微分演算子

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ を $Df(x)$ や $D[f(x)]$ などと書く時の D を微分演算子という。
早い話が $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ である。
$Df(x) = g(x)$ であるとき $f(x) = \frac{1}{D}g(x)$ である。つまり、$\frac{1}{D}$ は積分を表している。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{D-\alpha}f(x) =& e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}f(x)\mathrm{d}x && (1)\\
\frac{1}{D-\alpha}e^{\alpha x} =& xe^{\alpha x} && (2)\\
\frac{1}{D-\alpha}e^{\beta x} =& \frac{1}{\beta-\alpha}e^{\beta x} && (3)\\
\frac{1}{\alpha-D}f(x) =& \frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{1}{\alpha}D+\frac{1}{\alpha^2}D^2+\cdots\right) && (4)\\
=& \frac{1}{\alpha}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}D\right)^i f(x) && (5)\\
& && (6)
\end{aligned}
$$

---

t を独立変数とする関数 $x = x(t)$ についての微分方程式について各問に答えよ。

$$x'' - x' + 7x = 0 \tag{7}$$

1. 微分方程式 (7) を微分演算子 D を用いて表し、特性方程式を求めよ。

   ……………………………………………………………………

   微分演算子を $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ として方程式を書き換える。

$$
\begin{aligned}
x'' - x' + 7x =& 0 && (8)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x + 7x =& 0 && (9)\\
DDx - Dx + 7x =& 0 && (10)\\
(D^2 - D + 7)x =& 0 && (11)
\end{aligned}
$$

   よって、特性方程式は変数を λ とすると $\lambda^2 - \lambda + 7 = 0$ である。

---

2. 微分方程式 (7) の基本解を求めよ。

   ……………………………………………………………………

   特性方程式 $\lambda^2 - \lambda + 7 = 0$ の解は $\lambda = \frac{1}{2}\left(1 \pm 3\sqrt{3}i\right)$ となる。
   基本解は $e^{\left(\frac{1}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)t}$ である。

そこでオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を利用して一般解を変形する。

$$\begin{aligned} x =& A_1 e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)t} + A_2 e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)t} && (12) \\ =& A_1 e^{\frac{1}{2}t} e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}it} + A_2 e^{\frac{1}{2}t} e^{-\frac{3\sqrt{3}}{2}it} && (13) \\ =& A_1 e^{\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}t + i\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right) + A_2 e^{\frac{1}{2}t}\left(\cos-\frac{3\sqrt{3}}{2}t + i\sin-\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right) && (14) \\ =& A_1 e^{\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}t + i\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right) + A_2 e^{\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}t - i\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right) && (15) \\ =& (A_1 + A_2)e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}t + (A_1 - A_2)ie^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t && (16) \end{aligned}$$

$A_1, A_2 \in \mathbb{C}$ を互いに共役として、$A_1 = a + bi, A_2 = a - bi\ (a, b \in \mathbb{R})$ とおく。$A_1 + A_2 = 2a,\ A_1 - A_2 = 2bi$ であるので、$C_1 = 2a,\ C_2 = -2b$ とすれば式 (16) は次のようになる。

$$x = C_1 e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}t + C_2 e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t \tag{17}$$

よって、基本解は次の 2 つになる。

$$e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}t, \quad e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t \tag{18}$$

---

t を独立変数とする関数 $x = x(t)$ についての微分方程式について各問に答えよ。

$$x'' - 4x' + 7x = 0 \tag{19}$$

1. 微分方程式 (19) を微分演算子 D を用いて表し、特性方程式を求めよ。

   ....

   微分演算子を用いると次の式が得られる。

$$\begin{aligned} x'' - 4x' + 7x =& 0 && (20) \\ DDx - 4Dx + 7x =& 0 && (21) \\ (D^2 - 4D + 7)x =& 0 && (22) \end{aligned}$$

   よって、特性方程式は変数を λ とすると $\lambda^2 - 4\lambda + 7 = 0$ である。

---

2. 微分方程式 (19) の基本解を求めよ。

. . . .

