

関数 $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ を三角関数を用いて $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$ と Fourier 級数展開を

出来るか考える。

「 f は可積分」、「 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$ は絶対収束」という仮定の下では $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$ と求めることが出来る。

これにより $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$ が収束するが、級数は $f(x)$ と一致するかは不明である。

関数 f によっては、その Fourier 級数 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$ が収束しない例もあり、級数の収束するかと収束先が $f(x)$ であるかを考える必要がある。

Poisson の定理 ($\forall f \in C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ に対して、 $P_r f \xrightarrow{r \nearrow 1} f$ (一様収束)) を利用し、 $f \in C_{\text{per}}^2[-\pi, \pi]$ ならばフーリエ級数 $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$ に展開できる事が示せる。

これにより $f \in C_{\text{per}}^2[-\pi, \pi]$ は Fourier 展開が出来るための十分条件ではあるが、 $C_{\text{per}}^2[-\pi, \pi]$ ではない関数でも Fourier 展開が可能なものもある。

$f \in C_{\text{per}}^2[-\pi, \pi]$ であれば、Fourier 展開 $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$ が出来るが、 $f \in C_{\text{per}}^1[-\pi, \pi]$ の時もこのように展開ができる事が示せる。

まず、 $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ に内積を定義し、内積から距離を定義する。この距離において Bessel の不等式 $\left\| \sum_{n=-M}^N \hat{f}(n) e_n \right\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$ ($e_n(x) := e^{inx}$) が成立する。この不等式を利用することで $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) < \infty$ ということが示せ、 C^1 関数の Fourier 展開ができることがわかる。

$f \in C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ の場合は先程定義した距離においての収束を考えることで Fourier 展開ができる。

$p < \infty$ において $L^p(\mu)$ のコーシー列は概収束する部分列を持つことから収束することがわかる。

$L^\infty(\mu)$ のコーシー列は esssup を考えることにより収束することがわかる。よって、 $L^p(\mu)$ は完備な距離空間である。

これにより、 $\sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e_n$ は距離 $\|\cdot\|_2$ により収束する。

$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ に対し、畳み込み $f * g$ は $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ を満たす。また、 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ に対し、 $f * g$ は C^∞ 級である。

これらを用いて $p \in [1, \infty)$ に対して $C_{per}^\infty[-\pi, \pi]$ は $(L^p(-\pi, \pi), \|\cdot\|_p)$ で稠密であることが示せる。この稠密性より $f \in L^2(-\pi, \pi)$ の Fourier 級数の部分和 $\sum_{n=-M}^N \hat{f}(n)e_n$ は $M, N \rightarrow \infty$ で f に L^2 収束することが得られる。
