問題 1　以下の問いに答えよ。

(1).　$(a,b)=(a',b')\to a=a'\wedge b=b'$ を示せ。

…………………………………………………………………

順序対の定義

$$(a,b)=\{\{a,a\},\{a,b\}\},\quad (a',b')=\{\{a',a'\},\{a',b'\}\} \tag{1}$$

外延性公理

$$(a,b)=(a',b')\leftrightarrow \forall x(x\in(a,b)\leftrightarrow x\in(a',b')) \tag{2}$$

$x\in(a,b)\leftrightarrow x\in(a',b')$ より $\{a,a\}\in(a',b')=\{\{a',a'\},\{a',b'\}\}$ である。
これより $\{a,a\}=\{a',a'\}$ または $\{a,a\}=\{a',b'\}$ である。

…………………………………………………………………

$\{a,a\}=\{a',a'\}$ **の場合**
対集合は次で定義される。

$$\{a,a\}\underset{\text{def}}{=}\{x:x=a\vee x=a\},\quad \{a',a'\}\underset{\text{def}}{=}\{x:x=a'\vee x=a'\} \tag{3}$$

これにより $\{a,a\}=\{a',a'\}$ であるなら $a=a'$ であることがわかる。
$\{a,a\}=\{a',a'\}$ より $\{a,b\}=\{a',b'\}$ であり、$a=a'$ であるので、$\{a,b\}=\{a,b'\}$ である。
同様に考えると $b=b'$ となる。
つまり、次が得られる。

$$a=a'\wedge b=b' \tag{4}$$

…………………………………………………………………

$\{a,a\}=\{a',b'\}$ **の場合**
外延性公理より

$$\forall x(x\in\{a,a\}\leftrightarrow x\in\{a',b'\}) \tag{5}$$

であるので、$a=a'\wedge a=b'$ であることがわかる。
$\{a,b\}=\{a',a'\}$ であるから、同様に考えて $a=a'\wedge b=a'$ である。
つまり、次が得られる。

$$a=a'\wedge a=b'\wedge b=a' \tag{6}$$

ここから次が得られる。

$$b=b' \tag{7}$$

. . . .

これらそれぞれの場合において

$$a = a' \wedge b = b' \tag{8}$$

である。

---

(2). $((a,b)) \underset{\mathrm{def}}{=} \{\{a\},\{\emptyset,b\}\}$ について (1) と同様の事実は成り立つか?

. . . .

$((a,b)) = ((a',b'))$ とする。
外延性公理より次が成り立つ。

$$\forall x(x \in \{\{a\},\{\emptyset,b\}\} \leftrightarrow x \in \{\{a'\},\{\emptyset,b'\}\}) \tag{9}$$

. . . .

$\{a\} = \{a'\}$ **の場合**
$\{a\} = \{a'\}$ より $a = a'$ が得られる。
また、$\{\emptyset,b\} = \{\emptyset,b'\}$ より、$b = b'$ または $b = \emptyset \wedge b' = \emptyset$ となる。
$\{a\} = \{\emptyset,b'\}$ **の場合**
$\{a\} = \{\emptyset,b'\}$ より $a = \emptyset \wedge a = b'$ である。
同様に $\{\emptyset,b\} = \{a'\}$ より $a' = \emptyset \wedge b = a'$ である。
$a = \emptyset \wedge b' = \emptyset \wedge a' = \emptyset \wedge b = \emptyset$ である。

. . . .

これらより (1) と同様に $a = a' \wedge b = b'$ が得られる。

問題 2 集合 $A \neq \emptyset$ について以下の問いに答えよ。

(1). $(\mathcal{P}(A);\Delta,\cap,\emptyset,A)$ は指標 2 の可換環であることを示せ。

. . . .

---

(2). 環に関する性質 P を一つ選んで (1) の環が性質 P をみたすような A を特徴付けよ.

. . . .

問題 3 $(\mathbb{Q},<) \simeq (\mathbb{Q}\lceil 0,<)$ は成り立つか?

. . . .

問題 4　以下を示せ。

(1). 整列集合の自己同型写像は恒等写像に限る。

(2). 全順序集合 $(\mathbb{Z}, <)$ の自己同型写像は無数に存在する。

問題 5　全順序集合 $(\mathbb{Z}, <), (\mathbb{Q}, <), (\mathbb{R}, <)$ について次の補題と同様の主張は成り立つか?

補題

$(A; <)$ を整列集合とする。A の真部分集合 X が下に閉 $(x < y \in X \to x \in X)$ ならば、$x \in A$ が存在して $X = A\lceil x$ である。