1. $(X, \mathcal{M})$ を可測空間とし、$A \in \mathcal{M}$ とする。

(a) $f : X \to [0, \infty]$ は $\mathcal{M}$-可測であるとし、f を A に制限して得られる関数を $f|_A : A \to [0, \infty]$ とかく。このとき、$f|_A$ は $\mathcal{M}|_A$-可測であることを示せ。

$^\forall U \in \mathcal{B}([0, \infty])$ に対して、$f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$ であるとする。

$$\mathcal{M}|_A = \{M \cap A \mid M \in \mathcal{M}\} \tag{1}$$

$f|_A^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A \in \mathcal{M}|_A$ であるので、$f|_A$ は $\mathcal{M}|_A$-可測である。

(b) $f : X \to [0, \infty)$ は $\mathcal{M}$-可測な単関数であるとする。この時、次の式が成り立つことを示せ。

$$\int_A f|_A \, d\mu|_A = \int_X f \mathbf{1}_A \, d\mu \tag{2}$$

但し、$\mu|_A$ は μ を可測空間 $(A, \mathcal{M}|_A)$ に制限したものである。

$\{\alpha_j\}_{j=1}^k \subset \mathbb{R}$ と互いに素な $\{S_j\}_{j=1}^k \subset \mathcal{M}$ により、$f = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{S_k}$ と表せる。これにより、$f\mathbf{1}_A$ は次のように表せる。

$$f\mathbf{1}_A = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{S_k} \mathbf{1}_A = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{S_k \cap A} \tag{3}$$

よって、右辺の積分は次のようになる。

$$\int_X f\mathbf{1}_A \, d\mu = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(S_k \cap A) \tag{4}$$

f を A に制限した関数は $f|_A = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{S_k \cap A}$ となる。また、$\mathbf{1}_{S_k}$ は A 以外で 0 となるので、積分範囲を制限しても積分結果は変わらない。その為、上記積分は次のようにかける。

$$\int_X f\mathbf{1}_A \, d\mu = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(S_k \cap A) = \int_A f|_A \, d\mu|_A \tag{5}$$

(c) $f : X \to [0, \infty]$ は $\mathcal{M}$-可測であるとする。単調収束定理を用いて次の式が成り立つことを示せ。

$$\int_A f|_A \, d\mu|_A = \int_X f\mathbf{1}_A \, d\mu \tag{6}$$

…………………………………………………………………………………………

単調収束定理

$f_n : X \to [0,\infty]$ が $\mathcal{M}$-可測であり、$f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ とする。

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \tag{7}$$

…………………………………………………………………………………………

$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ となる $\mathcal{M}$-可測関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} (f_i : X \to [0,\infty))$ が存在し、$f_n \le f_{n+1}$ を満たす。

上の問いの結果より、次の式が成り立つ。

$$\int_A f_n|_A \, d\mu|_A = \int_X f_n \mathbf{1}_A \, d\mu \tag{8}$$

単調収束定理より次の式が得られる。

$$\int_A \lim_{n\to\infty} f_n|_A \, d\mu|_A = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n|_A \, d\mu|_A \tag{9}$$

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n \mathbf{1}_A \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathbf{1}_A \, d\mu \tag{10}$$

$f|_A = \lim_{n\to\infty} f_n|_A$, $f\mathbf{1}_A = \lim_{n\to\infty} f_n \mathbf{1}_A$ であるので、次が成り立つ。

$$\int_A f|_A \, d\mu|_A = \int_X f \mathbf{1}_A \, d\mu \tag{11}$$

---

2. $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ を連続関数とし、$n \in \mathbb{N}$ に対して、$f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ を $f_n(x) = f(x)\mathbf{1}_{[-n,n]}(x)$ で定義する。$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して単調収束定理を用いて次の式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \tag{12}$$

ここで、μ は 1 次元のルベーグ測度であり、右辺は広義リーマン積分である。

…………………………………………………………………………………………

$n \in \mathbb{N}$ に対して、$\mathbb{R}$ の部分集合を $I_n = [-n, n]$ とおく。

f は連続関数であるので、可測関数である。よって、次の式が成り立つ。

$$\int_{I_n} f|_{I_n} d\mu|_{I_n} = \int_{\mathbb{R}} f \mathbf{1}_{I_n} d\mu \tag{13}$$

相対位相により $f|_{I_n} : I_n \to [0,\infty)$ は連続写像である。これにより次の式が成り立つ。

$$\int_{I_n} f|_{I_n} d\mu|_{I_n} = \int_{-n}^{n} f(x) dx \tag{14}$$

この 2 つの式と f_n の定義から次の式が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \int_{-n}^{n} f(x)dx \tag{15}$$

両辺の極限を考える。

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x)dx \tag{16}$$

広義積分の定義より右辺の式は次のように表せる。

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \tag{17}$$

$f_n = f\mathbf{1}_{I_n}$ であり、f が可測関数であるから f_n も可測である。また、$f_n \leq f_{n+1}$ である。この為、単調収束定理により次の式が得られる。

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n d\mu \tag{18}$$

$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ であるから右辺を置き換えると最終的に次の式が得られる。

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \tag{19}$$
