1.（a）N 個の格子からなる自由境界条件の 1 次元 Ising 模型の分配関数 $Z_N^{(\mathrm{open})}$ を求めよ。

$$Z_N^{(\mathrm{open})} = \sum_{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{N-1}=\pm 1} \exp\left[K \sum_{j=0}^{N-2} \sigma_j \sigma_{j+1}\right] \tag{1}$$

…………………………………………………………………………………

各 j に対して $\sigma_j = \pm 1$ であるので、積 $\sigma_j\sigma_{j+1}$ は次の 4 つがある。

$$\sigma_j\sigma_{j+1} = \begin{cases} 1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (1, 1) \\ -1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (1, -1) \\ -1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (-1, 1) \\ 1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (-1, -1) \end{cases} \tag{2}$$

2 個の格子 $(N = 2)$ で考えてみると次のような結果が得られる。

$$\begin{aligned} Z_2^{(\mathrm{open})} &= \sum_{\sigma_0,\sigma_1=\pm 1} \exp\left[K \sum_{j=0}^{2-2} \sigma_j\sigma_{j+1}\right] && (3) \\ &= \sum_{\sigma_0,\sigma_1=\pm 1} \exp\left[K\sigma_0\sigma_1\right] && (4) \\ &= \exp\left[K\right] + \exp\left[-K\right] + \exp\left[-K\right] + \exp\left[K\right] && (5) \\ &= 2\left(\exp\left[K\right] + \exp\left[-K\right]\right) && (6) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Z_N^{(\text{open})} &= \sum_{\sigma_0,\dots,\sigma_{N-1}=\pm 1} \exp\left[K\sum_{j=0}^{N-2}\sigma_j\sigma_{j+1}\right] && (7)\\
&= \sum_{\sigma_0,\dots,\sigma_{N-1}=\pm 1} \exp\left[K\sum_{j=0}^{N-3}\sigma_j\sigma_{j+1}\right]\exp\left[K\sigma_{N-2}\sigma_{N-1}\right] && (8)\\
&= \sum_{\sigma_0,\dots,\sigma_{N-2}=\pm 1} \exp\left[K\sum_{j=0}^{N-3}\sigma_j\sigma_{j+1}\right]\left(\exp\left[K\sigma_{N-2}\right]+\exp\left[-K\sigma_{N-2}\right]\right) && (9)\\
&= \sum_{\sigma_0,\dots,\sigma_{N-2}=\pm 1} \exp\left[K\sum_{j=0}^{N-4}\sigma_j\sigma_{j+1}\right] \\
&\qquad \exp\left[K\sigma_{N-3}\sigma_{N-2}\right]\left(\exp\left[K\sigma_{N-2}\right]+\exp\left[-K\sigma_{N-2}\right]\right) && (10)\\
&= (\exp[K]+\exp[-K]) \sum_{\sigma_0,\dots,\sigma_{N-3}=\pm 1} \exp\left[K\sum_{j=0}^{N-4}\sigma_j\sigma_{j+1}\right] \\
&\qquad \left(\exp\left[K\sigma_{N-3}\right]+\exp\left[-K\sigma_{N-3}\right]\right) && (11)\\
&\ \vdots \\
&= (\exp[K]+\exp[-K])^{N-3} \sum_{\sigma_0,\sigma_1=\pm 1} \exp\left[K\sum_{j=0}^{0}\sigma_j\sigma_{j+1}\right] \\
&\qquad \left(\exp\left[K\sigma_1\right]+\exp\left[-K\sigma_1\right]\right) && (12)\\
&= 2(\exp[K]+\exp[-K])^{N-1} && (13)
\end{aligned}
$$

$\sum$ の末尾より一つずつ分けて $\sigma_j = \pm 1$ を代入していくと、式 (6) より上記結果が得られる。

$$
Z_N^{(\text{open})} = 2(\exp[K]+\exp[-K])^{N-1} \tag{14}
$$

(b) 遷移行列 T の N 乗の行列 T^N を求めよ。

$$
T = \begin{pmatrix} e^{K} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K} \end{pmatrix} = e^{-K}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \qquad a = e^{2K} \tag{15}
$$

T^N の行列要素を次のように置いたときの A_N と B_N の漸化式を考えて T^N を求める。

$$
T^N = e^{-NK}\begin{pmatrix} A_N & B_N \\ B_N & A_N \end{pmatrix} \tag{16}
$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

T^N の計算をする。

$$T^N = e^{-NK}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}^{N-1} = e^{-NK}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{N-1} & B_{N-1} \\ B_{N-1} & A_{N-1} \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$= e^{-NK}\begin{pmatrix} aA_{N-1} + B_{N-1} & A_{N-1} + aB_{N-1} \\ A_{N-1} + aB_{N-1} & aA_{N-1} + B_{N-1} \end{pmatrix} \tag{18}$$

