

上界 upper bound

実数の部分集合 M が空でないとする。

$$M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset \tag{1}$$

ある実数 K が存在し、任意の要素 $m \in M$ に対し $m \leq K$ である時、 K を上界という。

.....

例

閉集合 $[1, 5]$ 、開集合 $(1, 5)$

$$[1, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\} \tag{2}$$

$$(1, 5) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\} \tag{3}$$

において、どちらの集合に対しても $5 \in \mathbb{R}$ は上界である。

$[1, 5]$ の全ての要素 x に対し、 $x \leq 5$ であり、同様に $(1, 5)$ の全ての要素 x に対しても、 $x \leq 5$ である。

.....

$[1, 5]$ の上界のうち、 $5 \in \mathbb{R}$ は最も小さい数である。

これは $[1, 5]$ には 5 が含まれる為 5 より小さい数は上界にならない。

.....

$(1, 5)$ の上界のうち、 $5 \in \mathbb{R}$ は最も小さい数である。

もしも $5 \in \mathbb{R}$ より小さい上界があるとする。この上界を $r \in \mathbb{R}$ とすると、 $r < 5$ である。この時次のような式が成り立つ。

$$r < \frac{r+5}{2} < 5 \tag{4}$$

$\frac{r+5}{2} \in (1, 5)$ であるので r は上界ではないことがわかる。この為、 $(1, 5)$ の上界のうち、 $5 \in \mathbb{R}$ は最も小さい数であるといえる。