5.7.2 SPLINE CÚBICA INTERPOLANTE

A spline linear apresenta a desvantagem de ter derivada primeira descontínua nos nós.

Se usarmos splines quadráticas, teremos que $S_2(x)$ tem derivadas contínuas até ordem 1 apenas e, portanto, a curvatura de $S_2(x)$ pode trocar nos nós. Por esta razão, as splines cúbicas são mais usadas.

Uma spline cúbica, $S_3(x)$, é uma função polinomial por partes, contínua, onde cada parte, $s_k(x)$, é um polinômio de grau 3 no intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$.

$S_3(x)$ tem a primeira e segunda derivadas contínuas, o que faz com que a curva $S_3(x)$ não tenha picos e nem troque abruptamente de curvatura nos nós.

Vamos reescrever a definição de spline cúbica interpolante:

Supondo que f(x) esteja tabelada nos pontos x_i, $i = 0, 1, 2,..., n$ a função $S_3(x)$ é chamada spline cúbica interpolante de f(x) nos nós x_i, $i = 0,..., n$ se existem n polinômios de grau 3, $s_k(x)$, $k = 1, ..., n$ tais que:

i) $S_3(x) = s_k(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, ..., n$

ii) $S_3(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$

iii) $s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, ..., (n - 1)$

iv) $s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, ..., (n - 1)$

v) $s''_k(x_k) = s''_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, ..., (n - 1)$

Para simplicidade de notação, escreveremos $s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k$, $k = 1, 2, ..., n$.

Assim, o cálculo de $S_3(x)$ exige a determinação de 4 coeficientes para cada k, num total de 4n coeficientes: $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, c_n, d_n$.

Impondo as condições para que $S_3(x)$ seja spline interpolante de f em $x_0,..., x_n$ teremos:

$(n + 1)$ condições para que $S_3(x)$ interpole f(x) nos nós;

$(n - 1)$ condições para que $S_3(x)$ esteja bem definida nos nós (continuidade de $S_3(x)$ em $[x_0, x_n]$);

$(n-1)$ condições para que $S_3'(x)$ seja contínua em $[x_0, x_n]$; e

$(n-1)$ condições para que $S_3''(x)$ seja contínua em $[x_0, x_n]$, num total de $(n+1+3(n-1)) = 4n-2$ condições. Portanto temos duas condições em aberto. Essas condições podem ser impostas de acordo com informações físicas que tenhamos sobre o problema etc; citaremos mais adiante algumas opções, dentre as mais usadas.

De acordo com a definição que demos para cada $s_k(x)$, a condição (*i*) da definição de $S_3(x)$ está automaticamente satisfeita.

Para impor a condição (*ii*) montamos, para $k = 1, ..., n$, as equações:

(1) $s_k(x_k) = d_k = f(x_k)$, às quais devemos acrescentar mais a equação:

(2) $s_1(x_0) = f(x_0) \Rightarrow -a_1h_1^3 + b_1h_1^2 - c_1h_1 + d_1 = f(x_0)$ onde usamos a notação $h_k = x_k - x_{k-1}$, com $k = 1$.

A condição (*iii*) é satisfeita através das $(n-1)$ equações: para $k = 1, ..., (n-1)$,

$s_{k+1}(x_k) = f(x_k)$, ou seja:

(3) $-a_{k+1}h_{k+1}^3 + b_{k+1}h_{k+1}^2 - c_{k+1}h_{k+1} + d_{k+1} = f(x_k)$.

Para impor as condições (*iv*) e (*v*), precisaremos das derivadas das $s_k(x)$:

(4) $s_k'(x) = 3a_k(x-x_k)^2 + 2b_k(x-x_k) + c_k$

(5) $s_k''(x) = 6a_k(x-x_k) + 2b_k$.

Observamos que $s_k''(x_k) = 2b_k$. Assim, cada coeficiente b_k pode ser escrito em função de $s_k''(x_k)$:

(6) $b_k = \dfrac{s_k''(x_k)}{2}$

Analogamente, como $s_k''(x_{k-1}) = -6a_kh_k + 2b_k$, podemos também escrever a_k em função das derivadas segundas nos nós pois

$$a_k = \frac{2b_k - s_k''(x_{k-1})}{6h_k} = \frac{s_k''(x_k) - s_k''(x_{k-1})}{6h_k}$$

e, impondo agora a condição (v), ($s_k''(x_{k-1}) = s_{k-1}''(x_{k-1})$), obtemos:

(7) $a_k = \dfrac{s_k''(x_k) - s_{k-1}''(x_{k-1})}{6h_k}$. Observamos que, no caso k = 1, estamos introduzindo uma variável, $s_0''(x_0)$, arbitrária.

