ベータ関数　　$x > 0,\ y > 0$

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \tag{1}$$

多次元ベータ関数 (ディリクレ積分)　　$a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0$

$$B(a,b,c,d) = \iiint_K s^{a-1}t^{b-1}u^{c-1}(1-(s+t+u))^{d-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \tag{2}$$

$$K = \{(s,t,u) \in \mathbb{R}^3 \mid s > 0,\ t > 0,\ u > 0,\ s+t+u < 1\} \tag{3}$$

ガンマ関数　　$x > 0$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-x}\mathrm{d}x, \qquad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{4}$$

ベータ関数とガンマ関数の関係

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{5}$$

$$B(a,b,c,d) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(a+b+c+d)} \tag{6}$$

$$f_S(s) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (0 < s < 3) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}, \quad f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (0 < t < 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}, \quad f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{5} & (0 < u < 5) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{7}$$

上の式を使って定数関数を置き換える。

$$\iiint_{\substack{0<s<3\\0<t<2\\0<u<5\\s+t+u<1}} f_S(s)\cdot f_T(t)\cdot f_U(u)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \tag{8}$$

$$= \iiint_{\substack{0<s<3\\0<t<2\\0<u<5\\s+t+u<1}} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\iiint_{\substack{0<s<3\\0<t<2\\0<u<5\\s+t+u<1}} \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

積分範囲 $0 < s < 3,\ 0 < t < 2,\ 0 < u < 5,\ s+t+u < 1$ については $s+t+u < 1$ があるので、s,t,u は 1 より大きくなることはない。したがって次のようになる。

$$\iiint_{\substack{0<s<3\\0<t<2\\0<u<5\\s+t+u<1}} \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u = \iiint_{\substack{0<s<1\\0<t<1\\0<u<1\\s+t+u<1}} \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \tag{11}$$

範囲 $0 < s,\ 0 < t,\ 0 < u,\ s+t+u < 1$ について次の式が成り立つ。

$$1 = s^0 t^0 u^0 (1-s-t-u)^0 \tag{12}$$

これを式 (11) に当てはめる。

$$\iiint_{\substack{0<s<1\\0<t<1\\0<u<1\\s+t+u<1}} \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u = \iiint_{\substack{0<s<1\\0<t<1\\0<u<1\\s+t+u<1}} s^0 t^0 u^0 (1-s-t-u)^0 \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \tag{13}$$

これは式 (2) の $(a,b,c,d) = (1,1,1,1)$ の時の式である。よって、式 (8) は次のようになる。

$$\iiint_{\substack{0<s<3\\0<t<2\\0<u<5\\s+t+u<1}} f_S(s)\cdot f_T(t)\cdot f_U(u)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}B(1,1,1,1) = \frac{1}{180} \tag{14}$$

ただし、$B(1,1,1,1)$ は式 (4) と式 (6) より次のように求まる。

$$B(1,1,1,1) = \frac{\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(1+1+1+1)} = \frac{1\cdot1\cdot1\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot\Gamma(1)} = \frac{1}{6} \tag{15}$$