各種情報

開集合の公理

集合 X の部分集合族 $\mathcal{O}$ について次の 3 条件を開集合の公理という。

1. $\emptyset \in \mathcal{O},\ X \in \mathcal{O}$
2. $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$
3. $O_\lambda \in \mathcal{O}\ (\lambda \in \Lambda)$ ならば $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

問題

1. **相対位相**

   $(X, \mathcal{O})$ が位相空間とする。$A \subset X$ を部分集合とする。$\mathcal{O}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{O}\}$ とする時、$(A, \mathcal{O}_A)$ は位相空間であることを確かめよ。

   ……………………………………………………………………

   $\mathcal{O}_A$ に対して開集合の公理を確認すればよい。

   $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ より

   $$\emptyset = A \cap \emptyset \in \mathcal{O}_A,\ A = A \cap X \in \mathcal{O}_A \tag{1}$$

   ${}^\forall U_1, U_2 \in \mathcal{O}_A$ に対して $U_1 = A \cap O_1,\ U_2 = A \cap O_2$ となる $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ が存在する。

   $$U_1 \cap U_2 = (A \cap O_1) \cap (A \cap O_2) = A \cap (O_1 \cap O_2) \in \mathcal{O}_A \tag{2}$$

   ${}^\forall U_\lambda \in \mathcal{O}_A\ (\lambda \in \Lambda)$ に対して $U_\lambda = A \cap O_\lambda$ となる $O_\lambda \in \mathcal{O}$ が存在する。

   $$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A \cap O_\lambda) = A \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\right) \in \mathcal{O}_A \tag{3}$$

   以上により $\mathcal{O}_A$ は開集合の公理を満たす。よって、$(A, \mathcal{O}_A)$ は位相空間である。

---

2. $X = \mathbb{Z},\ \mathcal{L} = \{\{[3n-1, \infty) \cap X \mid n \in \mathbb{Z}\},\ \{(-\infty, 2n] \cap X \mid n \in \mathbb{Z}\}\}$ とする。$\mathcal{L}$ によって生成される X 上の位相は離散位相か?

   ……………………………………………………………………

   離散位相は全ての部分集合が開集合となる位相空間である。

   $$[-1, \infty) \cap (\infty, 0] = \{-1, 0\} \tag{4}$$
   $$[2, \infty) \cap (\infty, 0] = \emptyset \tag{5}$$
   $$[-1, \infty) \cap (\infty, -2] = \emptyset \tag{6}$$

   上記のように $\{0\}$ という集合は作ることができない。この為、$\mathcal{L}$ は離散位相を生成しない。

3. $X=\{1,2,3,4\},\ \mathcal{T}=\{\{1,2\},\{2,3\},4\}$ とする。$\mathcal{T}$ によって生成される集合 X の開集合系を求めよ。

………………………………………………………………………………

$\mathcal{T}=\{\{1,2\},\{2,3\},4\}$ とあるが、$\mathcal{T}=\{\{1,2\},\{2,3\},\{4\}\}$ ではないかと思うのでこちらで記述を行う。

………………………………………………………………………………

$$
\begin{aligned}
\{1,2\}\cap\{4\} =& \emptyset & (7)\\
\{1,2\}\cup\{2,3\}\cup\{4\} =& X & (8)\\
\{1,2\}\cap\{2,3\} =& \{2\} & (9)\\
\{1,2\}\cup\{2,3\} =& \{1,2,3\} & (10)\\
\{1,2\}\cup\{4\} =& \{1,2,4\} & (11)\\
\{2,3\}\cup\{4\} =& \{2,3,4\} & (12)\\
\{2\}\cup\{4\} =& \{2,4\} & (13)\\
& & (14)
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{O}_{\mathcal{T}}=\{\emptyset,X,\{2\},\{4\},\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,3,4\}\} \qquad (15)$$