$\overset{\text{ルンゲ}}{\text{Runge}}$ - $\overset{\text{クッタ}}{\text{Kutta}}$ 法

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = & y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ t_{n+1} = & t_n + h \end{cases} \tag{2}$$

但し、

$$\begin{cases} k_1 = & f(t_n, y_n) \\ k_2 = & f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = & f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = & f(t_n + h, y_n + hk_3) \end{cases} \tag{3}$$

. . . .

2 階微分方程式

$$y'' = f(t, y, y') \tag{4}$$

2 階微分方程式の場合、$z = y'$ と置いて、1 階微分方程式を 2 つ作る。

$$\begin{cases} y' = z = f(t, y, z) \\ y'' = z' = g(t, y, z) \end{cases} \tag{5}$$

ここから次のような式を作り、右辺を計算することで順次値を計算していく。

$$t_{n+1} = t_n + h \tag{6}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{7}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \tag{8}$$

但し、係数 k_i, l_i は次の通り。

$$k_1 = f(t_n, y_n, z_n) \qquad l_1 = g(t_n, y_n, z_n) \tag{9}$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1, z_n + \frac{h}{2}l_1\right) \qquad l_2 = g\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1, z_n + \frac{h}{2}l_1\right) \tag{10}$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2, z_n + \frac{h}{2}l_2\right) \qquad l_3 = g\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2, z_n + \frac{h}{2}l_2\right) \tag{11}$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3, z_n + hl_3) \qquad l_4 = g(t_n + h, y_n + hk_3, z_n + hl_3) \tag{12}$$

ベクトルを用いて表現すると、次のようになる。

$\boldsymbol{x}_n = (t_n, y_n, z_n), \boldsymbol{v}_i = (1, k_i, l_i)$

$$k_1 = f(\boldsymbol{x}_n) \qquad l_1 = g(\boldsymbol{x}_n) \tag{13}$$

$$k_2 = f\left(\boldsymbol{x}_n + \frac{h}{2}\boldsymbol{v}_1\right) \qquad l_2 = g\left(\boldsymbol{x}_n + \frac{h}{2}\boldsymbol{v}_1\right) \tag{14}$$

$$k_3 = f\left(\boldsymbol{x}_n + \frac{h}{2}\boldsymbol{v}_2\right) \qquad l_3 = g\left(\boldsymbol{x}_n + \frac{h}{2}\boldsymbol{v}_2\right) \tag{15}$$

$$k_4 = f\left(\boldsymbol{x}_n + h\boldsymbol{v}_3\right) \qquad l_4 = g\left(\boldsymbol{x}_n + h\boldsymbol{v}_3\right) \tag{16}$$

プログラムで表す場合も上記順序で計算を繰り返すことにより近似解が計算される。
上記の場合、z は y' の計算をしている。

問題

空気抵抗のある振り子の運動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \ddot{u} = -\sin u - \mu\dot{u} \quad (0 \leq t \leq T) \\ u(0) = A,\ \dot{u}(0) = B \end{cases} \tag{17}$$

1. 空気抵抗係数 μ と初期条件は次のように選んだ時、4 次ルンゲクッタ法で数値解を求めよ。
   (a) $(\mu,\ A,\ B,\ T) = (0.0,\ 2.0,\ 0,\ 50)$
   (b) $(\mu,\ A,\ B,\ T) = (0.2,\ 2.0,\ 0,\ 50)$
   (c) $(\mu,\ A,\ B,\ T) = (0.2,\ 2.0,\ 1.5,\ 50)$
   それらを 1 つのグラフに載せたもの (縦軸は u、横軸は t) を作成せよ。(刻み幅 Δt は自由だが、$\Delta t \leq 0.5$ 程度に抑えて作成)
2. 求めた数値解に対し、$E(t) = \dot{u}^2/2 - \cos u$ を計算し、それらを一つのグラフに載せたものを作成せよ。

. . . .

$v = \dot{u}$ と置く。

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u = v \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v = -\sin u - \mu v \\ u(0) = A,\ v(0) = \dot{u}(0) = B \end{cases} \tag{18}$$

$$f(t, u, v) = v, \quad g(t, u, v) = -\sin u - \mu v \tag{19}$$

$$
\begin{aligned}
t_{n+1} =& t_n + \Delta t && (20)\\
u_{n+1} =& u_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\frac{\Delta t}{6} && (21)\\
v_{n+1} =& v_n + (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)\frac{\Delta t}{6} && (22)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_n =& (t_n, u_n, v_n) & \boldsymbol{c}_i =& (1, k_i, m_i) && (23)\\
k_1 =& f(\boldsymbol{x}_n) & m_1 =& g(\boldsymbol{x}_n) && (24)\\
k_2 =& f\left(\boldsymbol{x}_n + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{c}_1\right) & m_2 =& g\left(\boldsymbol{x}_n + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{c}_1\right) && (25)\\
k_3 =& f\left(\boldsymbol{x}_n + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{c}_2\right) & m_3 =& g\left(\boldsymbol{x}_n + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{c}_2\right) && (26)\\
k_4 =& f\left(\boldsymbol{x}_n + \Delta t\boldsymbol{c}_3\right) & m_4 =& g\left(\boldsymbol{x}_n + \Delta t\boldsymbol{c}_3\right) && (27)
\end{aligned}
$$

下記サイトにて同様の計算は可能。

ルンゲクッタ法（4 次,2 階常微分方程式）Runge-Kutta method

`https://keisan.casio.jp/exec/system/1548123555`

....

