

به نام خدا

تمرین جلسه سوم و چهارم الگوریتم‌های گراف و شبکه

حسام مومیوند فرد

۸۱۰۸۰۳۰۶۳

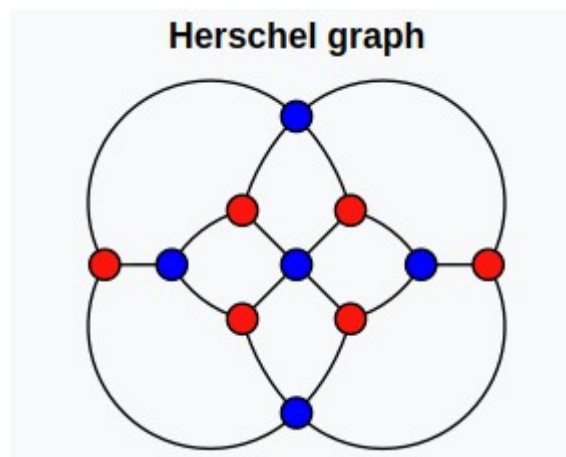
بهار ۱۴۰۴

چرا گرافی که دوبخشی است و تعداد راس‌های آن فرد است، یک گراف ناهمیلتونی است؟

تو گراف دوبخشی، رئوس فقط به بخش دیگه وصلن، نه به خودشون. برای چرخه همیلتونی، باید از هر رأس به رأس بعدی بری و برگردی سر جای اولت. وقتی تعداد رئوس فرد، یه بخش رأس‌های بیشتری داره (مثلاً ۳ به ۲). این رأس اضافی نمی‌تونه به چرخه وصل بشه، چون مسیر باید بین دو بخش جفت بمونه و یه رأس تنها می‌مونه. پس چرخه کامل نمیشه.

با استفاده از قضیه ۲.۴ نشان دهید گراف هرشل ، ناهمیلتونی است.

همینطور که در تصویر مشخصه گراف هرشل دوبخشی هست و ۱۱ راس هم داره که طبق سؤال قبلی نمیتونه دور همیلتونی داشته باشه در نتیجه ناهمیلتونیه.



چرا گراف پترسن ، ناهمیلتونی است؟

قضیه ۴-۳ اگر G یک گراف ساده با شرط $v \geq 3$ و $\delta \geq \frac{v}{2}$ باشد، در این صورت G همیلتونی است.

یه همچنین قضیه ای داشتیم تو جزوه که خب گراف پترسن این شرط رو ارضاء نمیکنه چون هر راسش درجه ۳ هست و ۱۰ تا راس داره که خب نمیشه با این وضعیت همیلتونی بود.

آیا می‌توان الگوریتم خوبی برای شناسایی بستر یک گراف، یا به دست آوردن بستر یک گراف ارائه دهیم؟ همچنین همیلتونی بودن را چطور میتوان با آن تشخیص داد؟

طبق قضیه یک گراف همیلتونی هست اگر و فقط اگر بستارش همیلتونی باشه پس اگه بستر یک گراف همیلتونی بود خود گراف هم همیلتونی هست

اما الگوریتمی که بشه باهاش بستر رو شناسایی کرد یا بدستش آورد

- اول یه کپی از گراف G می‌سازیم و اسمش رو می‌ذاریم H . این H همونیه که قراره بستر نهایی بشه.
- بعد می‌ریم درجه همه رأس‌ها رو تو گراف G حساب می‌کنیم. یعنی برای هر رأس می‌بینیم به چند تا رأس دیگه وصله.
- حالا یه حلقه راه می‌ندازیم که توش همه جفت رأس‌هایی که به هم وصل نیستن رو بررسی کنیم. برای هر جفت رأس u و v که یالی بینشون تو H نیست، می‌ریم ببینیم مجموع درجه‌هاشون تو H (نه G) چقدره. اگه $\deg_H(u) + \deg_H(v) \geq V$ باشه، یه یال بین u و v تو H اضافه می‌کنیم. بعدش درجه u و v رو تو H به‌روزرسانی می‌کنیم (چون یه یال جدید اضافه شده، درجه هر کدوم یه دونه زیاد می‌شه).
- این حلقه رو انقدر ادامه می‌دیم تا تو یه دور کامل، هیچ یال جدیدی اضافه نشه. یعنی دیگه هیچ جفت رأسی پیدا نشه که شرط رو داشته باشه.
- در نهایت، گراف H که به دست اومده، همون بستر گراف G هست.

با استفاده از ماتریس مجاورت، فرمول کیلی همیلتون را پیاده‌سازی کنید.

یه فایل پایتون کنار تمرین اضافه شده.

چگونه با استفاده از ماتریس مجاورت می‌توان بلوک‌های یک گراف را شمرد؟

تعداد بلوک‌ها می‌شه تعداد نقاط برش + ۱، چون هر نقطه برش یه بلوک رو از بلوک بعدی جدا می‌کنه و یه بلوک اضافی هم قبل یا بعدش داریم.

اما مراحل پیدا کردن تعداد بلوک‌ها:

۱. پیدا کردن اجزای همبند

برای پیدا کردن اجزای همبند از الگوریتم DFS استفاده می‌کنم. توی ماتریس مجاورت هر سطر رو بررسی می‌کنیم و می‌بینیم که به چه راس‌هایی یال داره و خب این مجموعه یه تیکه همبند از گراف رو تشکیل میدن. مجموعه‌های همبند رو نگه میداریم.

۲. نقاط برشی تو هر جز

تو هر جز (همون مجموعه همبندهای راند قبلی) باید دنبال نقاط برشی بگردیم. مثل الگوریتم tarjan.

یه آرایه dfn (شماره کشف) و یه آرایه low درست می‌کنیم. dfn[u] نشون می‌ده رأس u کی تو DFS دیده شده، و low[u] نشون می‌ده از u می‌تونیم به کدوم رأس‌های قبلی برگردیم.

از یه رأس شروع می‌کنیم (مثلاً رأس ریشه جزء). برای هر رأس u:

یه شماره بهش می‌دیم (dfn[u]).

برای هر رأس v که به u وصله (یعنی تو ماتریس مجاورت $(u,v)=1$)، اگه v رو ندیدیم، DFS رو ادامه می‌دیم. low[u] رو به‌روز می‌کنیم: $low[u]=\min(low[u], low[v])$ یا $low[u]=\min(low[u], dfn[v])$ برای بچه‌ها، یا یال‌های برگشتی.

یه رأس u نقطه برشه اگه:

ریشه باشه و حداقل ۲ بچه داشته باشه (چون حذفش گراف رو جدا می‌کنه).

یا ریشه نباشه و برای یکی از بچه‌هاش v، داشته باشیم $low[v] \geq dfn[u]$ (یعنی v نمی‌تونه به رأس‌های قبل u برگرده بدون u).

اگر A ماتریس مجاورت باشد، در A^k آیا $a_{i,j}$ برابر است با تعداد گشت‌های به طول k از راس i به راس j؟ با استفاده از شکل زیر گزاره مذکور را بررسی کنید.

بله به ما تعداد گشت‌ها رو میده.

