回帰分析I

11. 仮説検定の考え方
母集団の平均に関する検定

イントロダクション

- モデルのパラメータの推定の次にすることが「仮説検定」です。
- 仮説検定とは、「母集団に関する特定の仮説について、データを使いその仮説が正しいか判断すること」です。
- 回帰分析の文脈では、「係数β_jがゼロ」という仮説の検定がもっともよく行われます。

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     420
-------------+------------------------------           F(  1,   418) =   22.56
       Model |  7789.39296     1  7789.39296           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  144312.057   418  345.244156           R-squared     =  0.0512
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.0489
       Total |   152101.45   419  363.010621           Root MSE      =  18.581

------------------------------------------------------------------------------
       score |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
     stratio |  -2.279063   .4798082    -4.75   0.000      -3.2222   -1.335925
       _cons |   698.9222   9.467187    73.83   0.000     680.3129    717.5314
------------------------------------------------------------------------------
```

- ここですね。これらは、「係数β_jがゼロ」という仮説を検定するための統計量です。

- データを使ってモデルを推定したところ、β_jの推定値がゼロじゃなかった、としましょう。
- これは$\beta_j \neq 0$を意味するでしょうか？必ずしもそうではありませんよね。
- シミュレーションで見たように、$\beta_j = 0$であったとしても、β_jの推定値がゼロじゃないことは起こります。
- それでは、
  - β_jの推定値が（推定量の散らばりを考慮に入れた上で）相当に大きく、
  - そんなことは$\beta_j = 0$という仮説の下では確率的にほとんど起こらないこと、

だったらどうでしょうか？

- 「なんか変だぞ」、そもそもの$\beta_j = 0$という仮説が正しくないからこんなことになってるのでは、、、
- これが仮説検定の考え方です。

仮説検定へ向けて

- 回帰分析における仮説検定を理解するためには以下の知識が必要となります。

1. よく用いられる確率分布
   - 正規分布、カイ二乗分布、t分布、F分布など。
   - ここでは、最もよく用いられる正規分布について説明します。
   - その他の分布については、使うときに適宜説明します。
2. 標本平均の分布
   - 様々なタイプの仮説検定があります。
   - 仮説検定の仕組みを理解するために、ここでは基本的な仮説検定である「母集団の平均に関する検定」を取り上げます。
   - そのためには標本平均の分布を知る必要があります。

仮説検定へ向けて

3. 中心極限定理

- 標本平均の分布を導出するために使います。
- 最小二乗推定量の分布の導出にも使う重要な定理です。

4. 仮説検定の考え方・やり方（もちろんですね、、、）

- で、最後にいくつか例題を解いてみましょう。

正規分布

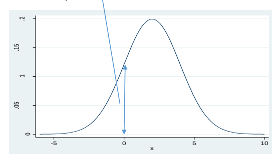
- 確率密度関数が次の持つとき、その分布を「**正規分布**」と言います。

この高さが確率密度。この高さは左の式に$\mu = 2, \sigma^2 = 4, x = 0$を入れた値。

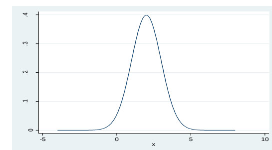
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

この分布に従う確率変数Xの平均はμ、分散はσ^2です：$E(X) = \mu, VAR(X) = \sigma^2$

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$と書いてあれば、それは確率変数Xは正規分布に従っていて、平均μ、分散σ^2であることを表します。



N（2,4）

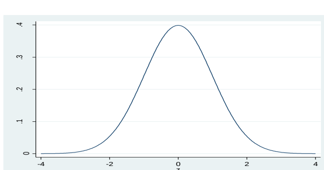


N（2,1）

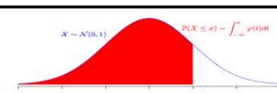
標準正規分布

- $Z \sim N(0, 1^2)$、すなわち平均値が0で標準偏差が1（だから分散も1）の正規分布を「**標準正規分布**」と言います。

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$



- 標準正規確率変数Zがある定数cより小さい値を取る確率、すなわち$Pr(Z \le c)$を$\Phi(c)$と表すことがあります。$\Phi(c) = Pr(Z \le c)$です。

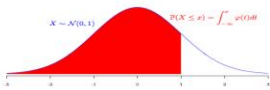


標準正規確率変数Xがxより小さくなる確率

$\Pr(X \le 0.2)$ は、

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

引用元：https://freakonometrics.hypotheses.org/9404

