جلسه‌ی هیجدهم آمار و احتمال مهندسی "دکتر شریفی زارچی - دانشگاه شریف"

خطی بودن امید ریاضی

$$E_{(X+Y)} = E_{(X)} + E_{(Y)}$$

چه در حالت گسسته و چه در حالت پیوسته برقرار است.

و هیچ ربطی هم به استقلال و وابسته بودن X, Y نداره و در هر دو حالت برقرار است

کاربرد در Indicator Variable هاست

$$I = \begin{cases} 0 & q = 1-\mathbb{P} \\ 1 & \mathbb{P} \end{cases}$$

$$E_{(I)} = 1 \times P + 0 \times q = P$$

تعمیم سرراستی هست اما چون کاربردهای زیادی داره براش اسم خاص گذاشتن

به طور متوسط چند نفر در یک کلاس روزهای تولد یکسانی دارند؟ (اعضای کلاس = 50)

$$\sum_{x=0}^{50} x\,\mathbb{P}(X=x)$$

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{\binom{365}{50} \times 50!}{365^{50}} \qquad \mathbb{P}(X=1) = 0$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{50}{2}\binom{364}{48}\,365 \times 48!}{365^{50}}$$

$$\mathbb{P}(X=3) =$$ ما واقعاً بدبخت هستیم اگه بخواهیم از این روش حل کنیم :(

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{نفر iام دستش رو بالا ببره} \\ 0 & \text{نه میزان هست} \end{cases}$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{50} I_i\right) = \sum_{i=1}^{50} E(I_i)$$

و مشکل اینه که این I_i ها به هم وابستن مثلاً $I_1 = 0$ هست و اگر I_2 بود اون موقع اگه جواب کل مسئله عوض میکرد.

$$\sum_{i=1}^{50} E(I_i) = 50\,E(I) = 50\,\mathbb{P}(I_1) = 50\left(1 - \underbrace{\mathbb{P}(I_i = 0)}_{\frac{365 \times 364^{49}}{365^{50}}}\right)$$

یک روز خاص برای یک نفر ← 365

364^{49} → 364 روز باقی‌مانده برای 49 نفر

تعداد کل حالات تولد در یک کلاس 50 نفره ← 365^{50}

امید ریاضی اینکه روز تولدها یکسان باشد = (امید ریاضی اینکه هیچ دو نفری روز تولد برابر نداشته باشند) ـ 1

به شدت پرکاربردی هست و مسائل زیادی رو برای ما حل میکنه.

امید ریاضی شرطی

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

دو متغیر و فقط همین یکیه که تغییر میده

$$E(X|Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_{(X|Y)}(x|y) \, dx$$

$$E(X+Y|Z) = E(X|Z) + E(Y|Z)$$

$$E\left(\sum_i X_i | Z\right) = \sum_i E(X_i | Z)$$

$$E(X) = \sum_{y_i} \left(E(X|Y=y_i)\right) P(Y=y_i)$$

به ازای تمام Yها که y_iهای آن‌ها فضای احتمالات را افراز کرده‌اند برقرار است.

برای حالت‌های پیوسته هم برقرار است

متد انتقال

$$f_{XY}(x,y)$$

$$E(Z) = \iint g_1(x,y) f_{XY}(x,y) \, dx dy$$

$$\begin{cases} Z = g_1(X,Y) \\ W = g_2(X,Y) \end{cases}$$

$$g(X,Y) = \left(g_1(X,Y), g_2(X,Y)\right)$$

$$X = h_1(Z,W)$$

$$Y = h_2(Z,W)$$

در حالت پیوسته بین توزیع‌های X, Y

$$f_{ZW}(z,w) = f_{XY}\left(h_1(z,w), h_2(z,w)\right) |J|$$

ماتریس ژاکوبین

دترمینال ماتریس ژاکوبیان

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_1}{\partial w} \\ \frac{\partial h_2}{\partial z} & \frac{\partial h_2}{\partial w} \end{bmatrix} = \frac{\partial h_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial w} - \frac{\partial h_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial w}$$

مثال: اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل از هم با توزیع نرمال باشند و داشته باشیم:

$$\begin{cases} Z = 2X - Y \\ W = -X + Y \end{cases}$$

آنگاه $f_{Z,W}(z,w) = ?$.

$$X = h_1(z,w) = z + w$$

$$Y = h_2(z,w) = z + 2w$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(J) = 2 - 1 = 1$$

$$f_{ZW}(z,w) = f_{XY}(z+w,\ z+2w)\,\left|\cancel{J}\right|^{1} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(z+w)^2 + (z+2w)^2}{2}}$$

رسماً داریم از روی یک توزیع توأم؛ یک توزیع توأم دیگه رو بدست می‌آریم که خیلی حرکت خفنیه.