1. A を n 次実対称行列とする。A の固有値が全て正の場合、A の全ての対角成分は正となることを示せ。
2. K を体とし、$n > 0$ を整数とする。$V \subset K^n$ を部分空間、$K^n \times K^n \to K$ を $(x, y) = {}^t xy$(標準内積) で定義する。この時、

$$V^{\perp} = \{x \in K^n \mid {}^{\forall} v \in V,\ (x, v) = 0\} \tag{1}$$

(a) $n = 2$ かつ $\dim_K V = 1$ の時、$V = V^{\perp}$ となる例をあげよ。

(b) $\dim_K V + \dim_K V^{\perp} = n$ を示せ。

対称行列 $\Leftrightarrow$ ある直交行列 P にて対角化可能

P が直交行列 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $P^{-1} = {}^t P$

A は対称行列とする。

定義　A が正定値 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し、${}^t \boldsymbol{x} A \boldsymbol{x} > 0$

A が正定値 $\Leftrightarrow A$ の固有値は全て正

A が正定値 $\Rightarrow A$ の対角成分は全て正

....

直交補空間

n 次元ベクトル空間 V の部分空間 U について次の $U^{\perp}$ を直交補空間という。

$$U^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in V \mid {}^{\forall} \boldsymbol{u} \in U,\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} = 0\} \tag{2}$$

性質

1. $V = U \oplus U^{\perp}$
2. $n = \dim U + \dim U^{\perp}$
3. $U \cap U^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$

---

1. A は対称行列なので、直交行列 P を用いて対角化可能である。

$$ {}^t PAP = \Lambda, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\lambda_i \text{は固有値}) \tag{3}$$

${}^{\forall} \boldsymbol{x}$ に対し、$\boldsymbol{y} = P^{-1} \boldsymbol{x}$ とする。つまり、$\boldsymbol{x} = P \boldsymbol{y}$ となる。

この時、${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を計算する。

$$ {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t(P\boldsymbol{y})AP\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{y}{}^tPAP\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{y}\Lambda\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i|y_i|^2 > 0 \tag{4} $$

y_i はベクトル $\boldsymbol{y}$ の i 成分である。固有値 λ_i は全て正である為、${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} > 0$ である。

$\boldsymbol{x}$ を第 i 成分のみ 1 でそれ以外が 0 のベクトルとする。この時、${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = a_{ii}$ となるので、式 (4) より $a_{ii} > 0$ である。

2. (a) $V \cap V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ より、$\dim_K V = 1$ かつ $V = V^{\perp}$ となるものは存在しない。

   もし、$V = V^{\perp}$ が同型という意味であるとする。

   同型であれば、$V \simeq V^{\perp}$ とか $V \cong V^{\perp}$ とか $V \approx V^{\perp}$ で表す。代数だと $V \cong V^{\perp}$ と書くことが多い。

$$ V = \{(k,0) \in K^2 \mid k \in K\} \tag{5} $$
$$ V^{\perp} = \{(0,k) \in K^2 \mid k \in K\} \tag{6} $$

   とすれば $\dim_K V = 1$ であり、$V \cong V^{\perp} \cong K$ である。

   (b) $\dim_K V + \dim_K V^{\perp} = n$

   $r = \dim_K V$ とする。

   V の正規直交基底を $v_1, \ldots, v_r$ とする。この基底に $n - r$ 個の基底を追加し K^n の基底とする。直交化法により K^n の正規直交基底を $v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$ とする。

   追加して基底 $v_{r+1}, \ldots, v_n$ を基底として出来る部分空間を $V' = \langle v_{r+1}, \ldots, v_n \rangle$ とすると、V' の任意の元は V の元と直交する為、$V' \subset V^{\perp}$ となる。

   逆に $V' \supset V^{\perp}$ を示す。

   ${}^{\forall}\boldsymbol{v} \in V^{\perp}$ とする。$\boldsymbol{v} \in K^n$ より $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$ と基底を用いて表せる。$\boldsymbol{v} \in V^{\perp}$ より $v_i \in V$ $(i = 1, \ldots, r)$ との内積は 0 である。

$$ 0 = v_i \cdot \boldsymbol{v} = v_i \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i v_i = k_i \tag{7} $$

   $k_i = 0$ $(i = 1, \ldots, r)$ である為、$\boldsymbol{v} \in V'$ となり、$V' \supset V^{\perp}$ である。

   これにより $\dim_K V^{\perp} = n - r$ となることが分かる。