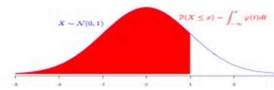


標準正規確率変数Xが
xより小さくなる確率

$\Pr(X \le 0.21)$ は、

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

引用元：https://freakonometrics.hypotheses.org/9404

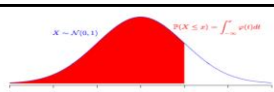


標準正規確率変数Xが
xより小さくなる確率

$\Pr(X \le 0.29)$ は、

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

引用元：https://freakonometrics.hypotheses.org/9404

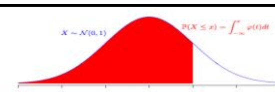


標準正規確率変数Xが
xより小さくなる確率

$\Pr(X \le 2.9)$ は、

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

引用元：https://freakonometrics.hypotheses.org/9404

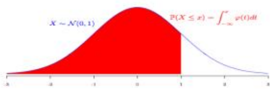


標準正規確率変数Xが
xより小さくなる確率

$\Pr(X \le 2.91)$ は、

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

引用元：https://freakonometrics.hypotheses.org/9404



標準正規確率変数Xがxより小さくなる確率

$\Pr(X \leq 2.95)$ は、

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

引用元：https://freakonometrics.hypotheses.org/9404

標準化（重要です）

確率変数Xの分布が正規分布$N(\mu, \sigma^2)$であるとき、確率変数

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

の分布は標準正規分布$N(0, 1^2)$になります。

- $E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X) - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\mu - \frac{\mu}{\sigma} = 0$
- $VAR\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = VAR\left(\frac{1}{\sigma}X\right) = \frac{1}{\sigma^2}VAR(X) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1$

- 一般的な平均・分散をもつ正規分布の場合、確率を求める際に、この標準化を使います。

例：$X \sim N(1,4)$ このとき$Pr(X \leq 2)$は？

- 標準化により、$\frac{X-1}{2} \sim N(0,1)$であることが分かる。
- $Pr(X \leq 2) = Pr(X - 1 \leq 2 - 1) = Pr\left(\frac{X-1}{2} \leq \frac{2-1}{2}\right) = Pr(Z \leq 0.5) = \Phi(0.5)$
- だから、$Pr(X \leq 2)$は標準正規確率変数が0.5より小さい値を取る確率と等しい。
- 従って、標準正規分布のテーブルから、この確率は0.6915。

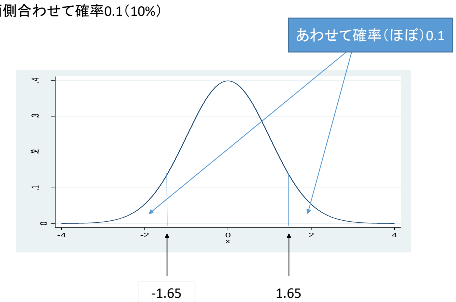
Q1: $X \sim N(1,4)$ このとき$Pr(X \leq 3)$は？

Q2: $X \sim N(3,9)$ このとき$Pr(X > 0)$は？

Q3: $X \sim N(50,25)$ このとき$Pr(40 \leq X \leq 52)$は？

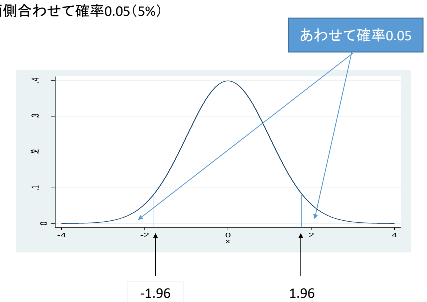
仮説検定でよく使われる標準正規分布の確率

- 両側合わせて確率0.1（10%）



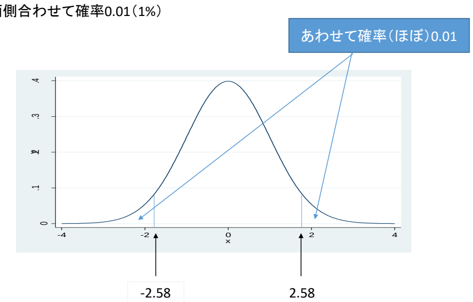
仮説検定でよく使われる標準正規分布の確率

- 両側合わせて確率0.05（5%）



仮説検定でよく使われる標準正規分布の確率

- 両側合わせて確率0.01（1%）



正規分布に関して知っておくと便利なこと

- 確率変数Xの分布が正規分布$N(\mu,\sigma^2)$に従うとします。
- $Pr\left(-a \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le a\right) = 0.95$, この$a$ 何になるでしょうか？
- $\frac{X-\mu}{\sigma}$は標準化により標準正規確率変数。
- なので18ページの事実から$a = 1.96$です。
- $Pr\left(-1.96 \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le 1.96\right) = 0.95$ これを書き換えると
- $Pr(\mu - 1.96\sigma \le X \le \mu + 1.96\sigma) = 0.95$ですね。
- 同様にして、$Pr(\mu - 1.65\sigma \le X \le \mu + 1.65\sigma) = 0.90$、$Pr(\mu - 2.58\sigma \le$

- まとめると、

確率変数Xの分布が正規分布$N(\mu, \sigma^2)$のとき、

$(\mu - 1.65\sigma, \mu + 1.65\sigma\ )$の範囲に確率90%

