次の積分を求めよ。

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\mathrm{d}x \tag{1}$$

…………………………………………………………………………

この広義積分を複素数上の積分として考える。R は十分に大きい値をとり、ε は十分に 0 に近い値をとる。

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\mathrm{d}x = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_\varepsilon^R \frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{2}$$

被積分関数 $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^3+1}$ に対して、積分経路を次のように考える。

複素平面上において、0 中心の半径 R の円周と、半径 ε の円周、$\varepsilon > \delta > 0$ となる δ を利用し実数直線の正の部分を $+\delta i$ だけ平行移動した直線と、実数直線の正の部分を $-\delta i$ だけ平行移動した直線の 4 つを作る。半径 ε の円と $+\delta i$ だけ平行移動した直線との交点を P_1、半径 R の円と $+\delta i$ だけ平行移動した直線との交点を P_2、半径 R の円と $-\delta i$ だけ平行移動した直線との交点を P_3、半径 ε の円と $-\delta i$ だけ平行移動した直線との交点を P_4 とする。

P_1 から P_2 へ向かう直線を C_1、P_2 から円周を反時計回りに回って P_3 へ向かう曲線を C_2、P_3 から P_4 へ向かう直線を C_3、P_4 から円周を時計回りに回って P_1 へ向かう曲線を C_4 とする。この時の複素数 z の偏角は 0 から 2π の間の値をとるものとする。$(0 \leq \arg z \leq 2\pi)$

この 4 つの積分路をつないで一つの積分路とし、C で表す。$(C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4)$

- C_1 P_1 から P_2 へ向かう直線であり、この直線上の複素数は $z = x + \delta i$ $(x \in \mathbb{R})$ である。
- C_2 P_2 から円周を反時計回りに回って P_3 へ向かう曲線であり、円周上の複素数は $z = Re^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R}, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ である。
- C_3 P_3 から P_4 へ向かう直線であり、この直線上の複素数は $z = x - \delta i$ $(x \in \mathbb{R})$ である。
- C_4 P_4 から円周を時計回りに回って P_1 へ向かう曲線であり、円周上の複素数は $z = \varepsilon e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R}, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ である。

C 上の積分は次のような式となる。

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_4} f(z)\mathrm{d}z \tag{3}$$

$\delta \to 0$ と極限をとれば各積分路上の複素数 z は次のような式で表される。

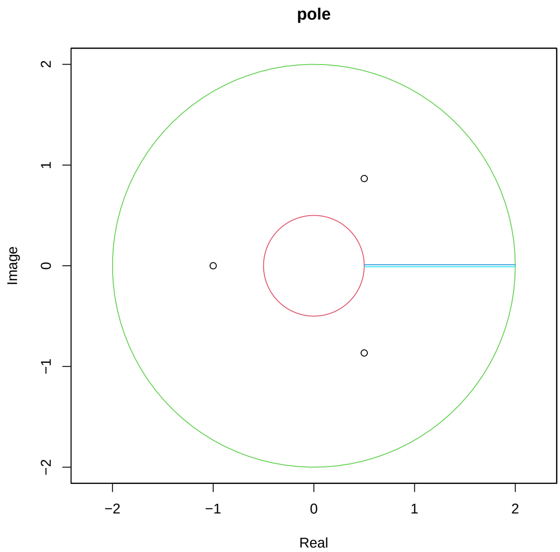

図 1　極の場所と積分経路

C_1　$z = xe^{0i}$ $(x : \varepsilon \to R)$
C_2　$z = Re^{i\theta}$ $(\theta : 0 \to 2\pi)$
C_3　$z = xe^{2\pi i}$ $(x : R \to \varepsilon)$
C_4　$z = \varepsilon e^{i\theta}$ $(\theta : 2\pi \to 0)$

積分路 C は閉じているので、留数定理により積分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ は C の内部にある極から求まる。

