1

関数 $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ を三角関数を用いて $f(x)=\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{inx}$ と Fourier 級数展開を出来るか考える。

「f は可積分」、「$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)$ は絶対収束」という仮定の下では $\widehat{f}(n)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$ と求めることが出来る。

これにより $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)$ が収束するが、級数は $f(x)$ と一致するかは不明である。

関数 f によっては、その Fourier 級数 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{inx}$ が収束しない例もあり、級数の収束するかと収束先が $f(x)$ であるかを考える必要がある。

2

Poisson の定理 ($^{\forall}f\in C_{per}[-\pi,\pi]$ に対して、$P_rf\xrightarrow{r\nearrow 1}f$(一様収束)) を利用し、$f\in C_{per}^2[-\pi,\pi]$ ならばフーリエ級数 $f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{inx}$ に展開できる事が示せる。

これにより $f\in C_{per}^2[-\pi,\pi]$ は Fourier 展開が出来るための十分条件ではあるが、$C_{per}^2[-\pi,\pi]$ ではない関数でも Fourier 展開が可能なものもある。

3

$f\in C_{\mathrm{per}}^2[-\pi,\pi]$ であれば、Fourier 展開 $f(x)=\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{inx}$ が出来るが、$f\in C_{\mathrm{per}}^1[-\pi,\pi]$ の時もこのように展開ができる事が示せる。

まず、$C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ に内積を定義し、内積から距離を定義する。この距離において Bessel の不等式 $\left\|\displaystyle\sum_{n=-M}^{N}\hat{f}(n)e_n\right\|_2^2\leq\|f\|_2^2$ $(e_n(x):=e^{inx})$ が成立する。この不等式を利用することで $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)<\infty$ ということが示せ、C^1 関数の Fourier 展開ができることがわかる。

$f\in C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ の場合は先程定義した距離においての収束を考えることで Fourier 展開ができる。

4

$p < \infty$ において $L^p(\mu)$ のコーシー列は概収束する部分列を持つことから収束することがわかる。

$L^\infty(\mu)$ のコーシー列は esssup を考えることにより収束することがわかる。よって、$L^p(\mu)$ は完備な距離空間である。

これにより、$\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e_n$ は距離 $\|\cdot\|_2$ により収束する。

5

$f \in L^1(\mathbb{R}^d),\ g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ に対し、畳み込み $f * g$ は $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$ を満たす。また、$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d),\ g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ に対し、$f * g$ は C^∞ 級である。

これらを用いて $p \in [1, \infty)$ に対して $C_{per}^\infty[-\pi, \pi]$ は $(L^p(-\pi, \pi), \|\cdot\|_p)$ で稠密であることが示せる。この稠密性より $f \in L^2(-\pi, \pi)$ の Fourier 級数の部分和 $\sum_{n=-M}^{N} \widehat{f}(n)e_n$ は $M, N \to \infty$ で f に L^2 収束することが得られる。

6

$L^2(-\pi, \pi)$ は無限次元線形空間である。ここにノルムを導入する。

ノルムから定義された位相を用いて極限が定義できるので、$\sum_{n=1}^\infty v_n s_n$ という式に意味をもたせられる。任意の元 v に対して複素数列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が唯一存在し $\lim_{N\to\infty} \left\| v - \sum_{n=1}^N v_n s_n \right\| = 0$ を満たすとき、$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を Schauder（シャウダー）基底という。

有限次元の線形空間では全てのノルムは同値であるが、無限次元では成立しない為、この極限はノルムに依存する。
