Maxwell 方程式

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$ を変数とし、$\varepsilon_0 \in \mathbb{R}, \mu_0 \in \mathbb{R}$ を定数とする。
ベクトル場 $\mathbb{E}, \mathbb{B}, \boldsymbol{j}$ と関数 ρ は C^∞-級であり、次で示すような写像である。

$$\mathbb{E} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (t, \boldsymbol{x}) \mapsto \mathbb{E}(t, \boldsymbol{x}) \tag{1}$$

$$\mathbb{B} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (t, \boldsymbol{x}) \mapsto \mathbb{B}(t, \boldsymbol{x}) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{j} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (t, \boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{j}(t, \boldsymbol{x}) \tag{3}$$

$$\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (t, \boldsymbol{x}) \mapsto \rho(t, \boldsymbol{x}) \tag{4}$$

ナブラ ∇ は次で示すような演算子のベクトルである。t については微分を行わない。

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{5}$$

発散 div や回転 rot は次のようなものである。

$$\operatorname{div} f = \nabla \cdot f, \qquad \operatorname{rot} f = \nabla \times f \tag{6}$$

次の 4 つの式をまとめて Maxwell 方程式という。

$$\operatorname{div} \mathbb{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \quad \operatorname{div} \mathbb{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbb{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \tag{7}$$

$\mathbb{E}$ は電場、$\mathbb{B}$ は磁場、$\boldsymbol{j}$ は電流密度、ρ は電化密度、ε_0 は真空の誘電率、μ_0 は真空の透磁率である。

Maxwell 方程式を満たしているとする。

1. $D \subset \mathbb{R}^3$ において、ρ の積分値を ε_0 で割ったものは D の表面 ∂D 上での電場 $\mathbb{E}$ の面積分に等しいことを示せ。
   つまり、次の積分が一致する。

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_D \rho \mathrm{d}D = \int_{\partial D} \mathbb{E} \mathrm{d}S \tag{8}$$

. . . .

発散定理

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{f} \mathrm{d}V = \iint_S \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{9}$$

. . . .

Maxwell 方程式より $\mathrm{div}\,\mathbb{E} = \rho/\varepsilon_0$ であるので、次のような変形が出来る。

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_D \rho \mathrm{d}D = \int_D \frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}D = \int_D \mathrm{div}\,\mathbb{E}\mathrm{d}D \tag{10}$$

ここに発散定理を用いれば次の式となる。

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_D \rho \mathrm{d}D = \int_{\partial D} \mathbb{E}\mathrm{d}S \tag{11}$$

---

2. $D \subset \mathbb{R}^3$ の表面 ∂D 上での磁場 $\mathbb{B}$ の面積分は常に 0 であることを示せ。
つまり、次の式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\partial D} \mathbb{B} = 0 \tag{12}$$

……………………………………………………………………

発散定理より次のような式が得られる。

$$\int_{\partial D} \mathbb{B} = \int_D \mathrm{div}\,\mathbb{B}\mathrm{d}D \tag{13}$$

Maxwell 方程式より $\mathrm{div}\,\mathbb{B} = 0$ であるので、上記積分は 0 である。

---

3. 曲面片の像 $S \subset \mathbb{R}^3$ 上での磁場 $\mathbb{B}$ の面積分の時間微分は電場 $\mathbb{E}$ の ∂S に沿った線積分の -1 倍に等しいことを示せ。
つまり、次が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbb{B}\mathrm{d}S = -\int_{\partial S} \mathbb{E}\mathrm{d}s \tag{14}$$

……………………………………………………………………

ストークスの定理

$$\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\mathrm{d}S = \int_{\partial S} \boldsymbol{f}\mathrm{d}s \tag{15}$$

……………………………………………………………………

ストークスの定理より

$$\int_{\partial S} \mathbb{E}\mathrm{d}s = \int_S \mathrm{rot}\,\mathbb{E}\mathrm{d}S \tag{16}$$

Maxwell 方程式より $\mathrm{rot}\,\mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$ が成り立つので、

$$-\int_{\partial S} \mathbb{E}\mathrm{d}s = \int_S (-\mathrm{rot}\,\mathbb{E})\mathrm{d}S = \int_S \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}\mathrm{d}S \tag{17}$$

積分は t について影響しないので、積分と微分を入れ替えることで、次の式が得られる。

$$-\int_{\partial S} \mathbb{E} \mathrm{d}s = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbb{B} \mathrm{d}S \tag{18}$$

---

4. 曲面片の像 $S \subset \mathbb{R}^3$ 上で $\boldsymbol{j}$ を面積分したものに μ_0 をかけた値と S 上で $\mathbb{E}$ を面積分したものの時間微分に μ_0 と ε_0 をかけたものの和は ∂S に沿った $\mathbb{B}$ の線積分の値と等しいことを示せ。
つまり、次が成り立つことを示せ。

$$\mu_0 \int_S \boldsymbol{j} \mathrm{d}S + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbb{E} \mathrm{d}S = \int_{\partial S} \mathbb{B} \mathrm{d}s \tag{19}$$

. . . .

Maxwell 方程式より次が成り立っている。

$$\mathrm{rot}\, \mathbb{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \tag{20}$$

両辺を S で積分すると次の式が得られる。

$$\int_S \mathrm{rot}\, \mathbb{B} \mathrm{d}S = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j} \mathrm{d}S + \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \mathrm{d}S \tag{21}$$

右辺の偏微分は t の積分ではないので入れ替えて

$$\int_S \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \mathrm{d}S = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbb{E} \mathrm{d}S \tag{22}$$

左辺はストークスの定理から

$$\int_S \mathrm{rot}\, \mathbb{B} \mathrm{d}S = \int_{\partial S} \mathbb{B} \mathrm{d}s \tag{23}$$

よって次の式が成り立つ。

$$\int_{\partial S} \mathbb{B} \mathrm{d}s = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j} \mathrm{d}S + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbb{E} \mathrm{d}S \tag{24}$$