$(\mu - 1.96\sigma, \mu + 1.96\sigma\ )$の範囲に確率95%

$(\mu - 2.58\sigma, \mu + 2.58\sigma\ )$の範囲に確率99%

で入ります。

標本平均の分布

- これから標本平均（推定量の）の分布について考えます。
- 母集団において、$E(Y) = \mu_Y, VAR(Y) = \sigma_Y^2$、であるとします。
- $Y_1, \dots, Y_N$を母集団からのランダムサンプルとします。
  - 注： これらは実現値ではありません、確率変数です。
- 従って、平均と分散は全ての$i = 1, \dots, N$について同一です。
  - すなわち$E(Y_i) = \mu_Y, VAR(Y_i) = \sigma_Y^2, i = 1, \dots, N$
- 標本平均（推定量）$\bar{Y}$はもちろん

$$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} Y_i$$

標本平均の分布

ですが、、、、この推定量はどんな分布を持つでしょうか？

- まず平均ですが、

$$E(\bar{Y}) = E\left(\frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} Y_i\right) = \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} E(Y_i) = \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} \mu_Y = \mu_Y$$

- つまり$E(\bar{Y}) = \mu_Y$です。
  - 標本平均（推定量）、不偏性を持ちますね。
- 次に分散です。講義ノート6、7で扱った分散の特性を使います。

確率変数XとYについて以下が成り立つ。

- 講義ノート6：いかなる定数aについて、$VAR(aX) = a^2 VAR(X)$
- 講義ノート7：もしXとYが独立なら、$VAR(X+Y) = VAR(X) + VAR(Y)$

$$VAR(\bar{Y}) = VAR\left(\frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} Y_i\right) = VAR\left(\frac{1}{N}Y_1 + \cdots + \frac{1}{N}Y_N\right)$$

- ランダムサンプルなので、$i \neq j$のときY_iとY_jは独立。従って、

$$VAR(\bar{Y}) = \frac{1}{N^2}VAR(Y_1) + \cdots + \frac{1}{N^2}VAR(Y_N) = \frac{1}{N^2}(\sigma_Y^2 + \cdots + \sigma_Y^2) = \frac{\sigma_Y^2}{N}$$

- $\bar{Y}$の標準偏差$SD(\bar{Y})$はこれに平方根を取ったものです。
- まとめ（重要）： 母集団において$E(Y) = \mu_Y, VAR(Y) = \sigma_Y^2$。$Y_1, \dots, Y_N$を母集団からのランダムサンプルとする。このとき標本平均（推定量）$\bar{Y}$について、

$$E(\bar{Y}) = \mu_Y$$
$$VAR(\bar{Y}) = \sigma_{\bar{Y}}^2 = \frac{\sigma_Y^2}{N}$$ 注目
$$SD(\bar{Y}) = \sigma_{\bar{Y}} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{N}}$$

標本平均（推定量）の分布の求め方：2つのアプローチ

- 前ページの結果は結構パワフルです、というのもY_iの分布がどのようなものであっても成り立つので。
  - 確認してみてください、母集団において、$E(Y) = \mu_Y, VAR(Y) = \sigma_Y^2$、としか言ってません。
  - Y_iが正規分布している、、、、なんてことは前ページの結果には必要ないわけです。
- 標本平均推定量の平均と分散は分りましたが、「分布」はまだ分かっていません。
  - 平均と分散は「分布」の特徴を表す指標に過ぎません。
  - 平均と分散が同じで分布が違う形を持つことはあり得ます。
  - そして、仮説検定のためには、分布が分かっている必要があります。

25

- $\bar{Y}$の分布を求める際、二つのアプローチがあります。
  - ここでの話は最小二乗推定量$\hat{\beta}_j$にも当てはまります。
- 一つは「正確な」アプローチです。
- 「正確な」アプローチとは、N（サンプルサイズ）が何であったとしても正確に成り立つ公式を求めることです。
  - これは「有限標本の分布（finite sample distribution）」と呼ばれます。
- 例えば、もしYが正規分布に従うのであれば、$\bar{Y}$の正確な分布は平均μ_Y、分散$\frac{\sigma_Y^2}{N}$の正規分布になります。
  - 最小二乗推定量$\hat{\beta}_j$の場合は、もし誤差項Uが正規分布に従うのであれば、$\hat{\beta}_j$の正確な分布を導出することができます。
- しかし、もしYが正規分布に従わない場合、$\bar{Y}$の正確な分布は一般的にはとても複雑なものになります。

26

- もう一つのアプローチは、「近似的な」アプローチです。
- このアプローチは、サンプルサイズが大きい場合に適用できる分布の近似を利用します。
  - 近似された分布は「漸近分布（asymptotic distribution）」と呼ばれます。
  - $N \to \infty$の極限で、この近似は完全に正しいものになります。
  - ただし、この近似はN＝30程度でも、かなり正確なものになり得ます。
- $\bar{Y}$の漸近分布はシンプルで、かつYの分布に依存しません。
- 一方、先述の通り、$\bar{Y}$の正確な分布はYの分布に依存し複雑になります。
