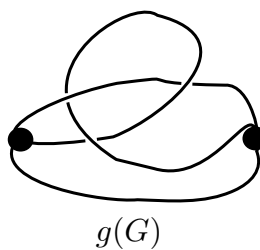
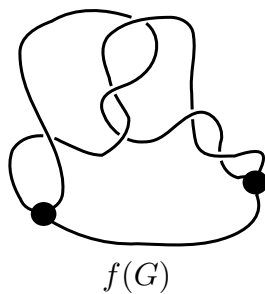
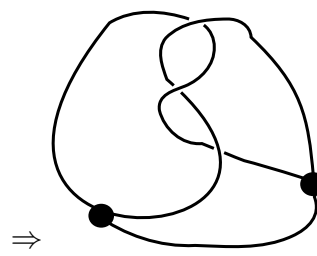
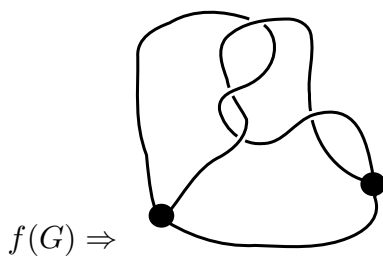

1. 次の空間グラフ $f(G), g(G)$ は互いに同型であることを確かめよ。

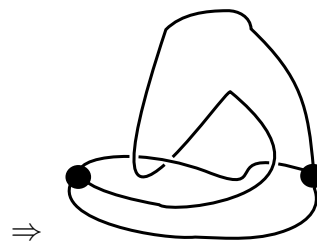


(1)

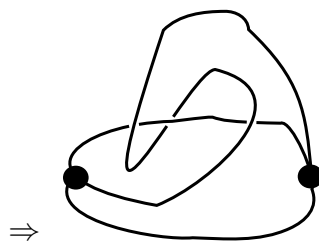
.....



(2)

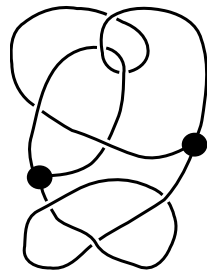


(3)

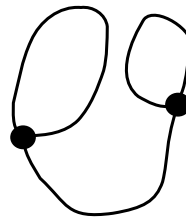


$\Rightarrow g(G)$ (4)

2. 次の空間グラフ $f(G), g(G)$ は互いに同型であることを確かめよ。



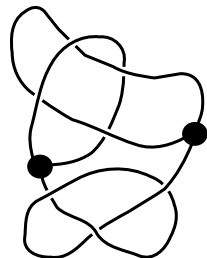
$f(G)$



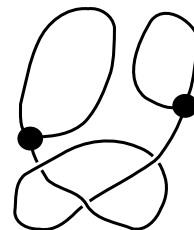
$g(G)$

(5)

.....



$f(G) \Rightarrow$



\Rightarrow

(6)



\Rightarrow

$\Rightarrow g(G)$

(7)

3. 空間グラフの同型関係 \cong について、以下が成り立つことをそれぞれ示せ。

(a) 空間グラフ $f(G)$ に対し、 $f(G) \cong f(G)$

.....

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \quad (8)$$

写像 Φ を恒等写像とすると $\Phi(f(G)) = f(G)$ である。

(b) 空間グラフ $f(G), g(G)$ に対し、 $f(G) \cong g(G)$ ならば $g(G) \cong f(G)$

.....

$f(G) \cong g(G)$ であるので、同相写像 Φ が存在し、 $\Phi(f(G)) = g(G)$ である。
 Φ は同相写像なので、 $X \circ \Phi = \Phi \circ X = id$ となる同相写像 X が存在する。
 この X により、 $X(g(G)) = f(G)$ であるので、 $g(G) \cong f(G)$ である。

- (c) 空間グラフ $f(G), g(G), h(G)$ に対し、 $f(G) \cong g(G)$ かつ $g(G) \cong h(G)$ ならば
 $f(G) \cong h(G)$

.....

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \quad (9)$$

$$X : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \quad (10)$$

$f(G) \cong g(G)$ より同相写像 Φ が存在し、 $\Phi(f(G)) = g(G)$ である。
 また、 $g(G) \cong h(G)$ より同相写像 X が存在し、 $X(g(G)) = h(G)$ である。
 Φ, X が同相写像であるので、その合成写像 $X \circ \Phi$ も同相写像であり、
 $X(\Phi(f(G))) = h(G)$ である。
 よって、 $f(G) \cong h(G)$ である。

4. X, Y, Z を位相空間とし、 $\varphi : X \rightarrow Y, \psi : Y \rightarrow Z$ をそれぞれ写像とするととき、合成写像 $\psi \circ \varphi : X \rightarrow Z$ について、以下の問いに答えよ。

- (a) φ, ψ がともに全単射ならば、 $\psi \circ \varphi$ も全単射であることを示せ。

.....

