
定義

曲率

パラメータ表示された曲線 $\gamma(s)$ と接ベクトル $\gamma'(s)$ 、法線ベクトル $n(s)$ が次のように表される。

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)), \quad \gamma'(s) = (x'(s), y'(s)), \quad n(s) = (-y'(s), x'(s)) \quad (1)$$

$\gamma'(s)$ が単位接ベクトル ($|\gamma'(s)| = 1$) であれば、 $n(s)$ は単位法線ベクトル ($|n(s)| = 1$) である。

この時、次を満たす $\kappa(s)$ を曲率関数という。

$$\gamma''(s) = \kappa(s)n(s) \quad (2)$$

曲率の求め方

1. 単位接ベクトルを求める
2. 単位接ベクトルを微分する
3. このベクトルが単位法線ベクトルのスカラー倍になっている
4. このスカラーが曲率である

パラメータ表示された曲線 $\gamma(t) = (\gamma_x(t), \gamma_y(t))$ に対して微分を求める。

$$\gamma'(t) = (\gamma'_x(t), \gamma'_y(t)), \quad \gamma''(t) = (\gamma''_x(t), \gamma''_y(t)) \quad (3)$$

これを列に並べた行列式

$$\det(\gamma'(t), \gamma''(t)) = \begin{vmatrix} \gamma'_x(t) & \gamma''_x(t) \\ \gamma'_y(t) & \gamma''_y(t) \end{vmatrix} \quad (4)$$

を用いて曲率 $\kappa(t)$ は次のように求めることが出来る。

$$\kappa(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{|\gamma'(t)|^3} \quad (5)$$

問題

1. 次の平面曲線の曲率関数 $\kappa(t)$ を求めよ。
 - (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad a, b > 0$
 - (b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (t, \cosh t)$
 - (c) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (\frac{\cos t}{t}, \frac{\sin t}{t})$

.....

(a) $f(t) = (a \cos t, b \sin t)$ より、 $f'(t), f''(t), |f'(t)|$ を求める。

$$f'(t) = (-a \sin t, b \cos t), \quad f''(t) = (-a \cos t, -b \sin t) \quad (6)$$

$$|f'(t)| = (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

これを用いて $\det(f', f'')$ を求める。

$$\det(f', f'') = \begin{vmatrix} -a \sin t & -a \cos t \\ b \cos t & -b \sin t \end{vmatrix} = ab \sin^2 t + ab \cos^2 t = ab \quad (8)$$

よって、曲率 $\kappa(t)$ は次のようになる。

$$\kappa(t) = \frac{\det(f', f'')}{|f'|^3} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \quad (9)$$

(b) $f(t) = (t, \cosh t)$ より $f'(t), f''(t), |f'(t)|$ を求める。

$$f'(t) = (1, \sinh t), \quad f''(t) = (0, \cosh t), \quad |f'(t)| = \frac{1}{2}(e^{2t} + e^{-2t} + 2)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

これを用いて $\det(f', f'')$ を求める。

$$\det(f', f'') = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sinh t & \cosh t \end{vmatrix} = \cosh t \quad (11)$$

よって、曲率 $\kappa(t)$ は次のようになる。

$$\kappa(t) = \frac{\det(f', f'')}{|f'|^3} = \frac{8 \cosh t}{(e^{2t} + e^{-2t} + 2)^{\frac{3}{2}}} \quad (12)$$

(c) $f(t) = (\frac{\cos t}{t}, \frac{\sin t}{t})$ より $f'(t), f''(t), |f'(t)|$ を求める。

$$f'(t) = \left(-\frac{\sin t}{t} - \frac{\cos t}{t^2}, \frac{\cos t}{t} - \frac{\sin t}{t^2} \right) \quad (13)$$

$$f''(t) = \left(-\frac{\cos t}{t} + \frac{2 \sin t}{t^2} + \frac{2 \cos t}{t^3}, -\frac{\sin t}{t} - \frac{2 \cos t}{t^2} - \frac{2 \sin t}{t^3} \right) \quad (14)$$

$$|f'(t)| = \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{t^2}(t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

これを用いて $\det(f', f'')$ を求める。

$$\det(f', f'') = \begin{vmatrix} -\frac{\sin t}{t} - \frac{\cos t}{t^2} & -\frac{\cos t}{t} + \frac{2 \sin t}{t^2} + \frac{2 \cos t}{t^3} \\ \frac{\cos t}{t} - \frac{\sin t}{t^2} & -\frac{\sin t}{t} - \frac{2 \cos t}{t^2} - \frac{2 \sin t}{t^3} \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$= \frac{1}{t^5}(t^3 + 4t \sin^2 t + 4 \sin t \cos t) \quad (17)$$

よって、曲率 $\kappa(t)$ は次のようになる。

$$\kappa(t) = \frac{\det(f', f'')}{|f'|^3} = \frac{t(t^3 + 4t \sin^2 t + 4 \sin t \cos t)}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (18)$$

.....