特性方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 7 = 0$ の解は $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}i$ となる。
基本解は $e^{\left(2\pm\sqrt{3}i\right)t}$ である。基本解が複素数となるので、変形を行うことにより基本解は次の 2 つになる。

$$e^{2t}\cos\sqrt{3}t, \quad e^{2t}\sin\sqrt{3}t \tag{23}$$

$$x'' - 2x' - 3x = 27t^2 \tag{24}$$

t を独立変数とする関数 $x = x(t)$ についての微分方程式 (24) について、一般解が次で与えられることを、逆演算子を利用して確認せよ。

$$x(t) = -9t^2 + 12t - 14 + C_1e^{3t} + C_2e^{-t} \qquad (C_1, C_2\text{:const}) \tag{25}$$

. . . .

式 (24) を微分演算子を用いると次のようになる。

$$(D^2 - 2D - 3)x = 27t^2 \tag{26}$$

これを逆演算子を用いて計算をする。

$$x = \frac{1}{D^2 - 2D - 3}27t^2 \tag{27}$$
$$= \frac{1}{(D+1)(D-3)}27t^2 \tag{28}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{D-3} - \frac{1}{D+1}\right)27t^2 \tag{29}$$
$$= \frac{27}{4}\left(\frac{1}{D-3}t^2 - \frac{1}{D+1}t^2\right) \tag{30}$$

$$\frac{1}{D-3}t^2 = e^{3t}\int e^{-3t}t^2\mathrm{d}t \tag{31}$$
$$= e^{3t}\left(\frac{1}{-3}e^{-3t}t^2 - \int \frac{2}{-3}e^{-3t}t\mathrm{d}t\right) \tag{32}$$
$$= e^{3t}\left(\frac{1}{-3}e^{-3t}t^2 - \frac{2}{(-3)^2}e^{-3t}t + \int \frac{2}{(-3)^2}e^{-3t}\mathrm{d}t\right) \tag{33}$$
$$= e^{3t}\left(\frac{1}{-3}e^{-3t}t^2 - \frac{2}{(-3)^2}e^{-3t}t + \frac{2}{(-3)^3}e^{-3t}\right) \tag{34}$$
$$= -\frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t - \frac{2}{27} \tag{35}$$

$$\frac{1}{D+1}t^2 = e^{-t}\int e^t t^2\mathrm{d}t \tag{36}$$
$$= e^{-t}\left(e^t t^2 - \int 2e^t t\mathrm{d}t\right) \tag{37}$$
$$= e^{-t}\left(e^t t^2 - 2e^t t + \int e^t\mathrm{d}t\right) \tag{38}$$
$$= e^{-t}\left(e^t t^2 - 2e^t t + e^t\right) \tag{39}$$
$$= t^2 - 2t + 1 \tag{40}$$

$$x = \frac{1}{D^2-2D-3}27t^2 \tag{41}$$
$$= \frac{27}{4}\left(\frac{1}{D-3}t^2 - \frac{1}{D+1}t^2\right) \tag{42}$$
$$= \frac{27}{4}\left(-\frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t - \frac{2}{27} - t^2 + 2t - 1\right) \tag{43}$$
$$= \frac{27}{4}\left(-\frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t - \frac{2}{27} - t^2 + 2t - 1\right) \tag{44}$$
$$= -9t^2 + 12t - \frac{29}{4} \tag{45}$$

$$x'' + x' + x = 7e^{2t} \tag{46}$$

t を独立変数とする関数 $x = x(t)$ についての微分方程式 (46) について、一般解が次で与えられることを、逆演算子を利用して確認せよ。

$$x(t) = e^{2t} + C_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \qquad (C_1, C_2\text{:const}) \tag{47}$$

. . . .