全射性

φ, ψ がともに全射であるので、任意の $y \in Y$ に対し $y = \varphi(x)$ となる $x \in X$ が存在し、任意の $z \in Z$ に対し $z = \psi(y)$ となる $y \in Y$ が存在する。

任意の $z \in Z$ に対し $z = \psi(y)$ となる $y \in Y$ が存在するので、この $y \in Y$ について $y = \varphi(x)$ となる $x \in X$ が存在する。

つまり、 $\forall z \in Z$ に対し、 $z = \psi \circ \varphi(x)$ となる $x \in X$ が存在する。

よって、 $\psi \circ \varphi$ は全射である。

単射性

φ, ψ がともに単射である。

$y_1, y_2 \in Y$ に対し、 $\psi(y_1) = \psi(y_2)$ であれば $y_1 = y_2$ である。

φ は全射であるので、 $y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2)$ となる $x_1, x_2 \in X$ が存在する。

φ は単射であるので、 $x_1 = x_2$ である。

つまり、 $\psi(\varphi(x_1)) = \psi(\varphi(x_2))$ であれば $x_1 = x_2$ である。

よって、 $\psi \circ \varphi$ は単射である。

この2つより $\psi \circ \varphi$ は単全射である。

-
- (b) φ, ψ がともに連続写像ならば、 $\psi \circ \varphi$ も連続写像であることを示せ。

.....
 φ, ψ が連続写像であるので、任意の開集合 $U_Y \subset Y, U_Z \subset Z$ に対して、 $\varphi^{-1}(U_Y), \psi^{-1}(U_Z)$ が開集合となる。

$\psi^{-1}(U_Z)$ が開集合であるので、 $\varphi^{-1}(\psi^{-1}(U_Z))$ も開集合となる。

つまり、任意の開集合 $U_Z \subset Z$ に対して、 $(\varphi^{-1} \circ \psi^{-1})(U_Z)$ も開集合となる。

$(\varphi^{-1} \circ \psi^{-1})(U_Z) = (\psi \circ \varphi)^{-1}(U_Z)$ であるので、写像 $\psi \circ \varphi : X \rightarrow Z$ は連続写像である。

-
- (c) φ が X から Y への同相写像で、かつ、 ψ が Y から Z への同相写像ならば、 $\psi \circ \varphi$ は X から Z への同相写像となることを示せ。

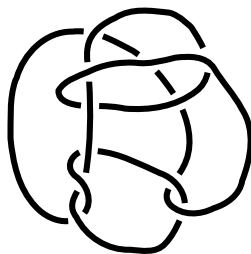
.....
同相写像とは、全単射な連続写像であり、その逆写像も連続写像であるものをいう。

先の問より、 φ, ψ が全単射な連続写像であるので、合成写像 $\psi \circ \varphi$ も全単射な連続写像である。

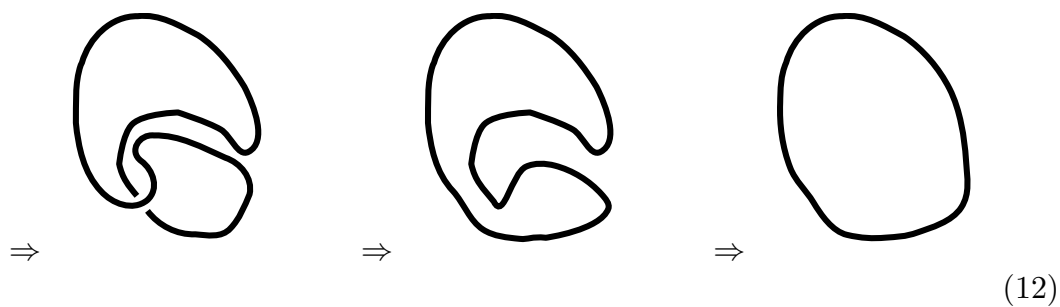
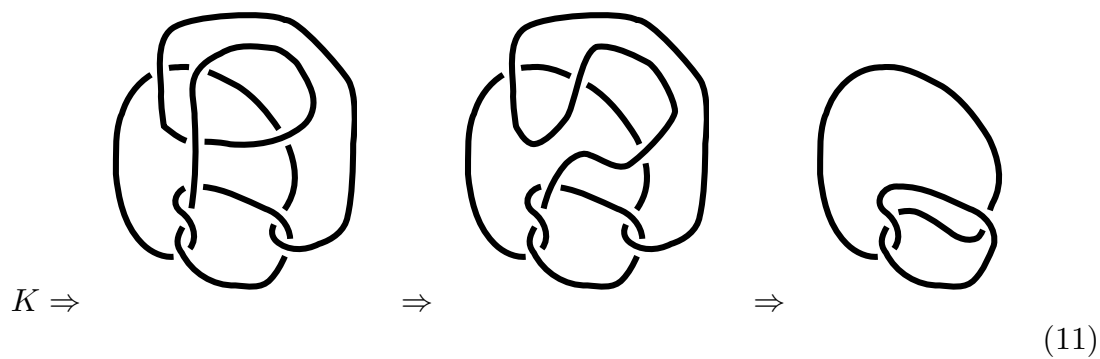
また、 $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X, \psi^{-1} : Z \rightarrow Y$ も連続写像であるので、その合成写像 $\varphi^{-1} \circ \psi^{-1} = (\psi \circ \varphi)^{-1}$ も連続写像である。

