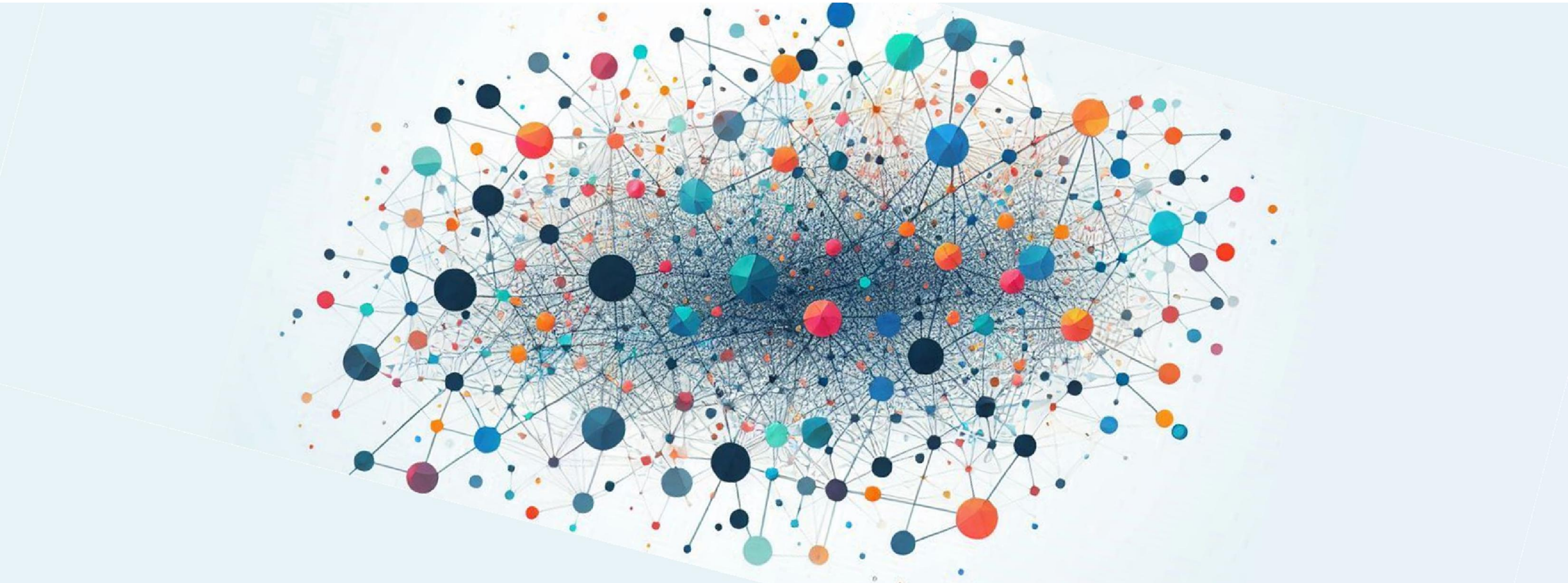
دانشگاه تهران
پردیس دانشکده های فنی
دانشکده علوم مهندسی

