Laplacian

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} \tag{1}$$

Report 1.12

U は連結とする。関数 u は U 上で C^2-級、$\overline{U}$ 上で C^1-級であり、次を満たしているとする。

$$\Delta u = 0 \ (\text{in } U),\ u = g \ (\text{on } \partial U,\ g \geq 0) \tag{2}$$

g が ∂U 上のどこかで正であるなら u は U 内で常に正であることを示せ。

………………………………………………………………………………

$\overline{U}$ 上で C^1-級であるので、u は連続である。この為、ある点 $x_0 \in \overline{U}$ が存在し、$u(x_0)$ は最小となる。つまり、$u(x_0) \leq u(x)$ $({}^\forall x \in \overline{U})$ である。

もし、$x_0 \in \partial U$ であれば、$u(x_0) = g(x_0) \geq 0$ であり、$0 \leq u(x_0) \leq u(x)$ となる。

もし、$x_0 \in U$ であれば、u は U で定数関数となる。∂U にて $g \leq 0$ なる点があるので $u \geq 0$ である。

Report 1.13

$$\tilde{u} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy \tag{3}$$

$n = 2$ のとき、$\tilde{u}$ は有界ではないことを示せ。

………………………………………………………………………………

調和関数 $\Phi(x)$ は $n = 2$ において $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \log |x|$ である。

$|x|$ がそれぞれ 0 と ∞ に飛ばした場合、$\Phi(x) \to \infty$ $(|x| \to 0)$ と $\Phi(x) \to -\infty$ $(|x| \to \infty)$ であるので、$|\Phi(x)| \to \infty$ である。

$$\tilde{u} = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(y) f(x-y) dy \tag{4}$$

Report 1.14

$n = 2,\ N = 3$ のとき、次の式を示せ。

$$u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \tag{5}$$

………………………………………………………………………………

---

1. 次の初期値問題の解である関数 u を求めよ。

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du + cu = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{6}$$

$c \in \mathbb{R}$ と $b \in \mathbb{R}^n$ は定数とする。

....

式を次のように変形する。

$$u_t + b \cdot Du + cu = 0 \Rightarrow u_t + b \cdot Du = -cu \tag{7}$$

ここから、左辺は u を微分すると u の定数倍になることが読み取れる。

$$u = \exp\left(\frac{c}{n+1}\left(t + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{b_i}\right)\right) \tag{8}$$

$$u(x,t) = g(x - tb) \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0) \tag{9}$$

---

2. Laplace 方程式 $\Delta u = 0$ は回転不変である、つまり n 次直交行列 O で変換しても Laplace 方程式を満たすことを示せ。

$$v(x) = u(Ox) \quad (x \in \mathbb{R}^n) \Rightarrow \Delta v = 0 \tag{10}$$

....

O を n 次直交行列とし、$O = \{o_{ij}\}$ とする。O は直交行列であるので、O の転置行列と逆行列が一致する。

$$O^t O = {}^t O O = E, \quad \sum_{i=1}^{n} o_{ki} o_{li} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & (k = l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases} \tag{11}$$

x はベクトルであり、その成分を $x = (x_1, \ldots, x_n)$ とし、$\bar{x} = Ox$ とする。これにより、$v(x) = u(\bar{x})$ となる。

x_i における偏微分は合成関数の微分より次のように変形できる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} = \sum_{k=1}^{n} o_{ki} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} \tag{12}$$

2 階の偏微分は次のように求められる。

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} o_{ki}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_k}\right)\cdot\left(\sum_{l=1}^{n} o_{li}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_l}\right) = \sum_{k,l=1}^{n} o_{ki}o_{li}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k\partial \bar{x}_l} \tag{13}$$

