Laplacian

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} \tag{1}$$

Report 1.12

U は連結とする。関数 u は U 上で C^2-級、$\overline{U}$ 上で C^1-級であり、次を満たしているとする。

$$\Delta u = 0 \ (\text{in } U),\ u = g \ (\text{on } \partial U,\ g \geq 0) \tag{2}$$

g が ∂U 上のどこかで正であるなら u は U 内で常に正であることを示せ。

……………………………………………………………………………………

$\overline{U}$ 上で C^1-級であるので、u は連続である。この為、ある点 $x_0 \in \overline{U}$ が存在し、$u(x_0)$ は最小となる。つまり、$u(x_0) \leq u(x)$ $({}^{\forall} x \in \overline{U})$ である。

もし、$x_0 \in \partial U$ であれば、$u(x_0) = g(x_0) \geq 0$ であり、$0 \leq u(x_0) \leq u(x)$ となる。

もし、$x_0 \in U$ であれば、u は U で定数関数となる。∂U にて $g \leq 0$ なる点があるので $u \geq 0$ である。

Report 1.13

$$\tilde{u} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy \tag{3}$$

$n = 2$ のとき、$\tilde{u}$ は有界ではないことを示せ。

……………………………………………………………………………………

調和関数 $\Phi(x)$ は $n = 2$ において $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \log |x|$ である。

$|x|$ がそれぞれ 0 と ∞ に飛ばした場合、$\Phi(x) \to \infty$ $(|x| \to 0)$ と $\Phi(x) \to -\infty$ $(|x| \to \infty)$ であるので、$|\Phi(x)| \to \infty$ である。

$$\tilde{u} = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(y) f(x-y) dy \tag{4}$$

Report 1.14

$n = 2,\ N = 3$ のとき、次の式を示せ。

$$u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \tag{5}$$

……………………………………………………………………………………

参考文献

偏微分方程式：講義ノート

https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~karel/files/notes_pde_2015.pdf

非線型解析：講義ノート

https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~karel/files/notes_nonlinear_analysis_2019.pdf

---

$C^\infty(\Omega)$ は Ω 上で無限に微分可能 (calculus) な関数の集合

. . . .

$\mathrm{supp}(f)$ は f の台 (サポート) といい、$f(x) \neq 0$ となる点 x の集合

. . . .

$$C_c^\infty(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega) \mid \mathrm{supp}(\phi) \text{ がコンパクト}\} \tag{6}$$

$C_0^\infty(\Omega)$ も $C_c^\infty(\Omega)$ と同じ意味として使われる。

. . . .

テスト関数

関数 ϕ は C^∞ 級でコンパクトな台を持ち、その境界上では 0 になるとき、テスト関数という。

∂U 上で $\phi = 0$ となるテスト関数は $\phi \in C_c^\infty(U)$ とかかれる。

. . . .

可積分関数のなす線形空間 (L^p 空間、エルピー空間) であり、次のような集合である。p-ノルム空間

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_\Omega |f(x)| dx < \infty \right\} \tag{7}$$

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\} \tag{8}$$

$f \in L^p(\Omega)$ のノルム $\|f\|_{L^p}$ は次で定義する。

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{9}$$

. . . .

Hölder 半ノルム

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\gamma} \right\} \tag{10}$$

……………………………………………………………………………

Hölder ノルム

$\|u\|_{C(\overline{U})} = \sup_{x\in U}|u|$ とおき、Hölder ノルムを次のように定義する。

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \|u\|_{C(\overline{U})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \tag{11}$$

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{U})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \tag{12}$$

……………………………………………………………………………

Hölder 空間

$$C^{k,\gamma}(\overline{U}) = \{u \in C^k(\overline{U}) \mid \|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})} < \infty\} \tag{13}$$

……………………………………………………………………………

局所可積分関数

Ω: 開集合、$p \in [1, \infty)$ とする。可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が p 乗局所可積分関数であるとは任意のコンパクト集合 $k \subset \Omega$ に対して $\int_K |f(x)|^p dx < \infty$ が成り立つことと定義する。

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\middle|\, {}^\forall K \subset \Omega \text{コンパクト}, \int_K |f(x)|^p dx < \infty \right\} \tag{14}$$

