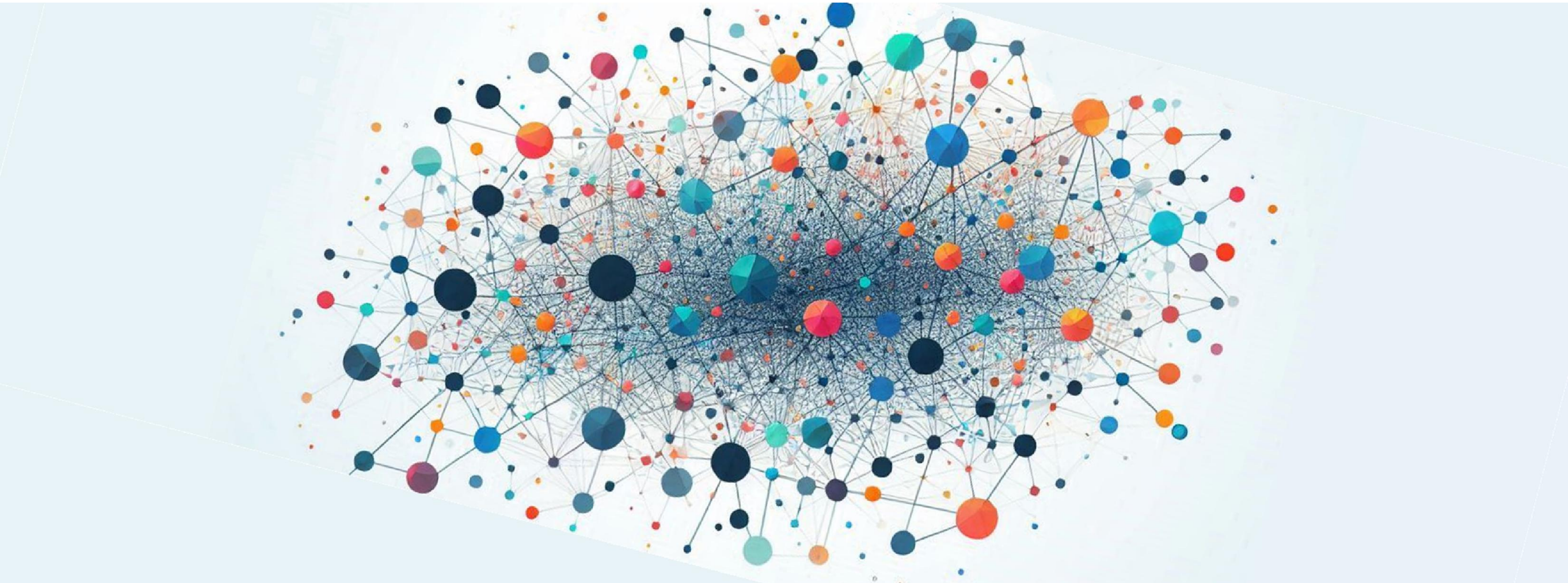
دانشگاه تهران
دانشکدگان فنی
دانشکده علوم مهندسی

الگوریتم‌های گراف و شبکه

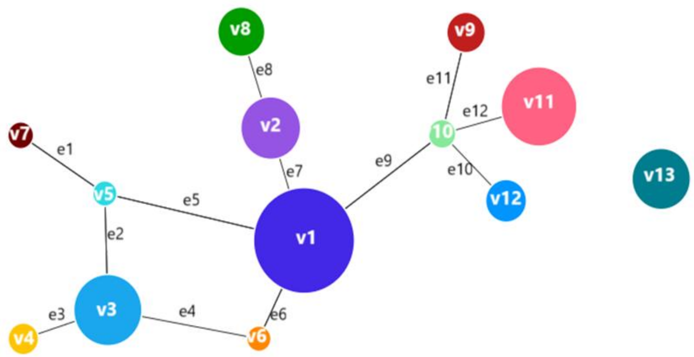
rabedian@ut.ac.ir



گراف‌ها و گراف‌های ساده

گراف

یک سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ است که از مجموعه‌ی ناتهی V(G) از رئوس، یک مجموعه E(G) از یال‌ها و یک تابع وقوع ψ_G که به هر یال G، یک زوج نامرتب از راس‌های G نسبت می‌دهد

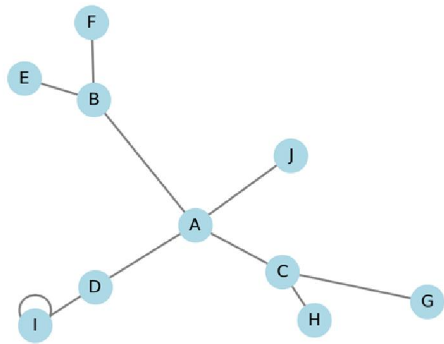


G = $(V(G), E(G), \psi_G)$

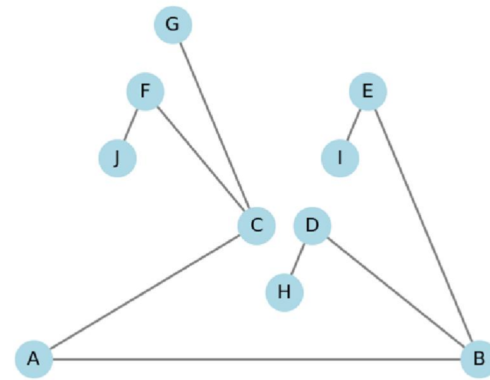
V(G) = $\{v_1, v_2, \dots, v_{13}\}$

E(G) = $\{e_1, e_2, \dots, e_{12}\}$

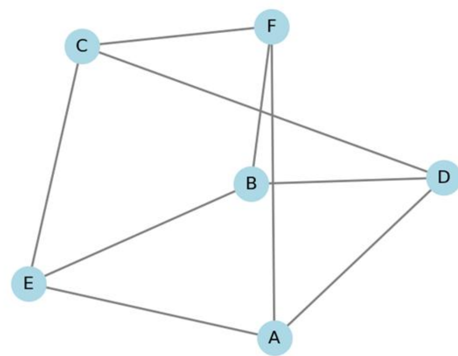
$\psi_G(e_1) = (v_5, v_7)$, $\psi_G(e_2) = (v_3, v_5)$, …



گراف G دارای self-loop



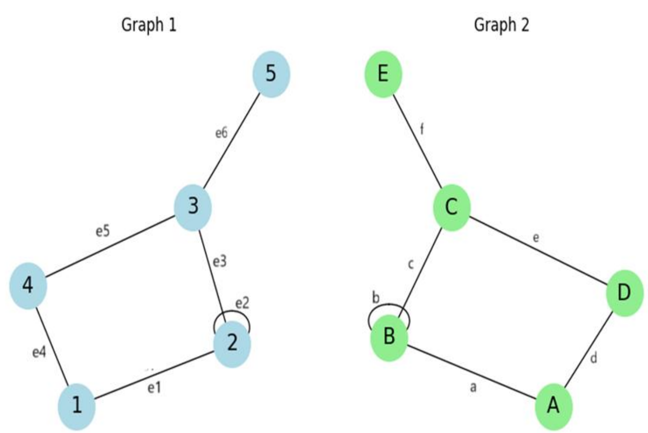
گراف G مسطح



گراف G نامسطح

یکریختی گراف

دو گراف G و H همسانند (G = H)، اگر V(G) = V(H) و E(G) = E(H) و $\psi_G = \psi_H$ باشد. دو گراف G و H یکریخت نامیده میشوند ($G \cong H$)، اگر نگاشت‌های دوطرفه $\theta = V(G) \to V(H)$ و $\phi: E(G) \to E(H)$ وجود داشته باشند، به‌طوری‌که $\psi_G(e)=uv$، اگر و تنها اگر $\psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$، این زوج (θ,ϕ) از نگاشت‌ها، یکریختی بین G و H نامیده می‌شود.



