G を群とする。

共役類 (conjugacy class)

$a \in G$ に対して、a を含む共役類を $K(a)$ を書く。

$$K(a) = \{xax^{-1} \mid x \in G\} \tag{1}$$

$a, b \in G$ について $b = xax^{-1}$ となる $x \in G$ が存在するとき、b は a に共役 (conjugate) であるという。ここでは共役であるとき $a \sim b$ と書く。共役は同値関係である。

中心

G の任意の元と可換な元全体の集合を $Z(G)$ とかく。

$$Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba \ ({}^\forall b \in G)\} \tag{2}$$

$Z(G)$ は G の正規部分群である。この $Z(G)$ を G の中心という。

中心化群

群 G の部分集合 S の中心化群 $Z(S)$ は次で定義される。

$$Z(S) = \{g \in G \mid gs = sg \ ({}^\forall s \in S)\} \tag{3}$$

特に部分群が要素一つだけの集合 $\{a\}$ であるとき、中心化群は $Z(a)$ と書く。

$$Z(a) = \{g \in G \mid ga = ag\} \tag{4}$$

同値関係

集合 S において次の 3 つの性質をすべて満たす関係を同値関係という

- **反射律** $a \sim a$
- **対称律** $a \sim b$ ならば $b \sim a$
- **推移律** $a \sim b,\ b \sim c$ ならば $a \sim c$

正規部分群

部分集合 $N \subset G$ について、$gNg^{-1} \subset N \ ({}^\forall g \in G)$ が成り立つとき、N を G の正規部分といい、$N \triangleleft G$ と書く。

G は群とする。

1. 共役が同値関係であることを示せ。

……………………………………………………………………

G を群とし、$a, b \in G$ とする。

a と b が共役 $\Leftrightarrow {}^{\forall}x \in G\ b = xax^{-1}$

同値関係の 3 条件 (反射律、対称律、推移律) を確認する。

反射律

$e \in G$ を単位元とする。

$$eae^{-1} = eae = a \tag{5}$$

よって、$a \sim a$ である。

対称律

$$\begin{aligned} a \sim b \Rightarrow b = xax^{-1} \quad &\Rightarrow x^{-1}bx = x^{-1}xax^{-1}x \quad \Rightarrow x^{-1}bx = a & (6)\\ \Rightarrow a = x^{-1}bx \quad &\Rightarrow a = (x^{-1})b(x^{-1})^{-1} & (7)\\ \Rightarrow a = yby^{-1} \quad (y = x^{-1} \in G) \quad &\Rightarrow b \sim a & (8)\end{aligned}$$

よって、$a \sim b$ ならば $b \sim a$ である。

推移律

$$\begin{aligned} a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow b = xax^{-1},\ c = xbx^{-1} \qquad &\Rightarrow c = xxax^{-1}x^{-1} & (9)\\ \Rightarrow c = (xx)a(xx)^{-1} \qquad &\Rightarrow a \sim c & (10)\end{aligned}$$

よって、$a \sim b,\ b \sim c$ ならば $a \sim c$ である。

以上により、共役 $\sim$ は同値関係である。

---

2. 次を示せ。

(a) $a \in Z(G) \Rightarrow K(a) = \{a\}$。特に $K(e) = \{e\}$

……………………………………………………………………

$Z(G)$ は群 G の中心である。

$$Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba\ ({}^{\forall}b \in G)\} \tag{11}$$

a の共役類 $K(a)$ は次のような集合である。

$$K(a) = \{xax^{-1} \mid x \in G\} \tag{12}$$

$a \in Z(G)$ より、a は G の任意の元と可換である。よって、$xax^{-1} = xx^{-1}a = ea = a$ であるので、$K(a)$ の元は a のみになる。

単位元 $e \in G$ も $e \in Z(G)$ であるから同様に $K(e) = \{e\}$ である。

(b) $G \triangleright N \Rightarrow N$ は G の共役類のいくつかの合併集合である。

…………………………………………………………………………

${}^{\forall}n \in N$ に対して、${}^{\exists}n' \in N$ が $n' = xnx^{-1} \quad (x \in G)$ となる。これに左から x^{-1}、右から x をかけると $(x^{-1})n'(x^{-1})^{-1} = n$ となり、$n \in K(n')$ となる。つまり、正規部分群の元は正規部分群の共役類のどれかに含まれる。

