

به نام خدا

تمرین جلسه پنجم و ششم الگوریتم‌های گراف و شبکه

حسام مومیوند فرد

۸۱۰۸۰۳۰۶۳

بهار ۱۴۰۴

آیا در مورد گراف‌های ۵-منتظم که دارای یال برشی می‌باشند، می‌توان ادعا کرد که دارای تطابق کامل نیستند؟ همچنین به طور کل، گراف‌های فرد-منتظم چه ویژگی‌هایی دارند؟

گراف ۵-منتظم با یال برشی $e=\{u,v\}$ رو در نظر بگیرید. حذف e گراف رو به دو جزء G_1 و G_2 تقسیم می‌کند، که درجه u و v از ۵ به ۴ کم می‌شود. تطابق کامل نیاز به جفت کردن همه رأس‌ها دارد، اما یال برشی یه گلوگاه: اگر e تو تطابق باشه، G_1 و G_2 باید جداگانه تطابق کامل داشته باشن، که با درجه‌های تغییر کرده معمولاً ممکن نیست. پس این گراف‌ها اغلب تطابق کامل ندارن. ولی خب مثالی هم میشه ساخت که تو شرایط ما بگنجه و جواب باشه. مثلاً دوتا K_6 که با یه یال به هم وصل شدن و خب با حذف هوشمندانه یال‌هایی از دوتا K_6 میشه کل گراف رو ۵-منتظم کرد و بعد از حذف یال برشی هم تطابق کامل داریم و همه چیز شیک و تر و تمیزه.

و اما ویژگی‌های فرد-منتظم‌ها:

تعداد رأس‌ها زوج: چون مجموع درجه‌ها $(\sum d(v)=2|E|)$ باید زوج باشه (قضیه دست دادن)، اگر درجه هر رأس فرد باشه (مثل K_k که k فرد)، تعداد رأس‌ها (n) باید زوج باشه تا $n \cdot k$ زوج بشه.

متصل بودن: گراف‌های فرد-منتظم متصل معمولاً وجود دارن (مثل گراف کامل K_4 که ۳-منتظمه). اما اگر متصل نباشن، هر جزء باید خودش این ویژگی رو داشته باشه.

تطابق کامل: گراف‌های فرد-منتظم گاهی تطابق کامل دارن (مثل K_4 که ۳-منتظمه و تطابق کامل داره)، ولی این بستگی به ساختار گراف داره. قضیه تطابق (مثل قضیه تات) می‌گه اگر گراف شرایط خاصی رو داشته باشه، تطابق کامل ممکنه.

دورها: گراف‌های فرد-منتظم معمولاً دورهای زوج و فرد دارن، ولی وجود دورهای فرد می‌تونه باعث بشه دوبخشی (bipartite) نباشن.

یال برشی: اگر گراف فرد-منتظم یال برشی داشته باشه، مثل حالت ۵-منتظم، ممکنه تطابق کامل رو سخت‌تر کنه، چون زیرگراف‌ها بعد از حذف یال برشی درجه‌های متفاوتی پیدا می‌کنن.

اگر گراف G یک گراف r -منتظم با تعداد رئوس زوج باشد، آنگاه عدد رنگی یالی آن برابر Δ است. ($\Delta = \chi'$)

گراف پترسن ۳-منتظمه و ۱۰ رأس (زوج) داره، ولی عدد رنگی یالیش ۴ هست ($r+1=3+1$)، چون ساختار خاصش (مثل دورهای فرد) باعث می‌شه با ۳ رنگ نشه یال‌ها رو رنگ کرد.