H نمایش می‌دهیم، گرافی است که از G + H با وصل نمودن هر راس G به هر راس H به‌دست می‌آید و آن‌را به‌صورت گرافی مانند شکل زیر نمایش می‌دهیم:



شکل۹- اتصال G و H

حالا فرض کنید که به‌ازای هر $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$، $C_{m,n}$ نشان دهنده گراف $K_m \vee (K_m^c + K_{n-2m})$ باشد. $C_{m,n}$ به‌همراه دو مثال خاص آن $C_{1,5}$ و $C_{2,5}$ در شکل زیر آورده شده است:



شکل ۱۰- (الف) $C_{m,n}$ ، (ب) $C_{1,5}$ ، (ج) $C_{2,5}$

ناهمیلتونی بودن $C_{m,n}$ بلافاصله از قضیه ۴-۲ نتیجه می‌شود. چون اگر S نشان دهنده مجموعه m راس از درجه n-1 در $C_{m,n}$ داریم:

$$\omega\left(C_{m,n}-S\right)=m+1>|S|$$

قضیه ۴-۶ اگر G یک گراف ساده ناهمیلتونی با شرط v≥ 3 باشد، آنگاه G توسط یک $C_{m,v}$ فراگرفته درجه‌ای است.

نتیجه ۴-۶ اگر G یک گراف ساده با شرط‌های $V\geq 3$ و $\varepsilon>\binom{v-1}{2}+1$ باشد، آنگاه G همیلتونی است. همچنین تنها گراف‌های ساده ناهمیلتونی با v راس و $\binom{v-1}{2}+1$ یال، $C_{1,v}$ و $C_{2,5}$ می‌باشند.

تمرین: یک الگوریتم خوب برای موارد زیر بیان کنید.

الف) ساختن بستار یک گراف

ب) یافتن یک دور همیلتونی، اگر بستار گراف کامل باشد

مسئله پستچی چینی

هدف: یافتن کوتاه‌ترین مسیر که تمام یال‌های یک گراف را حداقل یک بار طی کند و به رأس آغازین بازگردد.

کاربرد: لجستیک (مانند تحویل کالا، مسیر پستچی‌ها) و مدیریت شبکه (مانند مسیرهای برف‌روب یا نظافت خیابان‌ها).

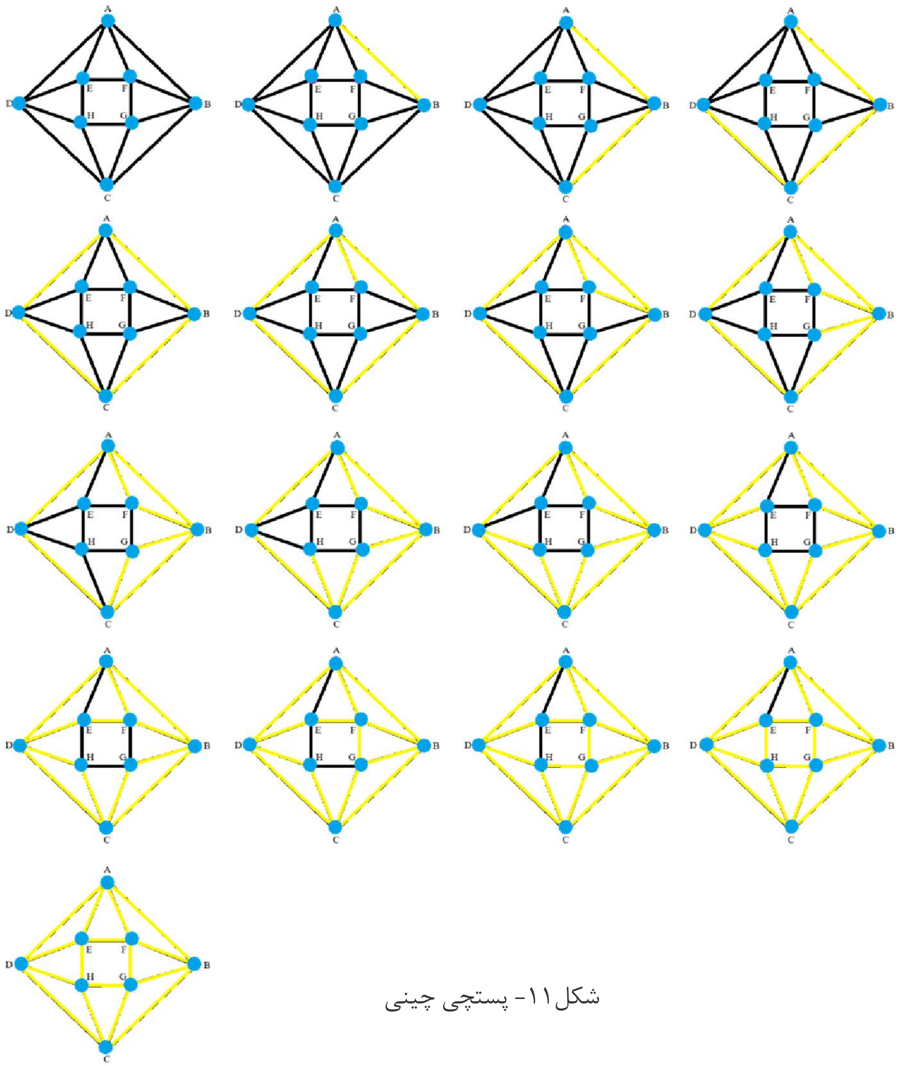
انواع گراف‌ها در مسئله:

- **گراف اویلری :** تمام رأس‌ها درجه زوج دارند؛ حل مسئله با یافتن مسیر اویلری ممکن است.
- **گراف غیر اویلری :** رأس‌هایی با درجه فرد دارند. باید با افزودن یال، گراف را به گراف اویلری تبدیل کرد.

مراحل حل مساله پستچی چینی:

- شناسایی رأس‌های فرد :پیدا کردن رأس‌هایی با درجه فرد.
- یافتن جفت‌های ارزان :انتخاب جفت‌هایی از رأس‌های فرد که هزینه اتصال آن‌ها حداقل باشد.
- افزودن یال‌ها :اضافه‌کردن یال‌هایی بین جفت‌ها برای تبدیل گراف به گراف اویلری.
- یافتن مسیر اویلری :پیدا کردن مسیر بسته‌ای که تمام یال‌ها را پوشش دهد.

مثال زیر مراحل مسیر پستچی چینی در یک گراف ۸ ظلعی را نشان می‌دهد.



شکل۱۱- پستچی چینی

مسئله پستچی چینی

وزن تور $v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_0$ در یک گراف وزن‌دار عبارت است از $\sum_{i=1}^{n} w(e_i)$. در این‌صورت واضح است که مساله پستچی چینی به پیدا کردن یک تور با کمترین وزن در یک گراف همبند وزن‌دار با وزن‌های نامنفی برمی‌گردد. یک تور با این ویژگی‌ها رو تور بهینه گوییم.

اگر G اویلری باشد، آنگاه هر تور اویلری از G یک تور بهینه خواهد بود. زیرا یک تور اویلری، توری است که از تمام یال‌ها دقیقا یک‌بار عبور می‌کند. در این حالت می‌توان مساله را توسط الگوریتم فلوری به راحتی حل کرد.این الگوریتم با دنبال کردنیک گذرگاه به ساختن تور اویلری می‌پردازد، با این شرط که در هر مرحله یک برشی از زیرگراف دنبال نشده فقط درصورتی براشته می‌شود که هیچ انتخاب دیگری وجود نداشته باشد.

الگوریتم فلوری

مراحل اجرا:

شروع از یک رأس مناسب:

- اگر گراف اویلری است: از هر رأس می‌توان شروع کرد.
- اگر گراف شبه‌اویلری است: از یکی از رأس‌های درجه فرد شروع کنید.

پیمایش یال‌ها:

- یال‌ها را یکی‌یکی انتخاب کنید و از گراف حذف کنید.
- اگر یالی که انتخاب می‌کنید یک **پل** (bridge) است و یال‌های دیگری وجود دارد، آن را به‌عنوان آخرین گزینه انتخاب کنید.

حذف یال‌ها و ادامه:

- بعد از حذف یک یال، رأس بعدی را بازدید کنید و همین روند را ادامه دهید.

