$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \tag{1}$$

関数の収束はいくつかあり、それぞれで意味がある。

関数 $f(x)$ の定義域 D とする。

(1). ある点 $p \in D$ で関数 $f(x)$ が収束

(2). 定義域 D において関数 $f(x)$ が各点収束

(3). 定義域 D において関数 $f(x)$ が一様収束

. . . .

(1) は 数列の無限和 (級数) が値を持つことと同じ。

(2) は 定義域 D の任意の点において収束する。これは全ての点を取り出して一点ずつ収束することで、$p \in D$ ごとの収束する速さは問わない。

(3) は 定義域 D の点に依存せず D 上で収束する。これは各点の収束する速さが一定で抑えられるのでそれぞれの点で同じような速さ (一様) で収束する。

$$a_0 = \begin{cases} \sup A & (|\sup A - a| \geq |\inf A - a|) \\ \inf A & (|\sup A - a| < |\inf A - a|) \end{cases} \tag{2}$$

a_0 を定義域の端の値 ($\sup A$ 又は $\inf A$) を利用するのは問題の式の a からより遠い値を選ぶことで収束しづらい状況を考えているのではないか。

定義域 A が $[-a_0, a_0]$(又は $[a_0, -a_0]$) の部分集合となるので $[-a_0, a_0]$(又は $[a_0, -a_0]$) で一様収束するなら A でも一様収束するということを示したいのではないかと思う。

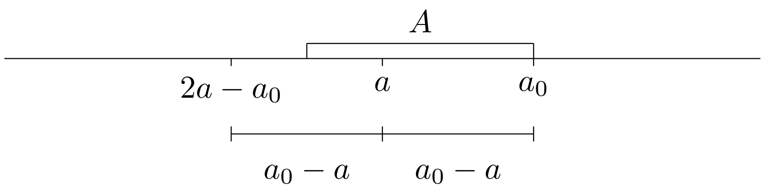
定義域 A(閉集合) 上の関数 $f(x)$ について

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \tag{3}$$

先頭の項 a_0 を次のように置く。

$$a_0 = \begin{cases} \sup A & (|\sup A - a| \geq |\inf A - a|) \\ \inf A & (|\sup A - a| < |\inf A - a|) \end{cases} \tag{4}$$

これは $f(x)$ の中心 a から定義域の遠い方の値を a_0 としている。
a が A の中央より小さいと次のような配置になる。



これにより 閉区間 $[2a - a_0, a_0]$ は $A \subset [2a - a_0, a_0]$ となる。
逆に a が中央より大きいと $A \subset [a_0, 2a - a_0]$ となる。

定理

関数 $f(x)$ の収束半径を r とする。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n \tag{5}$$

$r>0$ のとき、空でない閉集合 $A\subset\mathbb{R}$ を $A\subset(a-r,\,a+r)$ となるように任意に選んでおく。このとき、$f(x)$ は A を定義域として考えると一様収束する。

$r=+\infty$ の場合、A を $\mathbb{R}$ の有界な閉集合とすると一様収束する。

関数 $f(x)$ は次のような式である。

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+a_4(x-a)^4+\cdots \tag{6}$$

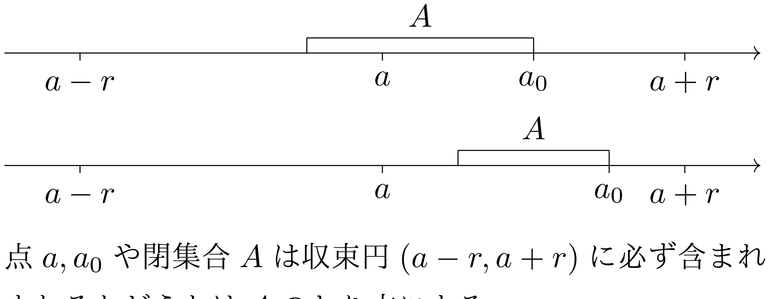
この式の係数 a_n は収束半径などとは無関係に先に決定されている。しかし、a_0 は $f(x)$ の定数項であり、収束性に関係しない。例えば、この式の両辺から a_0 を引いた式

$$f(x)-a_0=a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+a_4(x-a)^4+\cdots \tag{7}$$

は収束値が $f(x)$ とは異なるが、収束の仕方は同じである。そこで、次のように置きなおす。

$$a_0=\begin{cases}\sup A & (|\sup A-a|\geq|\inf A-a|)\\ \inf A & (|\sup A-a|<|\inf A-a|)\end{cases} \tag{8}$$

これにより a_0 は閉集合 A の端点となり、$a_0\in A$ となる。位置関係は次の図の場合か左右を反転させた図になる。

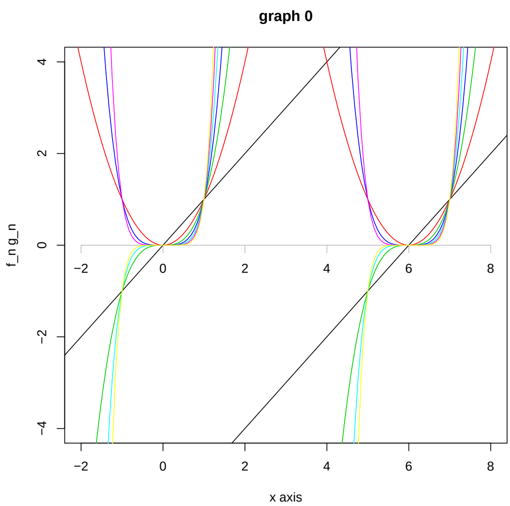


点 a, a_0 や閉集合 A は収束円 $(a-r, a+r)$ に必ず含まれるが、集合 A に点 a が含まれるかどうかは A のとり方による。

a_0 を上記のようにおいたことで、$a=a_0$ の時は一点だけの集合 $A=\{a\}$ となり、$a\neq a_0$ の時は $|a_0-a|<r$ であり、${}^{\forall}x\in A$ に対し $x\leq a_0$(又は $x\geq a_0$) となり証明するのに都合が良い。

$$f_n(x) = x^n \qquad g_n(x) = (x-6)^n \tag{9}$$

関数 f_n は収束半径 $r = 1$ の関数です。区間 $(-1, 1)$ において $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ です。関数 g_n は f_n を横に 6 ずらした関数です。ずれた分が式に現れていますが、これが収束円の中心となっています。収束半径は f_n と同じです。区間 $(5, 7)$ で収束します。図は $n = 1, \ldots, 7$ の時の f_n と g_n です。



$$\hat{f}_n(x) = a_0 + x^n \qquad \hat{g}_n(x) = a_0 + (x-6)^n \tag{10}$$

この関数 $\hat{f}_n(x)$ と $\hat{g}_n(x)$ は上の関数 $f_n(x)$ と $g_n(x)$ に a_0 を加えたものです。加えた分だけ上下にずれます。これらの関数は a_0 に関係なく収束半径は f_n や g_n と同じです。これらの関数の収束の仕方も同じですが、$n \to \infty$ の時の収束値は変わります。図は $n = 1, \ldots, 7$ の時の f'_n と g'_n です。

$\hat{f}_n(x)$ は区間 $(-1, 1)$ 内で収束します。これは a_0 の値が $a_0 \in (-1, 1)$ であっても、$a_0 \notin (-1, 1)$ であっても収束します。収束するかどうかは a_0 の値に依存しません。その為、収束を調べる場合は a_0 の値を気にする必要はありません。