
可測関数

(X,Σ_X), (Y,Σ_Y) を可測空間、つまり、X,Y は集合で、Σ_X,Σ_Y は σ-加法族とする。

関数 $f:X\to Y$ について $^\forall E\in\Sigma_Y$ に対して $f^{-1}(E)\in\Sigma_X$ が成り立つとき、関数 $f:X\to Y$ が可測であるという。この集合 Y が $\overline{\mathbb{R}}=[-\infty,\infty]$ の時、Σ_Y はボレル集合族として定義する。

μ-零集合

$(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする。$A\subset X$ が μ-零集合であるとは, $A\subset N$ かつ $\mu(N)=0$ を満たす $N\in\mathcal{M}$ が存在することをいう。

完備

$(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする。全ての μ-零集合が $\mathcal{M}$ に属する時、$(X,\mathcal{M},\mu)$ あるいは μ のことを完備という。

完備化

$(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする。X の部分集合族 $\overline{\mathcal{M}}$ を次のように定義する。

$$\overline{\mathcal{M}}=\{A\subset X\mid B_1,B_2\in\mathcal{M}\text{ が存在して、}B_1\subset A\subset B_2\text{ かつ }\mu(B_2\backslash B_1)=0\}\tag{1}$$

また、$A\in\overline{\mathcal{M}}$ に対し、$\overline{\mathcal{M}}$ の定義中の B_1 をとり、$\overline{\mu}(A)=\mu(B_1)$ と定める。この時、$(X,\overline{\mathcal{M}},\overline{\mu})$ は完備測度空間となる。

この測度空間 $(X,\overline{\mathcal{M}},\overline{\mu})$ を $(X,\mathcal{M},\mu)$ の完備化という。

$(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とし、その完備化を $(X,\overline{\mathcal{M}},\overline{\mu})$ で表す。また、$f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ とする。

1. $g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{M}$-可測であるとする。$\{x\in X\mid f(x)\neq g(x)\}$ が μ-零集合であるならば、f は $\overline{\mathcal{M}}$-可測であることを示せ。

   ....

   $B\subset\overline{\mathbb{R}}$ をボレル集合とする。g は $\mathcal{M}$-可測であるので、$g^{-1}(B)\in\mathcal{M}$ である。

   $S=\{x\in X\mid f(x)\neq g(x)\}$ が μ-零集合であるので、$N\in\mathcal{M}$ が存在し、$S\subset N$ かつ $\mu(N)=0$ である。

   任意のボレル集合 $B\subset\overline{\mathbb{R}}$ に対し、$f^{-1}(B)\in\overline{\mathcal{M}}$ を示せればよい。

   集合 $f^{-1}(B)$ は次の 2 つの集合に分けられる。

$$f^{-1}(B)=\{x\in f^{-1}(B)\mid f(x)\neq g(x)\}\cup\{x\in f^{-1}(B)\mid f(x)=g(x)\}\tag{2}$$

   1 つ目の集合は次のような包含関係がある。

$$\emptyset\subset\{x\in f^{-1}(B)\mid f(x)\neq g(x)\}\subset S\subset N\tag{3}$$

この時、$\mu(N\backslash\emptyset) = \mu(N) = 0$ であるので、$\{x \in f^{-1}(B) \mid f(x) \neq g(x)\} \in \overline{\mathcal{M}}$ である。同様に $g^{-1}(B)$ についても考えられる。

$$\emptyset \subset \{x \in g^{-1}(B) \mid f(x) \neq g(x)\} \subset S \subset N \tag{4}$$

つまり、$\{x \in g^{-1}(B) \mid f(x) \neq g(x)\} \in \overline{\mathcal{M}}$ である。
2 つ目の集合 $\{x \in f^{-1}(B) \mid f(x) = g(x)\}$ は $g^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ の部分集合である。

$$\{x \in f^{-1}(B) \mid f(x) = g(x)\} = \{x \in g^{-1}(B) \mid f(x) = g(x)\} \subset g^{-1}(B) \tag{5}$$

