
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ が次で示す写像である時、全単射であることを示せ。

$$f(x) = \begin{cases} x & (x : \text{偶数}) \\ -x & (x : \text{奇数}) \end{cases} \tag{1}$$

. . . .

f が全射であることと単射であることを示す。

${}^\forall z \in \mathbb{Z}$ について z は偶数か奇数のどちらかである。

- z が偶数であるなら $f(z) = z$ である
- z が奇数であるなら $f(-z) = z$ である

この為、f は全射である。

${}^\forall a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq b$ とする。

- a, b の組合せは (偶数、偶数) の場合
  $f(a) = a,\ f(b) = b$ より、$f(a) \neq f(b)$ となる。つまり、$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
- a, b の組合せは (奇数、奇数) の場合
  $f(a) = -a,\ f(b) = -b$ より、$f(a) \neq f(b)$ となる。つまり、$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
- a, b の組合せは (偶数、奇数) の場合
  $f(a) = a,\ f(b) = -b$ である。a は偶数より $f(a)$ も偶数で、b は奇数より $f(b)$ も奇数である。よって、偶数奇数が異なる為 $f(a) \neq f(b)$ となる。つまり、$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
- a, b の組合せは (奇数、偶数) の場合
  a, b の組合せは (偶数、奇数) の場合と同様

これらから f は単射である。

よって、f は全単射である。

写像 $g : A \to B$ について

全射

B の任意の要素について A の要素が対応することである。記号で書くと次の通り。

$$^\forall b \in B\, ^\exists a \in A s.t. b = g(a) \tag{2}$$

単射

A の任意の異なる 2 つの要素に対応する B の要素も異なることである。記号で書くと次の通り。

$$^{\forall}\alpha, \beta \in A, \alpha \neq \beta \Rightarrow g(\alpha) \neq g(\beta) \tag{3}$$

これは待遇を取って次のように考えることも多い。

$$g(\alpha) = g(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta \tag{4}$$