定義

距離関数

集合 X 上の実数値関数 d が次を満たすとする。

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \tag{1}$$
$$d(a,b) \geq 0 \tag{2}$$
$$d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b \tag{3}$$
$$d(a,b) = d(b,a) \tag{4}$$
$$d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c) \tag{5}$$

このとき、関数 d を距離関数という。

集合 X に距離関数 d が定義される場合、この 2 つの組合せ (X,d) を距離空間という。

点と集合の距離について

集合 X の部分集合 A について点 $x \in X$ と集合 A の距離 $d(x,A)$ を次のように定義する。

$$d(x,A) = \min\{d(x,a) \mid a \in A\} \tag{6}$$

集積点

位相空間 X とその部分集合 A について、$x \in X$ の任意の近傍 U が $(A \backslash \{x\}) \cap U \neq \emptyset$ となるとき $x \in X$ を A の集積点という。

連続写像

2 つの距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ 上で定義された写像 $f : X \to Y$ が連続写像であるとは ${}^\forall a \in X$ に対して次が成り立つときをいう。

$$^\forall\varepsilon > 0,\ {}^\exists\delta > 0\ s.t.\ x \in X,\ d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon \tag{7}$$

問題

1. 距離空間 (X,d) とその部分集合 A に於いて、$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$ が成り立つことを示せ。

   ……………………………………………………………………………

   $x, y \in X$ とする。$d(x,A) = \min\{d(x,a) \mid a \in A\}$ であるので、$d(y,A) = d(y,a_y)$ となる $a_y \in A$ を取ってくる。これにより次の三角不等式が成り立つ。

   $$d(x,y) + d(y,a_y) \geq d(x,a_y) \tag{8}$$

   $d(x,a_y) \geq d(x,A)$ であるので、上記不等式は次のように書き換えられる。

   $$d(x,y) + d(y,A) \geq d(x,A) \tag{9}$$

これにより次の式が得られる。

$$d(x,y) \geq d(x,A) - d(y,A) \tag{10}$$

x, y を入れ替えて同様の議論を行うことにより次式が得られる。

$$d(x,y) \geq d(y,A) - d(x,A) \tag{11}$$

よって、次が成立する。

$$d(x,y) \geq |d(x,A) - d(y,A)| \tag{12}$$

---

2. $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とするとき、0 は A の集積点であることを示せ。

 ....

 A は距離空間 $(\mathbb{R}, d)$ の部分集合である。
 $^\forall \varepsilon > 0$ として、$0 \in \mathbb{R}$ の近傍を $U = (-\varepsilon, \varepsilon)$ とする。
 $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ を満たすように一つ取ってくる。これは $\varepsilon > \frac{1}{n_\varepsilon}$ である。よって、$\frac{1}{n_\varepsilon} \in U$ である。
 また、$n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ であるので、$\frac{1}{n_\varepsilon} \in A$ である。
 $\frac{1}{n_\varepsilon} \neq 0$ であるが、$\frac{1}{n_\varepsilon} \in A \cap U$ である為、$0 \in \mathbb{R}$ は A の集積点である。

---

3. (X, d) を距離空間とする。写像 $f : X \to \mathbb{R}$ が連続であることの必要十分条件は、任意の開区間 $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ の逆像 $f^{-1}(I)$ は X の開集合であることを示せ。

 ....

 .... 写像 f が連続 $\Rightarrow$ $f^{-1}(I)$ が開集合 ....
 開集合として $\emptyset$ を考えるとき、$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ である。
 開集合として $\mathbb{R}$ を考えるとき、$f^{-1}(\mathbb{R}) = X$ である。
 開区間 $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ に対して、$^\forall p \in f^{-1}(I)$ とする。$f(p) \in I$ であるので、$^\exists \varepsilon > 0$ に対し $f(p) \in (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon) \subset I$ である。
 f は連続写像であるため、ある $\delta > 0$ が存在し、$p \in X$ の近傍 U_δ が $f(U_\delta) \subset (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon)$ となる。つまり、近傍 U_δ は $f(p)$ の近傍の逆像に含まれる。

$$U_\delta \subset f^{-1}(f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon) \subset f^{-1}(I) \tag{13}$$

 $^\forall p \in f^{-1}(I)$ に対してその近傍 U_δ が含まれる為、$U_\delta \subset f^{-1}(I)$ は開集合である。
 .... $f^{-1}(I)$ が開集合 $\Rightarrow$ 写像 f が連続 ....
 $p \in X$ とする。$\varepsilon > 0$ に対し開区間 $I = (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon)$ を定める。

条件から $f^{-1}(I)$ は開集合である。つまり、$\delta > 0$ に対し、$p \in X$ の近傍 U_δ が $U_\delta \subset f^{-1}(I)$ を満たす。

$$U_\delta = \{x \in X \mid d(p, x) < \delta\} \tag{14}$$

$U_\delta \subset f^{-1}(I)$ より

$$f(U_\delta) \subset I = (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon) \tag{15}$$

である。

よって、f は連続写像である。