$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^3+1}$ の極は $z^3 + 1 = 0$ を満たし、R が十分に大きく ε が十分に小さいので全て C の内部に存在する。

$z^3 + 1 = 0$ を満たす複素数は $z^3 = -1 = e^{(2n+1)\pi i}$ から $z = e^{\frac{\pi}{3}i}, e^{\pi i}, e^{\frac{5\pi}{3}i}$ である。つまり次のような因数分解ができる。$z^3 + 1 = (z - e^{\frac{\pi}{3}i})(z - e^{\pi i})(z - e^{\frac{5\pi}{3}i})$

留数定理により $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ は 3 つの極 $z = e^{\frac{\pi}{3}i}, e^{\pi i}, e^{\frac{5\pi}{3}i}$ それぞれのの留数から求まる。

オイラーの公式により極は次の複素数と等しい。

$$e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{4}$$

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \tag{5}$$

$$e^{\frac{5\pi}{3}i} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{6}$$

これらを用いて 3 つの極の留数を求める。

$$\mathrm{Res}(f, e^{\frac{\pi}{3}i}) = \lim_{z \to e^{\frac{\pi}{3}i}} (z - e^{\frac{\pi}{3}i}) \times \frac{\sqrt{z}}{z^3+1} = \lim_{z \to e^{\frac{\pi}{3}i}} \frac{\sqrt{z}}{(z - e^{\pi i})(z - e^{\frac{5\pi}{3}i})} \tag{7}$$

$$= \frac{\sqrt{e^{\frac{\pi}{3}i}}}{(e^{\frac{\pi}{3}i} - e^{\pi i})(e^{\frac{\pi}{3}i} - e^{\frac{5\pi}{3}i})} = \frac{e^{\frac{\pi}{6}i}}{(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \times \sqrt{3}i} \tag{8}$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{6}i}}{3(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2})} = \frac{e^{\frac{\pi}{6}i}}{3e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}i}}{3} = -\frac{1}{3}i \tag{9}$$

$$\mathrm{Res}(f, e^{\pi i}) = \lim_{z \to e^{\pi i}} (z - e^{\pi i}) \times \frac{\sqrt{z}}{z^3+1} = \lim_{z \to e^{\pi i}} \frac{\sqrt{z}}{(z - e^{\frac{\pi}{3}i})(z - e^{\frac{5\pi}{3}i})} \tag{10}$$

$$= \frac{\sqrt{e^{\pi i}}}{(e^{\pi i} - e^{\frac{\pi}{3}i})(e^{\pi i} - e^{\frac{5\pi}{3}i})} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{(e^{\pi i} - e^{\frac{\pi}{3}i})(e^{\pi i} - e^{\frac{5\pi}{3}i})} \tag{11}$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{e^{\pi i}e^{\pi i} - e^{\frac{\pi}{3}i}e^{\pi i} - e^{\pi i}e^{\frac{5\pi}{3}i} + e^{\frac{\pi}{3}i}e^{\frac{5\pi}{3}i}} \tag{12}$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{1 - e^{\frac{4\pi}{3}i} - e^{\frac{8\pi}{3}i} + 1} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{2 - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)} = \frac{1}{3}i \tag{13}$$

$$\mathrm{Res}(f, e^{\frac{5\pi}{3}i}) = \lim_{z \to e^{\frac{5\pi}{3}i}} (z - e^{\frac{5\pi}{3}i}) \times \frac{\sqrt{z}}{z^3+1} = \lim_{z \to e^{\frac{5\pi}{3}i}} \frac{\sqrt{z}}{(z - e^{\frac{\pi}{3}i})(z - e^{\pi i})} \tag{14}$$

$$= \frac{\sqrt{e^{\frac{5\pi}{3}i}}}{(e^{\frac{5\pi}{3}i} - e^{\frac{\pi}{3}i})(e^{\frac{5\pi}{3}i} - e^{\pi i})} = \frac{e^{\frac{5\pi}{6}i}}{-\sqrt{3}i(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)} \tag{15}$$

$$= \frac{e^{\frac{5\pi}{6}i}}{3(-\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2})} = \frac{e^{\frac{5\pi}{6}i}}{3e^{\frac{4\pi}{3}i}} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}i}}{3} = -\frac{1}{3}i \tag{16}$$

