3 次正方行列 A を次のようにおく。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. 行列 A の固有多項式を求めよ。但し、途中式なども書くこと。答えは $x^3 - 3x^2$

   ……………………………………………………………………………

   固有多項式とは固有値を根に持つ多項式である。

   固有値とは $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となるスカラー λ のことで、この式を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を固有値 λ の固有ベクトルという。

   $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を移項し、$A\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるので、左辺をまとめると $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = 0$ となる。$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ の時、この式が成り立つためには $A - \lambda E$ の行列式が 0 であることが必要十分である。この $A - \lambda E$ の行列式を固有多項式という。

   移項を逆に行い $\lambda\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とした場合、$\lambda E - A$ が得られる。$\lambda E - A$ の行列式も固有多項式という。

   実際に固有値を求めるには固有方程式 $\det(\lambda E - A) = 0$ を解く為､$\det(\lambda E - A) = 0$ でも $\det(A - \lambda E) = 0$ でも同じ固有値が求まる。

   ……………………………………………………………………………

   E を単位行列として、$\lambda E - A$ を計算する。

$$\det(\lambda E - A) \tag{2}$$

$$= \det\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$= (\lambda - 1)^3 + 1^2 \cdot (-1) + 1^2 \cdot (-1) - 1^2(\lambda - 1) - 1^2(\lambda - 1) - (-1)^2(\lambda - 1) \tag{4}$$

$$= (\lambda - 1)^3 + 2 - 3(\lambda - 1) = \lambda^3 - 3\lambda^2 \tag{5}$$

   この λ を x に置き換えると $x^3 - 3x$ が得られる。

---

2. 行列 A の固有値を求めよ。

   ……………………………………………………………………………

   固有方程式 $x^3 - 3x^2 = 0$ を解くと $x = 0, 3$ である。よって固有値は 0 と 3 である。

---

3. 行列 A の各固有値に対する固有空間を求めよ。

   ……………………………………………………………………………

固有空間とは固有ベクトルの存在する空間であり、連立方程式 $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ の解空間を指す。

. . . .

固有値が 3 の場合

連立方程式 $(3E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を考える。

$$3E - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$\boldsymbol{x}$ の成分を順に x_1, x_2, x_3 とすると $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は上記行列の変形から次のように表記できる。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

これを計算すると次の 2 つの式が得られる。

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \qquad 3x_2 + 3x_3 = 0 \tag{8}$$

この式を変形して $x_1 = -2x_2 - x_3$ と $x_2 = -x_3$ が得られる。これを $\boldsymbol{x}$ に当てはめる。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 - x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

つまり、連立方程式 $(3E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{x}$ はスカラー t を用いて $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となることがわかる。この 1 次元空間 $t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が固有値 3 の固有空間である。

固有値が 0 の場合

連立方程式 $(0E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間を求める。

$$0E - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

この行列の変形から連立方程式は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

ここから $-x_1+x_2-x_3=0$ が得られる。変形をして $x_1=x_2-x_3$ であるので、$\boldsymbol{x}$ に当てはめる。

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_3\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\x_2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x_3\\0\\x_3\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \tag{12}$$

つまり、連立方程式の解は 2 つのスカラー s,t を用いて $\boldsymbol{x}=s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ となることがわかる。

この 2 次元空間 $s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ が固有値 0 の固有空間である。

---

4. 行列 A を直交行列を用いて対角化せよ。

. . . .

直交行列とは逆行列と転置行列が等しくなる行列

. . . .

固有空間の基底となるベクトルを並べた行列を用いることで対角化は可能である。
先ほど求めた固有空間の基底となるベクトルを次のように $\boldsymbol{ab},\boldsymbol{c}$ とする。

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \tag{13}$$

このベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を並べた 3 次正方行列で A は対角化可能であるが、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は互いに直交していないため、直交行列ではない。
直交行列であるためには内積が $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$ でなければならず、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$ ではあるが、$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\neq 0$ である。
直交行列であるためには各列ベクトル (または 行ベクトル) が単位ベクトルであり、互いに直交していなければならない。
そこで、ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ にシュミットの直交化法を用いて正規直交基底を求め、これらを並べた行列が直交行列となる。
$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ と直交しているので単位ベクトル化だけをおこなう。

$$\boldsymbol{a'}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} \tag{14}$$

$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は直交していないのでシュミットの直交化法により正規直交基底を求める。まず、$\boldsymbol{b}$ を正規化する。

$$\boldsymbol{b'} = \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix} \tag{15}$$

$\boldsymbol{b'}$ を用いて $\boldsymbol{c}$ を直交化する。

$$\boldsymbol{c'} = \boldsymbol{c} - (\boldsymbol{b'}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b'} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} \tag{16}$$

$|\boldsymbol{c'}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ であるので $\boldsymbol{c'}$ を正規化する。

$$\boldsymbol{c''} = \frac{\boldsymbol{c'}}{|\boldsymbol{c'}|} = \frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \tag{17}$$

$\boldsymbol{a'}, \boldsymbol{b'}, \boldsymbol{c''}$ を用いて直交行列 P は次のようになる。

$$P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \tag{18}$$

P を用いて A は次のように対角化できる。

$${}^tPAP = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{19}$$

実数を係数とする高々 2 次の多項式全体を $\mathbb{R}[x]_2$ と書く。また、写像 $T : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ を $T(f(x)) = f'(x)$(微分) で定義する。

1. $\mathbb{R}[x]_2$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間であることを示せ。

　　. . . . .

