
単因子

行列に対し、行と列に対する変形を繰り返し行い対角成分以外を 0 とする。このとき、対角成分を因子の順に並べたものを単因子という。

例えば、 $(2, 6, 18)$ など。

1. $R = \mathbb{Z}$ として、次の行列の単因子を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \tag{1}$$

.....

行における変形は左から、列における変形は右からかけることにより行える。

次の行列 P_1, \dots, P_5 を A にかけることにより行列の変形をおこなう。

$$AP_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ -4 & 14 & 16 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$AP_1P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 44 & -18 & 16 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$P_3AP_1P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -18 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -22 & 16 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$P_3AP_1P_2P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$P_5P_3AP_1P_2P_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

よって、単因子は $(-1, 2, -18)$ である。

2. $R = \mathbb{C}[x]$ として、次の行列の単因子を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ -1 & x-2 & 0 \\ -1 & 1 & x-3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

.....

$$P_1 A = \begin{pmatrix} 0 & (x-1)(x-3) & 0 \\ -1 & x-2 & 0 \\ 0 & -x+3 & x-3 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & x-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$P_1 A P_2 = \begin{pmatrix} 0 & (x-1)(x-3) & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & x-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$P_1 A P_2 P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (x-1)(x-3) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & x-3 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$P_4 P_1 A P_2 P_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)(x-3) \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

これにより単因子は $(-1, x-3, (x-1)(x-3))$ である。
