جلسه‌ی ششم آمار و احتمال مهندسی — دکتر شریفی زارچی - دانشگاه شریف

مرور

پیشامد — outcome → شیر آمدن در پرتاب سکه — 5 آمدن در پرتاب تاس

فضای نمونه — sample space → مجموعه‌ی تمام پیشامدهای ممکن

رویداد — event → یک زیرمجموعه از sample space

متغیر تصادفی — Random Variable → یک تابع از هر پیشامد به یک عدد حقیقی

احتمال متغیر تصادفی → احتمال وقوع یک پیشامد

متغیر تصادفی (پیشامد) $\longrightarrow \mathbb{R}$

$$P(X=1) \quad , \quad X = \begin{cases} 1 & H \\ 2 & T \end{cases}$$

تابع جرم احتمال Probability Mass Function → برای یک متغیر تصادفی گسسته که هر نقطه از رنج متغیر تصادفی را به اعداد حقیقی متصل می‌کند

↗ فقط برای متغیر تصادفی گسسته تعریف می‌شود.

PMF_X

$$Range(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

متغیر تصادفی پرتاب سکه $X = \begin{cases} 1 & \text{if } H \\ 2 & \text{if } T \end{cases}$

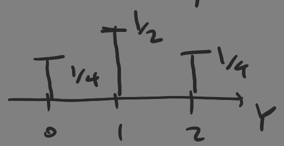
$$Range(X) = \{1, 2\}$$

PMF_X

متغیر تصادفی در جنسیت فرزند اول و دوم $Y = \begin{cases} 2 & \text{هر دو دختر} \\ 1 & \text{اولی دختر دومی پسر} \\ 1 & \text{اولی پسر دومی دختر} \\ 0 & \text{هر دو پسر} \end{cases}$

$$Range(Y) = \{0, 1, 2\}$$

PMF_Y



خواص PMF

فرض کنید P یک PMF برای متغیر تصادفی X باشد.

i) $\forall x \in R_X : 0 \le P(X=x) \le 1$ — به ازای هر مقدار از متغیر تصادفی، حاصل PMF بین صفر و یک باشد

ii) $\sum_{x \in R_X} P(X=x) = 1$ — مجموع تمام مقادیر PMF به ازای کل مقادیر متغیر تصادفی برابر 1 است.

iii) $\forall S \subseteq R_X \quad \underbrace{\mathbb{P}(X \in S)}_{\text{احتمال}} = \sum_{x \in S} \underbrace{P(X=x)}_{\text{تابع PMF}}$

به ازای هر زیرمجموعه از رنج متغیر تصادفی، احتمال اینکه مقدار متغیر تصادفی در آن زیرمجموعه باشد برابر است با مجموع مقادیر PMF در آن زیرمجموعه

مثال پرتاب تاس

$R_x = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$

$S = \{2, 3\} \Rightarrow S \subseteq R_x$

$$\underset{\text{تابع احتمال}}{\mathbb{P}}(X \in S) = \frac{|\{2,3\}|}{|\{1,2,\dots,6\}|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

PMF_x

$$\sum_{x \in S} PMF = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

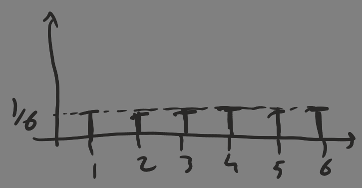
تابع توزیع انباشته (CDF)

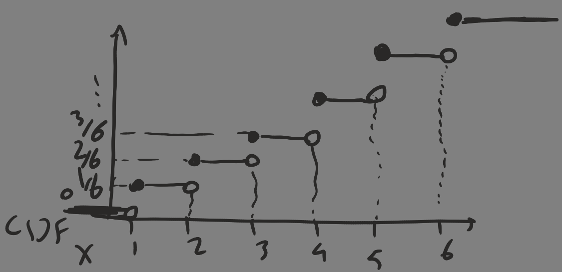
به ازای هر x در R_x برابر با مجموع تمام PMF های $X \leq x$ است.

$$CDF_{(X=x)} = \sum_{i=-\infty}^{x} PMF_{(X=i)}$$

مثال پرتاب تاس

PMF_x





$$CDF_x = \underset{\text{تابع احتمال}}{\mathbb{P}}(X \leq x)$$

نکته: تابع CDF به ازای هر x در R_x برابر است با مجموع احتمالات $X \leq x$.

خاصیت مهم CDF

i) به ازای تمام مقادیر ورودی کوچکتر از صفر، $CDF = 0$.

ii) به ازای ورودی های بزرگ به بی‌نهایت به سمت 1 میل می‌کند.

نکته: توجه کنید که CDF تعریف شده برای متغیرهای تصادفی گسسته است. همچنین تابع PMF فقط و فقط برای متغیر تصادفی گسسته قابل تعریف است.

امید ریاضی (Expected Value) ترجمه‌ی مقدار مورد انتظار بهتره

کنجکاوی: یک مسابقه داریم با این شرایط:

هزینه مسابقه: 10,ـــ

جایزه: 100,ـــ,ـــ

تعداد شرکت‌کننده‌ها: 1,ـــ,ـــ نفر

شانس برنده شدن برابره.

