Jordan 標準形

ジョルダン標準形はジョルダン細胞の順序の差を除いて一つだけ存在する。

この為、ジョルダン標準形に変形する正則行列が求まれば必ずジョルダン標準形が決まる。

Jordan 標準形の求め方

n 次正方行列 A の Jordan 標準形の求め方

1. 固有値 λ を求める。対角化可能であれば対角行列を求めて終了。
2. (a) 固有ベクトル $\boldsymbol{x}_\lambda$ を用いて方程式 $(A-\lambda E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_\lambda$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求める。
   (b) もし、解 $\boldsymbol{x}$ が求まれば、新しく方程式 $(A-\lambda E)\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}$ を作り $\boldsymbol{x}_1$ を求める。
   (c) 同じことを繰り返しベクトルの列 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots$ を求める。
   (d) このようにすべての固有ベクトル $\boldsymbol{x}_\lambda$ に対して方程式を繰り返し解く。つまり、$\boldsymbol{x}_\lambda=(A-\lambda E)^k\boldsymbol{p}$ と考え、次のようなベクトル列を求めることになる。

$$(A-\lambda E)^{k-1}\boldsymbol{p},(A-\lambda E)^{k-2}\boldsymbol{p},\ldots,(A-\lambda E)^2\boldsymbol{p},(A-\lambda E)\boldsymbol{p},\boldsymbol{p} \tag{1}$$

3. 求まったベクトルを全部並べて行列 P を作ると $P^{-1}AP$ がジョルダン標準形となる。

次の行列の Jordan 標準形を求めよ。

$$A=\begin{pmatrix}5&4&2&1\\0&1&-1&-1\\-1&-1&3&0\\1&1&-1&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}4&-4&-11&11\\7&-16&-48&46\\-6&16&43&-38\\-3&9&23&-19\end{pmatrix} \tag{2}$$

$$C=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\-1&1&0&0\\0&2&2&1\\2&2&0&2\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}5&4&2&1&1\\0&1&-1&-1&1\\-1&-1&3&0&1\\1&1&-1&2&1\\0&0&2&2&2\end{pmatrix} \tag{3}$$

A の Jordan 標準形

A の固有値 λ を求める。

$$\det(A-\lambda E)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)^2=0 \qquad \lambda=1,2,4 \tag{4}$$

それぞれの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_\lambda$ は次の通り。

$$\lambda=1,\ \boldsymbol{x}_{\lambda_1}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \lambda=2,\ \boldsymbol{x}_{\lambda_2}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\qquad \lambda=4,\ \boldsymbol{x}_{\lambda_4}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} \tag{5}$$

固有ベクトルが 4 つ無いので対角化は出来ない。

方程式 $(A-\lambda E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_\lambda$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求める。

$$\text{rank}(A-E)=3, \qquad \text{rank}((A-E)\ \ \boldsymbol{x}_{\lambda_1})=4 \tag{6}$$

$$\text{rank}(A-2E)=3, \qquad \text{rank}((A-2E)\ \ \boldsymbol{x}_{\lambda_2})=4 \tag{7}$$

上記の様に階数が求まる。これにより $\boldsymbol{x}_{\lambda_1},\boldsymbol{x}_{\lambda_2}$ の方程式に解はない。

$$(A-4E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\lambda_4} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&2&1\\0&-3&-1&-1\\-1&-1&-1&0\\1&1&-1&-2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{9}$$

固有ベクトルとこの $k=0$ の時の解を並べて行列 P を作る。これによりジョルダン標準形 $P^{-1}AP$ が求まる。

$$P=\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix},\quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&4&1\\0&0&0&4\end{pmatrix}=J_1(1)\oplus J_1(2)\oplus J_2(4) \tag{10}$$

.... B の **Jordan 標準形** ....

B の固有値 λ を求める。

$$\det(B-\lambda E)=(\lambda-3)^4=0 \qquad \lambda=3 \tag{11}$$

固有ベクトル $\boldsymbol{x}_{\lambda_3}$ は次の通り。

$$\lambda=3,\ \boldsymbol{x}_{\lambda_3}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\\1\end{pmatrix} \tag{12}$$

固有ベクトル $\boldsymbol{x}_{\lambda_3}$ を用いて方程式 $(B-3E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\lambda_3}$ を解く。

$$\begin{pmatrix}1&-4&-11&11\\7&-19&-48&46\\-6&16&40&-38\\-3&9&23&-22\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-6\\2\\0\end{pmatrix}\tag{13}$$

$$\begin{pmatrix}1&-4&-11&11\\7&-19&-48&46\\-6&16&40&-38\\-3&9&23&-22\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-3\\-6\\2\\0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{x}=k_2\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-19\\-37\\12\\0\end{pmatrix}\tag{14}$$

$$\begin{pmatrix}1&-4&-11&11\\7&-19&-48&46\\-6&16&40&-38\\-3&9&23&-22\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-19\\-37\\12\\0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{x}=k_3\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-118\\-231\\75\\0\end{pmatrix}\tag{15}$$

固有ベクトル $\boldsymbol{x}_{\lambda_3}$ と求めた 3 つのベクトルを並べ、行列 P を作る。この行列 P により B のジョルダン標準形 $P^{-1}BP$ は次のように求まる。

$$P=\begin{pmatrix}-1&-3&-19&-118\\-3&-6&-37&-231\\2&2&12&75\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad P^{-1}BP=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\0&3&1&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}=J_4(3)\tag{16}$$

.... C の **Jordan 標準形** ....

C の固有値 λ を求める。

$$\det(C-\lambda E)=(\lambda-2)^4=0\qquad \lambda=2\tag{17}$$

固有ベクトル $\boldsymbol{x}_{\lambda_2}$ は次の通り。

$$\lambda=2,\ \boldsymbol{x}_{\lambda_2}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\tag{18}$$

固有ベクトル $\boldsymbol{x}_{\lambda_2}$ を用いて方程式 $(C-2E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{\lambda_2}$ を解く。

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&-1&0&0\\0&2&0&1\\2&2&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\tag{19}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&-1&0&0\\0&2&0&1\\2&2&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{x}=k_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}\tag{20}$$

2 つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_{\lambda_3}$ に対応したベクトルを並べ、行列 P を作る。この行列 P により C のジョルダン標準形 $P^{-1}CP$ は次のように求まる。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J_2(2) \oplus J_2(2) \tag{21}$$

..........................D の **Jordan 標準形**..........................

D の固有値 λ を求める。

$$\det(D - \lambda E) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 4)^3 = 0 \qquad \lambda = 0, 1, 4 \tag{22}$$

固有ベクトル $\boldsymbol{x}_\lambda$ は次の通り。

$$[\lambda = 0], \boldsymbol{x}_{\lambda_0} = \begin{pmatrix} 27 \\ -32 \\ -7 \\ -9 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad [\lambda = 1], \boldsymbol{x}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\lambda = 4], \boldsymbol{x}_{\lambda_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

方程式 $(D - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\lambda$ の解を求める。階数を調べることにより $\boldsymbol{x}_{\lambda_0}, \boldsymbol{x}_{\lambda_1}$ の方程式には解はない。

$$\mathrm{rank}(D - 0E) = 4, \qquad \mathrm{rank}((D - 0E) \ \ \boldsymbol{x}_{\lambda_0}) = 5 \tag{24}$$

$$\mathrm{rank}(D - 1E) = 4, \qquad \mathrm{rank}((D - 1E) \ \ \boldsymbol{x}_{\lambda_1}) = 5 \tag{25}$$

固有ベクトル $\boldsymbol{x}_{\lambda_4}$ を用いて方程式 $(D - 4E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\lambda_4}$ を解く。

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

固有ベクトル $\boldsymbol{x}_{\lambda_0}, \boldsymbol{x}_{\lambda_1}, \boldsymbol{x}_{\lambda_4}$ と $\boldsymbol{x}_{\lambda_4}$ を用いた方程式から求めたベクトルを並べ、行列 P を作る。この行列 P により C のジョルダン標準形 $P^{-1}DP$ は次のように求

まる。

$$P = \begin{pmatrix} 27 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -32 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 0 & 1/3 \\ -9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}DP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{28}$$

これによりジョルダン標準形は $P^{-1}DP = J_1(0) \oplus J_1(1) \oplus J_3(4)$ となる。
