UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - DEPTO DE MATEMÁTICA
Disciplina MNUM7009 - Análise Numérica I - PPGMNE
Profs. Lucas G. Pedroso e Luiz C. Matioli
Lista de exercícios sobre zeros de funções não lineares - caso unidimensional.

NOTAS:
1) Para intervalos usaremos a notação $[a;b]$ ao invés de $[a,b]$ para não haver confusão com os números decimais.
2) Sugerimos implementar, em alguma linguagem de programação que você conheça, os algoritmos dos métodos desenvolvidos. Se necessário, utilize recursos gráficos para determinar valores iniciais para executá-los.

3) Você deverá entregar, diretamente na plataforma TEAMS, os seguintes exercícios: 1, 2, 4, 5, 7 e 9. O prazo de entrega é sexta-feira à noite do dia 22/10/2021.

1. Considere um intervalo real $[a;b]$ contendo uma raiz de uma função f definida e contínua nesse intervalo. Mostre que o número de iterações, k, para determinar um zero de f com precisão ε, pelo método da Bisseção, pode ser estimado pela fórmula:
$$k \geq \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2}$$
em que $\ln z$ é o logaritmo Neperiano (ou logaritmo Natural) do número real e positivo z.

2. Considere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x} - \cos x$ e $\varepsilon = 10^{-4}$.

   (a) Estime, utlizando a fórmula deduzida no execício 1, o número de iterações executadas pelo Método da Bisseção, para encontrar uma raiz de f no intervalo dado.

   (b) Determine um zero de f, no intervalo dado, pelo algoritmo que você implementou para Método da Bisseção.

3. Utilize o algoritmo que você implementou para o método da Bisseção para encontrar soluções, se existirem, com precisão de 10^{-6} para a equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$, nos seguintes intervalos:

   (a) [0;1] (b) [1;3,2] (c) [3,2;4]

4. (a) Estime quantas iterações do método da Bisseção serão necessárias para determinar $\sqrt{3}$ com precisão 10^{-4} no intervalo $[1;2]$.

   (b) Determine um valor aproximado para $\sqrt{3}$, com precisão 10^{-4}, utilizando o Algoritmo da Bisseção.

   (c) Compare o número de iterações nos itens (a) e (b) deste exercício. Dê sua explicação para o resultado.

5. Considere $f(x) = \tan(\pi x) - 6$ (tan(.) é função tangente). Determine um intervalo que contenha um zero de f e utilize os métodos a seguir, para aproximar uma raiz no intervalo que você determinou, com precisão $\varepsilon = 10^{-5}$

   (a) Método da Bisseção.

   (b) Método da Falsa Posição.

   (c) Método de Newton.

   (d) Método Secante.

6. O montante acumulado em uma conta de poupança baseada em depósitos pode ser determinado a partir da *equação de anuidade devidas*, a qual é dada por:

$$A = \frac{P}{i}[(1+i)^n - 1].$$

Nessa equação, A é o montante da conta, P é o valor regularmente depositado e i é taxa de juros por período, para n períodos em que os depósitos foram efetuados. Um indivíduo gostaria de ter em sua conta um total de $R\$ \ 750.000,00$ para etuar retiradas após 20 anos, e pode dispor de $R\$ \ 1.500,00$ por mês para atingir essa meta. Qual a taxa de juros mínima a que esse valor deve ser investido, assumindo que o período de capitalização é mensal? (Dica: como a taxa é mensal trabalhe com o tempo em meses ao invés de anos).

7. (a) Utilizando o método de Newton, mostre que a raiz $\sqrt[p]{a}$, com $a > 0$ e p um inteiro positivo, pode ser calculada, para todo $x_0 > 0$, pela fórmula de recorrência:

$$x_{k+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_k + \frac{a}{x_k^{p-1}}\right).$$

(b) Faça $x_0 = 1$ e determine $\sqrt{3}$ utilizando a fórmula de recorrência e precisão $\varepsilon = 10^{-4}$. Compare o desempenho com o exercício 4 item (b).

