Exercício 7

(a) Utilizando o método de Newton, mostre que a raiz $\sqrt[p]{a}$
, com $a > 0$ e p um inteiro positivo, pode ser calculada, para todo
$x_0 > 0$, pela fórmula de recorrência:

$$x_{k+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_k + \frac{a}{x_k^{p-1}}\right)$$

O método de Newton-Raphson é dada por:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Resposta (a)

Adaptando a raiz $\sqrt[p]{a}$ temos:

$f(x) = x^p - a = 0$

Derivando temos: $f'(x) = px^{p-1} - 1$

Finalmente teremos o método de Newton-Raphson para a função dada é:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^p - a}{px_k^{p-1} - 1}$$

Mostrando que podemos chegar na fórmula dada pelo exercício temos que:

$$x_{k+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_k + \frac{a}{x_k^{p-1}}\right) \Rightarrow \left(px_k - x_k + \frac{a}{x_k^{p-1}}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{px_k}{p} - \frac{x_k}{p} + \frac{a}{px_k^{p-1}}\right) \Rightarrow \left(\frac{px_k}{p} - \frac{x_k}{p} + \frac{a}{px_k^{p-1}}\right) \Rightarrow \left(x_k + \frac{-x_k+a}{px_k^{p-1}}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x_k - \frac{x_k-a}{px_k^{p-1}}\right)$$

(b) Faça $x_0 = 1$ e determine $\sqrt{3}$ utilizando a fóruma de recorrência e precisão $\epsilon = 10^{-4}$.
Compare o desempenho com o exercício 4 item (b)

Resposta (b)

In [1]:

```
def newtowRaphson(x,p,a):
    #print("x=",x,"p=",p,"a=",a)
    return (1/p)*((p-1)*x + (a/(x**(p-1))))
```

In [2]:

```
p=2
x=1
a=3
xOld=1
precisao = 1e-4
#print(abs(round(x**p-a,4)),"<=",precisao)
print(x,round(x**p-a,4))
while (abs(round(x**p-a,4)) > precisao):
    xOld = x
    x=newtowRaphson(x,p,a)
    print(x,round(x**p-a,4))
```

```
1 -2
2.0 1.0
1.75 0.0625
```

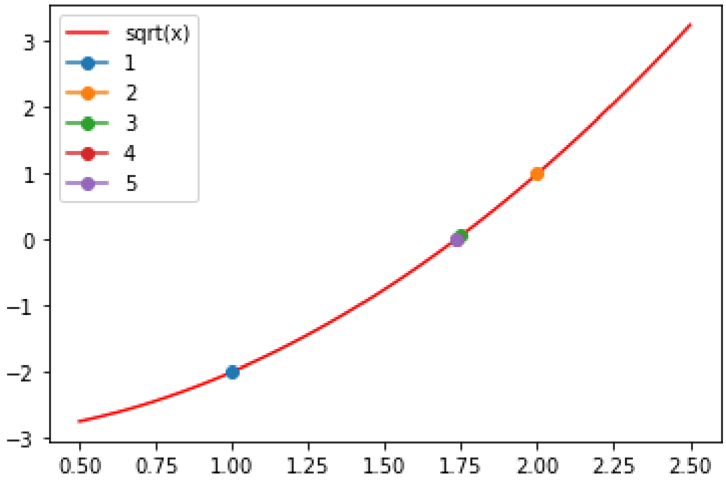
```
1.7321428571428572 0.0003
1.7320508100147274 0.0
```

In [3]:

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

xx = np.linspace(0.5,2.5,50)
plt.figure(1)
y= xx**2 -3
plt.plot(xx,y,'-r',label = 'sqrt(x)')
plt.plot(1,-2,'-',label = '1',marker = 'o')
plt.plot(2,1,'-',label = '2',marker = 'o')
plt.plot(1.75,0.0625,'-',label = '3',marker = 'o')
plt.plot(1.7321428571428572,0.0003,'-',label = '4',marker = 'o')
plt.plot(1.7320508100147274,0.0,'-',label = '5',marker = 'o')
plt.legend()
```

Out[3]: <matplotlib.legend.Legend at 0x269bb606c70>



o método de newton convergiu em 5 iterações enquanto que o método da bisseção convergi

In [ ]: