

以下の X と Y が位相同型であるかないかを示せ。

(1). $X = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid -2 < x < 5\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R}^1 \mid 0 < y\}$

(2). $X = \bigcirc$, $Y = \bigoplus$

(1). $X = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid -2 < x < 5\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R}^1 \mid 0 < y\}$

.....
開区間 $(-2, 5)$ から開区間 $(0, \infty)$ への写像 f を次のように定義します。

$$f(x) = -\frac{x+2}{x-5} \quad (1)$$

この f は連続写像であり全単射です。

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \infty \quad (2)$$

この時、逆写像が存在し次の式で表せます。

$$f^{-1}(y) = \frac{5y-2}{y+1} \quad (3)$$

写像 f は全単射な連続写像でその逆写像 f^{-1} も連続写像であるので、位相同型写像となり、 X と Y は位相同型であることがわかります。

(2). $X = \bigcirc$, $Y = \bigoplus$

.....
円周 S^1 、線分 l_x 、 l_y を次のようにおきます。

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad (4)$$

$$l_x = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1\} \quad (5)$$

$$l_y = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\} \quad (6)$$

これらを使うと 概ね $X = S^1 \cup l_x$ と $Y = S^1 \cup l_x \cup l_y$ になります。

この時、 X から Y への全単射かつ連続な写像は存在しません。これは、 X は一筆書き出来るが Y は一筆書きできないので、全単射な写像は連続写像ではなくなるからです。一筆書きについては X は半オイラーグラフですが、 Y は奇数分岐が 3 以上ある為オイラーグラフではないことからわかります。

これにより X と Y は同相ではないことになります。