(1). $D \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし、$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : D \to \mathbb{R}^m$ を C^k-級 $(k \geq 1)$ のベクトル値関数とする。関数 $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle$ を次のように定義する。

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle : D \to \mathbb{R} \qquad \boldsymbol{x} \mapsto \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \rangle \tag{1}$$

$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle$ は C^k-級である。

この時、次の 2 つを示せ。

(a)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}, \boldsymbol{g} \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{f}, \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial x_i} \right\rangle \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2}$$

(b)

$$|\boldsymbol{f}| = c \ (\text{定数}) \Leftrightarrow \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}, \boldsymbol{f} \right\rangle \equiv 0 \quad for\ {}^{\forall} i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

. . . .

(2). $D \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし、$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : D \to \mathbb{R}^3$ を C^k-級 $(k \geq 1)$ のベクトル値関数とする。写像 $\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}$ を次のように定義する。

$$\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g} : D \to \mathbb{R}^3 \qquad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \quad (\text{ベクトルの外積}) \tag{4}$$

$\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}$ は C^k-級のベクトル値関数である。

この時、次の式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i} \times \boldsymbol{g} + \boldsymbol{f} \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

---

(1). $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : D(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ である為、$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ について次のようにおく。

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x})), \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_m(\boldsymbol{x})) \tag{6}$$

ここから、内積を計算すると次の式になる。

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle (\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{m} f_k(\boldsymbol{x}) g_k(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

（a）x_i について偏微分する。

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{m} f_k(\boldsymbol{x})g_k(\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} f_k(\boldsymbol{x})g_k(\boldsymbol{x}) \tag{9}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f_k(\boldsymbol{x}) \right) g_k(\boldsymbol{x}) + f_k(\boldsymbol{x}) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_k(\boldsymbol{x}) \right) \right) \tag{10}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f_k(\boldsymbol{x}) \right) g_k(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{m} f_k(\boldsymbol{x}) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_k(\boldsymbol{x}) \right) \tag{11}$$

$$= \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}, \boldsymbol{g} \right\rangle (\boldsymbol{x}) + \left\langle \boldsymbol{f}, \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial x_i} \right\rangle (\boldsymbol{x}) \tag{12}$$

（b）$(\Rightarrow)$ $|\boldsymbol{f}| = c$ とする。

$^\forall \boldsymbol{x} \in D$ に対して $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| = c$ である。2 乗して x_i で偏微分すると次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|^2 = 0 \tag{13}$$

左辺を変形すると次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|^2 = \frac{\partial}{\partial x_i}\langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\rangle \tag{14}$$

$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \right\rangle \tag{15}$$

$$= 2\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \right\rangle \tag{16}$$

これにより次の式が得られる。

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \right\rangle (\boldsymbol{x}) = 0 \tag{17}$$

$^\forall \boldsymbol{x} \in D$ について言える為、恒等的に 0 である。

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \right\rangle \equiv 0 \tag{18}$$

全ての x_i $(i = 1, \ldots, n)$ について成立することから次が示せる。

$$|\boldsymbol{f}| = c \quad \Rightarrow \quad \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}, \boldsymbol{f} \right\rangle \equiv 0 \quad for\ ^\forall i = 1, 2, \ldots, n \tag{19}$$

$(\Leftarrow)$ ${}^\forall i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\left\langle \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}, \boldsymbol{f} \right\rangle \equiv 0$ とする。

$$2\left\langle \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}, \boldsymbol{f} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}, \boldsymbol{f} \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{f}, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \rangle \tag{20}$$

であるので、${}^\forall \boldsymbol{x} \in D$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \rangle(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{21}$$

これは、x_i の変化について $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \rangle(\boldsymbol{x})$ は変化しないことを意味する。${}^\forall i = 1, 2, \ldots, n$ について同じことが言えるため、$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \rangle(\boldsymbol{x})$ は定数であることが分かる。

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \rangle = |\boldsymbol{f}|^2 \tag{22}$$

より $|\boldsymbol{f}|$ が定数となる事がわかる。

....

(2). $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : D \to \mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), f_3(\boldsymbol{x})), \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), g_2(\boldsymbol{x}), g_3(\boldsymbol{x})) \tag{23}$$

とする。この時、外積は次のようになる。

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) =& \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) && (24)\\
=& \left(\begin{vmatrix} f_2(\boldsymbol{x}) & f_3(\boldsymbol{x}) \\ g_2(\boldsymbol{x}) & g_3(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} f_3(\boldsymbol{x}) & f_1(\boldsymbol{x}) \\ g_3(\boldsymbol{x}) & g_1(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) & f_2(\boldsymbol{x}) \\ g_1(\boldsymbol{x}) & g_2(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix} \right) && (25)
\end{aligned}$$

成分の行列式を計算する。

$$\begin{vmatrix} f_2(\boldsymbol{x}) & f_3(\boldsymbol{x}) \\ g_2(\boldsymbol{x}) & g_3(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix} = f_2(\boldsymbol{x})g_3(\boldsymbol{x}) - f_3(\boldsymbol{x})g_2(\boldsymbol{x}) \tag{26}$$

これを x_i で偏微分する。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_i} \begin{vmatrix} f_2(\boldsymbol{x}) & f_3(\boldsymbol{x}) \\ g_2(\boldsymbol{x}) & g_3(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix} && (27)\\
=&\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_2(\boldsymbol{x})g_3(\boldsymbol{x}) - f_3(\boldsymbol{x})g_2(\boldsymbol{x})\right) && (28)\\
=&\frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}g_3(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x})\frac{\partial g_3(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} - \frac{\partial f_3(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}g_2(\boldsymbol{x}) - f_3(\boldsymbol{x})\frac{\partial g_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} && (29)\\
=&\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} f_2(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial}{\partial x_i} f_3(\boldsymbol{x}) \\ g_2(\boldsymbol{x}) & g_3(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_2(\boldsymbol{x}) & f_3(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_i} g_2(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial}{\partial x_i} g_3(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix} && (30)
\end{aligned}$$

これは式 (25) の他の成分でも同じように計算が出来る。この為、次の式が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \times \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \times \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i} \times \boldsymbol{g} + \boldsymbol{f} \times \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial x_i} \tag{32}$$
