

複素数の大きさ

複素数 z は 2 つの実数 a, b を用いて $z = a + bi$ と書ける。

ここで、複素数 z の大きさを次のように定める。

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1)$$

これは三平方の定理から斜辺の長さを求める式と同じである。

大きさを 2 乗すると

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \quad (2)$$

である。

$z = a + bi$ に対して $\bar{z} = a - bi$ を z の共役な複素数という。これらの積は次のようになる。

$$z \times \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \quad (3)$$

これにより次の式が成り立つ。

$$|z|^2 = z \times \bar{z} \quad (4)$$

2 つの複素数 α, β に対して $|\alpha - \beta|^2$ を計算する。

$$|\alpha - \beta|^2 = (\alpha - \beta)(\overline{\alpha - \beta}) \quad (5)$$

$$= (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \quad (6)$$

$$= \alpha\bar{\alpha} - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} - \beta\bar{\beta} \quad (7)$$

$$= |\alpha|^2 - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} - |\beta|^2 \quad (8)$$