$0 < \alpha < 1$ を実定数とするとき、留数定理を用いて以下を示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^x + 1} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \tag{1}$$

....

$f(x) = \frac{e^{\alpha x}}{e^x+1}$ とする。$f(x)$ は実数上正則だが、複素数上の関数 $f(z)$ として考えると極を持つ。

$e^z + 1 = 0$ を満たすのは $z = \pi i$ のみである。e^z を Taylor 展開すると次のようになる。

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \cdots \tag{2}$$

$$e^z = e^{z-\pi i+\pi i} = e^{z-\pi i}e^{\pi i} \tag{3}$$