
勾配 (gradient)

関数 f に対して、f の勾配 $\overset{\text{グラディエント}}{(\text{gradient})}$ $Df(=\nabla f)$

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x_1,x_2,x_3)\mapsto y \qquad Df=\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) \tag{1}$$

偏微分方程式（ partial differential equation ）

輸送方程式（ transport equation ）

$u=u(x,t)$ $(x\in\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R})$ $u:\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$

$Du=(u_{x_1},u_{x_2},\ldots,u_{x_n})$

$b\in\mathbb{R}^n$

Report 1.1

関数 $u=u(x,t)$ $(x\in\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R})$ は $u:\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ とし、$b\in\mathbb{R}^n$ とする。

$$u_t+b\cdot Du=0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \qquad z(s)=u(x+sb,t+s) \quad (s\in\mathbb{R}) \tag{2}$$

この時、次の式が成り立つ。

$$\dot{z}(s)=Du(x+sb,t+s)\cdot b+u_t(x+sb,t+s)=0 \tag{3}$$

....

$u:\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$

合成関数の微分を用いて $z(s)$ を s で微分する。

$$\frac{d}{ds}z(s)=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{dt}{ds} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

第 2 項 $\frac{\partial z}{\partial t}\frac{dt}{ds}$ は次のように計算できる。

$$\frac{\partial z}{\partial t}\frac{dt}{ds}=\frac{\partial u}{\partial t}(x+sb,t+s)=u_t(x+sb,t+s) \tag{6}$$

第 1 項 $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds}$ は多変数関数の微分であるので、$x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ より次のように

なる。

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_i + sb_i) \cdot \frac{d(x_i + sb_i)}{ds} \tag{7}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(x_i + sb_i) \cdot b_i = Du(x + sb) \cdot b \tag{8}$$

よって、$z(s)$ を s で微分すると $Du(x+sb, t+s) \cdot b + u_t(x+sb, t+s)$ が得られる。

式 (2) より $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ 上で、$u_t + b \cdot Du = 0$ であるので、$t + s > 0$ において $Du(x+sb, t+s) \cdot b + u_t(x+sb, t+s) = 0$ となる。

Report 1.2

$b \in \mathbb{R}^n$,　$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{9}$$

$$u(x, t) = g(x - tb) \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0) \tag{10}$$

(10) で定義される $u(x, t)$ は (9) を満たすことを示せ。

....

$u(x, t) = g(x - tb)$ より $t = 0$ の時は $u(x, 0) = g(x)$ である。

$t > 0$ において、u_t を計算する。これは t で偏微分を行うので、$g(x - tb)$ を偏微分する。

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t} g(x - tb) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(x - tb) \times (-b_1) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n}(x - tb) \times (-b_n) \tag{11}$$

同様に $b \cdot Du$ も計算する。

$$b \cdot Du = (b_1, \ldots, b_n) \cdot (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) \tag{12}$$

$$= (b_1, \ldots, b_n) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x - tb), \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x - tb) \right) \tag{13}$$

$$= b_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(x - tb) + \cdots b_n \frac{\partial g}{\partial x_n}(x - tb) \tag{14}$$

よって、$u_t + b \cdot Du = 0$ となる。

Report 1.3

V は $U \subset \mathbb{R}^n$ の任意のなめらかな部分領域とし、$\operatorname{div} F$ が連続であるとする。この時、$\displaystyle\int_V \operatorname{div} F dx = 0$ であれば U 上で $\operatorname{div} F = 0$ となることを示せ。

. . . .

V は任意であるので、U 上の任意の点 P と P を中心とした半径 ε の球 B 上の積分 $\int_B \operatorname{div} F dx = 0$ を考える。

B の体積 $|B|$ と $(\operatorname{div} F)(P)$ を用いて $\int_B \operatorname{div} F dx$ は $|B|(\operatorname{div} F)(P)$ に近似できる。

$\int_B \operatorname{div} F dx = 0$ より $\lim_{\varepsilon\to 0}|B|(\operatorname{div} F)(P) = 0$ であるが、両辺を ε^n で割ることにより $(\operatorname{div} F)(P) = 0$ が得られる。

$^\forall P \in U$ であったので、U 上で $\operatorname{div} F = 0$ となる。

Report 1.4

$x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$ の時、

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x| & (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|x|^{n-2}} & (n \geq 3) \end{cases} \tag{15}$$

とする。この時、ある定数 $C > 0$ を用いて次の不等式が成り立つ。

$$|D\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}}, \quad |D^2\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^n} \tag{16}$$

. . . .

$x \in \mathbb{R}^n$ より $x = (x_1, \ldots, x_n)$ とする。

$D\Phi(x) = \left(\dfrac{\partial\Phi(x)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial\Phi(x)}{\partial x_n}\right)$ より、各成分を計算する。

$n = 2$ の場合

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_i} = -\frac{1}{2\pi}\frac{x_i}{x_1^2 + x_2^2} = -\frac{1}{2\pi}\frac{x_i}{|x|^2} \tag{17}$$

これより、

$$|D\Phi(x)| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2\pi}\frac{x_1}{|x|^2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\pi}\frac{x_2}{|x|^2}\right)^2} = \frac{1}{2\pi|x|} \tag{18}$$

$n \geq 3$ の場合

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x|^{n-2}} = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{-(n-2)x_i}{|x|^n} \tag{19}$$

これにより、

$$|D\Phi(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n\left(\frac{-x_i}{n\alpha(n)|x|^n}\right)^2} = \frac{1}{n\alpha(n)|x|^{n-1}} \tag{20}$$

よって、$n \geq 2$ に対して、次を満たす定数 $C > 0$ が存在する。

$$|D\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}} \tag{21}$$

$$D^2\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i^2}$$ より各項を計算する。

$n = 2$ の場合

$$\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{2\pi}\frac{-x_1^2 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_2^2} = -\frac{1}{2\pi}\frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \tag{22}$$

$$|D^2\Phi(x)| = \left| -\frac{1}{2\pi}\frac{-x_1^2 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - \frac{1}{2\pi}\frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right| = 0 \tag{23}$$

$n \geq 3$ の場合

$$\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i^2} = \frac{-1}{n\alpha(n)}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_i}{|x|^n} = \frac{-1}{n\alpha(n)}\frac{|x|^n - x_i \cdot \frac{n}{2}|x|^{n-2} \cdot 2x_i}{|x|^{2n}} \tag{24}$$

$$|D^2\Phi(x)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{n\alpha(n)}\frac{|x|^n - x_i^2 n|x|^{n-2}}{|x|^{2n}} \right| = \left| \frac{-1}{n\alpha(n)}\frac{n|x|^n - n|x|^n}{|x|^{2n}} \right| = 0 \tag{25}$$