$t$ を独立変数とする関数 $x = x(t)$ について、$x$ は非斉次二回常微分方程式の初期値問題

$$x'' + 4x' + 13x = 9e^{-2t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 3 \tag{1}$$

の解であるとする。次の各問に答えよ。

1. 微分方程式の初期値問題 (1) を逆演算子を利用して解け。

……………………………………………………………………………

微分演算子を $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ として方程式を書き換える。

$$\begin{aligned} x'' + 4x' + 13x &= 9e^{-2t} \quad (2)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}4x + 13x &= 9e^{-2t} \quad (3)\\ DDx + 4Dx + 13x &= 9e^{-2t} \quad (4)\\ (D^2 + 4D + 13)x &= 9e^{-2t} \quad (5)\end{aligned}$$

よって、特殊解 $x_1$ は

$$x_1 = \frac{1}{D^2 + 4D + 13} 9e^{-2t} = \frac{9}{(-2)^2 + 4(-2) + 13} e^{-2t} = e^{-2t} \tag{6}$$

また、特性方程式は $D^2 + 4D + 13 = 0$ より変数を $\lambda$ とすると $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ である。

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0, \quad \lambda = -2 \pm 3i \tag{7}$$

これにより一般解は

$$x = C_1 e^{-2t} \sin 3t + C_2 e^{-2t} \cos 3t \tag{8}$$

である。微分方程式の解は

$$x = C_1 e^{-2t} \sin 3t + C_2 e^{-2t} \cos 3t + e^{-2t} \tag{9}$$

と表せる。これに初期値 $x(0) = 0, x'(0) = 3$ を利用し $C_1, C_2$ を求める。

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 e^0 \sin 0 + C_2 e^0 \cos 0 + e^0 = C_2 + 1 = 0 \quad (10)\\ C_2 &= -1 \quad (11)\end{aligned}$$

$$x'(t) = (C_1 e^{-2t} \sin 3t)' + (C_2 e^{-2t} \cos 3t)' + (e^{-2t})' \tag{12}$$

より

$$
\begin{aligned}
(C_1 e^{-2t}\sin 3t)' =& C_1(-2e^{-2t}\sin 3t + 3e^{-2t}\cos 3t) && (13)\\
(C_2 e^{-2t}\cos 3t)' =& C_2(-2e^{-2t}\cos 3t - 3e^{-2t}\sin 3t) && (14)\\
(e^{-2t})' =& -2e^{-2t} && (15)
\end{aligned}
$$

なので、

$$x'(0) = 3C_1 - 2C_2 - 2 = 3 \tag{16}$$

$C_2 = -1$ より $C_1 = 1$ である。
定数 $C_1, C_2$ を当てはめると方程式の解は次のようになる。

$$x = e^{-2t}\sin 3t - e^{-2t}\cos 3t + e^{-2t} \tag{17}$$

---

2. 微分方程式の初期値問題 (1) を定数変化法により解け。

..................................................................................

特性方程式は変数を $\lambda$ とすると $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ である。

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0, \quad \lambda = -2 \pm 3i \tag{18}$$

ここから微分方程式の基本解が次のように求まる。

$$x_1 = e^{-2t}\cos 3t, \quad x_2 = e^{-2t}\sin 3t \tag{19}$$

このため、解を次のように置く。

$$x = c_1(t)x_1 + c_2(t)x_2 \tag{20}$$

この二つの基本解 $x_1, x_2$ からロンスキアン $W(x_1, x_2)$ を計算する。

$$W(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = x_1 x_2' - x_1' x_2 = 3e^{-4t} \neq 0 \tag{21}$$

そこで、次の連立方程式を解く。

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1 + c_2'(t)x_2 = 0 \\ c_1'(t)x_1' + c_2(t)x_2' = 9e^{-2t} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9e^{-2t} \end{pmatrix} \tag{22}$$

ロンスキアンは $W(x_1, x_2) \neq 0$ であるので、この連立方程式は解をもつ。

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(x_1, x_2)} \begin{pmatrix} x_2' & -x_2 \\ -x_1' & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 9e^{-2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{W(x_1, x_2)} \begin{pmatrix} -9e^{-2t}x_2 \\ 9e^{-2t}x_1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

$c_1'(t), c_2'(t)$ は次のように求められる。

$$c_1'(t) = \frac{-9e^{-2t}x_2}{W(x_1,x_2)} = \frac{-9e^{-2t}e^{-2t}\sin 3t}{3e^{-4t}} = -3\sin 3t \tag{24}$$

$$c_2'(t) = \frac{9e^{-2t}x_1}{W(x_1,x_2)} = \frac{9e^{-2t}e^{-2t}\cos 3t}{3e^{-4t}} = 3\cos 3t \tag{25}$$

積分をすることにより $c_1(t), c_2(t)$ を求める。

$$c_1(t) = \int(-3\sin 3t)\mathrm{d}t = \cos 3t + C_1 \tag{26}$$

$$c_2(t) = \int 3\cos 3t\mathrm{d}t = \sin 3t + C_2 \tag{27}$$

これを式 (20) に代入する。

$$x = c_1(t)x_1 + c_2(t)x_2 \tag{28}$$

$$= (\cos 3t + C_1)e^{-2t}\cos 3t + (\sin 3t + C_2)e^{-2t}\sin 3t \tag{29}$$

$$= e^{-2t} + C_1 e^{-2t}\cos 3t + C_2 e^{-2t}\sin 3t \tag{30}$$

この解は微分演算子を用いた結果 (9) と同じである。以降初期値を同様に求めると、

$$x = e^{-2t}\sin 3t - e^{-2t}\cos 3t + e^{-2t} \tag{31}$$

が求まる。

---

---

$$x'' - 2x' - 3x = 27t^2 \tag{32}$$

$t$ を独立変数とする関数 $x = x(t)$ についての微分方程式 (32) について、一般解が次で与えられることを、定数変化法により確認せよ。

$$x(t) = -9t^2 + 12t - 14 + C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} \qquad (C_1, C_2\text{:const}) \tag{33}$$

..........................................................................................

