K を体、V を K-線形空間とする。

$$\Phi : V \to \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V, K), K) \quad v \mapsto (f \mapsto f(v)) \tag{1}$$

写像 Φ を上のように定義する。$\Phi(v)(f) = f(v)$

1. Φ は K-線形写像である。
2. Φ は単射である。
3. V が有限生成の時、Φ は全単射である。

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f : V \to W \ (K\text{-線形写像})\} \tag{2}$$

$(\lambda f + g)(v) = \lambda f(v) + g(v)$ と定義することによりにより $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ は線形空間となる。

....

V, W:K-線形空間

写像 $f : V \to W$ が次の 2 つの条件を満たす時、K-線形写像という。

1. $x, y \in V$ について、$f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $x \in V,\ k \in K$ について、$f(kx) = kf(x)$

....

写像 $f : V \to W$ について

f が単射である $\Leftrightarrow$ $f(a) = f(b)$ であるなら $a = b$

f が全射である $\Leftrightarrow$ ${}^{\forall}w \in W$ に対し $w = f(v)$ となる $v \in V$ が存在

---

1. Φ は K-線形写像である。

   $x, y \in V$ とする。Φ は写像である為、

$$\Phi(x + y) \in \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V, K), K) \tag{3}$$

   $\Phi(x + y)$ は次のような線形写像である。

$$\Phi(x + y) : \mathrm{Hom}_K(V, K) \to K \tag{4}$$

   これより ${}^{\forall}f \in \mathrm{Hom}_K(V, K)$ に対し

$$\Phi(x + y)(f) = f(x + y) \tag{5}$$

であり、f は線形写像であるので、$f(x+y)=f(x)+f(y)$。$\Phi(x)(f)=f(x)$、$\Phi(y)(f)=f(y)$ より

$$\Phi(x+y)(f)=\Phi(x)(f)+\Phi(y)(f) \tag{6}$$

この為、$\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y)$ となる事がわかる。
同様にして、$k\in K$ に対し $\Phi(kx)=k\Phi(x)$ である為、Φ は K-線形写像である。

…………………………………………………………………………

2. Φ は単射である。
$v,w\in V$ に対し、$\Phi(v)=\Phi(w)$ とする。$\Phi(v)-\Phi(w)=0$ だが、Φ の線形性から $\Phi(v)-\Phi(w)=\Phi(v-w)=0$ となる。
また、${}^{\forall}f\in \mathrm{Hom}_K(V,K)$ に対し $\Phi(v-w)(f)=f(v-w)$ となる為、$f(v-w)=0$ である。
もし、f が零写像であれば $V=\{\mathbf{0}\}$ であるので、$v,w\in V$ から $v=w$ である。
$\mathrm{Hom}_K(V,K)$ の元として V の基底と標準内積を取る写像 f_e を考える。i 番目が 1 でそれ以外が 0 の基底で考えると $f_e(v-w)$ は i 番目の成分のみが取り出される。$f_e(v-w)=0$ より $v-w$ の i 成分は 0 である。すべての成分について同じように考えると $v-w=0$ ということが分かる。これにより $v=w$ となり、Φ は単射である。

…………………………………………………………………………

3. V が有限生成の時、Φ は全単射である。
単射は示されているので、全射であることを示す。
V が有限生成であるので、次元を n とする。$\dim_K V=n$
V の次元は写像 Φ のイメージとカーネルより次のようになる。

$$\dim_K V=\dim_K \mathrm{Im}\Phi+\dim_K \mathrm{Ker}\Phi=n \tag{7}$$

Φ は単射であるので、$\dim_K \mathrm{Ker}\Phi=0$ である。
線形空間 V と $\mathrm{Hom}_K(V,K)$ は同じ次元である為、$V^*=\mathrm{Hom}_K(V,K)$ と $\mathrm{Hom}_K(V^*,K)$ も同じ次元である。

$$\dim_K V=\dim_K \mathrm{Hom}_K(V,K)=\dim_K \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V,K),K)=n \tag{8}$$

これにより次の 2 つの次元が同じであることが分かる。

$$\dim_K \mathrm{Im}\Phi=\dim_K \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V,K),K)=n \tag{9}$$

ここから Φ の像は $\mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V,K),K)$ は一致する事がわかり、Φ が全射であることが分かる。

Φ は全単射であるので、V と $\mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V,K),K)$ は同型であることが分かる。

双対空間

K 上ベクトル空間 V に対し、線形写像 $V \to K$ 全体の集合 $\mathrm{Hom}_K(V,K)$ を双対ベクトル空間という。

V の次元が有限次元であれば

$$\dim_K V = \dim_K \mathrm{Hom}_K(V,K) \tag{10}$$

である。V の双対ベクトル空間を V^* で表す。

V の基底

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

に対し、双対空間 V^* の基底は $\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_n$ とする。$\hat{e}_i$ は $\boldsymbol{v} \in V$ から i 番目を取り出す線形写像である。

例えば写像 $\hat{e}_1$ は次のような写像である。

$$\hat{e}_1(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) = 1,\ \hat{e}_1(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) = 0,\ \ldots,\hat{e}_1(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 0 \tag{12}$$