
次の行列の Jordan 標準形を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

....

A の固有方程式

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 - 1 = 0 \tag{2}$$

固有値は実数だと -0.844 ぐらいと 2.471 ぐらいで、虚数が $0.187 \pm 0.667i$ ぐらい。

....

B の固有方程式

$$\det(B - \lambda E) = -(\lambda - 1)^3(\lambda^2 - 2\lambda - 1) = 0 \tag{3}$$

ここから固有値は $\lambda = 1, 1 \pm \sqrt{2}$ の 3 つであることがわかる。

それぞれの固有値に対応する固有ベクトル

$$\lambda = 1, \qquad \boldsymbol{x}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\lambda = 1 + \sqrt{2}, \qquad \boldsymbol{x}_\lambda = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 + 2\sqrt{2} \\ -2 + 2\sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\lambda = 1 - \sqrt{2}, \qquad \boldsymbol{x}_\lambda = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 - 2\sqrt{2} \\ -2 - 2\sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{6}$$

$\lambda = 1$ の時、$(B - \lambda E)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_\lambda$ となるベクトル $\boldsymbol{x}_1$ を求める。

$$\boldsymbol{x}_1 = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$\boldsymbol{x}_1$ の $k_1 = 0$ として同様に $(B - E)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$ となるベクトル $\boldsymbol{x}_2$ を求める。

$$\boldsymbol{x}_2 = k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

これらのベクトルと列に並べた行列 P を作る。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2+2\sqrt{2} & -2-2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -2 & -2+2\sqrt{2} & -2-2\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 2+\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{9}$$

これを用いて B のジョルダン標準形は次のようになる。

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = J_3(1) \oplus J_1(1+\sqrt{2}) \oplus J_1(1-\sqrt{2}) \tag{10}$$