(a) $f'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$ であるので、 $|f'(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$ である。

単位接ベクトルと単位法線ベクトルは

$$\frac{1}{|f'(t)|} f'(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} (-a \sin t, b \cos t) \quad (19)$$

$$n(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} (-b \cos t, -a \sin t) \quad (20)$$

である。

$$\left(\frac{1}{|f'(t)|} f'(t) \right)' \quad (21)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} f''(t) - \frac{\sin t \cos t (a^2 - b^2)}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} f'(t) \quad (22)$$

$$= \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t) f''(t) - \sin t \cos t (a^2 - b^2) f'(t)}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \quad (23)$$

$f''(t) = (-a \cos t, -b \sin t)$ であるので、式 (23) の分子の各成分を計算すると

$$(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)(-a \cos t) - \sin t \cos t (a^2 - b^2)(-a \sin t) = -ab^2 \cos t \quad (24)$$

$$(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)(-b \sin t) - \sin t \cos t (a^2 - b^2)(b \cos t) = -a^2 b \sin t \quad (25)$$

$$\left(\frac{1}{|f'(t)|} f'(t) \right)' = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} (-b \cos t, -a \sin t) \quad (26)$$

(b) $f(t) = (t, \cosh t)$ より $f'(t) = (1, \sinh t)$, $f''(t) = (0, \cosh t)$ である。また、 $|f'(t)| = \frac{1}{2} \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}$ であるため単位接ベクトルは次のようになる。

$$\frac{1}{|f'(t)|} f'(t) = \frac{2}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}} (1, \sinh t) \quad (27)$$

$$\left(\frac{1}{|f'(t)|} f'(t) \right)' = \frac{2}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}} f''(t) - \frac{2e^{2t} - 2e^{-2t}}{(e^{2t} + e^{-2t} + 2)^{\frac{3}{2}}} f'(t) \quad (28)$$

$$= \frac{2(e^{2t} + e^{-2t} + 2) f''(t) - (2e^{2t} - 2e^{-2t}) f'(t)}{(e^{2t} + e^{-2t} + 2)^{\frac{3}{2}}} \quad (29)$$

$$2(e^{2t} + e^{-2t} + 2)(0) - (2e^{2t} - 2e^{-2t})(1) \quad (30)$$

$$= -2(e^t + e^{-t})(e^t - e^{-t}) = -8 \sinh t \cosh t \quad (31)$$

$$2(e^{2t} + e^{-2t} + 2)(\cosh t) - (2e^{2t} - 2e^{-2t})(\sinh t) \quad (32)$$

$$= (e^{2t} + e^{-2t} + 2)(e^t + e^{-t}) - (e^{2t} - e^{-2t})(e^t - e^{-t}) = 4(e^t + e^{-t}) \quad (33)$$

$$\left(\frac{1}{|f'(t)|} f'(t) \right)' = \frac{4(e^t + e^{-t})}{(e^{2t} + e^{-2t} + 2)^{\frac{3}{2}}} (-\sinh t, 1) \quad (34)$$

$$= \frac{8 \cosh t}{(e^{2t} + e^{-2t} + 2)^{\frac{3}{2}}} (-\sinh t, 1) \quad (35)$$

(c) $f(t) = (\frac{\cos t}{t}, \frac{\sin t}{t})$ より $f'(t), f''(t)$ を求める。

$$f'(t) = \left(-\frac{\sin t}{t} - \frac{\cos t}{t^2}, \frac{\cos t}{t} - \frac{\sin t}{t^2} \right) \quad (36)$$

$$f''(t) = \left(-\frac{\cos t}{t} + \frac{2 \sin t}{t^2} + \frac{2 \cos t}{t^3}, -\frac{\sin t}{t} - \frac{2 \cos t}{t^2} - \frac{2 \sin t}{t^3} \right) \quad (37)$$

2. 正の値を取る C^2 -級関数 $f(x)$ について、極座標表示された曲線

$$\theta \mapsto (x(\theta), y(\theta)) = (f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta) \quad (38)$$

の点 $(x(\theta), y(\theta))$ における曲線 $\kappa(\theta)$ は

$$\kappa = \frac{f^2 + 2(f')^2 - ff''}{\{f^2 + (f')^2\}^{\frac{3}{2}}} \quad (39)$$

で与えられることを示せ。

.....