これにより、C 上の積分は次のようになる。

$$\int_C \frac{\sqrt{z}}{z^3+1} \mathrm{d}z = 2\pi i \left(-\frac{1}{3}i + \frac{1}{3}i - \frac{1}{3}i \right) = \frac{2\pi}{3} \tag{17}$$

C は 4 つに分かれるためそれぞれの積分を考える。

C_1 は直線であり、$z = xe^{0i} = x$ $(x : \varepsilon \to R)$ となる複素数での積分である。この時 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$ である。

$$\int_{C_1} f(z) \mathrm{d}z = \int_\varepsilon^R \frac{\sqrt{x}}{x^3+1} \mathrm{d}x \to \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1} \mathrm{d}x \ (\varepsilon \to 0, R \to \infty) \tag{18}$$

C_2 は半径 R の円周上であり、$z = Re^{i\theta}$ $(\theta : 0 \to 2\pi)$ となる複素数での積分である。このとき、$\mathrm{d}z = iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ である。

$$\int_{C_2} f(z) \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{Re^{i\theta}}}{(Re^{i\theta})^3 + 1} iRe^{i\theta} \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{iR^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}i\theta}}{R^3e^{3i\theta} + 1} \mathrm{d}\theta \tag{19}$$

$$\left|\int_0^{2\pi}\frac{iR^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}i\theta}}{R^3e^{3i\theta}+1}\mathrm{d}\theta\right| \le \int_0^{2\pi}\left|\frac{iR^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}i\theta}}{R^3e^{3i\theta}+1}\right|\mathrm{d}\theta \tag{20}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{|iR^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}i\theta}|}{|R^3e^{3i\theta}+1|}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{|i||R^{\frac{3}{2}}||e^{\frac{3}{2}i\theta}|}{|e^{3i\theta}||R^3+e^{-3i\theta}|}\mathrm{d}\theta \tag{21}$$

$\theta\in\mathbb{R}$ について $|e^{-3i\theta}|=|e^{\frac{3}{2}i\theta}|=|i|=1$ となる。R が十分に大きい値であれば $|R^3+e^{-3i\theta}|\ge R^3-1$ であるので、これを利用し上の式を計算する。

$$\int_0^{2\pi}\frac{|i||R^{\frac{3}{2}}||e^{\frac{3}{2}i\theta}|}{|e^{3i\theta}||R^3+e^{-3i\theta}|}\mathrm{d}\theta\le\int_0^{2\pi}\frac{R^{\frac{3}{2}}}{R^3-1}\mathrm{d}\theta=\frac{R^{\frac{3}{2}}}{R^3-1}\cdot 2\pi\to 0\ (R\to\infty) \tag{22}$$

つまり、C_2 上の積分は $R\to\infty$ において 0 に収束する。

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{23}$$

次に C_3 上の積分を考える。C_3 は直線であり、$z=xe^{2\pi i}$ $(x:R\to\varepsilon)$ となる複素数での積分である。この時 $\mathrm{d}z=e^{2\pi i}\mathrm{d}x$ である。

$$\int_{C_3}f(z)\mathrm{d}z=\int_R^{\varepsilon}\frac{\sqrt{xe^{2\pi i}}}{(xe^{2\pi i})^3+1}e^{2\pi i}\mathrm{d}x=\int_R^{\varepsilon}\frac{x^{\frac{1}{2}}e^{\pi i}}{x^3e^{6\pi i}+1}e^{2\pi i}\mathrm{d}x \tag{24}$$

$$=\int_R^{\varepsilon}\frac{-x^{\frac{1}{2}}}{x^3+1}\mathrm{d}x=\int_{\varepsilon}^{R}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3+1}\mathrm{d}x\to\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\mathrm{d}x\ (\varepsilon\to 0, R\to\infty) \tag{25}$$

