Vinogradov の記号

$$f : X \to \mathbb{C}, \quad g : X \to \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{1}$$

部分集合 $S \subset X$ とする。

$$x \in S \text{ において } f(x) \ll g(x) \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\exists}C \geq 0 \text{ s.t. } {}^{\forall}s \in S,\ |f(x)| \leq Cg(x)$$

定数 C のことを **implicit constant** または **implied constant** という。

Landau の記号

$$g : X \to \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{2}$$

$S \subset X$ に対して $O(g(x)) \overset{\text{def}}{\iff}$ 範囲 $x \in S$ において $f(x) \ll g(x)$ と評価されるような項 $f(x)$ の省略

Landau の記号

$$f(x) = O(g(x))\ (x \to a) \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\exists}C \geq 0\ s.t.\ \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C \tag{3}$$

$O(g(x))\ (x \to a)$ とは、$x \to a$ において同じぐらいの速さで収束する関数全体の集合である。

$O(g(x))\ (x \to \infty)$ であれば、$\deg g(x)$ と等しい次数の多項式等の集合であり、$O(g(x))\ (x \to 0)$ であれば、次数の低い項が同じ次数の多項式等の集合である。

正しい表記は $f(x) \in O(g(x))\ (x \to a)$ である。

$$f(x) = o(g(x))\ (x \to a) \overset{\text{def}}{\iff} \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{4}$$

$o(g(x))\ (x \to a)$ とは、$x \to a$ において $g(x)$ より速く 0 に収束する関数全体の集合である。

つまり、上の表記は正しくは $f(x) \in o(g(x))\ (x \to a)$ となる。

---

1. (a) 関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ と $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して、$f(n) \ll F(n) \quad (n \in \mathbb{N})$ が成り立つとき、実数 $x \geq 1$ に対して、次が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n \leq x} f(n) \ll \sum_{n \leq x} F(n) \tag{5}$$

. . . .

$\sum_{n\leq x} f(n) = \sum_{n=1}^{[x]} f(n)$ であり、$\sum_{n\leq x} F(n) = \sum_{n=1}^{[x]} F(n)$ である。つまり、有限和である。

$f(n) \ll F(n) \quad (n \in \mathbb{N})$ が成り立つので、各自然数 k に対して、次を満たす $C \geq 0$ が存在する。

$$|f(k)| \leq CF(k) \tag{6}$$

よって、1 から $[x]$ までの和が次の不等式を満たす。

$$\sum_{n=1}^{[x]} |f(n)| \leq C \sum_{n=1}^{[x]} F(n) \tag{7}$$

左辺は三角不等式から次の関係がある。

$$\left| \sum_{n=1}^{[x]} f(n) \right| \leq \sum_{n=1}^{[x]} |f(n)| \tag{8}$$

よって、

$$\left| \sum_{n=1}^{[x]} f(n) \right| \leq C \sum_{n=1}^{[x]} F(n) \tag{9}$$

であるので、

$$\sum_{n\leq x} f(n) \ll \sum_{n\leq x} F(n) \tag{10}$$

である。

(b) 関数 $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ と $F_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ $(i = 1, \ldots, K)$ に対して、条件 $|f_k(n)| \leq 1, f_k(n) \ll F_k(n)$ $(k \in \{1, \ldots, K\},\ n \in \mathbb{N})$ (但し、ここで implicit constant は絶対定数) が成立すれば、次が成り立つことを示せ。

$$\prod_{k=1}^{K} (1 + f_k(n)) = 1 + O_K \left(\sum_{k=1}^{K} F_k(n) \right) \tag{11}$$

. . . .

$$\prod_{k=1}^{K} (1 + f_k(n)) = 1 + \sum_{k=1}^{K} f_k(n) + \sum_{i,j(i\neq j)} f_i(n) f_j(n) + \cdots + \prod_{k=1}^{K} f_k(n) \tag{12}$$

$|f_k(n)| \leq 1$ より $f_k(n)$ を複数かけた方がより 0 に近い値となる。

$$0 \leq \cdots \leq |f_k(n) f_i(n)| \leq |f_k(n)| \leq 1 \tag{13}$$

$f_k(n) \ll F_k(n)$ より、$k = 1, \ldots, K$ に対して $C_k > 0$ が存在する。

$$|f_k(n)| \le C_k F_k(n) \tag{14}$$

$C_M = \max\{C_1, \ldots, C_K\}$ とおけば、

$$\left|\sum_{k=1}^{K} f_k(n)\right| \le \sum_{k=1}^{K} |f_k(n)| \le \sum_{k=1}^{K} C_k F_k(n) \le \sum_{k=1}^{K} C_M F_k(n) = C_M \sum_{k=1}^{K} F_k(n) \tag{15}$$

より、$\sum_{k=1}^{K} f_k(n) \ll \sum_{k=1}^{K} F_k(n)$ であることがわかる。

—要確認—

後ろの項が小さいので次が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{K} f_k(n) + \sum_{i,j(i\neq j)} f_i(n) f_j(n) + \cdots + \prod_{k=1}^{K} f_k(n) \ll \sum_{k=1}^{K} F_k(n) \tag{16}$$

—要確認—

$$\prod_{k=1}^{K} (1 + f_k(n)) = 1 + O_K\left(\sum_{k=1}^{K} F_k(n)\right) \tag{17}$$

---

2. 集合 X 上の関数 $f, g : X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ に対して関係 $\asymp$ を次のように定義する。

$$F(x) \asymp G(x) \quad (x \in X) \overset{\text{def}}{\iff} F(x) \ll G(x) \text{ かつ } G(x) \ll F(x) \quad (x \in X) \tag{18}$$

(a) 集合 X 上の関数 $f, g : X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$f(x) + g(x) \asymp \max(f(x), g(x)) \quad (x \in X) \tag{19}$$

………………………………………………………………………………

$f(x) \ge 0,\ g(x) \ge 0$ である。

$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le 2\max(f(x), g(x)) \quad (x \in X) \tag{20}$$

よって、$f(x) + g(x) \ll \max(f(x), g(x))$ である。

$$|\max(f(x), g(x))| \le f(x) + g(x) \quad (x \in X) \tag{21}$$

よって、$\max(f(x), g(x)) \ll f(x) + g(x)$ である。

以上から次が成り立つ。

$$f(x)+g(x) \asymp \max(f(x),g(x)) \quad (x \in X) \tag{22}$$

（b）集合 X 上の関数 $f,g : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$(f(x)+g(x))^{\frac{1}{2}} \asymp f(x)^{\frac{1}{2}}+g(x)^{\frac{1}{2}} \quad (x \in X) \tag{23}$$

…………………………………………………………………………

$f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$ である。これより $f(x)^{\frac{1}{2}}g(x)^{\frac{1}{2}} \geq 0$ である。

$$\left((f(x)+g(x))^{\frac{1}{2}}\right)^2 = f(x)+g(x) \tag{24}$$

$$\leq f(x)+2f(x)^{\frac{1}{2}}g(x)^{\frac{1}{2}}+g(x) = \left(f(x)^{\frac{1}{2}}+g(x)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \tag{25}$$

$f(x)^{\frac{1}{2}}+g(x)^{\frac{1}{2}} \geq 0$ であるので 2 乗を外すと次の式が得られる。

$$(f(x)+g(x))^{\frac{1}{2}} \leq f(x)^{\frac{1}{2}}+g(x)^{\frac{1}{2}} \tag{26}$$

よって、$(f(x)+g(x))^{\frac{1}{2}} \ll f(x)^{\frac{1}{2}}+g(x)^{\frac{1}{2}}$ である。
相加相乗平均の関係より次の式が得られる。

$$(f(x)g(x))^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}(f(x)+g(x)) \tag{27}$$

これを用いて次の不等式が成り立つ。

$$\left(f(x)^{\frac{1}{2}}+g(x)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = f(x)+2f(x)^{\frac{1}{2}}g(x)^{\frac{1}{2}}+g(x) \tag{28}$$

$$\leq f(x)+f(x)+g(x)+g(x) = 2(f(x)+g(x)) = \left(2^{\frac{1}{2}}(f(x)+g(x))^{\frac{1}{2}}\right)^2 \tag{29}$$

この 2 乗を外すことで $f(x)^{\frac{1}{2}}+g(x)^{\frac{1}{2}} \ll (f(x)+g(x))^{\frac{1}{2}}$ である。
これらより次の式が成り立つことがわかる。

$$(f(x)+g(x))^{\frac{1}{2}} \asymp f(x)^{\frac{1}{2}}+g(x)^{\frac{1}{2}} \quad (x \in X) \tag{30}$$

---

3. 実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して、$\exp(ix) = 1+O(|x|)$ が成立することを示せ。

…………………………………………………………………………

$\exp(ix)$ のテイラー展開

$$\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^k}{k!} = 1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\cdots \tag{31}$$

$$\exp(ix) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \tag{32}$$

---

4. 関数 $\Phi : [1, +\infty) \to \mathbb{C}$ と $F : [1, +\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して次の式が成立するとする。

$$\Phi(x) = 1 + O(F(x)) \quad (x \geq 1) \tag{33}$$

このとき、次を示せ。

(a) もし、$\lim_{x \to \infty} F(x) = 0$ だったなら、ある $x_0 = x_0(\Phi)$ が存在して次が成立する。

$$\frac{1}{\Phi(x)} = 1 + O(F(x)) \quad (x \geq x_0) \tag{34}$$

……………………………………………………………………

(b) もし、$\frac{1}{\Phi(x)} \ll 1$ $(x \geq 1)$ だったなら次が成立する。

$$\frac{1}{\Phi(x)} = 1 + O(F(x)) \quad (x \geq 1) \tag{35}$$

但し、ここで implicit constant は $\frac{1}{\Phi(x)} \ll 1$ $(x \geq 1)$ の implicit constant に依存する。

……………………………………………………………………

---

5. 実数 $x \geq 1$ に対して、次が成立することを示せ。

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d | n} (-1)^d = (-\log 2) \cdot x + O(x^{\frac{1}{2}}) \tag{36}$$

(Hint: hyperbola method を用いる)

……………………………………………………………………

---

6. 数論的関数 $\chi_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ r : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ を次のように定める。

$$\chi_4(n) = \begin{cases} +1 & (n \equiv 1 \pmod 4) \\ 0 & (n \equiv 0 \pmod 2) \\ -1 & (n \equiv 3 \pmod 4) \end{cases}, \quad r(n) = 4 \sum_{d | n} \chi_4(d) \tag{37}$$

このとき、$x \geq 1$ に対して、次が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n \leq x} r(n) = \pi x + O(x^{\frac{1}{2}}) \tag{38}$$

(Hint: hyperbola method を用いる)

(補足：実は、$n \in \mathbb{N}$ に対して、$r(n) = \#\{(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \mid u^2 + v^2 = n\}$ となることが知られている。格子点の数え上げと上記の結果を比較してみると良い)

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

Bernoulli 多項式

（ベルヌーイ）

有理数係数多項式の列 $\{B_k(X)\}_{k=0}^{\infty}$ を初期値 $B_0(X)=1$ および $k \geq 1$ に対して成立する次の漸化式で定める。

$$\frac{1}{k}\frac{d}{dX}B_k(X) = B_{k-1}(X) \quad \text{かつ} \quad \int_0^1 B_k(u)du = 0 \tag{39}$$

この多項式たち $B_k(X)$ のことを Bernoulli（ベルヌーイ）多項式という。

また、多項式 $B_k(X)$ の定数項 $B_k = B_k(0)$ のことを Bernoulli（ベルヌーイ）数と呼ぶ。

Bernoulli 多項式 $B_n(X)$ は Bernoulli 数 B_k を用いて $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} B_k X^{n-k}$ と定義することもできる。Bernoulli 数 は次のようにも定義できる。

$$\sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k+1 \\ j \end{pmatrix} B_j = k+1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \tag{40}$$

Bernoulli 多項式の例

$$B_0(X) = 1, \qquad B_1(X) = X - \frac{1}{2} \tag{41}$$

$$B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}, \qquad B_3(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X \tag{42}$$

$$B_4(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}, \qquad B_5(X) = X^5 - \frac{5}{2}X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{6}X \tag{43}$$

---

1. (a) 自然数 $k \geq 0$ に対して、次が成立することを示せ。

$$B_k(X) = (-1)^k B_k(1-X) \tag{44}$$

....

