به نام خدا

۴. فرض کنید دو متغیر X و Y دارای توزیع توأم نرمال با مشخصات زیر باشند:

$$\mu_X = 0, \quad \sigma_X^2 = 1, \quad \mu_Y = -1, \quad \sigma_Y^2 = 4, \quad \rho = -\frac{1}{2}$$

(آ) $P(X+Y>0)$

(ب) فرض کنید a یک عدد ثابت است و می‌دانیم $aX+Y$ و $X+2Y$ مستقل از یکدیگر هستند. مقدار a را بیابید.

(ج) $P(X+Y>0 | 2X-Y=0)$

Part A

$X \sim Normal(0,1) \qquad Y \sim Normal(-1,4)$

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sigma_{XY} = -\frac{1}{2}\sigma_X\sigma_Y = -\frac{1}{2}\times 1\times 2 = -1 \doteq \sigma_{XY}$$

برای پیدا کردن $\mathbb{P}(X+Y>0)$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

1. تعریف $Z = X+Y$ و پیدا کردن پارامترهای Z
2. استانداردسازی Z و محاسبه‌ی Z_{std}
3. با تعریف مسئله به صورت $\mathbb{P}(Z_{std})$ که بتوانیم مقدار آن را از روی جدول φ بدست بیاوریم.

① $Z = X+Y \longrightarrow \begin{cases} \mu_Z = \mu_X + \mu_Y \\ \sigma_Z = \sqrt{\sigma_Z^2} = (\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY})^{\frac{1}{2}} \end{cases}$

$\mu_Z = -1$

$$\sigma_Z = (1+4+2\times -1)^{\frac{1}{2}} = (5-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

② $Z_{std} = \dfrac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z} \sim Normal(0,1)$

③ $$\mathbb{P}(X+Y>0) = \mathbb{P}(Z>0) \equiv \mathbb{P}\left(Z_{std} > \frac{0-\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = 1-\varphi\left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right)$$

$$= 1-\varphi\left(\frac{-(-1)}{\sqrt{3}}\right) = 1-\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1-0.718 = 0.282$$

Part B

$$\begin{cases} \alpha = X + 2Y \\ \beta = aX + b \end{cases}$$

چون به فرض (صورت سوال) داریم که α, β از یکدیگر مستقلند پس رابطه‌ی زیر را داریم:

$$* \quad P_\alpha \times P_\beta = P_{\alpha\beta}$$

مراحل حل سوال:

1. محاسبه‌ی σ^2 برای α
2. محاسبه‌ی σ^2 برای β
3. محاسبه‌ی Cov آن‌ها با پارامترهای $\alpha\beta$
4. به علت اینکه α, β از یکدیگر مستقلند پس $Cov(\alpha, \beta) = 0$ و محاسبه‌ی a

① $P_\alpha = P(X+2Y)$, $X, Y \sim Normal \Rightarrow X+2Y \sim Normal$ زیرا ترکیب خطی از 2 متغیر تصادفی نرمال، نرمال است.

$$\text{if } Z = aX + bY \text{ then } \begin{cases} \mu_Z = a\mu_X + b\mu_Y \\ \sigma_Z^2 = Var(aX+bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab\,Cov(X,Y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_Z^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\rho\,\sigma_X\sigma_Y \implies \sigma_\alpha^2 = \underset{1}{\sigma_X^2} + 4\underset{16}{\sigma_Y^2} + 4\underset{-1/2}{\rho}\,\underset{1}{\sigma_X}\,\underset{2}{\sigma_Y} = 16$$

② $\sigma_\beta^2 = a^2\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2a\rho\,\sigma_X\sigma_Y = a^2 + 16 + (-2a) = a^2 - 2a + 16$

③ $Cov(\alpha, \beta) = Cov(X+2Y,\ aX+Y)$

$$= a\,\overset{Var(X)}{\cancel{Cov(X,X)}} + 2a\,Cov(X,Y) + Cov(Y,X) + 2\,\overset{Var(Y)}{\cancel{Cov(Y,Y)}}$$

$$= a(1) + 2a(-1) + (-1) + 2 \cdot 4 \Rightarrow Cov(\alpha, \beta) = -a + 7$$

④ $-a + 7 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 7}$ ✓

Part C

برای حل مراحل زیر را طی می کنیم:

