$0<\alpha<1$ を実定数とするとき、留数定理を用いて以下を示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{e^x+1}dx=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \tag{1}$$

$f(x)=\frac{e^{\alpha x}}{e^x+1}$ とする。$f(x)$ は実数上正則だが、複素数上の関数 $f(z)$ として考えると極を持つ。

$e^z+1=0$ を満たすのは $z=\pi i$ のみである。e^z を Taylor 展開すると次のようになる。

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots \tag{2}$$

ここで、Taylor 展開の z を $z-\pi i$ に置き換えると次のようになる。

$$e^z=e^{z-\pi i+\pi i}=e^{z-\pi i}e^{\pi i} \tag{3}$$

$$=e^{\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=-\left(1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots\right) \tag{4}$$

e^z+1 は上の式に 1 を加えるので定数項が消え、最低次数の項が z となる。

つまり、$f(z)=\frac{e^{\alpha z}}{e^z+1}$ は $z=\pi i$ について 1 位の極を持つ。

そこで留数 $Res(f,\pi i)$ を計算する。

$$Res(f,\pi i)=\lim_{z\to\pi i}(z-\pi i)\frac{e^{\alpha z}}{e^z+1}=\frac{e^{\alpha\pi i}}{e^{\pi i}}=-e^{\alpha\pi i} \tag{5}$$

積分路を複素平面上に長方形を作りその周りを反時計回りの周回で考える。

実数 $a>0$ を決める。長方形の 4 辺を次のように決める。

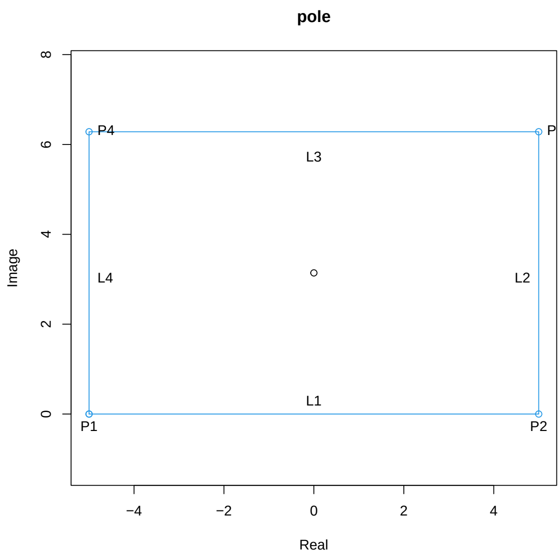
L_1 $-a$ から a までの直線

L_2 a から $a+2\pi i$ までの直線

L_3 $a+2\pi i$ から $-a+2\pi i$ までの直線

L_2 $-a+2\pi i$ から $-a$ までの直線

これらをまとめて $\Gamma=L_1+L_2+L_3+L_4$ とする。



積分は次のように分けられる。

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz + \int_{L_3} f(z)dz + \int_{L_4} f(z)dz \tag{6}$$

L_1 上の積分は次のように実数上の積分である。

$$\int_{L_1} f(z)dz = \int_{-a}^{a} f(x)dx \tag{7}$$

L_2 上の積分は a から $a+2\pi i$ までの線分上で行う。$z=a+yi$ として $y:0\to 2\pi$ の範囲で積分する。このとき、$dz=idy$ である。

$$\int_{L_2} f(z)dz = \int_{L_2} \frac{e^{\alpha z}}{e^z+1}dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha(a+yi)}}{e^{a+yi}+1}idy \tag{8}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha a}e^{\alpha yi}}{e^a(e^{yi}+e^{-a})}idy = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha yi}\ i}{e^{(1-\alpha)a}(e^{yi}+e^{-a})}dy \tag{9}$$

$$\left|\int_{L_2} f(z)dz\right| \le \int_0^{2\pi} \left|\frac{e^{\alpha yi}\ i}{e^{(1-\alpha)a}(e^{yi}+e^{-a})}\right| dy \le \int_0^{2\pi} \frac{|e^{\alpha yi}||i|}{|e^{(1-\alpha)a}||e^{yi}+e^{-a}|}dy \tag{10}$$

