1. (a) 次の中から開集合を選択せよ。

$$A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| < 2\} \tag{1}$$

$$B = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0,\ x_2 > 0\} \tag{2}$$

$$C = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{x}| < 1\} \cup \{(1, 0, 0)\} \tag{3}$$

$$D = \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \qquad \left(D_k = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x}| < \frac{1}{k}\right\}\right) \tag{4}$$

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \qquad \left(E_k = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x}| < 1 - \frac{1}{k}\right\}\right) \tag{5}$$

(b) $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$ とし、$f : D \to \mathbb{R}$ を $f(x,\ y) = x^y$ と定義する。$(a,\ b) \in D$ について次の式を求めよ。

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \tag{6}$$

(c) 写像 $\boldsymbol{f}$ を次のように定める。

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \boldsymbol{f}(x_1,\ x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ -x_1^2 + x_2 \\ -4x_1 + x_2^2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

また、$\boldsymbol{n} = {}^t(1\ 2\ 1)$ とする。

この時、次の条件を満たす $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ を求めよ。

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}(a, b) \text{ と } \boldsymbol{n} \text{ は直交} \quad (i = 1, 2) \tag{8}$$

2. $D_1,\ D_2 \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする。この時、$D_1 \cap D_2$ と $D_1 \cup D_2$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合となることを示せ。

3. $D \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とし、$f : D \to \mathbb{R}$ を $C^2$ 級関数とする。この時、次の式を満たすことを示せ。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{9}$$

---

**開集合**

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 $U$ が次を満たす時、開集合という。($d(x, y)$ は距離関数)

$$^\forall x \in U,\ ^\exists \varepsilon > 0 \ s.t.\ y \in \mathbb{R}^n,\ d(x,\ y) < \varepsilon \Rightarrow y \in U \tag{10}$$

開集合の公理

集合 $X$ の部分集合族 $\mathcal{O}$ が次の 3 つを満たす時、$\mathcal{O}$ の要素を開集合という。

1. $\phi \in \mathcal{O},\ X \in \mathcal{O}$
2. $U_i \in \mathcal{O}\ (i = 1, \ldots, n) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{O}$
3. $U_\lambda \in \mathcal{O}\ (\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$

式 (10) により定義した開集合は開集合の公理を満たす。

…………………………………………………………………………

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^r = r x^{r-1} \qquad (r \neq 0) \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} r^x = r^x \log r \qquad (r > 0) \tag{12}$$

…………………………………………………………………………

$f(x, y)$ の偏導関数の定義

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \tag{13}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \tag{14}$$

…………………………………………………………………………

平均値の定理 (Lagrange〔ラグランジュ〕)

関数 $f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続、開区間 $(a, b)$ で微分可能とする。

この時、次を満たす $c \in (a, b)$ が存在する。

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \tag{15}$$

また、区間の幅を $h = b - a$ とおき、$c = a + \theta h\ (0 < \theta < 1)$ とすると次の式を得る。

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta h) h \tag{16}$$

次の中から開集合を選択せよ。

$$A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| < 2\} \tag{17}$$

$$B = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0,\ x_2 > 0\} \tag{18}$$

$$C = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{x}| < 1\} \cup \{(1, 0, 0)\} \tag{19}$$

$$D = \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \qquad \left(D_k = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x}| < \frac{1}{k}\right\}\right) \tag{20}$$

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \qquad \left(E_k = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x}| < 1 - \frac{1}{k}\right\}\right) \tag{21}$$

- $A$ について

  $(1, 0) \in A$ であるが、${}^\forall\varepsilon > 0$ とすると $(1 - \varepsilon, 0) \notin A$ である。

  $A$ は $(1, 0)$ の $\varepsilon$-近傍を含まないので開集合ではない。
- $B$ について

  $(x_1, x_2) \in B$ に対し、$\varepsilon = \min\{x_1/2,\ x_2/2\}$ とする。$(x_1, x_2)$ から距離 $\varepsilon$ の範囲にある全ての点は $B$ に含まれる。

