留数定理 (Residue theorem)

曲線 C 上で正則な関数 $f(z)$ がその内部の有限個の点 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を除いた領域でも正則である場合、曲線上の積分は留数の和によって求められる。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, \alpha_k) \tag{1}$$

留数 (Residue)

複素関数 $f(z)$ の点 α 付近でのローラン展開を次のように表す。

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-\alpha)^k \tag{2}$$

この時、係数 c_{-1} のことを関数 $f(z)$ の点 α での留数という。$\mathrm{Res}(f, \alpha)$ 等の記号で表す。つまり、$c_{-1} = \mathrm{Res}(f, \alpha)$ である。

ローラン級数 (Laurent series)

次のように $-\infty$ から ∞ までを利用した級数を点 α まわりのローラン級数という。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-\alpha)^k \tag{3}$$

複素関数をローラン級数に直すことをローラン展開という。

上のローラン級数について、ある負の整数 p において $c_p \neq 0$ であり、p より小さな全ての整数 $\hat{p}(^\forall \hat{p} < p)$ において $c_{\hat{p}} = 0$ である時、点 α を $-p$ 位の極、または位数が $-p$ であるという。

整数 p を $p < 0$ とし、$c_p \neq 0$ とすると次のような式になる。$\sum_{k=p}^{\infty} c_k(z-\alpha)^k$

留数の求め方

複素関数がローラン級数で表せていなければ次の方法で求めることができる。

複素関数 $f(z)$ が点 α にて p 位の極を持つとする。

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-\alpha)^p} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-\alpha)} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-\alpha)^k \tag{4}$$

これに $(z-\alpha)^p$ をかけると右辺の分母が払われる。

$$(z-\alpha)^p f(z) = c_{-p} + \cdots + c_{-1}(z-\alpha)^{p-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-\alpha)^{k+p} \tag{5}$$

この右辺を $p-1$ 回微分すると c_{-1} が取り出せる。式で表すと次のようになる。

$$\lim_{z\to\alpha} \frac{d^{(p-1)}}{dz^{(p-1)}}(z-\alpha)^p f(z) = (p-1)! \cdot c_{-1} \tag{6}$$

積分値を求める手順は次の通り

1. 閉曲線内に極が存在するかを調べる
2. それぞれの極の留数を求める

---

(1).

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-2z+5}dz \tag{7}$$

$f(z) = \frac{e^z}{z^2-2z+5}$ とする。$z^2-2z+5=0$ を解くと $z=1\pm 2i$ より、次のような式になる。

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2-2z+5} = \frac{e^z}{(z-(1+2i))(z-(1-2i))} \tag{8}$$

$z=1\pm 2i$ はそれぞれ 1 位の極である。これらの絶対値は $|1+2i|=|1-2i|=\sqrt{5}>2$ であり、閉曲線 $|z|=2$ 内に存在しない。
閉曲線内に極がない為、積分値は 0 になる。

$$\underline{I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-2z+5}dz = 0} \tag{9}$$

---

(2).

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i|=2} \frac{z^2}{z^2-2z+5}dz \tag{10}$$

$f(z) = \frac{z^2}{z^2-2z+5}$ とする。

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2-2z+5} = \frac{z^2}{(z-(1+2i))(z-(1-2i))} \tag{11}$$

$z=1\pm 2i$ はそれぞれ 1 位の極である。これらが閉曲線 $|z-i|=2$ 内にあるかどうかを調べる。

$$z=1+2i\text{の場合} \qquad |(1+2i)-i| = |1+i| = \sqrt{2} < 2 \tag{12}$$

$$z=1-2i\text{の場合} \qquad |(1-2i)-i| = |1-3i| = \sqrt{10} > 2 \tag{13}$$

$1+2i$ が閉曲線内に含まれるので、この極の留数を求める。1 位の極であるので、微分は不要。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, 1+2i) &= \lim_{z\to 1+2i}(z-(1+2i))f(z) && (14)\\
&= \lim_{z\to 1+2i}(z-(1+2i))\frac{z^2}{(z-(1+2i))(z-(1-2i))} && (15)\\
&= \lim_{z\to 1+2i}\frac{z^2}{z-(1-2i)} && (16)\\
&= \frac{(1+2i)^2}{1+2i-(1-2i)} \qquad = 1+\frac{3}{4}i && (17)
\end{aligned}$$

極がこの一つだけなので、積分値は $1+\frac{3}{4}i$ である。

$$\underline{I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i|=2} \frac{z^2}{z^2-2z+5}dz = 1+\frac{3}{4}i} \tag{18}$$

---

(3).

