Hesam Mumivand Fard

81080 3063

دانشکده فنی

آمار و احتمال

تمرین سری اول

استاد: علی فهیم

دستیار آموزشی:
علیرضا صالحی حسین آبادی

مهلت تحویل: ۳۰ مهر ۱۴۰۳

نیمسال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۴

? $X \sim \text{Binomial} \Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

۱. توزیع پوآسون

الف) فرض کنید X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای n و p باشد، به طوری که $np = \lambda$. نشان دهید برای یک k و λ مشخص زمانی که $n \to \infty$ میل کند، داریم:

$\lambda = np$

$$P(X = k) = \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$$

ب) در طی سالهای ۱۹۷۹ تا ۱۹۸۱، در بریستول، ۱۱۰۳ پستچی ۲۱۵ مورد گاز گرفتن سگ را تحمل کردند. در مجموع ۱۹۱ پستچی گاز گرفته شدند که ۱۴۵ نفر از آنها فقط یک بار گاز گرفته شدند. شعار پستچی باید کدام باشد:

- Once bitten, twice shy
- Once bitten, twice bitten

ج) فرض کنید X_n یک توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p داشته باشد، به طوری که $np = \lambda$ ، و فرض کنید A_n رویدادی باشد که $X_n \geq 1$ باشد. اگر Y یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ است، نشان دهید که:

$$n \to \infty : P(X_n = k | A_n) \to P(Y = k | Y \geq 1)$$

د) اگر X یک متغیر تصادفی با توزیع پوآسون باشد، نشان دهید:

$$E(|X - \lambda|) = \frac{2\lambda^\lambda e^{-\lambda}}{(\lambda - 1)!} \quad \lambda \in \mathbb{N}$$

۲. ثابت نرمال‌سازی برای توزیع گاوسی با میانگین صفر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Z = \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

که در این رابطه $a = -\infty$ و $b = \infty$. برای محاسبهٔ انتگرال داده شده ابتدا مجذور آن را در نظر می‌گیریم:

$$Z^2 = \int_a^b \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) dx\, dy$$

حال با استفاده از تغییر متغیرهای زیر از دستگاه مختصات دکارتی (x, y) به دستگاه مختصات قطبی (r, θ) می‌رویم:

- $x = r\cos(\theta)$
- $y = r\sin(\theta)$

در ادامه تأثیر این تغییر متغیرهای عبارتند از:

- $dxdy = rdrd\theta$
- $x^2 + y^2 = r^2$

و انتگرال دوگانه ما به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$Z^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr\, d\theta$$

حال انتگرال مرحله آخر را محاسبه نمایید و نمایش دهید که:

$$Z = \sqrt{\sigma^2 2\pi}$$

۳. نشان دهید که کانولوشن دو توزیع گاوسی، گاوسی است؛ یعنی:

$$p(y) = \mathcal{N}(x_1|\mu_1, \sigma_1^2) \otimes \mathcal{N}(x_2|\mu_2, \sigma_2^2) = \mathcal{N}(y|\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

که در رابطه فوق داریم:

- $y = x_1 + x_2$
- $x_1 \sim \mathcal{N}(x_1|\mu_1, \sigma_1^2)$
- $x_2 \sim \mathcal{N}(x_2|\mu_2, \sigma_2^2)$

که متغیرهای x_1 و x_2 متغیرهای تصادفی مستقل از یکدیگر هستند.

پاسخ سؤال اول

a)

$\lambda = np$ if $X \sim \text{Binomial}(n,k)$ then $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

if $n \to \infty$, $p \to 0$ then:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \; ; \; \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \sim \frac{e^{-\lambda}}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{e^{-\lambda}}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k e^{-\lambda} \times \underbrace{\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k e^{-\lambda} \frac{n^k}{(n-\lambda)^k} = \binom{n}{k} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(n-\lambda)^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(n-\lambda)^k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}^{\sim n^k}}{\underbrace{k!}_{\text{constant}}\,\underbrace{(n-\lambda)^k}_{\sim n^k}}}_{\sim \frac{1}{k!}} \lambda^k e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

b)

چون مسئله ی ما گاز گرفته شدن پستچی در طول بازه ی زمانی خاصی است و تعداد دفعات گاز گرفته شدن هم مستقل است پس باید از توزیع پوآسون استفاده کنیم.

$$\lambda = \frac{\text{تعداد گازهای گرفته شده}}{\text{تعداد کل پستچی ها}} = \frac{215}{1103} = \underline{0.195}$$