Uma vez que $d_k = f(x_k)$ e já expressamos a_k e b_k, podemos usar (2) e (3) para termos c_k também em função das derivadas segundas nos nós. Observamos que tirar c_1 da equação (2) e, para $k = 1, \ldots, (n - 1)$ usar (3) é o mesmo que, para $k = 1, 2, \ldots, n$, termos:

$$\text{(8)}\quad c_k = \frac{-f(x_{k-1}) - a_kh_k^3 + b_kh_k^2 + d_k}{h_k}$$

$$= \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - (a_kh_k^2 - b_kh_k)$$

$$= \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - \left\{\frac{[s_k''(x_k) - s_k''(x_{k-1})]}{6}\,h_k - \frac{s_k''(x_k)}{2}\,h_k\right\}$$

ou seja:

$$c_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - \frac{-2s_k''(x_k)h_k - s_{k-1}''(x_{k-1})h_k}{6}.$$

Se usarmos mais as notações

$s_k''(x_k) = g_k$ e

$f(x_k) = y_k$, teremos:

(9) $a_k = \dfrac{g_k - g_{k-1}}{6h_k}$

(10) $b_k = \dfrac{g_k}{2}$

(11) $c_k = \left[\dfrac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \dfrac{2h_k g_k + g_{k-1}h_k}{6}\right]$ e

(12) $d_k = y_k$.

Assim, para $k = 1, 2, ..., n$, podemos calcular todos os coeficientes de $s_k(x)$ em função de $g_j = s_j''(x_j)$, $j = 0, 1, ..., n$.

Impondo agora a condição (*iv*) que ainda não foi utilizada, $s_k'(x_k) = s_{k+1}'(x_k)$, $k = 1, 2, ..., (n-1)$ teremos:

$$s_k'(x_k) = c_k = 3a_{k+1}h_{k+1}^2 - 2b_{k+1}h_{k+1} + c_{k+1}$$

donde $c_{k+1} = c_k - 3a_{k+1}h_{k+1}^2 + 2b_{k+1}h_{k+1}$

e, usando (9), (10) e (11)

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} + \frac{2h_{k+1}g_{k+1} + g_k h_{k+1}}{6} =$$

$$= \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_k + g_{k-1}h_k}{6} - 3\left(\frac{g_{k+1} - g_k}{6}\right) h_{k+1} +$$

$$+ 2\left(\frac{g_{k+1}\ h_{k+1}}{2}\right).$$

Agrupando os termos semelhantes, para $k = 1, ..., n-1$,

$$\frac{1}{6}\,[h_k g_{k-1} + (2h_k + 3h_{k+1} - h_{k+1})\, g_k +$$

$$+ \; (6h_{k+1} - 3h_{k+1} - 2h_{k+1}) \, g_{k+1}] =$$

$$= \frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k},$$

ou seja:

$$(13) \quad h_k g_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1}) \, g_k + h_{k+1} \, g_{k+1} = 6 \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} \right)$$

que é um sistema de equações lineares com $(n - 1)$ equações $(k = 1, ..., (n - 1))$ e $(n+1)$ incógnitas: $g_0, g_1, ..., g_{n-1}, g_n$ e, portanto, indeterminado, $Ax = b$

onde $x = (g_0, g_1, \ldots g_n)^T$

$$A = \begin{pmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & \\ & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_n) & h_n \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n+1)}$$

e

$$b = 6 \begin{pmatrix} \dfrac{y_2 - y_1}{h_2} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_1} \\ \dfrac{y_3 - y_2}{h_3} - \dfrac{y_2 - y_1}{h_2} \\ \vdots \\ \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}_{(n-1) \times 1}$$

Para podermos resolver esse sistema, de forma única, teremos de impor mais duas condições conforme já comentamos.

De posse da solução, aí então poderemos determinar a_k, b_k, c_k, e d_k, para cada $s_k(\bar{x})$.

ALGUMAS ALTERNATIVAS:

1) $S_3''(x_0) = g_0 = 0$ e $S_3''(x_n) = g_n = 0$, que é chamada spline natural.

Esta escolha é equivalente a supor que os polinômios cúbicos nos intervalos extremos ou são lineares ou próximos de funções lineares.

2) $g_0 = g_1$, $g_n = g_{n-1}$, que é equivalente a supor que as cúbicas são aproximadamente parábolas, nos extremos.

