
G を群とする。

共役類 (conjugacy class)

$a \in G$ に対して、a を含む共役類を $K(a)$ を書く。

$$K(a) = \{xax^{-1} \mid x \in G\} \tag{1}$$

$a, b \in G$ について $b = xax^{-1}$ となる $x \in G$ が存在するとき、b は a に共役 (conjugate) であるという。ここでは共役であるとき $a \sim b$ と書く。共役は同値関係である。

…………

中心

G の任意の元と可換な元全体の集合を $Z(G)$ とかく。

$$Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba \ ({}^\forall b \in G)\} \tag{2}$$

$Z(G)$ は G の正規部分群である。この $Z(G)$ を G の中心という。

…………

中心化群

群 G の部分集合 S の中心化群 $Z(S)$ は次で定義される。

$$Z(S) = \{g \in G \mid gs = sg \ ({}^\forall s \in S)\} \tag{3}$$

特に部分群が要素一つだけの集合 $\{a\}$ であるとき、中心化群は $Z(a)$ と書く。

$$Z(a) = \{g \in G \mid ga = ag\} \tag{4}$$

…………

同値関係

集合 S において次の 3 つの性質をすべて満たす関係を同値関係という

- **反射律** $a \sim a$
- **対称律** $a \sim b$ ならば $b \sim a$
- **推移律** $a \sim b,\ b \sim c$ ならば $a \sim c$

…………

正規部分群

部分集合 $N \subset G$ について、$gNg^{-1} \subset N$ $({}^\forall g \in G)$ が成り立つとき、N を G の正規部分といい、$N \triangleleft G$ と書く。

G は群とする。

1. 共役が同値関係であることを示せ。

……………………………………………………………………………

G を群とし、$a, b \in G$ とする。

a と b が共役 $\Leftrightarrow {}^{\forall}x \in G \ b = xax^{-1}$

同値関係の 3 条件 (反射律、対称律、推移律) を確認する。

反射律

$e \in G$ を単位元とする。

$$eae^{-1} = eae = a \tag{5}$$

よって、$a \sim a$ である。

対称律

$$\begin{aligned} a \sim b \Rightarrow b = xax^{-1} \quad &\Rightarrow x^{-1}bx = x^{-1}xax^{-1}x \quad \Rightarrow x^{-1}bx = a & (6) \\ \Rightarrow a = x^{-1}bx \quad &\Rightarrow a = (x^{-1})b(x^{-1})^{-1} & (7) \\ \Rightarrow a = yby^{-1} \quad (y = x^{-1} \in G) \quad &\Rightarrow b \sim a & (8) \end{aligned}$$

よって、$a \sim b$ ならば $b \sim a$ である。

推移律

$$\begin{aligned} a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow b = xax^{-1},\ c = xbx^{-1} \qquad &\Rightarrow c = xxax^{-1}x^{-1} & (9) \\ \Rightarrow c = (xx)a(xx)^{-1} \qquad &\Rightarrow a \sim c & (10) \end{aligned}$$

よって、$a \sim b,\ b \sim c$ ならば $a \sim c$ である。

以上により、共役 $\sim$ は同値関係である。

---

2. 次を示せ。

(a) $a \in Z(G) \Rightarrow K(a) = \{a\}$。特に $K(e) = \{e\}$

……………………………………………………………………………

$Z(G)$ は群 G の中心である。

$$Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba \ ({}^{\forall}b \in G)\} \tag{11}$$

a の共役類 $K(a)$ は次のような集合である。

$$K(a) = \{xax^{-1} \mid x \in G\} \tag{12}$$

$a \in Z(G)$ より、a は G の任意の元と可換である。よって、$xax^{-1} = xx^{-1}a = ea = a$ であるので、$K(a)$ の元は a のみになる。

単位元 $e \in G$ も $e \in Z(G)$ であるから同様に $K(e) = \{e\}$ である。

(b) $G \triangleright N \Rightarrow N$ は G の共役類のいくつかの合併集合である。

………………………………………………………………………………………

$n \in N$ とすると $n \in K(n)$ である。つまり、$\{n\} \subset K(n)$ であるから

$$N = \bigcup_{n \in N} \{n\} \subset \bigcup_{n \in N} K(n) \tag{13}$$

$n \in N$ の共役類 $K(n)$ の定義は

$$K(n) = \{xnx^{-1} \mid x \in G\} \tag{14}$$

であるから正規部分群 N に含まれ、$K(n) \subset N$ を満たす。
つまり、

$$\bigcup_{n \in N} K(n) \subset N \tag{15}$$

である。
よって、次の式を満たす。

$$N = \bigcup_{n \in N} K(n) \tag{16}$$

---

3. $a \in G$ に対し、$f : G \to K(a)$ を $f(x) = xax^{-1}$ とする。このとき、次を示せ。
   (a) f は全射

   ………………………………………………………………………………………

   任意の $K(a)$ の元は gag^{-1} $(g \in G)$ という形をしている。
   よって、$f(g) = gag^{-1}$ となる $g \in G$ が存在する為、f は全射である。

   (b) $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x, y$ は $G/Z(a)$ の同じ類に属する

   ………………………………………………………………………………………

   $f(x) = f(y)$ とする。
   $f(x) = xax^{-1},\ f(y) = yay^{-1}$ より $xax^{-1} = yay^{-1}$ である。
   右から x、左から y^{-1} をかけると $y^{-1}xa = ay^{-1}x$ である。
   $y^{-1}xa = ay^{-1}x$ より $y^{-1}x \in Z(a)$ である。
   よって、$G/Z(a)$ 上で $y^{-1}x = e$ である為、$x = y$ である。
   これを逆にたどると x, y が $G/Z(a)$ 同じ類に属することから $f(x) = f(y)$ を示せる。

   ---

4. 定理 1.7.1 より $|K(a)| = (G : Z(a))$ が示せたので、これを h_i と置いた。

$(G:Z(a))$ は G の元の数 $|G|$ を $Z(a)$ の元の数 $|Z(a)|$ で割った値を意味するので、$(G:Z(a)) = |G| \div |Z(a)|$ である。このとき、必ず割り切れるようになっている。$h_i = (G:Z(a_i))$ と置けば、$h_i \times |Z(a_i)| = |G|$ であるので、h_i は $|G|$ を割り切る数である。

---

5. $g = |G|,\ h_i = K(a_i)$ とする。
集合の直和 $G = \bigsqcup_{i=1}^{t} K(a_i)$ から $g = h_1 + \cdots + h_t$ である。

....

集合の直和 $G = \bigsqcup_{i=1}^{t} K(a_i)$ は $G = \bigcup_i K(a_i)$ かつ任意の 2 つの元 a_i, a_j について $K(a_i) \cap K(a_j) = \emptyset$ である。
G の位数は $|K(a_i)|$ の和になっているので、$g = h_1 + \cdots + h_t$ である。

---

6. $h_1 = |K(e)|$ とすれば、$h_1 = 1$ である。

....

$K(a)$ は次のように定義されている。

$$K(a) = \{xax^{-1} \mid x \in G\} \tag{17}$$

単位元 $e \in G$ は G の任意の元を常に可換である。つまり、${}^{\forall}g \in G$ に対して $geg^{-1} = gg^{-1}e = ee = e$ である。
これにより $K(e) = \{e\}$ であるから $|K(e)| = 1$ である。