- 同じことが、最小二乗推定量$\hat{\beta}_j$にも当てはまります。
- 従って、実際の回帰分析（ベイズ推定法によるものを除く）では、「近似的な」アプローチに基づき分布を求め、仮説検定することがほとんどです。
- そのため、ここでも「近似的な」アプローチを使うことにします。

27

中心極限定理

- 「近似的」なアプローチで大きな役割を果たすのが、中心極限定理です。
- これは、N（サンプルサイズ）が大きければ、$\bar{Y}$の分布は正規分布でうまく近似できる、というものです。つまり、

N（サンプルサイズ）が大きければ、$\bar{Y}$の分布は$N(\mu_Y, \sigma_{\bar{Y}}^2)$で近似できる

$= \frac{\sigma_Y^2}{N}$

ということです。

- そして、これはYの分布が何であれ成り立ちます（重要）。

中心極限定理：$Y_1, \dots, Y_N$は母集団からのランダムサンプルで、$E(Y_i) = \mu_Y, VAR(Y_i) = \sigma_Y^2, i = 1, \dots, N$とする。このとき$N \to \infty$につれて、$(\bar{Y} - \mu_Y)/\sigma_{\bar{Y}}^2$は、標準正規分布に近似的に従う。

28

中心極限定理：シミュレーション

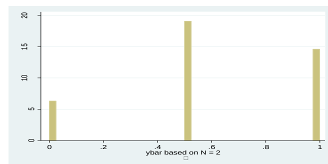
- 中心極限定理を体感してみましょう。やることは以下の通りです。
- N人いるとします。
- それぞれの人に、乱数を発生させ、Yを作ってあげます。Yがどのような分布に従うかはあなたが決めます。
  - ➢ $y_1, \dots, y_N$
- 標本平均を計算します　$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$
- これをM回繰り返します　➔　$\bar{y}^{(1)}, \bar{y}^{(2)}, \dots, \bar{y}^{(M)}$が得られます。
- これが、サンプルサイズがNの時の標本平均（推定量）$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$の分布になります。
- この分布は、中心極限定理によれば、サンプルサイズNが十分に大きければ近似的に正規分布に従う、はずです。

Yがベルヌーイ確率変数のとき

- $Y = \begin{cases} 1\ with\ prob\ 0.6 \\ 0\ with\ prob\ 0.4 \end{cases}$　　この確率変数の平均は0.6、分散は0.24
- 標本平均（推定量）$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$の分布はどうなるでしょうか。$\bar{Y} \sim N(0.6, \frac{0.24}{N})$になる？
- $N = 2$のとき。

r(meanforonesample)

	Percentiles	Smallest		
1%	0	0		
5%	0	0		
10%	0	0	Obs	10000
25%	.5	0	Sum of Wgt.	10000
50%	.5		Mean	.6035
		Largest	Std. Dev.	.346482
75%	1	1		
90%	1	1	Variance	.1200498
95%	1	1	Skewness	-.3006922
99%	1	1	Kurtosis	2.084435



Skewness (歪度：わいど)
非対称性を示す指標
正規分布なら＝0

Kurtosis (尖度：せんど)
頻度分布のとがりを示す指標
正規分布なら＝3

そもそも2人しかいないので$\bar{Y}$の取りうる値は三通りしかありません。

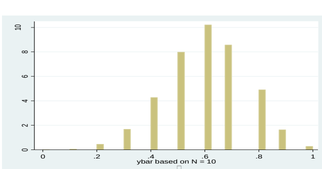
正規分布にはほど遠いですね

Yがベルヌーイ確率変数のとき

- $Y = \begin{cases} 1\ with\ prob\ 0.6 \\ 0\ with\ prob\ 0.4 \end{cases}$　　この確率変数の平均は0.6、分散は0.24
- 標本平均（推定量）$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$の分布はどうなるでしょうか。$\bar{Y} \sim N(0.6, \frac{0.24}{N})$になる？
- $N = 10$のとき。

r(meanforonesample)

	Percentiles	Smallest		
1%	.2	0		
5%	.3	0		
10%	.4	0	Obs	10000
25%	.5	.1	Sum of Wgt.	10000
50%	.6		Mean	.60174
		Largest	Std. Dev.	.1550206
75%	.7	1		
90%	.8	1	Variance	.0240314
95%	.8	1	Skewness	-.1382187
99%	.9	1	Kurtosis	2.872413



Skewness (歪度：わいど)
非対称性を示す指標
正規分布なら＝0

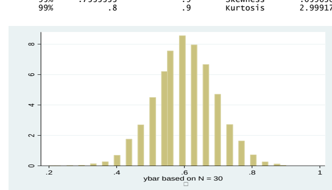
Kurtosis (尖度：せんど)
頻度分布のとがりを示す指標
正規分布なら＝3

Yがベルヌーイ確率変数のとき

- $Y = \begin{cases} 1\ with\ prob\ 0.6 \\ 0\ with\ prob\ 0.4 \end{cases}$　　この確率変数の平均は0.6、分散は0.24
- 標本平均（推定量）$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$の分布はどうなるでしょうか。$\bar{Y} \sim N(0.6, \frac{0.24}{N})$になる？
- $N = 30$のとき。

r(meanforonesample)

	Percentiles	Smallest		
1%	.4	.2		
5%	.4333333	.2333333		
10%	.5	.2666667	Obs	10000
25%	.5333334	.2666667	Sum of Wgt.	10000