$\boldsymbol{\theta(1) = A}$, $\boldsymbol{\theta(2) = B}$, $\boldsymbol{\theta(3) = C}$, $\boldsymbol{\theta(4) = D}$, $\boldsymbol{\theta(5) = E}$

$\boldsymbol{\phi(e_1) = a}$

$\boldsymbol{\phi(e_2) = b}$

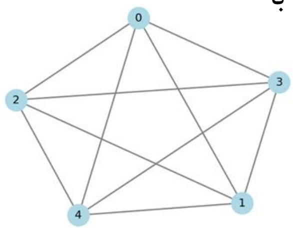
$\boldsymbol{\phi(e_3) = c}$

$\boldsymbol{\phi(e_4) = d}$

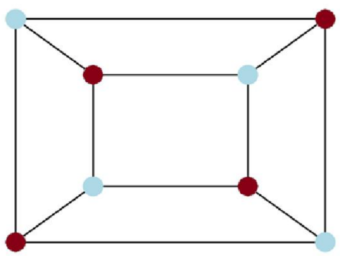
$\boldsymbol{\phi(e_5) = e}$

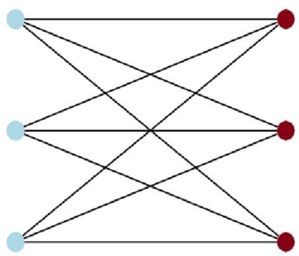
$\boldsymbol{\phi(e_6) = \mathrm{f}}$

چند رده خاص از گراف



- به گرافی که هر دو راس متمایز آن به‌یکدیگر متصل‌اند **گراف کامل** می‌گویند. طبق ویژگی‌های یکریختی، فقط یک گراف کامل با n راس می‌تواند وجود داشته باشد که آن‌را با k_n نمایش می‌دهیم. شکل زیر گراف کامل با $n = 5$ را نمایش می‌دهد:
- گراف تهی، گرافی است که هیچ یالی نداشته باشد.
- گراف دوبخشی، گرافی است که می‌توان مجموعه راس‌های آن را به دو زیرمجموعه X و Y چنان افراز کرد که یک سر تمام یال‌های آن در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد. گراف دوبخشی کامل، یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y است که در آن هر راس X، به هر راس Y وصل شده باشد. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$، گراف دو بخشی کامل را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.

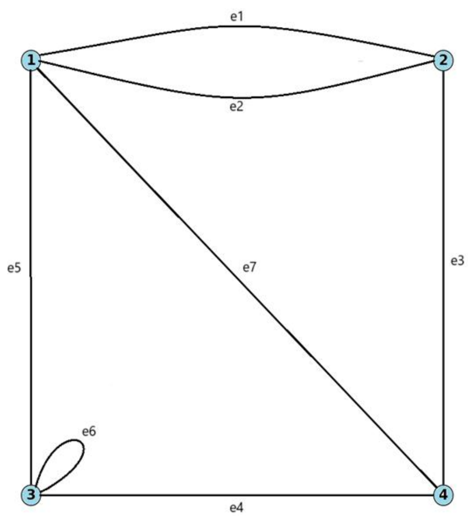

مکعب - گراف دوبخشی


گراف دوبخشی کامل $k_{3,3}$

ماتریس وقوع و ماتریس مجاورت

یک روش برای نمایش گراف ماتریس وقوع است. در واقع متناظر با هر گراف G، یک ماتریس $\nu \times \varepsilon$ وجود دارد که ماتریس وقوع G نامیده می‌شود. اگر راس‌های G را با $v_1,v_2,\dots,v_\nu$ و یال‌های آن‌را با $e_1,e_2,\dots,e_n$ نمایش دهیم، آنگاه ماتریس وقوع G، ماتریسی مانند $M(G) = [m_{ij}]$ است که m_{ij} برابر با تعداد دفعاتی است که v_i بر e_j واقع شده است.

روش دیگر برای نمایش گراف استفاده از ماتریس مجاورت است که ماتریسی است $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ مانند $A(G) = [a_{ij}]$ و در آن a_{ij} برابر تعداد یال‌هایی است که v_i را به v_j وصل می‌کند.