پایان:

الگوریتم زمانی تمام می‌شود که تمام یال‌ها پیمایش شده باشند.

قضیه ۴-۷ اگر G اویلری باشد، آنگاه هر گذرگاهی که توسط الگوریتم فلوری در G ساخته شود یک تور اویلری در G است.

الگوریتم فلوری

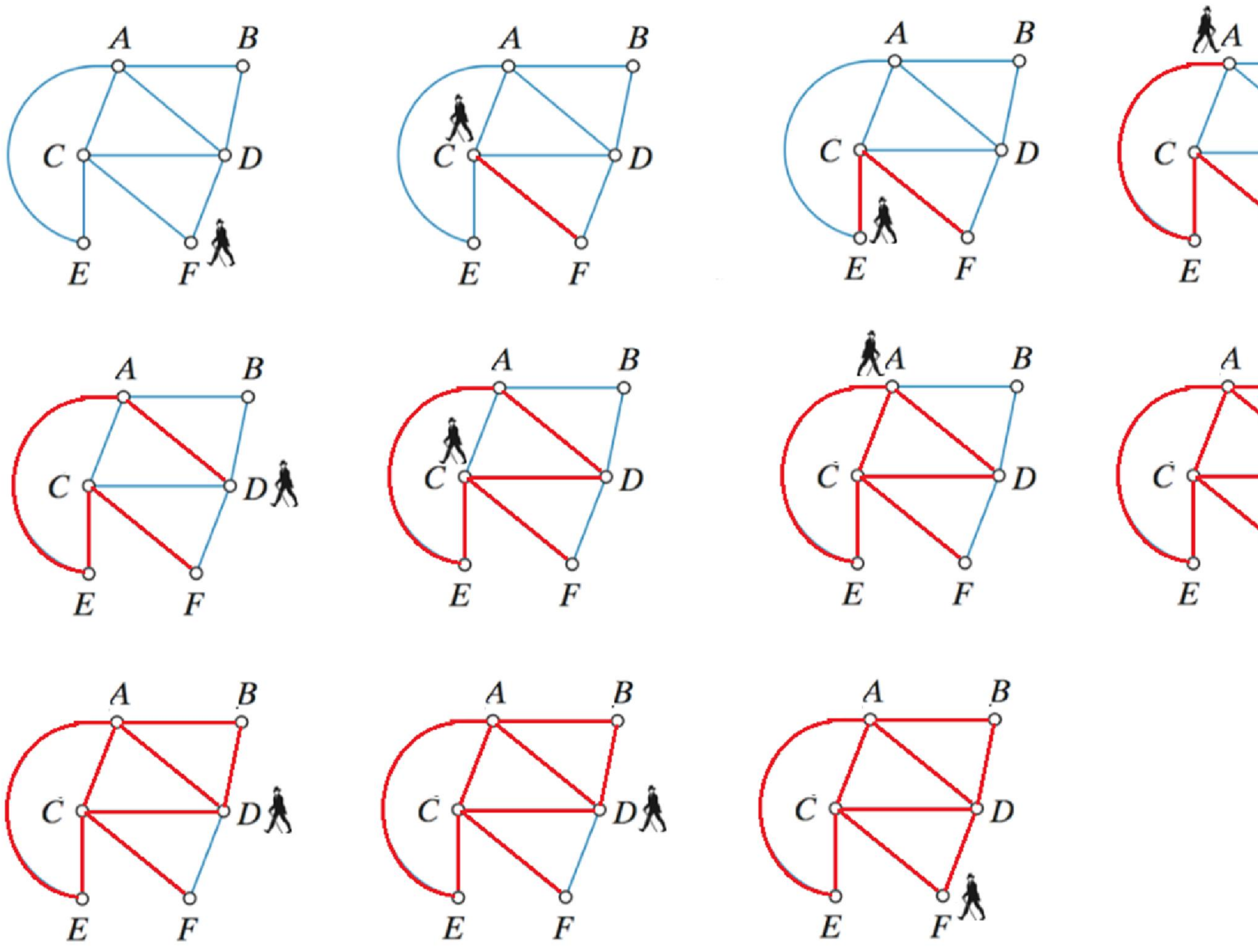
مزایا

- ساده و مستقیم.
- مناسب برای گراف‌های کوچک یا آموزشی.

