

**Exercício 1**

Uma pequena fábrica de papel toalha manufatura três tipos de produtos A, B e C. A fábrica recebe o papel em grandes rolos. O papel é cortado, dobrado e empacotado. Dada a pequena escala da fábrica, o mercado absorverá qualquer produção a um preço constante. O lucro unitário de cada produto é respectivamente R\$ 1,00, R\$ 1,50, e R\$ 2,00. O quadro abaixo identifica o tempo requerido para operação (em horas) em cada seção da fábrica, bem como a quantidade de máquinas disponíveis, que trabalham 40 horas por semana. Planeje a produção semanal da fábrica.

Seção	Produto A	Produto B	Produto C	Q <sup>de.</sup> , Máquina
Corte	8,0	5,0	2,0	3,0
Dobra	5,0	10,0	4,0	10,0
Empacotamento	0,7	1,0	2,0	2,0

**Exercício 2**

A Fábrica de Rádios Sinval Vulah S.A. fabrica os modelos A, B e C que tem contribuição ao lucro de \$16, \$30 e \$50, respectivamente. As exigências de produção mínima semanal são 20.000 para o modelo A, 120.000 para o modelo B e 60.000 para o modelo C. Cada tipo de rádio requer uma certa quantidade de tempo para fabricação das partes componentes, para a montagem e para embalagem. Especificamente, uma unidade do modelo A requer 0.3 horas para fabricar, 0.4 horas para montar e 0.1 para embalar. Os números correspondentes para uma unidade do modelo B são 0.4, 0.5 e 0.2, e para uma unidade do modelo C são 0.5, 0.8 e 0.3. Durante a próxima semana, a fábrica tem disponíveis 120.000 horas de tempo de fabricação, 160.000 horas de montagem e 48.000 horas de embalagem. Formule o modelo e resolva utilizando o LINDO.

**Exercício 3**

Uma fábrica de computadores produz dois modelos de microcomputadores A e B. O modelo A fornece um lucro de R\$ 180,00 e B, de R\$ 300,00. O modelo A requer, na sua produção, um gabinete pequeno e uma unidade de disco. O modelo B requer 1 gabinete grande e 2 unidades de disco. Existem no estoque 60 do gabinete pequeno, 50 do gabinete grande e 120 unidades de disco. Pergunta-se: Qual deve ser o esquema de produção que maximiza o lucro?

**Exercício 4**

Uma empresa do ramo de madeira produz madeira tipo compensado e madeira serrada comum e seus recursos são 40 m<sup>3</sup> de pinho e 80 m<sup>3</sup> de canela. A madeira serrada dá um lucro de R\$ 5,00 por m<sup>3</sup> e a madeira compensada dá um lucro de R\$ 0,70 por m<sup>3</sup>. Para produzir uma mistura de 1 metro cúbico de madeira serrada são requeridos 1 m<sup>3</sup> de pinho e 3 m<sup>3</sup> de canela. Para produzir 100 m<sup>3</sup> de madeira compensada são requeridos 3 m<sup>3</sup> de pinho e 5 m<sup>3</sup> de canela. Compromissos de venda exigem que sejam produzidos pelo menos 5 m<sup>3</sup> de madeira serrada e 900 m<sup>2</sup> de madeira compensada. Qual é o esquema de produção que maximiza o lucro?

**Exercício 5**

Uma empresa tem três tipos de máquinas de processamento, tendo cada uma delas velocidade e taxas de defeitos diferentes. As máquinas do tipo I podem produzir 20 peças por hora com 5% de peças defeituosas; as do tipo II, 15 peças por hora com 10% de defeitos e as do tipo III, 10 peças por hora sem defeitos. O custo horário de operação por máquina é US\$ 2,00; US\$ 1,75 e US\$ 1,50, respectivamente. Devem ser processadas 3500 peças por dia (8 horas/dia), mas só se dispõe de 8 máquinas do tipo I, 10 do tipo II e 20 do tipo III. Cada peça defeituosa custa à empresa US\$ 1,00. Formule um modelo de PL para determinar a solução ótima para este problema.

**Exercício 6**

Uma oficina mecânica deseja alocar o tempo ocioso disponível em suas máquinas para a produção de 3 produtos. A tabela abaixo dá as informações sobre as necessidades de horas de máquina para produzir uma unidade de cada produto, assim como a disponibilidade das máquinas, o lucro dos produtos e a demanda máxima existente no mercado. Deseja-se o esquema semanal de produção de lucro máximo.

Tipo de máquina	Produto A	Produto B	Produto C	Tempo disponível (horas por semana)
Torno	5	3	5	400
Fresa	8	4	0	500
Furadeira	2	5	3	300
Lucro	20	15	18	
Demandas Semanais Mínimas	40	50	20	

**Exercício 7**

Uma empresa petrolífera tem três refinarias ( $r = 1,2,3$ ), e pretende distribuir combustíveis do tipo Y e Z para quatro mercados diferentes ( $m = 1,2,3,4$ ). O custo de transporte do combustível Y é  $2/3$  do custo de transporte do combustível Z e ambos são diretamente proporcionais à distância. A demanda mensal de Y e Z para cada mercado é  $DY_m$  e  $DZ_m$  respectivamente. A produção diária de Y e Z em cada refinaria é  $PY_r$  e  $PZ_r$ , respectivamente. Para um melhor uso da matéria-prima, cada refinaria deve produzir no mínimo 3 galões de Y para cada 2 galões do combustível Z. Formule um modelo de PL que minimize os custos de transporte e que, no caso de faltar combustível distribua a produção proporcionalmente à demanda.

**Exercício 8**

Uma empresa petrolífera tem três refinarias ( $r = 1,2,3$ ), e pretende distribuir combustíveis do tipo Y e Z para quatro mercados diferentes ( $m = 1,2,3,4$ ). O custo de transporte do combustível Y é  $2/3$  do custo de transporte do combustível Z e ambos são diretamente proporcionais à distância. A demanda mensal de Y e Z para cada mercado é  $DY_m$  e  $DZ_m$  respectivamente. A produção diária de Y e Z em cada refinaria é  $PY_r$  e  $PZ_r$ , respectivamente. Antes da distribuição, os combustíveis Y e Z deverão permanecer em estoque por pelo menos 15 e 20 dias, respectivamente. A capacidade total de estocagem de cada refinaria é limitada em  $C_r$ . Formule um modelo de PL que minimize os custos de transporte e que, no caso de faltar combustível distribua a produção proporcionalmente à demanda.

**Exercício 9**

Uma empresa produz televisão em 3 fábricas: São Paulo, João Pessoa e Manaus. Os pontos principais de revenda, com as respectivas encomendas mensais são:

Pontos de Revenda	Encomendas (unidades)
Rio de Janeiro	6.000
Salvador	5.000
Aracajú	2.000
Maceió	1.000
Recife	3.000

A produção máxima mensal em cada fábrica é:

Fábricas	Capacidade (unidades)
São Paulo	10.000
João Pessoa	5.000
Manaus	6.000

O custo de transportes das fábricas até as revendas, para cada lote de 1.000 aparelhos, é dado pelo quadro abaixo:

Para De	Rio de Janeiro	Salvador	Aracaju	Maceió	Recife
São Paulo	1.000	2.000	3.000	3.500	4.000
João Pessoa	4.000	2.000	1.500	1.200	1.000
Manaus	6.000	4.000	3.500	3.000	2.000

Determinar o número de unidades produzidas em cada fábrica e entregues a cada revenda, a fim de minimizar o custo de transporte.

