方程式の解空間

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \quad \text{ただし } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \tag{1}$$

上記方程式の解を調べよ。

. . . .

左辺の行列に行に関する変形を行うと次のような行列が得られる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

つまり、最初の方程式の解は次の方程式の解でもある。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

上記行列の積から次の三つの式が得られる。

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 - 2x_5 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = x_5 \end{cases} \tag{4}$$

3 つ目の式から 1 つ目の式の x_5 を x_4 に置き換えるとベクトル $\boldsymbol{x}$ は次のようになる。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 - 2x_4 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x_4 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

つまり、x_3, x_4 が何か値を決めればほかの 3 つの成分の値も決まることになり 2 次元の解空間であることがわかる。

x_3, x_4 はどんな値をとってもよいので、この 2 つを c_1, c_2 と置きなおすと $\boldsymbol{x}$は次のようになる。

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$