すべての自然数 $n \in \mathbb{N}$ について、以下のことが成立することをそれぞれ数学的帰納法で示せ。

1. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$

$n = 1$ の場合を考える。この時、左辺と右辺は一致する。

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 \\ 0 & \beta^1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$n = k$ の時、式が成り立っていると仮定し、$n = k + 1$ の場合を考える。$n = k$ では等号が成立するので、次の式を利用する。

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \beta^k \end{pmatrix} \tag{2}$$

$n = k + 1$ の場合の左辺を計算する。

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \beta^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^k\alpha + 0 \cdot 0 & \alpha^k \cdot 0 + 0 \cdot \beta \\ 0 \cdot \alpha + \beta^k \cdot 0 & 0 \cdot 0 + \beta^k\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{k+1} & 0 \\ 0 & \beta^{k+1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

よって、$n = k$ が成り立つなら $n = k + 1$ も成り立つことがわかる。

以上により、$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$ は成立する。

---

2. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

$n = 1$ の場合を考える。この時、左辺と右辺は一致する。($\lambda \neq 0$ の時)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} \lambda^1 & 1 \cdot \lambda^{1-1} \\ 0 & \lambda^1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$n = 2$ の場合を考える。この時、左辺と右辺は一致する。

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\lambda + 1 \cdot 0 & \lambda \cdot 1 + 1 \cdot \lambda \\ 0 \cdot \lambda + \lambda \cdot 0 & 0 \cdot 1 + \lambda \cdot \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2 \cdot \lambda^{2-1} \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$n=k$ の時、式が成り立っていると仮定し、$n=k+1$ の場合を考える。$(k>1)$
$n=k$ では等号が成立するので、次の式を利用する。

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \tag{7}$$

$n=k+1$ の場合の左辺を計算する。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} & (8) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^k \cdot \lambda + k\lambda^{k-1} \cdot 0 & \lambda^k \cdot 1 + k\lambda^{k-1} \cdot \lambda \\ 0 \cdot \lambda + \lambda^k \cdot 0 & 0 \cdot 1 + \lambda^k \cdot \lambda \end{pmatrix} & (9) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k \\ 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix} & (10) \end{aligned}$$

よって、$n=k$ が成り立つなら $n=k+1$ も成り立つことがわかる。

以上により、次が示せた。

- $\lambda \neq 0$ の時、1 以上の全ての整数で成り立つ。
- $\lambda = 0$ の時、2 以上の全ての整数で成り立つ。
