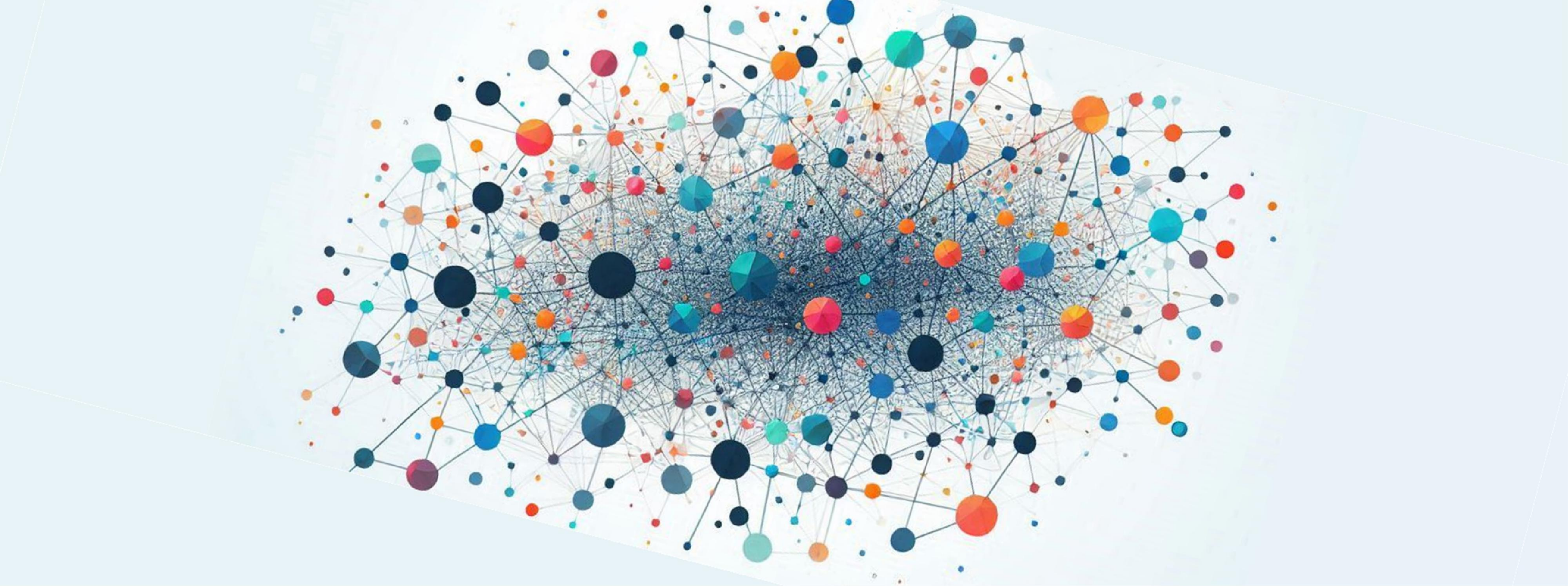
دانشگاه تهران
پردیس دانشکده های فنی
دانشکده علوم مهندسی