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{k!} e^{-\lambda} \lambda^k \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{1!} e^{-0.195} (0.195)^1 = 0.195 \times e^{-0.195} = 0.16 \\ \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{0!} e^{-0.195} (0.195)^0 = e^{-0.195} = \underline{0.82} \end{cases}$$

k بار گاز گرفته شدن

پس با احتمال 82 درصد یک پستچی هرگز گاز گرفته نخواهد شد. ← شعار اول گزینه ی بهتریه تا

c) $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, $\lambda = np$, $A_n = \{ x_i \mid x_i \geq 1 , x_i \in X \}$
$Y \sim \text{Poison}(\lambda)$

prove that if $n \to \infty$: $\underbrace{\mathbb{P}(X_n = k \mid A_n)}_{1} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{P}(Y = k \mid Y \geq 1)}_{2}$

1 $\sum_{k}^{A_n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

2 $\sum_{k}^{Y \geq 1} \frac{1}{k!} e^{-\lambda} \lambda^k$

d)

$X \sim \text{Poison}(\lambda)$ then: $\mathbb{E}(|X-\lambda|) = \frac{2\lambda^{\lambda} e^{-\lambda}}{(\lambda-1)!}$; $\lambda \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(|X-\lambda|) = \sum_{k}^{\infty} |k-\lambda| \, \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k}^{\infty} |k-\lambda| \frac{1}{k!} e^{-\lambda} \lambda^{k}$$

$$= \sum_{k}^{\infty} |k-\lambda| \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k}^{\infty} |k-\lambda| \frac{\lambda^{k}}{k!}$$

$$= e^{-\lambda}\left[\sum_{k=0}^{\lambda} (\lambda-k) \frac{\lambda^{k}}{k!} + \sum_{k=\lambda+1}^{\infty} (k-\lambda) \frac{\lambda^{k}}{k!} \right]$$

$$= e^{-\lambda} \lambda^{\lambda} \left[\sum_{k=0}^{\lambda} (\lambda-k) \frac{\lambda^{k-\lambda}}{k!} + \sum_{k=\lambda+1}^{\infty} (k-\lambda) \frac{\lambda^{k-\lambda}}{k!} \right]$$

$$e^{-\lambda} \lambda^{\lambda} \left[\underbrace{\sum_{k=0}^{\lambda} (\lambda-k) \frac{\lambda^{k-\lambda}}{k!}}_{①} + \underbrace{\sum_{k=\lambda+1}^{\infty} (k-\lambda) \frac{\lambda^{k-\lambda}}{k!}}_{②} \right]$$

$$①: \lambda \frac{\lambda^{0-\lambda}}{0!} + (\lambda-1)\frac{\lambda^{1-\lambda}}{1!} + (\lambda-2)\frac{\lambda^{2-\lambda}}{2!} + \dots + (\lambda-(\lambda-2))\frac{\lambda^{-2}}{(\lambda-2)!} + (\lambda+\lambda-1))\frac{\lambda^{-1}}{(\lambda-1)!}$$

$$\cancel{\frac{\lambda^{1-\lambda}}{0!}} + \cancel{\frac{\lambda^{2-\lambda}\times 2}{1!\times 2}} - \cancel{\frac{\lambda^{1-\lambda}}{1!}} + \cancel{\frac{\lambda^{3-\lambda}\times 3}{2!\times 3}} - \cancel{\frac{2\lambda^{2-\lambda}}{2!}} + \frac{\lambda^{4-\lambda}\times 4}{3!\times 4} - \cancel{\frac{3\lambda^{3-\lambda}}{3!}} + \dots + \cancel{\frac{\lambda^{-1}\times\lambda-1}{(\lambda-2)!(\lambda-1)}} - \cancel{\frac{(\lambda-2)\lambda^{-2}}{(\lambda-2)!}} + \frac{1}{(\lambda-1)!} - \cancel{\frac{(\lambda-1)\lambda^{-1}}{(\lambda-1)!}}$$

$$\Rightarrow ① = \frac{1}{(\lambda-1)!}$$

$$②: ((\lambda+1)-\lambda)\frac{\lambda^{1}}{(\lambda+1)!} + ((\lambda+2)-\lambda)\frac{\lambda^{2}}{(\lambda+2)!} + ((\lambda+3)-\lambda)\frac{\lambda^{3}}{(\lambda+3)!} + \dots$$

$$\frac{(\cancel{\lambda+1})\lambda^{1}}{\cancel{(\lambda+1)!}} - \cancel{\frac{\lambda\times\lambda}{(\lambda+1)!}} + \cancel{\frac{(\lambda+2)(\lambda^{2})}{(\lambda+2)!}} - \cancel{\frac{\lambda^{2}\times\lambda}{(\lambda+2)!}} + \cancel{\frac{(\lambda+3)\lambda^{3}}{(\lambda+3)!}} - \cancel{\frac{\lambda\times\lambda^{3}}{(\lambda+3)!}} + \cancel{\dots}$$