**Exercício 10**

Consideremos o problema da metalurgia de alumínio, em que se deseja produzir 2.000 kg de uma liga de alumínio, a custo mínimo, pela mistura de diversas matérias-primas (minérios). Esta liga deve atender a requisitos de engenharia que especificam os máximos e mínimos de diversos elementos químicos que a compõe. Os custos das matérias-primas são:

Mat prima	Mat1	Mat2	Mat3	Mat4	Mat5	Mat6	Mat7
Custo	0,03	0,08	0,17	0,12	0,15	0,21	0,38

A composição dos minérios e a participação mínima/máxima de cada um dos elementos químicos nos 2.000 kg da liga são mostradas a seguir:

## **Universidade Federal de Santa Catarina**

Centro Tecnológico

Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas

Pesquisa Operacional

Pag. 4

Elemento	Mat1	Mat2	Mat3	Mat4	Mat5	Al-puro	Si-puro	Mínimo	Máximo
Fe	0,15	0,04	0,02	0,04	0,02	0,01	0,03	-	60
Cu	0,03	0,05	0,08	0,02	0,06	0,01	-	-	100
Mn	0,02	0,04	0,01	0,02	0,02	-	-	-	40
Mg	0,02	0,03	-	-	0,01	-	-	-	30
Al	0,70	0,75	0,80	0,75	0,80	0,97	-	1500	-
Si	0,02	0,06	0,08	0,12	0,02	0,01	0,97	250	300

Na tabela anterior temos, por exemplo, que Mat1 contém 15% de Ferro, 3% de Cobre, etc. Temos, ainda, que a liga a ser obtida (2.000 kg) deve conter, no máximo, 60 kg de Ferro, 100 kg de Cobre e que a quantidade de Silício deve estar entre 250 kg e 300 kg.

Quanto à disponibilidade de matéria-prima, os dados estão indicados a seguir na linha "Disponibilidade Máxima". A linha "Disponibilidade Mínima" refere-se a quantidade que se deseja forçar a entrar neste processo (por algum motivo, tal como liberação de espaço).

	Mat1	Mat2	Mat3	Mat4	Mat5	Mat6	Mat7
Disp. Mín.	-	-	400	100	-	-	-
Disp. Máx.	200	750	800	700	1500	Infinito	Infinito

### **Exercício 11**

Um fundo de investimentos tem até R\$ 300.000,00 para aplicar em duas ações. A empresa D é diversificada (tem 40% do seu capital aplicado em cerveja e o restante aplicado em refrigerantes) e espera-se que forneça bonificações de 12%. A empresa N não é diversificada (produz apenas cerveja) e espera-se que distribua bonificações de 20%. Para este investimento, considerando a legislação governamental aplicável, o fundo está sujeito às seguintes restrições:

- a) O investimento na empresa diversificada pode atingir R\$ 270.000,00.
- b) O investimento na empresa não-diversificada pode atingir R\$ 150.000,00.
- c) Em cada produto (cerveja ou refrigerante) pode-se investir até R\$ 180.000,00.

Pede-se: Qual o esquema de investimento que maximiza o lucro?

### **Exercício 12**

Uma companhia aérea possui três tipos de aviões e é obrigada a servir quatro rotas aéreas. A tabela abaixo fornece a capacidade máxima (em número de passageiros) de cada tipo de aeronave, o número de aviões disponíveis de cada tipo, bem como o número de viagens por dia que cada tipo de avião pode fazer em uma determinada rota (por exemplo: um avião do tipo 1 pode realizar três viagens na rota 1 ou 2 viagens na rota 2, etc). Na tabela seguinte, é dado também o número de passageiros que necessariamente terá que ser transportado em cada rota.

## **Universidade Federal de Santa Catarina**

Centro Tecnológico

Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas

Pesquisa Operacional

Pag. 5

Tipo de Aeronave	Capacidade (pass)	Número de Aeronaves	Número de Viagens Diárias em Cada Rota			
			R1	R2	R3	R4
A1	50	5	3	2	2	1
A2	30	8	4	3	3	2
A3	20	10	5	5	4	2
Passageiros a serem transportados diariamente em cada rota			100	200	90	120

O Custo operacional por viagem para cada avião nas diferentes rotas é dado pela tabela abaixo.

Tipo de Aeronave	Custos Operacionais por Viagem			
	R1	R2	R3	R4
A1	1.000,00	1.100,00	1.200,00	1.500,00
A2	800,00	900,00	1.000,00	1.000,00
A3	600,00	800,00	800,00	900,00

Formular um modelo de programação linear que permita alocar os aviões às diversas rotas, visando a minimizar o custo operacional do sistema.

### **Exercício 13**

Um navio tem três compartimentos de carga: proa, centro e popa. As capacidades limites são:

Compartimento	Peso (ton)	Volume (m <sup>3</sup> )
Proa	2.000	30.000
Centro	3.000	40.000
Popa	1.500	20.000

A empresa de navegação, proprietária do navio pode aceitar toda ou parte das seguintes cargas:

Carga	Quant. (ton)	Vol. Esp. (m <sup>3</sup> /ton)	Lucro (R\$/ton)
A	6.000	60	6.000
B	4.000	50	8.000
C	2.000	25	5.000

Para preservar o equilíbrio do navio, o peso em cada compartimento deve ser proporcional a sua capacidade em toneladas. Formule um modelo para determinar como carregar o navio de modo a maximizar o lucro ?

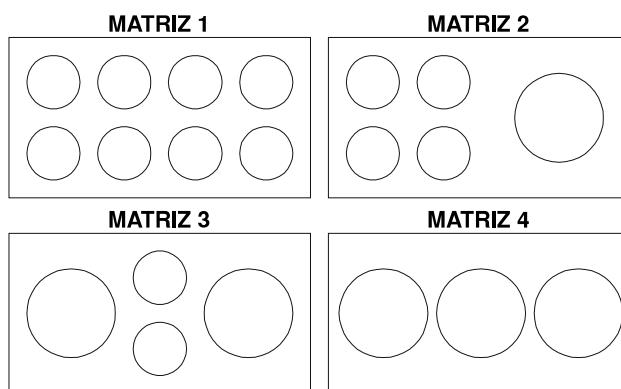
### **Exercício 14**

Uma metalúrgica deseja maximizar sua receita bruta. A tabela abaixo ilustra a proporção de cada material na mistura para a obtenção das ligas passíveis de fabricação. O preço está cotado em R\$ por tonelada da liga fabricada. Também em toneladas estão expressas as restrições de disponibilidade de matéria-prima. Formular o modelo de Programação Matemática.

	Liga Especial de Baixa Resistência	Liga Especial de Alta Resistência	Disponibilidade de Matéria-Prima
Cobre	50 %	20 %	16 ton
Zinco	25 %	30 %	11 ton
Chumbo	25 %	50 %	15 ton
Preço de Venda (R\$/ton)	3.000,00	5.000,00	

**Exercício 15**

Uma determinada fábrica produz panelas de metal médias e grandes a partir de elementos circulares de diâmetros de 0,25 e 0,40 metros, respectivamente. A primeira operação para obter as panelas é um corte desses elementos circulares sobre chapas de dimensão de 1,40 x 0,50 metros. Os elementos planos circulares são transformados em panelas em uma segunda operação de estamparia. Para o corte existem quatro tipos de matrizes conforme mostra a figura abaixo.