A_N と B_N の漸化式は次のようになる。

$$A_1 = a, \quad A_N = aA_{N-1} + B_{N-1} \tag{19}$$

$$B_1 = 1, \quad B_N = A_{N-1} + aB_{N-1} \tag{20}$$

$A_N + \alpha B_N = \beta(A_{N-1} + \alpha B_{N-1})$ を満たす (α, β) を見つける為に、この左辺に (19)、(20) を代入し計算する。

$$aA_{N-1} + B_{N-1} + \alpha(A_{N-1} + aB_{N-1}) = \beta(A_{N-1} + \alpha B_{N-1}) \tag{21}$$

$$a + \alpha = \beta, \quad 1 + a\alpha = \alpha\beta \tag{22}$$

$$(\alpha, \beta) = (1, a+1),\ (-1, a-1) \tag{23}$$

これにより次の式が得られる。

$$\begin{cases} A_N + B_N = (a+1)(A_{N-1} + B_{N-1}) \\ A_N - B_N = (a-1)\,(A_{N-1} - B_{N-1}) \end{cases} \tag{24}$$

数列 $\{A_N \pm B_N\}$ の一般項が次のように求まる。

$$\begin{cases} A_N + B_N = (a+1)^N \\ A_N - B_N = (a-1)^N \end{cases} \tag{25}$$

よって、この式の和と差から次が得られる。

$$A_N = \frac{1}{2}\left((a+1)^N + (a-1)^N\right), \quad B_N = \frac{1}{2}\left((a+1)^N - (a-1)^N\right) \tag{26}$$

これにより T^N が次のように求まる。

$$T^N = \frac{e^{-NK}}{2}\begin{pmatrix} (a+1)^N + (a-1)^N & (a+1)^N - (a-1)^N \\ (a+1)^N - (a-1)^N & (a+1)^N + (a-1)^N \end{pmatrix} \tag{27}$$

(c) T^N と $Z_N^{(\mathrm{open})}$ はどのように関係しているか?

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

式 (14) より

$$Z_N^{(\mathrm{open})} = 2(e^{K} + e^{-K})^{N-1} \tag{28}$$
$$= 2e^{-(N-1)K}(a+1)^{N-1} \tag{29}$$

式 (27) より

$$T^{N-1} = \frac{e^{-(N-1)K}}{2}\begin{pmatrix}(a+1)^{N-1}+(a-1)^{N-1} & (a+1)^{N-1}-(a-1)^{N-1}\\ (a+1)^{N-1}-(a-1)^{N-1} & (a+1)^{N-1}+(a-1)^{N-1}\end{pmatrix} \tag{30}$$
$$= \frac{1}{4}Z_N^{(\mathrm{open})}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \frac{(a-1)^{N-1}}{4(a+1)^{N-1}}Z_N^{(\mathrm{open})}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \tag{31}$$

---

2. N 個の 1 次元格子の各点上の変数 σ_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$ がそれぞれ $\sigma_j \in \{0, 1, 2\}$ の 3 つの値をとり、隣り合う格子点 σ_j と σ_{j+1} の値によってその起こり得る相対確率 (Boltzmann 重率) が

$$\exp\left[K(2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}} - 1)\right], \qquad \delta_{a,b} = \begin{cases}1 & (a = b)\\ 0 & (a \neq b)\end{cases} \tag{32}$$

であるような模型を考える。この模型の周期境界条件 $(\sigma_N = \sigma_0)$ のもとでの分配関数 $Z_N^{(\mathrm{close})}$ を求めよ。

$$Z_N^{(\mathrm{close})} = \sum_{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{N-1}=0,1,2} \exp\left[K\sum_{j=0}^{N-1}(2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}} - 1)\right] \tag{33}$$

……………………………………………………………………

$2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}} - 1$ は次の 9 パターンの値がある。

$$2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}} - 1 = \begin{cases}1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (0, 0)\\ -1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (0, 1)\\ -1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (0, 2)\\ -1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (1, 0)\\ 1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (1, 1)\\ -1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (1, 2)\\ -1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (2, 0)\\ -1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (2, 1)\\ 1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (2, 2)\end{cases} \tag{34}$$

$N=2$ の場合、$Z_2^{(\mathrm{close})}$ を計算する。

$$
\begin{align}
Z_2^{(\mathrm{close})} &= \sum_{\sigma_0,\sigma_1=0,1,2} \exp\left[K\sum_{j=0}^{2-1}(2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}}-1)\right] \tag{35}\\
&= \sum_{\sigma_0,\sigma_1=0,1,2} \exp\left[K(2\delta_{\sigma_0,\sigma_1}-1)\right]\exp\left[K(2\delta_{\sigma_1,\sigma_2}-1)\right] \tag{36}\\
&= \sum_{\sigma_0,\sigma_1=0,1,2} \exp\left[2K(2\delta_{\sigma_0,\sigma_1}-1)\right] \tag{37}\\
&= 3\exp\left[2K\right]+6\exp\left[-2K\right] \tag{38}
\end{align}
$$

$$
\begin{align}
Z_N^{(\mathrm{close})} &= \sum_{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{N-1}=0,1,2} \exp\left[K\sum_{j=0}^{N-1}(2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}}-1)\right] \tag{39}\\
&= \sum_{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{N-1}=0,1,2} \exp\left[K\sum_{j=0}^{N-3}(2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}}-1)\right] \nonumber\\
&\qquad \exp\left[K(2\delta_{\sigma_{N-2},\sigma_{N-1}}-1)\right]\exp\left[K(2\delta_{\sigma_{N-1},\sigma_N}-1)\right] \tag{40}\\
& \tag{41}
\end{align}
$$
