1. 次の行列式の値を求めよ。

(a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \times 3 - 2 \times (-5) = 7 \tag{1}$$

(b) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

3 列目を 2 倍して 1 列目に加え、2 列目には 1 倍して加えると 1 行目の 2 つの成分が 0 になる。これを利用し、2×2 の行列式に変形し計算を行う。

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

$$=(-2) \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \tag{3}$$

$$=(-2) \times (-1) \times 5 = 10 \tag{4}$$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

4 行目を 2 倍し他の行から引くと 1 列目に 0 が 3 つ並ぶのでこれを利用し 3×3 の行列式に変形する。

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & -6 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & -6 & 5 \end{vmatrix} \tag{5}$$

3 列目を 5 倍し 2 列めに加え、2×2 の行列式に変形する。

$$-\begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & -6 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -14 & -3 \\ 6 & 19 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -14 \\ 6 & 19 \end{vmatrix} \tag{6}$$

ここから行列式は次のように求められる。

$$-\begin{vmatrix} 4 & -14 \\ 6 & 19 \end{vmatrix} = -(4 \times 19 - (-14) \times 6) = -160 \tag{7}$$

---

2. 正方行列 A が ${}^tAA = E$ を満たす時、$|A| = \pm 1$ を示せ。ただし、$|{}^tA| = |A|$ は用いてもよい。

${}^tAA = E$ より $|{}^tAA| = |E|$ である。$|E| = 1$ であるので、$|{}^tAA| = 1$ である。
$|{}^tA| = |A|$ より $|{}^tAA| = |{}^tA||A| = |A|^2$ であるので、$|A| = \pm 1$ である。

---

3. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{vmatrix}$ について、第 1 列に関する余因子展開を用いて因数分解せよ。

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{vmatrix} =& a\begin{vmatrix} b & a \\ a & a \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} b & b \\ a & a \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} \quad (8)\\
=& a(ba-a^2)-a(ba-ba)+b(ba-b^2) \quad (9)\\
=& a^2(b-a)+b^2(a-b) \quad (10)\\
=& (b-a)(a+b)(a-b) \quad (11)
\end{aligned}
$$

---

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ が正則であることを確かめ、余因子行列を用いて逆行列を求めよ。

$|A| = -42 \neq 0$ より A は正則である。そこで逆行列を余因子行列を用いて求める。

$$
\begin{aligned}
A^{-1} =& \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \quad (12)\\
=& \frac{1}{-42} \begin{pmatrix} -14 & 10 & -8 \\ 7 & -17 & 1 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad (13)\\
=& \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{21} & \frac{4}{21} \\ -\frac{1}{6} & \frac{17}{42} & -\frac{1}{42} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{42} & -\frac{5}{42} \end{pmatrix} \quad (14)
\end{aligned}
$$

---

5. 以下の問いに答えよ。

(a) 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形独立であることの定義を述べよ。

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形独立であるとは、3 つのスカラー s_1, s_2, s_3 に対し、$s_1\boldsymbol{a}_1 + s_2\boldsymbol{a}_2 + s_3\boldsymbol{a}_3 = 0$ である時、$(s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 0)$ となる場合をいう。

(b) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = 0$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみしか解を持たないための必要十分条件を、A の行列式に関する等式で述べよ。

$A\boldsymbol{x} = 0$ の解が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみしかないということは行列 A の列ベクトルが線形独立である。行列 A の列ベクトルが線形独立であれば A は正則であるので $|A| \neq 0$ である。

逆に $|A| \neq 0$ であれば、A は正則である。A が正則であれば A の列ベクトルが線形独立である。A の列ベクトルが線形独立であれば、$A\boldsymbol{x} = 0$ の解が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみしかないことになる。

(c) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ が線形独立か線形従属か判定せよ。

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を列に並べて行列 A を作る。

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad (15)
$$

$|A| = 0$ であるため、行列 A は正則ではなく、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は線形従属である。

---

6. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ の表す線形変換を f とする時、$f \circ f$ により点 $(1, -2)$ が移る点を以下のように求めよ。

(a) $f(1, -2)$ が移る点を求めそれを (x, y) とした時、さらに $f(x, y)$ を求めよ。

$$f(1,-2)=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \tag{16}$$

$$f(1,1)=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} \tag{17}$$

(b) $f\circ f$ を表す行列が A^2 であることから、A^2 を計算し $(1,-2)$ が移る点を求めよ。

$$A^2=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&5\\25&9\end{pmatrix} \tag{18}$$

$$(f\circ f)(1,-2)=\begin{pmatrix}14&5\\25&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} \tag{19}$$

---

7. 行列 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&-4&-6\\-2&4&6\end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

(a) 行列 A の固有値を求めよ。

固有値 λ を求めるために固有方程式 $|A-\lambda E|=0$ を解く。

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\3&-4-\lambda&-6\\-2&4&6-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2 \tag{20}$$

これより $\lambda=-1,2$

(b) 行列 A の固有ベクトルを求めよ。

固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は固有値 λ に対し、$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ を満たす。$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ とする。

固有値が $\lambda=-1$ の時固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $(A+E)\boldsymbol{x}=0$ を満たすので、

$$(A+E)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2&2&2\\3&-3&-6\\-2&4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\longrightarrow\begin{cases}2x_1+2x_2+2x_3=0\\3x_1-3x_2-6x_3=0\\-2x_1+4x_2+7x_3=0\end{cases} \tag{21}$$