50%	.6		Mean	.60064
		Largest	Std. Dev.	.0903989
75%	.6666667	.9		
90%	.7	.9	Variance	.008172
95%	.7333333	.9	Skewness	-.0596303
99%	.8	.9	Kurtosis	2.999174



Skewness (歪度：わいど)
非対称性を示す指標
正規分布なら＝0

Kurtosis (尖度：せんど)
頻度分布のとがりを示す指標
正規分布なら＝3

それなりに正規分布っぽいですね。

Yがベルヌーイ確率変数のとき

- $Y = \begin{cases} 1\ with\ prob\ 0.6 \\ 0\ with\ prob\ 0.4 \end{cases}$

この確率変数の平均は0.6、分散は0.24

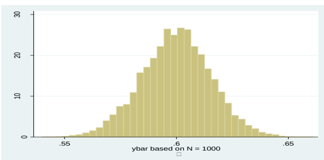
- 標本平均(推定量)$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$の分布はどうなるでしょうか。$\bar{Y}\sim N(0.6, \frac{0.24}{N})$になる？
- $N = 1000$のとき。

r(meanforonesample)

	Percentiles	Smallest		
1%	.563	.54		
5%	.574	.54		
10%	.58	.546	Obs	10000
25%	.59	.546	Sum of Wgt.	10000
50%	.6		Mean	.5999586
		Largest	Std. Dev.	.0154573
75%	.61	.656		
90%	.62	.656	Variance	.0002389
95%	.625	.659	Skewness	-.0368915
99%	.636	.661	Kurtosis	3.097472

Skewness (歪度：わいど)
非対称性を示す指標
正規分布なら＝0

Kurtosis (尖度：せんど)
頻度分布のとがりを示す指標
正規分布なら＝3



正規分布って言っていいですね、
これなら。

Yが一様確率変数のとき

- $Y \sim Uniform(0,1)$

この確率変数の平均は0.5、分散は0.083

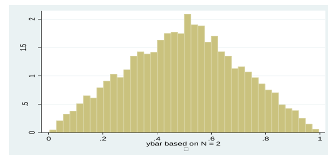
- 標本平均(推定量)$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$の分布はどうなるでしょうか。$\bar{Y}\sim N(0.5, \frac{0.083}{N})$になる？
- $N = 2$のとき。

r(meanforonesample)

	Percentiles	Smallest		
1%	.0673915	.0046999		
5%	.1495108	.0069898		
10%	.2180664	.0136205	Obs	10000
25%	.3490498	.0140835	Sum of Wgt.	10000
50%	.5027335		Mean	.497947
		Largest	Std. Dev.	.205171
75%	.6435265	.9931341		
90%	.7749138	.9942048	Variance	.0420951
95%	.8381986	.9949074	Skewness	-.0181273
99%	.9259722	.9967824	Kurtosis	2.391712

Skewness (歪度：わいど)
非対称性を示す指標
正規分布なら＝0

Kurtosis (尖度：せんど)
頻度分布のとがりを示す指標
正規分布なら＝3



おにぎり、ですね。

Yが一様確率変数のとき

- $Y \sim Uniform(0,1)$

この確率変数の平均は0.5、分散は0.083

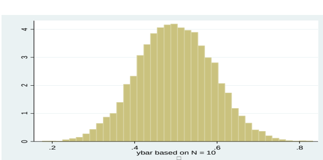
- 標本平均(推定量)$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$の分布はどうなるでしょうか。$\bar{Y}\sim N(0.5, \frac{0.083}{N})$になる？
- $N = 10$のとき。

r(meanforonesample)

	Percentiles	Smallest		
1%	.2911631	.1763874		
5%	.3491808	.1898267		
10%	.3830528	.197928	Obs	10000
25%	.4361452	.2051203	Sum of Wgt.	10000
50%	.4978519		Mean	.4988239
		Largest	Std. Dev.	.0909521
75%	.5612162	.8128575		
90%	.6157241	.8163974	Variance	.0082723
95%	.6487022	.8237417	Skewness	.0283371
99%	.7103956	.8322313	Kurtosis	2.893498

Skewness (歪度：わいど)
非対称性を示す指標
正規分布なら＝0

Kurtosis (尖度：せんど)
頻度分布のとがりを示す指標
正規分布なら＝3



とんがり方がもう少し、ですね。

Yが一様確率変数のとき

- $Y \sim Uniform(0,1)$

この確率変数の平均は0.5、分散は0.083

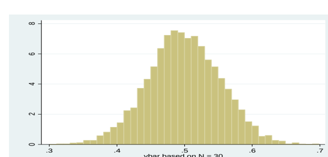
- 標本平均(推定量)$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$の分布はどうなるでしょうか。$\bar{Y}\sim N(0.5, \frac{0.083}{N})$になる？
- $N = 30$のとき。

r(meanforonesample)

	Percentiles	Smallest		
1%	.3739391	.3008736		
5%	.4120126	.3124042		
10%	.4323723	.3163837	Obs	10000