よって、C_3 上の積分は C_1 上の積分と同じになる。

C_4 上の積分を考える。C_4 は半径 ε の円周上であり、$z=\varepsilon e^{i\theta}$ $(\theta:2\pi\to 0)$ となる複素数での積分である。このとき、$\mathrm{d}z=i\varepsilon e^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ である。

$$\int_{C_4}f(z)\mathrm{d}z=\int_{2\pi}^{0}\frac{\sqrt{\varepsilon e^{i\theta}}}{(\varepsilon e^{i\theta})^3+1}i\varepsilon e^{i\theta}\mathrm{d}\theta=\int_{2\pi}^{0}\frac{i\varepsilon^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}i\theta}}{\varepsilon^3e^{3i\theta}+1}\mathrm{d}\theta \tag{26}$$

$$\left|\int_{2\pi}^{0}\frac{i\varepsilon^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}i\theta}}{\varepsilon^3e^{3i\theta}+1}\mathrm{d}\theta\right|=\left|\int_0^{2\pi}\frac{i\varepsilon^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}i\theta}}{\varepsilon^3e^{3i\theta}+1}\mathrm{d}\theta\right| \tag{27}$$

$$\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{i\varepsilon^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}i\theta}}{\varepsilon^3e^{3i\theta}+1}\right|\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{|i||\varepsilon^{\frac{3}{2}}||e^{\frac{3}{2}i\theta}|}{|e^{3i\theta}||\varepsilon^3+e^{-3i\theta}|}\mathrm{d}\theta \tag{28}$$

ここで、$|e^{-3i\theta}|=1$ となるので、$|\varepsilon^3+e^{-3i\theta}|\ge|\varepsilon^3-1|$ であり、十分に小さな $\varepsilon>0$ において $|\varepsilon^3-1|=1-\varepsilon^3$ となる。

$$\int_0^{2\pi}\frac{|i||\varepsilon^{\frac{3}{2}}||e^{\frac{3}{2}i\theta}|}{|e^{3i\theta}||\varepsilon^3+e^{-3i\theta}|}\mathrm{d}\theta\le\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{1-\varepsilon^3}\mathrm{d}\theta=\frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{1-\varepsilon^3}\cdot 2\pi\to 0\ (\varepsilon\to 0) \tag{29}$$

よって、C_4 上の積分は $\varepsilon \to 0$ において 0 に収束する。

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_4} f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{30}$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_4} f(z)\mathrm{d}z \tag{31}$$

であるが、留数定理より $\int_C f(z)\mathrm{d}z = \frac{2\pi}{3}$ である。

よって、次の式が成り立つ。

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_4} f(z)\mathrm{d}z = \frac{2\pi}{3} \tag{32}$$

これを移項し絶対値をとると次の不等式が得られる。

$$\left|\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z - \frac{2\pi}{3}\right| = \left|\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_4} f(z)\mathrm{d}z\right| \tag{33}$$

$$\leq \left|\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{C_4} f(z)\mathrm{d}z\right| \tag{34}$$

不等式の右辺は

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_4} f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{35}$$

より、0 に収束する。これにより左辺も 0 に収束する。また、$R \to \infty, \varepsilon \to 0$ において

$$\lim_{\substack{R \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\substack{R \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\mathrm{d}x \tag{36}$$

であるので、

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z - \frac{2\pi}{3} \to 2\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\mathrm{d}x - \frac{2\pi}{3} \ (R \to \infty,\ \varepsilon \to 0) \tag{37}$$

$2\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\mathrm{d}x - \frac{2\pi}{3} = 0$ より

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3} \tag{38}$$

である。