الگوریتم‌های گراف و شبکه

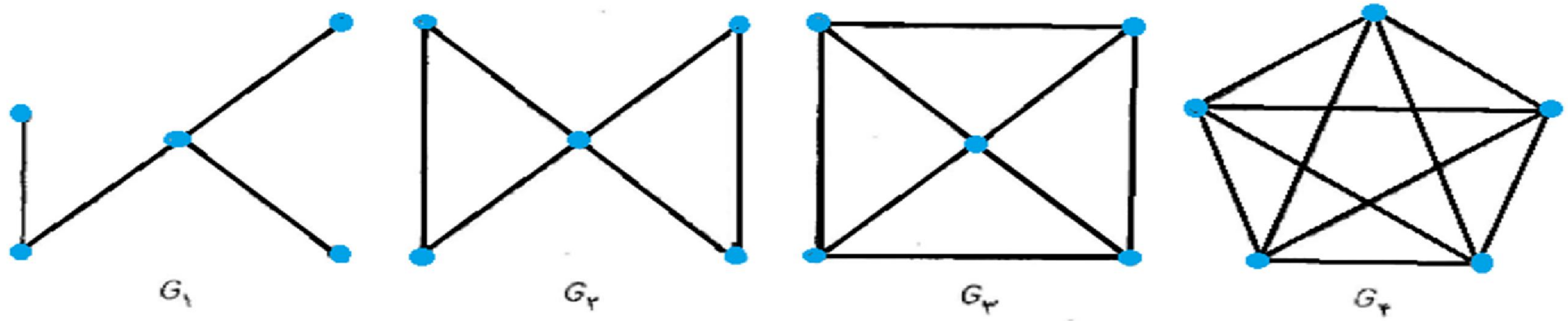
rabedian@ut.ac.ir



گراف‌ها

همبندی

در زیر، G_1 یک درخت و همچنین یک گراف همبند کمینه است. زیرا براشتن هر یال باعث ناهمبند شدن گراف می‌گردد. G_2 را نمی‌توان با برداشتن یک یال ناهمبند کرد، ولی با برداشتن یک راس، یعنی همان راس برشی می‌توان ناهمبند کرد. در G_3 هیچ یال برشی یا راس برشی وجود ندارد. با این همه روشن است که همبندی G_3 به اندازه G_4 که یک گراف کامل ۵ راسی می‌باشد، نیست.



همبندی

یک برش راسی از G زیرمجموعه‌ای مانند V' از V است به‌طوری‌که G - V' ناهمبند باشد. یک برش راسی با k عنصر را یک k-برش راسی می‌نامیم. گراف کامل هیچ برش راسی ندارد.

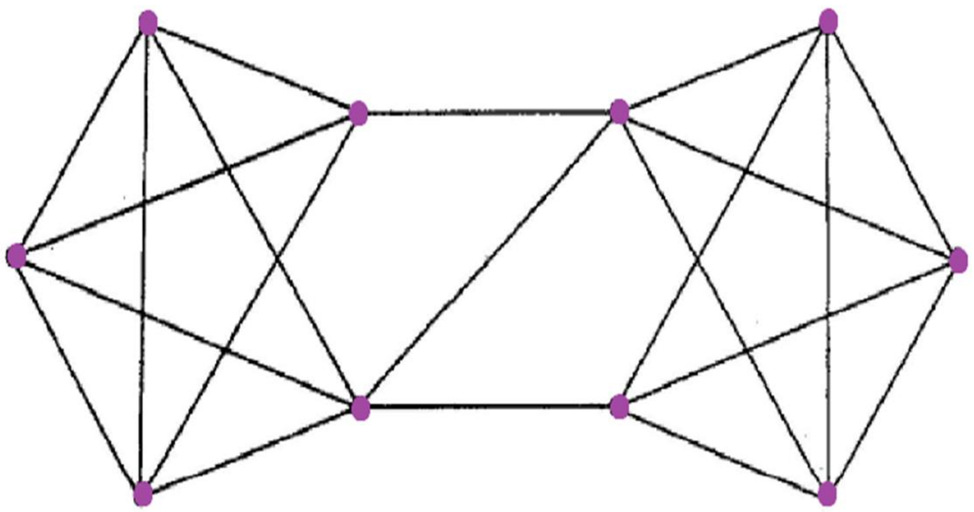
درواقع، تنها گراف‌هایی که برش راسی ندارند، آن‌هایی هستند که زیرگراف فراگیری به‌صورت گراف کامل دارند. اگر G حداقل دو راس متمایز غیرمجاور داشته باشد، همبندی G، k(G) را به‌عنوان کوچکترین k ای تعریف می‌کنیم که به‌ازای آن، G یک k-برش راسی داشته باشد. در غیراین‌صورت k(G) برابر $1 - v$ تعریف می‌شود.

باتوجه به موارد بالا k(G) در صورتی برابر صفر خواهد بود که G بدیهی یا ناهمبند باشد. اگر k(G) ≥k، G را k-همبند می‌نامیم. بنابراین تمام گراف‌های همبند غیربدیهی ۱-همبند هستند.

