2 次式全体の集合 $\mathbb{R}[x]_2$

$$\mathbb{R}[x]_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_i \in \mathbb{R}\} \tag{1}$$

これは $1, x, x^2$ をベクトル空間の基底と考えて 3 次元空間をみれる。

線形変換 $T : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ に対して次の 3 つを求めよ。

1. $g_T(t)$
2. T の固有値 λ
3. T の各固有値 λ について固有空間 $W(\lambda; T)$

....

1. $T(f(x)) = f(1-x)$

   ....

   $f(x) \in \mathbb{R}[x]_2$ であるので $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ とする。線形変換 T で $f(x)$ を移すと次のようになる。

$$T(f(x)) = a_0 + a_1(1-x) + a_2(1-x)^2 = a_0 + a_1 + a_2 - (a_1 + 2a_2)x + a_2x^2 \tag{2}$$

   これは基底 $1, x, x^2$ がどのように対応するかを調べることで表現行列が得られる。

$$T(1) = 1,\ T(x) = 1 - x,\ T(x^2) = (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2 \tag{3}$$

   基底の対応に合わせて次のように行列で表記する。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - x \\ 1 - 2x + x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

   この時現れる行列が表現行列である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

---

2. $T(f(x)) = f(2x) + f'(x)$

   ....

   基底 $1, x, x^2$ について対応を調べる

$$
\begin{aligned}
T(1) =&1 + (1)' = 1 && (6)\\
T(x) =&2x + (x)' = 2x + 1 && (7)\\
T(x^2) =&2x^2 + (x^2)' = 2x^2 + 2x && (8)
\end{aligned}
$$

これを行列で表す。

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 2x+1 \\ 2x^2+2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \tag{9}
$$

つまり表現行列は次の通り。

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{10}
$$
