$(-1)\times(-1)$

次の式 (1)、(2)、(3)、(4) を用いて $(-1)\times(-1)=1$ を示す。

加法 (足し算)

零元 (加法の単位元)0 の性質

$$0+\alpha=\alpha+0=\alpha \tag{1}$$

逆元と零元の性質 (α の逆元は $-\alpha$)

$$\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0 \tag{2}$$

乗法 (掛け算)

乗法の単位元 1 の性質

$$1\times\beta=\beta\times1=\beta \tag{3}$$

分配法則

加法と乗法の性質

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c \tag{4}$$

$(-1)\times(-1)$ を示す為にまず $(-1)\times0=0$ を示す。

$$\begin{aligned}(-1)\times0=&(-1)\times(0+0) && (5)\\ =&(-1)\times0+(-1)\times0 && (6)\end{aligned}$$

式 (5) は零元の性質 (1) より $\alpha=0$ とした式 $0+0=0$ から得られる。

式 (6) は分配法則 (4) より $a=-1,\ b=c=0$ とした式から得られる。

この式を次のように変形する。

$$\begin{aligned}(-1)\times0=&(-1)\times0+(-1)\times0 && (7)\\ (-1)\times0+(-(-1)\times0)=&(-1)\times0+(-1)\times0+(-(-1)\times0) && (8)\\ 0=&(-1)\times0 && (9)\end{aligned}$$

式 (8) は両辺に $(-1)\times0$ の逆元 $-(-1)\times0$ を加えている。

式 (9) は逆元と零元の性質 (2) より $\alpha=(-1)\times0$ とした式 $(-1)\times0+(-(-1)\times0)=0$ から得られる。

これにより $(-1)\times0=0$ が示せた。

$$
\begin{aligned}
0 =&(-1) \times 0 && (10)\\
=&(-1) \times ((-1) + 1) && (11)\\
=&(-1) \times (-1) + (-1) \times 1 && (12)\\
=&(-1) \times (-1) + (-1) && (13)
\end{aligned}
$$

式 (11) は逆元と零元の性質 (2) より $\alpha = 1$ とした式 $0 = (-1) + 1$ から得られる。

式 (12) は分配法則 (4) より $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$ とした式から得られる。

式 (13) は単位元の性質 (3) より $\beta = -1$ とした式 $(-1) \times 1 = (-1)$ から得られる。

$$
\begin{aligned}
0 =&(-1) \times (-1) + (-1) && (14)\\
0 + 1 =&(-1) \times (-1) + (-1) + 1 && (15)\\
0 + 1 =&(-1) \times (-1) + 0 && (16)\\
1 =&(-1) \times (-1) && (17)
\end{aligned}
$$

式 (15) は両辺に -1 の逆元 1 を加えている。

式 (16) は逆元と零元の性質 (2) より $\alpha = 1$ とした式 $(-1) + 1 = 0$ から得られる。

式 (16) は零元の性質 (1) より $\alpha = 1$ とした式と $\alpha = (-1) \times (-1)$ とした式から得られる。

以上により $(-1) \times (-1) = 1$ であることが示せた。

$$
(-1) \times 0 = (-1) \times (0 + 0) = (-1) \times 0 + (-1) \times 0 \qquad (18)
$$

$$
0 = (-1) \times 0 \qquad (19)
$$

$$
\begin{aligned}
(-1) \times (-1) =&(-1) \times (-1) + 0 && (20)\\
=&(-1) \times (-1) + (-1) + 1 && (21)\\
=&(-1) \times (-1) + (-1) \times 1 + 1 && (22)\\
=&(-1) \times ((-1) + 1) + 1 && (23)\\
=&(-1) \times 0 + 1 && (24)\\
=&0 + 1 && (25)\\
=&1 && (26)
\end{aligned}
$$
