1.（a）D は $y^2 = x$ と $y = x - 2$ が囲まれた領域

$$\int_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

（b）$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \frac{1}{2},\, x \le y \le 1 - x\}$

$$\int_D (x + y) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{2}$$

（c）$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1,\, 0 \le y \le x\}$

$$\int_D xy^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{3}$$

....

（a）$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le y \le 2,\, y^2 \le x \le y + 2\}$ である。

$$\begin{aligned}
\int_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{2} \int_{y^2}^{y+2} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (4)\\
&= \int_{-1}^{2} \left[\frac{1}{2} x^2 y\right]_{x=y^2}^{x=y+2} \mathrm{d}y \qquad (5)\\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{2} \left((y+2)^2 y - y^5\right) \mathrm{d}y \qquad (6)\\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{2} \left(y^3 + 4y^2 + 4y - y^5\right) \mathrm{d}y \qquad (7)\\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} y^4 + \frac{4}{3} y^3 + 2y^2 - \frac{1}{6} y^6\right]_{y=-1}^{y=2} \qquad (8)\\
&= \frac{45}{8} \qquad (9)
\end{aligned}$$

(b)

$$\int_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_x^{1-x} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{10}$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=x}^{y=1-x} \mathrm{d}x \tag{11}$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x(1-x-x) + \frac{1}{2}((1-x)^2 - x^2) \right) \mathrm{d}x \tag{12}$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-4x^2 + 1 \right) \mathrm{d}x \tag{13}$$
$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{4}{3}x^3 + x \right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} \tag{14}$$
$$= \frac{1}{2} \left(-4 \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1}{2} \right) \tag{15}$$
$$= \frac{1}{6} \tag{16}$$

(c) 領域 D を極座標で表記すると次のようになる。

$$D = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\} \tag{17}$$

変数変換は次のように行う。

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \tag{18}$$

これによりヤコビアンは次のようになる。

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \tag{19}$$

$$
\begin{aligned}
\int_D xy^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta(r\sin\theta)^3\cdot r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r && (20)\\
&= \int_0^1 r^5\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r && (21)\\
&= \int_0^1 r^5\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{4}\sin 2\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta\right)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r && (22)\\
&= \int_0^1 r^5\left[-\frac{1}{8}\cos 2\theta + \frac{1}{32}\cos 4\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}r && (23)\\
&= \int_0^1 \frac{r^5}{16}\,\mathrm{d}r && (24)\\
&= \left[\frac{r^6}{96}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{1}{96} && (25)
\end{aligned}
$$

式 (21) は次のように変形をした。

$$
\begin{aligned}
\cos\theta\sin^3\theta =& \cos\theta\sin\theta\cdot\sin^2\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) && (26)\\
=&\frac{1}{4}\sin 2\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\cos 2\theta = \frac{1}{4}\sin 2\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta && (27)
\end{aligned}
$$

この変形に次の式を用いた。

$$
\begin{aligned}
\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad &\Leftrightarrow \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta && (28)\\
\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \quad &\Leftrightarrow \quad \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) && (29)
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
&C_1 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad C_1(t) = (\cos t,\ \sin t) && (30)\\
&C_2 : \left[\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}\right] \to \mathbb{R}^2, \quad C_2(t) = (\cos t^2,\ \sin t^2) && (31)\\
&D =\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4\} && (32)\\
&\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{f}(x,y) = {}^t\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} && (33)
\end{aligned}
$$

$$
\int_{(C_1,\ C_2)} \boldsymbol{f} \qquad (34)
$$

....

写像 C_1, C_2 の像は全て $\boldsymbol{f}$ の定義域に含まれる。つまり、$C_1 \subset D,\ C_2 \subset D$。

C_1 上の位置ベクトルを $\boldsymbol{c}_1 = (\cos t, \sin t)$ とする。

$$\mathrm{d}\boldsymbol{c}_1 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}_1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = (-\sin t, \cos t)\mathrm{d}t \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \boldsymbol{f}\mathrm{d}\boldsymbol{c}_1 &= \int_0^{\pi} (1,0)\cdot(-\sin t, \cos t)\mathrm{d}t && (36)\\
&= \int_0^{\pi} (-\sin t)\mathrm{d}t && (37)\\
&= [\cos t]_0^{\pi} = -2 && (38)
\end{aligned}$$

C_2 上の位置ベクトルを $\boldsymbol{c}_2 = (\cos t^2, \sin t^2)$ とする。

$$\mathrm{d}\boldsymbol{c}_2 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}_2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = (-2t\sin t^2, 2t\cos t^2)\mathrm{d}t \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} \boldsymbol{f}\mathrm{d}\boldsymbol{c}_2 &= \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} (1,0)\cdot(-2t\sin t^2, 2t\cos t^2)\mathrm{d}t && (40)\\
&= \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} (-2t\sin t^2)\mathrm{d}t && (41)\\
&= \left[\cos t^2\right]_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} = 2 && (42)
\end{aligned}$$

C_1, C_2 上の積分を合わせると次のようになる。

$$\int_{C_1} \boldsymbol{f}\mathrm{d}\boldsymbol{c}_1 + \int_{C_2} \boldsymbol{f}\mathrm{d}\boldsymbol{c}_2 = 0 \tag{43}$$

…………………………………………………………………………………………

問題は次の式でした。

$$\int_{(C_1,\ C_2)} \boldsymbol{f} \tag{44}$$

この積分の (C_1, C_2) は 2 つの曲線全体にわたって積分するという意味で捉えました。