Report 1.5

$D^2\Phi(x-y)$ は $y=x$ 近くで積分不可能である。

....

C を定数とし、$x \neq 0$ において次が成り立つ。

$$|D^2\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^n} \tag{1}$$

このとき、$x=0$ において $D^2\Phi(x)$ が発散する。

つまり、$x=y$ において $D^2\Phi(x-y)$ が発散するため、$D^2\Phi(x-y)$ は $x=y$ の付近で積分できない。

Report 1.6

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ であり、$f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ な連続関数とする。つまり、f は 2 回微分可能でコンパクトなサポートを持つ連続関数である。

次の式の右辺は変数 x について連続であることを示せ。

$$u_{x_ix_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f_{x_ix_j}(x-y)dy \quad (i,j=1,2,\ldots,n) \tag{2}$$

....

f はコンパクトなサポートを持つので、$f_{x_ix_j}$ もコンパクトなサポートを持つ。

また、$f_{x_ix_j}$ が連続であることから有界関数である。

${}^\forall\alpha \in \mathbb{R}^n$ とする。

$$\lim_{x\to\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f_{x_ix_j}(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{x\to\alpha} \Phi(y) f_{x_ix_j}(x-y)dy \tag{3}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f_{x_ix_j}(\alpha-y)dy \tag{4}$$

となるので、x について連続であることがわかる。

Report 1.7

$$|I_\varepsilon| \leq C\|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|dy \leq \begin{cases} C\varepsilon^2|\log\varepsilon| & (n=2) \\ C\varepsilon^2 & (n\geq 3) \end{cases} \tag{5}$$

上記式の $n=3$ における右側の不等式

$$C\|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|dy \leq C\varepsilon^2 \tag{6}$$

を示せ。

· ·

$n = 3$ において

$$\Phi(x) = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{|x|^{n-2}} = \frac{1}{3\alpha(3)|x|} = \frac{1}{4\pi|x|} \tag{7}$$

$\alpha(3)$ は $\mathbb{R}^3$ における単位球の体積を表す。$\alpha(3) = \frac{4}{3}\pi$
$|x|$ は $\mathbb{R}^3$ におけるベクトルの大きさを表す。$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^3}$

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy = \frac{1}{3\alpha(3)}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x-y|}f(y)dy \tag{8}$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} \tag{9}$$

Report 1.8

$$|L_\varepsilon| \leq \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|dS(y) \leq \begin{cases} C\varepsilon|\log\varepsilon| & (n=2) \\ C\varepsilon & (n \geq 3) \end{cases} \tag{10}$$

上記式の $n = 3$ における右側の不等式

$$\|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|dS(y) \leq C\varepsilon \tag{11}$$

を示せ。

· ·

Report 1.9

$$-\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y)dS(y) \to -f(x) \quad \text{as } \varepsilon \to 0 \tag{12}$$

この式を示せ。

· ·

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left| -\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y)dS(y) - (-f(x)) \right| = 0 \tag{13}$$

上記式を満たすことを示せばよい。

$$\left|-\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y)dS(y)-(-f(x))\right| \tag{14}$$

$$=\left|\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y)dS(y)-f(x)\right| \tag{15}$$

$$=\left|\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y)dS(y)-\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(x)dS(y)\right| \tag{16}$$

$$=\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}\left|\int_{\partial B(x,\varepsilon)}(f(y)-f(x))dS(y)\right| \tag{17}$$

$y=x+\varepsilon z$ とおくと、$|x-y|=\varepsilon \Leftrightarrow |z|=1$ であり、$dy=\varepsilon^{n-1}dz$ である。

$$\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}\left|\int_{\partial B(0,1)}(f(x+\varepsilon z)-f(x))\varepsilon^{n-1}dz\right| \tag{18}$$

$$=\frac{1}{n\alpha(n)}\left|\int_{\partial B(0,1)}(f(x+\varepsilon z)-f(x))dz\right| \tag{19}$$

これにより $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(0,1)}(f(x+\varepsilon z)-f(x))dz=0$ であることを示せればよい。

$f\in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ である。コンパクトなサポートを持つ連続関数は有界関数であるので、積分と極限を入れ替えることができる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(0,1)}(f(x+\varepsilon z)-f(x))dz=\int_{\partial B(0,1)}\lim_{\varepsilon\to 0}(f(x+\varepsilon z)-f(x))dz=0 \tag{20}$$

よって、次の式が成り立つことがわかる。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|-\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y)dS(y)-(-f(x))\right|=0 \tag{21}$$
