

حجۃ الیمم آمار و احتمال منشی * دکتر سرنی زارچی دانشیار سرنی *

$$\left. \begin{aligned} P(A|B) &= P(A) \\ P(B|A) &= P(B) \end{aligned} \right\} P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

یادآوری

نتیجه

بدیناسی داریم و دوبار برآب می‌کنیم. $A = \{5\}$, $B = \{5\}$, $C = \{5\}$ (جمع دوبار ناسی = ۵).
آیا به نسبت وقوع A, B, C مستقلند؟

$$i) \left\{ \begin{aligned} P(A|B \cap C) &= P(A|C) \\ P(B|A \cap C) &= P(B|C) \end{aligned} \right. \Rightarrow A, B \text{ با داشتن } C \text{ از یکدیگر مستقلند.}$$

فرض

$$P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

بدین C
مستقلند B, A

یادآوری

$$P(A|C) = \frac{1}{3}, P(B|C) = 1 \quad 10 = \{4+6, 5+5, 6+4\} \quad \text{با داشتن } C$$

اتفاق می‌دهد که صیغه با دادن C این که تمام احتمالات با به عبارتی تمام دنیا محدود می‌شود به حالتی که C در آن اتفاق افتاد. به عبارتی C دینی مسئله رو محدود می‌کند.

$$\left\{ \begin{aligned} P(C) > 0 \\ P(A|B, C) &= P(A|C) \end{aligned} \right. \Rightarrow \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap C)} = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \Rightarrow P(B|A, C) = P(B|C)$$

$$\Rightarrow P(A|B, C) = P(A|C) \equiv P(B|A, C) = P(B|C)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A \cap C) P(B \cap C)}{P(C) P(C)} \Rightarrow P(A \cap B|C) = P(A|C) P(B|C)$$

دو سکه داریم. یکی معمولی و دیگری که هر دو طرف آن سر است. یکی از دو سکه را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم و دوبار پرتاب می‌کنیم.

A: پرتاب اول سر نیاید

B: پرتاب دوم سر نیاید

C: سکه‌ی معمولی انتخاب نشده باشد

$$P(A|C) = \frac{1}{2}$$

ی در سکه معمولی انتخاب نشده ← احتمال سر آمدن = $\frac{1}{2}$

$$P(B|C) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B|C) = \frac{1}{4} = P(A|C) P(B|C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = \frac{3}{4} = P(A|C) P(C) + P(A|C^c) P(C^c) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$P(B) = \frac{3}{4} = P(B|C) P(C) + P(B|C^c) P(C^c) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{8} = P(A \cap B|C) P(C) + P(A \cap B|C^c) P(C^c) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

آیا A, B independent? (مقوله A, B | T) $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ پس وابسته هستند.
آیا A|C, B|C independent? (مقوله A, B با شرط ثابت C) $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$ پس مستقلند.

$$P(A) = \frac{3}{4} \quad P(B) = \frac{3}{4} \quad P(A \cap B) = \frac{5}{8} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

$$P(A|C) = \frac{1}{2} \quad P(B|C) = \frac{1}{2} \quad P(A \cap B|C) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$$

تک‌گامی

یک کارخانه ۱۰۰ لامپ ساخته که دقیقاً ۵٪ ناسازگار است. من ۵ لامپ انتخاب می‌کنم. احتمال دارد هر ۵ لامپ سالم باشند؟

پاسخ

A: لامپ اول است

B: لامپ دوم است

C: لامپ سوم است

$P(A \cap B \cap C) = ?$

$$P(A) = \frac{95}{100}$$

بعد از آنکه یک لامپ سالم برداشتم ۹۹ و ۹۵٪ از ۱۰۰ لامپ باقی‌مانده سالم

$$P(A \cap B) = P(B|A) P(A) = \frac{94}{99} \times \frac{95}{100}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|A, B) P(A \cap B) = P(C|A, B) P(B|A) P(A)$$

$$\frac{93}{98} \times \frac{94}{99} \times \frac{95}{100}$$

این تک‌گامی در تجربه مارکوف (Markov chain) که باید با اساسی صلی را از الگوریتم‌های ماشین لرنینگ استوار خواهند شد.

یادآوری اصل شمول و عدم شمول

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i) - \sum P(A_i \cap A_j) + \dots$$

قانونی زنجیره‌ای

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_2, A_1) \times \dots \times P(A_k|A_{k-1}, \dots, A_2, A_1)$$

سؤال به سبک صفیری

$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فضای احتمالی پرتاب تاس

A = تاس ۵ بیاید

$\Omega_2 = \{H, T\}$ فضای احتمالی پرتاب سکه

B = سکه H بیاید

A, B دو رویداد مربوط به Ω_1 و Ω_2 هستند. املاً $A \cap B$ یا $A \cup B$ دو فضای ناموفق به دو فضای یکپارچه نیستند.

پاسخ

روی $\Omega_1 \times \Omega_2$ (ضرب دکارتی فضای نمونه) محاسبه می‌کنیم $\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(1, H), (1, T), (2, H), (2, T), \dots\}$

متغیر تصادفی

یک متغیر تصادفی یک تابع است از فضای نمونه (sample space) به مجموعه اعداد حقیقی.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{آنها هر دو دختر باشند} \\ 2 & \text{آنها هر دو پسر باشند} \\ 3 & \text{اولی دختر و دومی پسر} \\ 4 & \text{اولی پسر و دومی دختر} \end{cases}$$

مسئله بررسی جنسیت فرزندان اول و دوم خانواده ما را به نظر بگیرید.

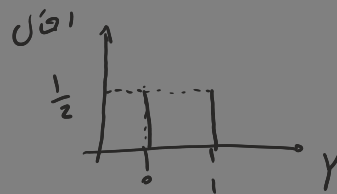
$$Y = \begin{cases} 0 & H \\ 1 & T \end{cases} \quad \text{در مسکنی پرتاب شده}$$

تابع جرم احتمال

f تابع جرم احتمال است آنرا

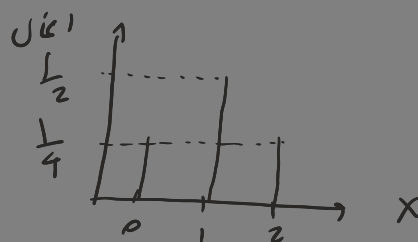
$$\begin{aligned} i) & \forall x : f(x) \geq 0 \\ ii) & \forall x \in \Omega : \sum f(x) = 1 \end{aligned}$$

↓
فضای نمونه متغیر تصادفی



در مسکنی پرتاب شده

$$X = \begin{cases} 2 & \text{هر دو دختر} \\ 1 & \text{اولی پسر و دومی دختر} \\ 1 & \text{اولی دختر و دومی پسر} \\ 0 & \text{هر دو پسر} \end{cases}$$



در مسکنی جنسیت فرزندان آنرا تعداد دختران خانواده $X =$

خواردهای رسم شده به بالای توانسته توابع توزیع احتمال باشند

نکته