A fábrica deseja uma produção diária mínima de 500 panelas médias (obtidas do elemento circular de diâmetro 0,25) e 350 grandes (obtidas do elemento circular de diâmetro de 0,40). Os custos em reais por chapa pelo uso de cada matriz de corte são respectivamente: 1, 2, 3, 2. Elaborar o modelo de Programação Linear que planeje a produção de modo a minimizar o custo com o uso das chapas.

**Exercício 16**

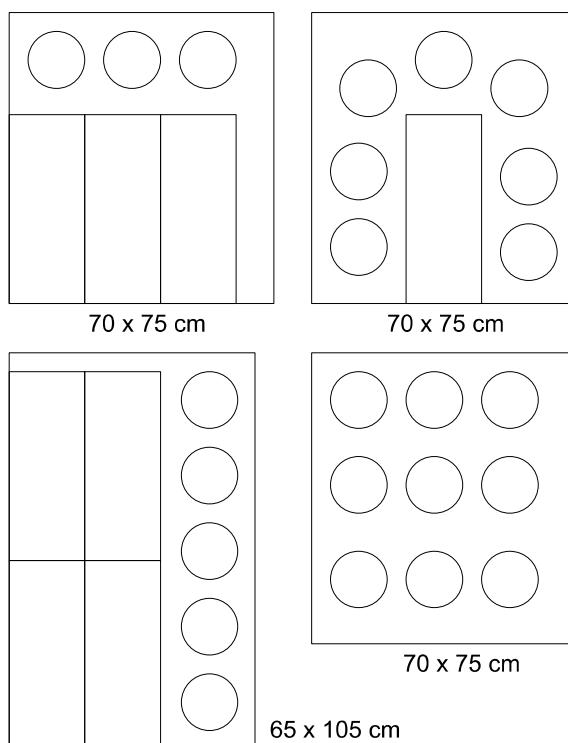
Uma fábrica necessita cortar uma fita de aço de 12 cm de largura em tiras de 2,4 cm, 3,4 cm e 4,5 cm de largura. As necessidades globais das tiras são:

Tipo de Tira	Largura (cm)	Comprimento Mínimo (m)
Tira 1	2,4	2.500
Tira 2	3,4	4.500
Tira 3	4,5	8.000

Formule o problema que permite otimizar o consumo da fita a ser cortada minimizando a perda de material.

**Exercício 17**

Considerar a produção das latas que são estampadas em folhas planas de alumínio. Uma lata consiste em um corpo principal e em duas extremidades (topo e base). Existem 4 padrões de estampas possíveis (que envolvem 2 tamanhos diferentes de folha de metal), como mostrado abaixo:



Considerando que deverão ser fabricadas 5.000 latas, qual é a forma mais econômica de produzi-las?

**Exercício 18**

A Viação Aérea Brasileira está estudando a compra de três tipos de aviões: Boeing 717 para as pontes aéreas de curta distância, Boeing 737-500 para vôos domésticos e internacionais de média distância e MD-11 para vôos internacionais de longa distância. Em um estudo preliminar, considerou-se que a capacidade máxima dos aviões a serem comprados será sempre preenchida para efeito de planejamento. Os dados de planejamento constam da tabela abaixo:

Tipo do Avião	Custo (Milhões US\$)	Receita Teórica (Milhões US\$)	Pilotos Aptos
BOEING 717	5,1	330	30
BOEING 737-500	3,6	300	20
MD-11	68	420	10

A verba disponível para as compras é de 220 milhões de dólares. Os pilotos de MD-II podem pilotar todos os aviões da empresa, mas os demais pilotos só podem ser escalados às aeronaves a que foram habilitados. Cada aeronave necessita de dois pilotos para operar. As

oficinas de manutenção podem suportar até 40 Boeings 717. Um Boeing 737-500 equivale, em esforço de manutenção, a 3/4, e um MD-II a 5/3, quando referidos ao Boeing 717. Formular o modelo de PL do problema de otimizar as aquisições de aviões.

**Exercício 19**

Uma certa fábrica de camisetas deseja aproveitar as finais de um campeonato de futebol para vender camisetas dos times envolvidos. Os jogos vão durar quatro semanas. O custo de produção de cada camiseta é R\$ 2,00 nas duas primeiras semanas e subirá para R\$ 2,50 nas duas últimas, quando a concorrência demandar por material no mercado. A demanda semanal de camisetas será de 5.000, 10.000, 30.000 e 60.000. A capacidade máxima de produção da empresa é de 25.000 camisetas. Na primeira e na segunda semana a empresa poderá, em um esforço excepcional, carrear mão-de-obra em horas extras e fabricar mais 10.000 camisetas em cada semana. Nesse caso, o custo dessas camisetas será de R\$ 2,80. O excesso de produção pode ser estocado a um custo de R\$ 0,20 por unidade por semana.

Pedido 1: Formular o modelo de PL que minimize os custos.

Pedido 2: Após o planejamento anterior, a direção da empresa verificou que a demanda iria variar substancialmente dentro dos quatro modelos de camiseta que representavam os quatro times disputando as finais. Apesar da demanda total ser exatamente aquela anteriormente levantada, o valor das camisetas iria variar em conformidade com o time e sua posição no campeonato. Nas duas primeiras semanas todos os times estariam em pé de igualdade até que fosse decidido os dois finalistas. A partir daí, as camisetas dos times eliminados cairiam em valor e em demanda no mercado, e as dos times finalistas subiriam conforme a tabela a seguir:

	Semana							
	1		2		3		4	
	Demandra	Valor	Demandra	Valor	Demandra	Valor	Demandra	Valor
Time A	1250	5,00	2500	6,00	500	3,00	-	-
Time B	1250	5,00	2500	6,00	500	3,00	-	-
Time Final. C	1250	5,00	2500	6,00	14500	8,00	30000	9,00
Time Final. D	1250	5,00	2500	6,00	14500	8,00	30000	9,00

Sabendo-se que existe um completo equilíbrio entre os quatro finalistas, formular o modelo que maximize os lucros da empresa produtora de camisetas.

**Exercício 20**

Uma empresa de distribuição de derivados de petróleo está estudando um esquema para distribuição combustível em uma região com 4 mercados consumidores (A, B, C e D), cuja demanda é apresentada no quadro abaixo.

# **Universidade Federal de Santa Catarina**

Centro Tecnológico

Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas

Pesquisa Operacional

Pag. 9

Mercado	Demandas Mensais (ton/mês)
A	150.000
B	200.000
C	120.000
D	240.000

No atendimento desta demanda, a empresa pretende utilizar transporte marítimo e terrestre. Para tanto, é necessário instalar terminais marítimos ao longo da costa. Os portos escolhidos para instalação de possíveis terminais são denominados de P1, P2, P3 e P4. Os tipos de terminais que poderão ser instalados estão apresentados no quadro abaixo:

Tipo	Capacidade (ton/mês)	Custo Fixo (R\$/mês)	Custo Variável (R\$/ton)
I	100.000	500.000,00	6,50
II	200.000	800.000,00	5,30
III	300.000	1.000.000,00	4,50

O combustível a ser distribuído na região poderá vir de duas refinarias distintas. A refinaria 1 tem uma capacidade de produzir adicionalmente 600.000 ton / mes, a um custo unitário de R\$ 350,00 / ton. A segunda refinaria tem uma capacidade ociosa de 550.000 ton / mes, e com um custo unitário de R\$ 370,00 / ton. O custo unitário de transporte é de R\$ 5,60 / ton.km para o modo terrestre (entre terminais e mercados) e R\$ 0,82 / ton.km para o modo marítimo (entre refinarias e terminais). As distâncias de transporte estão apresentadas no quadro abaixo.

