1. **—ユークリッド空間の直積位相—**

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{d_n})$ は $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}^n_{d_1})$ と同値であることを示せ。

……………………………………………………………………

距離関数 d_1, d_n は次のような関数である。

$$d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \sqrt{(x-y)^2} = |x-y| \tag{1}$$

$$d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \tag{2}$$

位相 $\mathcal{O}_{d_1}, \mathcal{O}_{d_n}$ はそれぞれの距離関数より導入される位相である。
$\mathcal{O}^n_{d_1} = \mathcal{O}_{d_1} \times \cdots \times \mathcal{O}_{d_1}$ は $\mathcal{O}_{d_1}$ の開集合の直積を要素とする。

……………………………………………………………………

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ とする。ある ε に対して、$x \in \mathbb{R}^n$ の ε-近傍 $N_{d_n}(x, \varepsilon)$ と $x_i \in \mathbb{R}$ の ε-近傍 $N_{d_1}(x_i, \varepsilon)$ において次のような包含関係が成り立つ。

$$N_{d_n}(x, \varepsilon) \subset N_{d_1}(x_1, \varepsilon) \times \cdots \times N_{d_1}(x_n, \varepsilon) \tag{3}$$

$N_{d_n}(x, \varepsilon)$ は中心 x で半径 ε の球の内部であり、$N_{d_1}(x_i, \varepsilon)$ は開区間 $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ を指す。
また、$N_{d_n}(x, \varepsilon)$ の半径を広げ $N_{d_n}(x, \sqrt{n}\varepsilon)$ とすると次のような包含関係が成り立つ。

$$N_{d_1}(x_1, \varepsilon) \times \cdots \times N_{d_1}(x_n, \varepsilon) \subset N_{d_n}(x, \sqrt{n}\varepsilon) \tag{4}$$

2 つをまとめると次のようになる。

$$N_{d_n}(x, \varepsilon) \subset N_{d_1}(x_1, \varepsilon) \times \cdots \times N_{d_1}(x_n, \varepsilon) \subset N_{d_n}(x, \sqrt{n}\varepsilon) \tag{5}$$

$U \subset \mathbb{R}^n$ について任意の U の点の近傍が U に含まれる時 U は開集合である。上の包含関係より次の関係がわかる。

$$U \text{ は } (\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{d_n}) \text{ で開集合} \Rightarrow U \text{ は } (\mathbb{R}^n, \mathcal{O}^n_{d_1}) \text{ で開集合} \tag{6}$$

$$\Rightarrow U \text{ は } (\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{d_n}) \text{ で開集合} \tag{7}$$

よって、$(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}^n_{d_1})$ と $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{d_n})$ の開集合が一致する事がわかる。

---

2. **—連続単射写像—**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とする。この時、$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $F : x \mapsto (x, f(x))$ とすると、F は単射な連続写像であることを示せ。

……………………………………………………………………

$x, y \in \mathbb{R}$ が $x \neq y$ とする。$x \neq y$ であれば $(x, f(x)) \neq (y, f(y))$ であるので、写像 F は単射である。
射影 p_i を次のように定める。

$$p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (a, b) \mapsto a, \qquad p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (a, b) \mapsto b \tag{8}$$

これらの射影と F の合成は次のように連続写像となる。

$$p_1 \circ F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \qquad p_2 \circ F = f \tag{9}$$

$\mathbb{R}^2$ の開集合は開集合 $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}$ の積 $U_1 \times U_2$ を開基とする。写像 F が連続写像であるためには、$F^{-1}(U_1 \times U_2)$ が開集合であることを示せばよい。

$$\begin{aligned}
F^{-1}(U_1 \times U_2) =& F^{-1}(p_1^{-1}(U_1) \cap p_2^{-1}(U_2)) & (10)\\
=& F^{-1}(p_1^{-1}(U_1)) \cap F^{-1}(p_2^{-1}(U_2)) & (11)\\
=& (p_1 \circ F)^{-1}(U_1) \cap (p_2 \circ F)^{-1}(U_2) & (12)\\
=& \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) & (13)
\end{aligned}$$

$\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{-1}(U_1),\ f^{-1}(U_2)$ はそれぞれ開集合であるので、$F^{-1}(U_1 \times U_2)$ は開集合となり、F は連続写像であることがわかる。

---

3. **—直積位相—**

X, Y を位相空間とし、$X \times Y$ に直積位相を与えておく。$X \times Y$ に対して B が $(x, y) \in X \times Y$ の近傍であるとは、ある $x \in X$ の開集合 U と $y \in Y$ の開集合 V が存在して、$U \times V \subset B \subset X \times Y$ となることを示せ。

……………………………………………………………………

B が $(x, y) \in X \times Y$ の近傍であれば、$(x, y) \in O \subset B \subset X \times Y$ となる開集合 O が存在する。
$X \times Y$ に直積位相が入っているため、開集合 O は開基 $U \times V$ が存在し $(x, y) \in U \times V \subset O$ を満たす。この U, V はそれぞれ X, Y の開集合であり、$x \in U \subset X,\ y \in V \subset Y$ である。
つまり、次のような関係がある。

$$(x, y) \in U \times V \subset O \subset B \subset X \times Y \qquad (x \in U,\ y \in V) \tag{14}$$