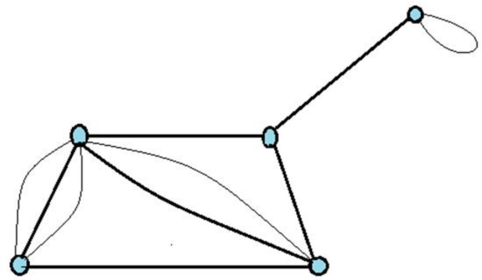
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	0	0	1	0	1
v_2	1	1	1	0	0	0	0
v_3	0	0	1	1	0	0	1
v_4	0	0	0	1	1	2	0

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	2	1	1
v_2	2	0	1	0
v_3	1	1	0	1
v_4	1	0	1	1

زیرگراف

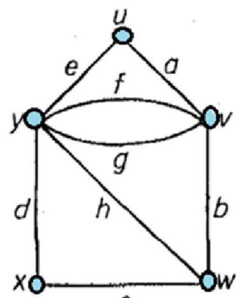
گراف H را زیرگراف گراف G گوییم اگر V(H) ⊆ V(G) و E(H) ⊆ E (G) و ψ_H از محدود کردن ψ_G به E(H) حاصل شده باشد، و به‌صورت H ⊆ G نمایش داده می‌شود. اگر H ⊆ G، ولی H ≠ G، در این‌صورت می‌نویسیم H ⊂ G و می‌گوییم H یک زیرگراف سره از G است. اگر H یک زیرگراف G باشد، در آن‌صورت G را یک زبَر گراف H می‌نامیم. درصورتی که زیرگراف (یا زبَرگراف) H از G تحت شرط V(H) = V(G) پیروی کند، آن را یک زیرگراف فراگیر(زبَرگراف فراگیر) از G گوییم.

اگر در یک گراف ساده، تمام حلقه‌ها را حذف کنیم و همچنین از بین هر دو راس مجاور، تمام یال‌های پیوندی به‌جز یکی را حذف نماییم، به زیرگراف فراگیر ساده‌ای از G می‌رسیم که گراف ساده زمینه G نامیده می‌شود.

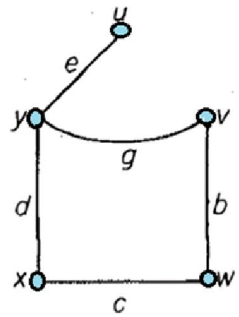


فرض کنید V' یک زیرمجموعه ناتهی از V باشد، زیرگرافی از G که مجموعه راس‌های آن V' و مجموعه یال‌هایش برابر مجموعه یال‌هایی از G باشد که هر دو سر آن‌ها در V' واقع است، زیرگراف القا شده توسط V' نامیده می‌شود و با $G[V']$ نمایش داده می‌شود. به بیانی دیگر یک زیرگراف القایی گرافی است که مجموعه رئوس آن، زیر مجموعه‌ای از مجموعه رئوس گرافی دیگر باشد با این ویژگی که این زیر گراف دارای تمامی یال‌هایی است که بین رئوس نظیر خود در مجموعه رئوس گراف اولیه موجود هستند. زیرگراف القایی $G[V \setminus V']$ که با $G - V'$ نمایش داده می‌شود، زیرگرافی است که با حذف راس‌های V' و یال‌های واقع برآن‌ها، از G به‌دست می‌آید. اگر $V' = \{v\}$، به‌جای $G - \{v\}$ می‌نویسیم $G - v$.

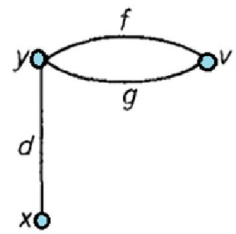
فرض کنید که E' یک زیرمجموعه ناتهی از E باشد. زیرگرافی از G که مجموعه راس‌های آن برابر مجموعه راس‌های دو سر یال‌های E' و مجموعه یال‌هایش برابر E' باشد، زیرگراف القا شده توسط E' نامیده می‌شود و با $G[E']$ نمایش داده می‌شود و با آن زیرگراف القایی یالی گوییم. زیرگراف فراگیری از G که مجموعه یال‌های آن $E \setminus E'$ باشد، به‌طور ساده شده‌ی $G - E'$ نوشته می‌شود و می‌توان آن‌را با حذف یاهای E' از G به‌دست آورد. به‌طور مشابه گرافی که با افزودن مجموعه یال‌های E' به G به‌دست می‌آید، با $G + E'$ نمایش داده می‌شود. اگر $E' = \{e\}$ ، به‌جای $G - \{e\}$ و $G + \{e\}$ می‌نویسیم $G - e$ و $G + e$.