と連立方程式を得る。これを解くと次の式が得られる。

$$3x_1+x_2=0,\quad 2x_1-x_3=0 \tag{22}$$

これを満たす解空間は

$$\left\{x_1\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\;\middle|\;x_1\in\mathbb{R}\right\} \tag{23}$$

で固有ベクトルは $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$

固有値が $\lambda=2$ の時

$$(A-2E)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-1&2&2\\3&-6&-6\\-2&4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\longrightarrow\begin{cases}-x_1+2x_2+2x_3=0\\3x_1-6x_2-6x_3=0\\-2x_1+4x_2+4x_3=0\end{cases} \tag{24}$$

となるので、$-x_1+2x_2+2x_3=0$ を満たせばいい。この為、解空間は次のように表せる。

$$\left\{ x_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; x_2\in\mathbb{R},\ x_3\in\mathbb{R} \right\} \tag{25}$$

固有値 -1 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$、固有値 2 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

(c) 正則行列 P を $P^{-1}AP$ が対角行列になるように定め、その対角行列を答えよ。

……………………………………………………………………………………

固有ベクトルを列ベクトルとして並べ行列 P を次のように作る。

$$P=\begin{pmatrix}1&2&2\\-3&1&0\\2&0&1\end{pmatrix} \tag{26}$$

この時、対角化行列は次のようになる。

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} \tag{27}$$

---

8. 対称行列 A の異なる固有値に対応する固有ベクトルが、互いに直交することを示せ。

……………………………………………………………………………………

対称行列 A の固有値を λ,μ とし、$\lambda\neq\mu$ とする。固有値 λ,μ に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_\lambda,\boldsymbol{x}_\mu$ とおく。固有ベクトルの内積が 0 になることを示す。つまり、$\boldsymbol{x}_\lambda\cdot\boldsymbol{x}_\mu=0$ を示せばよい。

$$\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda\cdot\boldsymbol{x}_\mu)=\lambda{}^t\boldsymbol{x}_\lambda\boldsymbol{x}_\mu={}^t(\lambda\boldsymbol{x}_\lambda)\boldsymbol{x}_\mu={}^t(A\boldsymbol{x}_\lambda)\boldsymbol{x}_\mu={}^t\boldsymbol{x}_\lambda{}^tA\boldsymbol{x}_\mu \tag{28}$$

$$={}^t\boldsymbol{x}_\lambda A\boldsymbol{x}_\mu={}^t\boldsymbol{x}_\lambda\mu\boldsymbol{x}_\mu=\mu{}^t\boldsymbol{x}_\lambda\boldsymbol{x}_\mu=\mu(\boldsymbol{x}_\lambda\cdot\boldsymbol{x}_\mu) \tag{29}$$

この計算より $\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda\cdot\boldsymbol{x}_\mu)=\mu(\boldsymbol{x}_\lambda\cdot\boldsymbol{x}_\mu)$ が得られる。そこで移項してまとめると $(\lambda-\mu)(\boldsymbol{x}_\lambda\cdot\boldsymbol{x}_\mu)=0$ である。$\lambda\neq\mu$ より $\boldsymbol{x}_\lambda\cdot\boldsymbol{x}_\mu=0$ となり固有ベクトル $\boldsymbol{x}_\lambda,\boldsymbol{x}_\mu$ が直交することがわかる。

以下、発展課題

A. 転置行列と行列式に関する次の性質

(a) $|{}^tA|=|A|$

(b) ${}^t(cA)=c({}^tA)$

(c) ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$

を用いて、A の固有値と ${}^tA$ の固有値が等しいことを示せ。

ヒント. 方程式 $|{}^tA-\lambda E|=0$ の解と方程式 $|A-\lambda E|=0$ の解が等しいことを示せばよい。つまり、$|{}^tA-\lambda E|=|A-\lambda E|$ を示せばよい。

……………………………………………………………………………………

行列 A の固有値を λ とする。

$${}^tA-\lambda E={}^tA-{}^t(\lambda E)={}^t(A-\lambda E) \tag{30}$$

行列式は転置しても同じなので、

$$|{}^t(A-\lambda E)|=|A-\lambda E| \tag{31}$$

であるため

$$|{}^tA-\lambda E|=|A-\lambda E|=0 \tag{32}$$

である、A の固有値は ${}^tA$ の固有値であることがわかる。同様に ${}^tA$ の固有値は ${}^{tt}A=A$ の固有値であることがわかる。よって、A と ${}^tA$ の固有値は一致する。

B.　$B = P^{-1}AP$ である時、B の固有値と A の固有値が等しくなることを示せ。

行列 A の固有方程式 $|A-\lambda E| = 0$ に対し、正則行列 P とその逆行列 P^{-1} を両側からかける。

$$|P^{-1}||A-\lambda E||P| = |P^{-1}(A-\lambda E)P| = |P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda E)P| = |P^{-1}AP - \lambda E| = |B-\lambda E| \tag{33}$$

これにより A の固有値 λ に対し、$|B-\lambda E| = 0$ である。

また逆に $|B-\lambda E| = 0$ を満たす λ は $|P| \neq 0, |P^{-1}| \neq 0$ より $|A-\lambda E| = 0$ であることがわかる。

よって、$B = P^{-1}AP$ の固有値と A の固有値が等しくなる。

C.　行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ の固有値が $\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta$ となることを示せ。

固有方程式 $|A-\lambda E| = 0$ を計算すると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} \cos\theta-\lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda \end{vmatrix} = (\cos\theta-\lambda)^2 + \sin^2\theta = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0 \tag{34}$$

この λ についての 2 次方程式を解の公式で解くと

$$\lambda = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta \tag{35}$$