$x(\theta), y(\theta)$ の 2 階の導関数を求める。

$$x'(\theta) = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta \quad (40)$$

$$y'(\theta) = f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta \quad (41)$$

$$x''(\theta) = f''(\theta) \cos \theta - 2f'(\theta) \sin \theta - f(\theta) \cos \theta \quad (42)$$

$$y''(\theta) = f''(\theta) \sin \theta + 2f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta \quad (43)$$

次の行列を計算する。

$$\begin{vmatrix} x'(\theta) & x''(\theta) \\ y'(\theta) & y''(\theta) \end{vmatrix} = x'(\theta)y''(\theta) - x''(\theta)y'(\theta) \quad (44)$$

$$x'(\theta)y''(\theta) = (f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)(f''(\theta)\sin\theta + 2f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta) \quad (45)$$

$$= f'(\theta)\cos\theta(f''(\theta)\sin\theta + 2f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta) \quad (46)$$

$$- f(\theta)\sin\theta(f''(\theta)\sin\theta + 2f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta) \quad (47)$$

$$= f'(\theta)f''(\theta)\sin\theta\cos\theta + 2(f'(\theta))^2\cos^2\theta - f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta \quad (48)$$

$$- f(\theta)f''(\theta)\sin^2\theta - 2f(\theta)f'(\theta)\sin\theta\cos\theta + (f(\theta))^2\sin^2\theta \quad (49)$$

$$x''(\theta)y'(\theta) = (f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)(f''(\theta)\cos\theta - 2f'(\theta)\sin\theta - f(\theta)\cos\theta) \quad (50)$$

$$= f'(\theta)\sin\theta(f''(\theta)\cos\theta - 2f'(\theta)\sin\theta - f(\theta)\cos\theta) \quad (51)$$

$$+ f(\theta)\cos\theta(f''(\theta)\cos\theta - 2f'(\theta)\sin\theta - f(\theta)\cos\theta) \quad (52)$$

$$= f'(\theta)f''(\theta)\sin\theta\cos\theta - 2(f'(\theta))^2\sin^2\theta - f(\theta)f'(\theta)\sin\theta\cos\theta \quad (53)$$

$$+ f(\theta)f''(\theta)\cos^2\theta - 2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta - (f(\theta))^2\cos^2\theta \quad (54)$$

$$\begin{vmatrix} x'(\theta) & x''(\theta) \\ y'(\theta) & y''(\theta) \end{vmatrix} = 2(f'(\theta))^2 - f(\theta)f''(\theta) + (f(\theta))^2 \quad (55)$$

ベクトルの大きさ $|(x'(\theta), y'(\theta))|$ を求める。

$$(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = (f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)^2 + (f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)^2 \quad (56)$$

$$= (f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2 \quad (57)$$

$$|(x'(\theta), y'(\theta))| = ((f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2)^{\frac{1}{2}} \quad (58)$$

これらを合わせて曲率関数 $\kappa(\theta)$ は次のように求まる。

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{|(x'(\theta), y'(\theta))|^3} \begin{vmatrix} x'(\theta) & x''(\theta) \\ y'(\theta) & y''(\theta) \end{vmatrix} = \frac{2(f'(\theta))^2 - f(\theta)f''(\theta) + (f(\theta))^2}{((f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (59)$$

3. 2変数の C^2 -級関数 $f(x, y)$ は次を満たすとする。

- $Z_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} \neq \emptyset$
- $\forall (a, b) \in Z_f$ に対して $(f_x(a, b), f_y(a, b)) \neq (0, 0)$

この時、陰関数定理より、 Z_f は Z_f の各点の近傍で曲線片として表せる。よって、 $(a, b) \in Z_f$ に対して、 (a, b) における Z_f の曲率 $\kappa(a, b)$ を定義することが出来る。(ただし、曲線の向き付けによって曲率の符号が逆になる。)

曲率 $\kappa(a, b)$ は次の式で表されることを示せ。

$$\kappa(a, b) = \pm \frac{f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}}(a, b) \quad (60)$$