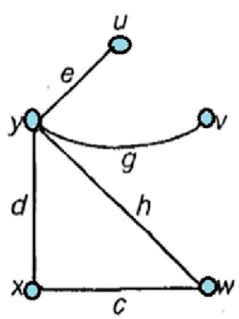
G



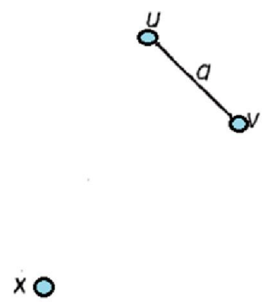
یک زیرگراف فراگیر از G



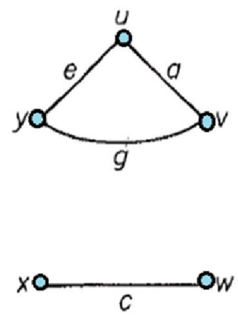
$G-\{u, w\}$



$G-\{a, b, f\}$



زیرگراف القایی
$G[\{u, v, x\}]$



زیرگراف القایی یالی
$G[\{a, c, e, g\}]$

دو زیرگراف G_1 و G_2 از گراف G را مجزا گوییم اگر راس مشترک در آن‌ها وجود نداشته باشد، و آن‌ها را یال-مجزا می‌نامیم اگر هیچ یال مشترکی نداشته باشند.

اجتماع دو زیرگراف G_1 و G_2، زیرگرافی است با مجموعه راس‌ها و یال‌های این دو زیرگراف. یعنی:

مجموع راس‌ها: $\mathbf{V}(G_1) \cup \mathbf{V}(G_2)$

مجموع یال‌ها: $\mathbf{E}(G_1) \cup \mathbf{E}(G_2)$

اگر G_1 و G_2 مجزا باشند، میتوان اجتماع را به‌صورت $G_1 + G_2$ نمایش داد. اشتراک نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود با این تفاوت که G_1 و G_2 باید حداقل یک راس مشترک داشته باشند.

اشتراک راس‌ها: $\mathbf{V}(G_1) \cap \mathbf{V}(G_2)$

اشتراک یال‌ها: $\mathbf{E}(G_1) \cap \mathbf{E}(G_2)$

درجه رئوس

درجه راس v در گراف G، $d_G(v)$، برابر تعداد یال‌های واقع بر v می‌باشد.

- **نکته**: در این تعریف، هر حلقه را دو یال در نظر می‌گیریم.

کمترین و بیشترین درجه راس‌های G را به‌ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نمایش می‌دهند.

قضیه ۱-۱

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\mathcal{E}$$

نتیجه ۱-۱ در هر گراف، تعداد راس‌های فرد، زوج است.

می‌گوییم گراف G، k-منتظم است اگر درجه تمام راس‌های آن برابر k باشد. گراف منتظم، گرافی است که به‌ازای یک مقدار k، k-منتظم باشد. گراف‌های کامل، گراف‌های دوبخشی کامل $K_{n,n}$ و همچنین k-مکعب‌ها منتظم هستند.

مسیرها و همبندی در گراف

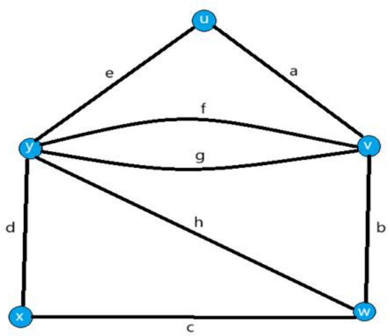
یک گشت از G، دنباله ناصفر متناهی $W = v_0 e_1 v_1\ e_2 v_2\ \dots\ e_k v_k$ است به‌طوری‌که جملات آن یک‌درمیان از راس‌ها و یال‌ها بوده و به ازای $1 \leq i \leq k$، v_{i-1} و v_i دو سر e_i باشند. در این‌صورت می‌گوییم W، یک گشت از v_0 تا v_k یا به عبارتی دیگر یک (v_0,v_k)-گشت است. راس‌های v_0 و v_k به ترتیب ابتدا و انتهای W و $v_1,v_2,\dots,v_{k-1}$ راس‌های داخلی آن نامیده می‌شوند. همچنین عدد صحیح k را طول W می‌نامیم.

