$n \in \mathbb{N}$ とするとき、次を示せ。

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1 \tag{1}$$

....

$n^{1/n}$ の対数を取れば次の 2 つは同値である。

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0 \tag{2}$$

そこで、$\dfrac{\log n}{n}$ について考える。

$x = 0$ における e^x のテイラー展開が $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ である。

正の実数 $x > 0$ とする。

$e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ であるが、右辺の全ての項は正であるので、これを途中で打ち切ると次の不等式を得る。

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} \tag{3}$$

これを利用すると次の不等式が得られる。

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1 + x + \frac{x^2}{2}} \tag{4}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1 + x + \frac{x^2}{2}} = 0$ であることから $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ であることがわかる。

$n \in \mathbb{N}$ として、$x = \log n$ とする。

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{e^{\log n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} \tag{5}$$

これにより $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$ であり、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ であることが示せた。