$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} \tag{1}$$

開区間 $I_{\alpha,\beta} = (\alpha, \beta)$, $I_{\gamma,\delta} = (\gamma, \delta)$ の直積上の関数 F を次のように定める。

$$F : I_{\alpha,\beta} \times I_{\gamma,\delta} \times I_{\gamma,\delta} \to \mathbb{R}, \quad (x, u, v) \mapsto \int_u^v f_2(x, y)\mathrm{d}y \tag{2}$$

ベクトル値関数 $\boldsymbol{g}$ を次のように定める。

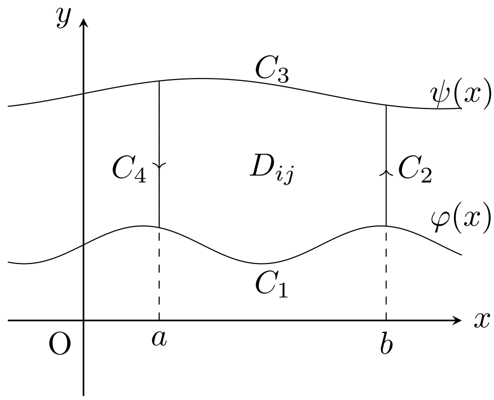
$$\boldsymbol{g} : I_{\alpha,\beta} \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} \tag{3}$$

この時、合成関数 $F \circ \boldsymbol{g}$ は次のようになる。

$$F \circ \boldsymbol{g}(x) = F(\boldsymbol{g}(x)) = F(x, \varphi(x), \psi(x)) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_2(x, y)\mathrm{d}y \tag{4}$$

縦線集合 D_{ij} を次のような集合とする。

$$D_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \tag{5}$$



この時、次の式を示せ。

1.
$$\int_{C_1} \boldsymbol{f} = \int_a^b (f_1(x, \varphi(x)) + f_2(x, \varphi(x))\varphi'(x))\mathrm{d}x \tag{6}$$

2.
$$\int_{C_2} \boldsymbol{f} = \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f_2(b, y)\mathrm{d}y \tag{7}$$

3.
$$\int_{C_3} \boldsymbol{f} = -\int_a^b (f_1(x,\psi(x)) + f_2(x,\psi(x))\psi'(x))\mathrm{d}x \tag{8}$$

4.
$$\int_{C_4} \boldsymbol{f} = -\int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} f_2(a,y)\mathrm{d}y \tag{9}$$

………………………………………………………………………………………

1. 曲線 C_1 は点 $(a,\varphi(a))$ から点 $(b,\varphi(b))$ を結ぶ曲線でこの間の点は $(t,\varphi(t))$ である。そこで、$y=\varphi(x)$ として、$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(x,y)=\boldsymbol{f}(x,\varphi(x))$ を C_1 に沿って積分する。

   y は x を媒介変数にもつ関数であるので、$\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\end{pmatrix}\mathrm{d}x$ に置き換える。

   これにより $\boldsymbol{f}$ との内積が次のようになる。

$$\boldsymbol{f}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_1(x,y)\\ f_2(x,y)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\end{pmatrix} = f_1(x,y)+f_2(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{10}$$

   この式に $y=\varphi(x)$ を代入すると次の式を得る。

$$\int_{C_1}\boldsymbol{f} = \int_a^b \boldsymbol{f}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\\ \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\end{pmatrix}\mathrm{d}x \tag{11}$$
$$= \int_a^b (f_1(x,\varphi(x)) + f_2(x,\varphi(x))\varphi'(x))\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

2. C_2 は点 $(b,\varphi(b))$ から点 $(b,\psi(b))$ を結ぶ線分である。この為、C_2 上では $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(b,y)$ であり、y が $\varphi(b)$ から $\psi(b)$ に変化し、x は定数 b の値を取る。x の値は b で変化せず、y だけが変化するので、

$$\boldsymbol{f}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}y}\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_1(x,y)\\ f_2(x,y)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = f_2(x,y) \tag{13}$$

   となる。

   この為、C_2 上の積分は次のようになる。

$$\int_{C_2}\boldsymbol{f} = \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} \boldsymbol{f}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}y}\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}\end{pmatrix}\mathrm{d}y \tag{14}$$
$$= \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f_2(b,y)\mathrm{d}y \tag{15}$$

3. 曲線 C_3 は点 $(b, \psi(b))$ から点 $(a, \psi(a))$ を結ぶ曲線である。C_1 の時と同様の手順で次のように求まる。

$$\int_{C_3} \boldsymbol{f} = \int_b^a \boldsymbol{f} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix} \mathrm{d}x \tag{16}$$

$$= \int_b^a \left(f_1(x, \psi(x)) + f_2(x, \psi(x))\psi'(x) \right) \mathrm{d}x \tag{17}$$

$$= -\int_a^b (f_1(x, \psi(x)) + f_2(x, \psi(x))\psi'(x))\mathrm{d}x \tag{18}$$

4. C_4 は点 $(a, \psi(a))$ から点 $(a, \varphi(a))$ を結ぶ線分である。C_2 の場合と同様の手順で求まる。

$$\int_{C_4} \boldsymbol{f} = \int_{\psi(a)}^{\varphi(a)} \boldsymbol{f} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}y} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} \end{pmatrix} \mathrm{d}y \tag{19}$$

$$= \int_{\psi(a)}^{\varphi(a)} f_2(a, y)\mathrm{d}y \tag{20}$$

$$= -\int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} f_2(a, y)\mathrm{d}y \tag{21}$$