$L^p_{loc}(\Omega)$ の他、$L_{p,loc}(\Omega)$ や $L_p(\Omega, log)$ 等の記号が使われている。
次のような包含関係がある。

$$L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \tag{15}$$

……………………………………………………………………………

弱微分

$u \in L^1([a,b])$ とする。$\phi(a) = \phi(b) = 0$ を満たす任意の無限階可能関数 ϕ(テスト関数 $\phi \in C^\infty_c([a,b])$) に対して次を満たす $v \in L^1([a,b])$ を u の弱微分という。

$$\int_a^b u(t)\phi' dt = -\int_a^b v(t)\phi(t) dt \tag{16}$$

この式は部分積分の式の変形である。

……………………………………………………………………………

多重指数

n 個の数の組 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ を用いて微分 $D^\alpha u$ を表す。

$|\alpha| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ とする。

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \tag{17}$$

ソボレフ
Sobolev 空間

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \,\middle|\, \begin{array}{l} u\text{は}k\text{階弱微分可能} \\ k\text{階までの全ての導関数が}L^p(\Omega)\text{に含まれる} \end{array} \right\} \tag{18}$$

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \,\middle|\, \begin{array}{l} \alpha\text{は多重指数} \\ 0 \leq |\alpha| \leq k \Rightarrow D^\alpha u \in L^p(\Omega) \end{array} \right\} \tag{19}$$

ノルム $\|u\|_{W^{k,p}}$ は次のように定義する。

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{20}$$

2.1. $u : U \to \mathbb{R}$ の第 γ Hölder(ヘルダー) 半ノルムを次で定義する。

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\} \tag{21}$$

この定義は半ノルムであることを確認せよ。

半ノルムとは絶対斉次性 $(p(\lambda x) = |\lambda| p(x))$ と劣加法性 $(p(x+y) \leq p(x) + p(y))$ を満たす写像 p のことをいう。

$^\forall \lambda \in \mathbb{R}$ とする。

$$[\lambda u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|\lambda u(x) - \lambda u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\} \tag{22}$$

$$= |\lambda| \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\} = |\lambda| [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \tag{23}$$

よって、絶対斉次性を満たす。

劣加法性を確認する。

$$[u+v]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}=\sup_{\substack{x,y\in U\\x\neq y}}\left\{\frac{|(u(x)+v(x))-(u(y)+v(y))|}{|x-y|^{\gamma}}\right\} \tag{24}$$

$$\leq\sup_{\substack{x,y\in U\\x\neq y}}\left\{\frac{|u(x)-u(y)|+|v(x)-v(y)|}{|x-y|^{\gamma}}\right\} \tag{25}$$

$$\leq\sup_{\substack{x,y\in U\\x\neq y}}\left\{\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\gamma}}\right\}+\sup_{\substack{x,y\in U\\x\neq y}}\left\{\frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^{\gamma}}\right\} \tag{26}$$

$$=[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}+[v]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \tag{27}$$

以上により半ノルムであることが確認できる。

2.3. U 上の滑らかな関数全体を $C_c^{\infty}(U)\subset W^{k,p}(U)$ とし、これの閉包を $W_0^{k,p}(U)$ とする。$W_0^{k,p}(U)$ は $|\alpha|\leq k-1$ を満たす α において ∂U 上で $D^{\alpha}u=0$ となる関数 $u\in W^{k,p}(U)$ の集まりである。

トレースの定理を認めてこれを示せ。

トレースの定理

U を有界、∂U を C^1 とする。

$$T:W^{1,p}(U)\to L^p(\partial U) \tag{28}$$

この時、次を満たす有界線形作用素 T が存在する。

(a) $u\in W^{1,p}(U)\cap C(\overline{U})$ に対して $Tu=u|_{\partial U}$

(b) 各 $u\in W^{1,p}(U)$ に対し、$\|Tu\|_{L^p(\partial U)}\leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$ である。定数 C は p と U のみに依存する。

....