3) Impor valores para as inclinações em cada extremo, por exemplo $S_3'(x_0) = A$ e $S_3'(x_n) = B$, o que nos fornecerá as duas equações adicionais:

$$s_1'(x_0) = 3a_1h^2 - 2b_1h + c_1 = A$$

$$s_n'(x_n) = c_n = B.$$

Exemplo 14

Vamos encontrar uma aproximação para f(0.25) por spline cúbica natural, interpolante da tabela:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
f(x)	3	1.8616	–0.5571	–4.1987	-9.0536

Temos 4 subdivisões do intervalo [0, 2.0], donde n = 4, e portanto temos de determinar $s_1(x)$, $s_2(x)$, $s_3(x)$ e $s_4(x)$ resolvendo, para $1 \leq k \leq 3$ $(n - 1 = 3)$, o sistema:

(14) $h_k g_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})g_k + h_{k+1}\, g_{k+1} =$

$$= 6\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}\right).$$

No nosso exemplo, $h_k = h = 0.5$. Assim, (14) fica:

(15) $hg_{k-1} + 4hg_k + hg_{k+1} = \frac{6}{h}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})$

$$\begin{cases} hg_0 + 4hg_1 + hg_2 = \frac{6}{h}(y_2 - 2y_1 + y_0) \\ hg_1 + 4hg_2 + hg_3 = \frac{6}{h}(y_3 - 2y_2 + y_1) \\ hg_2 + 4hg_3 + hg_4 = \frac{6}{h}(y_4 - 2y_3 + y_2) \end{cases}$$

Como queremos a spline cúbica natural, $g_0 = g_4 = 0$, e então o sistema a ser resolvido será:

$$\begin{cases} 4hg_1 + hg_2 = (6/h)(y_2 - 2y_1 + y_0) \\ hg_1 + 4hg_2 + hg_3 = (6/h)(y_3 - 2y_2 + y_1) \\ hg_2 + 4hg_3 = (6/h)(y_4 - 2y_3 + y_2) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4h & h & 0 \\ h & 4h & h \\ 0 & h & 4h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \frac{6}{h} \begin{pmatrix} y_2 - 2y_1 + y_0 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 \end{pmatrix}$$

e, substituindo os valores de h e de y_i, $0 \leq i \leq 4$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15.3636 \\ -14.6748 \\ -14.5598 \end{pmatrix}$$

, cuja solução pelo método da Eliminação de Gauss nos fornece

$g_3 = -6.252$
$g_2 = -4.111$
$g_1 = -6.6541$, com 4 casas decimais.

Levando estes valores em a_k, b_k, c_k e d_k encontramos $s_1(x)$, $s_2(x)$, $s_3(x)$ e $s_4(x)$. Como queremos uma aproximação para f(0.25), $f(0.25) \approx s_1(0.25)$ e $s_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1$ onde, por (9), (10), (11) e (12),

$$a_1 = \frac{g_1 - g_0}{6h} = \frac{-6.6541}{3} = -2.2180$$

$$b_1 = \frac{g_1}{2} = -3.3270$$

$$c_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{2hg_1 + g_0 h}{6} = -3.3858$$

$$d_1 = y_1 = 1.8616$$

$$s_1(0.25) = -2.2180\,(-0.25)^3 - 3.3270\,(0.25)^2 - 3.3858\,(-0.25) + 1.8616 = 2.5348.$$

Assim, por spline cúbica natural interpolante,

$f(0.25) \approx s_1(0.25) = 2.5348.$

5.8 ALGUNS COMENTÁRIOS SOBRE INTERPOLAÇÃO

1. Sob o conceito de interpolação desenvolvido neste capítulo, ao interpolarmos um polinômio de grau n por um polinômio de grau $\geqslant$ n obteremos o polinômio original. Verifique!

2. Seja interpolar f(x) sobre $x_0, x_1, \ldots, x_n$, n + 1 pontos distintos igualmente espaçados. Mostra-se que $G(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$ assume seu módulo máximo num dos intervalos (x_0, x_1) ou (x_{n-1}, x_n), conforme a referência [17]. Assim, se formos usar (k + 1) pontos de interpolação, $k \leqslant n$, (polinômio de grau $\leqslant$ k) e se tivermos possibilidade de escolha destes pontos, dado $\bar{x}$, devemos escolher $x_0, x_1, \ldots, x_k$ de tal forma que $\bar{x}$ fique o mais central possível no intervalo $[x_0, x_k]$.