よって、 $\psi \circ \varphi$ は同相写像である。

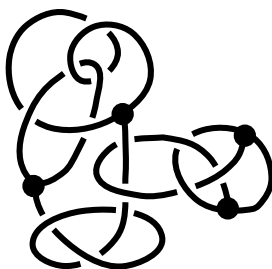
-
5. 次の図式が表す結び目 K は自明であることを確かめよ。



.....



6. 次の図式が表す空間グラフ $f(G)$ は分離していることを確かめよ。



.....

$$f(G) \Rightarrow \text{Diagram 1} \Rightarrow \text{Diagram 2} \quad (13)$$

$$\text{Diagram 3} \Rightarrow \text{Diagram 4} \quad (14)$$

7. $f(G), g(G)$ は、それぞれ次の図式 $\tilde{f}(G), \tilde{g}(G)$ で表された空間グラフとする。この時、 $\tilde{f}(G)$ と $\tilde{g}(G)$ の間の Reidemeister 変形の列を具体的に図示せよ。

$$\begin{array}{cc} \text{Diagram 5} & \text{Diagram 6} \\ \tilde{f}(G) & \tilde{g}(G) \end{array} \quad (15)$$

.....

Reidemeister 変形

捻る (R.I)、パスの上下と移動する (R.II)、交点の上下を移動する (R.III)

.....

$$\tilde{f}(G) \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} \xRightarrow{R.II} \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} \xRightarrow{R.II} \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} \quad (16)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \end{array} \xRightarrow{R.II} \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \end{array} \xRightarrow{R.III} \begin{array}{c} \text{Diagram 6} \end{array} \quad (17)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 7} \end{array} \xRightarrow{R.III} \begin{array}{c} \text{Diagram 8} \end{array} \xRightarrow{R.I} \begin{array}{c} \text{Diagram 9} \end{array} \xRightarrow{R.II} \begin{array}{c} \text{Diagram 10} \end{array} \quad (18)$$

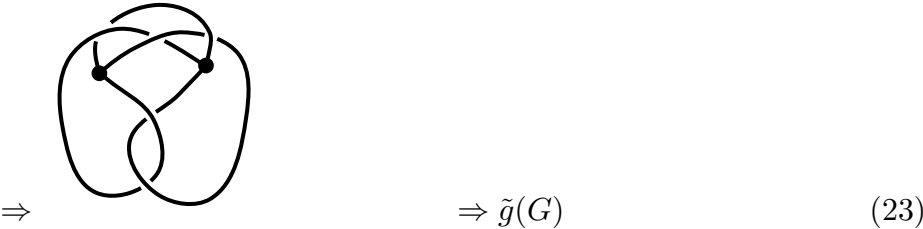
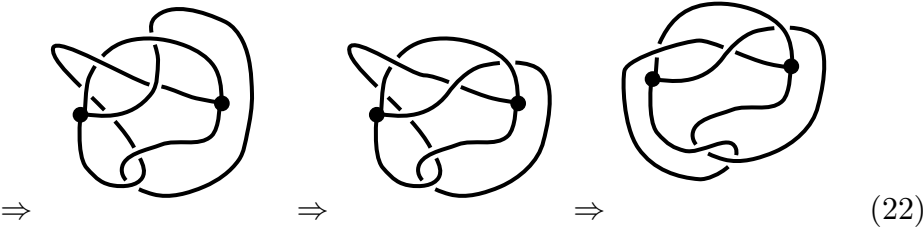
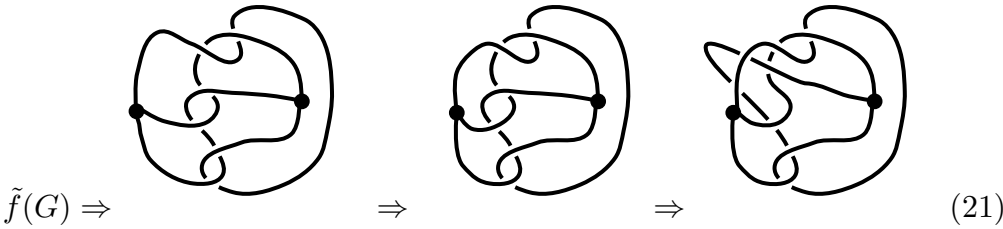
$$\begin{array}{c} \text{Diagram 11} \end{array} \xRightarrow{R.II} \begin{array}{c} \text{Diagram 12} \end{array} \xRightarrow{R.II} \begin{array}{c} \text{Diagram 13} \end{array} \Rightarrow \tilde{g}(G) \quad (19)$$

