群

定義

集合 G がある演算 ▲ で閉じているとする。

1. 結合法則を満たす。

$$(^\forall a, b, c \in G) \qquad (a\blacktriangle b)\blacktriangle c = a\blacktriangle(b\blacktriangle c) \tag{1}$$

2. 単位元 e が存在する。

$$(^\forall a \in G) \qquad a\blacktriangle e = e\blacktriangle a = a \tag{2}$$

3. 逆元が存在する。

$$(^\forall a \in G) \qquad ^\exists a^{-1} \in G \quad s.t. \quad a\blacktriangle a^{-1} = a^{-1}\blacktriangle a = e \tag{3}$$

問題

集合 $\{0, 2, 3\}$ 上の演算 ▲ を次のように定義する。

$$0\blacktriangle 0 = 0 \qquad 0\blacktriangle 2 = 2 \qquad 0\blacktriangle 3 = 3 \tag{4}$$
$$2\blacktriangle 0 = 2 \qquad 2\blacktriangle 2 = 2 \qquad 2\blacktriangle 3 = 0 \tag{5}$$
$$3\blacktriangle 0 = 3 \qquad 3\blacktriangle 2 = 0 \qquad 3\blacktriangle 3 = 3 \tag{6}$$

次の表は上の演算をまとめたものである。

左 \ 右	0	2	3
0	0	2	3
2	2	2	0
3	3	0	3

この時、集合 $\{0, 2, 3\}$ と演算 ▲ について次の性質が成立するか判定せよ。

1. 単位元が存在する。
2. 任意の元の逆元が存在する。
3. 結合率を満たす。

....

1. 単位元を e とおくと、次の 3 つの式を満たす。

$$0\blacktriangle e = e\blacktriangle 0 = 0 \tag{7}$$
$$2\blacktriangle e = e\blacktriangle 2 = 2 \tag{8}$$
$$3\blacktriangle e = e\blacktriangle 3 = 3 \tag{9}$$

式 (7) を満たすのは $0 \in \{0, 2, 3\}$ である。式 (8) を満たすのは $0, 2 \in \{0, 2, 3\}$ である。式 (9) を満たすのは $0, 3 \in \{0, 2, 3\}$ である。

以上により単位元は $0 \in \{0, 2, 3\}$ である。

2. 上の内容から 0 が単位元である。a の逆元を a^{-1} とすると次の 3 つの式を満たす。

$$0\blacktriangle 0^{-1} = 0^{-1}\blacktriangle 0 = 0 \tag{10}$$

$$2\blacktriangle 2^{-1} = 2^{-1}\blacktriangle 2 = 0 \tag{11}$$

$$3\blacktriangle 3^{-1} = 3^{-1}\blacktriangle 3 = 0 \tag{12}$$

式 (10) を満たす 0^{-1} は $0^{-1} = 0$ である。式 (11) を満たす 2^{-1} は $2^{-1} = 3$ である。式 (12) を満たす 3^{-1} は $3^{-1} = 2$ である。

以上により $\{0, 2, 3\}$ の任意の元に対し逆元は存在する。

3. 結合律を確認する。次の 6 つの式が成立するか確認する。

$$0\blacktriangle(2\blacktriangle 3) = (0\blacktriangle 2)\blacktriangle 3 \tag{13}$$

$$0\blacktriangle(3\blacktriangle 2) = (0\blacktriangle 3)\blacktriangle 2 \tag{14}$$

$$2\blacktriangle(3\blacktriangle 0) = (2\blacktriangle 3)\blacktriangle 0 \tag{15}$$

$$2\blacktriangle(0\blacktriangle 3) = (2\blacktriangle 0)\blacktriangle 3 \tag{16}$$

$$3\blacktriangle(0\blacktriangle 2) = (3\blacktriangle 0)\blacktriangle 2 \tag{17}$$

$$3\blacktriangle(2\blacktriangle 0) = (3\blacktriangle 2)\blacktriangle 0 \tag{18}$$

式 (13) について

$$\text{左辺}\quad 0\blacktriangle(2\blacktriangle 3) = 0\blacktriangle 0 = 0 \qquad \text{右辺}\quad (0\blacktriangle 2)\blacktriangle 3 = 2\blacktriangle 3 = 0 \tag{19}$$

式 (14) について

$$\text{左辺}\quad 0\blacktriangle(3\blacktriangle 2) = 0\blacktriangle 0 = 0 \qquad \text{右辺}\quad (0\blacktriangle 3)\blacktriangle 2 = 3\blacktriangle 2 = 0 \tag{20}$$

式 (15) について

$$\text{左辺}\quad 2\blacktriangle(3\blacktriangle 0) = 2\blacktriangle 3 = 0 \qquad \text{右辺}\quad (2\blacktriangle 3)\blacktriangle 0 = 0\blacktriangle 0 = 0 \tag{21}$$

式 (16) について

$$\text{左辺}\quad 2\blacktriangle(0\blacktriangle 3) = 2\blacktriangle 3 = 0 \qquad \text{右辺}\quad (2\blacktriangle 0)\blacktriangle 3 = 2\blacktriangle 3 = 0 \tag{22}$$

式 (17) について

$$\text{左辺}\quad 3\blacktriangle(0\blacktriangle 2) = 3\blacktriangle 2 = 0 \qquad \text{右辺}\quad (3\blacktriangle 0)\blacktriangle 2 = 3\blacktriangle 2 = 0 \tag{23}$$

式 (18) について

$$\text{左辺}\quad 3\blacktriangle(2\blacktriangle 0) = 3\blacktriangle 2 = 0 \qquad \text{右辺}\quad (3\blacktriangle 2)\blacktriangle 0 = 0\blacktriangle 0 = 0 \tag{24}$$

以上により結合律を満たす。