Laplace 変換

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \quad \mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad \mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{1}$$

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] \tag{2}$$

$a > 0$、$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ とする。

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad \mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a) \tag{3}$$

問題

次の関数 $F(s)$ から逆ラプラス変換で $f(t)$ を求めよ。

1.
$$F(s) = \frac{3}{s^3+3s^2+3s+1} \tag{4}$$

2.
$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)^2} \tag{5}$$

3.
$$F(s) = \frac{2s+5}{s^2+4s+8} \tag{6}$$

....

1.
$$F(s) = \frac{3}{s^3+3s^2+3s+1} = \frac{3}{(s+1)^3} \tag{7}$$

t^2 と e^{-t} のラプラス変換が

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{2}{s^3}, \qquad \mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1} \tag{8}$$

であるので、t^2e^{-t} のラプラス変換は次のようになる。

$$\mathcal{L}[t^2e^{-t}] = \frac{2}{(s+1)^3} \tag{9}$$

つまり、次のようなラプラス変換があることが分かる。

$$\mathcal{L}\left[\frac{3}{2}t^2e^{-t}\right] = \frac{3}{(s+1)^3} \tag{10}$$

この為、逆ラプラス変換は次のようになる。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^3+3s^2+3s+1}\right]=\frac{3}{2}t^2e^{-t} \tag{11}$$

…………………………………………………………………

2.

$$F(s)=\frac{s+1}{s(s+2)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s}+\frac{2}{(s+2)^2}+\frac{-1}{s+2}\right) \tag{12}$$

1、t、e^{-2t} のラプラス変換は次のようになる。

$$\mathcal{L}[1]=\frac{0!}{s^{0+1}}=\frac{1}{s},\quad \mathcal{L}[t]=\frac{1!}{s^{1+1}}=\frac{1}{s^2},\quad \mathcal{L}[e^{-2t}]=\frac{1}{s-(-2)}=\frac{1}{s+2} \tag{13}$$

これを組み合わせて te^{-2t} のラプラス変換を考える。

$$\mathcal{L}[te^{-2t}]=\frac{1}{(s+2)^2} \tag{14}$$

これらにより次のようなラプラス変換があることが分かる。

$$\mathcal{L}\left[1+2te^{-2t}-e^{-2t}\right]=\frac{1}{s}+\frac{2}{(s+2)^2}-\frac{1}{s+2} \tag{15}$$

よって、求めるべき逆変換は次のような式となる。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s+2)^2}\right]=\frac{1}{4}(1+2te^{-2t}-e^{-2t}) \tag{16}$$

…………………………………………………………………

3.

$$F(s)=\frac{2s+5}{s^2+4s+8}=\frac{2(s+2)+1}{(s+2)^2+2^2} \tag{17}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(s+2)^2+2^2}+2\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2} \tag{18}$$

$\sin\omega t$、$\cos\omega t$、e^{-2t} のラプラス変換を考える。

$$\mathcal{L}[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},\quad \mathcal{L}[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2},\quad \mathcal{L}[e^{-2t}]=\frac{1}{s+2} \tag{19}$$

これを合わせると次のラプラス変換が得られる。

$$\mathcal{L}[e^{-2t}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(s+2)^2+\omega^2},\quad \mathcal{L}[e^{-2t}\cos\omega t]=\frac{s+2}{(s+2)^2+\omega^2} \tag{20}$$

以上により次のラプラス変換が得られる。

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t+2e^{-2t}\cos 2t\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(s+2)^2+2^2}+2\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2} \tag{21}$$

よって、求めるべき逆変換は次のような式となる。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+5}{s^2+4s+8}\right]=\frac{1}{2}e^{-2t}\left(\sin 2t+4\cos 2t\right) \tag{22}$$