定義　集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して 次のように極限集合を定義する。

$$\text{上極限集合 } \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \qquad \text{下極限集合 } \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \tag{1}$$

$\mathbb{R}^2$ の部分集合の列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ で、

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0,1/2] \times [0,1/2] \quad \text{かつ} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0,1] \times [0,1] \tag{2}$$

という条件を満たす例を証明付きで一つ挙げよ。

……………………………………………………………………………

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 A_k を次のように定める。

$$A_k = \left[0, \frac{3+(-1)^k}{4}\right] \times \left[0, \frac{3+(-1)^k}{4}\right] \tag{3}$$

これは k が奇数の時、$A_k = [0,1/2] \times [0,1/2]$ であり、k が偶数の時、$A_k = [0,1] \times [0,1]$ である集合である。

………………………… $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0,1/2] \times [0,1/2]$ …………………………

$\alpha \in [0,1/2] \times [0,1/2]$ とする。全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して、$[0,1/2] \times [0,1/2] \subset A_n$ であるので、$\alpha \in \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ となる。つまり、$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \supset [0,1/2] \times [0,1/2]$ である。

逆に、$\alpha \in \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ とする。$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ であるので、ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在し、$\alpha \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ である。$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ は次のような集合である。

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \cdots \cap [0,1/2] \times [0,1/2] \cap [0,1] \times [0,1] \cap [0,1/2] \times [0,1/2] \cap \cdots \tag{4}$$

つまり、$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = [0,1/2] \times [0,1/2]$ であるので、$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset [0,1/2] \times [0,1/2]$ である。

………………………… $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0,1] \times [0,1]$ …………………………

$\alpha \in [0,1] \times [0,1]$ とする。n が偶数の時、$[0,1] \times [0,1] \subset A_n$ である。つまり、すべての自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha \in A_{2n}$ であるので、$\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{2n}$ である。$A_{2n} \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ であるため、

$$\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{2n} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \tag{5}$$

となる。

逆に、$\alpha \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ とする。A_k は $[0,1/2]\times[0,1/2]$ または $[0,1]\times[0,1]$ であり、交互に現れるので、$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset [0,1]\times[0,1]$ である。

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}[0,1]\times[0,1] = [0,1]\times[0,1] \tag{6}$$

よって、$\alpha \in [0,1]\times[0,1]$ である。

X を集合とし、$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の部分集合の列とする。

1. $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x \in X \mid$ 無限個の n に対して $x \in A_n\}$
2. $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x \in X \mid$ 有限個を除く n に対して $x \in A_n\}$
3. $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$

....

1. $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x \in X \mid$ 無限個の n に対して $x \in A_n\}$

................................**Proof**................................

集合 B_n を $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ とする。

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \tag{7}$$

であるので、任意の元 $\alpha \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ について調べる。

$$\alpha \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \Leftrightarrow \alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \Leftrightarrow {}^{\forall}n \in \mathbb{N},\ \alpha \in B_n \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow {}^{\forall}n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow {}^{\forall}n \in \mathbb{N},\ {}^{\exists}k_n \geq n\ s.t.\ \alpha \in A_{k_n} \tag{9}$$

ここから自然数の部分集合 $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$ が存在する。集合 $\{k_n\}$ の濃度は自然数と一致するので、無限個の A_{k_n} に対して $\alpha \in A_{k_n}$ となる。

....

2. $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x \in X \mid$ 有限個を除く n に対して $x \in A_n\}$

................................**Proof**................................

集合 B_n を $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ とする。

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \tag{10}$$

であるので、任意の元 $\alpha \in \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ について調べる。

$$\alpha \in \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \alpha \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Leftrightarrow {}^{\exists}n \in \mathbb{N},\ s.t.\ \alpha \in B_n \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow {}^{\exists}n \in \mathbb{N},\ s.t.\ \alpha \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow {}^{\exists}n \in \mathbb{N},\ s.t.\ k \geq n,\ \alpha \in A_k \tag{12}$$

これより、ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在し、n 以上の自然数 k に対し、$\alpha \in A_k$ である。
つまり、最初のいくつかの有限個を除いて残り全て含まれることになる。

....

3. $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$

.... **Proof** ....

上の 2 つの内容より $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ は $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ より条件が厳しい。
$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ はある数以上の全ての A_n に含まれないといけないが、$\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ は n は連続である必要はなく、飛び飛びの数字で構わない。
例えば、偶数番目の A_n にのみ含まれる元 β は $\beta \in \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ であるが、$\beta \notin \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ である。

....