Hesam Mumivand Fard

810803063

دانشکده فنی

آمار و احتمال

تمرین سری اول

استاد: علی فهیم

دستیار آموزشی:
علیرضا صالحی حسین آبادی

مهلت تحویل: ۳۰ مهر ۱۴۰۳

نیمسال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۴

? $X \sim \text{Binomial} \Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \geq 1$

۱. توزیع پوآسون

الف) فرض کنید X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای n و p باشد، به طوری که $n- = \lambda$. نشان دهید برای یک k و λ مشخص زمانی که $n \to \infty$ میل کند، داریم:

$\lambda = np$

$$P(X = k) = \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$$

ب) در طی سالهای ۱۹۷۹ تا ۱۹۸۱، در بریستول، ۱۱۰۳ پستچی ۲۱۵ مورد گاز گرفتن سگ را تحمل کردند. در مجموع ۱۹۱ پستچی گاز گرفته شدند که ۱۴۵ نفر از آنها فقط یک بار گاز گرفته شدند. شعار پستچی باید کدام باشد:

- Once bitten, twice shy
- Once bitten, twice bitten

ج) فرض کنید X_n یک توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p داشته باشد، به طوری که $np = \lambda$ ، و فرض کنید A_n رویدادی باشد که $X_n \geq 1$ باشد. اگر Y یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ است، نشان دهید که:

$$n \to \infty : P(X_n = k|A_n) \to P(Y = k|Y \geq 1)$$

د) اگر X یک متغیر تصادفی با توزیع پوآسون باشد، نشان دهید:

$$E(|X - \lambda|) = \frac{2\lambda^\lambda e^{-\lambda}}{(\lambda - 1)!} \quad \lambda \in \mathbb{N}$$

۲. ثابت نرمال‌سازی برای توزیع گاوسی با میانگین صفر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Z = \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

که در این رابطه $a = -\infty$ و $b = \infty$. برای محاسبهٔ انتگرال داده شده ابتدا مجذور آن را در نظر می‌گیریم:

$$Z^2 = \int_a^b \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) dx\, dy$$

حال با استفاده از تغییر متغیرهای زیر از دستگاه مختصات دکارتی (x, y) به دستگاه مختصات قطبی (r, θ) می‌رویم:

- $x = r\cos(\theta)$
- $y = r\sin(\theta)$

در ادامه تأثیر این تغییر متغیرهای عبارتند از:

- $dxdy = rdrd\theta$
- $x^2 + y^2 = r^2$

و انتگرال دوگانه ما به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$Z^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr\, d\theta$$

حال انتگرال مرحله آخر را محاسبه نمایید و نمایش دهید که:

$$Z = \sqrt{\sigma^2 2\pi}$$

۳. نشان دهید که کانولوشن دو توزیع گاوسی، گاوسی است؛ یعنی:

$$p(y) = \mathcal{N}(x_1|\mu_1, \sigma_1^2) \otimes \mathcal{N}(x_2|\mu_2, \sigma_2^2) = \mathcal{N}(y|\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

که در رابطه فوق داریم:

- $y = x_1 + x_2$
- $x_1 \sim \mathcal{N}(x_1|\mu_1, \sigma_1^2)$
- $x_2 \sim \mathcal{N}(x_2|\mu_2, \sigma_2^2)$

که متغیرهای x_1 و x_2 متغیرهای تصادفی مستقل از یکدیگر هستند.

