



دانشکده فنی

آمار و احتمال

تمرین سری چهارم

استاد: علی فہیم

دستیار آموزشی:
علیرضا صالحی حسین آبادی

مہلت تحویل: ۲۸ آذر ۱۴۰۳

نیمسال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۴

۱. رابطه بین بازه‌های اطمینان و آزمون‌های فرضیه را شرح دهید.
۲. وابستگی جعلی به چه معناست؟ در زمینه تحصیلی یا کاری خود یک مثال بزنید که بین دو متغیر وابستگی جعلی برقرار باشد.
 - مرجع ۱: کتاب احتمال و آمار مهندسی تألیف دکتر سید محمود طاهری انتشارات دانشگاه تهران
 - مرجع ۲
 - مرجع ۳
 - مرجع ۴
۳. تابع توزیع تجربی چیست؟
۴. ذر ساخت میله‌های استوانه‌ای با سطح مقطع مدور (که دورن قطعات توخالی قرار می‌گیرند)، دستگاه تراش چنان تنظیم می‌شود که میانگین قطر ۴.۹۵ سانتی‌متر باشد. نمونه ۱۲ تایی از میله‌ها انتخاب و قطر سطح مقطع آن‌ها اندازه گرفته‌ایم. نتایج به شرح زیر بوده‌اند:

$$4.974, 4.971, 5.032, 5.026, 4.955, 4.995$$

$$4.998, 5.011, 5.005, 4.981, 5.081, 5.012$$
 فرض کنید بتوان این داده‌ها را مشاهداتی از جامعه نرمال در نظر گرفت.
 - (آ) فرضیه درستی تنظیم دستگاه را در سطح ۰.۰۵ آزمون کنید.
 - (ب) اگر تنظیم دستگاه به اندازه ۰.۰۴ سانتی‌متر از مقدار مشخص شده انحراف داشته باشد، احتمال تقریبی پی‌بردن به آن چقدر است؟ (از مقدار انحراف معیار نمونه به عنوان برآورد مقدار σ استفاده کنید).
 - (ج) به منظور تضمین اینکه انحرافی به اندازه ۰.۰۵ سانتی‌متر در تنظیم دستگاه، با احتمال بیش از ۰.۹۵ کشف شود، به چند مشاهده نیاز است؟
۵. فرض کنید می‌خواهیم این فرضیه را آزمایش کنیم که حداقل ۱۰ درصد دانش آموزان از آلرژی رنج می‌برند. نمونه‌ای تصادفی از ۲۲۵ دانش آموز مورد بررسی قرار گرفته است که ۲۱ نفر از آنها دچار آلرژی بودند.
 - (آ) فرضیه‌های صفر و جایگزین را بیان کنید.
 - (ب) آماره آزمون مناسب را بیان کنید و مقدار $P - Value$ مناسب را بیاید.
 - (ج) در سطح $\alpha = 0.05$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
۶. لازم است میانگین استحکام تارهای نوعی پارچه از ۱۸ (مگاپاسکال) کمتر نباشند. از تجارب گذشته می‌توان توزیع مقاومت پارگی تارها را نرمال با انحراف معیاری برابر با ۰.۵ فرض کرد. محموله‌ای مرکب از یک عدل از این پارچه دریافت شده است. برای بررسی برقراری شرط فوق، ۱۰ قطعه پارچه از محموله انتخاب و نمونه‌ها آزمایش می‌شوند و نتایج زیر را به دست می‌آیند:

$$17.2, 16.7, 17.0, 17.1, 17.4, 18.0, 17.2, 17.5, 18.1, 17.3$$
 - (آ) آیا می‌توان عدل پارچه را پذیرفت؟ اندازه خطا را ۰.۰۵ در نظر بگیرید.
 - (ب) برپایه نمونه تصادفی ۱۰ تایی، احتمال پذیرش عدلی از پارچه که میانگین استحکام تارهایش ۱۷.۵ باشد، چقدر است؟
 - (ج) اگر میانگین استحکام پارچه یک عدل برابر ۱۷.۵ باشد، نمونه‌ای با چه اندازه نیاز است تا احتمال کشف آن حداقل ۰.۹۹ باشد؟
۷. در جعبه‌ای هشت کالا است که تعداد نامشخصی، مثلاً θ ، از آن‌ها معیوب‌اند. می‌خواهیم فرضیه صفر $\theta \leq 1$ را در برابر $\theta > 1$ آزمون کنیم. سه کالا با هم (بدون جایگذاری) بیرون می‌آوریم و H_0 را می‌پذیریم اگر هر سه کالا سالم باشند وگرنه آن را رد می‌کنیم.
 - (آ) احتمال ارتکاب خطای نوع اول را محاسبه کنید.
 - (ب) احتمال ارتکاب خطای نوع دوم را برای همه حالت‌های ممکن محاسبه کنید.
۸. نمونه‌ای ۲۵ تایی ماهی قزل‌آلای بالغ را که با نوعی برنامه غذایی آزمایشی پرورش یافته‌اند، در نظر می‌گیریم. انحراف معیار طول ماهی‌ها، $s = 4.25$ سانتی‌متر است. می‌توان توزیع طول ماهی‌ها را نرمال در نظر گرفت.
 - (آ) یک بازه اطمینان ۰.۹۵ برای واریانس جامعه بنا کنید. توضیح دهید چرا حدود اطمینان حاصل، حول s^2 متقارن نیست؟
 - (ب) برآورد بازه‌ای بند بالا را به بازه اطمینان برای انحراف معیار جامعه تبدیل کنید. بازه اطمینان حاصل را تفسیر کنید.
 - (ج) واریانس طول ماهی‌های قزل‌آلایی که با برنامه غذایی استاندارد پرورش یافته‌اند برابر با ۱۶.۲۷ است. می‌خواهیم آزمون کنیم که آیا می‌توان پذیرفت که واریانس طول ماهی‌های پرورش یافته با برنامه آزمایشی برابر ۱۶.۲۷ است یا خیر؟ این آزمون را در اندازه $\alpha = 0.05$ انجام دهید.
 - (د) نتایج بندهای الف و ج را، با توجه به رابطه بین بازه‌های اطمینان و آزمون‌های فرضیه، مقایسه کنید.

۹. مدت زمانی که برنامه‌ها حافظه یک کامپیوتر را اشغال می‌کنند، در دست بررسی است. این زمان برای ۱۲۸۷۶ برنامه اندازه‌گیری شده است. نتایج در جدول زیر خلاصه شده‌اند:

فراوانی مشاهده شده	زمان (بر حسب هزارم ثانیه)
۶۸۱۸	۰-۲۰
۳۲۱۲	۲۱-۵۰
۱۰۲۶	۵۱-۱۰۰
۷۸۶	۱۰۱-۱۵۰
۴۰۲	۱۵۱-۲۰۰
۴۲۶	۲۰۱-۴۰۰
۲۰۶	۴۰۱-۱۰۰۰

- (آ) نمودار مستطیلی/هیستوگرام فراوانی نسبی را رسم کنید. حدس خود را درباره توزیع داده‌ها، همراه با دلیل، بیان کنید.
- (ب) با فرض اینکه داده‌ها توزیع نمایی دارند، پارامتر توزیع را به روش بیشینه درست‌نمایی برآورد کنید و نمودار چگالی احتمال مربوط را رسم کنید.
- (ج) از آزمون خی دو استفاده کنید و این فرضیه را که توزیع داده‌ها از الگوی نمایی پیروی می‌کند بیازمایید.
- (د) با استفاده از آزمون کالموگوروف-اسمیرنوف، بررسی کنید آیا توزیع نمایی به داده‌ها می‌برازد؟

برای موارد ج و د زمون را در اندازه $\alpha = 0.05$ انجام دهید.

۱۰. در بررسی ۱۲۱۸ تصادف اخیر خودروهای شخصی، هر تصادف برحسب اینکه در یک تقاطع (A_1)، یا جای دیگر (A_2) اتفاق افتاده باشد، در روز (B_1) یا شب (B_2) رخ داده باشد و با جراحت فردی (C_1) همراه باشد یا همراه نباشد (C_2) رده‌بندی شده است. رده‌بندی متقاطع به صورت زیر گزارش شده است:

B_2		B_1		
C_2	C_1	C_2	C_1	
۴۲	۱۰۷	۲۳۸	۷۷	A_1
۹۳	۱۲۸	۴۶۷	۶۶	A_2

- (آ) آزمون کنید که آیا این سه متغیر مستقل هستند یا خیر؟ سطح مخاطره را $\alpha = 0.05$ بگیرید.
- (ب) به منظور تحلیل بیشتر ماهیت رابطه‌ها، توزیع‌های حاشیه‌ای دو متغیره متغیرهای A و B ، متغیرهای A و C ، و متغیرهای B و C را بیابید. با کنترل مخاطره α در سطح 0.05 در هر مورد، آزمون کنید که آیا دو متغیر مستقل هستند یا خیر؟ ضریب‌های توافق پیرسون، چوپروف و کرامر را برای هر کدام محاسبه کنید و مقادیر آن‌ها را تفسیر کنید.