1. σ を 0 でない定数とし、実数値弱定常過程 $\varepsilon = \{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ はホワイトノイズ $WN(0, \sigma^2)$ であるとする。この時、全ての $t, h \in \mathbb{Z}$ に対して次が成り立つ。

$$E[\varepsilon_{t+h}\varepsilon_t] = \sigma^2 \frac{\sin \pi h}{\pi h} \tag{1}$$

....

共分散は次の式より得られる。

$$Cov(\varepsilon_{t+h}, \varepsilon_t) = E[\varepsilon_{t+h}\varepsilon_t] - E[\varepsilon_{t+h}]E[\varepsilon_t] \tag{2}$$

ε_i はホワイトノイズであるので期待値は 0、分散は σ^2 である。よって、$Cov(\varepsilon_{t+h}, \varepsilon_t) = E[\varepsilon_{t+h}\varepsilon_t]$ である。
任意の $t \in \mathbb{Z}$ に対し、$h \neq 0$ である $h \in \mathbb{Z}$ について $Cov(\varepsilon_{t+h}, \varepsilon_t) = E[\varepsilon_{t+h}\varepsilon_t] = 0$ となる。また、$V[\epsilon_t] = \sigma^2$ となるので、$E[\varepsilon_t\varepsilon_t] = \sigma^2$ である。

$$E[\varepsilon_t\varepsilon_t] = \sigma^2 = \sigma^2 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\pi h)}{\pi h} = \sigma^2 \frac{\sin(\pi \cdot 0)}{\pi \cdot 0} \tag{3}$$

$$E[\varepsilon_{t+h}\varepsilon_t] = \sigma^2 = 0 = \sigma^2 \frac{0}{\pi h} = \sigma^2 \frac{\sin \pi h}{\pi h} \tag{4}$$

上記のように h の値について式が成り立つのでまとめると次を得る。

$$E[\varepsilon_{t+h}\varepsilon_t] = \sigma^2 \frac{\sin \pi h}{\pi h} \qquad (t, h \in \mathbb{Z}) \tag{5}$$

---

2. $W = \{W(t); t \geq 0\}$ をブラウン運動、つまり次の性質を満たす実数値確率過程とする。
   - $W(0) = 0$
   - $W(t)$ は t について連続
   - 全ての $n \in \mathbb{N}$ と全ての $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対して、実数値確率変数列 $\{W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})\}$ は独立であり、なおかつ各 $i = 1, \ldots, n$ に対して、実数値確率変数 $W(t_i) - W(t_{i-1})$ は正規分布 $N(0, t_i - t_{i-1})$ に従う。

   このとき、次の問いに答えよ。

   (a) 各 $t > 0$ に対して、平均 $E[W(t)]$ を求めよ。

   ....

$W(t_i)-W(t_{i-1})$ は $N(0,t_i-t_{i-1})$ に従うので、$E[W(t_i)-W(t_{i-1})]=0$ である。$E[W(t_i)-W(t_{i-1})]=E[W(t_i)]-E[W(t_{i-1})]$ であるから $E[W(t_i)]=E[W(t_{i-1})]$ となる。
$W(t_1), W(t_0)$ についても同様に $E[W(t_1)]=E[W(t_0)]$ であるが $E[W(t_0)]=E[W(0)]=E[0]=0$ となるので、$E[W(t_n)]=\cdots=E[W(t_1)]=0$ である。

(b) $0<s\leq t$ に対して、$Cov[W(s),W(t)]=s$ が成り立つことを示せ。

....

確率変数 $W(s)$ と $W(t)-W(s)$ は独立であるので、$Cov(W(s),W(t)-W(s))=0$ である。
共分散は $Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]EY$ と期待値で表せるので、

$$
\begin{aligned}
&Cov(W(s),W(t)-W(s)) && (6)\\
=&E[W(s)(W(t)-W(s))]-E[W(s)]E[(W(t)-W(s))] && (7)
\end{aligned}
$$

である。ここで、$E[W(s)]=0$ となるので、次の式が得られる。

$$
\begin{aligned}
0=&Cov(W(s),W(t)-W(s)) && (8)\\
=&E[W(s)(W(t)-W(s))]=E[W(s)W(t)]-E[(W(s))^2] && (9)
\end{aligned}
$$

よって、$E[W(s)W(t)]=E[(W(s))^2]$ である。
確率変数 $W(t_i)-W(t_{i-1})$ は正規分布 $N(0,t_i-t_{i-1})$ に従うので、$V[W(s)-W(0)]=V[W(s)]=s$ である。分散は $V[X]=E[X^2]-(E[X])^2$ となるので、期待値で表現できる。

$$
\begin{aligned}
V[W(s)]=&E[(W(s))^2]-(E[W(s)])^2 && (10)\\
=&E[(W(s))^2]-(0)^2=E[(W(s))^2] && (11)
\end{aligned}
$$

これまでをまとめると次の式になる。

$$
E[W(s)W(t)]=E[(W(s))^2]=V[W(s)]=s \qquad (12)
$$

共分散 $Cov(W(s),W(t))$ を計算する。

$$
\begin{aligned}
Cov(W(s),W(t))=&E[W(s)W(t)]-E[W(s)]E[W(t)] && (13)\\
=&E[W(s)W(t)]=s && (14)
\end{aligned}
$$

以上により $Cov(W(s),W(t))=s$ が得られる。

---

3. $\theta > 0$ および $\alpha \neq 0$ はともに定数とし、確率過程 W はブラウン運動であるとする。各 $t \in \mathbb{Z}$ に対して次のような時系列 $\varepsilon = \{\epsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ を考える。

$$\varepsilon_t = \frac{\alpha}{\sqrt{2\theta}} \left\{ W\left(e^{2\theta t}\right) - W\left(e^{2\theta(t-1)}\right) \right\} e^{-\theta t} \tag{15}$$

この時、次の問いに答えよ。

(a) 各 $t \in \mathbb{Z}$ に対して ε_t の平均 $E[\varepsilon_t]$ を求めよ。

. . . .

(b) 時系列 ε は弱定常性を満たすことを示せ。

. . . .

---

4. $\theta > 0$ および $\alpha \neq 0$ はともに定数とし、確率過程 W はブラウン運動であるとする。各 $t \in \mathbb{Z}$ に対して次のような時系列 $Z = \{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ を考える。

$$Z_t = \frac{\alpha}{\sqrt{2\theta}} e^{-\theta t} W(e^{2\theta t}) \tag{16}$$

ε を前問で定義した時系列とするとき、時系列 Z は AR(1) モデルとなることを説明せよ。

. . . .
