1. 虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ とし、α, β, γ を次のように定める。

$$\alpha=\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right), \quad \beta=\sqrt[11]{2}\left(=2^{\frac{1}{11}}\right), \quad \gamma=\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \tag{1}$$

この時、次の値を求めよ。

(a) $[\,\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}\,]$

....

$\beta^{11}=2$ であるので、β は多項式 $X^{11}-2\in\mathbb{Q}[X]$ の解である。X^11-2 は $\mathbb{Q}[X]$ 上既約であるので、体の拡大次数は $[\,\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}\,]=11$ である。

$\alpha=\exp\left(\frac{2\pi}{7}i\right)$ より $\alpha^7=\exp(2\pi i)=1$ であるので、α は多項式 $X^7-1\in\mathbb{Q}[X]$ の解である。X^7-1 は $\mathbb{Q}[X]$ 上可約であり、次の 2 つの多項式の積に分けられる。

$$X^7-1=(X-1)(X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1) \tag{2}$$

α は上記 6 次式の解となるので、$[\,\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}\,]=6$ である。

$[\,\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}\,]=[\,\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}(\beta)\,][\,\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}\,]$ であるので、$[\,\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}(\beta)\,]$ がわかればよい。

$\mathbb{Q}(\beta)$ は $\mathbb{Q}$ 係数のベクトル空間で基底を $\beta^0,\cdots,\beta^{10}$ とする事ができる。α は虚数であるので、$\mathbb{Q}(\beta)$ の元ではない。よって、$[\,\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}(\beta)\,]=[\,\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}\,]$ である。

これにより $[\,\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}\,]=6\times 11=66$ である。

(b) $[\,\mathbb{Q}(\alpha,\gamma):\mathbb{Q}(\gamma)\,]$

....

$\gamma=\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ より $1-\gamma^2=\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ である。つまり、$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\in\mathbb{Q}(\gamma)$ である。

$\alpha=\gamma+i(1-\gamma^2)$ であるので、$\alpha\in\mathbb{Q}(\gamma,i)$ である。

i は多項式 $X^2+1\in\mathbb{Q}(\gamma)[X]$ の解であり、この多項式は既約である。

よって、$[\,\mathbb{Q}(\gamma,i):\mathbb{Q}(\gamma)\,]=2$ である。

$\alpha\in\mathbb{Q}(\gamma,i)$ より $\mathbb{Q}(\alpha,\gamma)\subset\mathbb{Q}(\gamma,i)$ であり、$\mathbb{Q}(\alpha,\gamma)\neq\mathbb{Q}(\gamma)$ である。よって、$[\,\mathbb{Q}(\alpha,\gamma):\mathbb{Q}(\gamma)\,]=2$ である。

---

2. $\alpha=\sqrt[4]{2}-\sqrt{2}-1$ とする。

この時、次の式を満たす $a_i \in \mathbb{Q}\ (i=0,\dots,3)$ を求めよ。

$$\frac{1}{\alpha} = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 \tag{3}$$

………………………………………………………………………………

$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ を $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間と考えると基底に $1, \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}^2, \sqrt[4]{2}^3$ がとれる。よって、$\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ である。
α は $\sqrt[4]{2}$ を含んでいるので、$\alpha \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ である。
よって、次のような関係がある。

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subsetneq \mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \tag{4}$$

拡大次数はそれぞれ次のようになる。

$$\Big[\,\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}\,\Big] = 2, \quad \Big[\,\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}\,\Big] = 4, \quad \Big[\,\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})\,\Big] = 2 \tag{5}$$

$\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ であることから $\big[\,\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(\alpha)\,\big] = 1$ であり、$[\,\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}\,] = 4$ である。
$\mathbb{Q}(\alpha)$ は $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間で基底を $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ と取ってこれる。そこで、α の逆元 α^{-1} を基底を用いて表す。
$\alpha = \sqrt[4]{2} - \sqrt{2} - 1 = \sqrt[4]{2} - (\sqrt{2}+1)$ であるので、$\big(\sqrt[4]{2} + (\sqrt{2}+1)\big)$ をかけて根号を消す。

$$\alpha\left(\sqrt[4]{2} + (\sqrt{2}+1)\right) = \left(\sqrt[4]{2} - (\sqrt{2}+1)\right)\left(\sqrt[4]{2} + (\sqrt{2}+1)\right) \tag{6}$$
$$= \sqrt[4]{2}^2 - (\sqrt{2}+1)^2 = -3 - \sqrt{2} \tag{7}$$

