
幂零行列

正方行列 A が冪零行列であるとは、ある自然数 k が存在し、A^k が零行列であるときをいう。

---

1. 次の複素正方行列は冪零であるか判別せよ。

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & -4 \\ 7 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

··

A_1 は $a \neq 0$ の時、2 回の積で零行列となる為、冪零行列である。

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix} = 0 \tag{3}$$

A_2 は偶数回の積と奇数回の積で異なるが、零行列にはならない為、冪零行列ではない。

$$A_2^{2n} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2^n & 2^n \end{pmatrix}, \quad A_2^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -2^n & 2^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n+1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

A_3 の列ベクトルは 1 次独立である為、A_3 は正則行列である。よって、A_3 は冪零行列ではない。

A_4 は $A_4^5 = 0$ であるので冪零行列である。

A_5 は $\mathrm{tr}A_5 = 1$ より冪零行列ではない。

2.

$$f_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3,\ x \mapsto Ax \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

（a）$f_A^3 = 0$ を示せ。

（b）$\mathrm{Ker}\, f_A$, $\mathrm{Ker}\, f_A^2$, $\mathrm{Ker}\, f_A^3$ の次元を求めよ。

（c）$\mathrm{Ker}\, f_A^2 = \mathrm{Im}\, f_A$ と $\mathrm{Ker}\, f_A = \mathrm{Im}\, f_A^2$ を示せ。

（d）A^2v, Av, v は $\mathbb{C}^3$ の基底となることを示せ。

（e）f_A の A^2v, Av, v に関する表現行列を求めよ。

....

（a）$f_A^3 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3,\ x \mapsto A^3x$ であるので、A^3 を求める。

$$A^3 = \begin{pmatrix} 12 & -4 & -4 \\ 12 & -4 & -4 \\ 24 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} = 0 \tag{6}$$

これにより f_A^3 は零写像である。

（b）$f_A^3 = 0$ より $\dim \mathrm{Im}\, f_A^3 = 0$ であるので、$\dim \mathrm{Ker}\, f_A^3 = 3$ である。よって、$\dim \mathrm{Ker}\, f_A = 1$, $\dim \mathrm{Ker}\, f_A^2 = 2$ である。
実際に階数を求めると

$$\mathrm{rank} A = 2, \quad \mathrm{rank} A^2 = 1, \quad \mathrm{rank} A^3 = 0 \tag{7}$$

である。

（c）$f_A^3 = 0$ とは、次のような図で左端の $\mathbb{C}^3$ 元が f_A に 3 回移されると 0 になることを意味する。

$$\mathbb{C}^3 \xrightarrow{f_A} \mathbb{C}^3 \xrightarrow{f_A} \mathbb{C}^3 \xrightarrow{f_A} \mathbb{C}^3 \tag{8}$$

$\mathrm{Ker}\, f_A^2$ と $\mathrm{Im}\, f_A$ は 2 番目の $\mathbb{C}^3$ の部分集合である。
$f_A^2 \circ f_A = 0$ より $\mathrm{Im}\, f_A \subset \mathrm{Ker}\, f_A^2$ である。

$$f_A^2(f_A(\mathbb{C}^3)) = 0 \tag{9}$$

$$f_A(\mathbb{C}^3) \subset \mathrm{Ker}\, f_A^2 \tag{10}$$

$$\mathrm{Im}\, f_A \subset \mathrm{Ker}\, f_A^2 \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

また、$\dim \mathrm{Im}\, f_A = 3 - \dim \mathrm{Ker}\, f_A = 2$ であるので、$\mathrm{Im}\, f_A = \mathrm{Ker}\, f_A^2$ である事がわかる。

同様に、$\mathrm{Im}\, f_A^2 \subset \mathrm{Ker}\, f_A$ であるが、両方とも次元が 1 であるので、$\mathrm{Im}\, f_A^2 = \mathrm{Ker}\, f_A$ である。

(d)

$$a_0 v + a_1 Av + a_2 A^2 v = 0, \qquad a_i \in \mathbb{C} \tag{13}$$

とする。

左から A^2 をかけると

$$a_0 A^2 v + a_1 A^3 v + a_2 A^4 v = 0 \tag{14}$$

であるが、$A^3 = A^4 = 0$ であるので、$a_0 A^2 v = 0$ となる。$A^2 v \neq 0$ より $a_0 = 0$ となる。

左から A をかけ、$a_0 = 0$ を代入すると $a_1 A^2 v = 0$ となり、$a_1 = 0$ が得られる。

$a_0 = a_1 = 0$ より $a_2 = 0$ となるので、式 (13) を満たすとき $a_i = 0$ である。これによりベクトル $v,\ Av,\ A^2 v$ は 1 次独立であることが分かる。

$\mathbb{C}^3$ は 3 次元であるので、$v,\ Av,\ A^2 v$ は基底となる。

(e) $\mathbb{C}^3$ の基底 $A^2 v,\ Av,\ v$ を f_A で移した先のベクトルを $A^2 v,\ Av,\ v$ の一次結合で表す。

$$f_A(A^2 v) = A^3 v = 0 = 0A^2 v + 0Av + 0v = (A^2 v\ \ Av\ \ v)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{15}$$

$$f_A(Av) = A^2 v = 1A^2 v + 0Av + 0v = (A^2 v\ \ Av\ \ v)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \tag{16}$$

$$f_A(v) = Av = 0A^2 v + 1Av + 0v = (A^2 v\ \ Av\ \ v)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \tag{17}$$

これらをまとめると次のようになる。

$$f_A(A^2 v\ \ Av\ \ v) = (A^2 v\ \ Av\ \ v)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{18}$$

よって、表現行列は次の行列である。

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{19}$$