25%	.4641887	.3189566	Sum of Wgt.	10000
50%	.4987725		Mean	.4995835
		Largest	Std. Dev.	.0533809
75%	.5358274	.6886742		
90%	.5690884	.6918104	Variance	.0028495
95%	.5873972	.6947713	Skewness	-.0045514
99%	.623161	.6990562	Kurtosis	3.001392

Skewness (歪度：わいど)
非対称性を示す指標
正規分布なら＝0

Kurtosis (尖度：せんど)
頻度分布のとがりを示す指標
正規分布なら＝3



これなら正規分布と言っていいですね。

Yが一様確率変数のとき

- $Y \sim Uniform(0,1)$

この確率変数の平均は0.5、分散は0.083

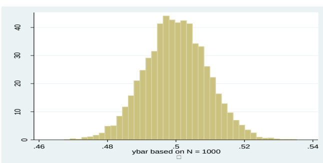
- 標本平均（推定量）$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$の分布はどうなるでしょうか。$\bar{Y} \sim N(0.5, \frac{0.083}{N})$になる？
- $N = 1000$のとき。

```
                   r(meanforonesample)
-------------------------------------------------------------
      Percentiles      Smallest
 1%     .4787809       .4673697
 5%     .4850929       .4694439
10%     .4884621       .4695807       Obs               10000
25%     .4940013       .4696155       Sum of Wgt.       10000

50%     .5000028                      Mean            .5000496
                        Largest       Std. Dev.       .0091435
75%     .5061837       .5328045
90%      .511717       .5330469       Variance        .0000836
95%     .5152963       .5339227       Skewness        .0193762
99%     .5214873       .5354363       Kurtosis        3.024644
```

Skewness (歪度：わいど)
非対称性を示す指標
正規分布なら＝0

Kurtosis (尖度：せんど)
頻度分布のとがりを示す指標
正規分布なら＝3



これなら正規分布と言っていいですね。

- 重要：$\bar{Y} \sim N(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{N})$の分散に注目。
- Nが大きくなれば、$\frac{\sigma_Y^2}{N}$は小さくなっていく。
- これはサンプルサイズが大きくなれば、標本平均（推定量）の精度が増していくということ。
- シミュレーションの結果がそうなっているか確認しておくこと。
  - 30ページと31ページの図の横軸の目盛、34ページと35ページの横軸の目盛を比べてみるといいです。
- $N \to \infty$で$\bar{Y}$の分散はゼロに近づく。
- これは、サンプルサイズが無限大なら、標本平均は母集団の平均をドンピシャで当てるよ、ということ（一致性：大数の法則）。

仮説検定の考え方：帰無仮説・対立仮説

- それでは仮説検定に入りましょう。
- 統計学における仮説検定の出発点は、検定する仮説の特定化。
- 検定する仮説を「**帰無仮説**（null hypothesis）」と呼びます。
- 帰無仮説が成立しないときに成立する仮説を「**対立仮説**（alternative hypothesis）」と言います。
- 例を使って考えます。
- 「2017年の大卒者の初任給の平均は20万円」
- 本当？
- これを帰無仮説とします。

- 確率変数を使って表してみましょう。
- 母集団は2017年の大卒者。
- Yを2017年の大卒者の初任給（確率変数）とします。
- このとき、帰無仮説は$E(Y) = 20$と表せます。
- 対立仮説はいくつか考えられますが、ここでは最も一般的な対立仮説を考えることにします。
- それは「2017年の大卒者の初任給の平均は20万円<u>ではない</u>」です。
- 従って、対立仮説は$E(Y) \neq 20$になります。
- これは20万円より大きい値、小さい値、両方を含みます。そのため「**両側の対立仮説（two-sided alternative hypothesis）**」と呼ばれます。

- 一般化すると、、、
- 「母集団の平均$E(Y)$がある特定の値$\mu_{Y,0}$と等しい」という帰無仮説は

$$H_0: E(Y) = \mu_{Y,0}$$

- 「母集団の平均$E(Y)$がある特定の値$\mu_{Y,0}$と等しくない」という対立仮説（両側の対立仮説）は

$$H_1: E(Y) \neq \mu_{Y,0}$$

- H_0は帰無仮説、H_1は対立仮説を表す記号です。
- ノート：ここで取り扱っているのは、母集団の平均に関する検定ですが、他にも様々な検定があります。
  - 母集団の比率に関する検定。2つの母集団で、平均に違いがあるかどうかの検定、分散に違いがあるかの検定、比率に違いがあるかの検定などなどです。
  - 興味のある人は、本学部の「基礎統計学」を履修するといいと思います。
- ノート：片側の対立仮説を設定することもできます。興味のある人は、本学部の「基礎統計学」を履修するといいと思います。

41

仮説検定の考え方：

