1

関数 $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ を三角関数を用いて $f(x)=\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{inx}$ と Fourier 級数展開を出来るか考える。

「f は可積分」、「$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)$ は絶対収束」という仮定の下では $\widehat{f}(n)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$ と求めることが出来る。

これにより $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)$ が収束するが、級数は $f(x)$ と一致するかは不明である。

関数 f によっては、その Fourier 級数 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{inx}$ が収束しない例もあり、級数の収束するかと収束先が $f(x)$ であるかを考える必要がある。

2

Poisson の定理 ($^{\forall}f\in C_{per}[-\pi,\pi]$ に対して、$P_rf\xrightarrow{r\nearrow 1}f$(一様収束)) を利用し、$f\in C_{per}^2[-\pi,\pi]$ ならばフーリエ級数 $f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{inx}$ に展開できる事が示せる。

これにより $f\in C_{per}^2[-\pi,\pi]$ は Fourier 展開が出来るための十分条件ではあるが、$C_{per}^2[-\pi,\pi]$ ではない関数でも Fourier 展開が可能なものもある。