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=2}\frac{\cos z}{z(z-\pi)}dz \tag{19}$$

$f(z) = \frac{\cos z}{z(z-\pi)}$ とする。$z=0$ と $z=\pi$ が 1 位の極である。

$$z = 0\text{の場合} \qquad |0-1| = 1 < 2 \tag{20}$$
$$z = \pi\text{の場合} \qquad |\pi-1| = \pi - 1 > 2 \tag{21}$$

そこで 0 の留数を求める。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,0) &= \lim_{z\to 0} zf(z) &(22)\\
&= \lim_{z\to 0} z\frac{\cos z}{z(z-\pi)} &(23)\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{z-\pi} &(24)\\
&= \frac{\cos 0}{0-\pi} \quad = -\frac{1}{\pi} &(25)
\end{aligned}$$

よって積分値は $-\frac{1}{\pi}$ となる。

$$\underline{I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=2}\frac{\cos z}{z(z-\pi)}dz = -\frac{1}{\pi}} \tag{26}$$

---

(4).

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{e^{\pi z}}{(z-\frac{1}{2}i)^4}dz \tag{27}$$

$f(z) = \frac{e^{\pi z}}{(z-\frac{1}{2}i)^4}$ とする。
この関数は閉曲線 $|z| = 1$ の内側に 4 位の極 $\frac{1}{2}i$ を持つ。
この極における留数を求める。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,\frac{1}{2}i) &= \frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to\frac{1}{2}i}\frac{d^{(3)}}{dz^{(3)}}(z-\frac{1}{2}i)^4 f(z) &(28)\\
&= \frac{1}{3!}\lim_{z\to\frac{1}{2}i}\frac{d^{(3)}}{dz^{(3)}}e^{\pi z} &(29)\\
&= \frac{1}{3!}\lim_{z\to\frac{1}{2}i}\pi^3 e^{\pi z} &(30)\\
&= \frac{1}{3!}\pi^3 e^{\frac{\pi}{2}i} &(31)\\
&= \frac{1}{6}\pi^3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) \quad = \frac{\pi^3}{6}i &(32)
\end{aligned}$$

これにより積分値は $\frac{\pi^3}{6}i$ となる。

$$\underline{I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{e^{\pi z}}{(z-\frac{1}{2}i)^4}dz = \frac{\pi^3}{6}i} \tag{33}$$

---

(5).

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\sin\pi z}{(3z-1)^2}dz \tag{34}$$

$f(z) = \frac{\sin\pi z}{(3z-1)^2}$ とする。

$f(z)$ は閉曲線内に 2 位の極 $\frac{1}{3}$ をもつ。

この極における留数を求める。

$$\mathrm{Res}(f, \frac{1}{3}) = (2-1)!\lim_{z\to\frac{1}{3}}\frac{d}{dz}(z-\frac{1}{3})^2 f(z) \tag{35}$$

$$= \lim_{z\to\frac{1}{3}}\frac{d}{dz}(z-\frac{1}{3})^2\frac{\sin\pi z}{(3z-1)^2} \tag{36}$$

$$= \lim_{z\to\frac{1}{3}}\frac{d}{dz}\frac{\sin\pi z}{9} \tag{37}$$

$$= \lim_{z\to\frac{1}{3}}\frac{\pi\cos\pi z}{9} \tag{38}$$

$$= \frac{\pi}{18} \tag{39}$$

これにより積分値は $\frac{\pi}{18}$ となる。

$$\underline{I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\sin\pi z}{(3z-1)^2}dz = \frac{\pi}{18}} \tag{40}$$