به نام خدا

810803063 حسام مرسهوند فرد
محمدعلی خواجه‌ئیگان
سعید قاسمی

پاسخ سوال اول

۱. (نظری) **مسئله «برش کمینه تصادفی»[1] را در نظر بگیرید. فرض کنید در یک گراف خاص، به جای در نظر گرفتن ۱ برش، h برش داریم. برای سادگی فرض می‌کنیم هیچ اشتراکی بین این h مجموعه وجود ندارد. در این حالت:**

الف) احتمال یافتن یک برش بهینه را بیابید.

ب) بیش‌ترین مقدار h چه عددی است؟

ج) یک مثال برای بیش‌ترین مقدار h ارائه دهید.

الف) همان طور که در کلاس مطرح شد به صورتی که ما یک min cut set داشته باشیم احتمال یافتن آن برابر

$$\mathbb{P}(\text{find min cut set} \mid \#\text{min cut}=1) = \frac{2}{n(n-1)}$$

و چون ما h مجموعه داریم که دو به دو ناسازگارند. طبق فرض سؤال هیچ اشتراکی ندارند $\Leftarrow$ احتمال آن برابر با مجموع احتمال هر کات‌های تکی می‌شود.
(طبق اصل سوم احتمال)

$$\mathbb{P}(\text{find min cut set} \mid \#\text{min cut}=h) = h\left[\frac{2}{n(n-1)}\right] = \frac{2h}{n(n-1)}$$

ب) می‌دانیم که $|C| \times h \le |E|$ همواره برقرار است (زیرا اندازه‌ی تمام min cut ها کوچک‌تر مساوی کل یال‌هاست)
در حالت تساوی h به بیشینه مقدار خود می‌رسد.

$$h = \frac{|E|}{|C|}$$

اما برای گراف کامل خواهیم داشت

$$h = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n-1} = \frac{n}{2}$$

درصورتی‌که می‌دانیم در گراف کامل هر دو مجموعه‌ی min cut دست‌کم یک یال مشترک دارند و مقدار $h=0$ است.

از طرفی درصورتی‌که از اصول احتمالاتی به ماجرا نگاه کنیم زمانی h بیشینه است که ما هر min cut ای را انتخاب کنیم واقعاً همان min cut باشد
پس با برابر یک قرار دادن احتمال بخش الف باید به اندازه‌ی h برسیم:

$$\mathbb{P}=1 \Rightarrow h=\frac{n(n-1)}{2}$$

که این مقدار برای گراف کامل برابر صفر می‌شود.
(می‌توان از هر دو روش بالا h را حساب کرد که درست باشند)

ج) گراف‌های خطی که هر یال یک مجموعه‌ی min cut است.

$h=3$

81080363 حسام سرمیونژاد
محمدعلی خواجه‌ئیان
سعید قاسمی

پاسخ سوال دوم

۲. (نظری) **دنباله متناهی و یا نامتناهی شمارا از پیشامدهای ... ,A_1, A_2 را در نظر بگیرید. نشان دهید:**

$$p\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) \leq \sum_{i\geq 1} p(A_i)$$

به علت اینکه هرکدام از A_i ها می‌توانند اشتراک داشته باشند، ما این رویدادها را به صورت زیر به رویدادهایی می‌شکنیم که اشتراک 2 به 2 آن‌ها برابر تهی باشد.

حال پس از شکستن تمام رویدادها به رویدادهایی که ناسازگارند خواهیم داشت

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geq 1} A'_i + \bigcup_{k\geq 1} A'_k\right) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(A_i) + \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(A_k)$$

در صورتی که هیچ یک از A_i ها با هم سازگار نباشند (دو به دو ناسازگار باشند) ($\forall i,j: A_i \cap A_j = \emptyset$) آنگاه، حال اصل (؟) آن‌ها به صورت زیر بود:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(A_i)$$

از آن جایی که طبق اصل اول احتمال، احتمال هر رویدادی یک عدد بزرگتر مساوی صفر است و از قسمت دوم سوال بعدی می‌دانیم که هر کسی که یک رویداد زیر مجموعه‌ی رویداد دیگری باشد احتمال آن عدد کوچکتر مساوی رویداد بزرگتر است.

$$\forall i,k: A'_i \subseteq A_i \ , \ \forall k \ \exists i: A_k \subseteq A_i$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) \leq \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(A_i) \quad \blacksquare$$

810103063 حسام سومیه‌نی‌فرد
محمدعلی خواجه‌کیان
سعید قاسمی

پاسخ سؤال سوم

۳. (نظری) **فرض کنید B و A دو پیشامد دلخواه باشند.**

الف) نشان دهید: $p(B-A) = p(B) - p(A \cap B)$

ب) فرض کنید $A \subseteq B$، نشان دهید: $p(B) \geq p(A)$

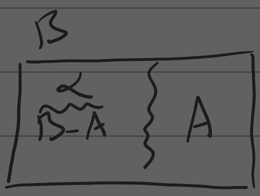
الف

$$B - A = B \cap A^c \Rightarrow \mathbb{P}(B-A) = \mathbb{P}(B \cap A^c) \quad (1)$$

$$B = (B \cap A^c) \cup (B \cap A) \overset{\text{اصل سوم}}{\Rightarrow} \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A^c) + \mathbb{P}(B \cap A) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \mathbb{P}(B-A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

ب



$$B = A \cup \alpha$$
$$A \cap \alpha = \emptyset$$
$$\overset{\text{اصل سوم}}{\Rightarrow} \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\alpha) + \mathbb{P}(A)$$

طبق اصل اول چون $\mathbb{P}(\alpha)$ یک عدد نامنفی است $\Leftarrow$

$$\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$$

810803063 حسام موسوی‌نژاد
محمدعلی خواجه‌ئیان
سعید قاسمی

پاسخ سؤال چهارم

۴. (نظری) **اصول موضوعه احتمال را در نظر بگیرید**

1) $\forall E \subseteq S;\quad p(E) \geq 0$

2) $p(S) = 1$

3) $p\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i p(A_i) \qquad if\ \forall i \neq j;\ A_i \cap A_j = \emptyset$

فرض کنید شرط سوم، اجتماع شمارا نباشد (یعنی شرط سوم برای ناشمارا پیشامد نیز برقرار باشد). مثال نقضی ارائه دهید و توسط آن نشان دهید که شرط سوم مختص اجتماع ناشمارا نیست. (راهنمایی: می‌توانید فضای نمونه را [0,1] **در نظر بگیرید و سپس پیشامدهایی تعریف کنید که از اجتماع آن‌ها، شرط دوم نقض می‌شود.)**

در صورتی که ما بازه‌ی پیوسته‌ی اعداد حقیقی بین [0,1] را داشته باشیم آنگاه:

$$\forall \alpha \in [0,1] : \mathbb{P}(\alpha) = 0$$

زیرا بازه‌ی ما شامل ∞ عدد است و احتمال انتخاب شدن یک عدد خاص در این بازه صفر خواهد بود.

حال از اصل سوم استفاده می‌کنیم:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$$

که هر A_i احتمالی برابر صفر خواهد داشت $\Leftarrow$

$$\sum_i \mathbb{P}(A_i) = 0$$

در صورتی که ما داریم:

$$\bigcup_i A_i = [0,1] = S$$

و طبق اصل دوم داریم:

$$\mathbb{P}(S) = 1$$

در نتیجه به تناقض می‌رسیم. $\times$