
K 体

V K-線形空間

$f : V \to V$ K-線形写像

$f \circ f = f$ ならば、$V = \operatorname{Ker} f \bigoplus \operatorname{Im} f$ となることを示せ。

…………………………………………………………………………………

準同型定理より

$$V/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f \tag{1}$$

これより $\dim_K V = \dim_K \operatorname{Ker} f + \dim_K \operatorname{Im} f$

$f \circ f = f$ より $f(f(v)) = f(v)$ である。この為、写像 f を $\operatorname{Im} f$ に制限した写像は恒等写像である。

$$f\mid_{\operatorname{Im} f} : \operatorname{Im} f \to \operatorname{Im} f, \quad f(v) \mapsto f(v) \tag{2}$$

この為、$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ であることが分かる。

つまり、$V = \operatorname{Ker} f \bigoplus \operatorname{Im} f$ である。

任意の集合 I に対し、

$$\prod_{i \in I} K \cong \operatorname{Hom}_K(\bigoplus_{i \in I} K, K) \tag{3}$$

を示せ。

…………………………………………………………………………………

$\prod_{i \in I} K$ と $\operatorname{Hom}_K(\bigoplus_{i \in I} K, K)$ は線形空間である。

$h \in \operatorname{Hom}_K(\bigoplus_{i \in I} K, K)$ は線形写像であり、$\bigoplus_{i \in I} K$ の元との内積を取る $\prod_{i \in I} K$ の元に対応する。$\bigoplus_{i \in I} K$ の成分は有限個を除いて全て 0 であるので、$\prod_{i \in I} K$ の元との内積は有限和となり、K の元となる。

この為、次の線形写像 f は全射となる。

$$f : \prod_{i \in I} K \to \operatorname{Hom}_K(\bigoplus_{i \in I} K, K) \tag{4}$$

$\operatorname{Hom}_K(\bigoplus_{i \in I} K, K)$ の零元は $\bigoplus_{i \in I} K$ 上の零写像であるので、$\operatorname{Ker} f$ は $\prod_{i \in I} K$ の零元のみとなる。この為、f は単射でもある。

よって、

$$\prod_{i \in I} K \cong \mathrm{Hom}_K(\bigoplus_{i \in I} K, K) \tag{5}$$

である。

整数 m を $m \geq 0$ とする。

1. $\mathrm{Ker}\, f^m \subset \mathrm{Ker}\, f^{m+1}$ (ただし、f^0 は恒等写像)
2. $\mathrm{Ker}\, f^m = \mathrm{Ker}\, f^{m+1}$ ならば、${}^\forall p \geq 0$ に対して $\mathrm{Ker}\, f^m = \mathrm{Ker}\, f^{m+p}$
3. $n = \dim_K V$ のとき、$\mathrm{Ker}\, f^n = \mathrm{Ker}\, f^{n+1}$

. . . .

1. $\mathrm{Ker}\, f^0 = \{0\}$ であるので、$\mathrm{Ker}\, f^0 \subset \mathrm{Ker}\, f^1$ である。
   ${}^\forall x \in \mathrm{Ker}\, f^m$ の時、$f^m(x) = 0$ である。$f^{m+1}(x) = f(f^m(x)) = f(0) = 0$ となるので、$x \in \mathrm{Ker}\, f^{m+1}$。
   よって、$\mathrm{Ker}\, f^m \subset \mathrm{Ker}\, f^{m+1}$ である。
2. $\mathrm{Ker}\, f^m = \mathrm{Ker}\, f^{m+1}$ であるので、準同型定理より

   $$\mathrm{Im}\, f^m \cong V/\mathrm{Ker}\, f^m = V/\mathrm{Ker}\, f^{m+1} \cong \mathrm{Im}\, f^{m+1} \tag{6}$$

   となる。
   線形写像 $f : V \to V$ を $\mathrm{Im}\, f^m$ に制限すると

   $$f|_{\mathrm{Im}\, f^m} : \mathrm{Im}\, f^m \to \mathrm{Im}\, f^{m+1} \tag{7}$$

   は同型写像である。同様に f を $\mathrm{Im}\, f^{m+1}$ に制限すると

   $$\mathrm{Im}\, f^{m+1} \cong f(\mathrm{Im}\, f^{m+1}) = \mathrm{Im}\, f^{m+2} \tag{8}$$

