
テンソル積

tensor(テンソル)積 は加群の直積に多重線形性をもたせた集合である。

. . . .

テンソル積の定義

可換環 R と R 加群 M, N に対し、直積 $M \times N$ を考える。

この直積集合 $M \times N$ に同値関係 $\sim$ を定め、これによる商 $M \times N/\sim$ を M と N のテンソル積といい $M \otimes_R N$ と書く。

同値関係 $\sim$ は次の様に定義する。$m_1, m_2 \in M,\ n_1, n_2 \in N,\ r \in R$

- $(n_1 + n_2, m_1) \sim (n_1, m_1) + (n_2, m_1)$
- $(n_1, m_1 + m_2) \sim (n_1, m_1) + (n_1, m_2)$
- $r(n_1, m_1) \sim (rn_1, m_1) \sim (n_1, rm_1)$

同値関係 $\sim$ の性質からテンソル積の元 $n \otimes m$ は次のような性質を持つ。

- $(n_1 + n_2) \otimes m_1 = n_1 \otimes m_1 + n_2 \otimes m_1$
- $n_1 \otimes (m_1 + m_2) = n_1 \otimes m_1 + n_1 \otimes m_2$
- $r(n_1 \otimes m_1) = (rn_1) \otimes m_1 = n_1 \otimes (rm_1)$

. . . .

テンソル積の定義 2

可換環 R に対し、M, N を R 加群とする。

このとき、R 加群 T と R 双線形写像 $\varphi : M \times N \to T$ が存在し、次を満たす。

任意の R 加群 Z と任意の R 双線形写像 $\psi : M \times N \to Z$ に対して、$\psi = f \circ \varphi$ を満たす R 線形写像 $f : T \to Z$ が唯一つだけ存在する。

このとき、R 加群 T をテンソル積といい $T = M \otimes_R N$ とかく。

加群のテンソル積は、2 つ目の定義 (普遍性での定義) を使うことが多い。

1. m, n を正の整数とし、d を m と n の最大公約数とする。
   このとき、$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ と同型であることを示せ。

   . . . .

   $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の元を $[z]_m$ というように右下に添え字を書くことで表すものとする。このとき、$z \in \mathbb{Z}$ である。

$\mathbb{Z}$ 準同型写像 f を次のように定める。

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \qquad z \mapsto [z]_m \otimes [1]_n \tag{1}$$

${}^{\forall}[\alpha]_m \otimes [\beta]_n \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とする。
$[\alpha]_m \otimes [\beta]_n$ は次のように計算できる。

$$[\alpha]_m \otimes [\beta]_n = \beta([\alpha]_m \otimes [1]_n) = [\alpha\beta]_m \otimes [1]_n \tag{2}$$

つまり、$[\alpha]_m \otimes [\beta]_n = f(\alpha\beta)$ であるので、f は全射である。
そこで f の準同型定理より次が得られる。

$$\mathbb{Z}/\mathrm{Ker}f \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \tag{3}$$

$\mathrm{Ker}f$ について調べる。
d は m, n の最大公約数であるので、ある整数 s, t を用いて $d = ms + nt$ と表せる。
${}^{\forall}z \in \mathbb{Z}$ に対して、$f(dz)$ を計算する。

$$\begin{aligned} f(dz) &= [dz]_m \otimes [1]_n & &= [(ms+nt)z]_m \otimes [1]_n \qquad (4) \\ &= [msz]_m \otimes [1]_n + [ntz]_m \otimes [1]_n & &= [msz]_m \otimes [1]_n + [1]_m \otimes [ntz]_n \qquad (5) \\ &= [0]_m \otimes [1]_n + [1]_m \otimes [0]_n & &= 0 \qquad (6) \end{aligned}$$

つまり、$d\mathbb{Z} \subset \mathrm{Ker}f$ である。
写像 $\psi : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ を $\psi([\alpha]_m, [\beta]_n) = [\alpha\beta]_d$ と定める。ψ は $\mathbb{Z}$ 双線形写像である。${}^{\forall}[z]_d \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ に対し、$[z]_d = \psi([z]_m, [1]_n)$ となるので、ψ は全射である。
テンソル積の普遍性より次の準同型写像 g が存在する。

$$g : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \qquad [\alpha]_m \otimes [\beta]_n \mapsto [\alpha\beta]_d \tag{7}$$

$\varphi : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とすれば、$\psi = g \circ \varphi$ である。ψ が全射なので、g も全射である。
${}^{\forall}x \in \mathrm{Ker}f$ とする。
g の全射性より $[x]_d = g([x]_m \otimes [1]_n)$ となるが、$f(x) = [x]_m \otimes [1]_n$ であるので $[x]_d = g(f(x))$。$x \in \mathrm{Ker}f$ から $f(x) = 0$ であるので、$[x]_d = g(f(x)) = [0]_d$ であり、$\mathrm{Ker}f \subset d\mathbb{Z}$ ということがわかる。
よって、$\mathrm{Ker}f = d\mathbb{Z}$ であるから式 (3) より次が得られる。

$$\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \tag{8}$$

2. R を環とするとき、正の整数 m, n に対し $R^n \otimes_R R^m$ と R^{mn} は同型であることを示せ。

....