$\cancel{\lambda!}$ $\quad (\lambda+1)!$ $\quad (\lambda+2)!$

$(\lambda-1)!$

$$\Rightarrow ② = \frac{1}{(\lambda-1)!}$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda}\lambda^{\lambda}\left[1 + 2 \right] = e^{-\lambda}\lambda^{\lambda}\left[\frac{1}{(\lambda-1)!} + \frac{1}{(\lambda-1)!}\right]$$

$$= \frac{2e^{-\lambda}\lambda^{\lambda}}{(\lambda-1)!}$$

B ✓

پاسخ سؤال دوم

$$Z = \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad , \quad Z^2 = \int_a^b\int_a^b \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right) dx\,dy \quad , \begin{cases} a = -\infty \\ b = +\infty \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} dx\,dy = r\,dr\,d\theta \\ x^2+y^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} r \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr\,d\theta \qquad \text{Prove} \quad Z = \sqrt{\sigma^2 2\pi}$$

$$\alpha = r^2 \rightarrow d\alpha = 2r\,dr \Rightarrow Z^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2\sigma^2}\right) dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{-\frac{1}{2\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2\sigma^2}\right) d\theta \Bigg|_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} = \frac{1}{2}\theta \times (-2\sigma^2) \exp\left(-\frac{\alpha}{2\sigma^2}\right) \Bigg|_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} \Bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi (-2\sigma^2) \exp\left(-\frac{\alpha}{2\sigma^2}\right) \Bigg|_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2}\pi(-2\sigma^2)\left[0 - 1\right]$$

$$= 2\pi\sigma^2 = Z^2 \Rightarrow Z = \pm\sqrt{2\pi\sigma^2} \Rightarrow Z = \sqrt{2\pi\sigma^2} \ \boxed{\checkmark}$$

مقادیر منفی برای Z تعریف نشده است

پاسخ سوال سوم

$$P_{(y)} = Normal(x_1|\mu_1,\sigma_1^2) \otimes Normal(x_2|\mu_2,\sigma_2^2) = Normal(y|\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

$y = x_1 + x_2$ $\quad$ $X_1 \sim Normal(x_1|\mu_1,\sigma_1^2)$

x_1, x_2 are independent $\quad$ $X_2 \sim Normal(x_2|\mu_2,\sigma_2^2)$

برای محاسبه f_X یک متغیر تصادفی می‌توانیم از تابع CF استفاده کنیم. برای مثال اگر X نرمال باشد f_X از روی CF به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\varphi_{X}(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) \quad ; \text{if } X \sim Normal(\mu,\sigma^2) \text{ then } \varphi_X(t) = \exp(i\mu t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\mu t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2)\cdot\exp(-itx)\,dt$$

$$\rightarrow f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2 + it(\mu - x))\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

حال با توجه به خواص CF در روابط گفته شده به اثبات سوال خواهیم رسید :

$$\varphi_{X_1}(t) = \mathbb{E}(\exp(itx_1)) \ , \ \varphi_{X_2}(t) = \mathbb{E}(\exp(itx_2)) \ , \ \varphi_Y(t) = \mathbb{E}(\exp(ity))$$

$$, \ Y = X_1 + X_2 \Rightarrow \varphi_Y(t) = \varphi_{X_1}(t)\,\varphi_{X_2}(t) = \exp(i\mu_1 t - \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 t^2)\exp(i\mu_2 t - \tfrac{1}{2}\sigma_2^2 t^2)$$

$$\Rightarrow \varphi_Y(t) = \exp(i\mu_1 t - \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 t^2 + i\mu_2 t - \tfrac{1}{2}\sigma_2^2 t^2)$$

$$= \exp(i(\mu_1+\mu_2)t - \tfrac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2)$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\tfrac{1}{2}\overbrace{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}^{\beta}t^2 + i\overbrace{(\mu_1+\mu_2)}^{\alpha}t)\,dt$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}}\exp\left(-\frac{(y-\alpha)^2}{2\beta}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\exp\left(-\frac{(y-(\mu_1+\mu_2))^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right) \ \boxed{\checkmark}$$