



دانشکده فنی

آمار و احتمال

تمرین سری دوم

استاد: علی فهیم

دستیار آموزشی:
علیرضا صالحی حسین آبادی

مهلت تحویل: ۱۳ آذر ۱۴۰۳

نیمسال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۴

۱. فرض کنید توزیع توأم تعداد اتوموبیل (X) و تعداد اتوبوس (Y) در هر چرخه سیگنال در یک خط گردش به چپ به صورت زیر باشد:

		Y		
p(x,y)		0	1	2
X	0	0.025	0.015	0.010
	1	0.050	0.030	0.020
	2	0.125	0.075	0.050
	3	0.015	0.090	0.060
	4	0.100	0.060	0.040
	5	0.050	0.030	0.020

حال مطلوب است:

(ا) محاسبه توابع چگالی حاشیه‌ای ($P_Y(y)$, $P_X(x)$)

(ب) آیا دو متغیر مستقل از یکدیگر هستند؟

(ج) اگر داشته باشیم $X = 3$ باشد. تابع چگالی احتمال شرطی Y را بدست آورید.

(د) $P(X \leq 2 | Y = 1)$

۲. اگر متغیرهای X_1 , X_2 و X_3 متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان برنولی با پارامتر p باشند و تعریف کنیم:

$$Y_1 = \max \{X_1, X_2\}$$

$$Y_2 = \max \{X_1, X_3\}$$

$$Y_3 = \max \{X_2, X_3\}$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

$E[Y]$ و $\text{Var}(Y)$ را محاسبه کنید.

۳. فرض کنید متغیرهای تصادفی X , Y و Z مستقل از یکدیگر باشند و هر کدام دارای توزیع‌های زیر باشند:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad Y, Z \sim \text{Uniform}(0, 2)$$

و می‌دانیم:

$$E[X^2Y + XYZ] = 13$$

$$E[XY^2 + ZX^2] = 14$$

مقدار μ و σ را بیابید.

۴. فرض کنید دو متغیر X و Y دارای توزیع توأم نرمال با مشخصات زیر باشند:

$$\mu_X = 0, \quad \sigma_X^2 = 1, \quad \mu_Y = -1, \quad \sigma_Y^2 = 4, \quad \rho = -\frac{1}{2}$$

(ا) $P(X + Y > 0)$

(ب) فرض کنید a یک عدد ثابت است و می‌دانیم $aX + Y$ و $X + 2Y$ مستقل از یکدیگر هستند. مقدار a را بیابید.

(ج) $P(X + Y > 0 | 2X - Y = 0)$

۵. فرض کنید متغیرهای X و Y هر دو دارای توزیع یکنواخت روی بازه $(0, 1)$ باشند و از یکدیگر مستقل باشند. حال تعریف می‌کنیم:

$$Z = \max \{X, Y\}, \quad W = \min \{X, Y\}$$

مطلوب است محاسبه $\text{COV}(Z, W)$.

۶. دیسک زیر را در نظر بگیرید:

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

نقطه (X, Y) را به صورت یکنواخت و تصادفی در D انتخاب می‌کنیم. تابع چگالی حتمال توأم X و Y به صورت زیر می‌باشد:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (x, y) \in D \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

حال فرض کنید (R, θ) مرتبط با مختصات قطبی مطابق شکل ۱ باشند. تبدیل‌های مختصات‌ها از دستگاه کارتزین به قطبی به صورت زیر می‌باشد:

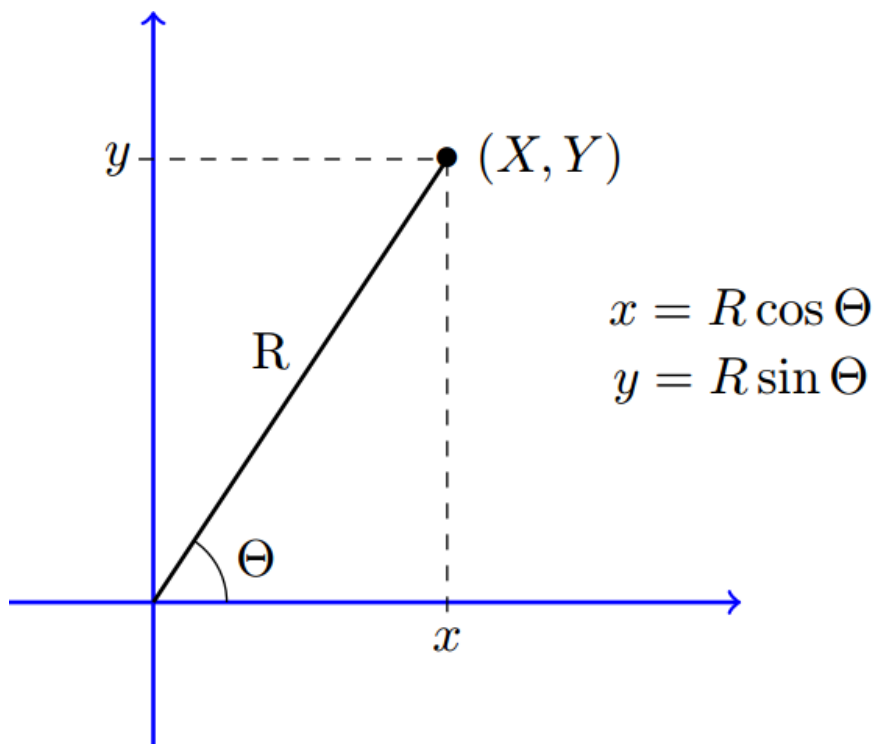
$$\begin{cases} X = R \cos \theta \\ Y = R \sin \theta \end{cases}$$

که محدوده متغیرهای R و θ به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} R &\geq 0 \\ -\pi &\leq \theta \leq \pi \end{aligned}$$

(آ) تابع چگالی توأم R و θ را بیابید.

(ب) آیا R و θ نسبت به یکدیگر مستقل هستند؟



شکل ۱: ارتباط بین مختصات کارتزین و قطبی

۷. اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

و می‌دانیم:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-y)(5-3y) & -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(آ) تابع چگالی احتمال توأم X و Y ($f_{XY}(X, Y)$) را بیابید.

(ب) تابع چگالی حاشیه‌ای متغیر تصادفی Y ($f_Y(y)$) را بیابید.

(ج) $E[X|Y=y]$

(د) $\text{Var}(X|Y=y)$

(ه) $P(Y < X^2)$

۸. متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر می‌باشند:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2}, \quad x \geq 1, y \geq 1$$

حال توابع چگالی احتمال توأم موارد زیر را بدست بیاورید:

$$U = X + Y \quad V = \frac{X}{Y} \quad (\text{ا})$$

$$U = X, \quad V = \frac{X}{Y} \quad (\text{ب})$$

$$U = X + Y, \quad V = \frac{X}{X+Y} \quad (\text{ج})$$

۹. فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر می‌باشند:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)}, \quad x, y \in (-\infty, \infty)$$

حال اگر تعریف کنیم

$$U = X^2, \quad V = Y^2$$

تابع چگالی احتمال توأم U و V را بیابید.

۱۰. فرض کنید متغیرهای تصادفی پیوسته X ، Y و Z دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند:

$$f_{XYZ}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x + 2y + 3z) & 0 \leq x, y, z \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

در ادامه موارد خواسته شده را محاسبه کنید:

(ا) تابع چگالی احتمال توأم X و Y را بیابید.

(ب) تابع چگالی احتمال توأم $f_{XY|Z}(x, y|z)$ را بیابید.

(ج) آیا متغیرهای تصادفی X و Y از متغیر تصادفی Z مستقل هستند؟