$$F:W^{k,p}(U)\to W^{1,p}(U),\quad u\mapsto D^{\alpha}u \tag{29}$$

上記写像とトレースの定理の写像 T の合成 $T\circ F$ を考える。

$T(u)=u|_{\partial U}$ であるから $T(u)=0$ となる u は ∂U 上で $u=0$ ということである。

つまり、$(T\circ F)(u)=0$ となる関数 u は ∂U 上で $D^{\alpha}u=0$ を満たす。

$f\in C_c^{\infty}(U)$ とすれば $\mathrm{supp}(f)\subset U$ であり、∂U 上では $f=0$ となる。つまり、∂U 上 $D^{\alpha}f=0$ である。

$f\in W_0^{k,p}(U)$ が $f_i\in C_c^{\infty}(U)$ により $f=\lim_{i\to\infty}f_i$ とする。

$$\lim_{i\to\infty}\|f_i-f\|_{W^{k,p}(U)}=0 \tag{30}$$

$$\lim_{i\to\infty} \|f_i - f\|_{W^{k,p}(U)} = \lim_{i\to\infty} \left(\sum_{0\le|\alpha|\le k} \|D^\alpha(f_i - f)\|^p_{L^p(U)} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{31}$$

∂U 上では $f_k = 0$ であるので、

$$\lim_{i\to\infty} f_i \tag{32}$$

2.5. $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ は可算で稠密な $U = B^0(0,1)$ の部分集合とする。

$$u(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k}|x - r_k|^{-\alpha} \quad (x \in U) \tag{33}$$

$0 \le \alpha \le \frac{n-p}{p}$ であれば $u \in W^{1,p}(U)$ である。
この時、u は U の部分集合である開集合上で有界ではないことを示せ。

. . . .

2.7. **弱微分の性質**

$u \in W^{k,p}(U),\ |\alpha| \le k$ とする。
このとき、$V \subset U$ が開集合であるなら $u \in W^{k,p}(V)$ となることを示せ。

. . . .

$u \in W^{k,p}(U)$ であるから $D^\alpha u \in L^p(U)$ である。つまり、任意のテスト関数 $\phi \in C_c^\infty(U)$ に対して次を満たす。

$$\int_U D^\alpha u(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_U u(x)D^\alpha\phi(x)dx \tag{34}$$

この ϕ は $\phi : U \to \mathbb{R}$ で C^∞ 級な関数あり、関数の台 $\mathrm{supp}(f) = \{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$ は $\mathrm{supp}(f) \subset U$ である。
(34) は任意の ϕ について成り立つ。この為、$U \backslash V$ 上で 0 となるテスト関数 $\bar{\phi}$ についても成り立つので、$V \subset U$ 上に制限した次の式も成り立つ。

$$\int_V D^\alpha u(x)\bar{\phi}(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_V u(x)D^\alpha\bar{\phi}(x)dx \tag{35}$$

つまり、$D^\alpha u \in L^p(V)$ である。よって、$u \in W^{k,p}(V)$ である。

2.9. $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ が $W^{k,p}(U)$ の Cauchy(コーシー) 列とする。
この時、$|\alpha| \le k$ となる各 α に対して $\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty$ は $L^p(U)$ の Cauchy 列となることを示せ。

$\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ がコーシー列であるので、次の極限が 0 となる。

$$\lim_{i,j\to\infty} \|u_i - u_j\|_{W^{k,p}(U)} = 0 \tag{36}$$

極限を取るノルムは次のように $L^P(U)$ のノルムで書き換える。

$$\|u_i - u_j\|_{W^{k,p}(U)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \|D^\alpha(u_i - u_j)\|_{L^p(U)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{37}$$

これが 0 に収束するので、$0 \leq |\alpha| \leq k$ において各 $\|D^\alpha(u_i - u_j)\|_{L^p(U)}$ は 0 に収束する。

$$\lim_{i,j\to\infty} \|D^\alpha(u_i - u_j)\|_{L^p(U)} = \lim_{i,j\to\infty} \|D^\alpha u_i - D^\alpha u_j\|_{L^p(U)} = 0 \tag{38}$$

これにより $\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^{\infty}$ はコーシー列だとわかる。

1. 次の初期値問題の解である関数 u を求めよ。

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du + cu = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{39}$$