- ここでの問題は、母集団からのランダムサンプルを使って、帰無仮説を採択するのか、それともそれを却下して対立仮説を採択するのかの判断を下すことです。
- 判断の下し方ですが、以下のようにします：
- まず検定の際に用いる統計量があります（確率変数）。
- 帰無仮説が正しいという仮定の下で、その検定統計量の確率分布を計算します。
- データを使って検定統計量の値（実現値）を計算します。

ケース１：　その値は、確率的にいうと、とても起こりにくいことだった。

ケース２：　その値は、確率的にいうと、まあそれなりに起こることだった。

42

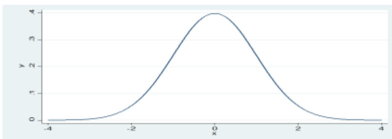
- ケース１：　その値は、確率的にいうと、とても起こりにくいことだった。
- このときの考え方は少なくとも二つあると思います。
  - 一つ目の考え方は、「そっかー、けっこうレアなことが起きたんだ、珍しいこともあるもんだね。」です。
  - この考え方、別に間違っていません。しかし、仮説検定の考え方ではありません。
- もう一つの考え方は、「そんなに都合よくレアなこと起きないでしょ。てことは、帰無仮説が正しいっていう前提そのものが間違っているんじゃないの。この仮説は棄てで」です。
  - これが統計的検定の考え方です。
- これを「**帰無仮説を棄却する**」と言います。
- そして、「**対立仮説を採択**」します。

43

- ケース２：　その値は、確率的にいうと、まあそれなりに起こることだった。
- それなりに起こることですから、帰無仮説を棄却できるだけの十分な統計的証拠はないということですね。
- この場合、「**帰無仮説は棄却できない**」と言います。
- 結果、帰無仮説を受け入れることになるので、「**帰無仮説を採択する**」とも言います。
- ただし、「帰無仮説を採択する」ことは、分析者が帰無仮説を真実と断言するということではありません。
- あくまで、帰無仮説を棄却できるだけの十分な統計的証拠はこのデータにはない、ということです。

44

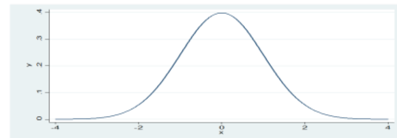
- 直感的には理解できたと思うので、もう少しフォーマルに説明します。
- 帰無仮説が正しいという仮定の下で、その検定統計量の確率分布が以下のようなものだとしましょう。



- この分布において、「とても起こりにくいこと」をあらかじめ決めておきます。
- これを「**棄却域**」と言います。
- 棄却域の部分の確率のことを、「**有意水準**」と言います。

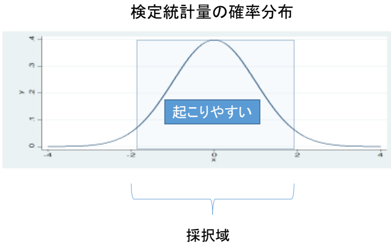
45

検定統計量の確率分布



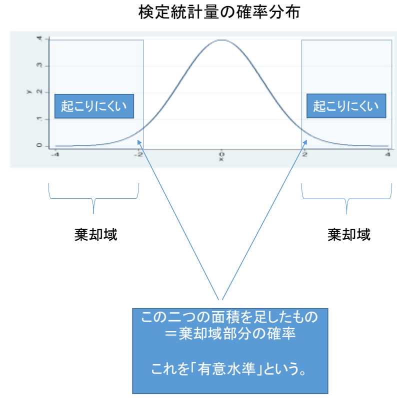
46

検定統計量の確率分布



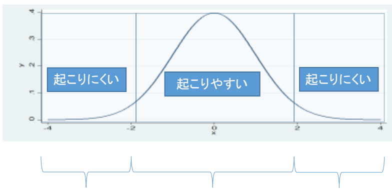
47

検定統計量の確率分布



48

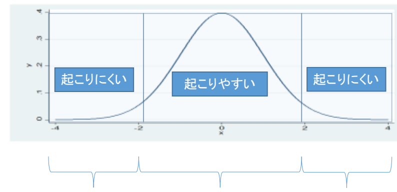
検定統計量の確率分布



棄却域　採択域　棄却域

49

検定統計量の確率分布

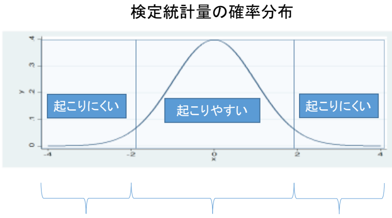


棄却域　採択域　棄却域

- 次にデータを使って検定統計量の値（実現値）を計算します。
- この値が棄却域に入れば、帰無仮説の下では起こりにくかったことが起こったとして帰無仮説を棄却します（対立仮説を採択します）。
- 棄却域に入らなかった場合は、帰無仮説を棄却できません（棄却しません）。

50

検定統計量の確率分布

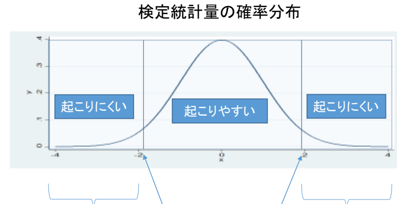


棄却域　採択域　棄却域

- 帰無仮説を棄却する・しないを決めるためには、棄却域があらかじめ決まっていなければなりません。
- それではどのように棄却域を決めておけばよいでしょうか？

51

検定統計量の確率分布



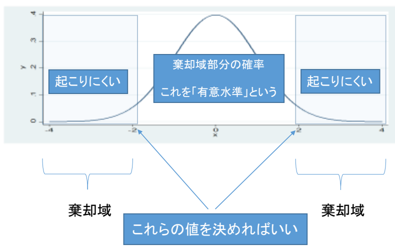
棄却域　棄却域

- 帰無仮説を棄却する・しないを決めるためには、棄却域があらかじめ決まっていなければなりません。
- それではどのように棄却域を決めておけばよいでしょうか？

これらの値を決めればいい

52

検定統計量の確率分布



- これらの値は、確率分布が分かっているため、「有意水準」を決めれば自動的に決まります。
- これらの値を「**臨界値**」といいます。

仮説検定の例1 （分散既知のケース）

- 母集団は2017年の大卒者。
- Y：2017年の大卒者の初任給（確率変数）

$$H_0 : E(Y) = 20 \quad H_1 : E(Y) \neq 20$$

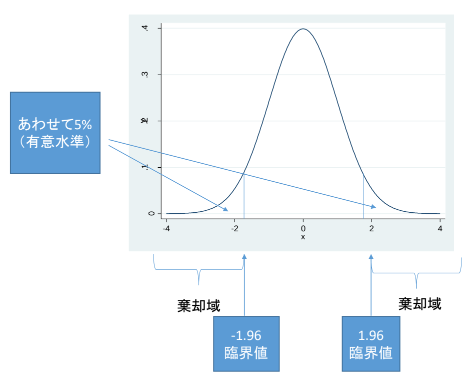
- ランダムサンプル$\{Y_1, \ldots, Y_{200}\}$
- ここで非現実的ですが、Yの分散は既知とします。$\sigma_Y^2 = 329$
- このとき、帰無仮説の下では、標本平均（推定量）$\bar{Y}$の分布は$N(20, \frac{329}{200})$に近似的に従います（中心極限定理）。
- 従って標準化した 標本平均$(\bar{Y} - 20)/\sqrt{\frac{329}{200}}$は、近似的に標準正規分布に従います。

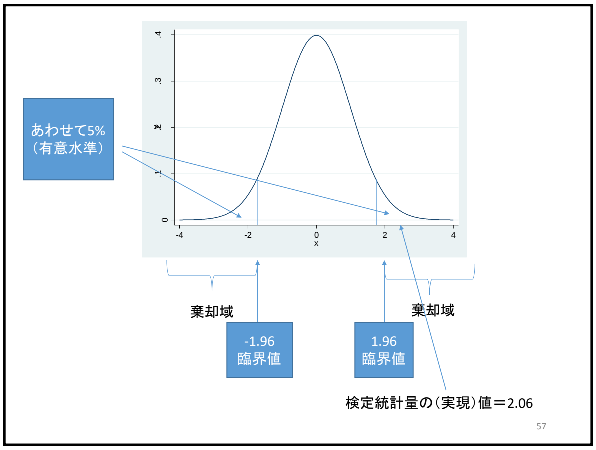
検定統計量 $\rightarrow$ $\dfrac{\bar{Y} - 20}{\sqrt{\frac{329}{200}}} \sim N(0,1)$

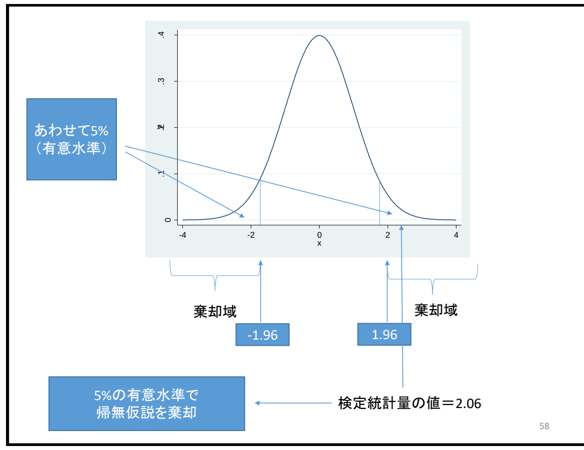
- 有意水準を決めます。ここでは5%としましょう。
- 18ページを見てください。棄却域は、-1.96より小さい、1.96より大きい、です。
- 従って、検定統計量が絶対値で1.96より大きければ、帰無仮説を棄却する、絶対値で1.96より小さければ、帰無仮説は棄却できないことになります。
- データ$(N = 200)$から、標本平均の値（実現値）22.64万円がえられたとします。
