1. $x, y \in \mathbb{Z}$ が $x^2 + y^2 \leq 25$ を満たすとする。この時、次の 3 つのベクトルが一次独立となる x, y の組 (x, y) の個数を求めよ。ただし、(x, y) と (y, x) は別の組として数えるものとする。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ y-4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y \\ x-3 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ y-5 \end{pmatrix} \tag{1}$$

. . . .

$x^2 + y^2 \leq 25$ を満たす整数の組 (x, y) は次の 26 個である。

$x \setminus y$	0	1	2	3	4	5
0	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$	$(0,4)$	$(0,5)$
1	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	
2	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	
3	$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	
4	$(4,0)$	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$		
5	$(5,0)$					

. . . .

3 つのベクトル v_1, v_2, v_3 を次のように定める。

$$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y-4 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} y \\ x-3 \\ -4 \end{pmatrix} - 4v_3 = \begin{pmatrix} y-4 \\ x-3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ y-5 \end{pmatrix} - v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

この 3 つのベクトルを並べた行列 A を次のようにおく。

$$A = (v_3, v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & x & y-4 \\ 0 & y & x-3 \\ -1 & y-4 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

3 つのベクトルが一次従属である場合は $\det A = 0$ であるので、この時の (x, y) を求める。

$$\det A = y(y-4) - (x+y-4)(x-3) = 0 \tag{4}$$

移項をすると $y(y-4) = (x+y-4)(x-3)$ である。

- $y = 0$ の時、$0 \leq x \leq 5$ の範囲で $0 = (x-4)(x-3)$ を満たす整数は $x = 3, 4$ である。
- $y = 1$ の時、$0 \leq x \leq 4$ の範囲で $-3 = (x-3)^2$ を満たす整数はない。

- $y=2$ の時、$0 \le x \le 4$ の範囲で $-4=(x-2)(x-3)$ を満たす整数はない。
- $y=3$ の時、$0 \le x \le 4$ の範囲で $-3=(x-1)(x-3)$ を満たす整数はない。
- $y=4$ の時、$0 \le x \le 3$ の範囲で $0=x(x-3)$ を満たす整数は $x=0,3$ である。
- $y=5$ の時、$0 \le x \le 0$ の範囲で $5=(x+1)(x-3)$ を満たす整数はない。

以上より次の組が一次従属となる。

$$(x,y)=(3,0),\ (4,0),\ (0,4),\ (3,4) \tag{5}$$

これにより一次独立となる (x,y) は 22 個であることがわかる。

---

2. $n \in \mathbb{N}$ が $n \ge 2$ とする。$i,j \in \mathbb{N}$ はそれぞれ $1 \le i,j \le n$ で $i \ne j$ とし、c は定数とする。n 次単位行列 E_n の i 行の c 倍を j 行に足すことで得られる行列を P とし、E_n の i 列の c 倍を j 列に足すことで得られる行列を Q とする。
この時、$\det P$ と $\det Q$ を求めよ。

……………………………………………………………………………

n 次正方行列である成分のみ c でそれ以外が 0 の行列を $R(c)$ と書くと、P,Q は次のように表せる。

$$E_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad P=E_n+R(c),\quad Q=E_n+R(c) \tag{6}$$

$\det(R(c))=0$ より行列式は次のようになる。

$$\det P=\det(E_n+R(c))=\det(E_n)+\det(R(c))=1 \tag{7}$$
$$\det Q=\det(E_n+R(c))=\det(E_n)+\det(R(c))=1 \tag{8}$$

---

3. 3 つの n 次正方行列 A,B,C に対し、次の行列式の等式を証明せよ。

$$\begin{vmatrix}A+B+C & -A+B+2C & B+2C\\ A+B & B+C & B+C\\ A & -A+C & C\end{vmatrix}=(-1)^n\det(A)\det(A-C)\det(B+C) \tag{9}$$

……………………………………………………………………………

1 段目は n 行あるのでこれを -1 倍した為、行列式に $(-1)^n$ をかける。(11)
1 段目に 2 段目と 3 段目を加える。(12)

零行列を含んでいる為、2 つの行列式の積に分ける。(13)
後ろの行列式の列方向の 1 段を 2 段目から引く。(14)
各行列式の積になる。

$$\begin{vmatrix} A+B+C & -A+B+2C & B+2C \\ A+B & B+C & B+C \\ A & -A+C & C \end{vmatrix} \tag{10}$$

$$=(-1)^n \begin{vmatrix} -(A+B+C) & -(-A+B+2C) & -(B+2C) \\ A+B & B+C & B+C \\ A & -A+C & C \end{vmatrix} \tag{11}$$

$$=(-1)^n \begin{vmatrix} A-C & 0 & 0 \\ A+B & B+C & B+C \\ A & -A+C & C \end{vmatrix} \tag{12}$$

$$=(-1)^n \det(A-C) \begin{vmatrix} B+C & B+C \\ -A+C & C \end{vmatrix} \tag{13}$$

$$=(-1)^n \det(A-C) \begin{vmatrix} B+C & 0 \\ -A+C & A \end{vmatrix} \tag{14}$$

$$=(-1)^n \det(A-C)\det(B+C)\det(A) \tag{15}$$

---

4. 次の正方行列の固有値を求めよ。対角化可能であれば対角行列とその正則行列を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & -1 & 1 \\ 2 & \sqrt{3} & 1 \\ 3-\sqrt{3} & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{16}$$

…………………………………………………………………………

行列 A の固有値を λ とすると固有方程式は次のようになる。

$$\det(A-\lambda E) = 0 \tag{17}$$

この式を計算すると $(\lambda-2)(\lambda-3)^2 = 0$ となるので、固有値は $\lambda = 2, 3$ の 2 つである。
それぞれの固有値に対応した固有ベクトルを求める。固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たすベクトルであるので、$(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = 0$ を満たすベクトルとして求める。

$\lambda = 2$ の場合、$\boldsymbol{x} = k_1 \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ である。(k_1 は定数)

$\lambda = 3$ の場合、$\boldsymbol{x} = k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。(k_2 は定数)

3 次正方行列 A に対して固有ベクトルが 2 つしか無い為、A は対角化は出来ない。
同様に B について考える。

$$\det(B - \lambda E) = -(\lambda - 4)(\lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 4) = 0 \tag{18}$$

これを解くと $\lambda = 4, \sqrt{3} \pm i$ である。
それぞれの固有値 λ に対し固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求める。

$\lambda = 4$ の場合、$\boldsymbol{x} = k_1 \begin{pmatrix} 15 + 2\sqrt{3} \\ 32 + 9\sqrt{3} \\ 71 \end{pmatrix}$ である。(k_1 は定数)

$\lambda = \sqrt{3} + i$ の場合、$\boldsymbol{x} = k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}$ である。(k_2 は定数)

$\lambda = \sqrt{3} - i$ の場合、$\boldsymbol{x} = k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$ である。(k_3 は定数)

固有ベクトルが 3 つ得られたので、これを用いて正則行列 P を作る。P を利用することで B は対角化可能である。

$$P = \begin{pmatrix} 15 + 2\sqrt{3} & 1 & 1 \\ 32 + 9\sqrt{3} & -i & i \\ 71 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} + i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} - i \end{pmatrix} \tag{19}$$