1. $f(z)=\frac{1}{2-3z}$ とする。

（1）マクローリン展開とその収束円を求めよ。

$\cdots\cdots$

$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ $(|z|<1)$ を利用します。
$\frac{1}{2-3z}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{3}{2}z}$ です。$|\frac{3}{2}z|<1$ において上の式を利用すると

$$\frac{1}{1-\frac{3}{2}z}=1+\left(\frac{3}{2}z\right)+\left(\frac{3}{2}z\right)^2+\left(\frac{3}{2}z\right)^3+\left(\frac{3}{2}z\right)^4+\cdots \tag{1}$$

となるので、$f(z)$ は

$$f(z)=\frac{1}{2-3z}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{3}{2}z} \tag{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{3}{2}z\right)+\left(\frac{3}{2}z\right)^2+\left(\frac{3}{2}z\right)^3+\left(\frac{3}{2}z\right)^4+\cdots\right) \tag{3}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}z\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{2^{k+1}}z^k \tag{4}$$

収束円は $|\frac{3}{2}z|<1$ より $|z|<\frac{2}{3}$

（2）$z=2$ におけるテイラー展開とその収束円を求めよ。

$\cdots\cdots$

$v=z-2$ とおくと $z=v+2$ なので、$f(z)$ は

$$f(z)=\frac{1}{2-3z}=\frac{1}{-4-3v}=\frac{-\frac{1}{4}}{1-(-\frac{3}{4}v)}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-(-\frac{3}{4}v)}\right) \tag{5}$$

となります。先ほどと同じように変形を行うと

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-(-\frac{3}{4}v)}\right)=-\frac{1}{4}\left(1+\left(-\frac{3}{4}v\right)+\left(-\frac{3}{4}v\right)^2+\cdots\right) \tag{6}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}v\right)^k \tag{7}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{3^k}{4^{k+1}}v^k \tag{8}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{3^k}{4^{k+1}}(z-2)^k \tag{9}$$

収束円は $|-\frac{3}{4}v| < 1$ より $|v| < \frac{4}{3}$ であるので、$|z-2| < \frac{4}{3}$ です。

---

2. $g(z) = z^2(z^4+z^2+1)(z^3-1)$ の全ての零点とその位数を求めよ。

　　…………………………………………………………………

$g(z)$ の零点なので、まず $z^3-1=0$ を考えます。$z^3-1=0$ は $1 = \cos(2\pi n) + i\sin(2\pi n),\ (n=0,1,2,\dots)$ の 3 乗根なので、零点は次の 3 つ。

$$\cos\left(\frac{2\pi\cdot 0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi\cdot 0}{3}\right) = 1 \tag{10}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi\cdot 1}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi\cdot 1}{3}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \tag{11}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi\cdot 2}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi\cdot 2}{3}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \tag{12}$$

次に z^4+z^2+1 の零点ですが、$(z^2-1)(z^4+z^2+1) = z^6-1$ なので、1 の 6 乗根のうち ± 1 を除いたものとなります。6 乗根を ω_i とすると次の 4 つが零点となります。

$$\omega_1 = \cos\left(\frac{2\pi\cdot 1}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi\cdot 1}{6}\right) = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \tag{13}$$

$$\omega_2 = \cos\left(\frac{2\pi\cdot 2}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi\cdot 2}{6}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \tag{14}$$

$$\omega_4 = \cos\left(\frac{2\pi\cdot 4}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi\cdot 5}{6}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \tag{15}$$

$$\omega_5 = \cos\left(\frac{2\pi\cdot 5}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi\cdot 4}{6}\right) = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \tag{16}$$

ω_2, ω_4 は 1 の 3 乗根でもあるので、$g(z)$ は次のような式になります。

$$g(z) = z^2(z-1)(z-\omega_1)(z-\omega_2)^2(z-\omega_4)^2(z-\omega_5) \tag{17}$$

位数はそれぞれの指数からわかるため、零点とその位数は次のようになります。

零点	0	1	ω_1	ω_2	ω_4	ω_5
位数	2	1	1	2	2	1

---

3. $h(z) = e^{2\pi i z^2} - 1$ の $|z| < \frac{3}{2}$ における全ての零点とその位数を求めよ。

　　…………………………………………………………………