Taylor 展開

関数 f の $x=\alpha$ 周りでの Taylor 展開

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n \tag{1}$$

---

ex. (Taylor)

$x=0$ 付近での Taylor 展開。(B_n は Bernoulli (ベルヌーイ) 数)

指数関数、対数関数

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (|x|<\infty) \tag{2}$$

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \qquad (|x|<1) \tag{3}$$

$$\log(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad (|x|<1) \tag{4}$$

三角関数

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (|x|<\infty) \tag{5}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad (|x|<\infty) \tag{6}$$

$$\tan x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}(1-2^{2n})B_{2n}x^{2n-1}}{(2n)!} \qquad \left(|x|<\frac{\pi}{2}\right) \tag{7}$$

$$\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!x^{2n+1}}{4^n(n!)^2(2n+1)} \qquad (|x|<1) \tag{8}$$

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!x^{2n+1}}{4^n(n!)^2(2n+1)}=\frac{\pi}{2}-\arcsin x \qquad (|x|<1) \tag{9}$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|x|<1) \tag{10}$$

双曲線関数

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (|x| < \infty) \tag{11}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (|x| < \infty) \tag{12}$$

$$\tanh x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}x^{2n-1}}{(2n)!} \qquad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right) \tag{13}$$

$$\operatorname{arcsinh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)! x^{2n+1}}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} \qquad (|x| < 1) \tag{14}$$

$$\operatorname{arccosh} x = \log(2x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! x^{-2n}}{2^{2n}(n!)^2(2n)} \qquad (x > 1) \tag{15}$$

$$\operatorname{arctanh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|x| < 1) \tag{16}$$

その他の関数

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{x^n}{n!} \qquad (|x| < 1) \tag{17}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (|x| < 1) \tag{18}$$