



الگوریتم‌های پیشرفته

استاد درس

دکتر علی معینی

دستیاران آموزشی

مهسا حقیقی

فاطمه ولی پور

معین منعمی

علیرضا صالحی

حسین عبدالهی پور

دانشکده علوم مهندسی

تمرین سری دوم – پاییز ۱۴۰۳

۱. ثابت کنید که مهم نیست از کدام گره در درخت جستجوی دودویی با ارتفاع h شروع می‌کنیم، k فراخوانی متوالی به TREE-SUCCESSOR، $O(k+h)$ زمان می‌گیرد.

۲. فرض کنید به جای اینکه هر گره x ویژگی $x.p$ را که به والد x اشاره می‌کند، حفظ کند، $SUCC.x$ را نگه دارد که به جانشین x اشاره می‌کند. با استفاده از این نمایش شبه‌کدهای رویه‌های SEARCH، INSERT و DELETE در درخت جستجوی دودویی T را بنویسید. این رویه‌ها باید در زمان $O(h)$ ، جایی که h ارتفاع درخت T است، اجرا شوند. (راهنمایی: ممکن است بخواهید زیربرنامه‌ای را پیاده‌سازی کنید که والد یک گره را برمی‌گرداند).

۳. الفبای ۵ حرفی $\{a, b, c, d, e\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید تعداد تکرارها را می‌دانیم:

$$f_a = 0.32, f_b = 0.25, f_c = 0.2, f_d = 0.18, f_e = 0.05$$

تعداد بیت‌های مورد انتظار توسط طرح کدگذاری هافمن برای رمزگذاری یک سند ۱۰۰۰ حرفی چقدر است؟

۴. امتیازی: در این مشکل، ما ثابت می‌کنیم که عمق متوسط یک گره در درخت جستجوی دودویی تصادفی ساخته شده با n گره $O(\log n)$ است. اگرچه این نتیجه ضعیف‌تر از قضیه اسلاید ۱۷ است، تکنیکی که ما استفاده خواهیم کرد شباهت بین ساخت درخت جستجوی دودویی و اجرای مرتب‌سازی سریع تصادفی از بخش ۷.۳ (CLRS چاپ سوم) نشان می‌دهد. ما طول کل مسیر $P(T)$ یک درخت دودویی T را به عنوان مجموع، روی عمق گره x در T به ازای تمام گره‌های x در T ، که عمق گره x در T را با $d(x, T)$ نشان می‌دهیم.

ا. استدلال کنید که میانگین عمق یک گره در T به صورت زیر است:

$$\frac{1}{n} \sum_{x \in T} d(x, T) = \frac{1}{n} P(T)$$

ب. فرض کنید T_L و T_R به ترتیب زیر درختان چپ و راست درخت T را نشان دهند. استدلال کنید که اگر T دارای n گره باشد، داریم:

$$P(T) = P(T_L) + P(T_R) + n - 1$$

ج. فرض کنید $P(n)$ میانگین طول کل مسیر یک درخت جستجوی دودویی تصادفی ساخته شده با n گره را نشان دهد. نشان دهید:

$$P(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (P(i) + P(n-i-1) + n-1)$$

د. نشان دهید چگونه می‌توان $P(n)$ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$P(n) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P(k) + \theta(n)$$

ه. با یادآوری تجزیه و تحلیل جایگزین نسخه تصادفی مرتب‌سازی سریع ارائه شده در مسئله ۷.۳، نتیجه بگیرید که $P(n) = O(\log n)$.

در هر فراخوانی بازگشتی مرتب‌سازی سریع، یک عنصر محوری تصادفی را برای تقسیم‌بندی مجموعه عناصر در حال مرتب‌سازی انتخاب می‌کنیم. هر گره از درخت جستجوی دودویی، مجموعه عناصری را که در زیردرختی که در آن گره ریشه دارد، تقسیم می‌کند.

و. پیاده‌سازی مرتب‌سازی سریع را توصیف کنید که در آن مقایسه‌ها برای مرتب‌سازی مجموعه‌ای از عناصر دقیقاً مشابه مقایسه‌هایی برای درج عناصر در درخت جستجوی دودویی است. (ترتیبی که در آن مقایسه‌ها انجام می‌شود ممکن است متفاوت باشد، اما باید همان مقایسه‌ها انجام شود).

ملاحظات:

- سؤالات خود را در مورد این تمرین می‌توانید از طریق نشانی @aalliz مطرح نمایید.
- لطفاً تا زمان مشخص شده تمرین خود را در سامانه ایلرن بارگذاری نمایید.
- رونوشت از مطالب آماده موجود در اینترنت و یا استفاده از تمارین هم‌کلاسی‌ها، تقلب محسوب می‌شود.
- در صورت مشاهده تقلب، نمره تمرین برای تمامی افراد شرکت‌کننده از دست خواهد رفت.