8. Considere a função $s(t) = 2e^{-t} - 2.5e^{-2t}$, para $t \geq 0$.

(a) Resolva algebricamente a equação $s(t) = 0$ para determinar um zero de s. Use inspeção gráfica para se convencer que existe um único zero para s no intervalo $[0; \infty)$.

(b) Determine um intervalo que contenha o zero de s que você encontrou no item (a).

(c) Utilize os 4 métodos estudados para determinar uma aproximação para o zero de s, no intervalo que você definiu no item (b), e use a precisão de parada $\varepsilon = 10^{-4}$.

(d) O método de Newton deve falhar se for iniciado em qualquer ponto $t_0 \geq 2$. Explique por quê.

(e) O que acontece com o método de Newton se for iniciado em $t_0 = 0.9163$? Argumente convincentemente, ou seja, não vale resposta direta.

9. (Novo método baseado na Bisseção)

(a) Desenvolva o método da trisseção fazendo a divisão do intervalo $[a, b]$ em três subintervalos de tamanhos iguais, apresentando um algoritmo para o seu método.

(b) Estime um limite para o número de iterações.

(c) Refazer os exercícios 2 e 4, acima, pelo método da trisseção que você desenvolveu e implementou.

10. Considere a função $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$.

(a) Mostre que raíz(es) de f são pontos fixos das seguintes funções:
i) $f_1(x) = \sqrt[4]{3 + x - 2x^2}$.
ii) $f_2(x) = \sqrt{\dfrac{x + 3 - x^4}{2}}$.
iii) $f_3(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x^2+2}}$.

iv) $f_4(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$.

(b) Faça no computador 10 iterações do método do ponto fixo para encontrar raízes de f a partir de $x^0 = 1$ usando cada uma das funções do item anterior. Descreva a performance para cada uma das funções.

11. (a) Usando o Método do ponto fixo verifique que, dado $x^0 > \sqrt{A}$, a sequência $x_{k+1} = \dfrac{x_k}{2} + \dfrac{A}{2x_k}$ aproxima a raiz quadrada de A usando apenas operações elementares.

    (b) Justifique o resultado obtido em comparação à sequência do exercício 7.

12. A função $g(x) = \dfrac{x^4}{10} + x^3 + 2x^2 - x - 2$ tem suas 4 raízes reais, $x^{(1)} < x^{(2)} < x^{(3)} < x^{(4)}$, em $[-10, 4]$. Rode diversas vezes o método de Newton, usando como pontos iniciais todos os pontos da malha de espessura 10^{-2} para o intervalo $[-10, 4]$. Diga, de modo aproximado, para quais regiões de pontos iniciais o método: i) Converge pra $x^{(1)}$. ii) Converge pra $x^{(2)}$. ii) Converge pra $x^{(3)}$. iv) Converge pra $x^{(4)}$. v) Não converge.

13. (Nota: neste exercício o iterando x_k será denotado por x^k.)

    Há um método de Newton para **sistemas** de equações não lineares, que generaliza o método para equações não lineares. Em duas dimensões, dados o sistema não linear $\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e o ponto inicial $\begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$, a iteração do método para encontrar uma solução do sistema não linear é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nabla^T f_1(x_1^k, x_2^k) \\ \nabla^T f_2(x_1^k, x_2^k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_1^k, x_2^k) \\ f_2(x_1^k, x_2^k) \end{bmatrix},$$

    em que ∇g é o vetor gradiente da função g, b^T é a transposta de b e C^{-1} é a matriz inversa de C.

    Use o método apresentado para encontrar uma raiz aproximada pra o sistema de equações não lineares

$$\begin{bmatrix} x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^3 \\ x_1 + x_2 - x_1^2 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

    Quais critérios de parada fazem sentido nesse contexto?