1. $f(z) := \dfrac{1}{1-2z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n \quad (|z| < \frac{1}{2})$ である。

（1）$\dfrac{1}{(1-2z)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ とマクローリン展開される係数 a_n を求めよ。

$f(z)$ の微分を考える。

$f(z) = \frac{1}{1-2z}$ の場合。

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-2z}\right) = -\frac{-2}{(1-2z)^2} = \frac{2}{(1-2z)^2} \tag{1}$$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$ の場合、$|z| < \frac{1}{2}$ において収束する為、項別に微分を行う。定数項は無くなる。

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n n z^{n-1} \tag{2}$$

これらは $|z| < \frac{1}{2}$ において等しいので

$$\frac{2}{(1-2z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n n z^{n-1} \tag{3}$$

$$\frac{1}{(1-2z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) z^n \tag{4}$$

以上より $\underline{a_n = 2^n(n+1)}$

（2）$\dfrac{1}{(1-2z)^3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ とマクローリン展開される係数 b_n を求めよ。

先程の式 $\frac{1}{(1-2z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) z^n$ を微分する。

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(1-2z)^2}\right) = -\frac{2\cdot(-2)}{(1-2z)^3} = \frac{2^2}{(1-2z)^3} \tag{5}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (n+1) n z^{n-1} \tag{6}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} (n+2)(n+1) z^n \tag{7}$$

$\frac{2^2}{(1-2z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}(n+2)(n+1) z^n$ より $\underline{b_n = 2^{n-1}(n+2)(n+1)}$

---

2. $g(z) := \dfrac{z}{(1-z^3)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ とマクローリン展開される係数 c_n を求めよ。

$|z-\alpha|< R$ で正則な関数 $t(z)$ のテイラー展開

$$t(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-\alpha)^k, \quad c_k=\frac{t^{(k)}(\alpha)}{k!} \tag{8}$$

$\alpha=0$ の時をマクローリン展開と言う。

$$t(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k, \quad c_k=\frac{t^{(k)}(0)}{k!} \tag{9}$$

………………………………………………………………

$\bar{g}(z)=(1-z^3)^{-1}$ とする。$|z|< 1$ において $(1-z)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k$ であるので、同様に考えると $|z|< 1$ において

$$\bar{g}(z)=\frac{1}{1-z^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(z^3)^n \tag{10}$$

である。$\bar{g}(z)=\frac{1}{1-z^3}$ を微分する。

$$\frac{d}{dz}\bar{g}(z)=-\frac{-3z^2}{(1-z^3)^2}=3z\cdot\frac{z}{(1-z^3)^2}=3z\cdot g(z) \tag{11}$$

$\bar{g}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{3n}$ を微分する。

$$\frac{d}{dz}\bar{g}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}3nz^{3n-1} \tag{12}$$

$3z\cdot g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}3nz^{3n-1}$ より

$$\begin{aligned} g(z)=&(3z)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}3nz^{3n-1} && (13)\\ =&\sum_{n=1}^{\infty}nz^{3n-2} \quad =\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{3n+1} && (14)\\ =&z+2z^4+3z^7+4z^{10}+5z^{13}+6z^{16}+\cdots && (15)\end{aligned}$$

となるので、

$$c_n=\begin{cases}\frac{1}{3}(n+2) & n\equiv 1 \mod 3\\ 0 & n\not\equiv 1 \mod 3\end{cases} \tag{16}$$