問 1

集合 A, B　写像 $f : A \to B$

集合 $\mathrm{Im}\, f$ を 写像 f の像といい、次のように定める。

$$\mathrm{Im}\, f = \{b \in B \mid {}^{\exists}a \in A \; s.t. \; b = f(a)\} \tag{1}$$

集合 $f(C)$ を 写像 f による集合 C の像といい、次のように定める。

$$f(C) = \{b \in B \mid {}^{\exists}c \in C \; s.t. \; b = f(c)\} \tag{2}$$

集合 A の任意の部分集合 C に対し、$f(C) \subset \mathrm{Im}\, f$ を証明せよ。

. . . .

次を示せばよい。

$${}^{\forall}x \in f(C) \Rightarrow x \in \mathrm{Im}\, f \tag{3}$$

$x \in f(C)$ より $f(C)$ の定義から

$${}^{\exists}c \in C \; s.t. \; x = f(c) \tag{4}$$

$C \subset A$ より 上の式は次のように C を A に書き換えることが出来る。

$${}^{\exists}c \in A \; s.t. \; x = f(c) \tag{5}$$

この式は $\mathrm{Im}\, f$ の定義式であるので、$x \in \mathrm{Im}\, f$ である。よって、${}^{\forall}x \in f(C) \Rightarrow x \in \mathrm{Im}\, f$ であり、$f(C) \subset \mathrm{Im}\, f$ となる。

問 2

点 $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ と正の実数 r に対して開球 $B(\boldsymbol{p}, r)$ を次のように定義する。

$$B(\boldsymbol{p}, r) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2 \right\} \tag{6}$$

この開球 $B(\boldsymbol{p}, r)$ は 点 $\boldsymbol{p}$ を中心とする半径 r の 2 次元開球という。

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が開集合であるとは次を満たすときをいう。

$${}^{\forall}\boldsymbol{p} \in D, \; {}^{\exists}r > 0 \; s.t. \; B(\boldsymbol{p}, r) \subset D \tag{7}$$

次の様に定義した集合 D が開集合であることを示せ。

$$D = (a, b) \times (c, d) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a < x < b, \; c < y < d \right\} \tag{8}$$

(a,b) と (c,d) は開区間であり、$(a,b)\times(c,d)$ は直積集合

…………………………………………………………………………………

開集合の定義に従い $^\forall\boldsymbol{p}\in D$ に対し 開球 B が $B\subset D$ を示せばよい。つまり、開球の半径が存在することを示せばよい。

$^\forall\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}p_x\\p_y\end{pmatrix}\in D$ とする。D の定義から $\boldsymbol{p}$ の各成分は開区間 (a,b), (c,d) の要素であるので、$p_x\in(a,b)$, $p_y\in(c,d)$ となる。

そこで次の 4 つの数 $p_x-a, b-p_x, p_y-c, d-p_y$ のなかで最も小さい数を r とする。

$$r=\min\{p_x-a,\ b-p_x,\ p_y-c,\ d-p_y\} \tag{9}$$

この r を用いると

$$(p_x-r,p_x+r)\subset(a,b),\ (p_y-r,p_y+r)\subset(c,d) \tag{10}$$

となる。

これにより $B(\boldsymbol{p},r)\subset D$ となる。

問 3

$^\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ と直交行列 A に対して $\langle A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ であることを示せ。

…………………………………………………………………………………

行列 A に対し、転置行列を ${}^tA$ と書く。

ベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ とする時、内積は $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle={}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ となる。(右辺は行列の積)

直交行列とは転置行列と逆行列が同じ行列である。$A{}^tA={}^tAA=E$

…………………………………………………………………………………

$$\begin{aligned}\langle A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y}\rangle&={}^t(A\boldsymbol{x})A\boldsymbol{y}={}^t\boldsymbol{x}{}^tAA\boldsymbol{y} &(11)\\&={}^t\boldsymbol{x}({}^tAA)\boldsymbol{y}={}^t\boldsymbol{x}E\boldsymbol{y} &(12)\\&={}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle &(13)\end{aligned}$$