定義

同相

位相空間 X, Y の間に全単射 f があるとする。全単射なので、逆写像 f^{-1} も存在する。

$$f : X \to Y \quad f^{-1} : Y \to X \tag{1}$$

写像 f, f^{-1} が共に連続である時、f を同相写像といい、X と Y は同相であるという。

....

X, Y を位相空間、$f : X \to Y$ を写像とする。この時、次の 2 つは同値である。

- f が連続
- X の点列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が $x \in X$ に収束するなら Y の点列 $\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ が $f(x) \in Y$ に収束する。

ここから [A] と [B] の条件を考えた。$[A']$と$[B']$ はその対偶である。

$$[A] \qquad f\text{: 連続} \Rightarrow \lim_{i\to\infty} f(x_i) = f(x) \tag{2}$$

$$[B] \qquad \lim_{i\to\infty} f(x_i) = f(x) \Rightarrow f\text{: 連続} \tag{3}$$

$$[A'] \qquad \lim_{i\to\infty} x_i \neq x \text{又は} \lim_{i\to\infty} f(x_i) \neq f(x) \Rightarrow f\text{: 連続でない} \tag{4}$$

$$[B'] \qquad f\text{: 連続でない} \Rightarrow \lim_{i\to\infty} x_i \neq x \text{又は} \lim_{i\to\infty} f(x_i) \neq f(x) \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

距離空間 X, Y に対し写像 $f : X \to Y$ を連続全単射写像とする。
X の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で収束しないものを用いて集合 $L(f)$ を次のように定める。

$$L(f) = \left\{ \lim_{n\to\infty} f(x_n) \in Y \mid \text{ 点列 } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ は } X \text{ 上で収束しない} \right\} \tag{7}$$

このとき、f が同相写像であるための必要十分条件は $L(f) = \emptyset$ となることを示せ。

....

$(X, d), (Y, d)$ を距離空間、$f : X \to Y$ を写像とするとき、次が同値である。

- f が連続
- X の点列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が $x \in X$ に収束するなら Y の点列 $\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ が $f(x) \in Y$ に収束する。

....

示したいことは

$$f : \text{同相写像} \Leftrightarrow L(f) = \emptyset \tag{8}$$

だが、$L(f)=\emptyset$ は X の点列 $\{x_n\}_{i\in\mathbb{N}}$ が収束しないとき Y の点列 $\{f(x_n)\}_{i\in\mathbb{N}}$ も収束しないことを意味している。

……………………… f : 同相写像 $\Rightarrow L(f)=\emptyset$ ………………………

f が同相写像であるので f は全単射、f,f^{-1} は連続写像である。

$f:X\to Y$ が連続であることから「ヒントの定理」より X の任意の点に収束する点列 $\{x_n\}_{i\in\mathbb{N}}$ は Y の点列 $\{f(x_n)\}_{i\in\mathbb{N}}$ も収束することが言える。

同様に $f^{-1}:Y\to X$ が連続であることから「ヒントの定理」より Y の任意の点に収束する点列 $\{y_n\}_{i\in\mathbb{N}}$ は X の点列 $\{f^{-1}(y_n)\}_{i\in\mathbb{N}}$ も収束することが言える。

これにより X と Y の点列は収束する点列が対応し、収束しない点列が対応する。つまり、X で収束しない点列の Y での収束値は存在しないので $L(f)=\emptyset$ である。

……………………… $L(f)=\emptyset\Rightarrow f$: 同相写像 ………………………

$L(f)=\emptyset$ より X の点列 $\{x_n\}_{i\in\mathbb{N}}$ が収束しないとき Y の点列 $\{f(x_n)\}_{i\in\mathbb{N}}$ も収束しない。

これの対偶を考えれば Y の点列 $\{f(x_n)\}_{i\in\mathbb{N}}$ が収束するとき、X の点列 $\{x_n\}_{i\in\mathbb{N}}$ も収束する。

f は全単射であるので逆写像 f^{-1} が存在する。これにより Y の点列 $\{(f(x_n))\}_{i\in\mathbb{N}}$ が収束するとき、X の点列 $\{f^{-1}(f(x_n))\}_{i\in\mathbb{N}}$ も収束する。

「ヒントの定理」より Y で収束する点列は写像 f^{-1} で移した点列も収束するため f^{-1} は連続写像である。f は連続全単射であるので f は同相写像であることが分かる。

………………………………………………………………

これらにより f が同相写像であることと $L(f)=\emptyset$ が同値であることが分かる。