定義　約数関数 $\tau(n)$

$$\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \tau(n) = \#\{d \in \mathbb{N} \mid d\text{は}n\text{を割り切る}\} \tag{1}$$

定義　約数の合計 $D(x)$

$$D : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{N}, \quad D(x) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ n \in \mathbb{N}}} \tau(n) \tag{2}$$

定理

ある関数 $R : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ が存在し、実数 $x \geq 1$ に対して次が成り立つ。

$$D(x) = x \log x + R(x) \qquad \text{かつ} \qquad |R(x)| \leq x \tag{3}$$

定義　小数部分 $\{x\}$

$x \in \mathbb{R}$ に対し、$[x]$ を Gauss 記号とする。($[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$)
この時、$\{x\}$ を実数 x の小数部分とし、次の式で定義する。

$$\{x\} = x - [x] \tag{4}$$

定理

ある関数 $R : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ が存在し、実数 $x \geq 1$ に対して次が成り立つ。

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + R(x) \qquad \text{かつ} \qquad |R(x)| \leq \frac{1}{x} \tag{5}$$

ただし、γ は次で定義される **Euler 定数** である。

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\{u\}}{u^2} du \tag{6}$$

問題

1. ある関数 $R : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ が存在して、実数 $x \geq 1$ に対して、次が成立することを示せ。

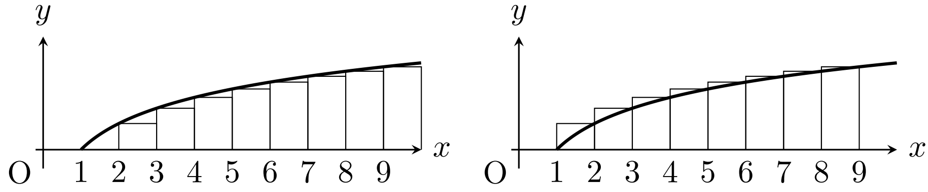
$$\sum_{n \leq x} \log n = x \log x - x + R(x) \quad \text{かつ} \quad |R(x)| \leq \log x + 1 \tag{7}$$

....

左辺 $\sum_{n \leq x} \log n$ は次のように書き換えられる。

$$\sum_{n \leq x} \log n = \sum_{n=2}^{[x]} ((n+1) - n) \log n = \sum_{n=2}^{[x]} (n - (n-1)) \log n \tag{8}$$

これは関数 $y = \log x$ に対して、縦の短冊を作りその面積の和に等しい。



問題の式を変形することで次が得られる。

$$R(x) = \sum_{n \le x} \log n - x \log x + x \tag{9}$$

$$\sum_{n \le x} \log n - x(\log x - 1) \tag{10}$$

$x = 0$ における $\log(x+1)$ のテイラー展開

$$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \tag{11}$$

$x = 1$ における $\log x$ のテイラー展開

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \tag{12}$$

---

2. ある定数 c と関数 $R : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ が存在して、実数 $x \ge 1$ に対して、次が成立することを示せ。

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{x} + c + R(x) \quad \text{かつ} \quad |R(x)| \le \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{13}$$

---

3. ある定数 c と関数 $R : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ が存在して、実数 $x \ge e$ に対して、次が成立することを示せ。

$$\sum_{n \le x} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2}(\log x)^2 + c + R(x) \quad \text{かつ} \quad |R(x)| \le \frac{\log x}{x} \tag{14}$$

---

4. 実数 $x, k \ge 1$ に対して、次を示せ。

$$\sum_{n \le x} \left(\log \frac{x}{n}\right)^k \le k!x \tag{15}$$

(ヒント：微分積分学の基本定理を

$$\left(\log \frac{x}{n}\right)^k = k\int_1^{\frac{x}{n}} \frac{(\log u)^{k-1}}{u}\mathrm{d}u \tag{16}$$

という形で用いる。)