(1). 行列式が 1 の 2 次直交行列を全て求めよ。

(2). ユニタリ行列の固有値の絶対値は 1 であることを証明せよ。

直交行列

行列 A について、逆行列 A^{-1} と転置行列 ${}^tA$ が等しい時、A を直交行列をいう。${}^tAA = E$

unitary(ユニタリ) **行列**

行列 A について、逆行列 A^{-1} と随伴行列 $A^*(= {}^t\bar{A})$ が等しい時、A をユニタリ行列をいう。$A^*A = E$

---

(1). 行列式が 1 の 2 次直交行列を全て求めよ。

行列 A を次のように置く。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1}$$

行列式が 1 なので、$|A| = ad - bc = 1$ である。

逆行列 A^{-1} と転置行列 ${}^tA$ は次のようになる。

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \tag{2}$$

A は直交行列であるから $A^{-1} = {}^tA$ である。これより次の 4 つの式を得る。

$$d = a, \quad -c = c, \quad -b = b, \quad a = d \tag{3}$$

つまり、$a = d,\ b = c = 0$ である。また、行列式が 1 なので、$ad = 1$ となり、$a = d = \pm 1$ である。

よって、行列式が 1 となる直交行列は次の 2 つである。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

....

(2). ユニタリ行列の固有値の絶対値は 1 であることを証明せよ。

行列 A をユニタリ行列とし、A の固有値を λ、固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする。

固有値の定義より $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ である。ベクトルの大きさを取ると次のように

なる。

$$|A\boldsymbol{x}| = |\lambda\boldsymbol{x}| = |\lambda||\boldsymbol{x}| \tag{5}$$

この左辺は 2 乗すると次のように変形できる。

$$\begin{aligned} |A\boldsymbol{x}|^2 &= (A\boldsymbol{x})^* A\boldsymbol{x} && (6) \\ &= \boldsymbol{x}^* A^* A\boldsymbol{x} && (7) \\ &= \boldsymbol{x}^* E\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|^2 && (8) \end{aligned}$$

ここから $|\lambda|^2|\boldsymbol{x}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2$ が得られる。これにより $|\lambda| = 1$ となる。