$\sigma \neq 0$ とし、$c \neq 0$ を定数、$\varepsilon = \{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ をホワイトノイズ $WN(0, \sigma^2)$ とする。また、

$$\phi_1 = \frac{1}{3}, \quad \phi_2 = -\frac{1}{2}, \quad \phi_3 = \frac{1}{6} \tag{1}$$

として、

$$\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \phi_3 z^3 \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{2}$$

とおく。

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \phi_3 X_{t-3} + \varepsilon_t \quad (t \in \mathbb{Z}) \tag{3}$$

によって表される時系列 $X = \{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ について、以下の問に答えよ。

---

1. $\Phi(z) = 0$ の解 $z \in \mathbb{C}$ を求めよ。

....

$$\Phi(z) = 1 - \frac{1}{3}z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3 = 0 \tag{4}$$

分母を払って計算すると次のように因数分解できる。

$$6 - 2z + 3z^2 - z^3 = 0 \tag{5}$$

$$(3 - z)(2 + z^2) = 0 \tag{6}$$

よって、$z = 3,\ \pm\sqrt{2}i$ が解となる。

---

2. $\{X_t - c; t \in \mathbb{Z}\}$ が AR(3) モデルとなることを示せ。

....

自己回帰モデル

確率過程 $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ が次の式で表される時、p 次の自己回帰モデル (Autoregressive Model, AR(p)) という。

$$X_t + \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i} = \varepsilon_t \tag{7}$$

....

式 (3) より

$$X_t - c = \sum_{i=1}^{3} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t \tag{8}$$

である。

この式を $\sum_{i=1}^{3}\phi_i = 0$ を利用して変形すると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
X_t - c &= \sum_{i=1}^{3}\phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t && (9)\\
&= \sum_{i=1}^{3}\phi_i (X_{t-i} - c + c) + \varepsilon_t && (10)\\
&= \sum_{i=1}^{3}\phi_i (X_{t-i} - c) + c\sum_{i=1}^{3}\phi_i + \varepsilon_t && (11)\\
&= \sum_{i=1}^{3}\phi_i (X_{t-i} - c) + \varepsilon_t && (12)
\end{aligned}
$$

$$
(X_t - c) + \sum_{i=1}^{3}(-\phi_i)(X_{t-i} - c) = \varepsilon_t \tag{13}
$$

これにより時系列 $\{X_t - c\}$ は 3 次の自己回帰モデルである。

---

3. 時系列 X は因果的であることを示せ。

....

因果性 (定常性)

自己回帰モデルの時系列において、次の特性方程式 $\Phi(z)$ が単位円内 $(|z| \leq 1)$ で零点を持たない時、因果性をもつという。

$$
\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{14}
$$

....

時系列 $\{X_t - c; t \in \mathbb{Z}\}$ は次の式で表される。

$$
X_t - c = \sum_{i=1}^{3}\phi_i (X_{t-i} - c) + \varepsilon_t \tag{15}
$$

この特性方程式 $\Phi(z)$ は次の式となる。

$$
\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \phi_3 z^3 \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{16}
$$

$\Phi(z)$ の零点 ($\Phi(z) = 0$ を満たす $z \in \mathbb{C}$) は $z = 3, \ \pm\sqrt{2}i$ であり、これらは $|3| > 1, \ \left|\pm\sqrt{2}i\right| > 1$ となるので、時系列 $\{X_t - c; t \in \mathbb{Z}\}$ は因果的である。
$\{X_t - c; t \in \mathbb{Z}\}$ に定数 c を加えた時系列 $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ も因果的である。