$Y = 1 - X$ とすると、$\frac{dY}{dX} = -1$ となる。

$$\frac{1}{k}\frac{d}{dX}(-1)^k B_k(1-X) = \frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{d}{dX}\frac{dX}{dY}B_k(Y) \tag{45}$$

$$= (-1)^{k-1}\frac{1}{k}\frac{d}{dY}B_k(Y) \tag{46}$$

$$= (-1)^{k-1}B_{k-1}(Y) \tag{47}$$

$$= (-1)^{k-1}B_{k-1}(1-X) \tag{48}$$

$v=1-u$ とすれば $\frac{d}{du}v=-1$ である。

$$\int_0^1 (-1)^k B_k(1-u)du = (-1)^{k-1}\int_0^1 B_k(1-u)\frac{dv}{du}du \tag{49}$$

$$= (-1)^{k-1}\int_0^1 B_k(v)dv = 0 \tag{50}$$

以上により、$(-1)^k B_k(1-X)$ は Bernoulli 多項式である。

(b) 奇数 $k \geq 3$ に対して、$B_k = 0$ を示せ。

....

$n \in \mathbb{N}$ とする。
上の結果より次の式が得られる。

$$B_{2n-1}(X) = -B_{2n-1}(1-X), \quad B_{2n}(X) = B_{2n}(1-X) \tag{51}$$

これより、$B_{2n-1}(X) + B_{2n-1}(1-X) = 0$ である。
$B_{2n-1}(X) = \sum_{i=0}^{2n-1} a_i X^i$ とする。この時、$B_{2n-1}(X)$ の定数項は a_0 で、$B_{2n-1}(1-X)$ は $\sum_{i=0}^{2n-1} a_i$ である。

---

2. (a) 自然数 $k \geq 1$ に対して次が成立することを示せ。

$$B_k(X) = \sum_{j=0}^{k} X^j B_{k-j} \tag{52}$$

....

(b) 最初の 5 つの Bernoulli 多項式の $B_i(X)$ $(i = 0, \ldots, 4)$ を求めよ。

....

---

3. 実数 $x \geq 1$ と自然数 $K \geq 1$ に対して、

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \sum_{k=1}^{K} (-1)^k \frac{B_k(\{x\})}{k} x^{-k} + (-1)^K \int_x^\infty B_K(\{u\}) u^{-(K+1)} du \tag{53}$$

したがって

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \sum_{k=1}^{K} (-1)^k \frac{B_k(\{x\})}{k} x^{-k} + O(x^{-(K+1)}) \tag{54}$$

が成立することを示せ。

…………………………………………………………………………

---

4. $a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b$、$K \in \mathbb{N}$、$C^K$-級関数 $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ とする。この時、次の **Euler-Maclaurin 和公式**が成り立つことを示せ。

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(u)du + \sum_{k=1}^{K}(-1)^k\left[\frac{B_k(\{u\})}{k!}f^{(k-1)}(u)\right]_a^b \\ -\frac{(-1)^K}{K!}\int_a^b B_K(\{u\})f^{(K)}(u)du\end{aligned} \tag{55}$$

…………………………………………………………………………

---

5. ある定数 c_0 が存在して、自然数 N に対して、次の式が成立することを示せ。

$$N! = \left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{N} e^{c_0 + O(\frac{1}{N})} \tag{56}$$

これは Gamma 関数の Stirling の公式の特殊な場合になっている。
(HINT: Euler-Maclaurin 和公式を利用する。)

…………………………………………………………………………

---

6. 次の積分 I_n について考える。

$$I_n = \int_0^\pi (\sin x)^n dx \tag{57}$$

(a) $I_0 = \pi$ および $I_1 = 2$ を示せ。

…………………………………………………………………………

(b) 整数 $n \geq 0$ に対して次の式を示せ。

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot I_n \tag{58}$$

…………………………………………………………………………

(c) 次の極限を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} \tag{59}$$

…………………………………………………………………………

（d）上記 3 つの結果から次の **Wallis の公式**を示せ。

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) \tag{60}$$

··

（e）$e - c_0 = \sqrt{2\pi}$ を示せ。

··
