
$6x^5+12x^2+4$ の既約性を判定せよ。

……………………………………………………………………

整数上の多項式

$6x^5+12x^2+4=3(2x^5+4x^2+2)$ であるので、可約である。

有理数上の多項式

$6x^5+12x^2+4=2(3x^5+6x^2+2)$ であるので、$3x^5+6x^2+2$ の既約性を調べる。

アイゼンシュタインの既約判定法より、係数 $(3,0,0,6,0,2)$ を調べる。

- 最高次数の係数 3 は素数 2 で割り切れない
- 最高次数の係数以外は素数 2 で割り切れる
- 定数項 2 は素数の二乗 2^2 で割り切れない

これにより既約であることがわかる。

実数上の多項式

$3x^5+6x^2+2$ の既約性を調べる。

$y=3x^5+6x^2+2$ のグラフを考えると左下から右上に向かうグラフである。つまり、$0=3x^5+6x^2+2$ を満たす実数 $x=\alpha$ が存在する。よって、$x-\alpha$ と 4 次式の積に分かれるため可約である。

複素数上の多項式

代数学の基本定理により複素数係数の多項式は 1 次式の積に分けられる。

$6x^5+12x^2+4$ は可約である。

$f\in\mathbb{C}[X]$ において 2 次以上の式はすべて可約である。

……………………………………………………………………

代数学の基本定理より従う。

$f\in\mathbb{R}[X]$ において 3 次以上の式はすべて可約である。

……………………………………………………………………

ある虚数 α が存在し、$f(\alpha)=0$ であるとする。この時、複素共役な元 $\overline{\alpha}$ も $f(\overline{\alpha})=0$ である。これは多項式 f の係数が実数であることから言える。

これにより $f(x)$ は $(x-\alpha)$ と $(x-\overline{\alpha})$ を因子に持つことがわかる。この積は次のように $\mathbb{R}[x]$ の元である。

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}\in\mathbb{R}[x] \tag{1}$$

よって、ある虚数根を持つ多項式は 2 次式を因子に持つ。

代数学の基本定理により必ず複素数根を持つので、実数根であれば 1 次式、虚数根であれば 2 次式に分解できる。この為、3 次以上の多項式は可約となる。