الگوریتم‌های گراف و شبکه

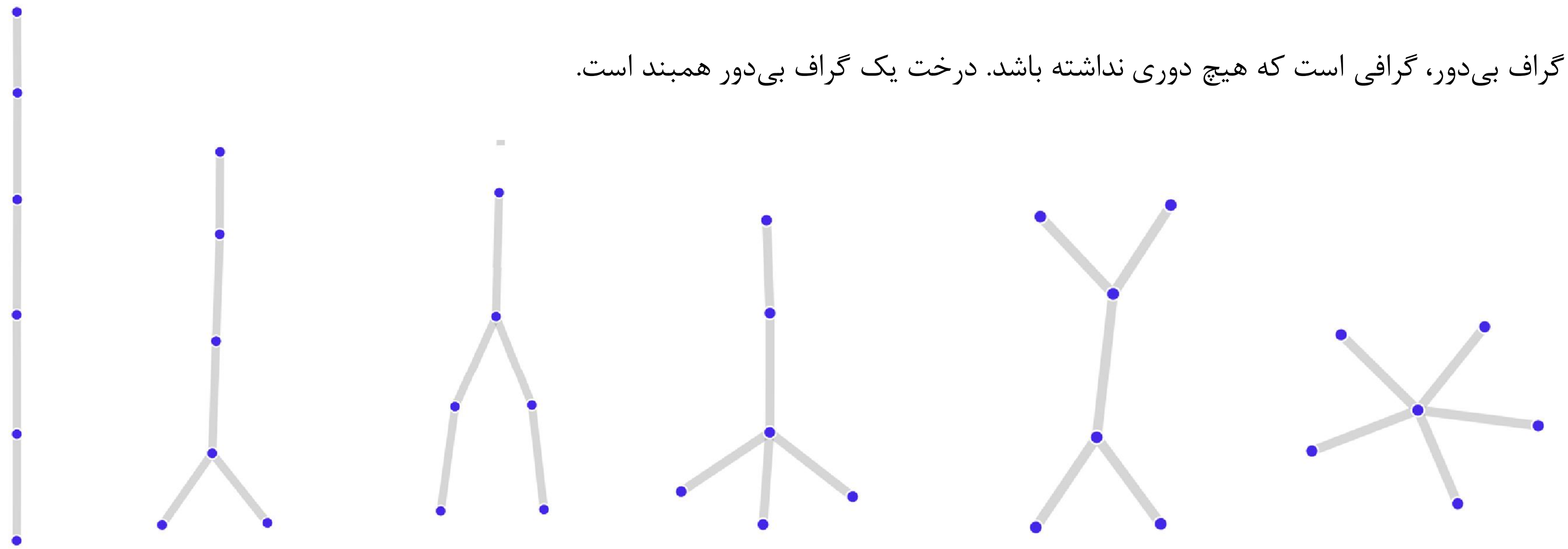
rabedian@ut.ac.ir



درخت‌ها

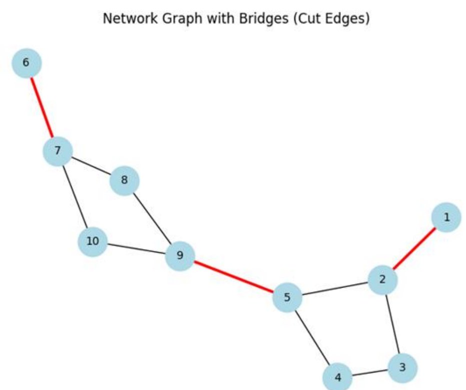
درخت

گراف بی‌دور، گرافی است که هیچ دوری نداشته باشد. درخت یک گراف بی‌دور همبند است.



یال‌های برشی

یک یال برشی از G، یالی مانند e است که شرط $\omega(G-e) > \omega(G)$ را برآورده سازد.



قضیه ۲-۱ در درخت، هر دو راس با یک مسیر یکتا به یکدیگر متصل‌اند.

قضیه ۲-۲ اگر G یک درخت باشد در این‌صورت $\varepsilon = v - 1$.

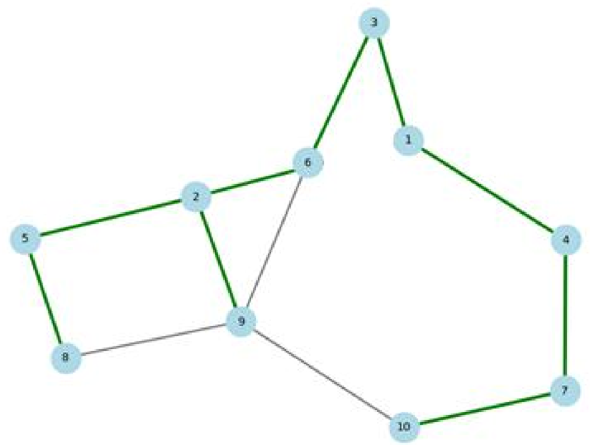
نتیجه ۲-۲ هر درخت غیربدیهی، حداقل دو راس درجه یک دارد.

قضیه ۲-۳ یال e یک یال برشی از G است، اگر و تنها اگر e درون هیچ دوری از G نباشد.

قضیه ۲-۴ یک گراف همبند، درخت است، اگر و تنها اگر هر یال آن یک یال برشی باشد.

زیرگراف فراگیری از G که درخت باشد، یک درخت فراگیر از G نامیده می‌شود.

نتیجه ۲-۴-۱ هر گراف همبند دارای یک درخت فراگیر است.

