次の極限値を求めよ。

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1+0} 3^{\frac{2}{1-x}}$

$\displaystyle\lim_{x\to 1+0} \frac{2}{1-x} = -\infty$ であるので

$$\lim_{x\to 1+0} 3^{\frac{2}{1-x}} = \lim_{\frac{2}{1-x}\to -\infty} 3^{\frac{2}{1-x}} = \lim_{X\to -\infty} 3^{X} = 0 \tag{1}$$

2. $\displaystyle\lim_{x\to +0} \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$

$\displaystyle\lim_{x\to +0} \frac{1}{x} = +\infty$ であるので

$$\lim_{x\to +0} \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{\frac{1}{x}\to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{X} = 0 \tag{2}$$

3. $\displaystyle\lim_{x\to -0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

$\displaystyle\lim_{x\to -0} 2^{\frac{1}{x}} = +0$ であるので

$$\lim_{x\to -0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{2^{\frac{1}{x}}\to +0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{X\to +0} \frac{1}{1+X} = 1 \tag{3}$$

4. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{1+\tan x}$

$\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \tan x = +\infty$ であるので

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{1+\tan x} = \lim_{\tan x\to +\infty} \frac{1}{1+\tan x} = \lim_{X\to +\infty} \frac{1}{1+X} = 0 \tag{4}$$

5. $\displaystyle\lim_{x\to +0} \frac{\log_2 x}{\log_2 x + 3}$

$\lim_{x\to+0}\log_2 x = -\infty$ であるので、

$$\lim_{x\to+0}\frac{\log_2 x}{\log_2 x+3} = \lim_{\log_2 x\to-\infty}\frac{\log_2 x}{\log_2 x+3} \tag{5}$$
$$= \lim_{X\to-\infty}\frac{X}{X+3} = \lim_{X\to-\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{X}} = 1 \tag{6}$$

---

6. $\lim_{x\to3+0}\left(\log_6(x^2-9)-\log_6(x-3)\right)$

....

$$\lim_{x\to3+0}\left(\log_6(x^2-9)-\log_6(x-3)\right) = \lim_{x\to3+0}\log_6\frac{x^2-9}{x-3} \tag{7}$$
$$= \lim_{x\to3+0}\log_6(x+3) = 1 \tag{8}$$

---

7. $\lim_{x\to\infty}\left(\log_3 x^2-\log_2(x^2+5x+2)\right)$

....

$\log_2(x^2+5x+2) = \log_2 x^2(1+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}) = \log_2 x^2+\log_2(1+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2})$ である。この為、問の式は次のように変形できる。

$$\lim_{x\to\infty}\left(\log_3 x^2-\log_2(x^2+5x+2)\right) \tag{9}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\log_3 x^2-\log_2 x^2-\log_2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right) \tag{10}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\log_3 x^2-\log_2 x^2\right)-\lim_{x\to\infty}\log_2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right) \tag{11}$$

次のように、後半部分は 0 である。

$$\lim_{x\to\infty}\log_2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right) = \log_2 1 = 0 \tag{12}$$

そこで、前半部分を計算する。

$$\log_3 x^2-\log_2 x^2 = \frac{\log_6 x^2}{\log_6 3}-\frac{\log_6 x^2}{\log_6 2} = \frac{2\log_6 x}{\log_6 3}-\frac{2\log_6 x}{\log_6 2} \tag{13}$$
$$= \left(\frac{2}{\log_6 3}-\frac{2}{\log_6 2}\right)\log_6 x \tag{14}$$

$0<\log_6 2<\log_6 3<1$ より

$$\frac{2}{\log_6 3}-\frac{2}{\log_6 2} = \frac{2(\log_6 2-\log_6 3)}{\log_6 3\log_6 2} < 0 \tag{15}$$

また、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_6 x = \infty$ であるので、

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\log_3 x^2 - \log_2 x^2\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\log_6 3} - \frac{2}{\log_6 2}\right)\log_6 x \qquad (16)\\ &= \left(\frac{2}{\log_6 3} - \frac{2}{\log_6 2}\right)\lim_{x\to\infty}\log_6 x = -\infty \qquad (17)\end{aligned}$$

(12) と (17) より

$$\lim_{x\to\infty}\left(\log_3 x^2 - \log_2(x^2+5x+2)\right) = -\infty + 0 = -\infty \qquad (18)$$