これに $(-3+\sqrt{2})$ をかける。

$$\alpha\left(\sqrt[4]{2} + (\sqrt{2}+1)\right)(-3+\sqrt{2}) = (-3-\sqrt{2})(-3+\sqrt{2}) = 7 \tag{8}$$

よって、次の式が得られる。

$$\alpha\left(\sqrt[4]{2} + (\sqrt{2}+1)\right)(-3+\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{7} = 1 \tag{9}$$

これにより α の逆元は $\big(\sqrt[4]{2} + (\sqrt{2}+1)\big)(-3+\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{7}$ ということである。

$$\alpha^{-1} = \left(\sqrt[4]{2} + (\sqrt{2}+1)\right)(-3+\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{7}\left(-1 - 3\sqrt[4]{2} - 2\sqrt[4]{2}^2 + 2\sqrt[4]{2}^3\right) \tag{10}$$

α^2, α^3 は次のように求められる。

$$\alpha^2 = (\sqrt[4]{2} - \sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt[4]{2} + 3\sqrt[4]{2}^2 - 2\sqrt[4]{2}^3 \tag{11}$$
$$\alpha^3 = (\sqrt[4]{2} - \sqrt{2} - 1)^3 = -13 + 9\sqrt[4]{2} - 8\sqrt[4]{2}^2 + 7\sqrt[4]{2}^3 \tag{12}$$

$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) = \mathbb{Q}(\alpha)$ であるので、基底を $1, \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}^2, \sqrt[4]{2}^3$ から $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ へ変換する。基底は次の行列で変換できるので逆行列をかけ、$\sqrt[4]{2}^k$ から α^k への変換行列を求める。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \\ -13 & 9 & -8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt[4]{2} \\ \sqrt[4]{2}^2 \\ \sqrt[4]{2}^3 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt[4]{2} \\ \sqrt[4]{2}^2 \\ \sqrt[4]{2}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \\ -13 & 9 & -8 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

これにより α^{-1} を基底変換して表現する。

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} &= \frac{1}{7}\left(-1 - 3\sqrt[4]{2} - 2\sqrt[4]{2}^2 + 2\sqrt[4]{2}^3\right) && (15) \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt[4]{2} \\ \sqrt[4]{2}^2 \\ \sqrt[4]{2}^3 \end{pmatrix} && (16) \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \\ -13 & 9 & -8 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix} && (17) \end{aligned}$$

ここで係数部分を計算する。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \\ -13 & 9 & -8 & 7 \end{pmatrix}^{-1} && (18) \\ =&\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & -4 & 7 & 2 \\ 5 & -11 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right) && (19) \\ =&-\frac{1}{63}\begin{pmatrix} 31 & 29 & 37 & 8 \end{pmatrix} && (20) \end{aligned}$$

よって、座標変換した α^{-1} は次のようにかける。

$$\alpha^{-1} = -\frac{1}{63}\begin{pmatrix} 31 & 29 & 37 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix} = -\frac{31}{63} - \frac{29}{63}\alpha - \frac{37}{63}\alpha^2 - \frac{8}{63}\alpha^3 \tag{21}$$

これにより係数 $a_i \in \mathbb{Q}\,(i=0,\ldots,3)$ は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{31}{63} & -\frac{29}{63} & -\frac{37}{63} & -\frac{8}{63} \end{pmatrix} \tag{22}$$

---

2 問目の計算用 コード

`https://sagecell.sagemath.org/`

```
x=2^(1/4)
print("--- alpha ---")
def f(x): return x - x^2 -1
print(f(x))
print("--- alpha^2 ---")
print(expand(f(x)^2))
print("--- alpha^3 ---")
print(expand(f(x)^3))

print("=== first ===")
print(expand(
    f(x)*(x +x^2 +1)
))
print("=== 2nd ===")
print(expand(
    f(x)*(x +x^2 +1)*(-3+x^2)
))

print("### alpha inverse ###")
print(expand(
    (x +x^2 +1)*(-3+x^2)
))

print("coefficient alpha^{-1}")
B=matrix([-1,-3,-2,2])
print(B)
```

```
print("$$$ transform basis matrix $$$")
A=matrix([[1,0,0,0],[-1,1,-1,0],[3,-2,3,-2],[-13,9,-8,7]])
print(A)

print("A.inverse()")
print(A.inverse())

print("B*A.inverse()")
print(B*A.inverse())
```