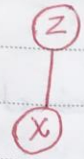
جلسه‌ی دوازدهم:



$z=0$ component 1

$z=1$ component 2

$$P(z=1)=\lambda$$
$$P(z=0)=1-\lambda \Rightarrow P(z)=\lambda^{z}(1-\lambda)^{1-z}$$

از طرفی داریم:

$$P(x|z=1)=\mathcal{N}(x_i,\mu_1,\sigma_1^2)=F_1(x)$$
$$P(x|z=0)=\mathcal{N}(x_i,\mu_2,\sigma_2^2)=F_2(x)$$
$$\Rightarrow P(x|z)=F_1^{z}F_2^{1-z}$$

$$P(x,z)=P(z)P(x|z)=\lambda^{z}(1-\lambda)^{1-z}F_1^{z}F_2^{1-z}$$

دیتا کامل داریم:

می‌دانیم دیتا به صورت $\{(x[1],z[1]),\dots,(x[n],z[n])\}$ است پس پارامتری که به دنبال آن هستیم:

$$\theta=(\lambda,\mu_1,\sigma_1,\mu_2,\sigma_2)$$

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{N}P(x[i],z[i])$$

$$\ell(\theta:x,z)=\sum z[i]\log\lambda+\sum(1-z[i])\log(1-\lambda)+\sum z[i]\log f_1(x[i],\mu_1,\sigma_1)+\sum(1-z[i])\log f_2(x[i],\mu_2,\sigma_2)$$

حال برای بدست آوردن پارامترها مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial\ell}{\partial\lambda}=\frac{\sum z[i]}{\lambda}-\frac{\sum(1-z[i])}{1-\lambda}\Rightarrow\hat{\lambda}_{ML}=\frac{\sum z[i]}{N},\quad\hat{\mu}_{1,ML}=\frac{\sum z[i]x[i]}{\sum z[i]}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

در همین ترتیب برای ماتریس واریانس‌ها انجام میدهیم.

حال فرض می‌کنیم که z مشاهده نشده و به کمک روش EM تخمین پارامترها را انجام میدهیم:

کم ابتدا آماره بسنده را برای مشاهدات محاسبه میکنیم:

$(1, z[i], z[i]x[i])$

$(N, \sum_{i=1}^{n} z[i], \sum_{i=1}^{n} z[i]x[i])$

$\Downarrow$

$(N, E(\sum^{n} z[i]), E(\sum^{n} z[i]x[i]))$

$(N, \sum E(z[i]), \sum E[z_i]x[i])$

پس از این مرحله EM بصورت زیر مرحله بندی میشود:

1) initialize θ_0

iterate:

E-Step: $w_i = E(z[i]) = P(z[i]=1 \mid x[i])$

M-Step: $\lambda_{t+1} = \frac{\sum E(z[i])}{N}$; $\mu_{i,t+1} = \frac{\sum w_i x[i]}{\sum w_i}$

$w_i = E(z[i]) = \sum_{z_i \in \{0,1\}} z[i] P(z[i] \mid x[i])$

$= 1 \times P(z[i]=1 \mid x[i], \theta_t) + 0 \times P(z[i]=0 \mid x[i], \theta_t)$

$= P(z[i] \mid x[i], \theta_t) = \frac{P(x[i] \mid z[i]) P(z[i])}{P(x[i])}$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$= \frac{\lambda f_1(x[i])}{\lambda f_1(x[i]) + (1-\lambda) f_2(x[i])}$$

• expected complete data likelihood :

E-Step $E(\ell(\theta : X, Z)) = \sum E(z[i]) \log \lambda + \sum (1 - E[z[i]]) \log(1-\lambda) + \dots$

$$\frac{\partial E(\ell)}{\partial \lambda} = \sum E(z[i]) \times \frac{1}{\lambda} - \sum (1 - E[z[i]]) \times \frac{1}{1-\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\sum E(z[i])}{N}$$