اگر $W = v_0 e_1 v_1\ \dots\ e_k v_k$ و $W'=v_k e_{k+1}\ v_{k+1}\ \dots\ e_l v_l$ دو گشت باشند، گشت $v_k e_k v_{k-1}\ \dots\ v_1 e_1 v_0$ را که از معکوس کردن W به‌دست می‌آید، با W^{-1} نمایش می‌دهیم. همچنین گشت $W = v_0 e_1 v_1\ \dots\ e_l v_l$ را که از حاصل به‌هم پیوستن W و W' در راس v_k به‌دست می‌آید با WW' نمایش می‌دهیم. یک قسمت از گشت $W = v_0 e_1 v_1\ \dots\ e_k v_k$، گشتی است مانند $v_i e_{i+1} v_{i+1}\ \dots\ e_j v_j$، که زیردنباله‌ای از جملات متوالی W می‌باشد و این زیر دنباله را (v_i,v_j)-قسمت W می‌نامیم.

مسیرها و همبندی در گراف

در یک گراف ساده، گشت $v_0e_1v_1 \dots e_kv_k$ معین می‌گردد. بنابراین در یک گراف ساده به‌سادگی می‌توان یک گشت را با دنباله راس‌های آن مشخص نمود. گاهی اوقات در گراف‌هایی که ساده نیستند نیز دنباله‌ای از راس‌ها را که در آن هر دو راس متوالی مجاورند، به‌عنوان یک گشت قلمداد می‌کنیم. در چنین حالاتی باید توجه داشت که بحث در مورد تمامی گشت‌های که دارای چنین دنباله راس‌هایی هستند صادق است.

اگر یال‌های $e_1,e_2,\dots,e_k$ در گشت W متمایز باشند، W یک گذرگاه نامیده می‌شود. دراین حالت، طول W برابر با $\mathcal{E}(W)$ می‌باشد. اگر علاوه بر یال‌های، راس‌های $v_0, v_1, \dots, v_k$ نیز متمایز باشند، W یک مسیر نامیده می‌شود.



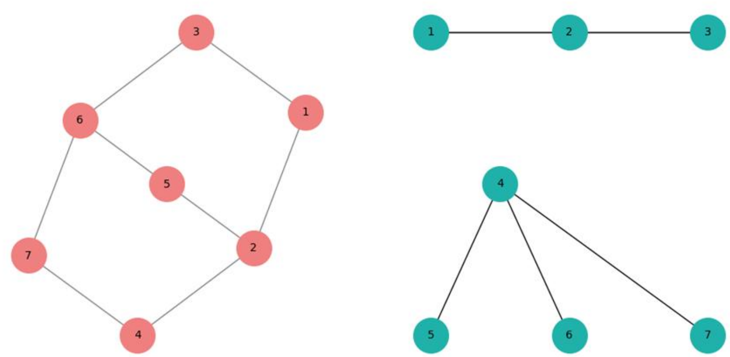
گشت: **uavfyfvgyhwbv**

گذرگاه: **wcxdyhwbvgy**

مسیر: **xcwhyeuav**

می‌گوییم دو راس u و v از G همبند یا متصل‌اند، اگر یک (u, v)-مسیر در G وجود داشته باشد. همبندی یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه راس‌های V تشکیل می‌دهد. بنابراین افرازی از V به زیرمجموعه‌های ناتهی $V_1, V_2, \ldots, V_\omega$ وجود دارد که در آن دو راس u و v همبندند اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به مجموعه V_i یکسانی باشند.

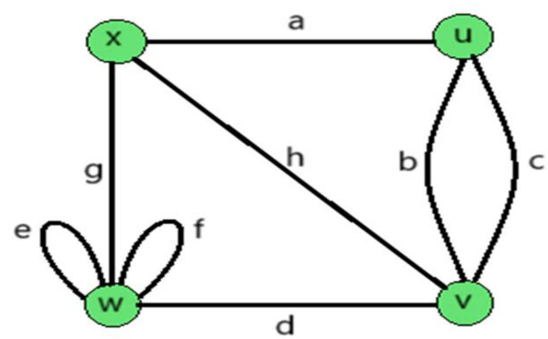
زیرگراف‌های $G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_\omega]$ مولفه‌های G نامیده می‌شوند. اگر گراف G دقیقا یک مولفه داشته باشد، همبند است و در غیر این‌صورت ناهمبند خواهد بود. تعداد مولفه‌های G را با $\omega(G)$ نمایش می‌دهیم.



