Laplace 変換

0 よりも大きい実数上で定義された関数 $f(t)$ に対して、複素数 s を用いて次の式で定義される $F(s)$ が存在する時、$F(s)$ を関数 $f(t)$ のラプラス変換という。

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{1}$$

実変数関数 $f(t)$ に対して複素変数関数 $F(s)$ を対応させる為、演算子 $\mathcal{L}$ を用いて $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ と表す。

性質

複素数 s が $\mathrm{Re}(s) > 0$ を満たす時

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \qquad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{2}$$

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{3}$$

複素数 s が $\mathrm{Re}(s) > a$ を満たす時

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \tag{4}$$

線形性

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] \tag{5}$$

定数 a が $a > 0$、$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ とする。

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \qquad \mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a) \tag{6}$$

微分

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = sF(s) - f(0) \tag{7}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}\right] = s^2F(s) - sf(0) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(0) \tag{8}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right] = s^2F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(0)\cdots - s\frac{\mathrm{d}^{n-2}f}{\mathrm{d}t^{n-2}}(0) - \frac{\mathrm{d}^{n-1}f}{\mathrm{d}t^{n-1}}(0) \tag{9}$$

3 つ目の式は次のようになる。ただし、$f^{(i)}(x)$ は連続 $(i=0,\ldots,n-1)$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0) \tag{10}$$

……………………………………………………………………………………

関数 f,g の合成積 $f*g$ を次のように定義する。

$$f*g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{11}$$

この合成積についてラプラス変換は次を満たす。

$$\mathcal{L}[(f*g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)] \tag{12}$$

---

1. $\mathcal{L}[e^{\alpha t}\sin\omega t]$ 及び $\mathcal{L}[e^{\alpha t}\cos\omega t]$ を推移定理を用いてラプラス変換を求めよ。

……………………………………………………………………………………

式 (3) より $\mathrm{Re}(s)>0$ の時次の式が成り立つ。

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{13}$$

式 (6) より $a>0$ の時次が成り立つ。

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a) \tag{14}$$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}\sin\omega t] = \mathcal{L}[\sin\omega t](s-\alpha) \quad (\leftarrow \text{ラプラス変換後の変数}s\text{に}s-\alpha\text{を代入}) \tag{15}$$

$$= \frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2} \tag{16}$$

同様に

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}\cos\omega t] = \mathcal{L}[\cos\omega t](s-\alpha) = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2} \tag{17}$$

よって、$\mathrm{Re}(s)>0,\ \alpha>0$ において

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}\sin\omega t] = \frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2} \tag{18}$$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}\cos\omega t] = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2} \tag{19}$$

……………………………………………………………………………………

2. 以下の微分方程式及び初期値が与えられた時、$\mathcal{L}[y(t)]$ を s を用いて表せ。

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 2y(t) = 2,\ y(0) = 3 \tag{20}$$

(HINT) 微分方程式を両辺ラプラス変換する。

....

式 (7) より

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = sF(s) - f(0) \tag{21}$$

式 (2) より

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \tag{22}$$

線形性 式 (5) より

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] \tag{23}$$

これらを使い、微分方程式 (20) をラプラス変換する。$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ とする。
左辺

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 2y(t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right] + 2\mathcal{L}\left[y(t)\right] = sY(s) - y(0) + 2Y(s) \tag{24}$$

右辺

$$\mathcal{L}[2] = \frac{2}{s} \tag{25}$$

初期値は $y(0) = 3$ であるので、次の式が得られる。

$$sY(s) - 3 + 2Y(s) = \frac{2}{s} \tag{26}$$

これを $Y(s)$ でまとめると

$$Y(s) = \frac{1}{s+2}\left(\frac{2}{s} + 3\right) = \frac{2+3s}{s(s+2)} \tag{27}$$

よって、$\mathrm{Re}(s) > 0$ において

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{2+3s}{s(s+2)} \tag{28}$$