

$$5. \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- (i) 任意のベクトル  $\vec{x}$  に対し、 $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v}$  を満たす整数の組  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  が一意に存在するということは次の式の変形で得られる行列が正則である時である。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{2}$$

実際の逆行列  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  が存在し、これを用いて

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{3}$$

となり、 $\vec{x}$  が定まると  $(a, b)$  が一意に定まる。