دورها

می‌گوییم یک گشت بسته است اگر طول آن مثبت بوده و ابتدا و انتهای آن یکسان باشند. یک گذرگاه بسته که ابتدا و راس‌های داخلی آن متمایز باشند دور نامیده می‌شود. همانند مسیرها، گاهی اوقات لفظ "دور" را به منظور اشاره به گرافی که متناظر با یک دور است به‌کار می‌بریم. یک دور با طول k را k-دور می‌نامیم.

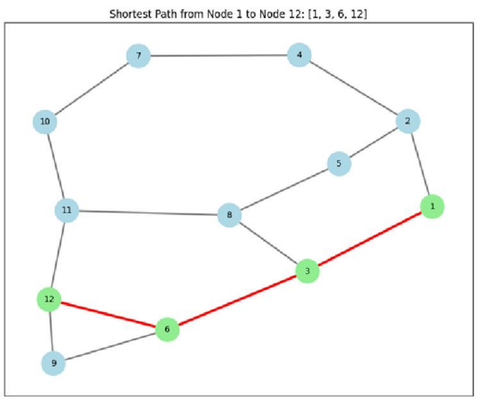
یک k-دور را بسته با اینکه k زوج باشد یا فرد، یک دور زوج یا فرد می‌نامیم. غالبا به ۳-دور مثلث گفته می‌شود.



گذرگاه بسته: ucvhxgwfwdvbu

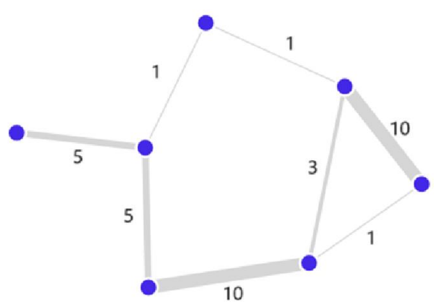
دور: xaubvhx

قضیه ۱-۲ یک گراف دوبخشی است اگر و تنها اگر هیچ دور فردی نداشته باشد.



مسئله کوتاه‌ترین مسیر

اگر به هر یک از یال‌های e از گراف G یک عدد حقیقی نسبت داده باشیم، به گراف G یک گراف وزن‌دار می‌گوییم. گراف‌های وزن‌دار در نظریه گراف‌ها کاربردهای بسیاری دارد. به‌طور مثال می‌توان به میزان علاقه و دوستی میان افراد در یک گراف دوستی اشاره کرد.

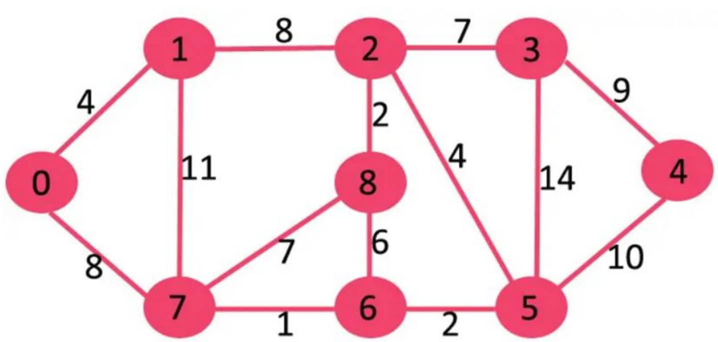


اگر H زیرگرافی از یک گراف وزن‌دار باشد، وزن w(H) از H برابر حاصل جمع وزن‌های روی یال‌های آن یعنی $\sum_{e\epsilon E(H)} w(e)$ است. بسیاری از مسایل بهینه‌سازی برای پیدا کردن یک زیرگراف خاص کمترین (یا بیشترین) وزن در یک گراف وزن‌دار است. به‌عنوان مثال، مسئله کوتاه‌ترین مسیر یک نمونه از این مسائل است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود: پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر بین دو شهر که توسط یک شبکه راه‌آهن به‌یکدیگر متصل شده‌اند.