پاسخ سؤال اول

a)

$\lambda = np$ if $X \sim \text{Binomial}(n,k)$ then $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

if $n \to \infty$, $p \to 0$ then:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \; ; \; \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \sim \frac{e^{-\lambda}}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{e^{-\lambda}}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k e^{-\lambda} \times \underbrace{\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k e^{-\lambda} \frac{n^k}{(n-\lambda)^k} = \binom{n}{k} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(n-\lambda)^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(n-\lambda)^k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}^{\sim n^k}}{\underbrace{k!}_{\text{constant}}\underbrace{(n-\lambda)^k}_{\sim n^k}}}_{\sim \frac{1}{k!}} \lambda^k e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

b)

چون مسئله ی ما گاز گرفته شدن پستچی در طول بازه ی زمانی خاصی است و تعداد دفعات گاز گرفته شدن هم مهم است پس باید از توزیع پواسون استفاده کنیم.

$$\lambda = \frac{\text{تعداد گازهای گرفته شده}}{\text{تعداد کل پستچی ها}} = \frac{215}{1103} = \underline{0.195}$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(X=k)}_{\text{بار گاز گرفته شدن } k} = \frac{1}{k!} e^{-\lambda} \lambda^k \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{1!} e^{-0.195} (0.195)^1 = 0.195 \times e^{-0.195} = 0.16 \\ \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{0!} e^{-0.195} (0.195)^0 = e^{-0.195} = \underline{0.82} \end{cases}$$

پس با احتمال 82 درصد یک پستچی هرگز گاز گرفته نخواهد شد. ← شکار اول گزینه ی بهتریه تا

c) $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, $\lambda = np$, $A_n = \{ x_i \mid x_i \geq 1 , x_i \in X \}$

$Y \sim \text{Poison}(\lambda)$

prove that if $n \to \infty$: $\mathbb{P}(X_n = k \mid A_n) \longrightarrow \mathbb{P}(Y = k \mid Y \geq 1)$

This document works through the details of the k-truncated Poisson distribution, a special case of which is the zero-truncated Poisson distribution. The k-truncated Poisson distribution is the distribution of a Poisson random variable Y conditional on the event $Y > k$. It has one parameter, which we may take to be $\mu = E(Y)$. Since μ is not the mean (or anything else simple) of the distribution of Y conditioned on the even $Y > k$, we do not call μ the mean, rather we call it the *original parameter*.

If f_μ is the probability mass function (PMF) of Y, then the PMF g_μ of the k-truncated Poisson distribution is defined by

$$g_\mu(x) = \frac{f_\mu(x)}{1 - \sum_{j=0}^{k} f_\mu(j)}, \qquad x = k+1, k+2, \ldots \tag{1}$$

Plugging in the formula for the Poisson PMF, we get

$$\begin{aligned} g_\mu(x) &= \frac{\frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}}{1 - \sum_{j=0}^{k} \frac{\mu^j}{j!} e^{-\mu}} \\ &= \frac{\mu^x}{x!(e^\mu - \sum_{j=0}^{k} \frac{\mu^j}{j!})} \end{aligned} \tag{2}$$

$\mathbb{P}(Y = k \mid Y \geq 1)$

فرض براساس $Y > \alpha$ است. $\Rightarrow$ $Y \geq 1 \equiv Y > 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$$\mathbb{P}(Y = k \mid Y > 0) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k! \left[1 - \sum_{i=0}^{\alpha} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}\right]} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k! \left[1 - e^{-\lambda}\right]} \quad (1)$$

$$\mathbb{P}(X_n = k \mid A_n) = \mathbb{P}(X_n = k \mid X_n \geq 1) = \frac{\mathbb{P}(X_n = k \cap X_n \geq 1)}{\mathbb{P}(X_n \geq 1)} = \frac{\mathbb{P}(X_n = k)}{\mathbb{P}(X_n \geq 1)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_n = k)}{1 - \mathbb{P}(X_n = 0)} = \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0}} \quad \text{if } n \to \infty \quad \text{then:}$$

$$\longrightarrow \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k! \left[1 - \frac{e^{-\lambda} \lambda^0}{0!}\right]} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k! \left[1 - e^{-\lambda}\right]} = (1)$$

d)