$u_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in R^m$ を i 成分のみ 1 とすると R^m は次のように表せる。

$$R^m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} r_i u_i \,\middle|\, r_i \in R \right\} \tag{9}$$

$v_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in R^n$ を i 成分のみ 1 とすると R^n は次のように表せる。

$$R^n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i v_i \,\middle|\, r_i \in R \right\} \tag{10}$$

同様に $w_{ij} \in R^{mn}$ を定義し、R^{mn} を次のように表す。

$$R^{mn} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} w_{ij} \,\middle|\, r_{ij} \in R \right\} \tag{11}$$

$a \in R^n,\ b \in R^m$ を $a = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j,\ b = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i$ として、テンソル積 $a \otimes b$ を計算する。

$$a \otimes b = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j \right) \otimes \left(\sum_{i=1}^{m} b_i u_i \right) \qquad = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(v_j \otimes \left(\sum_{i=1}^{m} b_i u_i \right) \right) \tag{12}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{m} b_i \left(v_j \otimes u_i \right) \right) \qquad = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_j b_i \left(v_j \otimes u_i \right) \tag{13}$$

準同型写像 $f : R^n \otimes_R R^m \to R^{mn}$ を $f(v_j \otimes u_i) = w_{ij}$ と定める事により $f(a \otimes b) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_j b_i w_{ij}$ とする。

f は全単射であるなら、$R^n \otimes_R R^m$ と R^{mn} は同型である。

$0 \in R^{mn}$ の逆像 $f^{-1}(0) \in R^n \otimes_R R^m$ を考える。

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_j b_i w_{ij} = 0 \Longleftrightarrow a_j b_i = 0 \ (j = 1, \dots, n,\ i = 1, \dots, m) \tag{14}$$

よって、$(a_1, \dots, a_m) = (0, \dots, 0)$ または $(b_1, \dots, b_n) = (0, \dots, 0)$ であるので、$\mathrm{Ker} f = \{0\}$ となり f は単射である。 (R は整域 ?)

${}^{\forall}c = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}w_{ij} \in R^{mn}$ に対し、$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\left(v_j \otimes u_i\right) \in R^n \otimes_R R^m$ が存在し、次の式が成り立つ。

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}w_{ij} = f\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}(v_j \otimes u_i)\right) \tag{15}$$

よって、f は全射である。

以上により、f は同型写像であり、$R^n \otimes R^m \cong R^{mn}$ である。

---

3. 整数環 $\mathbb{Z}$、多項式環 $\mathbb{R}[x]$ はアルチン環ではないことを示せ。

……………………………………………………………………

Artin(アルティン)環とは、イデアル I_n の無限列 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ が存在するとき、ある N 番目が存在し、$I_N = I_{N+1} = \cdots$ となるときを言う。

整数環 $\mathbb{Z}$ について、イデアル I_n を $I_n = (2^n)$ と定める。このとき、無限列 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ が存在し、任意の N に対して $I_N \neq I_{N+1}$ である。よって、$\mathbb{Z}$ はアルティン環ではない。

多項式環 $\mathbb{R}[x]$ についてイデアル J_n を $J_n = (x^n)$ と定める。このとき、無限列 $J_1 \supset J_2 \supset \cdots$ が存在し、任意の N に対して $J_N \neq J_{N+1}$ である。よって、$\mathbb{R}[x]$ はアルティン環ではない。

---

4. K を体とする。n を正の整数とするとき、左 $M_n(K)$ 加群 K^n は単純であることを示せ。

……………………………………………………………………

部分加群 $S \subset K^n$ をとってきて $S \neq \{0\}$ とする。

$s \in S$ を $s \neq 0$ とし、s の 0 でない成分を s_i とする。

${}^{\forall}k \in K^n$ を $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ とする。

行列 $A \in M_n(K)$ を次のように i 列目以外はすべて 0 の行列として定める。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & k_1 s_i^{-1} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & k_n s_i^{-1} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

これにより $k = As$ となる。よって、$k \in S$ となり、$S = K^n$ となる。

つまり、K^n は単純加群である。

---

5. 左 $M_n(K)$ 加群 $M_n(K)$ は組成列を持つことを示せ。

K は体とし、$M_n(K)$ は n 次正方行列全体の集合とする。
$M_n(K)$ は環としてみて、左イデアル I を考える。
$I \neq \{0\}$ とする。
$A \in I$ が正則行列とする。$^\forall B \in M_n(K)$ に対し、$CA = B$ となる $C \in M_n(K)$ が存在する。($C = BA^{-1}$ より) よって、$I = M_n(K)$ となる。
つまり、I に正則行列が含まれていれば $I = M_n(K)$ である。
$A \in M_n(K)$ の $(1,1)$ 成分が 0 以外で、その他の成分が 0 である行列とする。$^\forall B \in M_n(K)$ に対し、BA は第 1 列以外が 0 となる行列である。よって、第 1 列以外が 0 である行列全体の集合 I_1 は $M_n(K)$ の左イデアルである。
同様に i 列以外が 0 である行列全体の集合を I_i とすると、これらはすべて左イデアルである。
行列環 $M_n(K)$ の左イデアルは $M_n(K)$ の他、正則でない行列の集合 I_i $(i = 1, \ldots, n)$ と各 I_i の組み合わせた集合である。
左イデアルは左加群であるので、組成列は有限となる
よって、$M_n(K)$ は組成列を持つことがわかる。