微分幾何

1. 曲面片 S に線分 C が含まれているとする。このとき、C は S の測地線であることを示せ。

　……………………………………………………………………………………

線分 C の長さを L とし、弧長パラメータで $\gamma(s)$ と表現できるとする。
曲面 S はパラメータ u, v により $p(u,v)$ とかけるのであれば、$\gamma(s) = p(u(s), v(s))$ である。これを s で微分する。

$$\begin{aligned}\gamma'(s) =& p_u(u,v)u'(s) + p_v(u,v)v'(s) & (1)\\ =& (p_u(u,v), p_v(u,v)) \cdot (u'(s), v'(s)) & (2)\end{aligned}$$

(p_u, p_v) は曲面 $p(u,v)$ の接ベクトルであるので、$\gamma'(s)$ も曲面上の接ベクトルである。
$\gamma(s)$ は弧長パラメータであるので、$\gamma'(s)\cdot\gamma'(s) = 1$ である。$\gamma'(s)\cdot\gamma'(s) = |\gamma'(s)|^2$ より両辺を s で微分すると次のようになる。

$$(|\ \gamma'(s)|^2)' = 2\gamma'(s)\cdot\gamma''(s) = 0 \tag{3}$$

これにより $\gamma'(s)$ と $\gamma''(s)$ は直交するが、$\gamma'(s)$ は接ベクトルであるので、$\gamma''(s)$ は法ベクトルである。よって、$\gamma(s)$ が表す線分 C は測地線である。

---

2. 曲面片 S は平面 P に関する折り返しで対称であるとする。S の P による切り口 $S \cap P$ が曲線片であるとき、$S \cap P$ は S の測地線であることを示せ。

　……………………………………………………………………………………

---

3. C を有限な長さを持つ、曲率が 0 になる点がない曲線片とする。C の弧長パラメータ表示を $p : I = [0, L] \to S$ とし、$b(s)$ を点 $p(s)$ における従法線ベクトルとする。$x(s,t) = p(s) + tb(s)$ とおく。
(a) $\varepsilon > 0$ を十分小さくとると x は $I \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ 上の正則曲面であることを示せ。

　……………………………………………………………………………………

$x(s,t)$ を s, t でそれぞれ偏微分する。

$$x_s(s,t) = p'(s) + tb'(s),\ \ x_t(s,t) = b(s) \tag{4}$$

x が正則曲面であるためには $x_s(s,t), x_t(s,t)$ が一次独立であればよい。

$t=0$ の時、$x_s(s,0)=p'(s),\ x_t(s,t)=b(s)$ であり、この 2 つのベクトルは直交する。ここに小さな値 ε を加え $x_s(s,\varepsilon),\ x_t(s,t)$ が一次従属でないようにすることはできる。つまり、$I\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上で正則となるような ε はとってこれる。

(b) C はこの曲面の測地線であることを示せ。

. . . .

$p''(s)$ は $p'(s)$ と直交するベクトルであるが、$b(s)$ とも直交する。つまり、曲面 $I\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上で、$p''(s)$ は法線ベクトルである。
よって、C は測地線である。
