
発散

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y)) \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \tag{2}$$

. . . .

$r > 0$、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ について開球 $B(\boldsymbol{x}, r)$ を次のように定義する。

$$B(\boldsymbol{x}, r) = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}| < r\} \tag{3}$$

また、開球の閉包 $\bar{B}(\boldsymbol{x}, r)$ は次のようになる。

$$\bar{B}(\boldsymbol{x}, r) = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}| \leq r\} \tag{4}$$

この場合、$B(\boldsymbol{x}, r)$ は点 $\boldsymbol{x}$ を中心とした半径 r の円の内部で境界を含めない集合であり、$\bar{B}(\boldsymbol{x}, r)$ は境界を含めた集合である。

Lebesgue（ルベーグ）の微分定理

$U \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とし、$f : U \to \mathbb{R}$ を C^1-級関数とする。

$\bar{B}(\boldsymbol{x}, r) \subset U$ である時、

$$\lim_{r \to 0} \left(\frac{1}{|\bar{B}(\boldsymbol{x}, r)|} \int_{\bar{B}(\boldsymbol{x}, r)} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right) = f(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

となる。

ただし、$|\bar{B}(\boldsymbol{x}, r)|$ は $\bar{B}(\boldsymbol{x}, r)$ の面積を指す。つまり、$|\bar{B}(\boldsymbol{x}, r)| = \pi r^2$

$D \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とする。$T > 0$ とし、区間 $I_T \subset \mathbb{R}$ を $I_T = [0, T]$ とする。

$D_T \subset \mathbb{R}^3$ を $D_T = D \times I_T$ とし、C^1-級関数 ρ, X を次のように定める。

$$\rho : D_T \to \mathbb{R}, \quad X : D_T \to \mathbb{R}^2 \tag{6}$$

各 $t \in I_T$ に対し、関数 $\rho_t, \dot{\rho}_t, X_t$ を次のように定める。

$$\rho_t : D \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \rho(x, y, t) \tag{7}$$

$$\dot{\rho}_t : D \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (\rho(x, y, t + h) - \rho(x, y, t)) \tag{8}$$

$$X_t : D \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto X(x, y, t) \tag{9}$$

ここで、次を仮定する。

各 $t \in I_T$ と $\bar{B}(\boldsymbol{x}, r) \subset D$ となるような $\boldsymbol{x} \in D$, $r > 0$ に対して次が成り立つ。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\bar{B}(\boldsymbol{x},r)} \rho_t \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{\partial \bar{B}(\boldsymbol{x},r)} \rho_t \langle X_t, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}s \tag{10}$$

この時、次が成り立つことを示せ。

各 $t \in I_T$ に対して、D 上の関数 $\rho_t, \dot{\rho}_t$ 及びベクトル場 X_t は次の式を満たす。

$$\dot{\rho}_t = -\operatorname{div}(\rho_t X_t) \tag{11}$$

....

式 (10) の両辺を $|\bar{B}(\boldsymbol{x}, r)|$ で割る。

$$\frac{1}{|\bar{B}(\boldsymbol{x},r)|} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\bar{B}(\boldsymbol{x},r)} \rho_t \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{|\bar{B}(\boldsymbol{x},r)|} \int_{\partial \bar{B}(\boldsymbol{x},r)} \rho_t \langle X_t, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}s \tag{12}$$

この時、左辺はルベーグの微分定理 (式 (5)) により次のように変形できる。

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|\bar{B}(\boldsymbol{x},r)|} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\bar{B}(\boldsymbol{x},r)} \rho_t \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \rho_t = \dot{\rho}_t \tag{13}$$

この為、式 (12) の右辺が次のようになれば証明終了である。

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|\bar{B}(\boldsymbol{x},r)|} \int_{\partial \bar{B}(\boldsymbol{x},r)} \rho_t \langle X_t, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}s = \operatorname{div}(\rho_t X_t) \tag{14}$$

式 (14) を示す為にどのような方針を取るか?

