$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ は非可算集合であることを示せ。

……………………………………………………………………………

$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ は次のような写像の集合である。

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\} \tag{1}$$

べき集合 $2^{\mathbb{N}}$ は自然数 $\mathbb{N}$ の部分集合全体の集合とする。

$$2^{\mathbb{N}} = \{A \mid A \subset \mathbb{N}\} \tag{2}$$

写像 $F : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ を定義する。F は $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ に対し、$f(a) = 1$ となる自然数 $a \in \mathbb{N}$ を集めた集合を対応させる。

$$F(f) = \{a \in \mathbb{N} \mid f(a) = 1\} \tag{3}$$

これにより、$f \neq g \Rightarrow F(f) \neq F(g)$ となるので単射、${}^{\forall}A \in 2^{\mathbb{N}}$ に対して $a \in A$ なら $f(a) = 1$、$a \notin A$ なら $f(a) \neq 1$ となる写像 f が存在し $F(f) = A$ となるので全射である。

この写像 F により 2 つの集合 $\{0,1\}^{\mathbb{N}},\ 2^{\mathbb{N}}$ は濃度が同じである。$2^{\mathbb{N}}$ は非可算濃度なので $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ も非可算となる。

……………………………………………………………………………

$2^{\mathbb{N}}$ が非可算濃度である

$2^{\mathbb{N}}$ は自然数のべき集合とする。つまり、$\mathbb{N}$ の部分集合をすべて集めた集合とする。

$$2^{\mathbb{N}} = \{A \mid A \subset \mathbb{N}\} \tag{4}$$

任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して自然数一つだけを要素に持つ集合 $\{n\} \subset \mathbb{N}$ を対応させる写像 f を考える。

$$f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}, \qquad n \mapsto \{n\} \tag{5}$$

このとき、f は単射である。これにより $2^{\mathbb{N}}$ は可算濃度以上であることが分かる。

次に逆向きの写像 g を考える。

$$g : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \tag{6}$$

g は単射でないことを背理法で示す。

g を単射であると仮定し、$\mathbb{N}$ の部分集合 S を次のように定義する。

$$S = \{g(A) \in \mathbb{N} \mid A \in 2^{\mathbb{N}},\ g(A) \notin A\} \tag{7}$$

$S \subset \mathbb{N}$ であるので、すべての自然数 $a \in \mathbb{N}$ は $a \in S$ 又は $a \notin S$ である。そこで、$a = g(S)$ として a が S に含まれるかどうかを考える。

$a \notin S$ の場合

$S \in 2^{\mathbb{N}}$ かつ $a = g(S) \notin S$ であるので a は S の定義を満たし $a \in S$ となり矛盾。

$a \in S$ の場合

S の定義から $X \in 2^{\mathbb{N}}$ であり $g(X) \notin X$ となる集合 X が存在し、$a = g(X)$ である。g は単射であるので $g(X) = g(S) \Rightarrow X = S$ である。つまり、$g(S) \notin S$ となり矛盾。

以上により写像 g は単射ではないことが分かる。

つまり、$2^{\mathbb{N}}$ は可算濃度以上ではあるが、可算濃度ではないことから非加算であることが分かる。

.... $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ と $\mathbb{N}$ を比較する場合 ....

写像 f を次のように定義する。

$$f : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}} \qquad n \mapsto h \quad h(x) = \begin{cases} 1 & (x = n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{8}$$

自然数 n に対して n を 1 に写しそれ以外は 0 に写す写像 $h \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ を対応させると f は単射になる。

逆に次のような写像 g を考える。

$$g : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \tag{9}$$

g は単射でないことを示す。

g を単射と仮定する。

$\mathbb{N}$ の部分集合 S を次のように定義する。

$$S = \{g(h) \in \mathbb{N} \mid h \in \{0,1\}^{\mathbb{N}},\ h(g(h)) = 0\} \tag{10}$$

---

2 つの区間 $[0,1]$ と $(0,1]$ の間に全単射を具体的に構成せよ。

....

2 つの区間はほとんど同じなので次のような写像を作りたい。

$$f_0 : [0,1] \to (0,1] \quad x \mapsto x \tag{11}$$

しかし $f_0(0)$ が定義されていない為、f_0 は写像ではない。そこで、$f_0(0) = 1/2$ となるように修正をした写像 f_1 を考える。

$$f_1 : [0,1] \to (0,1], \qquad f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x = 0) \\ x & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{12}$$

これにより f_1 は写像となる。任意の $(0,1]$ に対応する点が $[0,1]$ にある為全射である。ただし、$f_1(0) = f_1(1/2) = 1/2$ より単射ではない。そこで $f_1(1/2)$ を $1/2$ ではない点に写す。

$$f_2 : [0,1] \to (0,1], \qquad f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x = 0) \\ \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} & (x = \frac{1}{2}) \\ x & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{13}$$

写像 f_2 は全射となる。ある一点が重なるため単射ではない。そこで、先程と同じように $f_2(3/4)$ を他の点に写す。

$$f_3 : [0,1] \to (0,1], \qquad f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x = 0) \\ \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} & (x = \frac{1}{2}) \\ \frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} & (x = \frac{3}{4}) \\ x & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{14}$$

これを繰り返すと 1 までの距離が $\frac{1}{2^n}$ である点は 1 までの距離が $\frac{1}{2^{n+1}}$ の点に写すことになる。

つまり、次の写像 f が全単射となる。

$$f : [0,1] \to (0,1], \qquad f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^{n+1}} & (x = 1 - \frac{1}{2^n}, n = 0, 1, 2, \dots) \\ x & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{15}$$
