問題

$\mathbb{C}^{\times}$ の部分群 H を次のように定める。

$$H = \{z \in \mathbb{C}^{\times} \mid z^6 = 1\}, \quad \mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} \backslash \{0\} \tag{1}$$

1. 次の中で H に属する複素数を全て選べ。

$$1,\ -1,\ i,\ -i,\ \sqrt{3}i,\ -\sqrt{3}i \tag{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i,\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i,\ \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i,\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i,\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i \tag{4}$$

. . . .

$z^6 = 1$ を満たす複素数を探す。
全ての複素数はオイラーの公式から $re^{i\theta}$ と表せる。$(re^{i\theta})^6 = r^6 e^{6i\theta}$ であり、$e^{2\pi ni} = 1$ であるので、$r = 1,\ 6\theta = 2\pi n\ (n \in \mathbb{Z})$ を満たせばよい。

$$1 = e^{i0},\ -1 = e^{i\pi},\ i = e^{\frac{\pi}{2}i},\ -i = e^{\frac{3\pi}{2}i},\ \sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i},\ -\sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{\frac{3\pi}{2}i} \tag{5}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i = e^{\frac{5\pi}{3}i},\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i = e^{\frac{2\pi}{3}i}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i = e^{\frac{\pi}{3}i},\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i = e^{\frac{4\pi}{3}i} \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i = e^{\frac{7\pi}{4}i},\ \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i = e^{\frac{\pi}{4}i}, \tag{8}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i = e^{\frac{3\pi}{4}i},\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i = e^{\frac{5\pi}{4}i} \tag{9}$$

これにより $r = 1$ でない数 $(\pm\sqrt{3}i)$ や $6\theta = 2\pi n\ (n \in \mathbb{Z})$ を満たさない数 $(\pm i, \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i)$ は H に含まれない。
よって、H に含まれる数は次の通り。

$$1,\ -1,\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i,\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i \tag{10}$$

---

2. H の要素数を求めよ。

. . . .

代数学の基本定理により $z^6 = 1$ を満たす複素数は最大で 6 つだが、先程の答えより次の数は式を満たす。

$$z = e^0, e^{\frac{\pi}{3}i}, e^{\frac{2\pi}{3}i}, e^{\pi i} e^{\frac{4\pi}{3}i}, e^{\frac{5\pi}{3}i} \tag{11}$$

よって、H の位数は 6 である。

---

3. H が巡回群であるか否かを答えよ。

...

H のすべての元は $(e^{\frac{\pi}{3}i})^k,\ (k=1,\dots,6)$ と表せる。
つまり、$H=\langle e^{\frac{\pi}{3}i}\rangle$ であるので巡回群である。

問題

1. $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。任意の整数 k に対して、$\bar{k}\in\{0,1,\dots,n-1\}$ を k の n による剰余とする。このとき、$\phi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を $k\mapsto\bar{k}$ とすると、ϕ は準同型写像であることを示せ。

...

準同型写像である為には $f(a+b)=f(a)+f(b)$ を示せばよい。
$a,b\in\mathbb{Z}$ に対して、$\bar{a}=a+n\mathbb{Z},\ \bar{b}=b+n\mathbb{Z}$ である。これにより次の式が成り立つ。

$$f(a)+f(b)=\bar{a}+\bar{b}=a+n\mathbb{Z}+b+n\mathbb{Z}=a+b+n\mathbb{Z}=\overline{a+b}=f(a+b) \tag{12}$$

よって、写像 f は準同型写像である。

---

2. $\phi:\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to D_4$ を $(i,j)\mapsto r^is^j$ とすると ϕ は同型写像であることを示せ。

...

D_4 は 4 次二面体群

$$\langle r,s\mid r^4=s^2=e,rs=sr^{-1}\rangle=\{e,r,r^2,r^3,s,rs,r^2s,r^3s\} \tag{13}$$

ではなく、位数 4 の二面体群

$$\langle r,s\mid r^2=s^2=e,rs=sr^{-1}\rangle=\{e,r,s,rs\} \tag{14}$$

として扱う。

...

二面体群 D_4 は次のような元を持つ可換群である。

$$D_4=\langle r,s\mid r^2=s^2=e,rs=sr^{-1}\rangle \tag{15}$$
$$=\{e,r,s,rs\} \tag{16}$$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は偶数を $\bar{0}$、奇数を $\bar{1}$ とする群で直積は次のような集合である。

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{(\bar{0},\bar{0}),\ (\bar{1},\bar{0}),\ (\bar{0},\bar{1}),\ (\bar{1},\bar{1})\} \tag{17}$$

成分ごとの和を演算として群を成す。

$$(\bar{a}_1, \bar{b}_1) + (\bar{a}_2, \bar{b}_2) = (\overline{a_1 + a_2}, \overline{b_1 + b_2}) \tag{18}$$

写像 ϕ は次のような対応を取るので全単射である。

$$(\bar{0}, \bar{0}) \mapsto e,\ (\bar{1}, \bar{0}) \mapsto r,\ (\bar{0}, \bar{1}) \mapsto s,\ (\bar{1}, \bar{1}) \mapsto rs \tag{19}$$

また、次により準同型写像でもある。

$$f(\bar{a}_1, \bar{b}_1) + f(\bar{a}_2, \bar{b}_2) = r^{a_1} s^{b_1} r^{a_2} s^{b_2} = r^{a_1 + a_2} s^{b_1 + b_2} = f(\overline{a_1 + a_2}, \overline{b_1 + b_2}) \tag{20}$$

以上より、ϕ は同型写像である。