- 先ほどの検定統計量の式にこの値を入れます。

$$\frac{22.64 - 20}{\sqrt{\frac{329}{200}}} = \frac{2.64}{1.28} = 2.06$$

- この値は棄却域にはいりますから、帰無仮説を5%の有意水準で棄却します。
- 2017年の大卒者の初任給の平均は20万円ではないという統計的な証拠が得られた、、、、ということになります。







仮説検定の例2 （分散未知のケース）

- 先ほどと一つのことを除いて全く同じセッティングにします。
- ここでは分散σ_Yが未知とします。
- この場合はデータを使って標本分散を推定する必要があります。
- 標本分散（推定量）$s_Y^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \bar{Y})^2$は一致性を持つことが知られています。すなわち$N$が大きくなれば、高い確率で真の分散$\sigma_Y^2$に近づきます。
- $\bar{Y}$の分布の標準偏差は$\sigma_{\bar{Y}} = \sigma_Y/\sqrt{N}$でした。
- 従って、$\sigma_{\bar{Y}}$の推定値として、$s_Y/\sqrt{N}$を使うことができます。
- この$s_Y/\sqrt{N}$を「$\bar{Y}$の標準誤差」と呼びます。以下$SE(\bar{Y})$と表記します。

59

- データ（$N = 200$）から、標本平均（$\bar{Y}$）の値22.64万円、標本分散（s_Y^2）の値329万円^{2}が得られたとします。
- 帰無仮説の下では、標準化された標本平均推定量$\frac{\bar{Y}-20}{\sigma_Y/\sqrt{N}}$の分布は近似的に$N(0,1)$に従います（中心極限定理）。
- $\sigma_Y/\sqrt{N}$を$s_Y/\sqrt{N}$（$= SE(\bar{Y})$）に変えても同じことが成り立ちます。
  - s_Y^2がσ_Y^2の一致推定量なため。
- 従って、帰無仮説の下では、標準化された標本平均推定量$\frac{\bar{Y}-20}{\sqrt{329}/\sqrt{200}}$の分布は近似的に$N(0,1)$に従います。
  - この標準化された標本平均が検定統計量です。
  - これを「***t*値**」と呼びます。
- あとはさきほどと全く同じです。

60

母集団の平均に関する検定：まとめ

- $H_0: E(Y) = \mu_{Y,0}$（帰無仮説）
- $H_1: E(Y) \neq \mu_{Y,0}$（両側対立仮説）
- 検定統計量（***t*統計量**という）

$$t = \frac{\bar{Y} - \mu_{Y,0}}{SE(\bar{Y})}$$

- $\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \bar{Y}); SE(\bar{Y}) = s_Y/\sqrt{N}; s_Y^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \bar{Y})^2$
- 分散(σ_Y^2)既知の場合は統計量の分母は$\sigma_Y/\sqrt{N}$
- 帰無仮説の下では、検定統計量は標準正規分布に従う。
- データを使って、$\bar{Y}$と$SE(\bar{Y})$の実現値を計算、そして***t*統計量**の実現値を計算。
- 有意水準10%なら、棄却域は絶対値で1.65以上。
- 有意水準5%なら、棄却域は絶対値で1.96以上。
- 有意水準1%なら、棄却域は絶対値で2.58以上。

61

- *t*統計量の実現値が棄却域に入れれば、帰無仮説$E(Y) = \mu_{Y,0}$を棄却。
  - Yの平均は$\mu_{Y,0}$ではないという統計的証拠。
  - 対立仮説$E(Y) \neq \mu_{Y,0}$を採択。
- *t*統計量の実現値が棄却域に入らなければ、帰無仮説$E(Y) = \mu_{Y,0}$を棄却しない。
  - 帰無仮説$E(Y) = \mu_{Y,0}$を棄却するだけの十分な統計的証拠はない。
  - 帰無仮説$E(Y) = \mu_{Y,0}$を採択。
  - 採択といっても、帰無仮説$E(Y) = \mu_{Y,0}$が正しいと断定しているわけではなく、、、
  - 棄却するだけの十分な統計的証拠はない、ってのが本当のところ。

62

*p*値

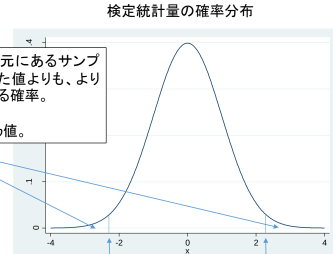
- 帰無仮説を前提とした検定統計量の分布が分かっているとします。
  - 先の例では、検定統計量は***t*統計量**で、

$$t = \frac{\bar{Y} - \mu_{Y,0}}{SE(\bar{Y})} \sim N(0,1)$$

- 手元にあるサンプルを使って、検定統計量を計算しました（検定統計量の実現値）。
  - 先の例では2.06ですね。
- 検定統計量が、この実限値に比べて、より起こりづらい値をとる確率を「*p*値」と言います。

63

検定統計量の確率分布



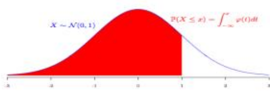
検定統計量が、手元にあるサンプルを使って得られた値よりも、より起こりづらい値をとる確率。

これが*p*値。

−2.06

検定統計量の値＝2.06

64



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

引用元：https://freakonometrics.hypotheses.org/9404

65

- 例で言うと、$Pr(t \leq 2.06)$ はテーブルから0.98。
  - 小数点2桁までで計算してます。
- だから、$Pr(t > 2.06) = 0.02$
- よってp値は$Pr(t > |2.06|) = 0.04$、となります。
- 重要：p値が分かっていれば、何%の有意水準で帰無仮説を棄却できるかすぐに判断できます。
- 例では、p値は0.04ですから、5%の有意水準では帰無仮説は棄却できますが、1%の有意水準で棄却できないとすぐに分かりますね。

66