$c \in \mathbb{R}$ と $b \in \mathbb{R}^n$ は定数とする。

………………………………………………………………………………

式を次のように変形する。

$$u_t + b \cdot Du + cu = 0 \ \Rightarrow \ u_t + b \cdot Du = -cu \tag{40}$$

ここから、左辺は u を微分すると u の定数倍になることが読み取れる。

$$u = \exp\left(\frac{c}{n+1}\left(t + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{b_i}\right)\right) \tag{41}$$

$$u(x,t) = g(x - tb) \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0) \tag{42}$$

---

2. Laplace 方程式 $\Delta u = 0$ は回転不変である、つまり n 次直交行列 O で変換しても Laplace 方程式を満たすことを示せ。

$$v(x) = u(Ox) \quad (x \in \mathbb{R}^n) \Rightarrow \Delta v = 0 \tag{43}$$

………………………………………………………………………………

O を n 次直交行列とし、$O = \{o_{ij}\}$ とする。O は直交行列であるので、O の転置行列と逆行列が一致する。

$$O^t O = {}^t O O = E, \quad \sum_{i=1}^{n} o_{ki} o_{li} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & (k = l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases} \tag{44}$$

x はベクトルであり、その成分を $x = (x_1, \ldots, x_n)$ とし、$\bar{x} = Ox$ とする。これにより、$v(x) = u(\bar{x})$ となる。
x_i における偏微分は合成関数の微分より次のように変形できる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} = \sum_{k=1}^{n} o_{ki} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} \tag{45}$$

2 階の偏微分は次のように求められる。

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} o_{ki}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_k}\right)\cdot\left(\sum_{l=1}^{n} o_{li}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_l}\right) = \sum_{k,l=1}^{n} o_{ki}o_{li}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k\partial \bar{x}_l} \tag{46}$$

これらを用いて Δv を計算する。

$$\Delta v = \Delta u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{n} o_{ki}o_{li}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k\partial \bar{x}_l}u(\bar{x}) \tag{47}$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} o_{ki}o_{li}\right)\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k\partial \bar{x}_l}u(\bar{x}) = \sum_{k,l=1}^{n}\delta_{kl}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k\partial \bar{x}_l}u(\bar{x}) \tag{48}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k^2}u(\bar{x}) = \Delta u \tag{49}$$

よって、$\Delta u = 0$ であれば、$\Delta v = 0$ である。

---

3. 平均値定理の証明を利用し、$n \geq 3$ の時、次の式を証明せよ。

$$u(0) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(0,r)} g dS + \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\int_{B(0,r)}\left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}}\right) f dx \tag{50}$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B^0(0,r) \\ u = g & \text{on } \partial B^0(0,r) \end{cases} \tag{51}$$

....

---

4. **最大値原理**

関数 $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ が開集合 U の境界上を除いて調和的である時、次が成り立つことを示せ。

$$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u \tag{52}$$

HINT : $\varepsilon > 0$ の時 $u_\varepsilon = u + \varepsilon|x|^2$ とおくと、U の内部では最大値を取らないことを示せばよい。

....

u は調和関数なので、$\Delta u = 0$ である。

$\varepsilon > 0$ に対して $u_\varepsilon = u + \varepsilon|x|^2$ とおくと、U 上で

$$\Delta u_\varepsilon = \Delta\varepsilon|x|^2 = 2d\varepsilon > 0 \quad (2d = \Delta(x_1^2 + \cdots + x_d^2)) \tag{53}$$

関数 f が点 p で最大値を持つのなら $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(p) \leq 0$ である。$\Delta u_\varepsilon = \sum \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i^2} > 0$ から u_ε は U 上で最大値を取らない。

$u = \lim_{\varepsilon \to \infty} u_\varepsilon$ であるので、u も U 上で最大値を取らない。

---

5. 次のような $v \in C^2(\overline{U})$ を 劣調和関数 (subharmonic) という。

$$-\Delta v \leq 0 \quad \mathrm{in}\, U \tag{54}$$

(a) v が次を満たすことを示せ。

$$v(x) \leq \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int_{B(x,r)} v dy \quad \text{for all } B(x,r) \subset U \tag{55}$$

....

(b) 次を示せ。

$$\max_{\overline{U}} v = \max_{\partial U} v \tag{56}$$

....

