実 n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ において $\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_n),\boldsymbol{b}=(b_1,\dots,b_n)$ とする。

ベクトルの大きさ (絶対値、2 乗ノルム)

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+\cdots a_n^2} \tag{1}$$

ベクトルの内積 (inner product, scalar product)

ベクトル同士で内積を定義できる。内積はスカラーになる。

$$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = a_1b_1+\cdots a_nb_n \tag{2}$$

ベクトルの外積 (vector product, cross product)

3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ においては外積が定義できる。外積はベクトルになる。

基底ベクトル $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}$ を用いると、$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e_1}+a_2\boldsymbol{e_2}+a_3\boldsymbol{e_3}$ と書ける。

多くの場合、基底ベクトルの成分表示は $\boldsymbol{e_1}=(1,0,0),\boldsymbol{e_2}=(0,1,0),\boldsymbol{e_3}=(0,0,1)$ である。

これにより外積を定義する。

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \tag{3}$$

外積の成分表示は次のようになる。

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1) \tag{4}$$

これを外積の定義とする場合もある。

命題

Schwarz (シュワルツ) の不等式 $|\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|\le|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\quad(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n)$ の等号が成立する時は以下の場合のみである。

(1). $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 又は $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

(2). $\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{b}\quad(\alpha\in\mathbb{R},\alpha\neq 0)$

....

シュワルツの不等式と必要十分な条件 (同値な条件) を示す必要がある。

まず、次の条件が成り立つ時、シュワルツの不等式の等号が成り立つことを示す。

(1). $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 又は $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

(2). $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0)$

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ の時 $\langle \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \rangle = 0, \quad |\boldsymbol{0}||\boldsymbol{b}| = 0$ より成立。

$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b} \quad (\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0},\ \alpha \neq 0)$ の時、左辺は $\langle \boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{a} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle$ となり、右辺は $|\boldsymbol{a}||\alpha\boldsymbol{a}| = |\alpha||\boldsymbol{a}|^2$ となる。$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}$ であるから次の式が成り立つ。

$$|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle| = |\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle| = |\alpha||\boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \tag{5}$$

逆に $|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ の場合を考える。

両辺を 2 乗し移項すると $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 = 0$ となる。これを変形する。

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 && (6)\\
&= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle && (7)\\
&= \langle \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle - \langle \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle && (8)\\
&= \langle \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle\boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle && (9)
\end{aligned}$$

この変形によりベクトル $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle\boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle\boldsymbol{b}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の内積が 0 であることがわかり、ここから $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ が得られる。同様の議論をベクトルを入れ替え $|\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle| = |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|$ として行うと $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ が得られる。

また、ベクトル $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle\boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{0}$ になる場合を考えると、

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle\boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{0} && (10)\\
\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle\boldsymbol{a} &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle\boldsymbol{b} && (11)\\
\boldsymbol{a} &= \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}\boldsymbol{b} && (12)
\end{aligned}$$

である。$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle$ や $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ はスカラー (実数) であるので、$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ となることがわかる。

これより一方が零ベクトルの場合 又は 一次従属の場合がわかる。

命題

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3 \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(1). $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

(2). $\boldsymbol{a} \times (\alpha\boldsymbol{b} + \beta\boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + \beta(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$

....

ベクトルの外積

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \tag{13}$$

成分表示で計算した場合次のようになる。

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1) \tag{14}$$
$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = (b_2a_3 - b_3a_2,\ b_3a_1 - b_1a_3,\ b_1a_2 - b_2a_1) \tag{15}$$

これにより $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ である。

$\boldsymbol{a} \times (\alpha\boldsymbol{b} + \beta\boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + \beta(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times (\alpha\boldsymbol{b} + \beta\boldsymbol{c}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \end{vmatrix} && (16) \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha b_1 & \alpha b_2 & \alpha b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta c_1 & \beta c_2 & \beta c_3 \end{vmatrix} && (17) \\
&= \alpha \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} && (18) \\
&= \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + \beta(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) && (19)
\end{aligned}$$

成分表示で両辺を計算しても示すことが出来る。