



الگوریتم‌های پیشرفته

استاد درس

دکتر علی معینی

دستیاران آموزشی

مهسا حفیظی

فاطمه ولی پور

معین منعمی

علیرضا صالحی

حسین عبدالهی پور

دانشکده علوم مهندسی

تمرین سری اول – الگوریتم‌های تصادفی

۱. (نظری) مسئله «برش کمینه تصادفی»^۱ را در نظر بگیرید. فرض کنید در یک گراف خاص، به جای در نظر گرفتن h برش، h برش داریم. برای سادگی فرض می‌کنیم هیچ اشتراکی بین این h مجموعه وجود ندارد. در این حالت:

الف) احتمال یافتن یک برش بهینه را بیابید.

ب) بیش‌ترین مقدار h چه عددی است؟

ج) یک مثال برای بیش‌ترین مقدار h ارائه دهید.

۲. (نظری) دنباله متناهی و یا نامتناهی شمارا از پیشامدهای A_1, A_2, \dots را در نظر بگیرید. نشان دهید:

$$p\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) \leq \sum_{i \geq 1} p(A_i)$$

۳. (نظری) فرض کنید A و B دو پیشامد دلخواه باشند.

الف) نشان دهید: $p(B - A) = p(B) - p(A \cap B)$

ب) فرض کنید $A \subseteq B$ ، نشان دهید: $p(B) \geq p(A)$

۴. (نظری) اصول موضوعه احتمال را در نظر بگیرید

$$1) \forall E \subseteq S; \quad p(E) \geq 0$$

$$2) p(S) = 1$$

$$3) p\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i p(A_i) \quad \text{if } \forall i \neq j; A_i \cap A_j = \emptyset$$

فرض کنید شرط سوم، اجتماع شمارا نباشد (یعنی شرط سوم برای ناشمارا پیشامد نیز برقرار باشد). مثال نقضی ارائه دهید و توسط آن نشان دهید که شرط سوم مختص اجتماع ناشمارا نیست. (راهنمایی: می‌توانید فضای نمونه را $[0,1]$ در نظر بگیرید و سپس پیشامدهایی تعریف کنید که از اجتماع آنها، شرط دوم نقض می‌شود.)

¹ Randomized Min Cut

رایج سوال اول

C: یال های min cut
m: کل یال ها

احتمال اینکه برای خاصه برش به $\frac{C}{m} - 1$ در مرحله اول

~ ~ ~ در مرحله اول $\frac{C}{m-1} - 1$

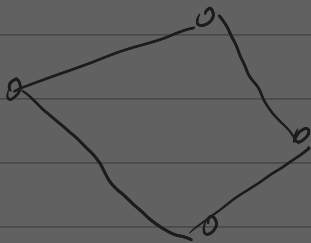
$$P_{(min\ cut)} = \prod_{i=0}^{n-3} \left[\left(\frac{C}{m-i} \right) - 1 \right] = \frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)}$$

این احتمال برای حالتی است که ما فقط یک min cut داشته باشیم. در حالی که ما می توانیم داشته باشیم، اما باید طبق اصل سبب یکتایی این

$$h_{min\ cut} \rightarrow \frac{h}{\binom{n}{2}} = \frac{2h}{n(n-1)}$$

که رسیدیم به اینجا به مجموعه بریم

ب) سبب مسئله $h=1$



کمترین کمان — با توجه به شرط نه اش این است که min cut
پس این ها خواهد بود زیرا که min cut کمترین کمان یال
مشکل با مجموعه ی خاصی خواهد داشت.

برای بعضی گره های $n=4$

از حاکم این است که در محاسبات
استفاده کنیم



$$P(B) = P(A) + P(B-A)$$

بدین صورت

۳. فرض کنید B و A دو پیشامد دلخواه باشند.

الف) نشان دهید: $p(B - A) = p(B) - p(A \cap B)$

ب) فرض کنید $A \subseteq B$ ، نشان دهید: $p(B) \geq p(A)$

است

Solution:

1. Understanding $B - A$:

$B - A$ represents the set of elements in B that are not in A . Mathematically, this can be written as:

$$B - A = B \cap A^c$$

where A^c is the complement of A .

2. Probability of $B - A$: Using the definition of probability for intersections, we get:

$$p(B - A) = p(B \cap A^c)$$

3. Relation with $p(B)$ and $p(A \cap B)$: We can express $p(B)$ in terms of A and A^c :

$$p(B) = p((B \cap A) \cup (B \cap A^c))$$

Since $(B \cap A)$ and $(B \cap A^c)$ are disjoint sets, we have:

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap A^c)$$

4. Substitute for $p(B - A)$: From the above, we see that:

$$p(B - A) = p(B \cap A^c) = p(B) - p(A \cap B)$$

This completes the proof for part (a):

$$p(B - A) = p(B) - p(A \cap B)$$

Let me know if you'd like help with part (b) as well!

$$\{A_i\} \rightarrow \text{نایم} \Rightarrow P(X=A_i) = 0$$

نسبت نایم \rightarrow

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} P(X=A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X=A_i) = 0 \quad \text{But} \quad \sum_{i=0}^{\infty} A_i = 1 = S$$

$A_i \in [A_i]$ $A_i \in [A_i]$ $A_i \in [A_i]$ X'

منطق کلی اینست که برای $\{A_i\}$ در به دست به مجموع نامتناهی نه اصله صحیح نه نقلی است چون اینها به نسبت

اینکه هر یک صحیح صفر باشد و مجموع نامتناهی صفر صفر است (اما مجموع کل برای $\{A_i\}$ برابر یک خواهد بود

که این را یک است. به این قضیه میگویند

ملاحظات:

- بر روی تمرین‌هایی که تحویل می‌دهید نام تمامی اعضای گروه به همراه شماره دانشجویی وجود داشته باشد.
- تمامی اعضای گروه، فایل تمرین را تحویل دهند.
- ابتدای هر تمرین از عبارت (نظری/عملی) استفاده شده است که در صورت مشاهده عبارت «عملی» باید آن تمرین پیاده‌سازی شود. در صورت مشاهده «نظری» می‌توانید آن را روی کاغذ با خط خوانا بنویسید.
- سؤالات خود را در مورد این تمرین می‌توانید از طریق نشانی @Moeinwt مطرح نمایید.
- لطفاً تا زمان مشخص شده تمرین خود را در سامانه ایلرن بارگذاری نمایید.
- رونوشت از مطالب آماده موجود در اینترنت و یا استفاده از تمارین هم‌کلاسی‌ها، تقلب محسوب می‌شود.
- در صورت مشاهده تقلب، نمره تمرین برای تمامی افراد شرکت‌کننده از دست خواهد رفت.