1. ルベーグの微分定理 (5) を用いる
2. $\partial \bar{B}(\boldsymbol{x}, r)$ が中心 $\boldsymbol{x}$ 半径 r の円であるので、これを極座標表示し積分を計算する

....

微分定理を用いる場合、次のような変形を行いたい。

$$\int_{\partial \bar{B}(\boldsymbol{x},r)} \rho_t \langle X_t, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}s = \int_{\bar{B}(\boldsymbol{x},r)} \boxed{} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{15}$$

その為に次のように $X_t, \boldsymbol{n}$ を置く。

$$X_t(x, y) = \begin{pmatrix} X_{t1}(x, y) \\ X_{t2}(x, y) \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \end{pmatrix} \tag{16}$$

これにより

$$\int_{\partial\bar{B}(\boldsymbol{x},r)} \rho_t \langle X_t, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}s = \int_{\partial\bar{B}(\boldsymbol{x},r)} \rho_t \left(X_{t1}(x,y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + X_{t2}(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \right) \mathrm{d}s \tag{17}$$

$$= \int_{\partial\bar{B}(\boldsymbol{x},r)} \left(\rho_t(x,y)X_{t1}(x,y)\mathrm{d}x + \rho_t(x,y)X_{t2}(x,y)\mathrm{d}y\right) \tag{18}$$

ここにグリーンの定理を用いると次のような式が得られる。

$$\int_{\bar{B}(\boldsymbol{x},r)} \left(\frac{\partial}{\partial x}\rho_t(x,y)X_{t2}(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\rho_t(x,y)X_{t1}(x,y) \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{19}$$

よって、(12) の右辺は微分定理より次のようになる。

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|\bar{B}(\boldsymbol{x},r)|} \int_{\partial\bar{B}(\boldsymbol{x},r)} \rho_t \langle X_t, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}s = \frac{\partial}{\partial x}\rho_t(\boldsymbol{x})X_{t2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial}{\partial y}\rho_t(\boldsymbol{x})X_{t1}(\boldsymbol{x}) \tag{20}$$

この式の右辺が次の式と一致すればいい。

$$\mathrm{div}(\rho_t X_t) = \nabla\rho_t \cdot X_t + \rho_t \,\mathrm{div}\, X_t \tag{21}$$

....

$$\mathrm{div}(\rho_t X_t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\rho_t, \frac{\partial}{\partial y}\rho_t \right) \cdot X_t + \rho_t \,\mathrm{div}\, X_t \tag{22}$$

$$= \frac{\partial\rho_t}{\partial x}X_{t1} + \frac{\partial\rho_t}{\partial y}X_{t2} + \rho_t\frac{\partial X_{t1}}{\partial x} + \rho_t\frac{\partial X_{t2}}{\partial y} \tag{23}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|\bar{B}(\boldsymbol{x},r)|} \int_{\bar{B}(\boldsymbol{x},r)} \mathrm{div}(\rho_t X_t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{div}(\rho_t X_t) \tag{24}$$

$$X_t = \begin{pmatrix} X_{t1}(x,y) \\ X_{t2}(x,y) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t \tag{26}$$

$$\int_{\partial \bar{B}(\boldsymbol{x},r)} \rho_t \langle X_t, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}s = \int_{\partial \bar{B}(\boldsymbol{x},r)} \left(\rho_t X_{t1} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \rho_t X_{t2} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \right) \mathrm{d}s \tag{27}$$

$$= \int_{\partial \bar{B}(\boldsymbol{x},r)} (\rho_t X_{t1} \mathrm{d}x + \rho_t X_{t2} \mathrm{d}y) \tag{28}$$

$$= \int_{\bar{B}(\boldsymbol{x},r)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho_t X_{t2} - \frac{\partial}{\partial y} \rho_t X_{t1} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{29}$$

Green（グリーン）の定理

$$\int_{\partial B} (P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y) = \int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{30}$$