上の結果より、$^\forall p \in U$ に対して、$q \neq p$ となる $q \in B(p,r)$ が存在し、$v(q) = \max_{B(p,r)} v$ である。つまり、p の近くの点で最大値となるものがあることになる。

U の任意の点で言えるので、v は定数関数であるかまたは ∂U 上に最大値を持つ。

よって、$\max_{\overline{U}} v = \max_{\partial U} v$ となる。

(c) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はなめらかな凸関数とする。

u は調和関数、$v = \phi(u)$ とした時、v は劣調和関数であることを示せ。

....

ϕ は凸関数であるので、$\phi'' \geq 0$ である。

Δv を計算する

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial x_i^2} \tag{57}$$

右辺の項を一つ取り出し微分を行うと次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \phi(u)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \phi(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \tag{58}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \phi(u)}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi(u)}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \tag{59}$$

$$= \frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial \phi(u)}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{60}$$

これの和を求めると次のようになる。

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \phi(u)}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{61}$$

$$= \frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial u^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial \phi(u)}{\partial u}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{62}$$

$$= \frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial u^2}|Du|^2 + \frac{\partial \phi(u)}{\partial u}\Delta u \tag{63}$$

$\phi'' \geq 0,\ |Du| \geq 0,\ \Delta u = 0$ より $\Delta v \geq 0$ である。よって、v は劣調和関数である。

（d）u が調和的である時、$v = |Du|^2$ は劣調和的であることを示せ。

....

Δv を計算する。

$$\Delta v = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}|Du|^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \tag{64}$$

一つの項を取り出して計算する。

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \tag{65}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}2\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \tag{66}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^3 u}{\partial x_j \partial x_j \partial x_i}\right) \tag{67}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right) \tag{68}$$

これをもとの式に入れて計算する。

$$\Delta v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \tag{69}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} 2 \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right) \tag{70}$$

$$= 2 \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \right)^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right) \tag{71}$$

$$= 2 \left(|D^2 u|^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u \right) \tag{72}$$

$|D^2 u| \geq 0,\ \Delta u = 0$ より $\Delta v \geq 0$ となる。

よって、v は劣調和関数である。

---

6. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ は有界であるとする。

この時、U のみに依存した定数 C が存在し、次の式が成り立つことを示せ。

$$\max_{\overline{U}} |u| \leq C \left(\max_{\partial U} |g| + \max_{\overline{U}} |f| \right) \tag{73}$$

なお、u は滑らかな関数で、次の解である。

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{on } \partial U \end{cases} \tag{74}$$

HINT : $\lambda = \max_{\overline{U}} |f|$ に対して、$-\Delta \left(u + \frac{|x|^2}{2n} \lambda \right) \leq 0$

. . . .

この問では $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし、∂U は滑らかな境界とする。関数は指定がない限り滑らかな関数であるとする。

1. $U \subset \mathbb{R}^n$ は開集合、$f \in L^1_{loc}(U)$ とする。
   ${}^\forall \phi \in C_c^\infty(U)$ に対して、恒等式 $\int_U f\phi dx = 0$ が成り立つなら、ほとんど至るところで $f = 0$ である。

   ……………………………………………………………………

   $f \in L^1_{loc}(U)$ より、任意のコンパクトな集合 $K \subset U$ において $\int_K |f(x)| dx < \infty$ である。
   テスト関数 ϕ と f の積の U 上の積分が 0 となる。

$$\int_U f\phi dx = \int_K f\phi dx + \int_{U\setminus K} f\phi dx = 0 \tag{75}$$

   $\phi_K \in C_c^\infty(U)$ が $\mathrm{supp}(\phi_K) = K$ を満たすとする。つまり、$\phi_K \in C_c^\infty(K)$ とする。これにより $U\setminus K$ 上で $\phi_K = 0$ となる為、$\int_{U\setminus K} f\phi_K dx = 0$ となる。
   よって、$\int_K f\phi_K dx = 0$ となる。
   任意の関数 ϕ_K に対して積分が 0 となるので、$f = 0$ となる。

---

2. $k \in \{0, 1, \dots\}$, $0 < \gamma \le 1$ とする。この時、$C^{k,\gamma}(\overline{U})$ はバナッハ空間となることを示せ。

