

---

# 勾配 (gradient)

関数  $f$  に対して、 $f$  の勾配 (<sup>グラディエント</sup> gradient)  $Df (= \nabla f)$

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto y \qquad Df = \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \tag{1}$$

---

# 偏微分方程式 ( partial differential equation )

輸送方程式 ( transport equation )

---

$$u = u(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}) \quad u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Du = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})$$

$$b \in \mathbb{R}^n$$

---

## Report 1.1

関数  $u = u(x, t)$  ( $x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}$ ) は  $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  とし、 $b \in \mathbb{R}^n$  とする。

$$u_t + b \cdot Du = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \qquad z(s) = u(x + sb, t + s) \quad (s \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

この時、次の式が成り立つ。

$$\dot{z}(s) = Du(x + sb, t + s) \cdot b + u_t(x + sb, t + s) = 0 \tag{3}$$

.....

$$u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

合成関数の微分を用いて  $z(s)$  を  $s$  で微分する。

$$\frac{d}{ds} z(s) = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{dt}{ds} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

第 2 項  $\frac{\partial z}{\partial t} \frac{dt}{ds}$  は次のように計算できる。

$$\frac{\partial z}{\partial t} \frac{dt}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t}(x + sb, t + s) = u_t(x + sb, t + s) \tag{6}$$

第 1 項  $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{ds}$  は多変数関数の微分であるので、 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  より次のように

なる。

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_i + sb_i) \cdot \frac{d(x_i + sb_i)}{ds} \quad (7)$$

$$= \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x_i + sb_i) \cdot b_i = Du(x + sb) \cdot b \quad (8)$$

よって、 $z(s)$  を  $s$  で微分すると  $Du(x + sb, t + s) \cdot b + u_t(x + sb, t + s)$  が得られる。

式 (2) より  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  上で、 $u_t + b \cdot Du = 0$  であるので、 $t + s > 0$  において  $Du(x + sb, t + s) \cdot b + u_t(x + sb, t + s) = 0$  となる。

---

## Report 1.2

$b \in \mathbb{R}^n$ ,  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (9)$$

$$u(x, t) = g(x - tb) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0) \quad (10)$$

(10) で定義される  $u(x, t)$  は (9) を満たすことを示せ。

.....  
 $u(x, t) = g(x - tb)$  より  $t = 0$  の時は  $u(x, 0) = g(x)$  である。

$t > 0$  において、 $u_t$  を計算する。これは  $t$  で偏微分を行うので、 $g(x - tb)$  を偏微分する。

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t} g(x - tb) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(x - tb) \times (-b_1) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n}(x - tb) \times (-b_n) \quad (11)$$

同様に  $b \cdot Du$  も計算する。

$$b \cdot Du = (b_1, \dots, b_n) \cdot (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) \quad (12)$$

$$= (b_1, \dots, b_n) \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial x_1}(x - tb), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x - tb) \right) \quad (13)$$

$$= b_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(x - tb) + \cdots + b_n \frac{\partial g}{\partial x_n}(x - tb) \quad (14)$$

よって、 $u_t + b \cdot Du = 0$  となる。

---

**Report 1.3**

$V$  は  $U \subset \mathbb{R}^n$  の任意のなめらかな部分領域とし、 $\operatorname{div} F$  が連続であるとする。この時、 $\int_V \operatorname{div} F dx = 0$  であれば  $U$  上で  $\operatorname{div} F = 0$  となることを示せ。

.....

$V$  は任意であるので、 $U$  上の任意の点  $P$  と  $P$  を中心とした半径  $\varepsilon$  の球  $B$  上の積分  $\int_B \operatorname{div} F dx = 0$  を考える。

$B$  の体積  $|B|$  と  $(\operatorname{div} F)(P)$  を用いて  $\int_B \operatorname{div} F dx$  は  $|B|(\operatorname{div} F)(P)$  に近似できる。  
 $\int_B \operatorname{div} F dx = 0$  より  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |B|(\operatorname{div} F)(P) = 0$  であるが、両辺を  $\varepsilon^n$  で割ることにより  $(\operatorname{div} F)(P) = 0$  が得られる。

$\forall P \in U$  であったので、 $U$  上で  $\operatorname{div} F = 0$  となる。

---

**Report 1.4**

$x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$  の時、

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} & (n \geq 3) \end{cases} \tag{15}$$

とする。この時、ある定数  $C > 0$  を用いて次の不等式が成り立つ。

$$|D\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}}, \quad |D^2\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^n} \tag{16}$$

.....

$x \in \mathbb{R}^n$  より  $x = (x_1, \dots, x_n)$  とする。  
 $D\Phi(x) = \left( \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_n} \right)$  より、各成分を計算する。  
 $n = 2$  の場合

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} = -\frac{1}{2\pi} \frac{2x_i}{x_1^2 + x_2^2} = -\frac{1}{\pi} \frac{x_i}{|x|^2} \tag{17}$$

これより、

$$|D\Phi(x)| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\pi} \frac{x_1}{|x|^2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi} \frac{x_2}{|x|^2}\right)^2} = \frac{1}{\pi|x|} \tag{18}$$

$n \geq 3$  の場合

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x|^{n-2}} = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{-(n-2)x_i}{|x|^n} \tag{19}$$

これにより、

$$|D\Phi(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{-x_i}{n\alpha(n)|x|^n}\right)^2} = \frac{1}{n\alpha(n)|x|^{n-1}} \tag{20}$$

よって、 $n \geq 2$  に対して、次を満たす定数  $C > 0$  が存在する。

$$|D\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}} \quad (21)$$

.....  
 $D^2\Phi(x) = \left( \frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_n^2} \right)$  より各項を計算する。

$n = 2$  の場合

$$\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -\frac{1}{\pi} \frac{x_i}{|x|^2} \right) = -\frac{1}{\pi} \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_i^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = -\frac{1}{\pi} \frac{|x|^2 - 2x_i^2}{|x|^4} \quad (22)$$

$$|D^2\Phi(x)|^2 = \left( -\frac{1}{\pi} \frac{-x_1^2 + x_2^2}{|x|^4} \right)^2 + \left( -\frac{1}{\pi} \frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^4} \right)^2 \quad (23)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 + x_2^4}{|x|^8} + \frac{x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 + x_2^4}{|x|^8} \right) \quad (24)$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \frac{|x|^4 - 4x_1^2x_2^2}{|x|^8} \quad (25)$$

$$\leq \frac{2}{\pi^2} \frac{|x|^4}{|x|^8} = \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{|x|^4} \quad (26)$$

$$|D\Phi(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{|x|^2} \quad (27)$$

$n \geq 3$  の場合

$$\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{x_i}{|x|^n} \right) = \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_i}{|x|^n} \quad (28)$$

$$= \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{|x|^n - x_i \cdot \frac{n}{2}|x|^{n-2} \cdot 2x_i}{|x|^{2n}} = \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{|x|^n - nx_i^2|x|^{n-2}}{|x|^{2n}} \quad (29)$$

$$|D^2\Phi(x)|^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{|x|^n - nx_i^2|x|^{n-2}}{|x|^{2n}} \right)^2 \quad (30)$$

$$= \frac{1}{n^2(\alpha(n))^2} \sum_{i=1}^n \frac{|x|^{2n} - 2|x|^n nx_i^2|x|^{n-2} + n^2 x_i^4 |x|^{2n-4}}{|x|^{4n}} \quad (31)$$

$$= \frac{1}{n^2(\alpha(n))^2} \frac{n|x|^{2n} - 2|x|^n n|x|^{n-2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + n^2|x|^{2n-4} \sum_{i=1}^n x_i^4}{|x|^{4n}} \quad (32)$$

$$= \frac{1}{n^2(\alpha(n))^2} \frac{n|x|^{2n} - 2n|x|^{2n} + n^2|x|^{2n-4} \sum_{i=1}^n x_i^4}{|x|^{4n}} \quad (33)$$

$$\leq \frac{1}{n^2(\alpha(n))^2} \frac{n|x|^{2n} - 2n|x|^{2n} + n^2|x|^{2n-4} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2}{|x|^{4n}} \quad (34)$$

$$= \frac{n^2 - n}{n^2(\alpha(n))^2} \frac{|x|^{2n}}{|x|^{4n}} \quad (35)$$

$$= \frac{n^2 - n}{n^2(\alpha(n))^2} \frac{1}{|x|^{2n}} \quad (36)$$

$$|D^2\Phi(x)| = \frac{\sqrt{n^2 - n}}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x|^n} \quad (37)$$

よって、 $n \geq 2$  に対して、次を満たす定数  $C > 0$  が存在する。

$$|D^2\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^n} \quad (38)$$


---