  $B$ は任意の点 $(x_1, x_2)$ の $\varepsilon$-近傍を含むので開集合である。
- $C$ について

  $(1, 0, 0) \in C$ であるが、${}^\forall\varepsilon > 0$ とすると $(1 + \varepsilon, 0, 0) \notin C$ である。

  $C$ は $(1, 0)$ の $\varepsilon$-近傍を含まないので開集合ではない。
- $D$ について

  各 $D_k$ は開集合であり、$D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \cdots$ である。

  $(0, 0) \in D$ であるが、$\varepsilon > 0$ とすると $0 < 1/l < \varepsilon$ となる $l \in \mathbb{N}$ が存在する。

  つまり、$(\varepsilon, 0) \notin D_l$ である。

  $D$ は $(0, 0)$ の近傍を含まないため $D$ は開集合でない。
- $E$ について

  各 $E_k$ は開集合であり、$\phi = E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x}| < 1\right\}$ である。

  $\boldsymbol{p} \in E$ に対して、$\boldsymbol{p} \in E_l$ が存在する。$\boldsymbol{p}$ の $\varepsilon$-近傍は $E_l$ に含まれるから $E$ にも含まれる。よって、$E$ は開集合である。

以上より、開集合は $B$ と $E$ の 2 つである。

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$ とし、$f : D \to \mathbb{R}$ を $f(x,\ y) = x^y$ と定義す

る。$(a,\ b) \in D$ について次の式を求めよ。

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \tag{22}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \log x \tag{23}$$

これにより求める式は次のようになる。

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = ba^{b-1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = a^b \log a \tag{24}$$

……………………………………………………………………

写像 $\boldsymbol{f}$ を次のように定める。

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \boldsymbol{f}(x_1,\ x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ -x_1^2 + x_2 \\ -4x_1 + x_2^2 \end{pmatrix} \tag{25}$$

また、$\boldsymbol{n} = {}^t(1\ 2\ 1)$ とする。

この時、次の条件を満たす $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ を求めよ。

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}(a,b) \text{ と } \boldsymbol{n} \text{ は直交} \quad (i = 1, 2) \tag{26}$$

$\boldsymbol{f}$ を $x_1,\ x_2$ で偏微分する。

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}(a,b) = \begin{pmatrix} 2a \\ -2a \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_2}(a,b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2b \end{pmatrix}, \tag{27}$$

この 2 つの式は $\boldsymbol{n}$ と直行する為、それぞれの内積が 0 になる。

$$2a - 4a - 4 = 0, \quad 0 + 2 + 2b = 0 \tag{28}$$

この結果、$(a,b) = (-2,-1)$ である。

……………………………………………………………………

$D_1,\ D_2 \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする。この時、$D_1 \cap D_2$ と $D_1 \cup D_2$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合となることを示せ。

${}^\forall \boldsymbol{p} \in D_1 \cap D_2$ とする。

開集合の定義はある実数 $\varepsilon > 0$ が存在し、点 $\boldsymbol{p}$ からの距離が $\varepsilon$ に満たない範囲の全ての点が $\boldsymbol{p}$ と同じ集合に含まれていることである。

$\boldsymbol{p} \in D_1 \cap D_2$ より $\boldsymbol{p} \in D_1$ かつ $\boldsymbol{p} \in D_2$ である。

$\boldsymbol{p} \in D_1$ である為、$\varepsilon_1 > 0$ が存在し開集合の定義を満たす。同様に $\boldsymbol{p} \in D_2$ から $\varepsilon_2 > 0$ が存在する。そこで $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とすると、$D_1$, $D_2$ の両方の開集合の定義を満たす。

この $\varepsilon$-近傍内の点は $D_1 \cap D_2$ に含まれる為、$D_1 \cap D_2$ が開集合であることが分かる。

$\boldsymbol{p} \in D_1 \cup D_2$ とする。もし、$\boldsymbol{p} \in D_1$ であれば、$\boldsymbol{p}$ の $\varepsilon$-近傍は $D_1$ に含まれる為、$D_1 \cup D_2$ にも含まれる。$D_2$ も同様に考えることで $D_1 \cup D_2$ が開集合であることが分かる。

