開集合

集合 A において、任意の $a \in A$ に対し次を満たす $\varepsilon \in > 0$ が存在する時 A を開集合という。

$d(a,b) < \varepsilon$ となる全ての b が $b \in A$ である。なお、$d(a,b)$ は二点間の距離を表す。

つまり、$a \in A$ の周りの点は必ず A に含まれる時に A を開集合という。

....

区間 $(a,b) \subset \mathbb{R}$ について

$p_0 \in (a,b)$ とするとき、ε を次のように定める。

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{p_0 - a}{2}, \frac{b - p_0}{2}\right\} \tag{1}$$

これにより 点 p_0 から距離 ε 未満の全ての点が区間 (a,b) に含まれる。

p_0 は区間内のどの点であっても上記を満たす為、(a,b) は開集合となる。

区間 $(a,b]$ は多くの点が開集合の定義を満たすが、端の点 $b \in (a,b]$ はどれほど ε を小さくとっても b より大きい点は区間 $(a,b]$ に含まれないので開集合ではない。