1. $\mathbb{F}_{13}$ における等式 $5^{123} = x$ をみたす x を $0, 1, 2, \ldots, 12$ の中から選べ。

…………………………………………………………………………………………

写像 f を次のように自然な対応で定めると、準同型写像である。

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} = \mathbb{F}_{13} \tag{1}$$

$f(5) = 5, f(5^2) = -1 = 12, f(5^3) = -5 = 8, f(5^4) = 1$ となる。これを利用すると次のように計算できる。

$$5^{123} = (5^4)^{30} \times 5^3 \tag{2}$$

$$f(5^{123}) = f(5^3) = 8 \tag{3}$$

答えは $\underline{\ 8\ }$

…………………………………………………………………………………………

写像 f は整数に対し、13 で割った余りを対応させる写像になっていて、その余りを集めた集合 $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z} = \mathbb{F}_{13}$ は体となっている。
$\mathbb{F}_{13}$ の中では -1 と 12 は同じ数字を表し、$(-1)^2 = 1$ は $12^2 = 13 \times 11 + 1$ よりも明らか。
f は準同型であるので $f(5^4) = f(5^2) \times f(5^2) = (-1) \times (-1) = 1$ である。$f(5^{123}) = f((5^4)^30 \times 5^3) = (f(5^4))^{30} \times f(5^3)$ となるので、答えは計算してもめられる。

---

2. $f(x) = x^3 + 2x + 2$ について以下を確認する。
   (a) $\mathbb{F}_3[x]$ の元として既約かどうか。
   $\underline{f(x) \in \mathbb{F}_3[x] \text{ は既約}}$
   (b) $\mathbb{F}_5[x]$ の元として既約かどうか。
   $\underline{f(x) \in \mathbb{F}_5[x] \text{ は可約}}$

$$x^3 + 2x + 2 = (x-1)(x^2 + x + 3) \tag{4}$$

$$= (x-1)(x-1)(x+2) = (x+4)^2(x+2) \tag{5}$$

   (c) $\mathbb{F}_7[x]$ の元として既約かどうか。
   $\underline{f(x) \in \mathbb{F}_7[x] \text{ は可約}}$

$$x^3 + 2x + 2 = (x-2)(x^2 + 2x + 6) \tag{6}$$

$$= (x-2)(x-2)(x+4) = (x+5)^2(x+4) \tag{7}$$

…………………………………………………………………………………………

$f(x) = x^3 + 2x + 2$ の x に様々な数を代入し、$f(a) = 0$ となる a を見つければ $x - a$ で式を分解できる。$f(0) = 2, f(1) = 5, f(2) = 14$ である。
$\mathbb{F}_5$ 上では $f(1) = 5 = 0$ であるので、$\mathbb{F}_5[x]$ 上では $f(x)$ は $(x-1) = (x+4)$ で分解できる。
$\mathbb{F}_7$ 上では $f(2) = 14 = 0$ であるので、$\mathbb{F}_7[x]$ 上では $f(x)$ は $(x-2) = (x+5)$ で分解できる。

---

3. $\mathbb{F}_3[x]$ のモニックな 3 次多項式の個数を求めよ。既約可約は問わない。
   モニックな 3 次多項式は $x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{F}_3[x]$ の形をしている。$(a, b, c) \in \mathbb{F}_3^3$ の組合せは $3^3 = 27$ である。そこでモニック多項式の個数は $\underline{\ 27\ }$ である。

---

4. $\mathbb{F}_2[x]$ の元として既約なものを選べ。
   (a) $x^5 + 1$

（b）$x^5 + x + 1$

（c）$x^5 + x^2 + 1$

（d）$x^5 + x^3 + 1$

（e）$x^5 + x^4 + 1$

$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ なのでこれらを代入して 0 であれば可約である。$x^5 + 1$ のみ $2 = 0$ となるので、これ以外が既約。