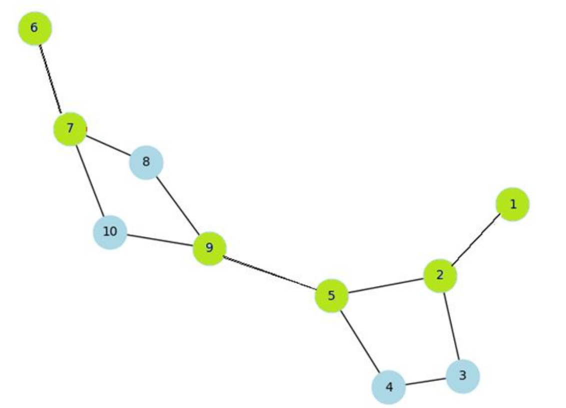


درختی فراگیر از یک گراف همبند

نتیجه ۲-۴-۲ اگر G همبند باشد، آنگاه $\mathcal{E} \geq v - 1$.

راس‌های برشی

راس v از G، یک راس برشی نامیده می‌شود، اگر بتوان E را به دو زیرمجموعه ناتهی E_1 و E_2 طوری افراز کرد که $G[E_1]$ و $G[E_2]$ فقط در راس v مشترک باشند. اگر G بدون طوقه و غیربدیهی باشد در این‌صورت v یک راس برشی از G است اگر و تنها اگرشرط $\omega(G-v) > \omega(G)$ برقرار باشد.



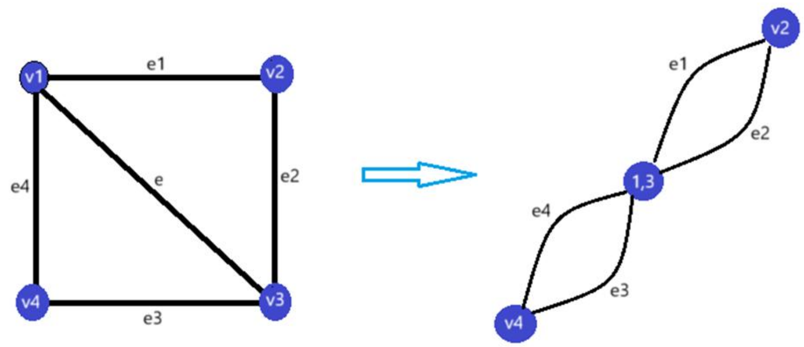
قضیه ۲-۵   اگر T یک درخت فراگیر از گراف همبند G بوده و e یک یال از G باشد که در T نیست، آنگاه T + e شامل یک دور یکتا خواهد بود.

قضیه ۲-۶   راس v از درخت G، یک راس برشی از G است اگر و تنها اگر $d(v) > 1$

نتیجه ۲-۶   هرگراف همبند بدون طوقه غیربدیهی، حداقل دو راس غیربرشی دارد.

فرمول کیلی همیلتون

کیلی همیلتون یک فرمول ساده برای تعیین تعداد درخت‌های فراگیر یک گراف است. می‌گوییم یال e از G، منقبض شده است اگر دو راس یال حذف شده، یکی شوند. گراف به‌دست آمده را با G.e نمایش می‌دهیم.



