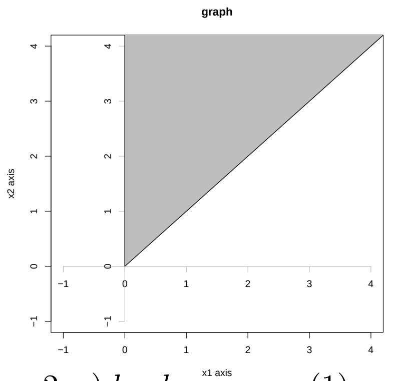
$g(x_1, x_2) = \exp(-x_1 - 2x_2)$ を
$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 \geq x_1 \geq 0\}$ 上で積分せよ。



領域 D での積分は x_1 が区間 $[0, x_2]$ 範囲で積分することになり、x_2 は 0 以上の範囲で積分をする。(右の図) この為、次のような式に変形できる。

$$\iint_D \exp(-x_1 - 2x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^\infty \int_0^{x_2} \exp(-x_1 - 2x_2) dx_1 dx_2 \tag{1}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_0^n \int_0^{x_2} \exp(-x_1 - 2x_2) dx_1 dx_2 \tag{2}$$

内側の x_1 における積分は次のように求められる。

$$\int_0^{x_2} \exp(-x_1 - 2x_2) dx_1 = [-\exp(-x_1 - 2x_2)]_{x_1=0}^{x_1=x_2} \tag{3}$$

$$= -\exp(-x_2 - 2x_2) + \exp(-0 - 2x_2) \tag{4}$$

$$= -\exp(-3x_2) + \exp(-2x_2) \tag{5}$$

これを (2) の式に代入する。

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^n \int_0^{x_2} \exp(-x_1 - 2x_2) dx_1 dx_2 \tag{6}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_0^n (-\exp(-3x_2) + \exp(-2x_2)) dx_2 \tag{7}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{3} \exp(-3x_2) - \frac{1}{2} \exp(-2x_2) \right]_{x_2=0}^{x_2=n} \tag{8}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3} \exp(-3n) - \frac{1}{2} \exp(-2n) - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \tag{9}$$

$$= \frac{1}{3} \times 0 - \frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \tag{10}$$

$$\iint_D \exp(-x_1 - 2x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{6} \tag{11}$$