
群 G の元 x の位数とは、x のみで生成された部分群の位数 $|\langle x\rangle|$ のことを指す。

G を有限群、H をその部分群とする。

1. H の位数 $|H|$ は G の位数 $|G|$ の約数である。

   ……………………………………………………………………………………

   $g \in G$ に対して剰余類 $gH = \{gh \mid h \in H\}$ を考える。
   このとき、写像 f を次のように定義する。

   $$f : H \to gH, \quad h \mapsto gh \tag{1}$$

   このとき、${}^{\forall}gh \in gH$ に対して $h \in H$ が存在するので、f は全射である。
   また、$f(h_1) = f(h_2)$ とすれば $gh_1 = gh_2$ であり、左から g^{-1} をかければ $h_1 = h_2$ となり、f は単射である。
   f は全単射であり、$H,\ gH$ は有限集合であるので、$|H| = |gH|$ である。
   $H \cap gH \neq \emptyset$ とする。つまり、$h_1, h_2 \in H$ が存在し、$h_1 = gh_2$ となる。右から h_2^{-1} を書けることで、$h_1h_2^{-1} = g$ となり、$g \in H$ である。H は部分群であるから $H = gH$ である。つまり、次が言える。

   $$H \cap gH \neq \emptyset \Rightarrow H = gH \tag{2}$$

   $\alpha, \beta \in G$ について $\alpha H \cap \beta H \neq \emptyset$ とする。このとき、$x \in \alpha H \cap \beta H$ が存在する。つまり、$x = \alpha h_1 = \beta h_2$ となる $h_1, h_2 \in H$ が存在する。右から h_1^{-1} をかけると $\alpha = \beta h_2 h_1^{-1} \in \beta H$ である。これにより $\beta^{-1}\alpha \in H$ であるため $H = \beta^{-1}\alpha H$ となり、$\beta H = \alpha H$ となる。
   $\alpha, \beta \in G$ について $\alpha H \cap \beta H = \emptyset$ または $\alpha H = \beta H$ である。
   H は部分群であるから単位元 $e \in H$ を含むので、次の式が成り立つ。

   $$G = \bigcup_{g \in G} gH \tag{3}$$

   ${}^{\forall}g, g' \in G$ に対して $gH = g'H$ または $gH \cap g'H = \emptyset$ であるので、部分群 H の位数は G の位数を割り切ることが出来る。

   ---

2. G の元の位数は G の位数 $|G|$ の約数である。

   ……………………………………………………………………………………

   $g \in G$ が生成する部分群 $\langle g\rangle$ は G の部分群であるので、g の位数は G の位数の約数である。