同値関係

推移律、反射律、対称律を満たす関係を同値関係という。

$\sim$:同値関係

- 反射律 $A \sim A$
- 対称率 $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
- 推移率 $A \sim B,\, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

商集合

集合 S に同値関係 $\sim$ が与えられている場合、商集合 $S/\sim$ が存在する。

商集合の元を同値類という。

商集合 $S/\sim$ は同値関係にある S の元を同じものとみなしてつくる集合である。

---

1. n:正の整数、$S = \{1, \ldots, n\}$、$P(S)$:S の全ての部分集合

   $P(S)$ 上の同値関係 $\sim$ を次のように定義する。

$$A \sim B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \#A = \#B \tag{1}$$

   この時、$\#P(S)/\sim$ を求めよ。

   ……………………………………………………………………

   同値関係 $\sim$ は部分集合の元の数が同じもので定義されている。元の個数により $n+1$ 種類に分けられる。$\#A = 0$ なら $A = \emptyset$、$\#A = 1$ なら $A = \{1\}, A = \{2\}, A = \{n\}$ 等、… $\#A = n$ なら $A = S$ である。

   これらがそれぞれ同値類を作るため $\#P(S)/\sim = n+1$ である。

---

2. K:体、V:K-線形空間、W:V の部分空間

   $v_1, \ldots v_n \in V$ に対していかが同値であることを示せ。

   (a) $[v_1], \ldots, [v_n] \in V/W$ は一次独立

   (b) 任意の $a_1, \ldots, a_n \in K$ に対し

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \in W \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0 \tag{2}$$

   ……………………………………………………………………

   2a $\Rightarrow$ 2b

$[v_1], \dots, [v_n] \in V/W$ は一次独立であるので、$a_i \in K\,(i = 1, \dots n)$ について

$$a_1[v_1] + \cdots + a_n[v_n] = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0 \tag{3}$$

$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \in W$ であれば、V/W の同値類 $[a_1v_1 + \cdots + a_nv_n]$ は $[0]$ と等しい。つまり、

$$[a_1v_1 + \cdots + a_nv_n] = a_1[v_1] + \cdots + a_n[v_n] = 0 \tag{4}$$

であるので、$[v_i]$ が一次独立であることから $a_1 = \cdots = a_n = 0$ となる。
2a $\Leftarrow$ 2b
上の議論を逆にたどると結論が得られる。

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \in W \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0 \tag{5}$$

$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \in W$ より V/W の同値類 $[a_1v_1 + \cdots + a_nv_n]$ は $[a_1v_1 + \cdots + a_nv_n] = [0] = 0$ である。

$$[a_1v_1 + \cdots + a_nv_n] = a_1[v_1] + \cdots + a_n[v_n] = 0 \tag{6}$$

であるが、$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \in W$ ならば $a_1 = \cdots = a_n = 0$ であるので、$a_1[v_1] + \cdots + a_n[v_n] = 0$ ならば $a_1 = \cdots = a_n = 0$ である。
つまり、$[v_1], \dots, [v_n]$ は一次独立である。