
σ-加法族

集合 X の集合族 Σ が「σ-加法族である」とは次を満たすときをいう。

1. $X \in \Sigma$
2. $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$
3. $A_i \in \Sigma \ (i \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$

生成される σ-加法族

X の部分集合族 $\mathcal{A}$ について、$\mathcal{A}$ を含む最小の σ-加法族を $\sigma_X(\mathcal{A})$ と表す。

$$\sigma_X(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{M}:\sigma\text{-加法族} \\ \mathcal{A}\subset\mathcal{M}}} \mathcal{M} \tag{1}$$

ボレル σ-加法族

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。$\sigma_X(\mathcal{O})$ を X 上のボレル σ-加法族といい、$\mathcal{B}(X)$ と表す。
$\mathcal{B}(X)$ の元のことをボレル集合という。

演習問題 3.4.

$\mathbb{R}$ には通常の位相を入れるものとし、$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。また、$\mathbb{R}$ の部分集合 A に対し、$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ とする。

1. K を $\mathbb{R}$ のコンパクト集合とするとき、$f(K)$ も $\mathbb{R}$ のコンパクト集合になることを示せ。
2. $f(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ のボレル集合であることを示せ。

....

1. $f(K)$ の任意の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとってくる。
   関数 f は連続であるので、$f^{-1}(U_\lambda)$ は開集合である。よって、$\{f^{-1}(U_\lambda)\}$ は K の開被覆である。
   K はコンパクトであるので、この開被覆は有限個 $\{f(U_{\lambda_k})\}$ を選ぶことが出来る。
   $$K = \bigcup_{k=1}^{n} f(U_{\lambda_k}) \tag{2}$$
   これにより $\{U_{\lambda_k}\}$ が $f(K)$ の有限開被覆となり、$f(K)$ がコンパクトであることになる。
2.

演習問題 4.5.

$(X, \mathcal{M})$ を可測空間とし、$f, g : X \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{M}$-可測であるとする。

このとき、$\{x \in X \mid f(x) < g(x)\} \in \mathcal{M}$ であることを示せ。

. . . .

区間 $I_\alpha \subset \overline{\mathbb{R}}$ を次のように定義する。

$$I_\alpha = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid -\infty \leq x \leq \alpha\} \tag{3}$$

f, g は $\mathcal{M}$-可測であるので、任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $f^{-1}(I_\alpha), g^{-1}(I_\alpha) \in \mathcal{M}$ である。

演習問題 4.6.

$(X, \mathcal{M})$ を可測空間とし、$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X 上の $\overline{\mathbb{R}}$-値関数の列とする。${}^\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、f_n が $\mathcal{M}$-可測であることを仮定する。

$$E = \left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n \text{が}(\overline{\mathbb{R}}\text{内に})\text{存在する}\right\} \tag{4}$$

とおくとき、$E \in \mathcal{M}$ であることを示せ。

. . . .