これらを用いて Δv を計算する。

$$\begin{aligned}\Delta v =&\Delta u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{n} o_{ki}o_{li}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k\partial \bar{x}_l}u(\bar{x}) &(14)\\ =&\sum_{k,l=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} o_{ki}o_{li}\right)\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k\partial \bar{x}_l}u(\bar{x}) = \sum_{k,l=1}^{n}\delta_{kl}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k\partial \bar{x}_l}u(\bar{x}) &(15)\\ =&\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k^2}u(\bar{x}) = \Delta u &(16)\end{aligned}$$

よって、$\Delta u = 0$ であれば、$\Delta v = 0$ である。

---

3. 平均値定理の証明を利用し、$n \geq 3$ の時、次の式を証明せよ。

$$\begin{aligned}u(0) =&\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(0,r)} g dS\\ &+\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\int_{B(0,r)}\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}-\frac{1}{r^{n-2}}\right) f dx\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{cases}-\Delta u = f & \text{in } B^0(0,r)\\ u = g & \text{on } \partial B^0(0,r)\end{cases} \tag{18}$$

. . . .

---

4. 関数 $u \in C^2(U)\cap C(\overline{U})$ が開集合 U の境界上を除いて調和的である時、次が成り立つことを示せ。

$$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u \tag{19}$$

HINT : $\varepsilon > 0$ の時 $u_\varepsilon = u + \varepsilon|x|^2$ とおくと、U の内部では最大値を取らないことを示せばよい。

. . . .

---

5. 次のような $v \in C^2(\overline{U})$ を 劣調和関数 (subharmonic) という。

$$-\Delta v \leq 0 \quad \text{in } U \tag{20}$$

（a）v が次を満たすことを示せ。

$$v(x) \leq \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} v dy \quad \text{for all} B(x,r) \subset U \tag{21}$$

……………………………………………………………………

（b）次を示せ。

$$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u \tag{22}$$

……………………………………………………………………

（c）$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はなめらかな凸関数とする。

u は調和関数、$v = \phi(u)$ とした時、v は劣調和関数であることを示せ。

……………………………………………………………………

（d）u が調和的である時、$v = |Du|^2$ は劣調和的であることを示せ。

……………………………………………………………………

---

6. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ は有界であるとする。

この時、U のみに依存した定数 C が存在し、次の式が成り立つことを示せ。

$$\max_{\overline{U}} |u| \leq C \left(\max_{\partial U} |g| + \max_{\overline{U}} |f| \right) \tag{23}$$

なお、u は滑らかな関数で、次の解である。

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{on } \partial U \end{cases} \tag{24}$$

HINT : $\lambda = \max_{\overline{U}} |f|$ に対して、$-\Delta \left(u + \frac{|x|^2}{2n} \lambda \right) \leq 0$

……………………………………………………………………

参考文献

偏微分方程式：講義ノート

https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~karel/files/notes_pde_2015.pdf

非線型解析：講義ノート

https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~karel/files/notes_nonlinear_analysis_2019.pdf

---

$C^\infty(\Omega)$ は Ω 上で無限に微分可能 (calculus) な関数の集合

...

$\mathrm{supp}(f)$ は f の台 (サポート) といい、$f(x) \neq 0$ となる点 x の集合

...

$$C_c^\infty(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega) \mid \mathrm{supp}(\phi) \text{ がコンパクト}\} \tag{25}$$

$C_0^\infty(\Omega)$ も $C_c^\infty(\Omega)$ と同じ意味として使われる。

...

テスト関数

関数 ϕ は C^∞ 級でコンパクトな台を持ち、その境界上では 0 になるとき、テスト関数という。

∂U 上で $\phi = 0$ となるテスト関数は $\phi \in C_c^\infty(U)$ とかかれる。

...

可積分関数のなす線形空間 (L^p 空間、エルピー空間) であり、次のような集合である。p-ノルム空間

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_\Omega |f(x)| dx < \infty \right\} \tag{26}$$

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\} \tag{27}$$

$f \in L^p(\Omega)$ のノルム $\|f\|_{L^p}$ は次で定義する。

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{28}$$

...