معایب

- زمان اجرای آن به اندازه گراف وابسته است و برای گراف‌های بزرگ چندان بهینه نیست.
- نیاز به بررسی مداوم پل‌ها دارد که ممکن است محاسبات را کند کند.

مثال



شکل۱۱- مثالی از الگوریتم فلوری

مساله فروشنده دوره گرد

در این مسئله، هدف یافتن کوتاه‌ترین مسیر ممکن است که:

از یک شهر شروع شود.

تمام شهرها را دقیقاً یک‌بار بازدید کند.

به شهر شروع بازگردد.

تعریف رسمی این مساله:

فرض کنید:

- G=(V,E) یک گراف کامل باشد،
- V مجموعه شهرها (رأس‌ها)،
- E مجموعه مسیرها بین شهرها (یال‌ها)،
- w(e) وزن یا هزینه (مانند فاصله یا زمان) هر یال باشد.

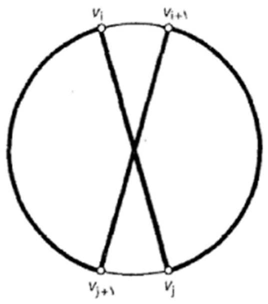
هدف :یافتن یک چرخه همیلتونی در گراف G که مجموع وزن‌های یال‌ها در آن کمینه باشد.

مساله فروشنده دوره گرد

به زبان گراف‌ها، هدف ما پیدا کردن یک دور همیلتونی با کمترین وزن در یک گراف کامل وزن‌دار می‌باشد. همچین دوری را یک دور بهینه می‌نامیم. تاکنون هیچ الگوریتم کارایی برای این مساله ارائه نشده است. بنابراین در این مساله ما به‌دنبال یک جواب نسبتا خوب هستند نه بهینه.

یک روش ممکن این است که ابتدا یک دور همیلتونی C پیدا کنیم و سپس با تغییر مناسب C، به دنبال یک دور دیگر با وزن کمتر بگردیم. شاید ساده‌ترین راه این تغییر به‌صورت زیر است:

فرض کنید $C = v_1v_2 \ldots v_vv_1$. دراین‌صورت به‌ازای هر i و j به‌طوری‌که $1 < i+1 < j < v$، می‌توانیم با حذف یال‌های v_iv_{i+1} و v_jv_{j+1} و افزودن یال‌های v_iv_j و $v_{i+1}v_{j+1}$ دور همیلتونی جدید $C_{ij} = v_1v_2\ldots v_iv_jv_{j-1}\ldots v_{i+1}v_{j+1}v_{j+2}\ldots v_vv_1$ را همانند شکل زیر به‌دست اوریم:



مساله فروشنده دوره گرد

اگه به‌ازای برخی مقادیر i و j داشته باشیم:

$$\mathrm{W}(v_i v_j)+\mathrm{w}(v_{i+1} v_{j+1}) < \mathrm{w}(v_i v_{i+1}) + w(v_j v_{j+1})$$

آنگاه دور C_{ij} بهبود یافته C محسوب می‌شود.

پس از انجام دنباله‌ای از تغییرات فوق، دوری باقی خواهد ماند که دیگر با این روش قابل بهبود نخواهد بود. این دور نهایی غالبا بهینه نیست، ولی می‌توانیم فرض کنیم که در اکثر موارد جواب به‌دست آمده نسبتا خوب است. برای دقت بیشتر می‌توان فرایند فوق را چندین بار با شروع از دورهای متفاوت تکرار کرد.

گاهی اوقات برای این‌که ببینیم راه‌حل ما تا چه حد خوب است می‌توانیم از الگوریتم کروسکال استفاده کنیم. فرض کنید C یک دور بهینه در G باشد، آنگاه به‌ازای هر راس v، C-v یک مسیر همیلتونی در G-v است و در نتیجه یک درخت فراگیر از G-v می‌باشد. بنابراین اگر T یک درخت بهینه در G-v باشد و e و f دو یال مجاور v باشند به‌طوری‌که w(e) + w(f) کوچکترین مقدار ممکن باشد، آنگاه w(T) + w(e) + w(f) یک حد پایین برای w(C) خواهد بود.

پایان