همبندی

یک برش یالی از G زیرمجموعه‌ای مانند E' از E است به‌طوری‌که G - E' ناهمبند باشد. یک برش یالی با k عنصر را یک k-برش یالی می‌نامیم.

بنابراین همبندی یالی G، $k'(G)$ را به عنوان کوچکترین k ای تعریف می‌کنیم که به‌ازای آن، G دارای یک k-برش یالی باشد. اگر G بدیهی باشد $k'(G)$ برابر صفر تعریف می‌شود. بنابراین $k'(G) = 0$، اگر G بدیهی یا ناهمبند باشد و همچنین $k'(G) = 1$، اگر G گراف همبند با یک یال برشی باشد. اگر $k'(G) \geq$ k، G را k-همبند یالی می‌نامیم. بنابراین تمام گراف‌های همبند غیربدیهی، ۱-همبند یالی هستند.

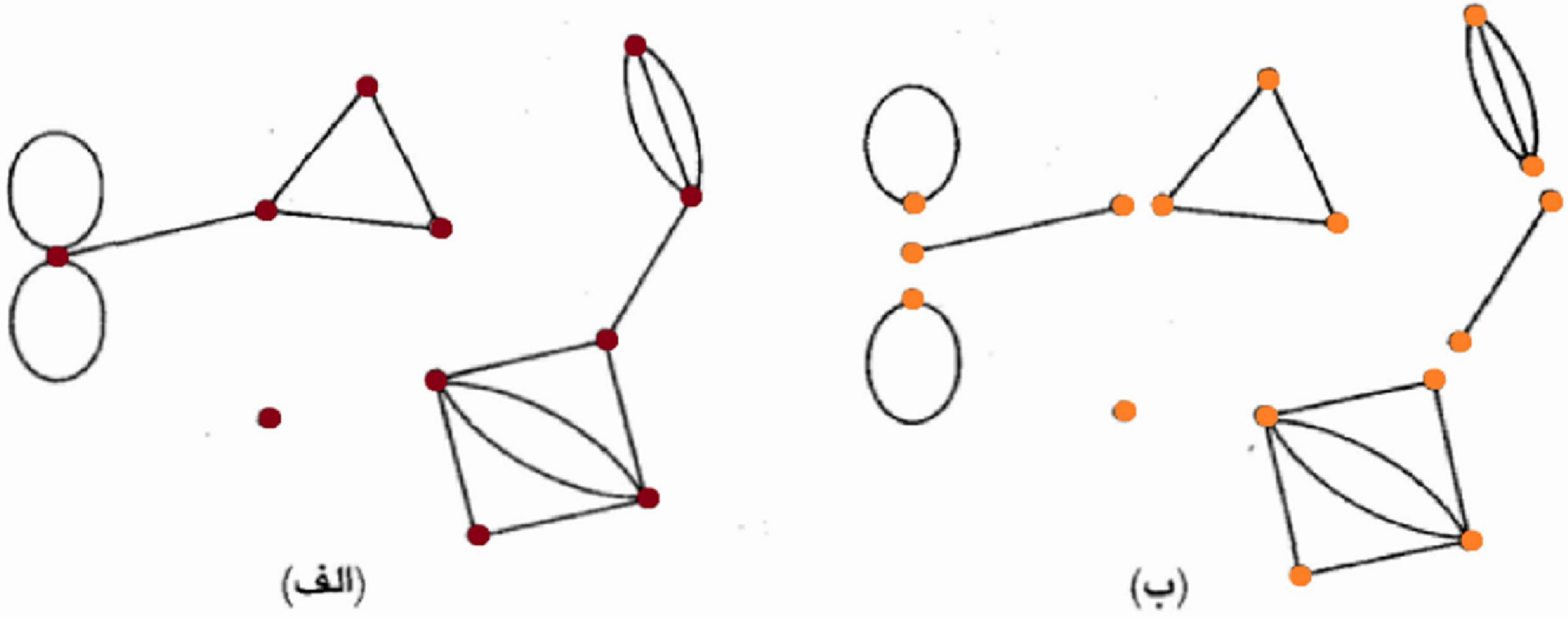


در گراف G بالا k= 2 ، $k' = 3$ و $\delta = 4$ است.