   となり、

   $$V/\mathrm{Ker}\, f^{m+1} \cong \mathrm{Im}\, f^{m+1} \cong \mathrm{Im}\, f^{m+2} \cong V/\mathrm{Ker}\, f^{m+2} \tag{9}$$

   となる。
   $\mathrm{Ker}\, f^{m+1} \subset \mathrm{Ker}\, f^{m+2}$ であるので、$\mathrm{Ker}\, f^{m+1} = \mathrm{Ker}\, f^{m+2}$ である。
   同様の議論を繰り返すことにより

   $$\mathrm{Ker}\, f^m = \mathrm{Ker}\, f^{m+p} \tag{10}$$

   が得られる。

3. Ker の列

$$\operatorname{Ker} f^0 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker} f^m \subset \operatorname{Ker} f^{m+1} \subset \cdots \tag{11}$$

は $\operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} f^{n+1}$ となる n があれば、それ以降全て等しくなる。

$$\operatorname{Ker} f^0 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} f^{m+1} = \cdots \tag{12}$$

$\operatorname{Ker} f^m$ は V の部分空間であるので $\dim_K \operatorname{Ker} f^m \leq \dim_K V$ である。
$\operatorname{Ker} f^m \neq \operatorname{Ker} f^{m+1}$ であれば $\dim_K \operatorname{Ker} f^m < \dim_K \operatorname{Ker} f^{m+1}$ である。
これにより $n = \dim_K V$ 以降は全て等しくなる。

$$\operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} f^{n+1} = \operatorname{Ker} f^{n+2} = \cdots \tag{13}$$

---

1. 複素 2 次正方行列 A について、$A \neq 0$ かつ $A^2 = 0$ をみたすものは $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と相似であることを示せ。
2. 複素 3 次正方行列 A について、$A^2 \neq 0$ かつ $A^3 = 0$ をみたすものは $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と相似であることを示せ。

··

1. あるベクトル $\boldsymbol{p} \in \mathbb{C}^2$ が存在し $A\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ とする。
2 つのベクトル $\boldsymbol{p}$, $A\boldsymbol{p}$ は次のようにして一次独立である事がわかる。
次の式に A をかける。

$$a_0\boldsymbol{p} + a_1 A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0} \quad (a_0, a_1 \in \mathbb{C}) \tag{14}$$

これにより $a_0 A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ となり、$a_0 = 0$ が分かる。これにより $a_1 = 0$ となるので、$\boldsymbol{p}$, $A\boldsymbol{p}$ は一次独立である。
そこでこのベクトルを並べて行列 P を作る。

$$P = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{p} & \boldsymbol{p} \end{pmatrix} \tag{15}$$

列ベクトルが独立なので P は正則行列である。

$$AP = A\begin{pmatrix} A\boldsymbol{p} & \boldsymbol{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & A\boldsymbol{p} \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$= \begin{pmatrix} A\boldsymbol{p} & \boldsymbol{p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

P^{-1} をかけることにより $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

これにより A は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と相似である。

2. $A^2\boldsymbol{p} \neq 0$ となるベクトル $\boldsymbol{p} \in \mathbb{C}^3$ を取ってくる。
   3 つのベクトル $\boldsymbol{p}$, $A\boldsymbol{p}$, $A^2\boldsymbol{p}$ について

$$a_0\boldsymbol{p} + a_1 A\boldsymbol{p} + a_2 A^2\boldsymbol{p} = \mathbf{0} \tag{18}$$

   を考える。A^2 をかけると $a_0A^2\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$ となり $a_0 = 0$ が得られる。A をかけて $a_0 = 0$ を当てはめると $a_1A^2\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$ となり $a_1 = 0$ が得られる。$a_0 = a_1 = 0$ より $a_2 = 0$ となり、ベクトル $\boldsymbol{p}$, $A\boldsymbol{p}$, $A^2\boldsymbol{p}$ は一次独立であることが分かる。このベクトルを用いて正則行列 P を次のように定める。

$$P = \begin{pmatrix} A^2\boldsymbol{p} & A\boldsymbol{p} & \boldsymbol{p} \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} AP =& A\begin{pmatrix} A^2\boldsymbol{p} & A\boldsymbol{p} & \boldsymbol{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A^2\boldsymbol{p} & A\boldsymbol{p} \end{pmatrix} && (20) \\ =& \begin{pmatrix} A^2\boldsymbol{p} & A\boldsymbol{p} & \boldsymbol{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (21) \end{aligned}$$

   これにより $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるので A は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に相似である。