　　ベクトル空間であるということは空間が加法で閉じている ($f, g \in \mathbb{R}[x]_2 \Rightarrow f + g \in \mathbb{R}[x]_2$) ことと、スカラー倍が存在する ($a \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}[x]_2 \Rightarrow af \in \mathbb{R}[x]_2$) 上で、次の性質を満たすということである。

　　(a) $f, g \in \mathbb{R}[x]_2$ に対して $f + g = g + f$

　　(b) $f, g, h \in \mathbb{R}[x]_2$ に対して $(f + g) + h = f + (g + h)$

(c) $0 \in \mathbb{R}[x]_2$ が存在し、$f \in \mathbb{R}[x]_2$ に対して $f + 0 = 0 + f = f$

(d) $a, b \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}[x]_2$ に対して $a(bf) = (ab)f$

(e) $a, b \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}[x]_2$ に対して $(a + b)f = af + bf$

(f) $a \in \mathbb{R}, f, g \in \mathbb{R}[x]_2$ に対して $a(f + g) = af + ag$

(g) $1 \in \mathbb{R}$ が存在し、$f \in \mathbb{R}[x]_2$ に対して $1f = f$

(h) $0 \in \mathbb{R}$ が存在し、$f \in \mathbb{R}[x]_2$ に対して $0f = 0$

…………………………………………………………………………………………

加法とスカラー倍は次のように成り立つ。

(a) 実数係数の多項式同士の和はまた実数係数の多項式になる。また、多項式の和により次数は同じか小さくなる為、2 次以下の多項式同士の和は 2 次以下の多項式となる。これにより $\mathbb{R}[x]_2$ は加法で閉じている。

(b) 多項式の実数倍はまた同じ次数の多項式となるため、$\mathbb{R}[x]_2$ にスカラー倍が存在する。

そこで、性質が成り立つか確認する。

多項式の和は係数同士の和で定義されるので、$f, g, h \in \mathbb{R}[x]_2$ に対して $f + g = g + f, (f + g) + h = f + (g + h)$ となる。

次数 0 で係数 0 の多項式が $0 \in \mathbb{R}[x]_2$ である。これは $f \in \mathbb{R}[x]_2$ に対して $f + 0 = 0 + f = f$ である。

実数と多項式の積は実数と係数の積で定義されるので、$a, b \in \mathbb{R}$ と $f \in \mathbb{R}[x]_2$ について $a(bf) = (ab)f$ である。

x, x^2 は分配法則により $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $(a+b)x = ax+bx, (a+b)x^2 = ax^2+bx^2$ となる。その為、多項式 $f \in \mathbb{R}[x]_2$ において $(a + b)f = af + bf$ となる。

多項式 $f, g \in \mathbb{R}[x]_2$ において実数倍は係数との積であり、$f + g$ は係数同士の和で定義されるので、$a(f + g) = af + ag$ が成り立つ。

$1 \in \mathbb{R}$ が存在し、係数との積を考えることにより $1f = f$ である。また、$0 \in \mathbb{R}$ が存在し、全ての係数が 0 の多項式になるということで、$0f = 0$ となる。

よって、$\mathbb{R}[x]_2$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である。

---

2. T が $\mathbb{R}$ 上の線形変換であることを示せ。

…………………………………………………………………………………………

T が線形変換であるとは次を満たす事をいう。

(a) $f, g \in \mathbb{R}[x]_2$ に対して $T(f + g) = T(f) + T(g)$

(b) $a \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}[x]_2$ に対して $T(af) = aT(f)$

…………………………………………………………………………………………

$f, g \in \mathbb{R}[x]_2$ を $f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2,\ g = g_0 + g_1 x + g_2 x^2\ (f_i, g_i \in \mathbb{R})$ とする。

$$T(f) = f_1 + 2f_2 x, T(g) = g_1 + 2g_2 x \tag{20}$$

$$T(f+g) = T((f_0+g_0) + (f_1+g_1)x + (f_2+g_2)x^2) = (f_1+g_1) + 2(f_2+g_2)x \tag{21}$$

よって、$T(f+g) = T(f) + T(g)$ である。
また、$a \in \mathbb{R}$ に対して

$$T(af) = T(af_0 + af_1 x + af_2 x^2) = af_1 + 2af_2 x \tag{22}$$

であるので、$T(af) = aT(f)$ である。
以上により T は線形変換である。

---

3. $\{1, x, x^2\}$ が $\mathbb{R}[x]_2$ の基底であることを示せ。

…………………………………………………………………………

$\{1, x, x^2\}$ が基底であるとは
(a) $1, x, x^2$ が一次独立である
(b) $\mathbb{R}[x]_2$ の任意の元が $1, x, x^2$ が一次結合で書ける
を満たすときをいう。

…………………………………………………………………………

$a_i \in \mathbb{R}$ とする。$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0$ となるのは $(a_0, a_1, a_2) = (0, 0, 0)$ のときのみである。これは、$1, x, x^2$ に実数をかけてもそれぞれの次数が変化しないためである。
また、$\mathbb{R}[x]_2$ の任意の元は $f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2$ と書けるため全ての元が $1, x, x^2$ の一次結合である。
よって、$\{1, x, x^2\}$ は $\mathbb{R}[x]_2$ の基底である。

---

4. 基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列を求めよ。

…………………………………………………………………………

$T(x^2) = 2x, T(x) = 1, T(1) = 0$ である。この為、基底は次のように対応が取れる。

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

これを行列で表すと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

よって、表現行列は次の様になる。

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$