قضیه ۳-۱ $\boldsymbol{k \leq k' \leq \delta}$

بلوک‌ها

یک گراف همبند که هیچ راس برشی ندارد، بلوک نامیده می‌شود. هر بلوکی که حداقل سه راس داشته باشد، ۲-همبند است. یک بلوک از گراف، زیرگرافی همبند و بیشینه از آن گراف است و هر گراف، مجموعه‌ای از بلوک‌هایش است.



(الف) G (ب) بلوک‌های G

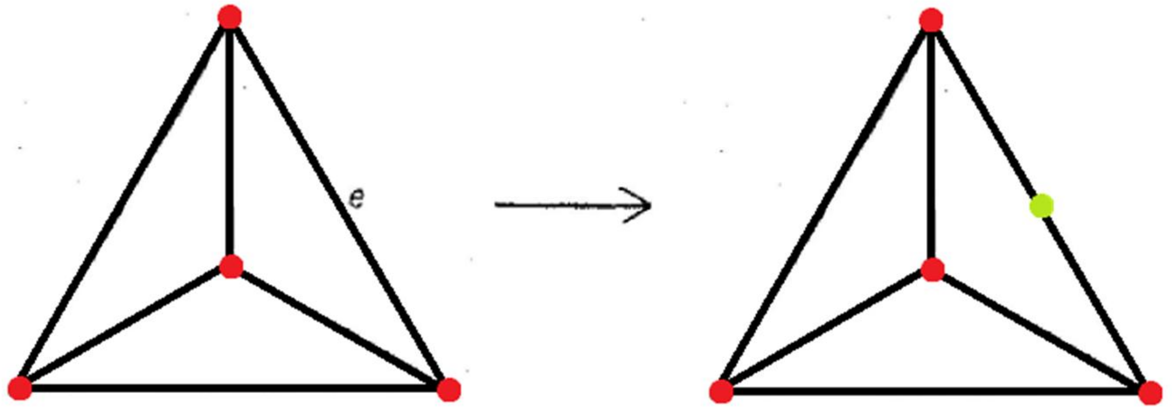
یک خانواده از مسیرهای G، مسیرهای مجزای داخلی نامیده می‌شوند اگر هیچ راسی از G به‌عنوان راس داخلی بیش از یک مسیر از آن خانواده نباشد.

قضیه ۳-۲ گراف G با شرط $v \geq 3$، ۲-همبند است، اگر و تنها اگر هر دو راس G حداقل توسط دو مسیر مجزای داخلی به یکدیگر متصل باشند.

نتیجه ۳-۲-۱ اگر G ۲-همبند باشد، آنگاه هر دو راس G روی یک دور مشترک قرار دارند.

اشتقاق

می‌گوییم یال e مشتق شده، هرگاه آن یال را برداشته، به‌جای آن مسیر جدیدی به‌طول دو قرار دهیم که دو سر یال را به یکدیگر متصل می‌کند. راس داخلی این مسیر یک راس جدید خواهد بود.



نتیجه ۳-۲-۲ اگر G یک بلوک با شرط $v \geq 3$ باشد، آنگاه هر دو یال G روی یک دور مشترک قرار دارند.

ساخت شبکه‌های ارتباطی قابل اعتماد

اگر گراف G نمایانگر یک شبکه ارتباطی باشد، همبندی (همبندی یالی) گراف، نشان دهنده کمترین تعداد ایستگاه‌های ارتباطی (پیوندهای ارتباطی) خواهد بود که از کار افتادن آن‌ها ارتباطات را در سیستم به مخاطره می‌اندازد. هر اندازه که همبندی یا همبندی یالی بیشتر باشد، شبکه قابل اعتمادتر خواهد بود. به همین دلیل یک شبکه درختی، همانند آنچه توسط الگوریتم کروسکال به‌دست آوردیم، چندان قابل اعتماد نیست. بنابراین تعمیم زیر از مساله ارتباط دهی را در نظر می‌گیریم:

فرض کنید k یک عدد صحیح مثبت و G یک گراف وزن‌دار باشد. یک زیرگراف فراگیر k-همبند با کمترین وزن در G معین نمایید.