Distância de Transporte (km)						
De \ Para	Merc. A	Merc. B	Merc. C	Merc. D	Ref. 1	Ref. 2
P1	150	140	160	120	800	1.400
P2	200	130	140	120	900	1.300
P3	180	170	130	160	1.200	1.000
P4	120	130	180	120	1.300	900

Formule um modelo para determinação do esquema ótimo de distribuição do combustível e de implantação dos terminais. Resolva o modelo formulado e analise os resultados.

## **Exercício 21**

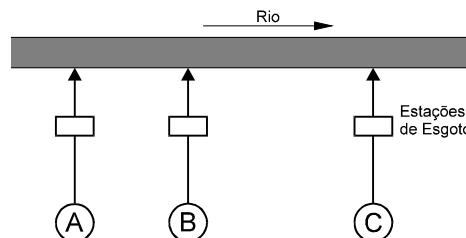
Uma indústria química foi intimada pelo governo de seu estado para instalar e empregar dispositivos de anti-poluição. A empresa faz dois produtos; para cada um destes produtos, o processo de fabricação produz quantidades excessivas de gases irritantes e partículas (sólidos em suspensão). Na tabela abaixo é mostrada a emissão diária, em quilos, de cada poluente para cada 1000 litros de produto fabricado. A companhia está proibida de emitir mais do que G1, G2 e P1 quilos de gás CM, gás SD e partículas, respectivamente.

Tipo de Poluente	Poluentes Emitidos (kg/1.000 litros)	
	Produto 1	Produto 2
Gás CM	24	36
Gás SD	8	12
Partículas	100	50

O gerente de produção aprovou a instalação de dois dispositivos anti-poluição. O primeiro dispositivo remove 0,75 de gás CM, 0,5 de gás SD e 0,9 de partículas, independentemente do produto fabricado. O segundo dispositivo remove 0,33 de gás CM, nada de gás SD e 0,8 de partículas para o produto 1 e 0,25 de gás CM, 0,45 de gás SD e 0,6 de partículas para o produto 2. O primeiro dispositivo reduz o lucro por milhar de litros fabricados diariamente por  $C_1$ , independentemente do produto. Da mesma forma, o segundo dispositivo reduz o lucro por  $C_2$ , por milhar de litros fabricados diariamente, independentemente do produto. Compromissos de vendas obrigam que pelo menos R1 e R2 milhares de litros do produto 1 e produto 2 sejam produzidos diariamente. Formule o modelo de otimização apropriado.

### Exercício 22

Os esgotos de três cidades (A, B e C), depois de sofrerem um tratamento, são descarregados em um rio. O esgoto de cada uma das três cidades produz uma quantidade diária de poluente expressa por  $P_A$ ,  $P_B$  e  $P_C$  toneladas. O tratamento do esgoto pode reduzir a quantidade de poluente até um máximo de 90%. Esta redução é denominada eficiência da estação de tratamento, e o custo de cada estação é diretamente proporcional à sua eficiência ( $k_i \times$  eficiência). Por outro lado, devido à ação bioquímica (aeração etc.), no final de cada trecho AB e BC do rio, a quantidade de poluentes é reduzida em 10% e 20% respectivamente.



Qual a eficiência que devem ter as estações de tratamento, de modo que, para qualquer ponto do rio, a quantidade de poluentes medida em um dia não ultrapasse  $P$  toneladas, e de modo a minimizar o custo das estações de tratamento? Formular um PPL que permita resolver este problema.

### Exercício 23

Uma casa de câmbio geralmente realiza transações lucrativas entre moedas estrangeiras. Suponha que esta casa de câmbio realiza operações entre cinco diferentes moedas: dólar, libra-esterlina, franco, marco, lira. Sejam as ofertas de troca apresentadas no quadro 1 e a disponibilidade inicial de moeda apresentada no quadro 2. Assuma que, com um sistema de comunicação rápida, a casa de câmbio pode ter acesso a estas informações e virtualmente realizar todas as transações que desejar simultaneamente. A única exigência nas transações é de que nenhum negócio fique a descoberto no fim de um dia de transação, quando as

moedas forem efetivamente trocadas. Em outras palavras, a casa de câmbio precisa ao menos ter a habilidade de cobrir as vendas totais de cada moeda com a renda proveniente de quaisquer outras trocas que foram produzidas por aquela moeda.

Possíveis Negócios	Moeda		Razão de Troca	Quantidade Disponível
	Compra	Venda		
1	Dolar	Marco	1 / 2,003	30.000,00
2	Dolar	Libra	1 / 0,705	20.000,00
3	Libra	Lira	1 / 200,00	100.000,00
4	Libra	Franco	1 / 150,00	50.000,00
5	Franco	Marco	1 / 0,0216	15.000,00
6	Franco	Lira	1 / 1,452	45.000,00
7	Lira	Dolar	1 / 0,00714	35.000,00
8	Lira	Franco	1 / 0,7234	40.000,00
9	Marco	Libra	1 / 0,3467	20.000,00
10	Marco	Dolar	1 / 0,4862	5.000,00

Formule um modelo de otimização que maximize a quantidade de dólares ao final da negociação, dado que a empresa dispõe em caixa as seguintes moedas:

Moeda	Disponível
Dolar	10.000,00
Libra	20.000,00
Franco	30.000,00
Marco	40.000,00
Lira	50.000,00

#### Exercício 24

Por volta de 435 a.C., Esparta decidiu convocar reservistas para suplementar seu exército regular. Os novos combatentes podiam ser alistados por 1, 2, 3 ou 4 anos, respectivamente com custos de \$10, \$18, \$25 e \$31. A força mínima total de combatentes reservistas foi estabelecida na tabela abaixo. Como um general espartano, você poderia achar uma política de alistamento ótima para os próximos 10 anos, resolvendo o problema com um modelo de otimização. Formule o modelo e resolva.

Ano	Reservistas
435 AC	10.200
434 AC	11.800
433 AC	10.500
432 AC	12.300
431 AC	15.000
430 AC	14.500
429 AC	14.000
428 AC	16.100
427 AC	16.400
426 AC	16.500

Considere que não será possível contratar mais do que 13.000 reservistas em um único ano. Qual seria a solução ?

