---

線形写像に関する説明

$$f : V \to W \tag{1}$$

(1). $\mathrm{Ker} f = \{0\} \Leftrightarrow f :$ 単射

(2). $\mathrm{rank} f = \dim(\mathrm{Im} f)$

(3). $\mathrm{null} f = \dim(\mathrm{Ker} f)$

(4). $\dim V = \mathrm{rank} f \Leftrightarrow f :$ 単射

(5). $\dim W = \mathrm{rank} f \Leftrightarrow f :$ 全射

(6). $\dim V = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f)$

---

(1). 線形空間 $V$ から $V$ への線形写像が全射であれば単射である。

……………………………………………………………………

$f$ は自己線形写像。全射であれば $\dim V = \mathrm{rank} f$ であるので単射となる。

---

(2). 線形空間 $V$ から $V$ への線形写像 $f$ が $\mathrm{null} f = 0$ であれば全射である。

……………………………………………………………………

$\mathrm{null} f = 0$ であれば、$f$ は単射。単射であれば $\dim V = \mathrm{rank} f$ であり、$\dim V = \mathrm{rank} f$ であるなら全射となる。

---

(3). すべての要素が 1 の $m \times n$ 行列 $A$ により線形空間 $K^n$ から $K^m$ への線形写像 $f$ を定義する。$\mathrm{null} f$ はいくつになるか

……………………………………………………………………

線形写像 $f$ は次のような写像である。

$$f : K^n \to K^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \tag{2}$$

すべての行列成分が同じなので $\mathrm{rank} A = 1$ である。$\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} A$ より $\mathrm{rank} f = 1$。

$\dim V = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f)$ より

$$\dim K^n = \mathrm{null} f + \mathrm{rank} f \tag{3}$$

であるので、$n = \mathrm{null} f + 1$ より $\mathrm{null} f = n - 1$。

---

(4). 実数体上で $5 \times 3$ 行列 $A$ と 5 次元単位ベクトル $\boldsymbol{e_1}$ について、3 元連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e_1}$ の解の全体の集合はどのような形か。

.................................................................

この行列 $A$ を用いて線形写像を定義すると次のような $f$ が出来る。

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \tag{4}$$

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e_1}$ の解空間とは、$f^{-1}(\boldsymbol{e_1})$ のことである。

$\boldsymbol{e_1}$ は単位ベクトルなので、長さが 1 のベクトル。$\boldsymbol{e_1} \neq \boldsymbol{0}$

$f$ は線形写像なので $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^3$ は $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^5$ に対応する。つまり、$\boldsymbol{0} \notin f^{-1}(\boldsymbol{e_1})$ である。

行列 $A$ の階数 $\mathrm{rank}A$ は

$$0 \leq \mathrm{rank}A \leq 3 \tag{5}$$

である。

$\mathrm{rank}A = 0$ **の場合**

この場合、$A$ はすべての成分が 0 であるので、$^{\forall}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\ f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$。つまり解空間は**空集合**となる。

$\boldsymbol{e_1} \notin \mathrm{Im}f$ の時、解空間は**空集合**であるので、これ以降、$\boldsymbol{e_1} \in \mathrm{Im}f$ の場合を考える。

$\mathrm{rank}A = 1$ **の場合**

$\boldsymbol{e_1} \in \mathrm{Im}f$ の時、解空間の次元は $\mathrm{null}f = 2$ と等しい。よって、解空間は**原点を通らない平面**である。

$\mathrm{rank}A = 2$ **の場合**

$\mathrm{rank}f = 2$ なので、$\boldsymbol{e_1} \in \mathrm{Im}f$ の時、解空間の次元は $\mathrm{null}f = 1$ と等しい。よって、解空間は**原点を通らない直線**である。

$\mathrm{rank}A = 3$ **の場合**

$\mathrm{rank}f = 3$ なので、$\boldsymbol{e_1} \in \mathrm{Im}f$ の時、解空間の次元は $\mathrm{null}f = 0$ と等しい。よって、解空間は**原点ではない一点**である。

まとめると、

(a) $\mathrm{rank}A$ の値によらず $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e_1}$ に解がない時、**空集合**

(b) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e_1}$ に解がある時

   i. $\mathrm{rank}A = 1$ の場合、**原点を通らない平面**

ii. $\mathrm{rank} A = 2$ の場合、原点を通らない直線

iii. $\mathrm{rank} A = 3$ の場合、原点以外の **1** 点

---