
第 6 回　任意の $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ に対して、次を証明せよ。

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x) - g(x)1B(0,m)(x)|^p \mathrm{d}x \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{1}$$

(HINT: Lebesgue(ルベーグ) の収束定理を使う。仮定の殆どは $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ の定義からわかる。)

第 7 回　$a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ に対して $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n \in L^2((-\pi,\pi), \frac{1}{2\pi}\mathrm{d}x)$ とおく。このとき、次の式を示せ。

$$\hat{f}(m) = \lim_{N\to\infty} \left\langle \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n, e_m \right\rangle \tag{2}$$

(HINT: 内積が片方の変数について連続であることをまず示す。それは $\langle u_n, v\rangle - \langle u, v\rangle = \langle u_n - u, v\rangle$ に Schwarz(シュワルツ) の不等式を使って分かる。)

....

第 10 回　内積空間 $(V,\ \langle\cdot,\cdot\rangle)$ において、以下の集合は閉部分集合であることを示せ。

1. $u \in V$ と $c \in \mathbb{C}$ に対して、$\{v \in V : \langle u, v\rangle = c\}$

   ....

   V の部分集合 $S_{(u,c)}$ を次のようにおく。

$$S_{(u,c)} = \{v \in V : \langle u, v\rangle = c\} \tag{3}$$

   $p \in S^c_{(u,c)}$ とし、$\varepsilon = \min\{|\langle p, s\rangle|/2 : s \in S_{(u,c)}\}$ とおき、p の ε 近傍を $U_{(p,\varepsilon)} = \{v \in V : |\langle v, p\rangle| < \varepsilon\}$ とする。このとき、$S_{(u,c)} \cap U_{(p,\varepsilon)} = \emptyset$ である。任意の $S^c_{(u,c)}$ に対して同様の ε 近傍が存在するため、$S^c_{(u,c)}$ は開集合である。よって、$S^c_{(u,c)}$ は閉集合である。

   ---

2. 一般の $A \subset V$ に対して $A^\perp = \{v \in V : {}^\forall u \in A,\ \langle u, v\rangle = 0\}$
   (HINT: 内積は片方の変数について連続、連続写像による閉集合の逆像は閉集合、閉集合族の共通部分は閉集合、などを思い出す。)

   ....

   $v \in V$ に対して連続写像 f_v を次のように定義する。

$$f_v : V \to \mathbb{C}, \quad u \mapsto \langle u, v\rangle \tag{4}$$

   逆像 $f_v^{-1}(\{0\})$ は閉集合 $\{0\} \subset V$ の逆像であるので、閉集合である。

$A \subset V$ の任意の元 $a \in A$ に対して逆像が考えられ、$A^{\perp}$ は次のような閉集合の共通部分である。

$$A^{\perp} = \bigcap_{a \in A} f_a^{-1}(\{0\}) \tag{5}$$

閉集合の共通部分は閉集合となるので、$A^{\perp}$ は閉集合である。