$X \sim \text{Poison}(\lambda)$ then : $\mathbb{E}(|X-\lambda|) = \dfrac{2\lambda^{\lambda} e^{-\lambda}}{(\lambda-1)!}$; $\lambda \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(|X-\lambda|) = \sum_{k}^{\infty} |k-\lambda| \, \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k}^{\infty} |k-\lambda| \frac{1}{k!} e^{-\lambda} \lambda^{k}$$

$$= \sum_{k}^{\infty} |k-\lambda| \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k}^{\infty} |k-\lambda| \frac{\lambda^{k}}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \left[\sum_{k=0}^{\lambda} (\lambda-k) \frac{\lambda^{k}}{k!} + \sum_{k=\lambda+1}^{\infty} (k-\lambda) \frac{\lambda^{k}}{k!} \right]$$

$$= e^{-\lambda} \lambda^{\lambda} \left[\sum_{k=0}^{\lambda} (\lambda-k) \frac{\lambda^{k-\lambda}}{k!} + \sum_{k=\lambda+1}^{\infty} (k-\lambda) \frac{\lambda^{k-\lambda}}{k!} \right]$$

$$e^{-\lambda} \lambda^{\lambda} \left[\underbrace{\sum_{k=0}^{\lambda} (\lambda-k) \frac{\lambda^{k-\lambda}}{k!}}_{1} + \underbrace{\sum_{k=\lambda+1}^{\infty} (k-\lambda) \frac{\lambda^{k-\lambda}}{k!}}_{2} \right]$$

$$1 : \lambda \frac{\lambda^{0-\lambda}}{0!} + (\lambda-1)\frac{\lambda^{1-\lambda}}{1!} + (\lambda-2)\frac{\lambda^{2-\lambda}}{2!} + \cdots + (\lambda-(\lambda-2))\frac{\lambda^{-2}}{(\lambda-2)!} + (\lambda+\lambda-1)\frac{\lambda^{-1}}{(\lambda-1)!}$$

$$\cancel{\frac{\lambda^{1-\lambda}}{0!}} + \cancel{\frac{\lambda^{2-\lambda}\times 2}{1!\times 2}} - \cancel{\frac{\lambda^{1-\lambda}}{1!}} + \cancel{\frac{\lambda^{3-\lambda}\times 3}{2!\times 3}} - \cancel{\frac{2\lambda^{2-\lambda}}{2!}} + \frac{\lambda^{4-\lambda}\times 4}{3!\times 4} - \cancel{\frac{3\lambda^{3-\lambda}}{3!}} + \cdots + \cancel{\frac{\lambda^{-1}\times\lambda-1}{(\lambda-2)!(\lambda-1)}} - \cancel{\frac{(\lambda-2)\lambda^{-2}}{(\lambda-2)!}} + \frac{1}{(\lambda-1)!} - \cancel{\frac{(\lambda-1)\lambda^{-1}}{(\lambda-1)!}}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{(\lambda-1)!}$$

$$2 : ((\lambda+1)-\lambda)\frac{\lambda^{1}}{(\lambda+1)!} + ((\lambda+2)-\lambda)\frac{\lambda^{2}}{(\lambda+2)!} + ((\lambda+3)-\lambda)\frac{\lambda^{3}}{(\lambda+3)!} + \cdots$$

$$\frac{(\cancel{\lambda+1})\lambda^{1}}{\cancel{(\lambda+1)!}} - \cancel{\frac{\lambda\times\lambda}{(\lambda+1)!}} + \cancel{\frac{(\lambda+2)(\lambda^{2})}{(\lambda+2)!}} - \cancel{\frac{\lambda^{2}\times\lambda}{(\lambda+2)!}} + \cancel{\frac{(\lambda+3)\lambda^{3}}{(\lambda+3)!}} - \cancel{\frac{\lambda\times\lambda^{3}}{(\lambda+3)!}} + \cdots$$

