



دانشکده فنی

آمار و احتمال

تمرین سری پنجم

استاد: علی فهیم

دستیار آموزشی:
علیرضا صالحی حسین آبادی

مهلت تحویل: ۹ بهمن ۱۴۰۳

نیمسال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۴

۱. نشان دهید اگر $p(x) \approx q(x)$ آنگاه

$$D_{KL}(p||q) \approx \frac{1}{2}\chi^2$$

جایی که

$$\chi^2 = \sum_x \frac{(p(x) - q(x))^2}{q(x)} \quad (۱)$$

راهنمایی:

•

$$p(x) = \Delta(x) + q(x) \rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = 1 + \frac{\Delta(x)}{q(x)} \quad (۲)$$

• سری تیلور $\log(1+x)$:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots \quad -1 < x \leq 1 \quad (۳)$$

۲. تابع جرم احتمال توأم زیر را در نظر بگیرید:

X					
۴	۳	۲	۱		
$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	۱	y
$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	۲	
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	۳	
•	•	•	$\frac{1}{4}$	۴	

(آ) آنتروپی توأم $H(X, Y)$ را محاسبه کنید.

(ب) آنتروپی‌های حاشیه‌ای $H(x)$ و $H(y)$ را محاسبه کنید.

(ج) آنتروپی شرطی X به‌ازای یک مقدار مشخص y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(X|Y=y) = - \sum_x p(x|y) \log p(x|y) \quad (۴)$$

حال باتوجه به رابطه $H(X|y)$ را محاسبه کنید. آیا آنتروپی پسین روی X با مشاهده Y افزایش می‌یابد؟

(د) آنتروپی شرطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(X|Y) = \sum_y p(y) H(X|Y=y) \quad (۵)$$

آنتروپی شرطی را باتوجه به رابطه و تابع جرم احتمال توأم داده شده محاسبه کنید. آنتروپی پسین روی X زمانی که روی مقادیر ممکن Y میانگین گرفته می‌شود افزایش می‌یابد یا کاهش؟

(ه) اطلاعات متقابل^۱ بین X و Y چقدر است؟

^۱Mutual Information

۳. تقریب تفکیک‌شده (تجزیه‌شده) $q(x, y) = q(x)q(y)$ را برای تابع توزیع توأم $p(x, y)$ در نظر بگیرید. نشان دهید که برای کمینه کردن واگرایی روبه‌جلو $KL(p||q)$ باید قرار دهیم:

$$q(x) = p(x) \quad q(y) = p(y)$$

یعنی تقریب بهینه حاصلضرب تابع‌های توزیع حاشیه‌ای می‌باشد.
حال تابع جرم احتمال توأم زیر را در نظر بگیرید:

x					
۴	۳	۲	۱	y	
•	•	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$		۱
•	•	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$		۲
•	$\frac{1}{4}$	•	•		۳
$\frac{1}{4}$	•	•	•		۴

(ا) نشان دهید که واگرایی معکوس KL برای این تابع جرم احتمال سه کمینه مجزا دارد. کمینه‌ها را مشخص کنید و مقدار $D_{KL}(p||q)$ را برای هر کدام بیابید.

(ب) اگر $q(x, y) = p(x)p(y)$ مقدار $D_{KL}(q||p)$ را بیابید.

۴. فرض کنید P دارای توزیع لگ‌نرمال با پارامترهای $(\mu = 0, \sigma = 1)$ و Q دارای توزیع یکنواخت در بازه $[0, 1]$ می‌باشد.

(ا) $D_{KL}(Q||P)$ را محاسبه کنید.

(ب) $D_{KL}(P||Q)$ را محاسبه کنید.

(ج) باتوجه به نتایج قسمت آ و ب می‌توان گفت که واگرایی KL متقارن است، یعنی:

$$D_{KL}(Q||P) = D_{KL}(P||Q)$$

. اگر جواب شما خیر است، راهکار پیشنهادی خود را برای رفع مشکل ارائه دهید.