局所可積分関数

Ω: 開集合、$p \in [1, \infty)$ とする。可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が p 乗局所可積分関数であるとは任意のコンパクト集合 $k \subset \Omega$ に対して $\int_K |f(x)|^p dx < \infty$ が成り立つことと定義する。

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; {}^\forall K \subset \Omega\text{コンパクト},\ \int_K |f(x)|^p dx < \infty \right\} \tag{29}$$

$L^p_{loc}(\Omega)$ の他、$L_{p,loc}(\Omega)$ や $L_p(\Omega, log)$ 等の記号が使われている。
次のような包含関係がある。

$$L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \tag{30}$$

弱微分

$u \in L^1([a,b])$ とする。$\phi(a) = \phi(b) = 0$ を満たす任意の無限階可能関数 ϕ(テスト関数 $\phi \in C_c^\infty([a,b])$) に対して次を満たす $v \in L^1([a,b])$ を u の弱微分という。

$$\int_a^b u(t)\phi' dt = -\int_a^b v(t)\phi(t)dt \tag{31}$$

この式は部分積分の式の変形である。

多重指数

n 個の数の組 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ を用いて微分 $D^\alpha u$ を表す。
$|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ とする。

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \tag{32}$$

ソ ボ レ フ
Sobolev 空間

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} u\text{は}k\text{階弱微分可能} \\ k\text{階までの全ての導関数が}L^p(\Omega)\text{に含まれる} \end{array} \right\} \tag{33}$$

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha\text{は多重指数} \\ 0 \le |\alpha| \le k \Rightarrow D^\alpha u \in L^p(\Omega) \end{array} \right\} \tag{34}$$

ノルム $\|u\|_{W^{k,p}}$ は次のように定義する。

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{35}$$

2.1. $u : U \to \mathbb{R}$ の第 γ Hölder（ヘルダー）半ノルムを次で定義する。

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\gamma} \right\} \tag{36}$$

この定義は半ノルムであることを確認せよ。

....

半ノルムとは絶対斉次性 ($p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$) と劣加法性 ($p(x+y) \leq p(x) + p(y)$) を満たす写像 p のことをいう。

${}^\forall \lambda \in \mathbb{R}$ とする。

$$[\lambda u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|\lambda u(x) - \lambda u(y)|}{|x-y|^\gamma} \right\} \tag{37}$$

$$= |\lambda| \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\gamma} \right\} = |\lambda| [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \tag{38}$$

よって、絶対斉次性を満たす。

劣加法性を確認する。

$$[u+v]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|(u(x) + v(x)) - (u(y) + v(y))|}{|x-y|^\gamma} \right\} \tag{39}$$

$$\leq \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)| + |v(x) - v(y)|}{|x-y|^\gamma} \right\} \tag{40}$$

$$\leq \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\gamma} \right\} + \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^\gamma} \right\} \tag{41}$$

$$= [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} + [v]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \tag{42}$$

以上により半ノルムであることが確認できる。

2.3. U 上の滑らかな関数全体を $C_c^\infty(U) \subset W^{k,p}(U)$ とし、これの閉包を $W_0^{k,p}(U)$ とする。$W_0^{k,p}(U)$ は $|\alpha| \leq k-1$ を満たす α において ∂U 上で $D^\alpha u = 0$ となる関数 $u \in W^{k,p}(U)$ の集まりである。

トレースの定理を認めてこれを示せ。

トレースの定理

U を有界、∂U を C^1 とする。

$$T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U) \tag{43}$$

この時、次を満たす有界線形作用素 T が存在する。

(a) $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\overline{U})$ に対して $Tu = u|_{\partial U}$

(b) 各 $u \in W^{1,p}(U)$ に対し、$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$ である。定数 C は p と U のみに依存する。

