



دانشکده فنی

جبر خطی

تمرین سری ششم

استاد: علی فهیم

دستیار آموزشی:
علیرضا صالحی حسین آبادی

مهلت تحویل: ۹ بهمن ۱۴۰۳

نیمسال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۴

۱. جواب دستگاه‌های زیر را در صورت وجود بیابید:

(آ)

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 2 \\ 7x + 4y + 5z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 - 8x_6 = 8 \\ 3x_3 + x_4 - 2x_5 - 4x_6 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 7x_5 + x_6 = 2 \\ 6x_1 - 9x_2 + 11x_4 - 19x_5 + 3x_6 = 1 \end{cases}$$

۲. وارون ماتریس‌های زیر را در صورت وجود بیابید.

(آ)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

۳. در هر بخش بررسی کنید که آیا U زیر فضای برداری V است یا خیر؟

(آ)

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b+1 \end{bmatrix} \mid a, b \in R \right\}$$

$$V = \mathbb{R}^3$$

(ب)

$$U = P(x) = ax^2 + bx + c, P(1) = 0$$

$$V = P_2(\mathbb{R})$$

(ج)

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\}$$

$$V = \mathbb{R}^2$$

(د) آیا بردار $\{(1, -1, 0, 1)\}$ در زیر فضای تولید شده توسط مجموعه بردارهای $\{(1, 1, 3, -4), (2, 1, 1, -1), (3, 1, -2, 4)\}$ در \mathbb{R}^4 قرار دارد؟

۴. استقلال و وابستگی خطی مجموعه بردارهای داده شده را روی \mathbb{R} تعیین کنید. اگر وابسته خطی باشد، یک وابستگی خطی بین آن‌ها پیدا کنید.

$$\{(1, -4, 3, 1), (2, -1, 3, -1), (1, 1, -1, 1)\} \quad (\text{آ})$$

$$\{(1, -1, 3, 2), (0, -1, 2, 1), (2, 1, 0, 1)\} \quad (\text{ب})$$

$$\{(1, -1, 1, 1), (-1, 3, 0, 1), (2, -3, 0, 1)\} \quad (\text{ج})$$

۵. پایه‌ای برای زیرفضای تولید شده توسط بردارهای زیر در \mathbb{R}^5 بیابید.

$$\{(1, 3, 2, 1, 1), (4, 5, 1, 1, 1), (5, 1, -4, 1, 1), (0, 2, 2, 0, 0)\}$$

۶. تبدیل خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\Phi \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 3x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

(ا) ماتریس تبدیل A_Φ را بیابید.

(ب) رتبه A_Φ را مشخص کنید.

(ج) کرنل و تصویر Φ را بیابید.

(د) بعد کرنل و تصویر Φ را مشخص کنید.

$$\dim(\ker(\Phi)) = ? \quad \dim(\text{Im}(\Phi)) = ?$$

۷. تبدیل خودریخت $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را با ماتریس تبدیل (نسبت به پایه‌های استاندارد در \mathbb{R}^3) زیر در نظر بگیرید:

$$A_\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ا) کرنل و تصویر تبدیل Φ را مشخص کنید.

$$\ker(\Phi) = ? \quad \text{Im}(\Phi) = ?$$

(ب) ماتریس تبدیل \tilde{A}_Φ را براساس پایه B بیابید.

$$B = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

۸. ماتریس‌های تبدیل $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ و $B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

این ماتریس‌ها معرف چه تبدیل هندسی‌ای هستند؟ مکان هندسی نقاط که تحت هر کدام از این تبدیل‌ها ناوردا می‌مانند چیست؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

¹Rank

²Endomorphism