
勾配 (gradient)

関数 f に対して、f の勾配 (gradient〔グラディエント〕) $Df(=\nabla f)$

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\quad (x_1,x_2,x_3)\mapsto y \qquad Df=\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) \tag{1}$$

偏微分方程式（ partial differential equation ）

輸送方程式（ transport equation ）

$u=u(x,t)\ (x\in\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R})\ u:\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$

$Du=(u_{x_1},u_{x_2},\ldots,u_{x_n})$

$b\in\mathbb{R}^n$

Report 1.1

関数 $u=u(x,t)\ (x\in\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R})$ は $u:\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ とし、$b\in\mathbb{R}^n$ とする。

$$u_t+b\cdot Du=0\quad \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \qquad z(s)=u(x+sb,t+s)\quad (s\in\mathbb{R}) \tag{2}$$

この時、次の式が成り立つ。

$$\dot{z}(s)=Du(x+sb,t+s)\cdot b+u_t(x+sb,t+s)=0 \tag{3}$$

$u:\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$

合成関数の微分を用いて $z(s)$ を s で微分する。

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}z(s)=&\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{dt}{ds} && (4)\\ & && (5)\end{aligned}$$

第 2 項 $\frac{\partial z}{\partial t}\frac{dt}{ds}$ は次のように計算できる。

$$\frac{\partial z}{\partial t}\frac{dt}{ds}=\frac{\partial u}{\partial t}(x+sb,t+s)=u_t(x+sb,t+s) \tag{6}$$

第 1 項 $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds}$ は多変数関数の微分であるので、$x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ より次のように

なる。

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_i + sb_i) \cdot \frac{d(x_i + sb_i)}{ds} \tag{7}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(x_i + sb_i) \cdot b_i = Du(x + sb) \cdot b \tag{8}$$

よって、$z(s)$ を s で微分すると $Du(x+sb, t+s) \cdot b + u_t(x+sb, t+s)$ が得られる。

式 (2) より $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ 上で、$u_t + b \cdot Du = 0$ であるので、$t + s > 0$ において $Du(x+sb, t+s) \cdot b + u_t(x+sb, t+s) = 0$ となる。

Report 1.2

$b \in \mathbb{R}^n$,　$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{9}$$

$$u(x,t) = g(x - tb) \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0) \tag{10}$$

(10) で定義される $u(x,t)$ は (9) を満たすことを示せ。

. . . .

$u(x,t) = g(x - tb)$ より $t = 0$ の時は $u(x,0) = g(x)$ である。

$t > 0$ において、u_t を計算する。これは t で偏微分を行うので、$g(x - tb)$ を偏微分する。

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t} g(x - tb) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(x - tb) \times (-b_1) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n}(x - tb) \times (-b_n) \tag{11}$$

同様に $b \cdot Du$ も計算する。

$$b \cdot Du = (b_1, \ldots, b_n) \cdot (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) \tag{12}$$

$$= (b_1, \ldots, b_n) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x - tb), \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x - tb) \right) \tag{13}$$

$$= b_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(x - tb) + \cdots b_n \frac{\partial g}{\partial x_n}(x - tb) \tag{14}$$

よって、$u_t + b \cdot Du = 0$ となる。

Report 1.3

. . . .

Report 1.4

. . . .
