定義

曲率

パラメータ表示された曲線 $\gamma(s)$ と接ベクトル $\gamma'(s)$、法線ベクトル $n(s)$ が次のように表される。

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)), \qquad \gamma'(s) = (x'(s), y'(s)), \qquad n(s) = (-y'(s), x'(s)) \tag{1}$$

$\gamma'(s)$ が単位接ベクトル ($|\gamma'(s)| = 1$) であれば、$n(s)$ は単位法線ベクトル ($|n(s)| = 1$) である。

この時、次を満たす $\kappa(s)$ を曲率関数という。

$$\gamma''(s) = \kappa(s)n(s) \tag{2}$$

曲率の求め方

1. 単位接ベクトルを求める
2. 単位接ベクトルを微分する
3. このベクトルが単位法線ベクトルのスカラー倍になっている
4. このスカラーが曲率である

パラメータ表示された曲線 $\gamma(t) = (\gamma_x(t), \gamma_y(t))$ に対して微分を求める。

$$\gamma'(t) = (\gamma'_x(t), \gamma'_y(t)), \quad \gamma''(t) = (\gamma''_x(t), \gamma''_y(t)) \tag{3}$$

これを列に並べた行列式

$$\det(\gamma'(t), \gamma''(t)) = \begin{vmatrix} \gamma'_x(t) & \gamma''_x(t) \\ \gamma'_y(t) & \gamma''_y(t)) \end{vmatrix} \tag{4}$$

を用いて曲率 $\kappa(t)$ は次のように求めることが出来る。

$$\kappa(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{|\gamma'(t)|^3} \tag{5}$$

問題

1. 次の平面曲線の曲率関数 $\kappa(t)$ を求めよ。
   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(t) = (a\cos t, b\sin t), \quad a, b > 0$
   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(t) = (t, \cosh t)$
   (c) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2, f(t) = (\frac{\cos t}{t}, \frac{\sin t}{t})$

. . . .

（a）$f(t)=(a\cos t, b\sin t)$ より、$f'(t), f''(t), |f'(t)|$ を求める。

$$f'(t)=(-a\sin t, b\cos t),\quad f''(t)=(-a\cos t,-b\sin t) \tag{6}$$

$$|f'(t)|=(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

これを用いて $\det(f', f'')$ を求める。

$$\det(f', f'')=\begin{vmatrix}-a\sin t & -a\cos t\\ b\cos t & -b\sin t\end{vmatrix}=ab\sin^2 t+ab\cos^2 t=ab \tag{8}$$

よって、曲率 $\kappa(t)$ は次のようになる。

$$\kappa(t)=\frac{\det(f', f'')}{|f'|^3}=\frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \tag{9}$$

（b）$f(t)=(t,\cosh t)$ より $f'(t), f''(t), |f'(t)|$ を求める。

$$f'(t)=(1,\sinh t),\ f''(t)=(0,\cosh t),\ |f'(t)|=\frac{1}{2}(e^{2t}+e^{-2t}+2)^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

これを用いて $\det(f', f'')$ を求める。

$$\det(f', f'')=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \sinh t & \cosh t\end{vmatrix}=\cosh t \tag{11}$$

よって、曲率 $\kappa(t)$ は次のようになる。

$$\kappa(t)=\frac{\det(f', f'')}{|f'|^3}=\frac{8\cosh t}{(e^{2t}+e^{-2t}+2)^{\frac{3}{2}}} \tag{12}$$

（c）$f(t)=(\frac{\cos t}{t},\frac{\sin t}{t})$ より $f'(t), f''(t), |f'(t)|$ を求める。

$$f'(t)=\left(-\frac{\sin t}{t}-\frac{\cos t}{t^2},\frac{\cos t}{t}-\frac{\sin t}{t^2}\right) \tag{13}$$

$$f''(t)=\left(-\frac{\cos t}{t}+\frac{2\sin t}{t^2}+\frac{2\cos t}{t^3},-\frac{\sin t}{t}-\frac{2\cos t}{t^2}-\frac{2\sin t}{t^3}\right) \tag{14}$$

$$|f'(t)|=\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{t^2}(t^2+1)^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

