جلسه‌ی سیزدهم آمار و احتمال مهندسی — دکتر شریفی زارچی - دانشگاه شریف

$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$ قابل تعمیم است به n متغیر

$CDN_{X_1,X_2,\dots,X_n}$

$$F_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n)$$

از قبل می‌دونیم که $\int f_X\,dx = F_X \quad , \quad \frac{\partial F_X}{\partial x} = f_X$

$$f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} F_{X_1,X_2,\dots,X_n}$$

می‌دونیم که F باید در ∞ برابر ۱ و در $-\infty$ برابر صفر باشد.

می‌دونیم که f برای هر متغیری بین صفر و یک خواهد بود.

یعنی از F برای تک تک متغیرها مشتق گرفته‌ایم.

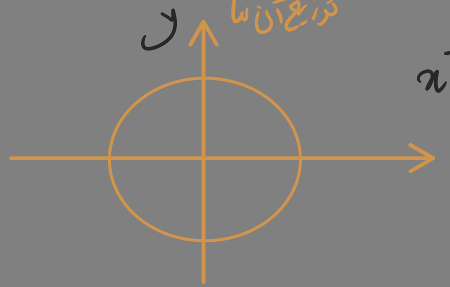
استقلال و وابستگی برای چند متغیر تصادفی

مارجینال

$$f_{XY}(x,y) \longrightarrow f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy \rightarrow$$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y) \Leftarrow$$ شرط مستقل بودن دو متغیر تصادفی

مثال: دو متغیر تصادفی X,Y داریم که هر بار یک نقطه تولید می‌کنند. نقاط ما همواره داخل یک دایره قرار دارند و در دایره یک ۰ (توزیع آن‌ها) از توزیع uniform پیروی می‌کنند.



$x^2+y^2 \le 1$

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0 & x^2+y^2>1 \\ \frac{1}{\text{مساحت}} = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi} & x^2+y^2 \le 1 \end{cases}$$

PDF

آیا X , Y مستقلند؟

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{\pi} \end{cases} \rightarrow f_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy = \frac{y}{\pi} = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}\,dx = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \\ 0 \quad \text{o.w.} \end{cases}$$

دامنه‌ی تغییرات y در x :

درصورتی که بین ۱,۱- تغییر کند

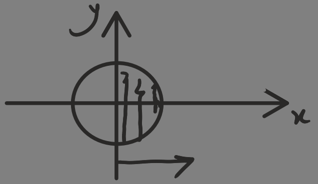
$$f_{XY} = \frac{1}{\pi}$$

$$f_X \times f_Y = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} \times \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} = \frac{4}{\pi^2}\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

$$f_{XY}(x,y) \neq f_X(x) \times f_Y(y)$$

پس به هم وابسته هستند

البته از نظر شهودی هم میشه گفت که اگه روی محور X به سمت 1 حرکت کنیم برای اینکه $x^2+y^2=1$ باشد دامنه تغییرات y محدود می شود
پس به هم وابسته هستند.



احتمال شرطی برای متغیرهای تصادفی

آیا توزیع X با دانستن Y تغییر می کند؟ آیا CDF_X با دانستن CDF_Y تغییر می کند؟

$$F_{X|Y}(x|y) =$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

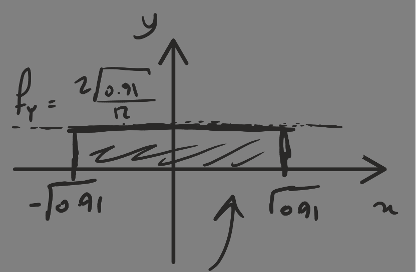
توزیع وابسته

توزیع مارجینال

مثال: در مثال قبل $f_{X|Y}(x|y)$ را محاسبه کنید.

$$f_Y(y) = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} \quad \text{if } y=0.3 \rightarrow f_Y(0.3) = \frac{2\sqrt{1-0.09}}{\pi}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{2\sqrt{0.91}} = \frac{1}{2\sqrt{0.91}} & x^2+y^2 \le 1 \quad (1) \\ 0 & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$



(2) مساحت زیر این مستطیل = CDF

$$(1) \Rightarrow x^2+y^2 \le 1 \rightarrow x^2 \le 1-y^2 \rightarrow -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \rightarrow -\sqrt{0.91} \le x \le \sqrt{0.91}$$

$$(2) \Rightarrow CDF = \frac{2\sqrt{0.91}}{\pi} \times 2\sqrt{0.91} = \frac{4 \times 0.91}{\pi} = \frac{3.64}{\pi}$$

اثبات قاعده‌ی LOTUS

(Law of the Unthinking statistician)

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum g(x)\, f_X(x) & \text{متغیر تصادفی گسسته} \\ \int g(x)\, f_X(x)\, dx & \text{متغیر تصادفی پیوسته} \end{cases}$$

طبق تعریف $E(g(X)) = \sum g(x)\, P(x = g(x)) = \sum g(x)\, f(g(x))$

$g(x) = Y \rightarrow f_Y$

با این تغییر متغیر حالا مقدار $f(y)$ ممکنه دارای مقادیر یکسانی باشد.

یعنی به ازای ورودی های متفاوت خروجی های یکسانی بده (طبق تعریف تابع)

حالا ما می آییم و به جای جمع کردن $g(x)\, P(x = g(x))$ ، مقادیری که یکسان هستند رو باهم یک دسته کرده و دسته ها را باهم جمع می زنیم.

$Y = g(X)$

$$E(g(X)) = E(Y) = \sum y\, f_Y(y)$$ تغییر متغیر و محاسبه‌ی E از روش تابع احتمال

$$E(g(X) = Y) = \sum_y y\, P(g(x) = y)$$ محاسبه‌ی E از روش احتمال

$$E(g(X)) = \sum_y y \sum_{x_i : g(x_i) = y} f_X(x)$$ پیدا کردن مقادیر یکسان که تابع احتمال و جمع زدن آن ها که نهایت جمع کردن دسته ها

$$E(g(X)) = \sum_x g(x)\, f_X(x)$$ جمع زدن تمام مقادیر y هم ارز هست با جمع زدن تمام مقادیر $g(x)$ زیرا $Y = g(X)$ و $y = g(x)$

نکته‌ی اساسی

کل نکته‌ی اساسی این مسئله وجود x هایی هستند که مقادیر یکسانی دارن و قابل دسته بندی هستن.

2D-LOTUS

$$E(g(X,Y)) = \begin{cases} \sum \sum g(x,y)\,\mathbb{P}(X=x, Y=y) \\ \iint g(x,y)\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy \end{cases}$$

قضیه اگر X, Y مستقل باشند آن گاه:

$$E(XY) = E(X) \times E(Y)$$

$$E(XY) = \iint xy \underbrace{f_{XY}(x,y)}_{= f_X(x) \times f_Y(y)} dx\, dy = \iint xy\, f_X(x)\, f_Y(y)\, dx\, dy$$

چون مستقلند

$$= \iint \underbrace{x f_X(x)}_{E(X)}\; \underbrace{y f_Y(y)}_{E(Y)}\, dx\, dy \implies E(XY) = E(X) \times E(Y)$$