$(A, +, \cdot)$ を可換環とし、I を A のイデアルとする。この時、$\mathrm{Jac}(I)$ とは全ての I を含む A の極大イデアルの共通部分である。

1. $\mathrm{Jac}(I)$ が A のイデアルであることを示せ。

   ……………………………………………………………………………

   $\mathrm{Jac}(I)$ は次のような集合である。

   $$\mathrm{Jac}(I) = \bigcap_{m \in M_I} m, \qquad M_I = \{m \subset A \mid m \supset I \text{となる極大イデアル}\} \tag{1}$$

   $a, b \in \mathrm{Jac}(I)$ とすると全ての $m \subset M_I$ に対して、$a, b \in m$ である。よって、$-a, a+b, ab \in m$ となるので、$-a, a+b, ab \in \mathrm{Jac}(I)$ である。
   また、$I \subset \mathrm{Jac}(I)$ より、$0 \in \mathrm{Jac}(I)$ である。
   $c \in A$ について $ca \in m$ である為、$ca \in \mathrm{Jac}(I)$ である。
   これにより $\mathrm{Jac}(I)$ は A のイデアルである。

   ---

2. $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ を $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ の素因数分解とする。ただし、$a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ $(1 \leq i \leq k)$ とする。$\mathbb{Z}$ のイデアル $(n) = n\mathbb{Z}$ に対して、$\mathrm{Jac}(n\mathbb{Z})$ を求めよ。

   ……………………………………………………………………………

   環 $\mathbb{Z}$ の極大イデアルは素数 p によって生成されるイデアル $(p) = p\mathbb{Z}$ である。
   イデアル (n) を含む極大イデアルは素数から生成されるイデアルなので、$(p_1), \dots, (p_k)$ である。
   よって、$\mathrm{Jac}(n\mathbb{Z})$ は次のようなイデアルとなる。

   $$\mathrm{Jac}(n\mathbb{Z}) = \bigcap_{i=1}^{k} (p_i) = \bigcap_{i=1}^{k} p_i\mathbb{Z} \tag{2}$$