これを用いて $\det(f', f'')$ を求める。

$$\det(f', f'')=\begin{vmatrix}-\frac{\sin t}{t}-\frac{\cos t}{t^2} & -\frac{\cos t}{t}+\frac{2\sin t}{t^2}+\frac{2\cos t}{t^3}\\ \frac{\cos t}{t}-\frac{\sin t}{t^2} & -\frac{\sin t}{t}-\frac{2\cos t}{t^2}-\frac{2\sin t}{t^3}\end{vmatrix} \tag{16}$$

$$=\frac{1}{t^5}(t^3+4t\sin^2 t+4\sin t\cos t) \tag{17}$$

よって、曲率 $\kappa(t)$ は次のようになる。

$$\kappa(t)=\frac{\det(f',f'')}{|f'|^3}=\frac{t(t^3+4t\sin^2 t+4\sin t\cos t)}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} \tag{18}$$

…………………………………………………………………………

(a) $f'(t)=(-a\sin t,b\cos t)$ であるので、$|f'(t)|=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}$ である。単位接ベクトルと単位法線ベクトルは

$$\frac{1}{|f'(t)|}f'(t)=\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}(-a\sin t,b\cos t) \tag{19}$$

$$n(t)=\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}(-b\cos t,-a\sin t) \tag{20}$$

である。

$$\left(\frac{1}{|f'(t)|}f'(t)\right)' \tag{21}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}f''(t)-\frac{\sin t\cos t(a^2-b^2)}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}f'(t) \tag{22}$$

$$=\frac{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)f''(t)-\sin t\cos t(a^2-b^2)f'(t)}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \tag{23}$$

$f''(t)=(-a\cos t,-b\sin t)$ であるので、式 (23) の分子の各成分を計算すると

$$(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)(-a\cos t)-\sin t\cos t(a^2-b^2)(-a\sin t)=-ab^2\cos t \tag{24}$$

$$(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)(-b\sin t)-\sin t\cos t(a^2-b^2)(b\cos t)=-a^2b\sin t \tag{25}$$

$$\left(\frac{1}{|f'(t)|}f'(t)\right)'=\frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}(-b\cos t,-a\sin t) \tag{26}$$

(b) $f(t)=(t,\cosh t)$ より $f'(t)=(1,\sinh t)$, $f''(t)=(0,\cosh t)$ である。また、$|f'(t)|=\frac{1}{2}\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2}$ であるため単位接ベクトルは次のようになる。

$$\frac{1}{|f'(t)|}f'(t)=\frac{2}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2}}(1,\sinh t) \tag{27}$$

$$\left(\frac{1}{|f'(t)|}f'(t)\right)'=\frac{2}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2}}f''(t)-\frac{2e^{2t}-2e^{-2t}}{(e^{2t}+e^{-2t}+2)^{\frac{3}{2}}}f'(t) \tag{28}$$

$$=\frac{2(e^{2t}+e^{-2t}+2)f''(t)-(2e^{2t}-2e^{-2t})f'(t)}{(e^{2t}+e^{-2t}+2)^{\frac{3}{2}}} \tag{29}$$

$$2(e^{2t}+e^{-2t}+2)(0)-(2e^{2t}-2e^{-2t})(1) \tag{30}$$
$$=-2(e^t+e^{-t})(e^t-e^{-t})=-8\sinh t\cosh t \tag{31}$$
$$2(e^{2t}+e^{-2t}+2)(\cosh t)-(2e^{2t}-2e^{-2t})(\sinh t) \tag{32}$$
$$=(e^{2t}+e^{-2t}+2)(e^t+e^{-t})-(e^{2t}-e^{-2t})(e^t-e^{-t})=4(e^t+e^{-t}) \tag{33}$$

$$\left(\frac{1}{|f'(t)|}f'(t)\right)' = \frac{4(e^t+e^{-t})}{(e^{2t}+e^{-2t}+2)^{\frac{3}{2}}}(-\sinh t,1) \tag{34}$$
$$= \frac{8\cosh t}{(e^{2t}+e^{-2t}+2)^{\frac{3}{2}}}(-\sinh t,1) \tag{35}$$

