
$a < b,\ c < d$ とする。写像 $\phi : [a, b] \to [c, d]$ が次の条件を満たすとする。

1. ϕ は全単射
2. ϕ は C^1-級
3. 逆写像 ϕ^{-1} も C^1-級
4. ${}^\forall t \in [a, b]$ において $\phi'(t) > 0$

この時、$\phi(a) = c$ かつ $\phi(b) = d$ であることを示せ。

…………………………………………………………………………

ϕ と ϕ^{-1} は C^1-級である為、連続である。$\phi'(t) > 0$ より ϕ は単調増加である。
これにより $\alpha, \beta \in [a, b]$ において $\alpha < \beta \Rightarrow \phi(\alpha) < \phi(\beta)$ である。
ϕ は全単射であるから $c, d \in [c, d]$ に対応する点が $[a, b]$ にただ一つだけ存在する。
この為、$\phi(a) = c,\ \phi(b) = d$ であることが分かる。

写像 C_1, C_2 を次のように定める。

$$C_1 : [1, 4] \to \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (t, \sin t) \tag{1}$$
$$C_2 : [1, 2] \to \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (t^2, \sin t^2) \tag{2}$$

この時、C_1, C_2 は向きまで込めて C^1-級同値となることを示せ。

…………………………………………………………………………

写像 $f : [1, 2] \to [1, 4]$ を $f(x) = x^2$ とすると、f は全単射であり、C^∞-級である。
C_2 は C_1 と f の合成関数である。つまり、$C_2 = C_1 \circ f$ である。f は単調増加であるので C_1, C_2 の向きは同じとなる。
$(t, \sin t)' = (1, \cos t)$ であるので、C_1 は C^1-級である。$C_2 = C_1 \circ f$ であり、f は C^∞-級であるので、C_2 は C^1-級である。

$C : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ を C^1-級曲線とし、$\check{C} : [-b, -a] \to \mathbb{R}^n$ を C の逆向きの曲線とする。この時、

$$\int_{(C, \check{C})} \boldsymbol{f} = 0 \tag{3}$$

となることを示せ。

…………………………………………………………………………

$\check{C}$ が C と逆向きであるので、${}^\forall t \in [-b, -a]$ において、$\check{C}(t) = C(-t)$ となる。こ

の為、

$$\int_C \boldsymbol{f} = -\int_{\check{C}} \boldsymbol{f} \tag{4}$$

となる。これにより次のように積分値が 0 となる。

$$\int_{(C,\check{C})} \boldsymbol{f} = \int_C \boldsymbol{f} + \int_{\check{C}} \boldsymbol{f} = -\int_{\check{C}} \boldsymbol{f} + \int_{\check{C}} \boldsymbol{f} = 0 \tag{5}$$