式 (19) の内容を `fn_main` と `fn_sub` に反映。関数 f を `fn_main`、関数 g を `fn_sub` に記述し、初期条件は`#define` から始まる行に記述。

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

#define A 2.0 /* u の初期値 */
#define B 0.0 /* v の初期値 */
#define M 0.0 /* 空気抵抗 */
#define T 50.0 /* 終了時間 */
#define DT 0.1 /* 刻み時間 */

// 関数 メイン
double fn_main (double x, double y, double z) {
    (void) x;
    (void) y;
```

```
    return z;
}
// 関数 サブ
double fn_sub (double x, double y, double z) {
    (void) x;
    return - sin(y) - M * z;
}


int main(void) {
    int i;
    double u=A, v=B; /* 実数型の変数宣言、初期値で初期化 */
    double k_1, k_2, k_3, k_4, m_1, m_2, m_3, m_4;

    int N = (int) ceil(T / DT);
    double t=0;

    printf("%f %f\n", 0.0, A);
    for (i=1; i<=N; i++) {

        t=DT*i;

        k_1 = fn_main(t,u,v);
        m_1 = fn_sub(t,u,v);

        k_2 = fn_main(t+DT/2, u+k_1*DT/2, v+m_1*DT/2);
        m_2 = fn_sub(t+DT/2, u+k_1*DT/2, v+m_1*DT/2);

        k_3 = fn_main(t+DT/2, u+k_2*DT/2, v+m_2*DT/2);
        m_3 = fn_sub(t+DT/2, u+k_2*DT/2, v+m_2*DT/2);

        k_4 = fn_main(t+DT/2, u+k_3*DT, v+m_3*DT);
        m_4 = fn_sub(t+DT/2, u+k_3*DT, v+m_3*DT);

```

```
        u = u + (k_1 + 2*k_2 + 2*k_3 + k_4)*DT/6; /* u の差分式 */
        v = v + (m_1 + 2*m_2 + 2*m_3 + m_4)*DT/6; /* v の差分式 */
        printf("%f %f\n", i*DT, u);

    }

    return EXIT_SUCCESS;
}
```

コンパイル時、オプション"-lm" が必要な場合あり。

....

$\frac{v^2}{2} - \cos u$ を求めるのは上記コードの終りにある printf 行にて計算を行う。

printf(%f %f¥n¨ i*DT, u); を printf(%f %f¥n¨ i*DT, v*v/2-cos(u)); に変更。

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

#define A 2.0 /* u の初期値 */
#define B 0.0 /* v の初期値 */
#define M 0.0 /* 空気抵抗 */
#define T 50.0 /* 終了時間 */
#define DT 0.1 /* 刻み時間 */

// 関数 メイン
double fn_main (double x, double y, double z) {
    (void) x;
    (void) y;
    return z;
}
// 関数 サブ
double fn_sub (double x, double y, double z) {
```

```
    (void) x;
    return - sin(y) - M * z;
}


int main(void) {
    int i;
    double u=A, v=B; /* 実数型の変数宣言、初期値で初期化 */
    double k_1, k_2, k_3, k_4, m_1, m_2, m_3, m_4;

    int N = (int) ceil(T / DT);
    double t=0;

    printf("%f %f\n", 0.0, A);
    for (i=1; i<=N; i++) {

        t=DT*i;

        k_1 = fn_main(t,u,v);
        m_1 = fn_sub(t,u,v);

        k_2 = fn_main(t+DT/2, u+k_1*DT/2, v+m_1*DT/2);
        m_2 = fn_sub(t+DT/2, u+k_1*DT/2, v+m_1*DT/2);

        k_3 = fn_main(t+DT/2, u+k_2*DT/2, v+m_2*DT/2);
        m_3 = fn_sub(t+DT/2, u+k_2*DT/2, v+m_2*DT/2);

        k_4 = fn_main(t+DT/2, u+k_3*DT, v+m_3*DT);
        m_4 = fn_sub(t+DT/2, u+k_3*DT, v+m_3*DT);

        u = u + (k_1 + 2*k_2 + 2*k_3 + k_4)*DT/6; /* u の差分式 */
        v = v + (m_1 + 2*m_2 + 2*m_3 + m_4)*DT/6; /* v の差分式 */
```

```
        printf("%f %f\n", i*DT, v*v/2-cos(u));

    }

    return EXIT_SUCCESS;
}
```