$U = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ ただし、$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$

. . . .

$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ の次元と基底の数は同じであるので、基底を求めればよい。

基底は一次独立でないといけないため、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が一次従属かどうかを調べる必要がある。

. . . .

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ のうち $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は $\boldsymbol{a}_2 = k\boldsymbol{a}_1$ となるスカラー k が存在しない為一次独立である。

$2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ であるので、$a = 5$ のとき、$\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$ となり一次従属である。

$a \neq 5$ のとき、3 つのベクトルは一次独立である。

よって、以下の二種類に分かれる。

1. $a = 5$ のとき、$U = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ であり、2 次元空間
2. $a \neq 5$ のとき、$U = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ であり、3 次元空間

$U = \langle 1, t, t^2 \rangle = \{a_0 1 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ とおく。

1. $W = \{f \in U \mid f(-2) = 0\}$ は U の部分空間であることを示せ。

   . . . .

   W が部分空間であるとは次を満たすときをいう。

   (a) $0 \in W$

   (b) $f_1, f_2 \in W$ に対して $f_1 + f_2 \in W$

   (c) $f \in W,\ k \in \mathbb{R}$ に対して $kf \in W$

   . . . .

   $f(t) = a_0 1 + a_1 t + a_2 t^2$ とする。$(a_0, a_1, a_2) = (0, 0, 0)$ であるとき、$f(t) = 0 \cdot 1 + 0t + 0t^2 = 0$ であるので $f(-2) = 0$ である。つまり、$0 \in W$ である。

   $f_1, f_2 \in W$ とする。このとき、$f_1(-2) = f_2(-2) = 0$ である。$g(t) = f_1(t) + f_2(t)$ とすれば、$g(-2) = f_1(-2) + f_2(-2) = 0 + 0 = 0$ であるので、$f_1 + f_2 \in W$ である。

   $f \in W$、$k \in \mathbb{R}$ とする。このとき、$f(-2) = 0$ である。よって、$kf(-2) = k \cdot 0 = 0$ であるので、$kf \in W$ である。

以上により W は U の部分空間である。

---

2. W の基底と次元を求めよ。

任意の $f \in W$ について $f(-2)=0$ であるので、$f(t)=\alpha(t+2)(t+\beta)$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$ と因数分解できる。ここから $f(t)=\alpha t(t+2)+\alpha\beta(t+2)$ であるので、$\alpha, \alpha\beta$ を別の記号 b_1, b_2 におきかえると、$f(t)=b_1 t(t+2)+b_2(t+2)$ となる。
$t(t+2)$と(t+2)は次数が異なるので実数倍で等しくならない。つまり、t(t+2) と $(t+2)$ は一次独立である。
よって、W は 2 次元空間であり、$W=\langle t(t+2),(t+2)\rangle$ となる。

---

3. $f(t)=2+3t+t^2$ のとき、(2) の基底に関する f の列ベクトル表示を求めよ。

$f(t)=2+3t+t^2$ を因数分解すると $f(t)=(1+t)(2+t)$ である。これを次のように変形する。

$$f(t)=(1+t)(2+t)=(2+t)+t(2+t)=\begin{pmatrix}(2+t) & t(2+t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \tag{1}$$

よって、$W=\langle t(t+2),(t+2)\rangle$ に対し、$f(t)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ となる。