**Exercício 25**

Um empreendedor pode aplicar seu dinheiro em 5 projetos de investimento, cujos dados são apresentados abaixo:

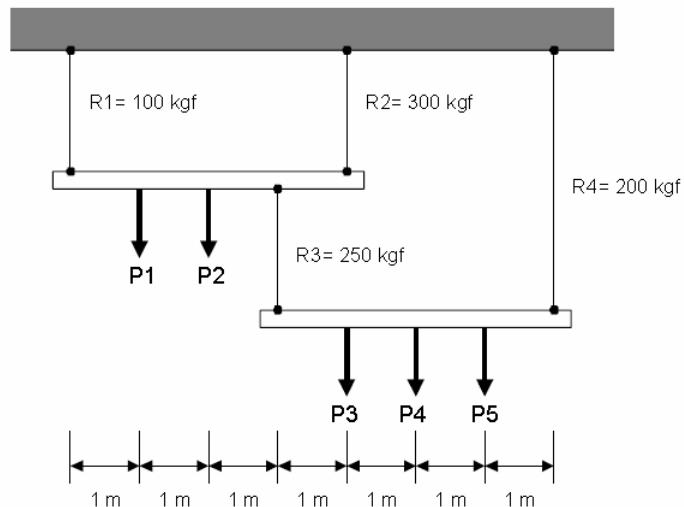
Fluxo de Caixa Anual (R\$ 1.000,00)				
Projeto	0	1	2	3
I	(100,00)		170,00	
II	(150,00)			220,00
III		(100,00)		150,00
IV	(50,00)	80,00		
V		(70,00)		130,00

Formule um modelo que ajude o investidor a determinar os projetos que maximizam o seu capital ao final do ano 3, considerando que:

- o capital inicial disponível é de R\$ 220.000,00 e não poderá ser tomado empréstimo;
- todo capital disponível poderá ser aplicado na poupança que rende juros de 10 % a.a;
- I e V são projetos mutuamente exclusivos.

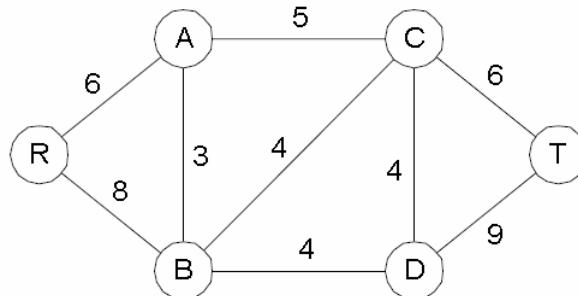
**Exercício 26**

O Eng. Pompermayer está estudando o sistema estrutural abaixo, composto por duas barras rígidas e quatro cabos. Ajude-o a determinar a máxima carga total permitida para ser carregada nos pontos de carga P1, P2, P3 e P4, considerando as resistências admissíveis dos cabos e as dimensões das barras, conforme mostra a figura abaixo. Formule o modelo de PL.

**Exercício 27**

Na figura abaixo está representado o esquema de dutos que conectam os tanques de uma refinaria (R), e as respectivas capacidades de transferência entre tanques, em milhares de

m<sup>3</sup>/hora. Dado que o gerente de produção da refinaria (R) deseja movimentar o máximo de produto para o terminal (T), por unidade de tempo, formule um modelo de PL para resolver este problema.



Sugestão: Considere que possam existir as seguintes transferências de produto: R→A, R→B, A→B, A→C, B→A, B→C, B→D, C→D, C→T, D→C e D→T.

### Exercício 28

Um construtor produz barcos por encomenda, e tem os seguintes pedidos para serem entregues no final dos próximos 6 meses:

Meses	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul
Nº de Barcos	1	2	5	3	2	1

Ele pode construir até 4 barcos em qualquer mês, e pode guardar até 3 barcos em estoque. O custo de construção dos barcos é de \$ 10.000,00 por unidade. Caso algum barco seja construído em um mês, um custo fixo adicional de \$ 4.000,00 deve ser considerado. Para manter um barco em estoque durante o período de um mês, o construtor gasta \$ 1.000,00. Qual deve ser o plano ótimo de construção, de modo a minimizar o custo total do construtor? Formule um modelo de programação dinâmica para obter a solução.

### Exercício 29

Em uma linha de montagem existem 8 tarefas que podem ser realizadas como indicado abaixo:

Tarefa	Tempo da Tarefa (min)	Tarefas Predecessoras
1	7	-
2	6	-
3	8	-
4	8	1,2
5	1	2,3
6	6	4,5
7	7	5
8	8	6,7

Considere que um trabalhador é posicionado em cada estação de trabalho e pode realizar um certo número de tarefas em sua estação. Considere, ainda, que a cada 15 minutos uma

unidade do produto deve sair da linha de produção. Formule um modelo de programação matemática que determine quantas estações de trabalho devem ser utilizadas, e quais as tarefas que deve ser alocadas a cada estação.

**Exercício 30**

Uma empresa deseja determinar o plano de investimentos para o próximo ano, e dispõe dos seguintes projetos:

Possibilidade de Investimento		Valor Presente Líquido (US\$)	Capital Requerido (US\$)
I	Construir um novo depósito	7.000.000,00	5.000.000,00
II	Recuperar o depósito antigo	4.500.000,00	3.000.000,00
III	Automatizar o depósito novo	5.500.000,00	4.200.000,00
IV	Comprar a fornecedora do produto A	12.000.000,00	9.300.000,00
V	Construir uma fábrica para produzir A	9.500.000,00	7.100.000,00
VI	Reformar o escritório da empresa	1.500.000,00	900.000,00

Entre os projetos acima apresentados, as alternativas I e II são mutuamente excludentes, assim como IV e V. O projeto III, por sua vez, depende da realização do projeto I. A empresa dispõe de US\$ 20.000.000,00 para investir nestes projetos. Formule um modelo de programação inteira binária para determinação do portfólio ótimo de investimento.

**Exercício 31**

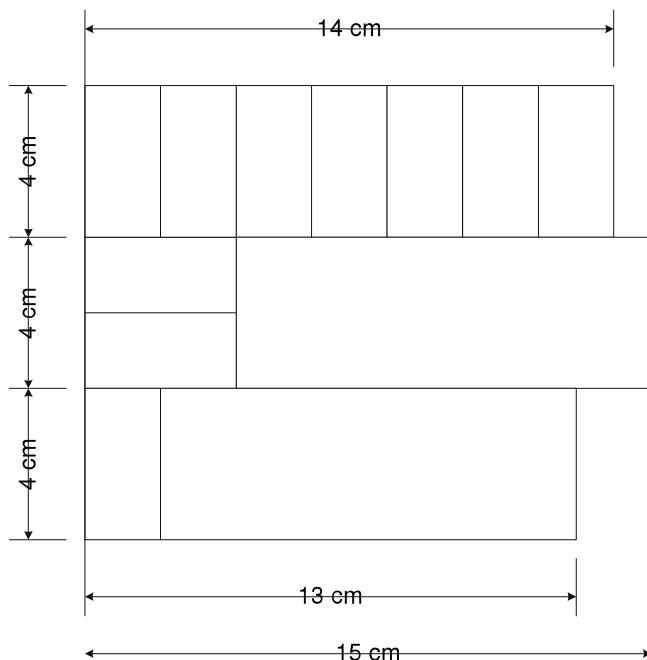
Uma fábrica trabalha com um atendimento variável em demanda durante as 24 horas do dia. As necessidades distribuem-se segundo a tabela abaixo:

Turno de Trabalho	Horário	Número Mínimo de Operários
1	08:00 às 12:00	50
2	12:00 às 16:00	60
3	16:00 às 20:00	50
4	20:00 às 00:00	40
5	00:00 às 04:00	30
6	04:00 às 08:00	20

O horário de trabalho de um operário é de oito horas quando ele entra nos turnos 1, 2, 3, 4, e 6. O operário que entra no turno 4 recebe uma gratificação de 50% sobre o salário e o que entra no turno 5 trabalha apenas quatro horas. Elaborar o modelo de programação linear inteira que minimiza o gasto com a mão-de-obra.