………………………………………………………………………………………

$$F : W^{k,p}(U) \to W^{1,p}(U), \quad u \mapsto D^\alpha u \tag{44}$$

上記写像とトレースの定理の写像 T の合成 $T \circ F$ を考える。

$T(u) = u|_{\partial U}$ であるから $T(u) = 0$ となる u は ∂U 上で $u = 0$ ということである。

つまり、$(T \circ F)(u) = 0$ となる関数 u は ∂U 上で $D^\alpha u = 0$ を満たす。

$f \in C_c^\infty(U)$ とすれば $\mathrm{supp}(f) \subset U$ であり、∂U 上では $f = 0$ となる。つまり、∂U 上 $D^\alpha f = 0$ である。

$f \in W_0^{k,p}(U)$ が $f_i \in C_c^\infty(U)$ により $f = \lim_{i\to\infty} f_i$ とする。

$$\lim_{i\to\infty} \|f_i - f\|_{W^{k,p}(U)} = 0 \tag{45}$$

$$\lim_{i\to\infty} \|f_i - f\|_{W^{k,p}(U)} = \lim_{i\to\infty} \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \|D^\alpha(f_i - f)\|_{L^p(U)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{46}$$

∂U 上では $f_k = 0$ であるので、

$$\lim_{i\to\infty} f_i \tag{47}$$

2.5. $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ は可算で稠密な $U = B^0(0,1)$ の部分集合とする。

$$u(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k}|x - r_k|^{-\alpha} \quad (x \in U) \tag{48}$$

$0 \leq \alpha \leq \frac{n-p}{p}$ であれば $u \in W^{1,p}(U)$ である。

この時、u は U の部分集合である開集合上で有界ではないことを示せ。

………………………………………………………………………………………

2.7. **弱微分の性質**

$u \in W^{k,p}(U)$, $|\alpha| \leq k$ とする。

このとき、$V \subset U$ が開集合であるなら $u \in W^{k,p}(V)$ となることを示せ。

………………………………………………………………………………………

$u \in W^{k,p}(U)$ であるから $D^\alpha u \in L^p(U)$ である。つまり、任意のテスト関数 $\phi \in C_c^\infty(U)$ に対して次を満たす。

$$\int_U D^\alpha u(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_U u(x)D^\alpha\phi(x)dx \tag{49}$$

この ϕ は $\phi : U \to \mathbb{R}$ で C^∞ 級な関数あり、関数の台 $\mathrm{supp}(f) = \{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$ は $\mathrm{supp}(f) \subset U$ である。
(49) は任意の ϕ について成り立つ。この為、$U \backslash V$ 上で 0 となるテスト関数 $\bar{\phi}$ についても成り立つので、$V \subset U$ 上に制限した次の式も成り立つ。

$$\int_V D^\alpha u(x)\bar{\phi}(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_V u(x)D^\alpha\bar{\phi}(x)dx \tag{50}$$

つまり、$D^\alpha u \in L^p(V)$ である。よって、$u \in W^{k,p}(V)$ である。

2.9. $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ が $W^{k,p}(U)$ の Cauchy（コーシー）列とする。
この時、$|\alpha| \leq k$ となる各 α に対して $\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty$ は $L^p(U)$ の Cauchy 列となることを示せ。

$\{u_m\}_{m=1}^\infty$ がコーシー列であるので、次の極限が 0 となる。

$$\lim_{i,j\to\infty} \|u_i - u_j\|_{W^{k,p}(U)} = 0 \tag{51}$$

極限を取るノルムは次のように $L^P(U)$ のノルムで書き換える。

$$\|u_i - u_j\|_{W^{k,p}(U)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \|D^\alpha(u_i - u_j)\|_{L^p(U)}^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{52}$$

これが 0 に収束するので、$0 \leq |\alpha| \leq k$ において各 $\|D^\alpha(u_i - u_j)\|_{L^p(U)}$ は 0 に収束する。

$$\lim_{i,j\to\infty} \|D^\alpha(u_i - u_j)\|_{L^p(U)} = \lim_{i,j\to\infty} \|D^\alpha u_i - D^\alpha u_j\|_{L^p(U)} = 0 \tag{53}$$

これにより $\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty$ はコーシー列だとわかる。
