1. 次の行列式の値を求めよ。

(a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \times 3 - 2 \times (-5) = 7 \tag{1}$$

(b) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

3 列目を 2 倍して 1 列目に加え、2 列目には 1 倍して加えると 1 行目の 2 つの成分が 0 になる。これを利用し、2×2 の行列式に変形し計算を行う。

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

$$=(-2)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \tag{3}$$

$$=(-2) \times (-1) \times 5 = 10 \tag{4}$$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

4 行目を 2 倍し他の行から引くと 1 列目に 0 が 3 つ並ぶのでこれを利用し 3×3 の行列式に変形する。

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & -6 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & -6 & 5 \end{vmatrix} \tag{5}$$

3 列目を 5 倍し 2 列めに加え、2×2 の行列式に変形する。

$$-\begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & -6 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -14 & -3 \\ 6 & 19 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -14 \\ 6 & 19 \end{vmatrix} \tag{6}$$

ここから行列式は次のように求められる。

$$-\begin{vmatrix} 4 & -14 \\ 6 & 19 \end{vmatrix} = -(4 \times 19 - (-14) \times 6) = -160 \tag{7}$$

2. 正方行列 A が ${}^tAA = E$ を満たす時、$|A| = \pm 1$ を示せ。ただし、$|{}^tA| = |A|$ は用いてもよい。

${}^tAA = E$ より $|{}^tAA| = |E|$ である。$|E| = 1$ であるので、$|{}^tAA| = 1$ である。
$|{}^tA| = |A|$ より $|{}^tAA| = |{}^tA||A| = |A|^2$ であるので、$|A| = \pm 1$ である。

3. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{vmatrix}$ について、第 1 列に関する余因子展開を用いて因数分解せよ。

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} b & a \\ a & a \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} b & b \\ a & a \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} && (8)\\
&= a(ba-a^2) - a(ba-ba) + b(ba-b^2) && (9)\\
&= a^2(b-a) + b^2(a-b) && (10)\\
&= (b-a)(a+b)(a-b) && (11)
\end{aligned}$$

---

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ が正則であることを確かめ、余因子行列を用いて逆行列を求めよ。

$|A| = -42 \neq 0$ より A は正則である。そこで逆行列を余因子行列を用いて求める。

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} && (12)\\
&= \frac{1}{-42}\begin{pmatrix} -14 & 10 & -8 \\ 7 & -17 & 1 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix} && (13)\\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{21} & \frac{4}{21} \\ -\frac{1}{6} & \frac{17}{42} & -\frac{1}{42} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{42} & -\frac{5}{42} \end{pmatrix} && (14)
\end{aligned}$$

---

5. 以下の問いに答えよ。

(a) 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形独立であることの定義を述べよ。

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形独立であるとは、3 つのスカラー s_1, s_2, s_3 に対し、$s_1\boldsymbol{a}_1 + s_2\boldsymbol{a}_2 + s_3\boldsymbol{a}_3 = 0$ である時、$(s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 0)$ となる場合をいう。

(b) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = 0$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみしか解を持たないための必要十分条件を、A の行列式に関する等式で述べよ。

$A\boldsymbol{x} = 0$ の解が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみしかないということは行列 A の列ベクトルが線形独立である。行列 A の列ベクトルが線形独立であれば A は正則であるので $|A| \neq 0$ である。

逆に $|A| \neq 0$ であれば、A は正則である。A が正則であれば A の列ベクトルが線形独立である。

A の列ベクトルが線形独立であれば、$A\boldsymbol{x} = 0$ の解が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみしかないことになる。

（c） $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ が線形独立か線形従属か判定せよ。

………………………………………………………………………………………

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を列に並べて行列 A を作る。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$|A|= 0$ であるため、行列 A は正則ではなく、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は線形従属である。

---

6. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ の表す線形変換を f とする時、$f \circ f$ により点 $(1, -2)$ が移る点を以下のように求めよ。

（a） $f(1, -2)$ が移る点を求めそれを (x, y) とした時、さらに $f(x, y)$ を求めよ。

………………………………………………………………………………………

$$f(1, -2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$f(1, 1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \tag{17}$$

（b） $f \circ f$ を表す行列が A^2 であることから、A^2 を計算し $(1, -2)$ が移る点を求めよ。

………………………………………………………………………………………

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 25 & 9 \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$(f \circ f)(1, -2) = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 25 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \tag{19}$$

---

7. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -6 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

（a） 行列 A の固有値を求めよ。

………………………………………………………………………………………

固有値 λ を求めるために固有方程式 $|A - \lambda E| = 0$ を解く。

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 3 & -4-\lambda & -6 \\ -2 & 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2 \tag{20}$$

これより $\lambda = -1, 2$

（b） 行列 A の固有ベクトルを求めよ。

………………………………………………………………………………………

固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は固有値 λ に対し、$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たす。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする。

固有値が $\lambda = -1$ の時固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $(A+E)\boldsymbol{x} = 0$ を満たすので、

$$(A+E)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -6 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \tag{21}$$