**Exercício 32**

Uma metalúrgica deve entregar uma partida de 2.500 placas retangulares de 2 x 4 cm (placas do tipo I) e 1.000 de 4 x 11 cm (placas do tipo II). Existe, em estoque, uma tira metálica com 15 cm de largura e 20 metros de comprimento e outra com 14 centímetros de largura e 30 metros de comprimento. As tiras com 30 metros de comprimento são cerca de 20% mais caras por quilo do que as de 20 metros, devido a problemas de transporte. São possíveis as seguintes configurações de corte ou padrões de corte nos equipamentos da empresa:



Formular o modelo que permita minimizar a perda ao corte.

**Exercício 33**

Uma empresa aérea deseja comprar aviões a jato grandes, médios e pequenos. O preço de compra é de US\$ 33,5 milhões para cada avião grande, US\$ 25,0 milhões para cada avião médio e US\$ 17,5 milhões para cada avião pequeno. O conselho diretor autorizou um comprometimento máximo de US\$ 750 milhões para esta compra. Qualquer que seja a compra realizada, espera-se que haja mercado para assegurar a utilização dos aviões em sua capacidade máxima. Se estima que os lucros anuais líquidos (descontando o custo de recuperação do capital aplicado), é de US\$ 2,1 milhões para um avião grande, US\$ 1,5 milhões para um avião médio e US\$ 1,15 milhões para um avião pequeno.

Supõe-se que a empresa poderá dispor de pilotos treinados para operar até 30 aviões novos. Se forem comprados apenas aviões pequenos, as instalações de manutenção poderiam comportar até 40 aviões, porém cada avião médio equivale a  $1\frac{1}{4}$  aviões pequenos e cada avião grande equivale a  $1\frac{3}{4}$  aviões pequenos, em termos de utilização das mesmas instalações de manutenção. Formule um modelo de programação inteira para este problema.

**Exercício 34**

Uma refinaria processa vários tipos de petróleo. Cada tipo de petróleo possui uma planilha de custos diferente, expressando condições de transporte e preços na origem. Por outro lado, cada tipo de petróleo representa uma configuração diferente de subprodutos para a gasolina. Na medida em que um certo tipo de petróleo é utilizado na produção da gasolina, é possível a programação das condições de octanagem e outros requisitos. Esses requisitos implicam na classificação do tipo da gasolina obtida.

Supondo que a refinaria trabalhe com uma linha de quatro tipos diferentes de petróleo e deseje produzir a gasolina amarela, azul e superazul, programar a mistura dos tipos de petróleo atendendo às condições que se seguem nas tabelas abaixo:

Tipo de Petróleo	Quantidade Disponível (barrel/dia)	Custo Unitário (R\$/barrel)
1	3.500	19
2	2.200	24
3	4.200	20
4	1.800	27

A composição dos produtos deve satisfazer as seguintes condições:

Tipo de Gasolina	Especificação	Preço de Venda (R\$/barrel)
Superazul	Não mais que 30% de 1	35,00
	Não menos que 40% de 2	
	Não mais que 50% de 3	
Azul	Não mais que 30% de 1	28,00
	Não menos que 10% de 2	
Amarela	Não mais que 70% de 1	22,00

### Exercício 35

A diretora de pessoal de uma empresa de aviação comercial deve decidir quantas aeromoças deverão ser treinadas e contratadas nos próximos seis meses. As necessidades, expressas pelo número de aeromoças-horas-de-vôo são as seguintes: 8.000 em janeiro; 9.000 em fevereiro; 7.000 em março; 10.000 em abril; 9.000 em maio; e 11.000 em junho.

Leva um mês de treinamento antes que uma aeromoça possa ser posta em um vôo regular; assim, uma garota deve ser contratada pelo menos 1 mês antes que ela seja realmente necessária. Cada moça treinada requer 100 horas de supervisão de uma aeromoça experiente durante o mês de treinamento, de modo que são disponíveis 100 horas a menos para o serviço de vôo por aeromoças regulares.

Cada aeromoça experiente pode trabalhar até 150 horas em um mês, e a empresa dispõe de 60 aeromoças no começo de janeiro. A política da empresa é não demitir ninguém. Porém, no fim de cada mês, aproximadamente 10% das aeromoças pedem demissão para se dedicarem a outras atividades e para se casarem. Uma aeromoça experiente custa a empresa R\$ 1.500,00 por mês, enquanto que na fase de treinamento o custo é de somente R\$ 900,00 (já incluindo os encargos legais).

### Exercício 36

Formule um modelo de programação linear para determinar a política ótima de contratação e treinamento da empresa, e utilize um pacote de programação linear para obter a solução ótima. Interprete a solução encontrada.

Uma companhia de transporte resolveu adquirir uma nova frota de caminhões para o que dispõe de R\$ 4.000.000,00. Existem no mercado três modelos de caminhões que podem ser adquiridos: A, B e C.

O caminhão A pode receber até 10 toneladas de carga, tem uma velocidade média de 56 km/h e custa R\$ 80.000,00; B tem uma capacidade de 20 toneladas e uma velocidade média de 48 km/h, seu custo é R\$ 130.000,00; C é provido de leito para o ajudante de motorista e,

por isso, embora seja semelhante a B, a sua capacidade é de 18 toneladas e seu custo é de R\$ 150.000,00.

O caminhão A é operado por uma só pessoa e, se for utilizado em três turnos, pode rodar 18 horas por dia. Os caminhões B e C exigem 2 pessoas; enquanto B pode rodar 18 horas por dia, no regime de três turnos, C pode trabalhar 21 horas por dia.

A companhia dispõe de 150 motoristas; as possibilidades de obter mais são muito reduzidas. Por outro lado, as disponibilidades de manutenção limitam a nova frota a um máximo de 30 veículos.

Pede-se que se estabeleça um modelo de programação linear destinado a determinar quantos veículos de cada tipo devem ser adquiridos, de modo que a capacidade da frota em ton.km por dia seja máxima. Resolva o problema e interprete a solução obtida.

### **Exercício 37**

Uma fábrica produz refrigeradores, freezers e fornos de micro-ondas. A demanda mensal média destes produtos é, respectivamente, de 115.000, 58.000 e 48.000 unidades, e segue um esquema de médias móveis com período 4, isto é, a demanda de quatro meses consecutivos é constante ao longo do tempo. A demanda registrada nos últimos três meses foi a seguinte:

Demanda Mensal (unidades)			
Produto	Julho	Agosto	Setembro
Refrigerador	125.000	108.000	136.000
Freezer	57.000	52.000	73.000
Micro-ondas	45.000	36.000	58.000

Para fabricar estes produtos, três recursos básicos são necessários (MDO, matéria-prima e energia), cujos consumos unitários estão apresentados no quadro abaixo:

Consumo Unitário			
Produto	MDO (horas)	Material (kg)	Energia (kWh)
Refrigerador	1,40	17,00	25,00
Freezer	1,70	21,00	23,00
Micro-ondas	1,10	10,00	17,00

A fábrica dispõe de 1.900 empregados na linha de produção, cada um dos quais trabalha 200 horas por mês. O custo de armazenamento mensal de uma unidade de cada produto é \$10, \$13 e \$8, respectivamente para refrigeradores, freezers e fornos de micro-ondas. A disponibilidade mensal de energia é de  $5,5 \times 10^6$  kWh. A empresa poderá comprar até 3.850 ton/mês de material, que poderá ser armazenado a um custo mensal de \$ 0,15 / kg. Usando o computador, determine e apresente um plano ótimo de produção-material-pessoal para os próximos 12 meses, de modo a garantir que todos os empregados entrem em férias (1 mês) durante este período. Considere que no início do mês de outubro não existe estoque de produto acabado e que o estoque de matéria-prima é de 3.200 ton.

