

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - DEPTO DE MATEMÁTICA  
Disciplina MNUM7009 - Análise Numérica I - PPGMNE  
Profs. Lucas G. Pedroso e Luiz C. Matioli  
Lista de exercícios sobre os métodos iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel e SOR.

**NOTA: Entregar os exercícios 5, 6, 7 e 8 até a data estipulada na plataforma TEAMS.**

1. Resolva o exercício 2 da aba EXERCITE do vídeo 2.
2. Resolva o exercício 2 da aba EXERCITE do vídeo 3.
3. Resolva o exercício 1 da aba EXERCITE do vídeo 4.
4. Resolva os exercícios 2 itens (a) e (d) e 3 da aba EXERCITE do vídeo 5.
5. Estude o critério de Sassenfeld da aba APROFUNDE do vídeo 6. Aplique o critério de Sassenfeld às matrizes do exercício (2) da aba EXERCITE do vídeo 5 (são 4 matrizes, itens (a), (b), (c) e (d). Decida para qual delas o Método de Gauss-Seidel converge.
6. Resolva o exercício 2 da aba EXERCITE do vídeo 6.
7. Considere  $A = L + D + U$  uma partição da matriz  $A_{n \times n}$  com  $L$ ,  $D$  e  $U$  matrizes extraídas da matriz  $A$  e possuindo as seguintes características:  $L$  e  $U$  são triangulares inferior e superior, respectivamente, com zeros na diagonal,  $D$  é uma matriz diagonal possuindo os mesmos elementos da diagonal de  $A$ .
  - (a) Determine as matrizes dos processos iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel e SOR.
8. Considere  $h = 0.1$  e o seguinte o sistema linear

$$(S) \quad \begin{array}{rcl} -2(1+h^2)x_1 + x_2 & = & 1 \\ x_{i-1} - 2(1+h^2)x_i + x_{i+1} & = & 0 \\ x_{n-1} - 2(1+h^2)x_n & = & 1 \end{array} \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

- (a) Faça  $n = 5$  e escreva o sistema (S) na forma  $Ax = b$ , explicitando o vetor dos termos independentes  $b$  e a matriz  $A$  dos coeficientes de (S).
- (b) Resolva o sistema do item (a), deste exercício, utilizando os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel.
- (c) Repita o item (b) para o método SOR, considerando os seguintes valores para o parâmetro  $w$ : 0.1; 1; 1.5 e 1.9.
- (d) Considere  $n = 100$  e faça uma rotina, em alguma linguagem de programação que você domine, para armazenar a matriz  $A$  dos coeficientes do sistema (S) e o vetor dos termos independentes ( $b$ ).
- (e) Resolva o sistema linear do item (d) pelos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel.
- (f) Repita o item (e) para o método SOR, considerando os seguintes valores para o parâmetro  $w$ : 0.1; 1; 1.5 e 1.9.
- (g) Houve problema de convergência em alguns dos sistemas lineares resolvidos? Em caso afirmativo, tente justificar ou dar alguma pista porque não ocorreu a convergência (“coisas” do tipo, a(s) hipótese(s) de convergência não se aplicam, erros numéricos, erros de implementação, outros)

9. Considere  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dada como na partição do exercício (1). Mostre que o processo iterativo de Jacobi pode ser escrito na forma:

$$x^{k+1} = x^k + D^{-1}r^k, \text{ com } r^k = b - Ax^k.$$

10. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Verifique que  $A$  é definida positiva.
- (b) Determine os autovalores e o raio espectral de  $A$ .
- (c) Determine  $\rho(M_J)$ ,  $\rho(M_{GS})$  e  $\rho(M_{SOR})$ .

NOTA:  $\rho(A)$  é o raio espectral da matriz  $A$  e é definido por

$$\max_i \{ |\lambda_i| \},$$

em que  $\lambda_i$  é autovalor da matriz  $A$ . Em outras palavras, o raio espectral é o maior autovalor em módulo de uma matriz.