1. 次の a,b の最大公約数 d、および $sa+tb=d$ を満たす整数 s,t を求めよ。

(a) $a=210, b=54$

…………………………………………………………………

ユークリッドの互除法を用いる。

$$210 = 54\times 3+48 \tag{1}$$
$$54 = 48\times 1+6 \tag{2}$$
$$48 = 6\times 8 \tag{3}$$

これにより最大公約数は 6 である。

式 (1) と (2) を変形すると $210-54\times 3=48$、$54-48\times 1=6$ となるので、48 に代入をする。

$$54-48\times 1=6 \tag{4}$$
$$54-(210-54\times 3)\times 1=6 \tag{5}$$
$$54-210+54\times 3=6 \tag{6}$$
$$54\times 4-210=6 \tag{7}$$
$$4b-a=6 \tag{8}$$

よって、$(s,t)=(-1,4), d=6$ である。

$-a+4b=6$ であるが、最大公約数 6 で両辺を割る。

$$-1\times 35+4\times 9=1 \tag{9}$$

$sa+tb=6$ を満たす s,t であれば同様に最大公約数で割って次の式が得られる。

$$s\times 35+t\times 9=1 \tag{10}$$

2 つの式の差を考えれば次の式が得られる。

$$35(s+1)+9(t-4)=0 \tag{11}$$
$$35(s+1)=-9(t-4) \tag{12}$$

a と b を最大公約数で割って 35 と 9 を得たのでこの 2 つの数は互いに素である。その為、等号が成り立っているので $s+1$ は 9 の倍数となる。

$s+1=9k(k\in\mathbb{Z})$ とすると式 (12) を変形し t が得られる。

$$35\times 9k=-9(t-4) \tag{13}$$
$$t=-35k+4 \tag{14}$$

よって、s, t は次のようになる。

$$(s,t) = (9k-1,\ -35k+4) \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{15}$$

（b）$a = 210, b = 55$

....

上の問いと同じようにユークリッドの互除法を利用する。

$$210 = 55 \times 4 - 10 \tag{16}$$
$$55 = (-10) \times (-5) + 5 \tag{17}$$
$$-10 = 5 \times (-2) \tag{18}$$

これにより最大公約数は 5 である。
-10 に代入する。

$$55 - (-10) \times (-5) = 5 \tag{19}$$
$$55 - (210 - 55 \times 4) \times (-5) = 5 \tag{20}$$
$$55 - 210 \times (-5) + 55 \times (-20) = 5 \tag{21}$$
$$210 \times 5 + 55 \times (-19) = 5 \tag{22}$$
$$5a - 19b = 5 \tag{23}$$

よって、s, t は次のようになる。$(s,t) = (5, -19), d = 5$
$5a - 19b = 5$ と $sa + tb = 5$ を最大公約数 5 で割ると次の式が得られる。

$$5 \times 42 - 19 \times 11 = 1 \tag{24}$$
$$s \times 42 + t \times 11 = 1 \tag{25}$$

差を取って式を移項すると次の式が得られる。

$$42(s-5) = -11(t+19) \tag{26}$$

42 と 11 は互いに素であるので、$s-5$ が 11 の倍数である。そこで $k \in \mathbb{Z}$ を用いて $s = 11k + 5$ とする。
これを式 (26) に代入すると $t = -42k - 19$ となる。
よって求めるべき数は次のようになる。

$$(s,t) = (11k+5,\ -42k-19) \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{27}$$

（c） $a=210, b=56$

……………………………………………………………………

$$
\begin{aligned}
210 =& 56 \times 4 - 14 \quad (28)\\
56 =& (-14) \times (-4) \quad (29)
\end{aligned}
$$

最大公約数は 14 である。

$$
\begin{aligned}
210 - 56 \times 4 &= -14 \quad (30)\\
-210 + 56 \times 4 &= 14 \quad (31)\\
-a + 4b &= 14 \quad (32)
\end{aligned}
$$

これにより s, t は次のように求まる。$(s,t) = (-1, 4), d = 14$
$-a + 4b = 14,\ sa + tb = 14$ を最大公約数で割る。

$$
\begin{aligned}
-1 \times 15 + 4 \times 4 =& 1 \quad (33)\\
s \times 15 + t \times 4 =& 1 \quad (34)\\
& \quad (35)
\end{aligned}
$$

差を取って移項する。

$$15(s+1) = -4(t-4) \quad (36)$$

15 と 4 は互いに素なので $k \in \mathbb{Z}$ を用いて $s = 4k - 1$ とする。これを代入すると $t = -15k + 4$ となる。

$$(s,t) = (4k-1,\ -15k+4) \qquad k \in \mathbb{Z} \quad (37)$$

---

2. $x^{100} - 3x^{99} + x$ を $x^2 - 2x - 3$ で割った余りを答えよ。

……………………………………………………………………

$x^2 - 2x - 3$ は 2 次式であるので余りは 1 次式となる。余りを $r(x) = r_1 x + r_2$ とおく。商を $q(x)$ とすると次のような関係がある。

$$
\begin{aligned}
x^{100} - 3x^{99} + x =& (x^2 - 2x - 3)q(x) + r(x) \quad (38)\\
=& (x+1)(x-3)q(x) + r(x) \quad (39)
\end{aligned}
$$

この為、$x^{100} - 3x^{99} + x$ に $x = -1$ を代入した値と $r(-1)$ が等しくなり、$x = 3$ を代入した値と $r(3)$ が等しくなる。

$$(-1)^{100} - 3(-1)^{99} + (-1) =3 \tag{40}$$
$$3^{100} - 3(3)^{99} + 3 =3 \tag{41}$$

そこで $x = -1, x = 3$ の場合の式を作って連立方程式を解く。

$$\begin{cases} -r_1 + r_2 = 3 \\ 3r_1 + r_2 = 3 \end{cases} \tag{42}$$

$(r_1, r_2) = (0, 3)$ となるので、余りは $r(x) = 3$ となる。