と連立方程式を得る。これを解くと次の式が得られる。

$$3x_1 + x_2 = 0, \quad 2x_1 - x_3 = 0 \tag{22}$$

これを満たす解空間は

$$\left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 \in \mathbb{R} \right\} \tag{23}$$

で固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

固有値が $\lambda = 2$ の時

$$(A-2E)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \tag{24}$$

となるので、$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ を満たせばいい。この為、解空間は次のように表せる。

$$\left\{ x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_2 \in \mathbb{R}, \ x_3 \in \mathbb{R} \right\} \tag{25}$$

固有値 -1 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$、固有値 2 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) 正則行列 P を $P^{-1}AP$ が対角行列になるように定め、その対角行列を答えよ。

……………………………………………………………………………………

固有ベクトルを列ベクトルとして並べ行列 P を次のように作る。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

この時、対角化行列は次のようになる。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{27}$$

---

8. 対称行列 A の異なる固有値に対応する固有ベクトルが、互いに直交することを示せ。

……………………………………………………………………………………………

対称行列 A の固有値を λ, μ とし、$\lambda \neq \mu$ とする。固有値 λ, μ に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{x}_\mu$ とおく。固有ベクトルの内積が 0 になることを示す。つまり、$\boldsymbol{x}_\lambda \cdot \boldsymbol{x}_\mu = 0$ を示せばよい。

$$\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda \cdot \boldsymbol{x}_\mu) = \lambda {}^t\boldsymbol{x}_\lambda \boldsymbol{x}_\mu = {}^t(\lambda \boldsymbol{x}_\lambda)\boldsymbol{x}_\mu = {}^t(A\boldsymbol{x}_\lambda)\boldsymbol{x}_\mu = {}^t\boldsymbol{x}_\lambda {}^tA\boldsymbol{x}_\mu \tag{28}$$

$$= {}^t\boldsymbol{x}_\lambda A\boldsymbol{x}_\mu = {}^t\boldsymbol{x}_\lambda \mu \boldsymbol{x}_\mu = \mu {}^t\boldsymbol{x}_\lambda \boldsymbol{x}_\mu = \mu(\boldsymbol{x}_\lambda \cdot \boldsymbol{x}_\mu) \tag{29}$$

この計算より $\lambda(\boldsymbol{x}_\lambda \cdot \boldsymbol{x}_\mu) = \mu(\boldsymbol{x}_\lambda \cdot \boldsymbol{x}_\mu)$ が得られる。そこで移項してまとめると $(\lambda - \mu)(\boldsymbol{x}_\lambda \cdot \boldsymbol{x}_\mu) = 0$ である。$\lambda \neq \mu$ より $\boldsymbol{x}_\lambda \cdot \boldsymbol{x}_\mu = 0$ となり固有ベクトル $\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{x}_\mu$ が直交することがわかる。

以下、発展課題

A. 転置行列と行列式に関する次の性質

(a) $|{}^tA| = |A|$

(b) ${}^t(cA) = c({}^tA)$

(c) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$

を用いて、A の固有値と ${}^tA$ の固有値が等しいことを示せ。

ヒント. 方程式 $|{}^tA - \lambda E| = 0$ の解と方程式 $|A - \lambda E| = 0$ の解が等しいことを示せばよい。つまり、$|{}^tA - \lambda E| = |A - \lambda E|$ を示せばよい。

……………………………………………………………………………………………

行列 A の固有値を λ とする。

$${}^tA - \lambda E = {}^tA - {}^t(\lambda E) = {}^t(A - \lambda E) \tag{30}$$

行列式は転置しても同じなので、

$$|{}^t(A - \lambda E)| = |A - \lambda E| \tag{31}$$

であるため

$$|{}^tA - \lambda E| = |A - \lambda E| = 0 \tag{32}$$

である、A の固有値は ${}^tA$ の固有値であることがわかる。同様に ${}^tA$ の固有値は ${}^{tt}A = A$ の固有値であることがわかる。

よって、A と ${}^tA$ の固有値は一致する。

B. $B = P^{-1}AP$ である時、B の固有値と A の固有値が等しくなることを示せ。

……………………………………………………………………………………………

行列 A の固有方程式 $|A - \lambda E| = 0$ に対し、正則行列 P とその逆行列 P^{-1} を両側からかける。

$$|P^{-1}||A - \lambda E||P| = |P^{-1}(A - \lambda E)P| = |P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda E)P| = |P^{-1}AP - \lambda E| = |B - \lambda E| \tag{33}$$

これにより A の固有値 λ に対し、$|B - \lambda E| = 0$ である。

また逆に $|B - \lambda E| = 0$ を満たす λ は $|P| \neq 0, |P^{-1}| \neq 0$ より $|A - \lambda E| = 0$ であることがわかる。

よって、$B = P^{-1}AP$ の固有値と A の固有値が等しくなる。

C.　行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ の固有値が $\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta$ となることを示せ。

固有方程式 $|A - \lambda E| = 0$ を計算すると

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0 \tag{34}$$

この λ についての 2 次方程式を解の公式で解くと

$$\lambda = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta \tag{35}$$