ナブラ ∇

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{1}$$

ベクトル場 $\boldsymbol{f}$

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)) \tag{2}$$

$D\boldsymbol{f}$

$$D\boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x}, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y}, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial z} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{3}$$

回転 rot

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \nabla \times \boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z},\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x},\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \tag{4}$$

発散 div

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \langle \nabla, \boldsymbol{f} \rangle = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \tag{5}$$

内積、外積

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = |\boldsymbol{a}|^2 \qquad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0 \tag{6}$$
$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle \qquad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \tag{7}$$
$$\langle k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = k\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \qquad k\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{8}$$
$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle \qquad \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \tag{9}$$

三重積

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} \rangle = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \rangle \tag{10}$$
$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle \boldsymbol{b} - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{c} \tag{11}$$

ヤコビの恒等式

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0 \tag{12}$$

定義

$S \subset \mathbb{R}^3$ を C^2-級曲面片の像とし、$f : S \to \mathbb{R}$ を C^1-級関数、$\boldsymbol{n}$ を S 上の外向き単位法ベクトル場とする。

この時、$p \in S$ に対して、

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h\boldsymbol{n}(p))-f(p)}{h} \qquad \left(\quad = \langle \nabla f(p), \boldsymbol{n}(p) \rangle \quad \right) \tag{13}$$

を f の点 p での法方向微分といい、これを

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(p) \tag{14}$$

と書く。

$D \subset \mathbb{R}^3$

1. $g : D \to \mathbb{R}$ を C^1-級関数、$\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^3$ を C^1-級ベクトル場とする。
   この時、
   $$\int_D g \operatorname{div} \boldsymbol{f} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\int_D \langle \nabla g, \boldsymbol{f} \rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \int_{\partial D} g \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}A \tag{15}$$
   となることを示せ。
2. 1 の状況で ∂D 上で g が 0 であるなら、
   $$\int_D g \operatorname{div} \boldsymbol{f} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\int_D \langle \nabla g, \boldsymbol{f} \rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{16}$$
   となることを示せ。
3. **Green の定理**
   $f : D \to \mathbb{R}$ と $g : D \to \mathbb{R}$ を共に C^2-級関数とする。
   この時、
   $$\int_D (f\Delta g - g\Delta f) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{\partial D} \left(f\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} \right) \mathrm{d}A \tag{17}$$
   となることを示せ。

$e \in \mathbb{R}, \varepsilon_0 > 0$ は定数とする。$p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ とし、変数を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ とする。$\mathbb{E} : \mathbb{R}^3 \backslash \{p\} \to \mathbb{R}^3$ を

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{x} - p|^3} \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix} \tag{18}$$

とする。

(物理的には点 p に電荷 e を置いたときに出来る電場が $\mathbb{E}$)

---

1. $\operatorname{div} \mathbb{E} = 0$ を示せ。

....

div $\mathbb{E}$ を展開し、定数部分をまとめる。

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbb{E} =& \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{e(x_1 - p_1)}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{x} - p|^3} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{e(x_2 - p_2)}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{x} - p|^3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{e(x_3 - p_3)}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{x} - p|^3} && (19) \\ =& \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{x_1 - p_1}{|\boldsymbol{x} - p|^3} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{x_2 - p_2}{|\boldsymbol{x} - p|^3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{x_3 - p_3}{|\boldsymbol{x} - p|^3} \right) && (20) \end{aligned}$$

$\mathbb{E}$ の発散は上のように 3 つの偏微分からなる。

この内の一つを取り出し、変数を x_i として計算する。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_i - p_i}{|\boldsymbol{x} - p|^3} = \frac{1}{|\boldsymbol{x} - p|^6} \left(|\boldsymbol{x} - p|^3 \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i - p_i) - (x_i - p_i) \frac{\partial}{\partial x_i} |\boldsymbol{x} - p|^3 \right) \tag{21}$$

$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i - p_i) = 1$ であるので、$\frac{\partial}{\partial x_i}|\boldsymbol{x} - p|^3$ を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}|\boldsymbol{x} - p|^3 =& \frac{\partial}{\partial x_i}((x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 + (x_2 - p_2)^2)^{\frac{3}{2}} && (22) \\ =& \frac{3}{2}((x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 + (x_2 - p_2)^2)^{\frac{1}{2}} \times 2(x_i - p_i) && (23) \\ =& 3|\boldsymbol{x} - p|(x_i - p_i) && (24) \end{aligned}$$

これを式 (21) に代入する。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_i - p_i}{|\boldsymbol{x} - p|^3} = \frac{1}{|\boldsymbol{x} - p|^6} \left(|\boldsymbol{x} - p|^3 - 3|\boldsymbol{x} - p|(x_i - p_i)^2 \right) \tag{25}$$

式 (20) の 3 つの偏微分の和を考える。

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_i - p_i}{|\boldsymbol{x} - p|^3} \tag{26}$$

$$= \frac{1}{|\boldsymbol{x} - p|^6} \left(3|\boldsymbol{x} - p|^3 - 3|\boldsymbol{x} - p|((x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 + (x_3 - p_3)^2) \right) \tag{27}$$

$$= \frac{1}{|\boldsymbol{x} - p|^6} \left(3|\boldsymbol{x} - p|^3 - 3|\boldsymbol{x} - p||\boldsymbol{x} - p|^2 \right) = 0 \tag{28}$$

これにより $\operatorname{div} \mathbb{E} = 0$ がわかる。

---

2. 領域 $D \subset \mathbb{R}^3$ は Gauss の発散定理の条件を満たすとする。($D = \partial D \cup D^\circ$)

(a) $p \notin D$ の時、次の式を示せ。

$$\int_{\partial D} \langle \mathbb{E}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}A = 0 \tag{29}$$

....

Gauss の発散定理より次のような変形ができる。

$$\int_{\partial D} \langle \mathbb{E}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}A = \int_{D} \operatorname{div} \mathbb{E} \mathrm{d}D \tag{30}$$

$p \notin D$ であるので、$\mathbb{E}$ は D 全体で定義されている。この為、先程の問より $\operatorname{div} \mathbb{E} = 0$ である。

よって、次の式が得られる。

$$\int_{\partial D} \langle \mathbb{E}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}A = 0 \tag{31}$$

(b) $p \in D^\circ$ の時、次の式を示せ。

$$\int_{\partial D} \langle \mathbb{E}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}A = \frac{e}{\varepsilon_0} \tag{32}$$

....

$p \in D^\circ$ であるので、p を中心とした半径 r の球 S_r を考える。$S_r \subset D^\circ$ となるように十分小さな半径 r とする。

$D' = D \backslash S_r$ とおくと、$p \notin D'$ であるので、次の積分は 0 となる。

$$\int_{D'} \operatorname{div} \mathbb{E} \mathrm{d}D' = 0 \tag{33}$$

発散定理より次のように変形される。

$$\int_{D'} \operatorname{div} \mathbb{E} \mathrm{d}D' = \int_{\partial D} \langle \mathbb{E}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}A - \int_{\partial S_r} \langle \mathbb{E}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}S_r \tag{34}$$

左辺が 0 であるので、右辺を移項し次のようになる。

$$\int_{\partial D} \langle \mathbb{E}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}A = \int_{\partial S_r} \langle \mathbb{E}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}S_r \tag{35}$$

右辺を計算することで左辺を求める。$\boldsymbol{n}$ は法単位ベクトルであり、$\boldsymbol{n}$ は S_r に垂直である。ベクトル $\boldsymbol{x} - p$ も S_r と垂直であるので $\langle \boldsymbol{x} - p, \boldsymbol{n} \rangle = |\boldsymbol{x} - p|$ である。

$$\int_{\partial S_r} \langle \mathbb{E}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}S_r = \int_{\partial S_r} \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{x} - p|^3} \left\langle \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{n} \right\rangle \mathrm{d}S_r \tag{36}$$

$$= \int_{\partial S_r} \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{x} - p|^2} \mathrm{d}S_r \tag{37}$$

S_r は半径 r の球であるため、$|\boldsymbol{x} - p| = r$ である。

$$\int_{\partial S_r} \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{x} - p|^2} \mathrm{d}S_r = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \int_{\partial S_r} \mathrm{d}S_r = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{e}{\varepsilon_0} \tag{38}$$

半径 r の球の表面積であるので $\int_{\partial S_r} \mathrm{d}S_r = 4\pi r^2$ より、上記の結果が得られる。