各種定義

$\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \ldots, a_n)$ とする。

ノルム

$\|\cdot\|$ がノルムである $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

(i). $\|\boldsymbol{a}\| > 0$ 特に $\|\boldsymbol{a}\| = 0$ なら $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

(ii). スカラー (実数とか)$\alpha$ に対し、$\|\alpha\boldsymbol{a}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{a}\|$

(iii). $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$

$$\textbf{2 乗ノルム} \quad \|\boldsymbol{a}\|_2 = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2} \tag{1}$$

$$\textbf{1 乗ノルム} \quad \|\boldsymbol{a}\|_1 = |a_1|^1 + \cdots + |a_n|^1 \tag{2}$$

$$\textbf{m 乗ノルム} \quad \|\boldsymbol{a}\|_m = (|a_1|^m + \cdots + |a_n|^m)^{\frac{1}{m}} \tag{3}$$

ノルムの同値

2 つのノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ に対し、ある定数 $C_1, C_2$ が存在し、次を満たす時 2 つのノルムは同値である。

$$C_1\|\boldsymbol{a}\| \leq \|\boldsymbol{a}\|' \leq C_2\|\boldsymbol{a}\| \tag{4}$$

---

(1). $\boldsymbol{x}^{(m)}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2$ を次のようにおく。

$$\boldsymbol{x}^{(m)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2m} \\ 2 - \frac{1}{m} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

このとき、$\{\boldsymbol{x}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ が $\|\cdot\|_2$ について $\boldsymbol{\alpha}$ に収束することを示せ。

$$\lim_{m\to\infty} \|\boldsymbol{x}^{(m)}\|_2 = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2m}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{m}\right)^2} \tag{6}$$

$$= \sqrt{(1+0)^2 + (2-0)^2} = \|\boldsymbol{\alpha}\|_2 \tag{7}$$

---

(2). $\mathbb{R}^2$ 上で $\|\cdot\|_2$ がノルムであることを示せ。

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2)$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tag{8}$$

$$\geq \sqrt{x_{min}^2 + x_{min}^2} \qquad x_{min} : |x_1| と |x_2| の小さい方 \tag{9}$$

$$= \sqrt{2}x_{min} \geq 0 \tag{10}$$

よって、$\|\boldsymbol{x}\|_2 \geq 0$ であり、等号は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のときのみ成り立つ。

$s \in \mathbb{R}, s \neq 0$ とする。

$$\begin{aligned}
\|s\boldsymbol{x}\|_2 =& \sqrt{(sx_1)^2 + (sx_2)^2} && (11)\\
=& |s|\sqrt{x_1^2 + x_2^2} && (12)\\
=& |s|\|\boldsymbol{x}\|_2 && (13)
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2)$

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_2^2 =& \sqrt{(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2}^2 && (14)\\
=& x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2 && (15)\\
(\|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{y}\|_2)^2 =& \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\right)^2 && (16)\\
=& x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)} && (17)
\end{aligned}$$

シュワルツの不等式 $(x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$ より $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_2^2 \leq (\|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{y}\|_2)^2$ となり、$\|\cdot\|_2$ が非負であるので $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{y}\|_2$ となる。
次の 3 つを満たすため $\|\cdot\|_2$ はノルムである。

- $\|\boldsymbol{x}\|_2 \geq 0$
- $\|s\boldsymbol{x}\|_2 = |s|\|\boldsymbol{x}\|_2$
- $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{y}\|_2$

---

(3). $\mathbb{R}^2$ 上で $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ が同値であることを示せ。

..........................................................................

$\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1$ と $\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq 2\|\boldsymbol{x}\|_2$ を示す。

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|_2 =& \sqrt{x_1^2 + x_2^2} && (18)\\
\leq& \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1||x_2|} && (19)\\
=& \sqrt{(|x_1| + |x_2|)^2} = \|\boldsymbol{x}\|_1 && (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|_1 =& |x_1| + |x_2| && && (21)\\
\leq& 2x_{max} && x_{max} : |x_1|\text{と}|x_2|\text{の大きい方} && (22)\\
=& 2(x_{max}^2)^{\frac{1}{2}} && && (23)\\
\leq& 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 2\|\boldsymbol{x}\|_2 && && (24)
\end{aligned}$$

これより次が示せるので、$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ は同値である。

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq 2\|\boldsymbol{x}\|_2 \tag{25}$$

---

(4). $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2$ とする。この時、$\boldsymbol{x}^{(m)}$ が $\|\cdot\|_2$ について $\boldsymbol{\alpha}$ に収束するなら $\boldsymbol{x}^{(m)}$ は $\|\cdot\|_1$ について $\boldsymbol{\alpha}$ に収束することを示せ。

..........................................................................................

$\boldsymbol{x}^{(m)}$ が $\|\cdot\|_2$ について $\boldsymbol{\alpha}$ に収束するので

$$\lim_{m\to\infty}(\|\boldsymbol{x}^{(m)}\|_2 - \|\boldsymbol{\alpha}\|_2) = 0 \tag{26}$$

$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ は同値であるから

$$\|\boldsymbol{x}^{(m)}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}^{(m)}\|_1 \leq 2\|\boldsymbol{x}^{(m)}\|_2, \qquad \|\boldsymbol{\alpha}\|_2 \leq \|\boldsymbol{\alpha}\|_1 \leq 2\|\boldsymbol{\alpha}\|_2 \tag{27}$$

これより次の不等式を得る。

$$\|\boldsymbol{x}^{(m)}\|_2 - \|\boldsymbol{\alpha}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}^{(m)}\|_1 - \|\boldsymbol{\alpha}\|_1 \leq 2(\|\boldsymbol{x}^{(m)}\|_2 - \|\boldsymbol{\alpha}\|_2) \tag{28}$$

$\|\boldsymbol{x}^{(m)}\|_2$ は $\|\boldsymbol{\alpha}\|_2$ に収束する為、

$$\lim_{m\to\infty}(\|\boldsymbol{x}^{(m)}\|_2 - \|\boldsymbol{\alpha}\|_2) = \lim_{m\to\infty}2(\|\boldsymbol{x}^{(m)}\|_2 - \|\boldsymbol{\alpha}\|_2) = 0 \tag{29}$$

はさみうちの原理から

$$\lim_{m\to\infty}(\|\boldsymbol{x}^{(m)}\|_1 - \|\boldsymbol{\alpha}\|_1) = 0 \tag{30}$$

であるので、$\|\boldsymbol{x}^{(m)}\|_1$ は $\|\boldsymbol{\alpha}\|_1$ に収束する。