ここで、$e^{i\theta}$ は単位円周上の複素数を表すので、$|e^{\alpha yi}|=1$ である。e^{yi} は単位円周上の複素数であり、e^{-a} は $0<e^{-a}<1$ となる実数である。よって、$|e^{yi}+e^{-a}| \ge |-1+e^{-a}| = 1-e^{-a}$ である。これにより上の不等式は次のようになる。

$$\left|\int_{L_2} f(z)dz\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{|e^{\alpha yi}||i|}{|e^{(1-\alpha)a}||e^{yi}+e^{-a}|}dy \tag{11}$$

$$\le \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{(1-\alpha)a}(1-e^{-a})}dy = \frac{2\pi}{e^{(1-\alpha)a}(1-e^{-a})} \to 0\ (a\to\infty) \tag{12}$$

つまり、L_2 上の積分は 0 になることがわかる。

L_3 上の積分は $a+2\pi i$ から $-a+2\pi i$ までの線分上で行う。$z=x+2\pi i$ として、$x:a\to -a$ の範囲で積分する。この時、$dz=dx$ である。

$$\int_{L_3} f(z)dz = \int_{L_3}\frac{e^{\alpha z}}{e^z+1}dz = \int_a^{-a}\frac{e^{\alpha(x+2\pi i)}}{e^{x+2\pi i}+1}dx \tag{13}$$

$$= \int_a^{-a}\frac{e^{\alpha x}e^{2\alpha\pi i}}{e^x e^{2\pi i}+1}dx = e^{2\alpha\pi i}\int_a^{-a}\frac{e^{\alpha x}}{e^x+1}dx \tag{14}$$

最後に L_4 上の積分を考える。$-a+2\pi i$ から $-a$ までの線分上での積分で $z=-a+yi$ として、$y:2\pi\to 0$ の範囲で行う。$dz=idy$ である。

$$\int_{L_4} f(z)dz = \int_{L_4}\frac{e^{\alpha z}}{e^z+1}dz = \int_{2\pi}^{0}\frac{e^{\alpha(-a+yi)}}{e^{-a+yi}+1}idy = \int_0^{2\pi}\frac{-e^{\alpha yi}i}{e^{\alpha a}(e^{-a}e^{yi}+1)}dy \tag{15}$$

L_2 の時と同じように不等式を考える。

$$\left|\int_{L_4} f(z)dz\right| \leq \int_0^{2\pi}\frac{|-e^{\alpha yi}i|}{e^{\alpha a}|e^{-a}e^{yi}+1|}dy \leq \int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{\alpha a}(1-e^{-a})}dy \tag{16}$$

$$= \frac{2\pi}{e^{\alpha a}(1-e^{-a})} \to 0 \ (a\to\infty) \tag{17}$$

上記の $|e^{-a}e^{yi}+1|$ は 1 を中心とした半径 e^{-a} の円周上の点の大きさを表している。a は正の実数であるので、$e^{-a}<1$ となることから $|e^{-a}e^{yi}+1|\geq 1-e^{-a}$ となる。

これにより L_4 上の積分も 0 となる。

この為、Γ 上の積分は次のようになる。

$$\lim_{a\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + e^{2\alpha\pi i}\int_{\infty}^{-\infty} f(x)dx = (1-e^{2\alpha\pi i})\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \tag{18}$$

留数の計算結果 (5) より Γ 上の積分は次のようになる。

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i(-e^{\alpha\pi i}) \tag{19}$$

このことから次の式が得られる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{2\pi i(-e^{\alpha\pi i})}{1-e^{2\alpha\pi i}} = \frac{-2\pi i}{e^{-\alpha\pi i}-e^{\alpha\pi i}} \tag{20}$$

$$= \frac{-2\pi i}{(\cos(-\alpha\pi)+i\sin(-\alpha\pi))-(\cos(\alpha\pi)+i\sin(\alpha\pi))} \tag{21}$$

$$= \frac{-2\pi i}{-i\sin(\alpha\pi)-i\sin(\alpha\pi)} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \tag{22}$$