سؤال اینه که می‌ارزه توی مسابقه شرکت کنیم؟

پاسخ

$$X = \begin{cases} \text{برنده بشویم} & 100M - 10,\_\_ = 99990000 \\ \text{بازنده بشویم} & -10,\_\_ \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X = \text{برنده}) = \frac{1}{1M}$$

$$\mathbb{P}(X = \text{بازنده}) = \frac{999999}{1M}$$

امید ریاضی شرکت در مسابقه $E(X)$ = پول برد × شانس برد + شانس باخت × پول باخت $\simeq$

یعنی اگه توی این مسابقه شرکت کردی توقع داشته باشی که 9900 تومن از دست بدی :)

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} \mathbb{P}(X = x) \cdot x$$

مثال تاس $R_X = \{1,2,3,4,5,6\}$. هم شانس (همه برابر $\frac{1}{6}$)

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} \mathbb{P}(X = x) \cdot x = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \cdots + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6}$$

امید ریاضی پرتاب تاس

مثال

$X =$ متغیر تصادفی پرتاب تاس

$Y = 3X+1 \qquad E(Y) = ?$

$$E_{(Y)} = \sum_{y \in R_Y} \mathbb{P}(Y=y)\cdot y = \frac{1}{6}\times(4+7+10+13+16+19) = \frac{23}{2}$$

$$R_Y = \{4, 7, 10, 13, 16, 19\}$$

قضیه

$$\text{if } Y = aX + b \rightarrow E_{(Y)} = aE_{(X)} + b$$

این قضیه به شدت مهم و خیلی کاربردیه.

اثبات

$$E_X = \sum x\,\mathbb{P}(X=x) \xrightarrow{x = ax+b} \sum (ax+b)\,\mathbb{P}(X=x)$$

$$= a\underbrace{\sum x\,\mathbb{P}(X=x)}_{E(X)} + b\cancel{\sum \mathbb{P}(X=x)}^{1} = aE(X) + b \quad ①$$

از طرف دیگر:

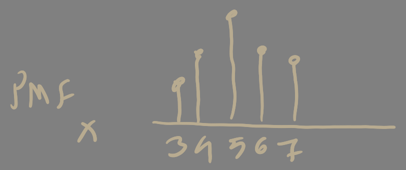
$$\sum \underbrace{(ax+b)}_{y}\,\mathbb{P}(\underbrace{X=x}_{\substack{\underbrace{aX+b}_{Y} = ax+b \\ Y = y}}) = \sum y\,\mathbb{P}(Y=y) = E(Y) \quad ②$$

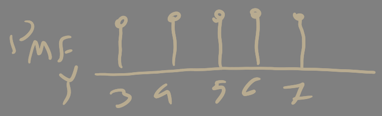
$$①, ② \Rightarrow E_{(Y)} = aE_{(X)} + b \qquad \text{☒}$$

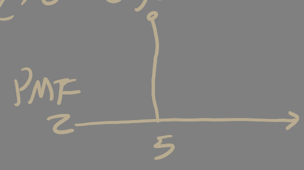
واریانس

کنجکاوی

تفاوت متغیرهای تصادفی زیر در چیست؟







پاسخ

امید ریاضی سه متغیر تصادفی X و Y و Z باهم برابره. اما روی نمودار PMF تفاوت بینشون پیداست. این تفاوت با واریانس شناخته میشه.

واریانس میزان آزادی عمل متغیر تصادفی ماست. یا فاصله‌ای که متغیر تصادفی میتونه از امید ریاضی خودش داشته باشه.

$$Var(X) = E\Big(X - \underbrace{E(X)}_{\text{مقدار ثابت (امید ریاضی)}}\Big)^2 = \sum_{x \in R_X} (x - E(X))^2 \, \mathbb{P}(X=x)$$

مثال واریانس تاس

$$E(X) = \frac{21}{6}, \quad Var(X) = \sum_{i=1}^{6} \left(i - \frac{21}{6}\right)^2 \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left(1-\frac{21}{6}\right)^2 + \left(2-\frac{21}{6}\right)^2 + \left(3-\frac{21}{6}\right)^2 + \dots + \left(6-\frac{21}{6}\right)^2\right] = \boxed{\frac{70}{24}}$$

یعنی تاس ما شانس داره که به مقدار $\frac{70}{24}$ از مقدار مورد انتظاری (امید ریاضی) دور بشه.

به عبارت دیگه اگه یک تاس داشتیم که همیشه 1 میومد اون موقع واریانسش 0 میشه.

در حالت کلی

$$\boxed{E(f(X)) = \sum_{x \in R_X} f(x) \, \mathbb{P}(X=x)} \quad \#$$

یعنی حالا میتونیم برای هر تابعی امید ریاضی محاسبه کنیم و به طبع واریانس و انحراف معیار و ...

در آینده مفصل با اثبات این رابطه خواهیم پرداخت.