$\cancel{\lambda!}$ $(\lambda-1)!$ $(\lambda+1)!$ $(\lambda+2)!$

$$\Rightarrow 2 = \frac{1}{(\lambda-1)!}$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda}\lambda^{\lambda}\left[(1) + (2) \right] = e^{-\lambda}\lambda^{\lambda}\left[\frac{1}{(\lambda-1)!}+\frac{1}{(\lambda-1)!}\right]$$

$$= \frac{2e^{-\lambda}\lambda^{\lambda}}{(\lambda-1)!} \quad \text{QED}$$

پاسخ سؤال دوم

$$Z = \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad , \quad Z^2 = \int_a^b \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right) dx\,dy \quad , \begin{cases} a = -\infty \\ b = +\infty \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} dx\,dy = r\,dr\,d\theta \\ x^2+y^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r \exp\left(-\frac{\overset{\alpha}{r^2}}{2\sigma^2}\right) dr\,d\theta \qquad \text{Prove } Z = \sqrt{\sigma^2 2\pi}$$

$$\alpha = r^2 \rightarrow d\alpha = 2r\,dr \Rightarrow Z^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2\sigma^2}\right) dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{-\frac{1}{2\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2\sigma^2}\right) d\theta \Bigg|_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} = \frac{1}{2}\theta \times (-2\sigma^2) \exp\left(-\frac{\alpha}{2\sigma^2}\right) \Bigg|_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} \Bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi (-2\sigma^2) \exp\left(-\frac{\alpha}{2\sigma^2}\right) \Bigg|_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2}\pi (-2\sigma^2) \left[0 - 1\right]$$

$$= 2\pi\sigma^2 = Z^2 \Rightarrow Z = \pm\sqrt{2\pi\sigma^2} \Rightarrow Z = \sqrt{2\pi\sigma^2} \quad \checkmark$$

مقدار منفی برای Z تعریف نشده است

پاسخ سوال سوم

$$P_{(y)} = \text{Normal}(x_1 | \mu_1, \sigma_1^2) \otimes \text{Normal}(x_2 | \mu_2, \sigma_2^2) = \text{Normal}(y | \mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$y = x_1 + x_2$ $\quad X_1 \sim \text{Normal}(x_1 | \mu_1, \sigma_1^2)$

x_1, x_2 are independent $\quad X_2 \sim \text{Normal}(x_2 | \mu_2, \sigma_2^2)$.

برای محاسبه f_X یک متغیر تصادفی دلخواه از تابع CF استفاده می‌کنیم. برای مثال اگر X نرمال باشد f_X از روی CF به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\varphi_{X(t)} = \mathbb{E}(e^{itX}) \quad ; \text{if } X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2) \text{ then } \varphi_{X(t)} = \exp(i\mu t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2)$$

$$f_{X(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\mu t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2) \cdot \exp(-itx)\, dt$$

$$\rightarrow f_{X(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2 + it(\mu - x))\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

حال با توجه به خواص CF در روابط داده شده در صورت سوال خواهیم داشت:

$$\varphi_{X_1(t)} = \mathbb{E}(\exp(itx_1)), \quad \varphi_{X_2}(t) = \mathbb{E}(\exp(itx_2)), \quad \varphi_Y(t) = \mathbb{E}(\exp(ity))$$

$$, Y = X_1 + X_2 \Rightarrow \varphi_Y(t) = \varphi_{X_1}(t)\, \varphi_{X_2}(t) = \exp(i\mu_1 t - \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 t^2) \exp(i\mu_2 t - \tfrac{1}{2}\sigma_2^2 t^2)$$

$$\Rightarrow \varphi_Y(t) = \exp(i\mu_1 t - \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 t^2 + i\mu_2 t - \tfrac{1}{2}\sigma_2^2 t^2)$$

$$= \exp\left(i(\mu_1 + \mu_2)t - \tfrac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2\right)$$

$$\Rightarrow f_{Y(y)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\tfrac{1}{2}\overbrace{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}^{\beta} t^2 + i\overbrace{(\mu_1 + \mu_2)}^{\alpha} t\Big)\, dt$$

$$f_{Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp\left(-\frac{(y-\alpha)^2}{2\beta}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left(-\frac{(y - (\mu_1 + \mu_2))^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right)$$