有限加法族

集合 X の部分集合族 $\mathcal{F}$ が**有限加法族**であるとは次を満たすときをいう。

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow X \backslash A \in \mathcal{F}$
3. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

有限加法的測度

集合 X 上の有限加法族 $\mathcal{F}$ について、$m : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ が $(X, \mathcal{F})$ 上の**有限加法的測度**であるとは、次の 2 つの条件を満たすときをいう。

1. $m(\emptyset) = 0$
2. $A, B \in \mathcal{F}$ が互いに素である時、$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

外測度

X を集合とする。$\Gamma : 2^X \to [0, \infty]$ が X 上の**外測度**であるとは、次の 3 つの条件を満たすときをいう。

1. $\Gamma(\emptyset) = 0$
2. $A, B \subset X$ が $A \subset B$ を満たす時、$\Gamma(A) \leq \Gamma(B)$
3. X の任意の部分集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し、$\Gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$

Γ-可測

X を集合とする。$\Gamma : 2^X \to [0, \infty]$ を X 上の外測度とする。

集合 $E \subset X$ が **Γ-可測** (または Carathéodory（カラテオドリ）の意味で可測) とは、任意の $A \subset X$ に対し次を満たすときをいう。

$$\Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap (X \backslash E)) = \Gamma(A) \tag{1}$$

また、Γ-可測集合全体を $\mathcal{M}_\Gamma$ と表す。

---

1. $X = \{1, 2, 3\}$ とする。X 上の有限加法族を全て挙げよ。

   ....

   X の部分集合

   $$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, X \tag{2}$$

   $\emptyset$ を含む最小の有限加法族　$\{\emptyset, X\}$

$\emptyset, \{1\}$ を含む最小の有限加法族　$\{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, X\}$
$\emptyset, \{2\}$ を含む最小の有限加法族　$\{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, X\}$
$\emptyset, \{3\}$ を含む最小の有限加法族　$\{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, X\}$
$\emptyset, \{1\}, \{2\}$ を含む最小の有限加法族　$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X\}$
$\emptyset, \{1\}, \{3\}$ や $\emptyset, \{1\}, \{1,2\}$ や $\emptyset, \{1\}, \{1,3\}$ を含む最小の有限加法族は上の加法族と同じであり、$\emptyset, \{1\}, \{2,3\}$ を含む最小の有限加法族は $\emptyset, \{1\}$ を含む最小の有限加法族と同じである。
よって、以上の 5 種類が X 上の有限加法族である。

---

2. X を集合とし、$\Gamma : 2^X \to [0,\infty]$ を X 上の外測度とする。$E \subset X$ が Γ-可測であることと次が成り立つことは同値であることを示せ。

$$\text{任意の } A \subset X \text{ に対し、} \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap (X \backslash E)) \leq \Gamma(A)$$

....

(a) $E \subset X$ が Γ-可測である
(b) 任意の $A \subset X$ に対し、$\Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap (X \backslash E)) \leq \Gamma(A)$
(2a) $\Rightarrow$ (2b)
$E \subset X$ が Γ-可測であるとする。定義より、任意の $A \subset X$ に対し $\Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap (X \backslash E)) = \Gamma(A)$ である。
$\Gamma : 2^X \to [0,\infty]$ であるので、$\Gamma(A) \in [0,\infty]$ である。つまり、$\Gamma(A) \leq \Gamma(A)$ である。
よって、任意の $A \subset X$ に対し、$\Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap (X \backslash E)) \leq \Gamma(A)$ となる。
(2a) $\Leftarrow$ (2b)
任意の $A \subset X$ に対し、$\Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap (X \backslash E)) \leq \Gamma(A)$ とする。
Γ は外側度であるので、$\Gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$ である。
これより、次の式が得られる。

$$\Gamma((A \cap E) \cup (A \cap (X \backslash E)) \leq \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap (X \backslash E)) \tag{3}$$

$(A \cap E) \cup (A \cap (X \backslash E) = A$ であるので、

$$\Gamma(A) \leq \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap (X \backslash E)) \leq \Gamma(A) \tag{4}$$

であり、

$$\Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap (X \backslash E)) = \Gamma(A) \tag{5}$$

となる。

つまり、E が Γ-可測であることになる。