曲面の助変数表示を $p(u,v)$ とし、接ベクトルを $p_u(u,v), p_v(u,v)$ とする。p_u は u での偏微分、p_v は v での偏微分を表す。

単位法線ベクトル

二つの接ベクトルに直交する単位ベクトル ν を単位法線ベクトルという。

$$\nu(u,v) = \frac{p_u(u,v) \times p_v(u,v)}{|p_u(u,v) \times p_v(u,v)|} \tag{1}$$

正則曲面

二つのベクトル $p_u(u,v), p_v(u,v)$ が一時独立であるとき $p(u,v)$ が表す曲面を正則曲面という。

第一基本量

接ベクトルの内積で表される以下の 2 変数関数を第一基本量という。

$$E = p_u(u,v) \cdot p_u(u,v) = |p_u(u,v)|^2 \tag{2}$$
$$F = p_u(u,v) \cdot p_v(u,v) \tag{3}$$
$$G = p_v(u,v) \cdot p_v(u,v) = |p_v(u,v)|^2 \tag{4}$$

第一基本形式

第一基本量の形式的な和を第一基本形式という。

$$ds^2 = dp \cdot dp = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{5}$$

行列で表すと次のようになる。

$$ds^2 = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \tag{6}$$

第二基本量

次のように内積で定義された 2 変数関数を第二基本量という。

$$L = -p_u(u,v) \cdot \nu_u(u,v) = p_{uu}(u,v) \cdot \nu(u,v) \tag{7}$$
$$M = -p_u(u,v) \cdot \nu_v(u,v) = -p_v(u,v) \cdot \nu_u(u,v) = p_{uv}(u,v) \cdot \nu(u,v) \tag{8}$$
$$N = -p_v(u,v) \cdot \nu_v(u,v) = p_{vv}(u,v) \cdot \nu(u,v) \tag{9}$$

第二基本形式

内積 $-dp \cdot d\nu$ を第二基本形式という。次のように第二基本量を用いて表せる。

$$\mathrm{II} = -dp \cdot d\nu \tag{10}$$
$$= -(p_u(u,v)du + p_v(u,v)dv) \cdot (\nu_u(u,v)du + \nu_v(u,v)dv) \tag{11}$$
$$= Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \tag{12}$$

行列で表すと次のようになる。

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \tag{13}$$

Gauss 曲率

ガウス曲率 K は第一基本量と第二基本量により次のように定義される。

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{14}$$

これは行列を使い次のようにも表現できる。

$$K = \det A, \quad A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \tag{15}$$

---

1. 第一基本量、第二基本量が

$$E = G = 1,\ F = 0,\ L = 1,\ M = 0,\ N = -1 \tag{16}$$

となる正則曲面が存在するかどうか理由をつけて答えよ。

……………………………………………………………………………

L, M, N は単位法線ベクトルとの内積で定義される。

正則曲面でないなら単位法線ベクトルは 0 となるので、$(L, M, N) = (0, 0, 0)$ となる。

$(L, M, N) \neq (0, 0, 0)$ となるので、正則曲面は存在する。

---

2. λ は正値関数とする。第一基本形式が $\lambda(du^2 + dv^2)$ で与えられる正則曲面のガウス曲率 K を $\varphi = \log\lambda$ を用いて表せ。

……………………………………………………………………………

ガウス曲率 K を第一基本量を用いて表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} K = &\frac{E(E_v G_v - 2F_u G_v + G_u^2)}{4(EG - F^2)^2} \\ &+ \frac{F(E_u G_v - E_v G_u - 2E_v F_v - 2F_u G_u + 4F_u F_v)}{4(EG - F^2)^2} \\ &+ \frac{G(E_u G_u - 2E_u F_v + E_v^2)}{4(EG - F^2)^2} - \frac{E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}}{2(EG - F^2)} \end{aligned} \tag{17}$$

第一基本形式が $\lambda(du^2 + dv^2)$ であるので、第一基本量は $E = G = \lambda, F = 0$ である。これを上の式に当てはめる。

$$
\begin{aligned}
K =& \frac{\lambda(\lambda_v\lambda_v + \lambda_u^2)}{4(\lambda\lambda)^2} + \frac{\lambda(\lambda_u\lambda_u + \lambda_v^2)}{4(\lambda\lambda)^2} - \frac{\lambda_{vv} + \lambda_{uu}}{2(\lambda\lambda)} && (18) \\
=& \frac{\lambda_u^2 + \lambda_v^2}{2\lambda^3} - \frac{\lambda_{vv} + \lambda_{uu}}{2\lambda^2} && (19)
\end{aligned}
$$

$\varphi = \log\lambda$ より u と v の偏微分を計算する。

$$
\varphi_u = \frac{\lambda_u}{\lambda},\ \varphi_v = \frac{\lambda_v}{\lambda},\ \varphi_{uu} = \frac{\lambda_{uu}\lambda - \lambda_u^2}{\lambda^2},\ \varphi_{vv} = \frac{\lambda_{vv}\lambda - \lambda_v^2}{\lambda^2} \tag{20}
$$

φ_{uu} と φ_{vv} の和からガウス曲率の式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\varphi_{uu} + \varphi_{vv} =& \frac{\lambda_{uu} + \lambda_{vv}}{\lambda} - \frac{\lambda_u^2 + \lambda_v^2}{\lambda^2} && (21) \\
-\frac{\varphi_{uu} + \varphi_{vv}}{2\lambda} =& \frac{\lambda_u^2 + \lambda_v^2}{2\lambda^3} - \frac{\lambda_{uu} + \lambda_{vv}}{2\lambda^2} && (22)
\end{aligned}
$$

$\varphi = \log\lambda$ は $\lambda = e^\varphi$ であるので、曲率は次のように表せる。

$$
K = -\frac{\varphi_{uu} + \varphi_{vv}}{2e^\varphi} \tag{23}
$$
