定義　約数関数 $\tau(n)$

$$\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \tau(n) = \#\{d \in \mathbb{N} \mid d\text{は}n\text{を割り切る}\} \tag{1}$$

定義　約数の合計 $D(x)$

$$D : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{N}, \quad D(x) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ n \in \mathbb{N}}} \tau(n) \tag{2}$$

定理

ある関数 $R : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ が存在し、実数 $x \geq 1$ に対して次が成り立つ。

$$D(x) = x \log x + R(x) \qquad \text{かつ} \qquad |R(x)| \leq x \tag{3}$$

定義　小数部分 $\{x\}$

$x \in \mathbb{R}$ に対し、$[x]$ を Gauss 記号とする。($[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$)
この時、$\{x\}$ を実数 x の小数部分とし、次の式で定義する。

$$\{x\} = x - [x] \tag{4}$$

定理

ある関数 $R : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ が存在し、実数 $x \geq 1$ に対して次が成り立つ。

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + R(x) \qquad \text{かつ} \qquad |R(x)| \leq \frac{1}{x} \tag{5}$$

ただし、γ は次で定義される **Euler 定数** である。

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\{u\}}{u^2} du \tag{6}$$

計算

$$\int \log x dx = x \log x - x + C \tag{7}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C \tag{8}$$

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C \tag{9}$$

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C \tag{10}$$

問題

1. ある関数 $R:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ が存在して、実数 $x\geq 1$ に対して、次が成立することを示せ。

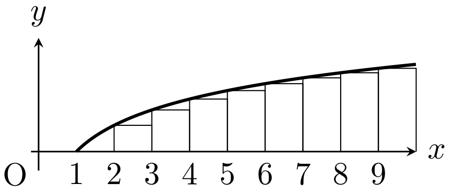
$$\sum_{n\leq x}\log n = x\log x - x + R(x) \quad \text{かつ} \quad |R(x)|\leq \log x + 1 \tag{11}$$

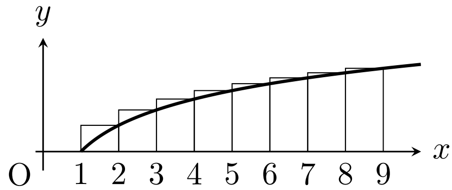
....

左辺 $\sum_{n\leq x}\log n$ は次のように書き換えられる。

$$\sum_{n\leq x}\log n = \sum_{n=2}^{[x]}((n+1)-n)\log n = \sum_{n=2}^{[x]}(n-(n-1))\log n \tag{12}$$

これは関数 $y=\log x$ に対して、縦の短冊を作りその面積の和に等しい。





そこで、左のグラフより次が得られる。

$$\sum_{n=2}^{[x]}((n+1)-n)\log n < \int_1^{[x]}\log t dt + \log x \leq \int_1^{x}\log t dt + \log x \tag{13}$$

$$= x\log x - x + 1 + \log x \tag{14}$$

右のグラフより

$$\sum_{n=2}^{[x]}(n-(n-1))\log n > \int_1^{[x]}\log t dt \geq \int_1^{x}\log t dt - \log x \tag{15}$$

$$= x\log x - x + 1 - \log x \tag{16}$$

これにより次の不等式を得る。

$$x\log x - x + 1 - \log x \leq \sum_{n\leq x}\log n \leq x\log x - x + 1 + \log x \tag{17}$$

次のようにおく。

$$\sum_{n\leq x}\log n = x\log x - x + R(x) \tag{18}$$

これにより

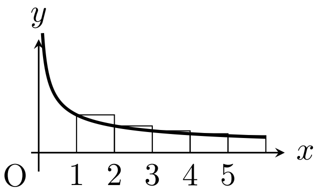
$$1-\log x \leq R(x) \leq 1+\log x \tag{19}$$

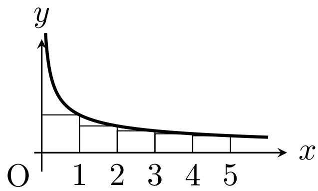
となり、$|R(x)|\leq 1+\log x$ となる。

2. ある定数 c と関数 $R:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ が存在して、実数 $x\geq 1$ に対して、次が成立することを示せ。

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{\sqrt{n}}=2\sqrt{x}+c+R(x)\quad \text{かつ}\quad |R(x)|\leq\frac{1}{\sqrt{x}} \tag{20}$$

....





$$\int_1^x\frac{1}{\sqrt{t}}dt+(1-\{x\})\frac{1}{\sqrt{x}}<\sum_{n\leq x}\frac{1}{\sqrt{x}}<1+\int_1^x\frac{1}{\sqrt{t}}dt-\{x\}\frac{1}{\sqrt{x}} \tag{21}$$

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{\sqrt{x}}<1+\int_1^x\frac{1}{\sqrt{t}}dt-\{x\}\frac{1}{\sqrt{x}}<1+\int_1^x\frac{1}{\sqrt{t}}dt+\frac{1}{\sqrt{x}} \tag{22}$$

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{\sqrt{x}}>\int_1^x\frac{1}{\sqrt{t}}dt+(1-\{x\})\frac{1}{\sqrt{x}}>\int_1^x\frac{1}{\sqrt{t}}dt-\frac{1}{\sqrt{x}} \tag{23}$$

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{\sqrt{x}}=\int_1^x\frac{1}{\sqrt{t}}dt+R(x) \tag{24}$$

とおくと

$$-\frac{1}{\sqrt{x}}<R(x)<1+\frac{1}{\sqrt{x}} \tag{25}$$

---

3. ある定数 c と関数 $R:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ が存在して、実数 $x\geq e$ に対して、次が成立することを示せ。

$$\sum_{n\leq x}\frac{\log n}{n}=\frac{1}{2}(\log x)^2+c+R(x)\quad \text{かつ}\quad |R(x)|\leq\frac{\log x}{x} \tag{26}$$

....

関数 $y=\frac{\log x}{x}$ は $x\geq e$ において単調減少である。

$$\sum_{n\leq x}\frac{\log n}{n}=\frac{\log 2}{2}+\sum_{n=3}^{[x]}\frac{\log n}{n} \tag{27}$$

$$\int_3^x\frac{\log t}{t}dt+(1-\{x\})\frac{\log x}{x}<\sum_{n=3}^{[x]}\frac{\log n}{n}<\frac{\log 3}{3}+\int_3^x\frac{\log t}{t}dt-\{x\}\frac{\log x}{x} \tag{28}$$

$$\sum_{n\le x}\frac{\log n}{n}=\frac{\log 2}{2}+\int_3^x\frac{\log t}{t}dt+R(x) \tag{29}$$

とすると、

$$(1-\{x\})\frac{\log x}{x}<R(x)<\frac{\log 3}{3}-\{x\}\frac{\log x}{x} \tag{30}$$

---

4. 実数 $x,k\ge 1$ に対して、次を示せ。

$$\sum_{n\le x}\left(\log\frac{x}{n}\right)^k\le k!x \tag{31}$$

(ヒント：微分積分学の基本定理を

$$\left(\log\frac{x}{n}\right)^k=k\int_1^{\frac{x}{n}}\frac{(\log u)^{k-1}}{u}\mathrm{d}u \tag{32}$$

という形で用いる。)
