実 n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ において $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ とする。

ベクトルの大きさ (絶対値、2 乗ノルム)

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + \cdots a_n^2} \tag{1}$$

ベクトルの内積 (inner product, scalar product)

ベクトル同士で内積を定義できる。内積はスカラーになる。

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = a_1 b_1 + \cdots a_n b_n \tag{2}$$

ベクトルの外積 (vector product, cross product)

3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ においては外積が定義できる。外積はベクトルになる。

基底ベクトル $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ を用いると、$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2} + a_3\boldsymbol{e_3}$ と書ける。

多くの場合、基底ベクトルの成分表示は $\boldsymbol{e_1} = (1,0,0), \boldsymbol{e_2} = (0,1,0), \boldsymbol{e_3} = (0,0,1)$ である。

これにより外積を定義する。

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{3}$$

外積の成分表示は次のようになる。

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1) \tag{4}$$

これを外積の定義とする場合もある。

命題

Schwarz（シュワルツ）の不等式 $|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle| \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n)$ の等号が成立する時は以下の場合のみである。

(1). $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 又は $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

(2). $\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0)$

. . . .

シュワルツの不等式と必要十分な条件 (同値な条件) を示す必要がある。

まず、次の条件が成り立つ時、シュワルツの不等式の等号が成り立つことを示す。

(1). $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 又は $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

(2). $\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0)$

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ の時 $\langle \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \rangle = 0, \quad |\boldsymbol{0}||\boldsymbol{b}| = 0$ より成立。

$\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b} \quad (\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0},\ \alpha \neq 0)$ の時、左辺は $\langle \boldsymbol{a}, \alpha \boldsymbol{a} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle$ となり、右辺は $|\boldsymbol{a}||\alpha \boldsymbol{a}| = |\alpha||\boldsymbol{a}|^2$ となる。$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}$ であるから次の式が成り立つ。

$$|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle| = |\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle| = |\alpha||\boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \tag{5}$$

逆に $|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ の場合を考える。

両辺を 2 乗し移項すると $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 = 0$ となる。これを変形する。

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 && (6) \\ &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle && (7) \\ &= \langle \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle - \langle \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle && (8) \\ &= \langle \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle && (9) \end{aligned}$$

この変形によりベクトル $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{b}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の内積が 0 であることがわかり、ここから $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ が得られる。同様の議論をベクトルを入れ替え $|\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle| = |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|$ として行うと $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ が得られる。

また、ベクトル $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{0}$ になる場合を考えると、

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{10}$$

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{a} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{b} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle} \boldsymbol{b} \tag{12}$$

である。$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle$ や $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ はスカラー (実数) であるので、$\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ となることがわかる。

これより一方が零ベクトルの場合 又は 一次従属の場合がわかる。

命題

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(1). $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

(2). $\boldsymbol{a} \times (\alpha \boldsymbol{b} + \beta \boldsymbol{c}) = \alpha (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + \beta (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$

....

ベクトルの外積

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \tag{13}$$

成分表示で計算した場合次のようになる。

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1) \tag{14}$$

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = (b_2 a_3 - b_3 a_2,\ b_3 a_1 - b_1 a_3,\ b_1 a_2 - b_2 a_1) \tag{15}$$

これにより $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ である。

$\boldsymbol{a} \times (\alpha \boldsymbol{b} + \beta \boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + \beta(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$

$$\boldsymbol{a} \times (\alpha \boldsymbol{b} + \beta \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \end{vmatrix} \tag{16}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha b_1 & \alpha b_2 & \alpha b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta c_1 & \beta c_2 & \beta c_3 \end{vmatrix} \tag{17}$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{18}$$

$$= \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + \beta(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \tag{19}$$

成分表示で両辺を計算しても示すことが出来る。

シュワルツ
Schwarz の不等式

$$|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle| \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n) \tag{20}$$

ベクトルの内積の性質

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}$

(1). $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}$

(2). $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle$

(3). $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\rangle$

(4). $\langle x\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \langle \boldsymbol{a}, x\boldsymbol{b}\rangle = x\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$

(5). $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle \geq 0$

(6). $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

....

${}^\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}$ に対し、ベクトル $x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を考える。
同じベクトルの内積は 0 以上の値となるので次の式が成り立つ。

$$\langle x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle \geq 0 \tag{21}$$

この内積を計算する。

$$\begin{aligned}
\langle x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle &= \langle x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, x\boldsymbol{a}\rangle + \langle x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle & (22)\\
&= \langle x\boldsymbol{a}, x\boldsymbol{a}\rangle + \langle \boldsymbol{b}, x\boldsymbol{a}\rangle + \langle x\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle & (23)\\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle x^2 + 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle x + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle \geq 0 & (24)
\end{aligned}$$

ベクトルの内積は全て実数値であるので、上の最後の式 (24) は x の 2 次式である。この式が ${}^\forall x$ について言えるので 2 次式の判別式 D は $D \leq 0$ を満たす。

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle^2 - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle \leq 0 \tag{25}$$

$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle = |\boldsymbol{a}|^2$, $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle = |\boldsymbol{b}|^2$ より $|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle| \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ となる。