1. به دست آوردن روابط $\mu_{\alpha|\beta}$ ، $\sigma^2_{\alpha|\beta}$
2. محاسبه μ_α ، μ_β ، σ^2_α ، σ^2_β ، $Cov(\alpha,\beta)$
3. با توجه به اینکه $\alpha|\beta=0$ متغیرها از توزیع نرمال پیروی می‌کنند با استفاده از نرمال‌سازی تلاش می کنیم که صورت خواسته شده را به شکل تابع اول به دست بیاریم.

① $PDF(\overbrace{X+Y}^{\alpha} \mid \overbrace{2X-Y}^{\beta}=0) = ?$

$$Z = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \sim Normal\left(\begin{bmatrix} \mu_\alpha \\ \mu_\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & Cov(\alpha,\beta) \\ Cov(\alpha,\beta) & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mu_{\alpha|\beta} = ? \qquad \sigma^2_{\alpha|\beta} = ?$$

$$\mu_{\alpha|\beta} = \mu_\alpha + \Sigma_{\alpha\beta} \Sigma_{\beta\beta}^{-1} (\alpha|\beta - \mu_\beta), \quad \Sigma_{\alpha,\beta} = Cov(\alpha,\beta), \quad \Sigma_{\beta\beta} = \sigma_\beta^2$$

$$\Rightarrow \mu_{\alpha|\beta} = \mu_\alpha + \frac{Cov(\alpha,\beta)}{\sigma^2_\beta} (\alpha|\beta - \mu_\beta)$$

$$\sigma^2_{\alpha|\beta} = \sigma^2_\alpha - \Sigma_{\alpha\beta} \Sigma_{\beta\beta}^{-1} \Sigma_{\alpha\beta}^T \quad s.t. \begin{cases} \Sigma_{\alpha\beta} = Cov(\alpha,\beta) \\ \Sigma_{\beta\beta} = \sigma^2_\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma^2_{\alpha|\beta} = \sigma^2_\alpha \left(1 - \frac{Cov(\alpha,\beta)^2}{\sigma^2_\alpha \sigma^2_\beta} \right)$$

②
$\sigma^2_\alpha = ?$ $\quad \mu_\alpha = ?$

$\sigma^2_\beta = ?$ $\quad \mu_\beta = ?$

$Cov(\alpha,\beta) = ?$

$$\mu_\alpha = \mu_X + \mu_Y = -1 \qquad \sigma^2_\alpha = \sigma^2_X + \sigma^2_Y + 2Cov(X,Y) = 3$$

$$\mu_\beta = 2\mu_X + \mu_Y = 1 \qquad \sigma^2_\beta = 4\sigma^2_X + \sigma^2_Y - 4Cov(X,Y) = 12$$

$$Cov(\alpha,\beta) = 2\sigma^2_X - \sigma^2_Y + Cov(X,Y) = -3$$

$$\alpha|\beta=0 \sim Normal(\mu_{\alpha|\beta}, \sigma^2_{\alpha|\beta})$$

$$\mu_{\alpha|\beta} = \mu_\alpha + \frac{Cov(\alpha,\beta)}{\sigma^2_\beta}(\beta - \mu_\beta) = -0.75$$

$$\sigma^2_{\alpha|\beta} = \sigma^2_\alpha \left(1 - \frac{Cov(\alpha,\beta)^2}{\sigma^2_\alpha \sigma^2_\beta} \right) = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow PDF(\alpha > 0 | \beta = 0), \quad \alpha|\beta = 0 \sim Normal(-0.75, \tfrac{9}{4})$$

③ $\alpha \mid \beta = 0 \sim \text{Normal}\left(-0.75, \frac{9}{4}\right)$

$$Z_{std} = \frac{\alpha - \mu_{\alpha|\beta}}{\sigma_{\alpha|\beta}} = \frac{0.75}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\alpha > 0 \mid \beta = 0) = 1 - \Phi(0.5) = 0.3085$$