به ازای $k = 1$ این مساله به مساله ارتباط دهی تبدیل می‌شود که می‌توان با الگوریتم کروسکال به آن پاسخ داد. به‌ازای مقادیر بزرگتر k، مساله حل نشده است و حل آن دشوار است.

بااین‌حال، اگر G یک گراف کامل باشد که هر یال آن یک وزن واحد دارد حل این مساله ساده خواهد بود که به‌صورت زیر است:

روشن است که در یک گراف کامل وزندار با n راس که به هر یال آن یک وزن واحد نسبت داده شده است، یک زیرگراف فراگیر m-همبند با کمترین وزن، درواقع یک زیرگراف m-همبند و n راسی با کمترین تعداد یال ممکن است. کمترین تعداد یال‌هایی که یک گراف m-همبند n-راسی می‌تواند داشته باشد را با f(m,n) نمایش می‌دهیم (با فرض اینکه $m< n$ است). بنابر قضیه‌های ۳-۱ و ۱-۱ داریم:

$$f(m, n) \geq \left\lceil \frac{mn}{2} \right\rceil$$

برای اثبات مساوی بودن رابطه بالا ابتدا یک گراف m-همبند $H_{m,n}$ با n-راس را طوری می‌سازیم که دقیقا $\left\lceil \frac{mn}{2} \right\rceil$ یال داشته باشد.

ساختن $H_{m,n}$ بستگی به زوجیت n و m دارد. بنابراین سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

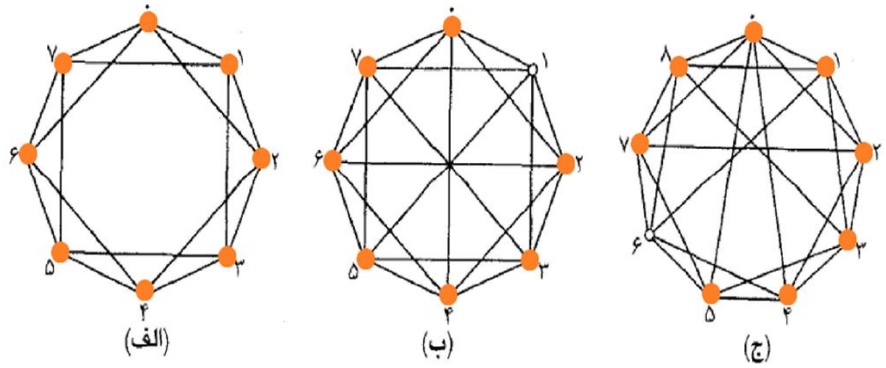
حالت ۱) m زوج باشد. اگر $m = 2r$، آنگاه $H_{2r,n}$ گرافی خواهد بود با راس‌های $0, 1, \ldots, n-1$ که در آن دو راس i و j متصل‌اند، اگر $i - r \le j \le i + r$ (عمل جمع به پیمانه n صورت می‌گیرد).

حالت ۲) m فرد و n زوج باشد. اگر $m = 2r + 1$، آنگاه $H_{2r+1,n}$ را بشکل زیر میسازیم:

ابتدا $H_{2r,n}$ را رسم می‌کنیم و سپس به‌ازای $1 \le i \le \frac{n}{2}$، یال‌هایی را که راس i را به راس $i + (\frac{n}{2})$ وصل می‌کنند، اضافه می‌نماییم.

حالت ۳) m و n هردو فرد باشند. اگر $m = 2r + 1$، آنگاه $H_{2r+1,n}$ را بشکل زیر میسازیم:

ابتدا $H_{2r,n}$ را رسم می‌کنیم و سپس یال‌هایی که راس صفر را به راس‌های $\frac{(n-1)}{2}, \frac{(n+1)}{2}$ متصل می‌کنند و همچنین به‌ازای $1 \le i \le \frac{n-1}{2}$، یال‌هایی را که راس i به راس $i + \frac{n+1}{2}$ متصل می‌کنند، اضافه می‌نماییم.



قضیه ۳-۳ گراف $H_{m,n}$، m-همبند است.

پایان