参考文献

ゲンツェンの自然演繹法 — Mukai Kuniaki 慶応大学

http://web.sfc.keio.ac.jp/~mukai/modular/gentzen-NK.pdf

自然演繹–Natural deduction

NK

以下にある、9 つの推論規則を有限回組み合わせて得られる「論理式たちを並べた樹形図」のことを NK の証明図という。

1. 仮定の宣言

$$\text{仮定 } n : A$$

2. $\wedge$ 導入規則

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\,(I\wedge)$$

3. $\wedge$ 除去規則

$$\frac{A \wedge B}{A}\,(E\wedge)\,, \qquad \frac{A \wedge B}{B}\,(E\wedge)$$

4. $\to$ 導入規則

$$\begin{array}{c} \text{仮定 } n : A \\ \vdots \\ \dfrac{B}{A \to B}\,(I \to, \text{仮定 } n) \end{array}$$

5. $\to$ 除去規則

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}\,(E \to)$$

6. $\neg$ 導入規則

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{仮定 } \cancel{n : A} \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A}\ (I\neg,\ \text{仮定 } n)$$

7. ¬ 除去規則

$$\dfrac{\begin{array}{c}\text{仮定 } \cancel{n : \neg A} \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{A}\ (E\neg,\ \text{仮定 } n)$$

8. ∨ 導入規則

$$\frac{A}{A \vee B}\ (I\vee)\ , \qquad \frac{B}{A \vee B}\ (I\vee)$$

9. ∨ 除去規則

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{array}{c}\text{仮定 } \cancel{n : A} \\ \vdots \\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{仮定 } \cancel{m : B} \\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\ (E\vee,\ \text{仮定 } n, m)$$

HK

以下のどれかの形をした論理式をすべて集めた集合を HK の（論理）公理と呼ぶ

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
4. (a) $(A \vee B) \to (\neg A \to B)$
   (b) $(\neg A \to B) \to (A \vee B)$
5. (a) $(A \wedge B) \to \neg(A \to \neg B)$
   (b) $\neg(A \to \neg B) \to (A \wedge B)$

「A と $A \to B$ から B を導く」という規則をモーダス・ポーネンスという

上記 5 つの公理と 1 つの推論規則 (モーダス・ポーネンス) のみを用いて HK の証明図は作る

---

1. **命題論理**

   A を命題論理の論理式とする。$A \to A$ の HK における証明図を書け。また、

$(\neg A) \vee A$ の NK における証明図を書け。

....

$\vdash_{\mathrm{HK}} A \to A$ の証明図

[1] HK の 公理 1 より (公理 1 の B を $A \to A$ に置き換えた)

$D_0 = A \to ((A \to A) \to A)$

[2] HK の 公理 2 より (公理 2 の B を $A \to A$ に、C を A に置き換えた)

$D_1 = (A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$

[3] D_0 と D_1 にモーダスポーネンスを適用

$D_2 = (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$

[4] HK の 公理 1 より

$D_3 = A \to (A \to A)$

[5] D_3 と D_2 にモーダスポーネンスを適用

$D_4 = A \to A$

....

$\vdash_{\mathrm{NK}} (\neg A) \vee A$ の証明図

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\text{仮定 }1:\neg((\neg A)\vee A)} \quad \dfrac{\cancel{\text{仮定 }2:A}}{(\neg A)\vee A}\,(I\vee)}{\perp}\,(I\wedge)}{\neg A}\,(I\neg,\ \text{仮定 }2)}{\neg A\vee A}\,(I\vee) \quad \cancel{\text{仮定 }3:\neg((\neg A)\vee A)}}{\perp}\,(I\wedge)}{(\neg A)\vee A}\,(E\neg,\ \text{仮定 }1,3)$$

---

2. 述語論理

(a) $L_1 = \{c, f\}, L_2 = \{P\}$ とする。ただし、c は定数記号、f は 2 変数関数記号、P は 1 変数述語記号である。

$L_3 = L_1 \cup L_2$ とする。自由変数を 1 つ、束縛変数を 1 つもつ L_3 論理式で、$i < 3$ に対しては L_i 論理式とはならない論理式の例を挙げよ。

また、L_2 文だが、L_1 文ではないような文の例を挙げよ。

更に、L_1 文にも L_2 文にもなっているような分の例を与えよ。

....

$\forall v_0 P(f(v_0, v_1))$ は $f \in L_3,\ P \in L_3$ であるので L_3 論理式である。変数は v_0, v_1 とあり、$\forall v_0$ とあるので束縛変数が 1 つと自由変数が 1 つである。$P \notin L_1$ であるので L_1 論理式ではなく、$f \notin L_2$ であるので L_2 論理式でもない。

$\exists v_0 P(v_0)$ は束縛変数が一つのみであるので、L_2 文であるが、$P \notin L_1$ である

ので L_1 文ではない。
$\forall v_0 \exists v_1 (v_0 = v_1)$ は L_1 文でも L_2 文でもある。

(b) $L = \{f, P\}$ とする。ただし、f は 2 変数関数記号、P は 2 変数述語記号である。
L 構造 M と N で次の性質を満たすような例を挙げよ。

$$M \vDash \forall x \, \exists y \, \left(P\left(f\left(x, y\right), y\right)\right), \qquad N \vDash \neg \left(\forall x \, \exists y \, P\left(f\left(x, y\right), y\right)\right) \tag{1}$$

....

$M = (\mathbb{Z}, 0, -, <)$ とする。この時、任意の x に対して $x - y < y$ となる y が存在する。具体的には $y > \frac{x}{2}$ を満たす y を取ってくればよい。
$N \vDash \neg \left(\forall x \, \exists y \, P\left(f\left(x, y\right), y\right)\right)$ は次のように $N \vDash \exists x \, \forall y \, \neg P\left(f\left(x, y\right), y\right)$ と考えられる。

$$\neg \left(\forall x \, \exists y \, P\left(f\left(x, y\right), y\right)\right) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \, \forall y \, \neg P\left(f\left(x, y\right), y\right) \tag{2}$$

$N = (\mathbb{Z}, 0, \times, <)$ とすると、ある x が存在して任意の y に対して $xy < y$ とならない。具体的には $x = 1$ であれば、任意の y に対して $y < y$ を満たさない。