۶. دیسک زیر را در نظر بگیرید:

$$D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

نقطه (X,Y) را به صورت یکنواخت و تصادفی در D انتخاب می‌کنیم. تابع چگالی حتمال توأم X و Y به صورت زیر می‌باشد:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (x,y) \in D \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

حال فرض کنید (R,θ) مرتبط با مختصات قطبی مطابق شکل ۱ باشند. تبدیل‌های مختصات‌ها از دستگاه کارتزین به قطبی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} X = R\cos\theta \\ Y = R\sin\theta \end{cases}$$

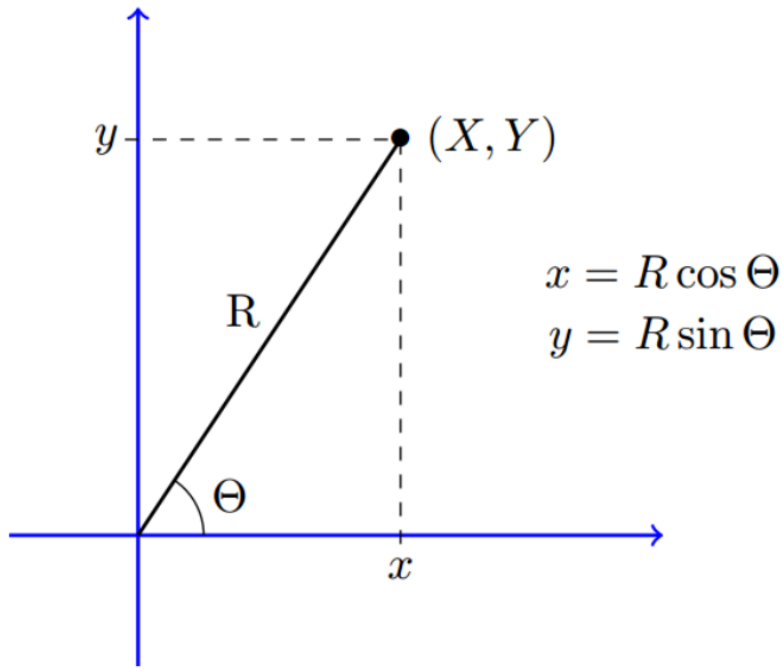
که محدوده متغیرهای R و θ به صورت زیر می‌باشد:

$$R \geq 0$$
$$-\pi \leq \theta \leq \pi$$

.

(آ) تابع چگالی توأم R و θ را بیابید.

(ب) آیا R و θ نسبت به یکدیگر مستقل هستند؟



شکل ۱: ارتباط بین مختصات کارتزین و قطبی

Part A

۱_ تشکیل ماتریس ژاکوبین تبدیل مختصات دکارتی به قطبی

۲_ اعمال ژاکوبین روی $f_{x,y}$ و بدست آوردن $f_{r,\theta}$

① $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$, $|J| = r$

② $f_{r,\theta} = f_{x,y} \times |J| = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{r}{\pi} & 0 \leq r \leq 1, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 & o.w \end{cases}$

Part B

r, θ are independent if $\quad f_{r,\theta} = f_r \times f_\theta$

$f_r = \int_0^{2\pi} f_{r,\theta}\, d\theta$ مرحله 1

$f_\theta = \int_0^1 f_{r,\theta}\, dr$ مرحله 2

3 چک کردن شرط استقلال

① $f_r = \int_0^{2\pi} f_{r,\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r}{\pi}\, d\theta = \frac{r}{\pi}\theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi r}{\pi} - 0 = 2r$

② $f_\theta = \int_0^1 f_{r,\theta}\, dr = \int_0^1 \frac{r}{\pi}\, dr = \frac{r^2}{2\pi}\Big|_0^1 = \frac{1}{2\pi} - 0 = \frac{1}{2\pi}$

③ $f_r \times f_\theta = 2r \times \frac{1}{2\pi} = \frac{2r}{2\pi} = \frac{r}{\pi} = f_{r,\theta}$ ✓

پس از یکدیگر مستقلند.

