定義

ゾルゲンフライ直線

実数 $\mathbb{R}$ の開集合 U を $p, q \in \mathbb{R}$ $(p < q)$ を用いて次のように定義する。

$$U = (p, q] \tag{1}$$

U は左半開区間である。

左半開区間全体の集合を開集合の基底として $\mathbb{R}$ に位相を導入する。この位相空間 $(\mathbb{R}, \{U\})$ をゾルゲンフライ直線 (Sorgenfrey line) という。

式 (1) の開集合を右半開区間 $[p, q)$ とする定義もある。

第二可算公理

開集合族に高々可算な基底が存在するとき、第二可算公理を満たすという。

問題

1. [距離空間上の閉集合]
   距離空間 (X, d) の部分集合 F が閉集合であるための必要十分条件は X の点 x に収束する F からなる任意の点列において、$x \in F$ になることであることを示せ。

   ……………………………………………………………………

$$F : \text{閉集合} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n \in F \tag{2}$$

F を閉集合、$n \in \mathbb{N}$ に対し $x_n \in F$ とする。この時、点列 $\{x_n\}$ の極限が x であるとは、次を満たす事をいう。

任意の $\varepsilon > 0$ に対し、次を満たすような $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在する。

$$N > N_0 \Rightarrow d(x, x_N) < \varepsilon \tag{3}$$

F は閉集合であるので補集合 $X \backslash F$ は開集合である。開集合であれば、任意の点 $p \in X \backslash F$ に対して ε 近傍 U_ε が存在し、$U_\varepsilon \subset X \backslash F$ となる。

$\{x_n\}$ の極限 x は任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$d(x, x_N) < \varepsilon$ となる $x_N \in F$ が存在するので、$x \notin X \backslash F$ である。つまり、$x \in F$ となる。

$$F : \text{閉集合} \Leftarrow \lim_{n \to \infty} x_n \in F \tag{4}$$

$n \in \mathbb{N}$ に対し $x_n \in F$ であり、$x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n \in F$ とする。

式 (3) より極限 x の ε 近傍 U_ε には $x_N \in U_\varepsilon$ となる $x_N \in F$ が存在する。これは任意の ε に対して成り立つ為、$U_\varepsilon \cap F \neq \emptyset$ となり $x \in F$ が触点であることとなる。

任意の点列 $\{x_n\}$ の極限が F に含まれるのであれば F の閉包 $\bar{F}$ が F と一致する。つまり、F は閉集合である。

---

2. [可算公理]

ゾルゲンフライ直線 $\mathbb{R}_l$ は第二可算公理を満たさないことを示せ。

....

第二可算公理を満たすと仮定する。

開基 $\mathfrak{O}$ が可算であるとする。

$\mathbb{R}_l$ の開集合 $(x-1,x]$ に対してこれに含まれる開集合 $O_x \in \mathfrak{O}$ を x が含まれるように一つ選択する。つまり、$x \in O_x \subset (x-1,x]$ である。

この開集合 O_x を $\mathbb{R}_l$ の点ごとに選び、集合族 $\mathfrak{A}$ を作る。

$$\mathfrak{A} = \{O_x \in \mathfrak{O} \mid x \in \mathbb{R},\ x \in O_x \subset (x-1,x]\} \tag{5}$$

$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{O}$ であるので、それぞれの濃度は $|\mathfrak{A}| \leq |\mathfrak{O}|$ である。

$x, y \in \mathbb{R}$ が $x < y$ とした時、$x \in O_x \subset (x-1,x]$ である為、$y \notin O_x$ となる。つまり、$x < y$ であれば $O_x \neq O_y$ である。

これにより次の写像が単射であることがわかる。

$$f : \mathbb{R} \to \mathfrak{A} \quad f(x) = O_x \tag{6}$$

これにより集合の濃度は $|\mathbb{R}| \leq |\mathfrak{A}|$ である。つまり、$\mathfrak{O}$ が可算であることに矛盾する。

よって、第二可算公理を $\mathbb{R}_l$ は満たさないことがわかる。