（c）$f(t)=(\frac{\cos t}{t},\frac{\sin t}{t})$ より $f'(t),f''(t)$ を求める。

$$f'(t)=\left(-\frac{\sin t}{t}-\frac{\cos t}{t^2},\frac{\cos t}{t}-\frac{\sin t}{t^2}\right) \tag{36}$$
$$f''(t)=\left(-\frac{\cos t}{t}+\frac{2\sin t}{t^2}+\frac{2\cos t}{t^3},-\frac{\sin t}{t}-\frac{2\cos t}{t^2}-\frac{2\sin t}{t^3}\right) \tag{37}$$

---

2. 正の値を取る C^2-級関数 $f(x)$ について、極座標表示された曲線

$$\theta \mapsto (x(\theta),y(\theta))=(f(\theta)\cos\theta,f(\theta)\sin\theta) \tag{38}$$

の点 $(x(\theta),y(\theta))$ における曲線 $\kappa(\theta)$ は

$$\kappa=\frac{f^2+2(f')^2-ff''}{\{f^2+(f')^2\}^{\frac{3}{2}}} \tag{39}$$

で与えられることを示せ。

....

$x(\theta),y(\theta)$ の 2 階の導関数を求める。

$$x'(\theta)=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta \tag{40}$$
$$y'(\theta)=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta \tag{41}$$
$$x''(\theta)=f''(\theta)\cos\theta-2f'(\theta)\sin\theta-f(\theta)\cos\theta \tag{42}$$
$$y''(\theta)=f''(\theta)\sin\theta+2f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta \tag{43}$$

次の行列を計算する。

$$\begin{vmatrix} x'(\theta) & x''(\theta) \\ y'(\theta) & y''(\theta) \end{vmatrix} = x'(\theta)y''(\theta)-x''(\theta)y'(\theta) \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
x'(\theta)y''(\theta) =&(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)(f''(\theta)\sin\theta + 2f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta) && (45)\\
=&f'(\theta)\cos\theta(f''(\theta)\sin\theta + 2f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta) && (46)\\
&- f(\theta)\sin\theta(f''(\theta)\sin\theta + 2f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta) && (47)\\
=&f'(\theta)f''(\theta)\sin\theta\cos\theta + 2(f'(\theta))^2\cos^2\theta - f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta && (48)\\
&- f(\theta)f''(\theta)\sin^2\theta - 2f(\theta)f'(\theta)\sin\theta\cos\theta + (f(\theta))^2\sin^2\theta && (49)\\
x''(\theta)y'(\theta) =&(f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)(f''(\theta)\cos\theta - 2f'(\theta)\sin\theta - f(\theta)\cos\theta) && (50)\\
=&f'(\theta)\sin\theta(f''(\theta)\cos\theta - 2f'(\theta)\sin\theta - f(\theta)\cos\theta) && (51)\\
&+ f(\theta)\cos\theta(f''(\theta)\cos\theta - 2f'(\theta)\sin\theta - f(\theta)\cos\theta) && (52)\\
=&f'(\theta)f''(\theta)\sin\theta\cos\theta - 2(f'(\theta))^2\sin^2\theta - f(\theta)f'(\theta)\sin\theta\cos\theta && (53)\\
&+ f(\theta)f''(\theta)\cos^2\theta - 2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta - (f(\theta))^2\cos^2\theta && (54)
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} x'(\theta) & x''(\theta) \\ y'(\theta) & y''(\theta) \end{vmatrix} = 2(f'(\theta))^2 - f(\theta)f''(\theta) + (f(\theta))^2 \tag{55}$$

ベクトルの大きさ $|(x'(\theta), y'(\theta))|$ を求める。

$$\begin{aligned}
(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 =&(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)^2 + (f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)^2 && (56)\\
=&(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2 && (57)\\
|(x'(\theta), y'(\theta))| =&((f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2)^{\frac{1}{2}} && (58)
\end{aligned}$$