۸. متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر می‌باشند:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}, \quad x \geq 1, y \geq 1$$

حال توابع چگالی احتمال توأم موارد زیر را بدست بیاورید:

(آ) $U = X + Y \quad V = \frac{X}{Y}$

(ب) $U = X, \quad V = \frac{X}{Y}$

(ج) $U = X + Y, \quad V = \frac{X}{X+Y}$

Part A

مراحل کلی حل

1 تبدیل $U_{X,Y}, V_{X,Y}$ به $X_{U,V}, Y_{U,V}$

2 محاسبه‌ی ماتریس J

3 محاسبه‌ی تابع $f_{U,V}$

① $X = U - Y \qquad Y = U - X$

$X = YV \qquad Y = \frac{X}{V}$

$$\Rightarrow YV = U - Y \Rightarrow Y = \frac{U}{1+V} \qquad \Rightarrow U - X = \frac{X}{V} \Rightarrow X = \frac{U}{1+\frac{1}{V}} = \frac{VU}{V+1}$$

② $$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial U} & \frac{\partial X}{\partial V} \\ \frac{\partial Y}{\partial U} & \frac{\partial Y}{\partial V} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial X}{\partial U} = \frac{V(V+1)}{(V+1)^2} = \frac{V}{V+1} \qquad \frac{\partial Y}{\partial U} = \frac{1+V}{(1+V)^2} = \frac{1}{1+V}$$

$$\frac{\partial X}{\partial V} = \frac{U(V+1) - VU}{(V+1)^2} = \frac{U}{(V+1)^2} \qquad \frac{\partial Y}{\partial V} = \frac{U}{(1+V)^2}$$

③ $$f_{U,V} = f_{X,Y}\,|J| = \frac{1}{\left(\frac{VU}{V+1}\right)^2\left(\frac{U}{V+1}\right)^2} \cdot \left[\left(\frac{V}{V+1}\cdot\frac{U}{(1+V)^2}\right) - \left(\frac{1}{1+V}\cdot\frac{U}{(1+V)^2}\right)\right]$$

Part B

Part A مراحل کار مثل

① $X = U \qquad V = \dfrac{X}{Y}$

$\Rightarrow Y = \dfrac{U}{V} \quad , \quad X = U$

② $J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial U} & \dfrac{\partial X}{\partial V} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial U} & \dfrac{\partial Y}{\partial V} \end{bmatrix}$

$\dfrac{\partial X}{\partial U} = 1 \qquad \dfrac{\partial X}{\partial V} = 0$

$\dfrac{\partial Y}{\partial U} = \dfrac{V - 0}{V^2} = \dfrac{1}{V} \qquad \dfrac{\partial Y}{\partial V} = \dfrac{-U}{V^2}$

$\Rightarrow |J| = \dfrac{-U}{V^2} - 0 = -\dfrac{U}{V^2}$

$\Rightarrow f_{U,V} = f_{X,Y} \times |J| = \dfrac{1}{U^2 \times \frac{U^2}{V^2}} \times \left|-\dfrac{U}{V^2}\right|$

Part C

مراحل مثل قسمت a

① $U = X + Y \quad , \quad V = \dfrac{X}{X+Y} \Rightarrow X = U - Y \Rightarrow V = \dfrac{U - Y}{U \cancel{-Y} \cancel{+Y}} \Rightarrow -Y = \dfrac{UV}{U} \Rightarrow Y = -V$

$X = U + V$

② $J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial U} & \dfrac{\partial X}{\partial V} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial U} & \dfrac{\partial Y}{\partial V} \end{bmatrix}$

$\dfrac{\partial X}{\partial U} = 1 \qquad \dfrac{\partial X}{\partial V} = 1$

$\dfrac{\partial Y}{\partial U} = 0 \qquad \dfrac{\partial Y}{\partial V} = -1$

$\Rightarrow |J| = -1$

③ $f_{U,V} = f_{X,Y} \times |J| = \dfrac{1}{(U+V)^2 V^2} \times -1 = -\dfrac{1}{V^2 (U+V)^2}$