8. $f(G), g(G)$ は、それぞれ $\tilde{f}(G), \tilde{g}(G)$ で表された空間グラフとする。このとき、以下の設問に答えよ。

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{Diagram 14} \end{array} & \begin{array}{c} \text{Diagram 15} \end{array} \\ \tilde{f}(G) & \tilde{g}(G) \end{array} \quad (20)$$

(a) $f(G)$ と $g(G)$ は同型であることを \mathbb{R}^3 内の直接の変形で確かめよ。

.....



(b) $\tilde{f}(G)$ と $\tilde{g}(G)$ の間の Reidemeister 変形の列を具体的に図示せよ。

.....

$$\tilde{f}(G) \Rightarrow \text{Diagram 1} \xRightarrow{R.II} \text{Diagram 2} \quad (24)$$

$$\text{Diagram 3} \xRightarrow{R.III} \text{Diagram 4} \xRightarrow{R.I} \text{Diagram 5} \xRightarrow{R.III} \text{Diagram 6} \quad (25)$$

$$\text{Diagram 7} \xRightarrow{R.II} \text{Diagram 8} \Rightarrow \text{Diagram 9} \xRightarrow{R.III} \text{Diagram 10} \quad (26)$$

$$\text{Diagram 11} \xRightarrow{R.II} \Rightarrow \tilde{g}(G) \quad (27)$$

9. $K_{3,3}$ の空間グラフ $f(K_{3,3})$ の Simon 不変量 $\mathcal{L}(f)$ を求めよ。

.....

各点を結ぶ交点の符号を計算する。

(a) 点 1 から 点 2

0

(b) 点 2 から 点 3

$(-1) + (-1) = -2$

(c) 点 3 から 点 4

$1 + 1 = 2$

(d) 点 4 から 点 5

0

(e) 点 5 から 点 6

$$1 + 1 = 2$$

(f) 点 6 から 点 1

$$(-1) + (-1) = -2$$

(g) 点 1 から 点 4

$$(-1) + (-1) + (-1) + 1 + 1 + 1 + (-1) = -1$$

(h) 点 5 から 点 2

$$(-1) + 1 + 1 + 1 + (-1) + (-1) + (-1) = -1$$

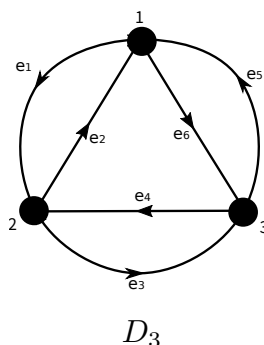
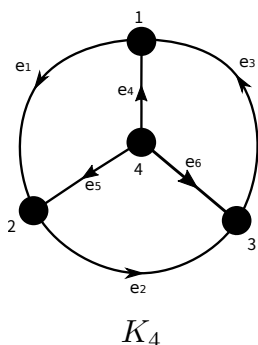
(i) 点 3 から 点 6

$$0$$

以上の 9 本の辺の交点から求めた符号をあわせる。

$$\mathcal{L}(f) = (0 + (-2) + 2 + 0 + 2 + (-2) + (-1) + (-1) + 0)/2 = -1 \quad (28)$$

17 有向グラフ K_4, D_3 について、以下の設問に答えよ。



(29)

(a) K_4 の 1 次元ホモロジー群 $H_1(K_4; \mathbb{Z})$ を求めよ。

.....

$$C_0(K_4) = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle \quad (30)$$

$$C_1(K_4) = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle \quad (31)$$

$$C_2(K_4) = \langle e_1 - e_5 + e_4, e_2 - e_6 + e_5, e_3 - e_4 + e_6 \rangle \quad (32)$$

(b) D_3 の 1 次元ホモロジー群 $H_1(D_3; \mathbb{Z})$ を求めよ。

.....