

問 3 以下の 1 次元複体 X, Y が位相同型であるかどうかを判定せよ。

(a) $X = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid -2 < x < 5\}, Y = \{y \in \mathbb{R}^1 \mid y > 0\}$

.....

写像 f を次のように定義します。

$$f : X \rightarrow Y \quad x \mapsto -\frac{x+2}{x-5} \quad (1)$$

この f は連続写像であり全単射です。

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \infty \quad (2)$$

この時、逆写像が存在し次の式で表せます。

$$f^{-1} : Y \rightarrow X \quad y \mapsto \frac{5y-2}{y+1} \quad (3)$$

この写像 f^{-1} は

$$\lim_{y \rightarrow 0} f^{-1}(y) = -2 \quad \lim_{y \rightarrow \infty} f^{-1}(y) = 5 \quad (4)$$

であり、全単射な連続写像です。写像 f は全単射な連続写像でその逆写像 f^{-1} も連続写像であるので、位相同型写像となり、 X と Y は位相同型であることがわかります。

(b) $X = \bigcirc, Y = \bigoplus$

.....