1. ($n=3$ のとき) A_1, A_2, A_3 に対して次が成立するとき独立

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \tag{1}$$

$$\begin{cases} P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3) \end{cases} \tag{2}$$

コインを 3 回投げる試行において、次の条件を満たす事象 A_3 を与えよ。

A_1:1 回目に表、A_2:2 回目に裏、A_3:? $\Longrightarrow$ (1) は成立しないが、(2) は成立する

. . . .

A_3 を「3 回連続同じではない」とする。つまり、(表 2 回、裏 1 回) または (表 1 回、裏 2 回) である。このとき、$P(A_3) = 3/4$ である。

また、$A_1 \cap A_3$ は「1 回目が表で、2 回目と 3 回目が表表ではない」ということなので、$P(A_1 \cap A_3) = 3/8$ である。よって、$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$ となる。

同様に、$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$ である。

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ は 1 回目に表、2 回目に裏が出て、3 回目はどちらでも良い事を意味するので、$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/4$ である。

一方、$P(A_1)P(A_3)P(A_3) = 1/2 \times 1/2 \times 3/4 = 3/16$ であるので、$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)P(A_3)P(A_3)$ である。

---

2. つぎの真偽を確かめよ。ただし、$P(A) > 0,\ P(B) > 0$ とする。

(a) A と B が独立ならば、A と B は排反である。

. . . .

A と B が独立ならば、$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ である。$P(A) > 0,\ P(B) > 0$ より、$P(A \cap B) > 0$ である。よって、$A \cap B \neq \emptyset$ となるので A と B は排反ではない。

2 回コイントスをする場合、事象 A を 1 回目が表、事象 B を 2 回目が表とする。このとき、A と B は独立であるが、$A \cap B$ は 2 回連続で表が出る事象となるので排反ではない。

(b) A と B が独立ならば、A^c と B^c も独立である。

. . . .

$P(A^c) = 1 - P(A)$、$P(B^c) = 1 - P(B)$ である。よって、次の式が成り立つ。

$$P(A^c)P(B^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \tag{3}$$

また、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) && (4) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) && (5) \end{aligned}$$

よって、$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$ であるから A^c と B^c も独立である。

---

3. 事象 A, B, C に対して、$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)P(B \mid C)$ ならば、A と B は互いに独立になるか?

. . . .

$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)P(B \mid C)$ のそれぞれの確率は次のように変形できる。

$$P(A \cap B \mid C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \tag{6}$$

$$P(A \mid C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}, \quad P(B \mid C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \tag{7}$$

よって、$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap C)P(B \cap C)$ である。$A \cap B \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C)$ であるので、$A \cap C$ と $B \cap C$ は独立である。

1 から 9 が書かれた 9 枚のカードがあるとする。この 9 枚のカードから 2 枚を選んで 2 桁の整数を作る。このとき、事象 A, B, C を次のように定める。

A 十の位が偶数となる

B 一の位が素数となる

C 選んだ 2 つの数はどちらも 5 以上

このとき、$A \cap C$ と $B \cap C$ は独立であるが、偶素数 2 があるので、A と B は独立ではない。

---

4. Monty Hall 問題 について、設定を以下のように一部変える。
   - プレイヤーの前に 5 枚のカードがある。内、当たりは 1 枚、質問者は答えを知っている。
   - プレイヤーは 1 枚カードを選び、質問者が残りの 4 枚のカードから 3 枚の外れを教える。プレイヤーは残ったいるカードに変更できる。

   この場合、プレイヤーは残っているカードに変更したほうが良いか?

. . . .

Monty Hall 問題は、最初の選択とその選択から外れた集団のどちらを選ぶべきかが問われる問題である。選んだ 1 枚だけの集団と選ばなかった残りの集団の内、当たりが含まれるのはどちらのほうが確率が高いかということになる。
つまり、**変更をするべき**が確率上正しい。

. . . .

5 枚のカードを順に番号を振り、A_i $(i = 1, \ldots, 5)$ は対応するカードが当たる事象とする。このとき、確率は $P(A_i) = 1/5$ である。
プレイヤーが 1 のカードを選択した場合を考える。
事象 B は質問者 (司会者) が残りの 2 から 5 のカードから 2 以外をオープンにする事象とする。

$$P(B \mid A_1) = \frac{1}{4}, \qquad P(B \mid A_2) = 1 \tag{8}$$

$$P(B \mid A_3) = P(B \mid A_4) = P(B \mid A_5) = 0 \tag{9}$$

ここから $P(B)$ を求める。

$$P(B) = \sum_{i=1}^{5} P(B \mid A_i)P(A_i) = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{4} \tag{10}$$

プレイヤーが 1 を選択した後、司会者が 3,4,5 を開いた時に 1 のカードが当たりの確率 $P(A_1 \mid B)$ と、2 のカードが当たりの確率 $P(A_2 \mid B)$ を計算する。

$$P(A_1 \mid B) = P(A_1) \times \frac{P(B \mid A_1)}{P(B)} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{5} \tag{12}$$

$$P(A_2 \mid B) = P(A_2) \times \frac{P(B \mid A_2)}{P(B)} \tag{13}$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{5} \tag{14}$$

よって、カード 1 を選択した後、2 に変更した時の方が当たる確率が高い。
選択したカードが他のカードであっても同様に計算できるので、変更したほうが良いことがわかる。