
多項式環

可換環 R と文字 x を用いた形式的な有限和

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \qquad (a_i \in R) \tag{1}$$

を R 上の多項式という。

R 上の多項式全体の集合を多項式環 $R[x]$ と書く。

既約

多項式環 $R[x]$ において、$f \in R[x]$ が可約であるとは、$f = gh$ となる単元ではない $g, h \in R[x]$ が存在することをいう。

(単元とは逆元をもつ元のこと。)

f が可約でない時、既約であるという。

$f \in \mathbb{R}[x]$ を次のように定める。f が $\mathbb{R}[x]$ において既約であるか否かを判定せよ。

1. $f = x + \sqrt{2}$

   ……………………………………………………………………

   ある $g, h \in \mathbb{R}[x]$ により $f = gh$ とする。

   $\deg f = 1$ より $\deg gh = 1$ である。$\deg g \geq 0,\ \deg h \geq 0$ であるので、$\deg g = 1,\ \deg h = 0$ または $\deg g = 0,\ \deg h = 1$ である。

   $\deg h = 0$ であれば、$h \in \mathbb{R}$ である。$\mathbb{R}$ の元は全て逆元を持つので $f = gh$ となる場合、一方は単元となる。よって、f は既約となる。

   ---

2. $f = 2x + 4$

   ……………………………………………………………………

   上記の問いと同様に $\deg f = 1$ より既約である。

   $f = 2(x + 4)$

   ---

3. $f = x^2 + 4x + 5$

   ……………………………………………………………………

   f が可約であるとする。可約であれば $\deg g \geq 1,\ \deg h \geq 1$ となる $g, h \in \mathbb{R}[x]$ が存在し、$f = gh$ となる。

   $\deg f = 2$ より、$\deg g = \deg h = 1$ である。1 次多項式は $ax + b\ (a, b \in \mathbb{R})$ の形をしているので、$f(x) = (ax + b)(cx + d)\ (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ となる。この時、

$x=-\frac{b}{a},-\frac{d}{c}$ を f に代入すると $f(x)=0$ となる。
しかし、$f=x^2+4x+5=(x+2)^2+1>0$ であるので、$f(x)=0$ となる実数は存在しない。
よって、f は既約多項式である。

---

4. $f=x^2-6x+8$

   ....

   $f=(x-2)(x-4)$ であり、$\deg(x-2)=\deg(x-4)=1$ である為、f は既約な多項式の積で表せる。
   よって、f は可約である。

---

5. $f=x^3+12x^2-x+1$

   ....

   $f=x^2(x+12)-x+1$ より次のように計算ができる。

$$f(-12)=(-12)^2(-12+12)-(-12)+1=13>0 \tag{2}$$
$$f(-13)=(-13)^2(-13+12)-(-13)+1=-(-13)^2+14<0 \tag{3}$$

   これにより -12 と -13 の間に実数 a が存在し、$f(a)=0$ となる。
   代数学の基本定理により $\mathbb{C}$ において f は複素係数の 1 次多項式の積に分解できる。
   この複素係数の 1 次式の一つは実数 a を用いて $(x-a)$ である。
   $\deg f=3$ であるので、$x-a, g\in\mathbb{R}[x]$ で $\deg(x-a)=1$、$\deg g=2$ となる多項式により $f=(x-a)g$ と分解される。
   よって、f は可約である。

---

6. $f=x^4+12$

   ....

   $\deg f=4$ であるので、$f=gh$ と分解できるなら $\deg g=1, \deg h=3$ か $\deg g=\deg h=2$ である。
   任意の実数に対して $f=x^4+12>0$ であるので、$f(a)=0$ を満たす $a\in\mathbb{R}$ は存在しない。つまり、$\deg g=1, \deg h=3$ となる多項式の積に分けられない。
   $\deg g=\deg h=2$ の場合を考える。
   $a_0,a_1,b_0,b_1\in\mathbb{R}$ とし、$g=x^2+a_1x+a_0,\ h=x^2+b_1x+b_0$ とする。

$$gh=(x^2+a_1x+a_0)(x^2+b_1x+b_0) \tag{4}$$
$$=x^4+(a_1+b_1)x^3+(a_1b_1+a_0+b_0)x^2+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0 \tag{5}$$

$x^4+12=(x^2+a_1x+a_0)(x^2+b_1x+b_0)$ と分解できるとしたら次の式を満たす必要がある。

$$\begin{cases} a_1+b_1=0 \\ a_1b_1+a_0+b_0=0 \\ a_1b_0+a_0b_1=0 \\ a_0b_0=12 \end{cases} \tag{6}$$

$a_0b_0=12$ より $a_0\neq 0,\ b_0\neq 0$ に注意し b_0, b_1 を消すと

$$\begin{cases} a_1(-a_1)+a_0+\frac{12}{a_0}=0 \\ a_1\frac{12}{a_0}+a_0(-a_1)=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -a_0a_1^2+a_0^2+12=0 \\ a_1(12-a_0^2)=0 \end{cases} \tag{7}$$

$a_1=0$ であれば、$a_0^2+12=0$ であるので $a_0\notin\mathbb{R}$ となる。
$12-a_0^2=0$ であれば $a_0=\pm 2\sqrt{3}$ であるので、

$$-a_0a_1^2+a_0^2+12=0 \ \Rightarrow \ a_1^2=\frac{a_0^2+12}{a_0}=\frac{24}{\pm 2\sqrt{3}}=\pm 4\sqrt{3} \tag{8}$$

となるが、$a_0=-2\sqrt{3}$ であれば $a_1^2=-4\sqrt{3}$ であるから $a_1\notin\mathbb{R}$ である。
つまり、$a_0=2\sqrt{3},\ a_1=\pm 2\sqrt[4]{3}$ である。
$a_0b_0=12$ より $b_0=2\sqrt{3}$、$a_1+b_1=0$ より $b_1=\mp 2\sqrt[4]{3}$ が得られる。
これにより x^4+12 は $\mathbb{R}$ 係数多項式 $\left(x^2+2\sqrt[4]{3}x+2\sqrt{3}\right), \left(x^2-2\sqrt[4]{3}x+2\sqrt{3}\right)$ に分解できる。

$$x^4+12=\left(x^2+2\sqrt[4]{3}x+2\sqrt{3}\right)\left(x^2-2\sqrt[4]{3}x+2\sqrt{3}\right) \tag{9}$$

よって、x^4+12 は $\mathbb{R}[x]$ 上可約である。