**Exercício 38**

Para realizar negociações comerciais com diversos países, uma empresa precisa contratar profissionais qualificados e treinados em diversos idiomas (inglês, francês, espanhol, italiano, alemão, russo, chinês e japonês). Após um rigoroso processo de seleção, restaram 8 candidatos, cujos dados estão apresentados na tabela abaixo:

Candidatos	1	2	3	4	5	6	7	8
Salário (R\$)	3.500,00	4.200,00	2.900,00	3.800,00	3.300,00	4.000,00	3.400,00	3.600,00
Idiomas	inglês francês japonês	chinês russo inglês italiano	inglês alemão	francês inglês russo espanhol	espanhol alemão italiano	chinês japonês russo inglês	espanhol italiano alemão	francês espanhol chinês alemão

Formule um modelo que ajude a selecionar os candidatos que satisfaçam as necessidades comerciais da empresa, e que proporcionem à mesma o menor custo com a folha de pagamento.

**Exercício 39**

No início de cada mês, depois de receber o salário do mês anterior, o Sr. McMoneys aplica parte do que ganhou (R\$ 1.000,00) em investimentos. Excepcionalmente, no dia 1º de janeiro de 2008 ele poderá aplicar uma quantia maior (R\$ 3.000,00), que irá obter do resgate de outros investimentos e remunerações extras de final de ano. Ele dispõe de três alternativas:

- Alternativa 1: aplicação (sempre no início do mês), com prazo mensal, e rendimento de 1,00 % ao mês, já descontados os impostos;
- Alternativa 2: aplicação (sempre no início do mês), com prazo bimestral, e rendimento de 2,21 % ao bimestre, já descontados os impostos;
- Alternativa 3: aplicação (sempre no início do mês), com prazo trimestral, e rendimento de 3,64 % ao trimestre, já descontados os impostos.

Se for interessante, o Sr. McMoneys poderá utilizar um empréstimo bancário mensal com juros de 1,5 % ao mês. Sabe-se que parte do dinheiro aplicado deverá ser utilizado para pagar dívidas contraídas pelo Sr. McMoneys durante anos anteriores, conforme mostra o quadro abaixo:

Data	Pagamento de Dívidas
01/02/2008	2.500,00
01/05/2008	3.100,00
01/09/2008	1.700,00
01/11/2008	1.000,00

Determine o melhor plano de investimento ao longo do ano de 2008, e responda o que se pede:

- apresente o plano.

b) o empréstimo bancário é interessante ? Por que ?

c) quanto o Sr. McMone terá no final de 2008 ?

**Exercício 40**

O Sr. Taylor é responsável pelo planejamento operacional de uma empresa de transporte aéreo. Ajude-o a formular um plano de operação que minimize os custos. Considere os seguintes dados:

- |    |                             |               |
|----|-----------------------------|---------------|
| a) | Custo de uma decolagem      | US\$ 8.000,00 |
| b) | Custo de um pouso           | US\$ 4.000,00 |
| c) | Custo por km de vôo         | US\$ 50,00    |
| d) | Custo por hora parada       | US\$ 8.000,00 |
| e) | Tempo de um pouso/decolagem | 15 min        |
| f) | Velocidade de cruzeiro      | 850 km/h      |
| g) | Tempo embarque/desembarque  | 30 min        |

A empresa deve manter em operação os seguintes vôos diários:

Num.	Vôo	Saída		Chegada	
		Local	Hora	Local	Hora
00	125	POA	09:00	SAO	12:00
01	127	SAO	09:30	FLN	10:40
02	130	FLN	10:00	POA	10:45
03	132	CWB	10:15	FOZ	10:45
04	135	RIO	12:00	POA	17:30
05	140	FOZ	12:30	SAO	15:30
06	142	SAO	14:00	FOZ	17:00
07	148	POA	16:30	CWB	18:00
08	157	FOZ	16:30	RIO	19:15
09	162	RIO	18:00	CWB	19:30
10	170	SAO	17:20	POA	20:30
11	172	FLN	15:10	SAO	18:25
12	176	CWB	10:15	FOZ	12:10
13	180	RIO	13:20	CWB	17:20
14	182	FOZ	16:00	RIO	19:00

Considere, ainda, as seguintes coordenadas dos aeroportos, expressos em km:

Aeroporto	Coordenada X	Coordenada Y
POA	2.570	670
FLN	2.750	930
CWB	2.700	1.170
FOZ	2.170	1.180
SAO	2.650	1.370
RIO	3.120	1.420

**Exercício 41**

A Cia. Souza Cruz S.A. processa fumo para produção de cigarros e para exportação. Para tanto dispõe de quatro fábricas, cujas capacidades e custos de produção e estocagem estão apresentados no quadro 1.

Fábrica	Processamento de Fumo		Estoque Fumo Bruto		Estoque Fumo Processado	
	Capacidade (ton.mês)	Cutos (R\$/ton)	Capacidade (ton.mês)	Cutos (R\$/ton)	Capacidade (ton.mês)	Cutos (R\$/ton)
Blumenau	240.000	10,30	1.500.000	8,10	1.000.000	5,30
Rio Negro	180.000	12,40	750.000	7,20	800.000	4,10
Cruz Alta	160.000	9,70	1.250.000	7,60	1.000.000	4,60
Uberaba	170.000	10,50	1.000.000	5,40	900.000	3,80

Quadro 1 - Fábricas, capacidades de processamento e estocagem e custos

O fumo bruto é obtido junto às colônias de produtores de fumo em quatro estados brasileiros, de acordo com o cronograma de colheita apresentado no quadro 2.

Produção de Fumo Bruto (1.000 ton)				
Mês	RS	SC	PR	MS
Jan	230	120	210	0
Fev	150	0	110	0
Mar	0	0	0	0
Abr	0	0	0	0
Mai	0	0	0	100
Jun	0	110	0	110
Jul	140	250	130	150
Ago	180	360	240	250
Set	260	380	370	260
Out	280	370	400	250
Nov	380	350	420	200
Dez	350	230	380	120

Quadro 2 - Cronograma de colheita, por estado

A empresa como um todo, estima que as vendas, tanto para produção de cigarros quanto para exportação, atinja os valores apresentados no quadro 3.

# **Universidade Federal de Santa Catarina**

Centro Tecnológico

Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas

Pesquisa Operacional

Pag. 21

Mês	Previsão de Vendas (ton)
Jan	300.000
Fev	500.000
Mar	700.000
Abr	900.000
Mai	800.000
Jun	800.000
Jul	700.000
Ago	600.000
Set	600.000
Out	500.000
Nov	500.000
Dez	400.000

Quadro 3 - Previsão de venda mensal de fumo processado

Para movimentar o fumo bruto a empresa utiliza diversos modos de transporte, que após avaliados determinaram os custos por tonelada transportada apresentados no quadro 4.