الگوریتم دایجسترا

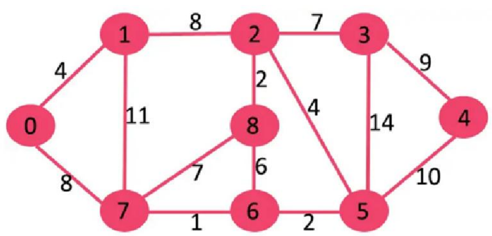
این الگوریتم علاوه بر کوتاه‌ترین مسیر بین ۲تا گره مد نظر (u_0,v_0)، کوتاه‌ترین مسیرهای بین u_0 تا تمام راس‌های دیگر در G را پیدا می‌کند. روش کار این الگوریتم به‌صورت زیر است:

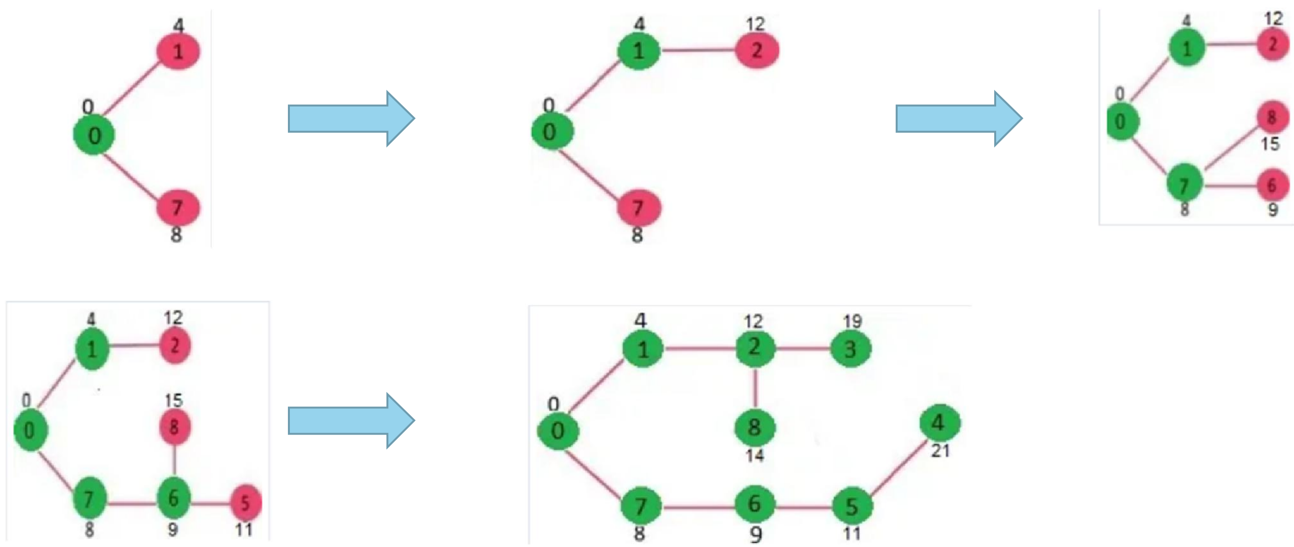
الگوریتم دایجسترا برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر از یک راس s به سایر رئوس در گراف وزن‌دار غیرمنفی با وزن‌های $\omega(u,v)$ استفاده می‌شود. ابتدا فاصله‌ها $\mathrm{d(v)}$ برای تمام رئوس $\mathrm{v}\epsilon V$ به‌طوری‌که $\mathrm{d(s)} = 0$ و برای سایر رئوس $\mathrm{d(v)} = \infty$ مقداردهی اولیه می‌شوند. در هر تکرار، راس u با کمترین مقدار $\mathrm{d(u)}$ انتخاب می‌شود، سپس برای هر همسایه v از طریق یال (u, v) بررسی می‌شود که آیا $\mathrm{d(v)} > d(u) + \omega(u,v)$ است یا خیر. اگر باشد $\mathrm{d(v)}$ بروزرسانی می‌شود. این فرایند تا زمانی که همه رئوس بازدید شوند ادامه دارد.



مثال

پیاده‌سازی الگوریتم دایجسترا روی راس 0 گراف G





پایان