1. (a) 距離空間と位相空間の定義、性質についてまとめ、その空間の違いについて述べよ。両者において開集合の定義を必ず含むこと。

....

距離空間

空間 X 上に距離関数 d が定義された空間を距離空間といい、(X, d) と書く。距離関数 d とは、関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が次の条件を満たす時をいう。

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \tag{1}$$

$$d(x, y) = d(y, x), \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \tag{2}$$

位相空間

空間 X に次を満たす集合族 $\mathcal{O}$ が定義出来る時、その組 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間という。

$$\emptyset, X \in \mathcal{O} \tag{3}$$

$$O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O} \tag{4}$$

$$O_\lambda \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O} \tag{5}$$

開集合の集合族 $\mathcal{O}$ を位相といい、どのような空間にも位相を定めることが出来る。例えば、$\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ の場合は密着位相、$\mathcal{O}$ が X の全ての部分集合の場合は離散位相というように何かの位相を導入することは出来る。
距離空間であれば、距離関数を利用し ϵ-近傍 $B_d(x, \epsilon)$ が定義でき、次を満たす部分集合 $U \subset X$ を開集合と定義できる。

$$^\forall x \in U, {}^\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } B_d(x, \epsilon) \subset U \tag{6}$$

距離関数から誘導された位相が必ず定義出来るので距離空間は位相空間として扱うことが出来る。
逆に位相空間は距離関数が定義できない場合もある為、距離空間となるわけではない。

$$\text{距離空間} \ \Rightarrow \ \text{位相空間} \tag{7}$$

(b) 距離化可能ではない空間とはどのような空間か? 例を挙げ、それがなぜ距離化できないのか証明せよ。

....

距離化可能でない空間の例

ハウフドルフ空間でない位相 (Zariski(ザリスキ) 位相、密着位相 等)

距離化できない理由

空間 $X = \{a, b\}$ に対し密着位相 $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ を導入する。

a を含む開集合は全て b も含むことになるからこれを誘導する距離関数は a の近傍に b も含めないといけない。つまり $d(a, b) = 0$ を満たさないといけない。しかし、距離関数は $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ を満たす必要があるので $a \neq b$ に対し $d(a, b) = 0$ となる関数 d は距離関数ではない。

よって、$X = \{a, b\}$ に密着位相を誘導する距離関数は存在しない。

---

2. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において $A \subset X$ の内部 A°、閉包 $\overline{A}$ をそれぞれ A に包まれる最大の開集合、A を包む最小の閉集合として定義する。この 2 つの定義は、$(X, \mathcal{O})$ が距離空間 (X, d) からくる距離位相空間 $(X, \mathcal{O}_d)$ と同値な場合、授業内に行った ϵ-近傍を用いた定義と同じものであることを確かめよ。

....

距離空間 (X, d) の ϵ-近傍 $B_d(x, \epsilon)$ を次のように定義する。

$$B_d(x, \epsilon) = \{y \mid d(x, y) < \epsilon\} \tag{8}$$

この近傍を用いて、(X, d) の開集合 U を次のように定義する。

$$^\forall x \in U, {}^\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } B_d(x, \epsilon) \subset U \tag{9}$$

この定義 (9) は内部の定義と同じである。

$$A^\circ = \{a \in A \mid a\text{の開球で}A\text{に含まれるものが存在}\} \tag{10}$$

また、補集合 A^c の閉包 $\overline{A^c}$ は次のような集合である。

$$\overline{A^c} = \{a \in X \mid a\text{の任意の開球と}A^c\text{との共通部分が空でない}\} \tag{11}$$

$(A^\circ)^c$ は (10) より $x \in X$ の開球 $B(x)$ で $B(x) \subset A$ となるものが存在しない点を集めたものである。これは $x \in X$ の任意の開球 $B(x)$ で $B(x) \cap A^c \neq \emptyset$ となることを意味する。つまり、$(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ より $(A^\circ)^c$ は閉集合である。

$(X, \mathcal{O})$ と $(X, \mathcal{O}_d)$ の開集合が一致し、それぞれの開集合の補集合が閉集合になる為、$(X, \mathcal{O})$ は ϵ-近傍を用いた定義と同じものである。

---

3. 距離空間 (X, d) とその部分集合 $A \subset X$ において、$\overline{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$ であることを示せ。

$x \in X$ の開球を $B(x) \subset X$ と表すと閉包 $\overline{A}$ の定義は次のようになる。

$$\overline{A} = \{x \in X \mid {}^{\forall}B(x) \subset X \text{ に対して } B(x) \cap A \neq \emptyset\} \tag{12}$$

また、点と集合の距離 $d(x, A)$ は次のように定義される。

$$d(x, A) = \min\{d(x, a) \mid a \in A\} \tag{13}$$

次を示す。

$$\overline{A} \subset \{x \in X \mid d(x, A) = 0\} \tag{14}$$

$\bar{a} \in \overline{A}$ とする。定義 (12) より $\bar{a}$ の任意の開球 $B(\bar{a})$ において $B(\bar{a}) \cap A \neq \emptyset$ である。距離空間 (X, d) での開球 $B(\bar{a})$ は次のような集合である。

$$B(\bar{a}) = \{x \in X \mid d(\bar{a}, x) < \varepsilon\} \tag{15}$$

$a' \in B(\bar{a}) \cap A$ を取ってくると、$0 \leq d(\bar{a}, a') < \varepsilon$ である。任意の開球について $B(\bar{a}) \cap A \neq \emptyset$ であるので、ε はどれだけ 0 に近づけてもよい。$\varepsilon \to 0$ とし、ε を取り直すごとに a' も取り直すと $0 \leq d(\bar{a}, a') < \varepsilon$ から $d(\bar{a}, a') = 0$ が得られる。$a' \in A$ より $d(\bar{a}, A) = 0$ となり、$\overline{A} \subset \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$ であることがわかる。
次に逆を示す。

$$\overline{A} \supset \{x \in X \mid d(x, A) = 0\} \tag{16}$$

$\alpha \in \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$ とする。$d(\alpha, A) = 0$ は ${}^{\exists}a \in A$ について $d(\alpha, a) = 0$ である。d は距離関数であるので、$d(\alpha, a) = 0 \Leftrightarrow \alpha = a$ である。α の近傍を $B_\varepsilon(\alpha)$、a の近傍を $B_\delta(a)$ とすれば、それぞれ任意の ε, δ について $B_\varepsilon(\alpha) \cap B_\delta(a) \neq \emptyset$ である。$B_\delta(a) \subset A$ となる δ を選部ことが出来るので、$B_\varepsilon(\alpha) \cap A \neq \emptyset$ となる。
よって、$\alpha \in \overline{A}$ となり、$\overline{A} \supset \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$ であることが示せる。
以上により $\overline{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$ である。