$$N \subset \bigcup_{n \in N} K(n) \tag{13}$$

$n \in N$ の共役類 $K(n)$ の定義は

$$K(n) = \{xnx^{-1} \mid x \in G\} \tag{14}$$

であるから正規部分群 N に含まれ、$K(n) \subset N$ を満たす。
つまり、

$$\bigcup_{n \in N} K(n) \subset N \tag{15}$$

である。
よって、次の式を満たす。

$$N = \bigcup_{n \in N} K(n) \tag{16}$$

---

3. $a \in G$ に対し、$f : G \to K(a)$ を $f(x) = xax^{-1}$ とする。このとき、次を示せ。

(a) f は全射

…………………………………………………………………………

任意の $K(a)$ の元は gag^{-1} $(g \in G)$ という形をしている。
よって、$f(g) = gag^{-1}$ となる $g \in G$ が存在する為、f は全射である。

(b) $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x, y$ は $G/Z(a)$ の同じ類に属する

…………………………………………………………………………

$f(x) = f(y)$ とする。
$f(x) = xax^{-1},\ f(y) = yay^{-1}$ より $xax^{-1} = yay^{-1}$ である。
右から x、左から y^{-1} をかけると $y^{-1}xa = ay^{-1}x$ である。
$y^{-1}xa = ay^{-1}x$ より $y^{-1}x \in Z(a)$ である。
よって、$G/Z(a)$ 上で $y^{-1}x = e$ である為、$x = y$ である。
これを逆にたどると x, y が $G/Z(a)$ 同じ類に属することから $f(x) = f(y)$ を示せる。

---

4. 定理 1.7.1 より $|K(a)| = (G : Z(a))$ が示せたので、これを h_i と置いた。
   $(G : Z(a))$ は G の元の数 $|G|$ を $Z(a)$ の元の数 $|Z(a)|$ で割った値を意味するので、$(G : Z(a)) = |G| \div |Z(a)|$ である。このとき、必ず割り切れるようになっている。
   $h_i = (G : Z(a_i))$ と置けば、$h_i \times |Z(a_i)| = |G|$ であるので、h_i は $|G|$ を割り切る数である。

---

5. $g = |G|,\ h_i = K(a_i)$ とする。
   集合の直和 $G = \bigsqcup_{i=1}^{t} K(a_i)$ から $g = h_1 + \cdots + h_t$ である。

   ……………………………………………………………………………

   集合の直和 $G = \bigsqcup_{i=1}^{t} K(a_i)$ は $G = \bigcup_i K(a_i)$ かつ任意の 2 つの元 a_i, a_j について $K(a_i) \cap K(a_j) = \emptyset$ である。
   G の位数は $|K(a_i)|$ の和になっているので、$g = h_1 + \cdots + h_t$ である。

---

6. $h_1 = |K(e)|$ とすれば、$h_1 = 1$ である。

   ……………………………………………………………………………

   $K(a)$ は次のように定義されている。

$$K(a) = \{xax^{-1} \mid x \in G\} \tag{17}$$

   単位元 $e \in G$ は G の任意の元を常に可換である。つまり、$^\forall g \in G$ に対して $geg^{-1} = gg^{-1}e = ee = e$ である。
   これにより $K(e) = \{e\}$ であるから $|K(e)| = 1$ である。

同値関係について

a と b が共役であることとは次のような定義です。

> 群 G の 2 つの元 a, b に対して、$b = gag^{-1}$ を満たす $g \in G$ が存在する。

共役であることを $a \sim b$ とここでは書くことにします。なお、$\sim$ は同値関係でよく利用される記号です。

対称律 $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

a と b が共役であれば b と a が共役であるときに対称律を満たすという。

$$a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} \exists g \in G \ \text{ s.t. } \ b = gag^{-1} \tag{18}$$

$$b \sim a \overset{\text{def}}{\iff} \exists h \in G \ \text{ s.t. } \ a = hbh^{-1} \tag{19}$$

上記式が共役の定義からわかるので、右側の関係性を調べる。

$$b = gag^{-1} \quad \Rightarrow g^{-1}bg = g^{-1}gag^{-1}g \quad \Rightarrow g^{-1}bg = a \quad \Rightarrow a = g^{-1}bg \tag{20}$$