基本解を求めるために特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ を解く。

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1, 3 \tag{34}$$

これにより基本解は $x_1 = e^{-t},\ x_2 = e^{3t}$ である。

そこで微分方程式の解を次のように置く。

$$x = c_1(t)x_1 + c_2(t)x_2 \tag{35}$$

ロンスキアンを計算すると 0 にならないことが確認できる。

$$W(x_1,x_2)=\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ x_1' & x_2'\end{vmatrix}=x_1x_2'-x_1'x_2=e^{-t}\cdot 3e^{3t}+e^{-t}\cdot e^{3t}=4e^{2t}\neq 0 \tag{36}$$

そこで、次の連立方程式を解いて $c_1'(t), c_2'(t)$ を求める。

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_1' & x_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1'(t)\\ c_2'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 27t^2\end{pmatrix} \tag{37}$$

$$\begin{pmatrix}c_1'(t)\\ c_2'(t)\end{pmatrix}=\frac{1}{W(x_1,x_2)}\begin{pmatrix}x_2' & -x_2\\ -x_1' & x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 27t^2\end{pmatrix}=27t^2\begin{pmatrix}-\frac{e^t}{4}\\ \frac{e^{-3t}}{4}\end{pmatrix} \tag{38}$$

$c_1'(t)=-\frac{27t^2e^t}{4}, c_2'(t)=\frac{27t^2e^{-3t}}{4}$ を積分し、$c_1(t), c_2(t)$ を求める。

$$c_1(t)=\int\left(-\frac{27t^2e^t}{4}\right)\mathrm{d}t=-\frac{27}{4}e^t(t^2-2t+2)+C_1 \tag{39}$$

$$c_2(t)=\int\frac{27t^2e^{-3t}}{4}\mathrm{d}t=-\frac{1}{4}e^{-3t}(9t^2+6t+2)+C_2 \tag{40}$$

これを式 (35) に当てはめる。

$$\begin{aligned}x=&c_1(t)x_1+c_2(t)x_2 \quad (41)\\ =&\left(-\frac{27}{4}e^t(t^2-2t+2)+C_1\right)\cdot e^{-t}+\left(-\frac{1}{4}e^{-3t}(9t^2+6t+2)+C_2\right)\cdot e^{3t} \quad (42)\\ =&-9t^2+12t-14+C_1e^{-t}+C_2e^{3t} \quad (43)\end{aligned}$$

定数 $C_1, C_2$ の添え字を振りなおせば問題の式になることがわかる。

---

$$x''+x'+x=7e^{2t} \tag{44}$$

$t$ を独立変数とする関数 $x=x(t)$ についての微分方程式 (44) について、一般解が次で与えられることを、定数変化法により確認せよ。

$$x(t)=e^{2t}+C_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+C_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \qquad (C_1, C_2\text{:const}) \tag{45}$$

............................................................

特性方程式 $\lambda^2+\lambda+1=0$ を解くと $\lambda=\dfrac{-1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ となる。これにより基本解 $x_1, x_2$ は次のようになる。

$$x_1=e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),\quad x_2=e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \tag{46}$$

ロンスキアン $W(x_1, x_2)$ を求める。

$$W(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t} \neq 0 \tag{47}$$

$W(x_1, x_2) \neq 0$ より次の連立方程式は解をもつ。

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7e^{2t} \end{pmatrix} \tag{48}$$

逆行列をかけることで $c_1'(t), c_2'(t)$ を求める。

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(x_1, x_2)} \begin{pmatrix} x_2' & -x_2 \\ -x_1' & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7e^{2t} \end{pmatrix} = \frac{7e^{2t}}{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t}} \begin{pmatrix} -e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix} \tag{49}$$

$$c_1'(t) = -\frac{14}{3}\sqrt{3}e^{\frac{5}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad c_2'(t) = \frac{14}{3}\sqrt{3}e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \tag{50}$$

これらを積分し $c_1(t), c_2(t)$ を求める。

$$c_1(t) = \int \left(-\frac{14}{3}\sqrt{3}e^{\frac{5}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \mathrm{d}t \tag{51}$$

$$= e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{5}{3}\sqrt{3}\,e^{\frac{5}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_1 \tag{52}$$

$$c_2(t) = \int \frac{14}{3}\sqrt{3}e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \mathrm{d}t \tag{53}$$

$$= e^{\frac{5}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{5}{3}\sqrt{3}\,e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \tag{54}$$

これを用いて一般解 $x(t) = c_1(t)x_1 + c_2(t)x_2$ を求める。

$$x(t) = c_1(t)x_1 + c_2(t)x_2 \tag{55}$$

$$= \left(e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{5}{3}\sqrt{3}\,e^{\frac{5}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_1\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \tag{56}$$

$$+ \left(e^{\frac{5}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{5}{3}\sqrt{3}\,e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \tag{57}$$

$$= e^{2t} + C_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \tag{58}$$

よって、問題の式が得られることがわかる。

---