G

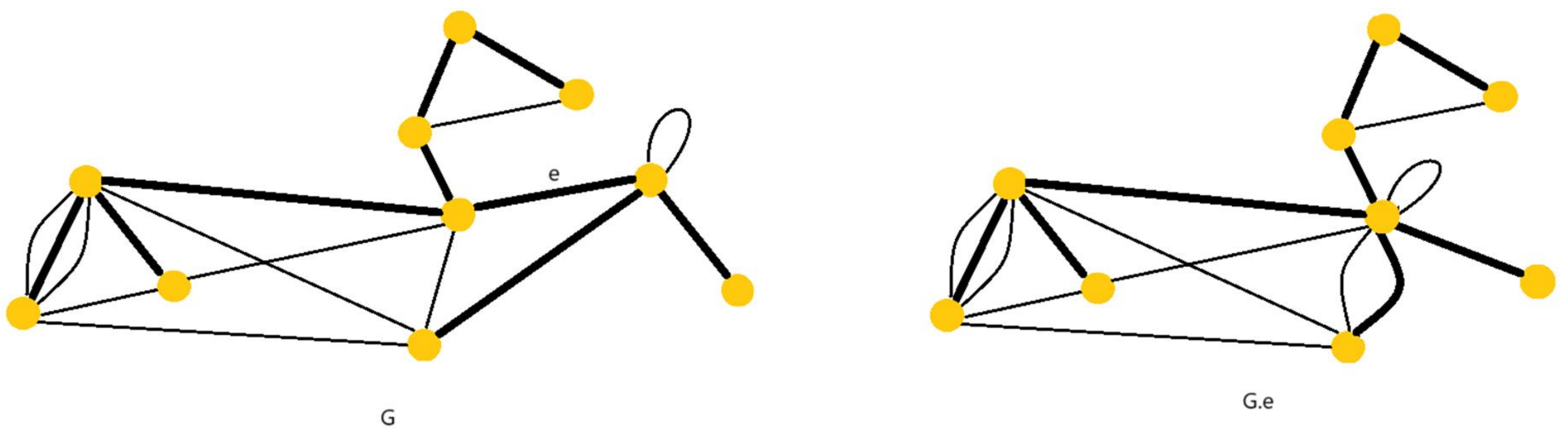
G.e

روشن است که اگر e یک یال پیوندی از G باشد، دراین‌صورت:

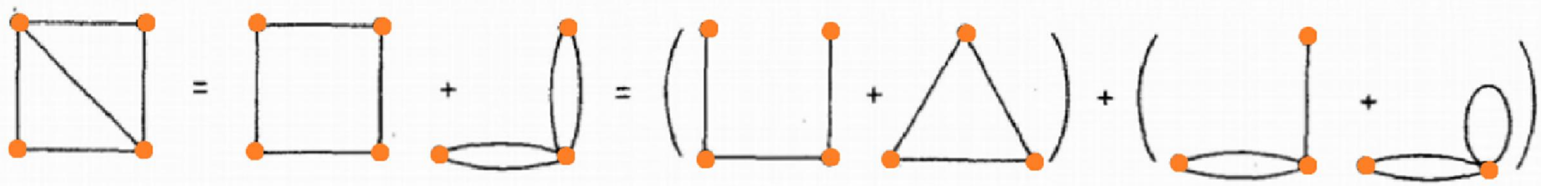
$$V(G.e) = v(G) - 1 \quad , \quad \mathcal{E}(G.e) = \mathcal{E}(G) - 1 \quad , \quad \omega(G.e) = \omega(G)$$

بنابراین اگر T یک درخت باشد، T.e نیز یک درخت خواهد بود. تعداد درخت‌های فراگیر G را با $\tau(G)$ نمایش می‌دهیم.

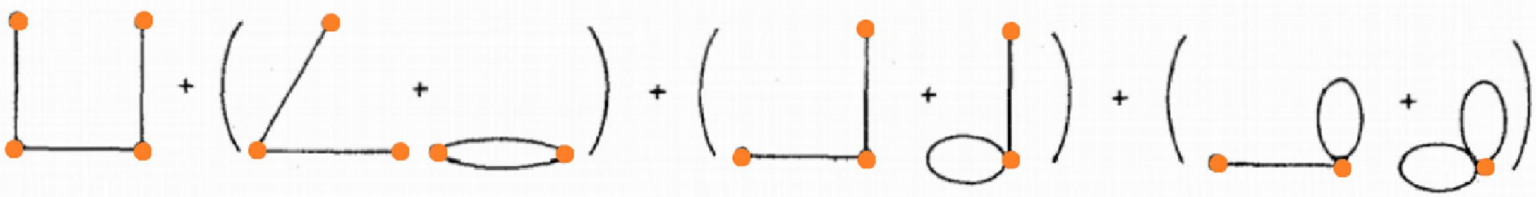
قضیه ۲-۸   اگر e یک یال پیوندی از G باشد، داریم: $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G.e)$.