つまり、次のような式が成り立つ。

$$\{x \in g^{-1}(B) \mid f(x) = g(x)\} = g^{-1}(B)\backslash\{x \in g^{-1}(B) \mid f(x) \neq g(x)\} \tag{6}$$

$g^{-1}(B) \in \mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$ であり、$\{x \in g^{-1}(B) \mid f(x) \neq g(x)\} \in \overline{\mathcal{M}}$ であるので、$\{x \in g^{-1}(B) \mid f(x) = g(x)\} \in \overline{\mathcal{M}}$ である。
$\{x \in f^{-1}(B) \mid f(x) \neq g(x)\} \in \overline{\mathcal{M}}$ であり、$\{x \in f^{-1}(B) \mid f(x) = g(x)\} \in \overline{\mathcal{M}}$ であるので、$f^{-1}(B) \in \overline{\mathcal{M}}$ であることがわかる。
これにより、f は $\overline{\mathcal{M}}$-可測である。

---

2. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X 上の $\overline{\mathbb{R}}$-値関数の列とし、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、f_n は $\mathcal{M}$-可則であるとする。$\left\{x \in X \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}$ が μ-零集合であるならば、f は $\overline{\mathcal{M}}$-可測になることを示せ。

....

$B \subset \overline{\mathbb{R}}$ をボレル集合とする。
$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、$f_n^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ である。
$S = \left\{x \in X \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}$ とすると、S は μ-零集合であるので、$S \subset N$ が存在し、$\mu(N) = 0$ である。
$f^{-1}(B) \in \overline{\mathcal{M}}$ となることを示す。
$f^{-1}(B)$ は S の内外に分けられる。

$$f^{-1}(B) = (f^{-1}(B) \cap S) \cup (f^{-1}(B) \cap S^c) \tag{7}$$

$f^{-1}(B) \cap S$ は次の包含関係がある。

$$\emptyset \subset f^{-1}(B) \cap S \subset S \subset N \tag{8}$$

$\mu(N\backslash\emptyset) = \mu(N) = 0$ であるので、$f^{-1}(B) \cap S \in \overline{\mathcal{M}}$ である。
$f^{-1}(B) \cap S^c$ について考える。

任意の $x \in S$ について関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限があり、次のように定義される。

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N_0 \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ N \geq N_0 \Rightarrow |f_N(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{9}$$

つまり、ε に対して十分に大きい $N \in \mathbb{N}$ をとってくれば $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon$ を満たす。

$$f^{-1}(B) \cap S^c = \left\{ x \in f^{-1}(B) \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \right\} \tag{10}$$

$x \in f^{-1}(B)$ に対して、$\varepsilon_x > 0$ を任意に定めると十分に大きな $N_x \in \mathbb{N}$ により $|f_{N_x}(x) - f(x)| < \varepsilon_x$ となる。
そこで、区間 $I_x \subset \overline{\mathbb{R}}$ を次のように定義する。

$$I_x = \begin{cases} [f(x),\ f_{N_x}(x)], & (f_{N_x}(x) \geq f(x)) \\ [f_{N_x}(x),\ f(x)], & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{11}$$

$|I_x| < \varepsilon_x$ であるが、十分小さな ε_x を取ってくることにより $I_x \subset B$ とする。
これにより $f^{-1}(B) \cap S^c = \bigcup_x f_{N_x}^{-1}(I_x)$ である。
$f_{N_x}^{-1}(I_x) \in \mathcal{M}$ であるので、$f^{-1}(B) \cap S^c \in \mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$ である。
$f^{-1}(B) \cap S \in \overline{\mathcal{M}}$ であることと合わせると $f^{-1}(B) \in \overline{\mathcal{M}}$ である事がわかる。よって、f は $\overline{\mathcal{M}}$ 可測である。
