
既約元

環 R において、単元でない $a \in R \{0\}$ が既約であるとは $a = bc$ となる $b, c \in R$ が存在すれば b または c が単元となるときをいう。

$a = bc$ となる $b, c \in R$ がともに単元でないのであれば可約という。

$f \in \mathbb{Z}[x]$ を次のように定める。f が $\mathbb{Z}[x]$ において既約か否かを判定せよ。

1. $2x - 4$
2. $-3x + 1$
3. $x^2 + 2x + 10$
4. $x^2 + 3x + 6$
5. $x^2 + 6x + 9$
6. $x^2 + 9$
7. $x^3 + 8$
8. $x^4 + 12$
9. $x^4 + 64$

. . . .

1. $2x - 4 = 2(x - 2)$ であり、$2 \in \mathbb{Z}[x]$ も $x - 2 \in \mathbb{Z}[x]$ も単元ではないので可約である。
2. $-3x + 1$ は次数 1 の多項式である。もし可約であれば、$f = ag \ (a, g \in \mathbb{Z}[x])$ で $\deg a = 0, \deg g = 1$ と分けられる。
   -3 と 1 の最大公約数は 1 であるので、$a = 1$ である。1 は単元であるので、$-3x + 1$ は既約である。
3. $x^2 + 2x + 10$ が可約であるとする。つまり、$f = gh$ となる単元でない $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ が存在するとする。
   $(\deg g, \deg h) = (0, 2), (2, 0)$ の場合と $(\deg g, \deg h) = (1, 1)$ の場合を考える。
   f の係数は $1, 2, 10$ であるので、最大公約数は 1 であり単元となるので、$(\deg g, \deg h) = (0, 2), (2, 0)$ となる分解はできない。
   $(\deg g, \deg h) = (1, 1)$ の場合を考える。
   アイゼンシュタインの定理より、$2, 10$ を割り切る素数 2 は x^2 の係数を割り切れず、2^2 も定数 10 を割り切れない。よって、$\mathbb{Q}[x]$ において f は既約であり、$\mathbb{Z}[x] (\subset \mathbb{Q}[x])$ においても f は既約である。

4. x^2+3x+6

   係数 $1, 3, 6$ の最大公約数は 1 である。よって、$f = ag$ $(a \in \mathbb{Z}, g \in \mathbb{Z}[x])$ という分解はできない。

   $3, 6$ を割り切る素数 3 は x^2 の係数を割り切れず、3^2 も定数 6 を割り切れない。よって、アイゼンシュタインの定理より、$\mathbb{Q}[x]$ において f は既約であり、$\mathbb{Z}[x] (\subset \mathbb{Q}[x])$ においても f は既約である。

5. $x^2+6x+9 = (x+3)^2$ より可約。

6. x^2+9

   係数 $1, 9$ を割り切る素数はないので、$f = ag$ $(a \in \mathbb{Z}, g \in \mathbb{Z}[x])$ という分解はできない。

   $x^2+9 = (x+a)(x+b)$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ と割り切れるとする。

   $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$ であるので、$a, b \in \mathbb{Z}$ は $a+b=0,\ ab=9$ を満たす。$a+b=0$ より $b=-a$ であるので、$ab=9$ より $-a^2=9$ となるが、これを満たす整数 a は存在しない。

   よって、$x^2+9 = (x+a)(x+b)$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ と分けられない。

   これにより既約であることがわかる。

7. $x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4)$ より可約。

8. $f(x) = x^4+12$ とする。

   x^4 の係数が 1 であるので整数と多項式の積に分けられない。

   そこで、$f(x+3) = (x+3)^4+12$ について既約かどうかを考える。

   $$f(x+3) = x^4+12x^3+54x^2+108x+93 \tag{1}$$

   最高次数の項以外の係数は $12, 54, 108, 93$ でありこれらの最大公約数は 3 である。x^4 の係数は 3 で割り切れず 93 は 3^2 で割り切れない。このため、アイゼンシュタインの既約判定法により $f(x+3)$ は既約である。よって、平行移動する前の多項式 $f(x)$ も既約である。

9. $x^4+64 = (x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$ より可約。