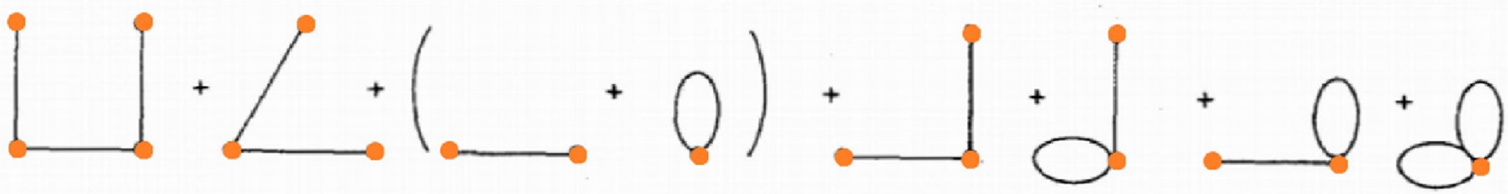
$\tau(G) =$



$=$



$=$



قضیه ۲-۹ $\tau(K_n) = n^{n-2}$

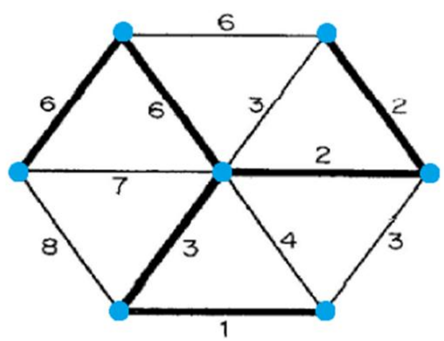
کاربردها

مساله ارتباط دهی

میخواهیم یک شبکه راه‌آهن که چند شهر را بهم وصل می‌کند احداث کنیم. هدف این است که ارتباط مستقیم بین شهرهای V_i، V_j را طوری طراحی کنیم که مجموعه هزینه ساخت (C_{ij}) این شبکه ارتباطی کمینه شود. به این مسئله، مسئله ارتباط دهی می‌گویند.

این مسئله را می‌توان با درنظر گرفتن هر شهر به‌عنوان یک راس و هزینه هر مسیر را به‌عنوان یک یال وزن‌دار به مسئله یافتن زیرگراف فراگیر همبند با کمترین وزن نگاشت کرد.

درخت فراگیر با کمترین وزن در یک گراف وزن‌دار، درخت بهینه نامیده می‌شود.



درخت بهینه در یک گراف وزن‌دار

ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که وزن تمام یال‌ها برابر با ۱ باشد. در این‌صورت درخت بهینه، یک درخت فراگیر با کمترین یال‌های ممکن خواهد بود. ولی از آن‌جایی که تمام درخت‌های فراگیر یک گراف تعداد یال‌های مساوی دارند قضیه ۲-۲ در این حالت خاص کافی است تنها یکی از درخت‌های فراگیر گراف را بسازیم. یک الگوریتم استقرایی ساده برای یافتن چنین دختی به‌صورت زیر است:

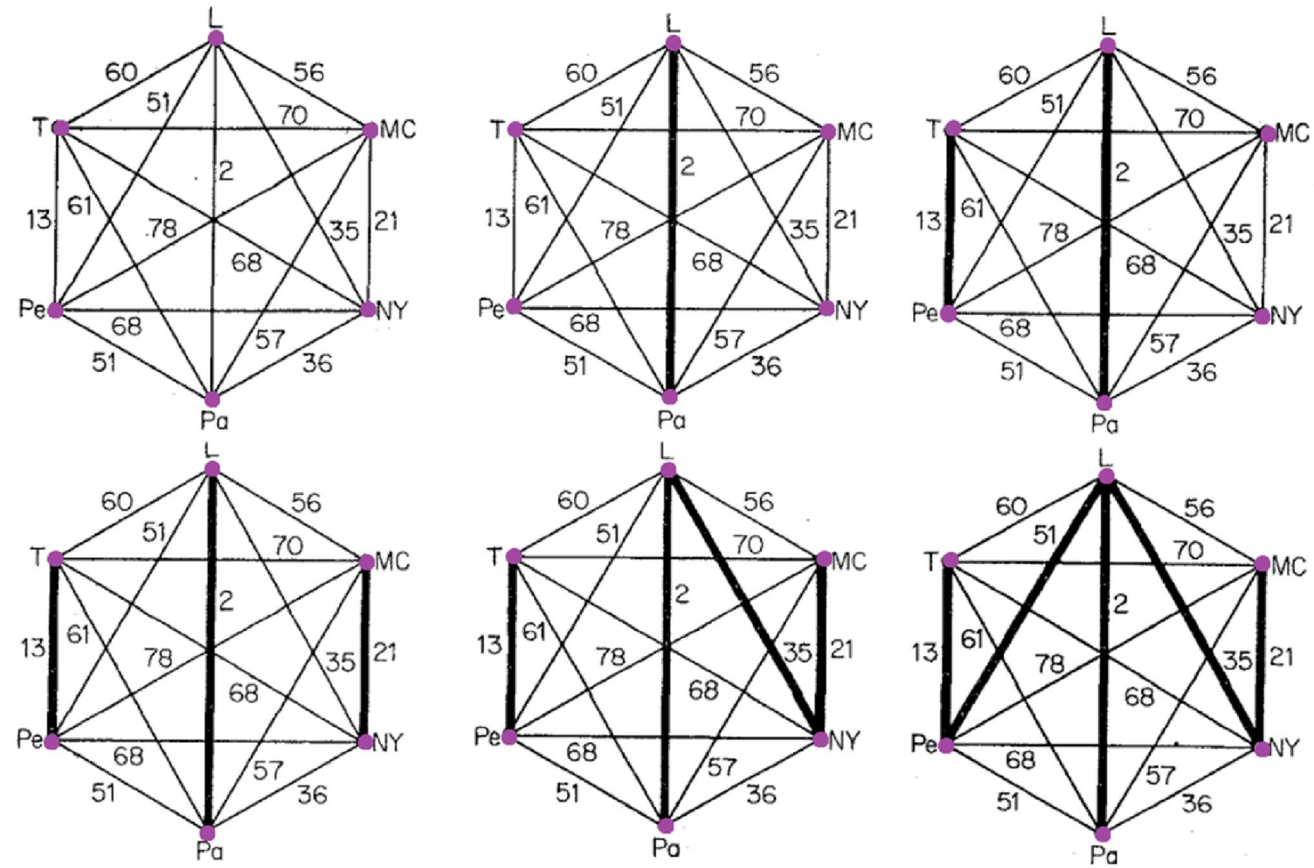
1. ابتدا یک یال پیوندی مانند e_1 را انتخاب می‌کنیم.
2. اگر یال‌های $e_1, e_2, \dots, e_i$ انتخاب شده‌اند، یال e_{i+1} را از میان $E \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $G[\{e_1, e_2, \dots, e_{i+1}\}]$ فاقد دور باشد.
3. در صورتی که مرحله ۲ قابل اجرا نیست توقف می‌کنیم.

از آن‌جایی که یک زیرگراف فاقد دور بیشینه از یک گراف همبند لزوما یک درخت فراگیر است صحت درستی الگوریتم فوق را تایید می‌کند. الگوریتم کروسکال به‌گونه‌ایی توسعه داده شده است که برای اعداد منفی هم (مجموعه اعداد حقیقی) کار کند.

الگوریتم کروسکال

1. یال پیوندی e_1 را طوری انتخاب کن که $\mathrm{w}(e_1)$ کوچکترین مقدار ممکن باشد.
2. اگر یال‌های $e_1,e_2,\dots,e_i$ انتخاب شده‌اند، یال e_{i+1} را از میان $\mathrm{E} \setminus \{e_1,e_2,\dots,e_i\}$ به گونه‌ای انتخاب کن که:
   - $\mathrm{G}[\{e_1,e_2,\dots,e_{i+1}\}]$ فاقد دور باشد.
   - از میان یال‌هایی که در شرط قبل صدق می‌کند، $\mathrm{w}(e_{i+1})$ دارای کمترین مقدار ممکن باشد.
3. درصورتی‌که مرحله ۲ دیگر قابل اجرا نیست، توقف کن.

مثال



واضح است که الگوریتم کروسکال یک درخت فراگیر تولید می‌کند (به همان دلیل که الکوریتم ساده‌تر قبلی این کار را انجام می‌داد). قضیه زیر این اطمینان را به ما می‌دهد که درخت به‌دست آمده همواره بهینه است.

قضیه ۲-۱۰   هر درخت فراگیر $T^* = \mathrm{G}[\{e_1,e_2,\ldots,e_{i+1}\}]$ که با الگوریتم کروسکال ساخته شود، یک درخت بهینه است.

پایان