これらを合わせて曲率関数 $\kappa(\theta)$ は次のように求まる。

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{|(x'(\theta), y'(\theta))|^3}\begin{vmatrix} x'(\theta) & x''(\theta) \\ y'(\theta) & y''(\theta) \end{vmatrix} = \frac{2(f'(\theta))^2 - f(\theta)f''(\theta) + (f(\theta))^2}{((f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{59}$$

---

3. 2 変数の C^2-級関数 $f(x, y)$ は次を満たすとする。
   - $Z_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} \neq \emptyset$
   - ${}^\forall(a, b) \in Z_f$ に対して $(f_x(a, b), f_y(a, b)) \neq (0, 0)$

   この時、陰関数定理より、Z_f は Z_f の各点の近傍で曲線片として表せる。よって、$(a, b) \in Z_f$ に対して、(a, b) における Z_f の曲率 $\kappa(a, b)$ を定義することが出来る。(ただし、曲線の向き付けによって曲率の符号が逆になる。)
   曲率 $\kappa(a, b)$ は次の式で表されることを示せ。

$$\kappa(a, b) = \pm\frac{f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}}(a, b) \tag{60}$$

. . . .

$(a,b) \in Z_f$ における曲線 $f(x,y)=0$ の法ベクトルは $(f_x(a,b), f_y(a,b))$ であるので、単位法ベクトルは次の式で表される。

$$n(a,b) = \frac{1}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}}(f_x, f_y)(a,b) \tag{61}$$

つまり、$n = \frac{1}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}}(f_x, f_y)$ に対して、単位接ベクトルは次のようなベクトルである。

$$\frac{1}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}}(-f_y, f_x) \quad \text{or} \quad \frac{1}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}}(f_y, -f_x) \tag{62}$$

そこで、単位接ベクトルの一つを次のように T とおく。

$$T = \frac{1}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}}(-f_y, f_x) \tag{63}$$

弧長パラメータ s を用いて $x = \gamma_x(s), y = \gamma_y(s)$ とすると曲線 $f(x,y)=0$ は $f(\gamma_x(s), \gamma_y(s)) = 0$ と表せる。
接ベクトルは $\gamma'(s) = (\gamma_x'(s), \gamma_y'(s))$ であるので、正負の違いをまとめて書けば次のようになる。

$$(\gamma_x', \gamma_y') = \pm\frac{1}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}}(-f_y, f_x) \tag{64}$$

単位接ベクトル T に合わせ、次のように置いて考える。

$$\gamma_x' = \frac{-f_y}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \gamma_y' = \frac{f_x}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{65}$$

曲率は法ベクトル $\gamma''(s)$ が単位ベクトルの何倍であるかを求めることで得られる。
つまり、単位法ベクトル [式 (61)] との内積が曲率となる。

$$\gamma'' = \frac{\mathrm{d}\gamma'}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\gamma_x', \gamma_y'\right), \qquad \kappa = \langle \gamma'', n \rangle \tag{66}$$

ベクトル γ'' の各成分ごとに合成関数の微分の式を利用すると次の式が得られる。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma_x' = \frac{\partial \gamma_x'}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \gamma_x'}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma_y' = \frac{\partial \gamma_y'}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \gamma_y'}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \tag{67}$$

これにより γ'' は $\frac{\partial \gamma_x'}{\partial x}, \frac{\partial \gamma_x'}{\partial y}, \frac{\partial \gamma_y'}{\partial x}, \frac{\partial \gamma_y'}{\partial y}$ と $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$ を計算することで得られる。
$x = \gamma_x(s), y = \gamma_y(s)$ であるので、式 (65) より $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$ は次のようになる。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\gamma_x}{\mathrm{d}s} = \gamma_x' = \frac{-f_y}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{68}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\gamma_y}{\mathrm{d}s} = \gamma_y' = \frac{f_x}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{69}$$

