複素関数 $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ が正則であるとする。

線分 $z = t + it$ $(t \in \mathbb{R},\ 0 \leq t \leq 1)$ 上で $f(z) = it^2$ となる関数 $f(z)$ を全て求めよ。

………………………………………………………………………………………

一致の定理より複素平面上で正則な関数は線分 $z = t + it$ 上で一致すれば全体でも一致する。

$f(z)$ は正則であるので、Taylor 展開を考える。

$f'(z)$ を計算する。

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{h \to 0} \frac{f((t + it) + (h + ih)) - f(t + it)}{h + ih} \tag{1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{i(t + h)^2 - it^2}{h(1 + i)} = \lim_{h \to 0} \frac{i(2t + h)}{1 + i} = \frac{2ti}{1 + i} = (1 + i)t \tag{2}$$

同様に $f''(z), f'''(z)$ も求める。

$$f''(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f'(z + \Delta z) - f'(z)}{\Delta z} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + i)(t + h) - (1 + i)t}{h + ih} = 1 \tag{3}$$

$f''(z) = 1$ となり、3 次の導関数以降 $f'''(z) = \cdots = 0$ となる。

これらを用いて $z = 0$ を中心とした Taylor 展開を行う。

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \frac{f'''(0)}{3!} z^3 + \cdots \tag{4}$$

$$= 0 + 0z + \frac{1}{2} z^2 + 0z^3 + \cdots = \frac{1}{2} z^2 \tag{5}$$

一致の定理より線分上で一致する正則関数は $f(z) = \frac{1}{2} z^2$ のみとなる。