
命題

$n \in \mathbb{Z}$ が $n > 4$ の時、$n^n + 1$ は合成数である。

---

n が奇数の場合

 mod 2 のとき $n \equiv 1$ であるから

$$n^n \equiv 1^n = 1 \mod 2 \tag{1}$$
$$n^n + 1 \equiv 0 \mod 2 \tag{2}$$

となる。これより $n^n + 1$ は 2 で割り切れる事がわかる。

n が偶数の場合

背理法で考える為、$n^n + 1$ を素数と仮定する。

$n < n^n + 1$ より n と $n^n + 1$ は互いに素である。フェルマーの小定理より次の式が成り立つ。

$$n^{n^n+1-1} \equiv 1 \mod (n^n + 1) \tag{3}$$

この左辺を次のように変形する。

$$n^{n^n} = n^{n \times n^{n-1}} = (n^n)^{n^{n-1}} \tag{4}$$

n が偶数であるので、n^{n-1} も偶数である。この為、

$$n^{n^n} = (n^n)^{n^{n-1}} \tag{5}$$
$$\equiv (-1)^{n^{n-1}} \mod (n^n + 1) \tag{6}$$
$$= 1 \tag{7}$$

フェルマーの小定理

$p \in \mathbb{Z}$ を素数とする。$a \in \mathbb{Z}$ が p と互いに素である時、次が成り立つ。

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p \tag{8}$$

オイラーの定理

a と n を互いに素な自然数とする。この時次の式が成り立つ。

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n \tag{9}$$

ただし、$\phi(n)$ は n より小さい互いに素な自然数の個数。

ウィルソンの定理

p を正の整数とする。この時、p が素数である事と次の式は同値である。

$$(p-1)! \equiv -1 \mod p \tag{10}$$