		Custo de Transportes (\$/ton)			
De \ Para	Cruz Alta	Blumenau	Rio Negro	Uberaba	
RS	7,20	10,80	12,00	26,00	
SC	6,80	3,60	4,00	25,20	
PR	14,40	10,80	9,20	21,60	
MS	23,40	16,40	14,80	10,80	
Cruz Alta	-	8,40	10,00	22,80	
Blumenau	8,40	-	7,20	18,40	
Rio Negro	10,00	7,20	-	17,20	
Uberaba	22,80	18,40	17,20	-	

Quadro 4 - Custo de transporte de fumo entre regiões produtoras e fábricas

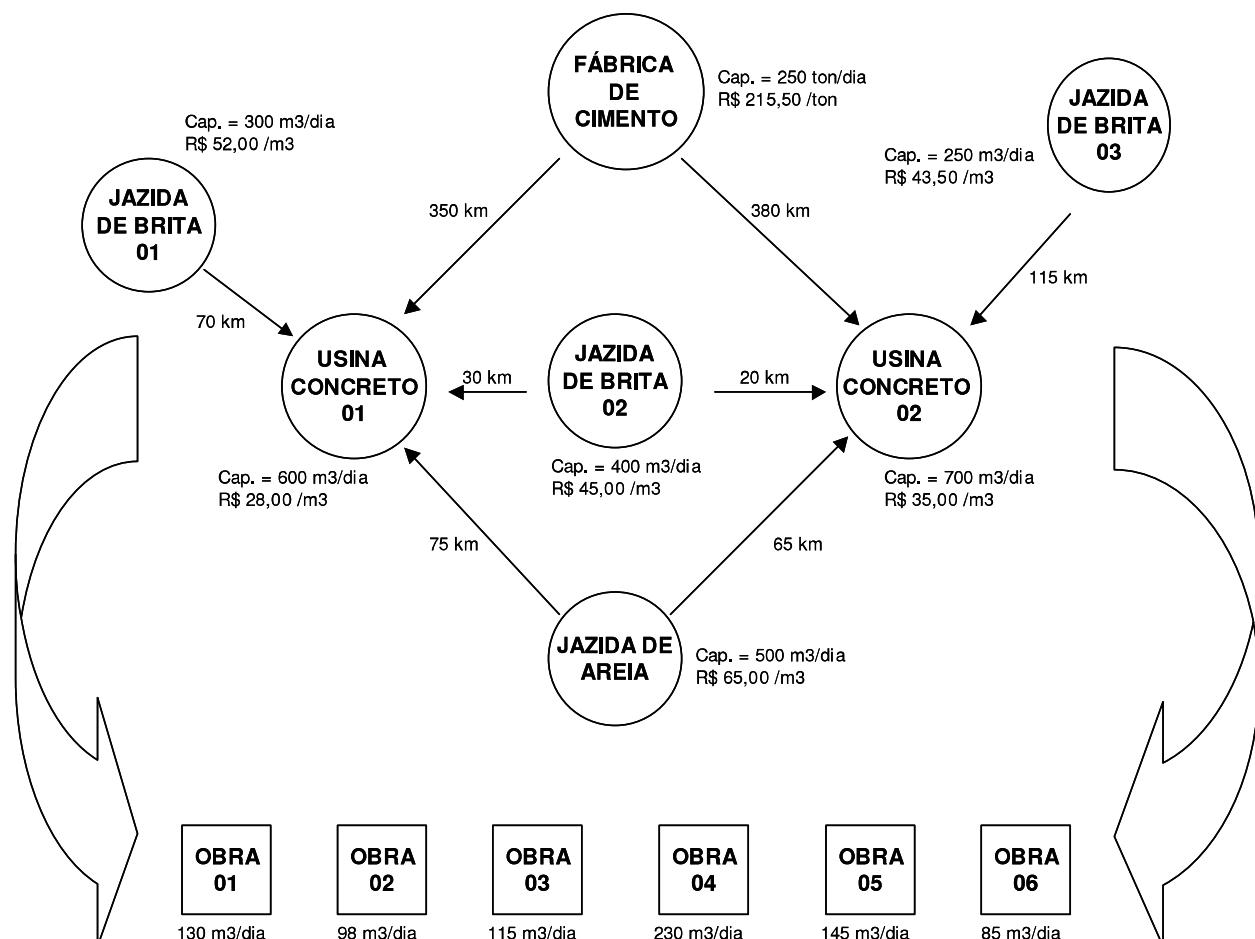
O fumo bruto, em geral, percorre o caminho das regiões produtoras para as fábricas, podendo, entretanto ser movimentado entre fábricas, se houver necessidade ou se os custos assim o determinar. As vendas poderão ser atendidas a partir de qualquer uma das fábricas, mas se houver necessidade, por razões de capacidade de estocamento e/ou por razões de custo, o fumo processado poderá ser movimentado de uma fábrica para outra. O custo do fumo bruto nas regiões de produção são cotados por uma tabela única da empresa, e por questões de incentivo ao plantio, a empresa mantém uma política de comprar toda a produção, mesmo que ela não seja utilizada no processamento das fábricas. Assim, as quantidades excedentes de produção, apesar de serem compradas, são destruídas na própria origem.

Em relação a este problema pede-se:

- Formule um modelo de programação linear e resolva-o usando o computador
- Analise o resultado obtido e faça um relatório para a direção da empresa propondo melhorias com vistas a redução de custos.

### Exercício 42

Uma construtora está planejando a produção concreto para seis obras distintas, cujas necessidades e possibilidade de abastecimento encontram-se no esquema abaixo.



Os custos unitários de transporte da matéria prima e do concreto são os seguintes:

Cimento: .....	R\$ 0,45 ton.km
Brita e Areia: .....	R\$ 0,75 m <sup>3</sup> .km
Concreto: .....	R\$ 2,86 m <sup>3</sup> .km

Considerando que a composição do concreto é de:

Cimento: .....	300 kg
Brita: .....	0,705 m <sup>3</sup>
Areia: .....	0,350 m <sup>3</sup>

e que as distâncias, em km, entre as usinas de concreto e as obra constam do quadro abaixo, determine a forma como deverão ser atendidas as necessidades diárias da empresa nos vários projetos em execução.

	Obra 01	Obra 02	Obra 03	Obra 04	Obra 05	Obra 06
Usina 01	12	45	36	28	5	27
Usina 02	18	23	27	23	10	33

### Exercício 43

Uma empresa produtora de cimento dispõe de duas unidades de processamento, P1 e P2, com capacidades de produção instalada de 15.000 ton./mês e 10.000 ton./mês, respectivamente. O custo de processamento, em cada uma destas unidades, é de CR\$ 200,00 por tonelada e CR\$ 180,00 por tonelada, respectivamente.

O calcáreo, a principal matéria-prima utilizada na fabricação do cimento, pode ser extraído de duas jazidas, JA1 e JA2, cuja produção mensal é de 8.000 toneladas cada uma. Para a produção do cimento a empresa compra a cinza de uma usina siderúrgica, e a utiliza numa proporção de 1:2 com o calcáreo.

Dois grandes mercados consumidores concorrem para o consumo da produção desta empresa, conforme se apresenta abaixo:

Consumo Mensal de Cimento (ton)	
Mercado 01	8.000
Mercado 02	6.000

Além dos custos de produção já citados, a empresa deve assumir os custos de transporte da matéria-prima e do produto final, apresentados abaixo:

Custo Unitário de Transporte (R\$/ton.km)	
Calcáreo	0,20
Cinza Siderúrgica	0,30
Cimento	0,15

No esquema abaixo, encontra-se a situação de cada um dos locais citados, bem como as distâncias entre eles. Formule o problema de planejamento de produção de cimento da empresa em questão.

