定義

剰余類群

整数を n で割った余りの等しい整数を同じもの (剰余類) として集めた集合を剰余類群といい、$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と書く。

整数の加法 $(+)$ をそのままこの剰余類群の演算として定義できる。

準同型写像 (群)

G, H を群とする。

$$f : G \to H \tag{1}$$

写像 f が準同型であるとは次を満たすときをいう。

$$[{}^{\forall}a, b \in G] \qquad f(ab) = f(a)f(b) \tag{2}$$

この時、単位元 $e_G \in G, e_H \in H$ について、$f(e_G) = e_H$ が成り立つ。

問題

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ を加法群とみなす。

1. $1 \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ の生成元となることが正しいか否かを答えよ。

   ....

   $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ の要素は次の通り。

$$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\} \tag{3}$$

   これらは以下の演算により計算できる。

$$\begin{align}
\bar{0} =& \bar{9} = \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} \tag{4}\\
\bar{1} =& \bar{1} \tag{5}\\
\bar{2} =& \bar{1} +_9 \bar{1} \tag{6}\\
\bar{3} =& \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} \tag{7}\\
\bar{4} =& \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} \tag{8}\\
\bar{5} =& \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} \tag{9}\\
\bar{6} =& \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} \tag{10}\\
\bar{7} =& \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} \tag{11}\\
\bar{8} =& \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} \tag{12}\\
& \tag{13}
\end{align}$$

   よって、1 を生成元とする部分群 $\langle 1 \rangle$ は $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ であることが分かる。

2. ${}^\forall a \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ に対し、$a +_6 a +_6 a +_6 a +_6 a +_6 a = 0$ であることが正しいか否かを答えよ。

…………………………………………………………………………

$a \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ とする。
$a = \bar{0}$ の時、次のように $\bar{0}$ となる。

$$a +_6 a +_6 a +_6 a +_6 a +_6 a = \bar{0} +_6 \bar{0} +_6 \bar{0} +_6 \bar{0} +_6 \bar{0} +_6 \bar{0} = \bar{0} \tag{14}$$

$a \neq \bar{0}$ の時を考える。
a は $\bar{1}$ のいくつかの和で表される。そこで、$\bar{1}$ の n 個の和として $a = \sum_{k=1}^{n} \bar{1}$ とする。

$$a +_6 a +_6 a +_6 a +_6 a +_6 a = \sum_{k=1}^{n} \bar{1} +_6 \sum_{k=1}^{n} \bar{1} +_6 \sum_{k=1}^{n} \bar{1} +_6 \sum_{k=1}^{n} \bar{1} +_6 \sum_{k=1}^{n} \bar{1} +_6 \sum_{k=1}^{n} \bar{1} \tag{15}$$

これは k 番目の $\bar{1}$ の和をまとめると次のようになる。

$$a +_6 a +_6 a +_6 a +_6 a +_6 a = \sum_{k=1}^{n} (\bar{1} +_6 \bar{1} +_6 \bar{1} +_6 \bar{1} +_6 \bar{1} +_6 \bar{1}) \tag{16}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \bar{6} = \sum_{k=1}^{n} \bar{0} = \bar{0} \tag{17}$$

よって、${}^\forall a \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ に対し、$a +_6 a +_6 a +_6 a +_6 a +_6 a = 0$ である。

---

3. 任意の群準同型 $f : \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ に対し、$f(a) +_6 f(a) +_6 f(a) = 0$ であることが正しいか否かを答えよ。

…………………………………………………………………………

準同型写像 f は単位元同士対応する。$f(\bar{0}) = \bar{0}$
単位元 $\bar{0}$ は $\bar{1}$ の和として表される。

$$\bar{0} = \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} \qquad (\text{ in } \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) \tag{18}$$

$$\bar{0} = \bar{1} +_6 \bar{1} +_6 \bar{1} +_6 \bar{1} +_6 \bar{1} +_6 \bar{1} \qquad (\text{ in } \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \tag{19}$$

これらにより単位元 $\bar{0}$ を $\bar{1}$ の和として考える。

$$\bar{0} = f(\bar{0}) \tag{20}$$

$$= f(\bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1} +_9 \bar{1}) \tag{21}$$

$$= f(\bar{1}) +_6 f(\bar{1}) +_6 f(\bar{1}) +_6 f(\bar{1}) +_6 f(\bar{1}) +_6 f(\bar{1}) +_6 f(\bar{1}) +_6 f(\bar{1}) +_6 f(\bar{1}) \tag{22}$$

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の元は 6 個足すと $\bar{0}$ になるので、上の式は次のようになる。

$$\bar{0} = f(\bar{1}) +_6 f(\bar{1}) +_6 f(\bar{1}) +_6 \bar{0} \tag{23}$$

よって次の式が得られる。

$$f(\bar{1}) +_6 f(\bar{1}) +_6 f(\bar{1}) = \bar{0} \tag{24}$$

${}^{\forall}a \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ とする。
a が n 個の $\bar{1}$ の和として表されるとする。

$$a = \sum_{k=1}^{n} \bar{1} \tag{25}$$

これを用いて $f(a)$ の和を考える。

$$\begin{aligned}
f(a) +_6 f(a) +_6 f(a) =& f\left(\sum_{k=1}^{n} \bar{1}\right) +_6 f\left(\sum_{k=1}^{n} \bar{1}\right) +_6 f\left(\sum_{k=1}^{n} \bar{1}\right) && (26)\\
=& \sum_{k=1}^{n} f(\bar{1}) +_6 \sum_{k=1}^{n} f(\bar{1}) +_6 \sum_{k=1}^{n} f(\bar{1}) && (27)\\
=& \sum_{k=1}^{n} (f(\bar{1}) +_6 f(\bar{1}) +_6 f(\bar{1})) && (28)\\
=& \sum_{k=1}^{n} \bar{0} = \bar{0} && (29)
\end{aligned}$$

以上により $f(a) +_6 f(a) +_6 f(a) = \bar{0}$ である。

---

4. 群準同型 $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の総数を答えよ。

. . . .

準同型写像は $f(\bar{1})$ が何になるかで具体的に定まる。
$f(\bar{1}) = \bar{1}$、$f(\bar{1}) = \bar{3}$、$f(\bar{1}) = \bar{5}$ の場合、$f(\bar{1}) +_6 f(\bar{1}) +_6 f(\bar{1}) \neq \bar{0}$ となる為、準同型は存在しない。
$f(\bar{1}) = \bar{2}$ の場合、$f(\bar{2}) = f(\bar{1} +_9 \bar{1}) = f(\bar{1}) +_6 f(\bar{1}) = \bar{4}$ となる。これを $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ の他の元についても行うと次が得られる。

$$f(\bar{0}) = f(\bar{3}) = f(\bar{6}) = \bar{0} \tag{30}$$

$$f(\bar{1}) = f(\bar{4}) = f(\bar{7}) = \bar{2} \tag{31}$$

$$f(\bar{2}) = f(\bar{5}) = f(\bar{8}) = \bar{4} \tag{32}$$

$f(\bar{1}) = \bar{4}$ の場合、同様に考えると次のようになる。

$$f(\bar{0}) = f(\bar{3}) = f(\bar{6}) = \bar{0} \tag{33}$$
$$f(\bar{1}) = f(\bar{4}) = f(\bar{7}) = \bar{4} \tag{34}$$
$$f(\bar{2}) = f(\bar{5}) = f(\bar{8}) = \bar{2} \tag{35}$$

$f(\bar{1}) = \bar{0}$ の場合、全ての要素を $\bar{0}$ と対応づけるため f は零写像となる。
以上により f の総数は 3 である。