$f(x) = \sin x$ の剰余項付きマクローリンの展開

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}n) \tag{1}$$

$$f^{(n)}(0) = \sin(\frac{\pi}{2}n) \tag{2}$$

$$f^{(n)}(\theta x) = \sin(\theta x + \frac{\pi}{2}n) \tag{3}$$

$f^{(n)}(0) = \sin(\frac{\pi}{2}n)$ は奇数番目は 0 で偶数番目は 1 と -1 が交互に現れる。

$n = 2m$ と置くと $f^{(n)}(\theta x) = \sin(\theta x + m\pi)$ となる。

$$f(x) = \frac{0}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 + \cdots \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \\ &\qquad + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + \frac{\sin(\theta x + m\pi)}{(2m)!}x^{2m} \end{aligned} \tag{5}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \frac{\sin(\theta x + m\pi)}{(2m)!}x^{2m} \tag{6}$$

補足

微分は多項式の形をしていると行いやすいので、次のような形 (級数) にしてみる。

$$\sin x = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots + a_kx^k + \cdots \tag{7}$$

a_0 は $x = 0$ を代入すると求まる。$0 = a_0$

a_1 は 1 回微分をしてから $x = 0$ を代入すると求まる。$1 = a_1$

$$\cos x = a_1 + 2a_2x^1 + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + ka_kx^{k-1} + \cdots \tag{8}$$

a_2 は 2 回微分をしてから $x = 0$ を代入すると求まる。$0 = 2a_2$

$$-\sin x = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x^1 + 4 \cdot 3a_4x^2 + \cdots + k(k-1)a_kx^{k-2} + \cdots \tag{9}$$

a_3 は 3 回微分をしてから $x = 0$ を代入すると求まる。$-1 = 3!a_3$

$$-\cos x = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4x^1 + \cdots + k(k-1)(k-2)a_kx^{k-3} + \cdots \tag{10}$$

C^∞ 級であれば無限に行える為、求めた a_k を (7) の式に代入し級数が得られる。

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \tag{11}$$