$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\} \mid 1 - \sqrt{1-(x-1)^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2},\ 0 \leq x \leq 1\} \tag{1}$$

領域 D は積分定理が使える 2 次元領域であるか判定し証明せよ。

…………………………………………………………………………………………

以下の 4 つの条件を満たす領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ を「積分定理が使える 2 次元領域」とする。

1. $I = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ が存在し、その開核 $I^\circ = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$ が $D \subset I^\circ$
2. I の分割 Δ で、$D_{ij} = \Delta_{ij} \cap D$ が C^1-級縦線集合 又は C^1-級横線集合 になる。$(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$
3. 有限個の C^1-級曲線 $(C_1, C_2, \ldots, C_N)$ が存在し $D^b = \bigcup_{i=1}^N \operatorname{Im} C_i$ となる。

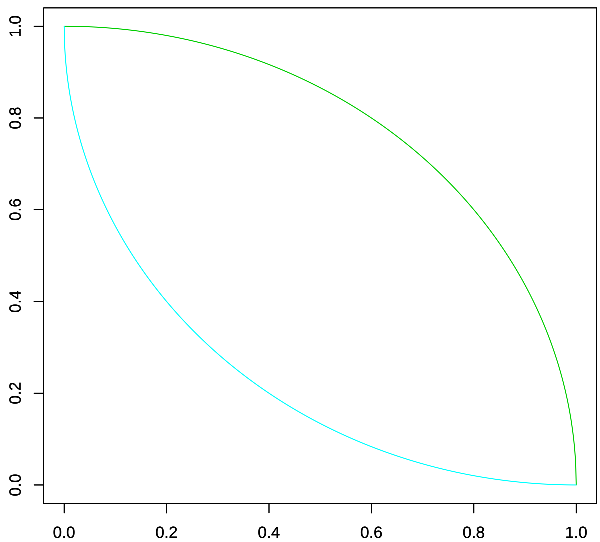
$$D^b = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid {}^\forall\varepsilon > 0 \text{ に対し } B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset \text{ かつ } B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \cap D^c \neq \emptyset\} \tag{2}$$

D^b を D の境界と呼ぶ。

4. $$(C_1, \ldots, C_N) \sim (\partial D_{11}, \partial D_{12}, \ldots, \partial D_{mn}) \tag{3}$$

$\partial D = (C_1, \ldots, C_N)$ と定義し、これを D の向きまで込めた境界と呼ぶ。

…………………………………………………………………………………………



1. 領域 D は $[0,1]\times[0,1]$ に含まれるが、点 $(0,1)$, $(1,0)$ が D に含まれるので I はそれより大きく取る必要がある。
   例えば、$I=[-1,2]\times[-1,2]$ と置けば、$D\subset(-1,2)\times(-1,2)$ となる。
2. D は縦線集合であるので、D_{ij} は D を Δ_{ij} に制限する事により縦線集合として得られる。
3. C_1, C_2 を次のようにおく。

$$C_1 :[0,1]\to\mathbb{R}^2,\quad x\to(x,\sqrt{1-x^2}) \tag{4}$$
$$C_2 :[0,1]\to\mathbb{R}^2,\quad x\to(x,1-\sqrt{1-(x-1)^2}) \tag{5}$$

   この時、境界 D^b は

$$D^b=\operatorname{Im}C_1\cup\operatorname{Im}C_2 \tag{6}$$

4. D の分割 D_{ij} はその境界を正の向きに向き付けすると、重なり合う部分は逆向きとなる。
   各 ∂D_{ij} をつなぎ合わせると打ち消し合う境界が消え、向きづけされた C_1, C_2 が残る。
   これにより向きづけされた境界 ∂D が存在する。

これらにより、領域 D は積分定理が利用できる領域である。