$\frac{\partial \gamma'_x}{\partial x}, \frac{\partial \gamma'_x}{\partial y}, \frac{\partial \gamma'_y}{\partial x}, \frac{\partial \gamma'_y}{\partial y}$ もそれぞれ求める。

$$\frac{\partial \gamma'_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{-f_y}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-f_{xy}}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{f_y(f_x f_{xx} + f_y f_{xy})}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{70}$$

$$= \frac{-f_x^2 f_{xy} + f_y f_x f_{xx}}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{71}$$

$$\frac{\partial \gamma'_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-f_y}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-f_{yy}}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{f_y(f_x f_{xy} + f_y f_{yy})}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{72}$$

$$= \frac{-f_x^2 f_{yy} + f_y f_x f_{xy}}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{73}$$

$$\frac{\partial \gamma'_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{f_x}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{f_{xx}}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{-f_x(f_x f_{xx} + f_y f_{xy})}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{74}$$

$$= \frac{f_y^2 f_{xx} - f_x f_y f_{xy}}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{75}$$

$$\frac{\partial \gamma'_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{f_x}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{f_{xy}}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{-f_x(f_x f_{xy} + f_y f_{yy})}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{76}$$

$$= \frac{f_y^2 f_{xy} - f_x f_y f_{yy}}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{77}$$

γ'' を複数のベクトルに分ける。

$$\gamma'' = \left(\frac{\partial \gamma'_x}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \gamma'_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\partial \gamma'_y}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \gamma'_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) \tag{78}$$

$$= \left(\frac{\partial \gamma'_x}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\partial \gamma'_y}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) + \left(\frac{\partial \gamma'_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\partial \gamma'_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) \tag{79}$$

$$= \frac{\partial(\gamma'_x, \gamma'_y)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial(\gamma'_x, \gamma'_y)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \tag{80}$$

$$\tag{81}$$

この為、曲率を次のような 2 つの内積に分けて求める。

$$\kappa = \langle \gamma'', n \rangle = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\left\langle \frac{\partial(\gamma'_x, \gamma'_y)}{\partial x}, n \right\rangle + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\left\langle \frac{\partial(\gamma'_x, \gamma'_y)}{\partial y}, n \right\rangle \tag{82}$$

2 つの内積は次のような式となる。

$$\left\langle \frac{\partial(\gamma'_x, \gamma'_y)}{\partial x}, n \right\rangle \tag{83}$$

$$= \frac{-f_x^2 f_{xy} + f_y f_x f_{xx}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{f_x}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{f_y^2 f_{xx} - f_x f_y f_{xy}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{f_y}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{84}$$

$$= \frac{f_y f_{xx} - f_x f_{xy}}{f_x^2 + f_y^2} \tag{85}$$

$$\left\langle \frac{\partial(\gamma'_x, \gamma'_y)}{\partial y}, n \right\rangle \tag{86}$$

$$= \frac{-f_x^2 f_{yy} + f_y f_x f_{xy}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{f_x}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{f_y^2 f_{xy} - f_x f_y f_{yy}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{f_y}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{87}$$

$$= \frac{f_y f_{xy} - f_x f_{yy}}{f_x^2 + f_y^2} \tag{88}$$

以上により曲率 κ は次のようになる。

$$\kappa = \langle \gamma'', n \rangle \tag{89}$$

$$= \frac{f_y f_{xx} - f_x f_{xy}}{f_x^2 + f_y^2} \frac{-f_y}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{f_y f_{xy} - f_x f_{yy}}{f_x^2 + f_y^2} \frac{f_x}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{90}$$

$$= \frac{-f_y^2 f_{xx} + 2 f_x f_y f_{xy} - f_x^2 f_{yy}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{91}$$

式 (65) にて接ベクトルを一方に固定したが、逆向きのベクトルでも同様に計算できる。この場合、γ'' が -1 倍されるので、曲率 κ の符号も逆になる。
よって、曲率は次のような式で求められる。

$$\kappa = \pm \frac{f_y^2 f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{92}$$

. . . .

$$\frac{f_y^2 f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{xy} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix} \tag{93}$$