次の積分を求めよ。

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\mathrm{d}x \tag{1}$$

……………………………………………………………………………………

この広義積分を複素数上の積分として考える。

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z \qquad (z\in\mathbb{C}) \tag{2}$$

被積分関数 $\frac{\sqrt{z}}{z^3+1}$ に対して、積分経路を実軸上 $0\to R$ と半径 R の円周上 $R\to Ri$ と虚軸上 $Ri\to 0$ の 3 つの部分 C_1, C_2, C_3 からなる閉曲線 C とする。

この時、C_1 上の積分 $\int_{C_1}\frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z$ は $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\mathrm{d}x$ と一致する。

C 上の積分は次のような式となる。

$$\int_C \frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z = \int_{C_1}\frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z + \int_{C_2}\frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z + \int_{C_3}\frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z \tag{3}$$

$z^3+1=0$ を満たす複素数は $z^3=-1=e^{(2n+1)\pi i}$ から $z=e^{\frac{\pi}{3}i}, e^{\pi i}, e^{\frac{5\pi}{3}i}$ である。これらは関数 $\frac{\sqrt{z}}{z^3+1}$ の極となりえるが、R を十分大きな数とした時に C の内部に含まれるのは $z=e^{\frac{\pi}{3}i}$ のみである。留数定理により $\int_C\frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z$ は $z=e^{\frac{\pi}{3}i}$ の留数から求まる。

$$(z-e^{\frac{\pi}{3}i})\times\frac{\sqrt{z}}{z^3+1} = (z-e^{\frac{\pi}{3}i})\times\frac{\sqrt{z}}{(z-e^{\frac{\pi}{3}i})(z-e^{\pi i})(z-e^{\frac{5\pi}{3}i})} = \frac{\sqrt{z}}{(z-e^{\pi i})(z-e^{\frac{5\pi}{3}i})} \tag{4}$$

上記の関数は $z=e^{\frac{\pi}{3}i}$ の時に値を持つので、1 位の極である。

この時の留数を求める。

$$\lim_{z\to e^{\frac{\pi}{3}i}}\frac{\sqrt{z}}{z^3+1} = \lim_{z\to e^{\frac{\pi}{3}i}}\frac{1}{2}\frac{z^{-1/2}}{3z^2} = \frac{1}{6}e^{\frac{5\pi}{6}i} \tag{5}$$

よって、C 上の積分は次のようになる。

$$\int_C\frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z = 2\pi i\times\frac{1}{6}e^{\frac{5\pi}{6}i} = \frac{1}{3}\pi i e^{\frac{5\pi}{6}i} \tag{6}$$

C は 3 つに分かれるためそれぞれの積分を考える。

C_2 は半径 R の円周上であるので、$z=Re^{i\theta}$ で θ が $0\to\frac{1}{2}\pi$ の範囲の区間となる。$\mathrm{d}z=iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ を利用し C_2 上の積分を計算する。

$$\int_{C_2}\frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{Re^{i\theta}}}{(Re^{i\theta})^3+1}iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{iR^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}i\theta}}{R^3e^{3i\theta}+1}\mathrm{d}\theta \tag{7}$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{iR^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}i\theta}}{R^3e^{3i\theta}+1}\mathrm{d}\theta\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{iR^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}i\theta}}{R^3e^{3i\theta}+1}\right|\mathrm{d}\theta \tag{8}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|iR^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}i\theta}|}{|R^3e^{3i\theta}+1|}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|iR^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}i\theta}|}{|e^{3i\theta}||R^3+e^{-3i\theta}|}\mathrm{d}\theta \tag{9}$$

$\theta \in \mathbb{R}$ について $-1 \leq |e^{-3i\theta}| \leq 1$ となるので R が十分に大きい値であれば $|R^3 + e^{-3i\theta}| \geq R^3 - 1$ である。これを利用し上の式を計算する。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|iR^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}i\theta}|}{|e^{3i\theta}||R^3+e^{-3i\theta}|}\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^{\frac{3}{2}}}{R^3-1}\mathrm{d}\theta = \frac{R^{\frac{3}{2}}}{R^3-1}\cdot\frac{\pi}{2} \to 0\ (R\to\infty) \tag{10}$$

つまり、C_2 上の積分は $R\to\infty$ において 0 に収束する。

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z = 0 \tag{11}$$

次に C_3 上の積分を考える。C_3 は虚軸上の $iR \to 0$ の区間である。そこで、$z = it$ と置き、t が $R \to 0$ に動く場合の積分として計算する。このとき、$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = i$ であるので、$\mathrm{d}z = i\mathrm{d}t$ である。

$$\int_{C_3}\frac{\sqrt{z}}{z^3+1}\mathrm{d}z = \int_R^0 \frac{\sqrt{it}}{(it)^3+1}i\mathrm{d}t = -i^{\frac{3}{2}}\int_0^R \frac{\sqrt{t}}{-it^3+1}\mathrm{d}t \tag{12}$$
