次の積分を求めよ。

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\mathrm{d}x \tag{1}$$

この広義積分を複素数上の積分として考える。

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{2}$$

被積分関数 $\frac{\sqrt{z}}{z^3+1}$ に対して、積分経路を実軸上 $0 \to R$ と半径 R の円周上 $R \to Ri$ と虚軸上 $Ri \to 0$ の 3 つの部分 C_1, C_2, C_3 からなる閉曲線 C とする。

この時、C_1 上の積分 $\int_{C_1} \frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z$ は $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\mathrm{d}x$ と一致する。

C 上の積分は次のような式となる。

$$\int_C \frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z = \int_{C_1} \frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z + \int_{C_2} \frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z + \int_{C_3} \frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z \tag{3}$$

$z^3+1=0$ を満たす複素数は $z^3=-1=e^{(2n+1)\pi i}$ から $z = e^{\frac{\pi}{3}i}, e^{\pi i}, e^{\frac{5\pi}{3}i}$ である。これらは関数 $\frac{\sqrt{z}}{z^3+1}$ の極となりえるが、R を十分大きな数とした時に C の内部に含まれるのは $z = e^{\frac{\pi}{3}i}$ のみである。留数定理により $\int_C \frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z$ は $z = e^{\frac{\pi}{3}i}$ の留数から求まる。

$$(z-e^{\frac{\pi}{3}i}) \times \frac{\sqrt{z}}{z^3+1} = (z-e^{\frac{\pi}{3}i}) \times \frac{\sqrt{z}}{(z-e^{\frac{\pi}{3}i})(z-e^{\pi i})(z-e^{\frac{5\pi}{3}i})} = \frac{\sqrt{z}}{(z-e^{\pi i})(z-e^{\frac{5\pi}{3}i})} \tag{4}$$

上記の関数は $z = e^{\frac{\pi}{3}i}$ の時に値を持つので、1 位の極である。

この時の留数を求める。

$$\lim_{z \to e^{\frac{\pi}{3}i}} \frac{\sqrt{z}}{z^3+1} = \lim_{z \to e^{\frac{\pi}{3}i}} \frac{1}{2}\frac{z^{-1/2}}{3z^2} = \frac{1}{6}e^{\frac{5\pi}{6}i} \tag{5}$$

よって、C 上の積分は次のようになる。

$$\int_C \frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z = 2\pi i \times \frac{1}{6}e^{\frac{5\pi}{6}i} = \frac{1}{3}\pi i e^{\frac{5\pi}{6}i} \tag{6}$$

C は 3 つに分かれるためそれぞれの積分を考える。

C_2 は半径 R の円周上であるので、$z = Re^{i\theta}$ で θ が $0 \to \frac{1}{2}\pi$ の範囲の区間となる。$\mathrm{d}z = iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ を利用し C_2 上の積分を計算する。

$$\int_{C_2} \frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sqrt{Re^{i\theta}}}{(Re^{i\theta})^3+1} iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{iR^{3/2}e^{\frac{3}{2}i\theta}}{R^3e^{3i\theta}+1}\mathrm{d}\theta \tag{7}$$