定義等

ラプラス変換の線形性

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] \tag{1}$$

ラプラス変換は積を分解できない。

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] \neq \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)] \tag{2}$$

そこで、$\mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[h(t)]$ となるような式 $h(t)$ を次のように定義する。

合成積、畳み込み

$f(t), g(t)$ の合成積 $f(t) * g(t)$ を次のように定義する。

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

性質

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t), \quad (af(t)) * g(t) = f(t) * (ag(t)) \tag{4}$$

ラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)] \tag{5}$$

三角関数の積と和の公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right) \tag{6}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right) \tag{7}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right) \tag{8}$$

問題

相乗定理を用いて、次を逆ラプラス変換せよ。

$$\frac{1}{(s^2+9)^2} \tag{9}$$

. . . .

$\sin 3t$ のラプラス変換から $\frac{1}{s^2+9}$ が得られる。

$$\mathcal{L}[\sin 3t] = \frac{3}{s^2+3^2}, \quad \mathcal{L}\left[\frac{1}{3}\sin 3t\right] = \frac{1}{s^2+3^2} \tag{10}$$

これにより問の式は次のように合成積のラプラス変換である。

$$\frac{1}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{s^2+3^2} \times \frac{1}{s^2+3^2} = \mathcal{L}\left[\frac{1}{3}\sin 3t\right]\mathcal{L}\left[\frac{1}{3}\sin 3t\right] \tag{11}$$

$$= \mathcal{L}\left[\frac{1}{3}\sin 3t * \frac{1}{3}\sin 3t\right] \tag{12}$$

よって、逆変換は次のように得られる。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+9)^2}\right] = \frac{1}{3}\sin 3t * \frac{1}{3}\sin 3t = \frac{1}{9}(\sin 3t * \sin 3t) \tag{13}$$

合成積の定義に従い $\sin 3t * \sin 3t$ を計算する。

$$\sin 3t * \sin 3t = \int_0^t \sin 3\tau \sin 3(t-\tau) \mathrm{d}\tau \tag{14}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^t \left(\cos 3t - \cos 3(-t+2\tau)\right) \mathrm{d}\tau \tag{15}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\tau \cos 3t - \frac{1}{6}\sin(-3t+6\tau)\right]_{\tau=0}^{\tau=t} \tag{16}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(t\cos 3t - \frac{1}{6}\sin 3t + \frac{1}{6}\sin(-3t)\right) \tag{17}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sin 3t - 3t\cos 3t\right) \tag{18}$$

よって、$\frac{1}{(s^2+9)^2}$ の逆変換は次のように求まる。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+9)^2}\right] = \frac{1}{54}\left(\sin 3t - 3t\cos 3t\right) \tag{19}$$