   ……………………………………………………………………

   $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C^{k,\gamma}(\overline{U})$ をヘルダー空間の関数列とする。$C^k(\overline{U})$ の完備性から f_n が連続関数 f に一様収束する。この f がヘルダー連続であることと、f_n が f にヘルダーノルムで収束することを示せば良い。
   ${}^\forall x, y \in U$ に対して、定数 C と γ が存在する。

$$|f(x) - f(y)| \le C\|x - y\|^\gamma \tag{76}$$

---

3. $0 < \beta < \gamma \le 1$ とする。この時、次の不等式を示せ。

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(U)} \le \|u\|_{C^{0,\beta}(U)}^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}} \|u\|_{C^{0,1}(U)}^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}} \tag{77}$$

   ……………………………………………………………………

---

4. 開集合 U を $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_i| < 1\,(i = 1, 2)\}$ とする。
$u(x)$ を次のように定義する。

$$u(x) = \begin{cases} 1 - x_1 & x_1 > 0,\ |x_2| < x_1 \\ 1 + x_1 & x_1 < 0,\ |x_2| < -x_1 \\ 1 - x_2 & x_2 > 0,\ |x_1| < x_2 \\ 1 + x_2 & x_2 < 0,\ |x_1| < -x_2 \end{cases} \tag{78}$$

$1 \leq p \leq \infty$ に対して u は $W^{1,p}(U)$ に属するのは p がいくつのときか調べよ。

…………………………………………………………………………

$$W^{1,p}(U) = \{u \in L^p(U) \mid 0 \leq |\alpha| \leq 1 \Rightarrow D^\alpha u \in L^p(U)\} \tag{79}$$

$$L^p(U) = \left\{ f : U \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_U |f(x)|^p dx < \infty \right\} \tag{80}$$

---

5. $n = 1$ とある $p\,(1 \leq p < \infty)$ について $u \in W^{1,p}(0,1)$ を仮定する。
(a) u はほとんど至るところで絶対連続関数であり、$u' \in L^p(0,1)$ である。

…………………………………………………………………………

(b) $1 < p < \infty$ とする。$x, y \in [0,1]$ に対し、ほとんど至るところで次が成り立つ。

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |u'|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \tag{81}$$

…………………………………………………………………………

---

6. U, V を開集合とし、$V \subset\subset U$ とする。
この時、滑らかな関数 ζ が存在し、V 上で $\zeta \equiv 1$、∂U の近くで $\zeta = 0$ となるものが存在する。
(HINT: $V \subset\subset W \subset\subset U$ を取ってきて、molify χ_W)

…………………………………………………………………………

---

7. U を有界とし、$U \subset\subset \bigcup_{i=1}^N V_i$ とする。
この時、C^∞ 級関数 $\zeta_i\,(i = 1, \ldots, N)$ が存在し次を満たす。

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta_i \leq 1, \quad \mathrm{supp}(\zeta_i) \subset V_i\,(i = 1, \ldots, N) \\ \sum_{i=1}^N \zeta_i = 1 \quad U\text{上} \end{cases} \tag{82}$$

関数 $\{\zeta_i\}_{i=1}^N$ は 1 の分割となっている。

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

---

8. U を有界とし、C^1 な境界を持つとする
この時、一般的な関数 $u \in L^p(U)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ は ∂U 上で trace を持たないことを示せ。
より正確には、$u \in C(\overline{U}) \cap L^p(\partial U)$ について $Tu = u|_{\partial U}$ を満たす有界線形作用素 $T : L^p(U) \to L^p(\partial U)$ は存在しないことを示せ。。

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

---

9. 部分積分を行い、任意の $u \in C_c^\infty(U)$ に対し、次の補間不等式を示せ。

$$\|Du\|_{L^2} \leq C\,\|u\|_{L^2}^{1/2}\,\left\|D^2u\right\|_{L^2}^{1/2} \tag{83}$$

U を有界、∂U は滑らかであるとする。$u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ であるとき、上記不等式を示せ。
(HINT: 関数列 $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset C_c^\infty(U)$ を $H_0^1(U)$ 内で u、$\{w_k\}_{k=1}^\infty \subset C^\infty(\overline{U})$ を $H^2(U)$ 内で u に収束するように取れる。)

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

10.