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$D \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とし、$f : D \to \mathbb{R}$ を $C^2$ 級関数とする。この時、次の式を満たすことを示せ。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{29}$$

導関数の定義に従い式を書き換える。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \tag{30}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \tag{31}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\lim_{h_y \to 0} \frac{f(x, y+h_y) - f(x, y)}{h_y}\right) \tag{32}$$

$$= \lim_{h_x \to 0} \frac{1}{h_x}\left(\lim_{h_y \to 0} \frac{f(x+h_x, y+h_y) - f(x+h_x, y)}{h_y} - \lim_{h_y \to 0} \frac{f(x, y+h_y) - f(x, y)}{h_y}\right) \tag{33}$$

$$= \lim_{h_x \to 0} \lim_{h_y \to 0} \frac{1}{h_x h_y}\left(f(x+h_x, y+h_y) - f(x+h_x, y) - f(x, y+h_y) + f(x, y)\right) \tag{34}$$

$$= \lim_{h_x \to 0} \lim_{h_y \to 0} \frac{\Delta}{h_x h_y} \tag{35}$$

ただし、$\Delta$ は次のように置く。

$$\Delta = f(x+h_x, y+h_y) - f(x+h_x, y) - f(x, y+h_y) + f(x, y) \tag{36}$$

同様にして次も得られる。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \lim_{h_y \to 0} \lim_{h_x \to 0} \frac{\Delta}{h_x h_y} \tag{37}$$

ここで、

$$g_1(X) = f(X, y+h_y) - f(X, y) \tag{38}$$

とおくと、

$$\Delta = g_1(x+h_x) - g_1(x) \tag{39}$$

$$= g_1'(x+\theta_1 h_x) h_x \qquad (0 < \theta_1 < 1) \cdots \text{平均値の定理} \tag{40}$$

である。

$$g_1'(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} g_1(X) = \frac{\partial}{\partial X} f(X, y+h_y) - \frac{\partial}{\partial X} f(X, y) = f_x(X, y+h_y) - f_x(X, y) \tag{41}$$

より

$$\Delta = (f_x(x+\theta_1 h_x, y+h_y) - f_x(x+\theta_1 h_x, y))h_x \tag{42}$$

である。

$$g_2(Y) = f_x(x+\theta_1 h_x, Y) \tag{43}$$

とおくと

$$\Delta =(g_2(y+h_y) - g_2(y))h_x \tag{44}$$
$$=(g_2'(y+\theta_2 h_y)h_y)h_x \qquad (0<\theta_2<1)\cdots\text{平均値の定理} \tag{45}$$

$$g_2'(Y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Y}g_2(Y) = \frac{\partial}{\partial Y}f_x(x+\theta_1 h_x, Y) = f_{xy}(x+\theta_1 h_x, Y) \tag{46}$$

より $\Delta$ は次のように表せる。

$$\Delta = f_{xy}(x+\theta_1 h_x,\ y+\theta_2 h_y)h_x h_y \qquad (0<\theta_i<1,\ i=1,2) \tag{47}$$

この式は $\Delta$ の式 (36) を $x$ について式を変形した後、$y$ について変形を行っている。

逆に式 (36) を $y$ について式を変形した後、$x$ について変形を行うと次の式が得られる。

$$\Delta = f_{yx}(x+\theta_3 h_x,\ y+\theta_4 h_y)h_x h_y \qquad (0<\theta_i<1,\ i=3,4) \tag{48}$$

式 (47) と式 (48) を使うと次の 2 つの式が得られる。

$$\lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} \frac{\Delta}{h_x h_y} = \lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} f_{xy}(x+\theta_1 h_x,\ y+\theta_2 h_y) = f_{xy}(x,\ y) \tag{49}$$
$$\lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} \frac{\Delta}{h_x h_y} = \lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} f_{yx}(x+\theta_3 h_x,\ y+\theta_4 h_y) = f_{yx}(x,\ y) \tag{50}$$

左辺が等しい為、$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ であることが示せる。