$g \in G$ より $g^{-1} \in G$ であるから $h = g^{-1}$ と置くと $a = hbh^{-1}$ が得られる。

$h \in G$ であるから b と a は共役 $(b \sim a)$ である事がわかる。

推移律 $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

a と b が共役であり、b と c が共役である時、a と c が共役になる時に推移律を満たすという。

$$a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} \exists g \in G \;\text{ s.t. }\; b = gag^{-1} \tag{21}$$

$$b \sim c \overset{\text{def}}{\iff} \exists h \in G \;\text{ s.t. }\; c = hbh^{-1} \tag{22}$$

$$a \sim c \overset{\text{def}}{\iff} \exists i \in G \;\text{ s.t. }\; c = iai^{-1} \tag{23}$$

上記の上 2 つから 3 つ目を導き出せれば推移律を満たすことがわかる。

$b = gag^{-1},\ c = hbh^{-1}$ から b を代入すると $c = hgag^{-1}h^{-1}$ が得られる。

$i = hg$ と置くと $i^{-1} = (hg)^{-1} = g^{-1}h^{-1}$ であるので、$c = hgag^{-1}h^{-1} = iai^{-1}$ となる。

$g, h \in G$ より $gh, (gh)^{-1} \in G$ であるので、$i \in G$ となる。

よって、$a \sim c$ であり、a と c は共役であることがわかる。

....

(3b) の解説

$$f(x) = f(y) \quad \iff \quad xax^{-1} = yay^{-1} \tag{24}$$

$$\iff \quad y^{-1}xa(y^{-1}x)^{-1} = a \tag{25}$$

$$\iff \quad y^{-1}x \in Z(a) \tag{26}$$

$$\iff \quad x, y \text{ は } G/Z(a) \text{ の同じ類に属する} \tag{27}$$

$f(x) = f(y) \iff xax^{-1} = yay^{-1}$

写像 f の定義より $f(x) = xax^{-1},\ f(y) = yay^{-1}$ である。

これより $xax^{-1} = yay^{-1}$ が得られる。

逆に $xax^{-1} = yay^{-1}$ であれば、写像 f の定義より $f(x) = f(y)$ である。

$xax^{-1} = yay^{-1} \iff y^{-1}xa(y^{-1}x)^{-1} = a$

$xax^{-1} = yay^{-1}$ の両辺に左から y^{-1} をかけると $y^{-1}xax^{-1} = ay^{-1}$ となる。

これに右から y をかけると $y^{-1}xax^{-1}y = a$ となる。

ここで、$x^{-1}y = (y^{-1}x)^{-1}$ であるので、$y^{-1}xa(y^{-1}x)^{-1} = a$ となる。

逆に、$y^{-1}xa(y^{-1}x)^{-1} = a$ であるとする。左から y、右から y^{-1} をかけることで $xax^{-1} = yay^{-1}$ となる。

$y^{-1}xa(y^{-1}x)^{-1} = a \Longleftrightarrow y^{-1}x \in Z(a)$

$Z(a)$ とは a と可換な G の元の全体の集合である。

$$Z(a) = \{g \in G \mid ga = ag\} \tag{28}$$

$g = y^{-1}x$ と置くと、$y^{-1}xa(y^{-1}x)^{-1} = gag^{-1}$ であるので、$gag^{-1} = a$ を得る。これに右から g をかけると $ga = ag$ となる。つまり、$g \in Z(a)$ である。

よって、$y^{-1}x \in Z(a)$ である。

逆に、$y^{-1}x \in Z(a)$ であれば、$Z(a)$ の定義より、$y^{-1}xa = ay^{-1}x$ である。右から $(y^{-1}x)^{-1}$ をかけることで、$y^{-1}xa(y^{-1}x)^{-1} = a$ が得られる。

$y^{-1}x \in Z(a) \Longleftrightarrow x, y$ は $G/Z(a)$ の同じ類に属する

$G/Z(a)$ は G の元を $Z(a)$ を基準にして分割した集合であり、分割した集合を同値類と呼んだりする。

$Z(a)$ を基準にして分割するということは、$g, h \in G$ について $g^{-1}h \in Z(a)$ なら g, h は同じグループに属し、$g^{-1}h \notin Z(a)$ なら g, h は異なるグループに属するという分け方をする。

$y^{-1}x \in Z(a)$ であれば、x, y は $G/Z(a)$ で同じ類に属することになる。

逆に、x, y は $G/Z(a)$ で同じ類に属するのであれば、$G/Z(a)$ の定義から $y^{-1}x \in Z(a)$ であることが言える。