ε - δ (イプシロン - デルタ) 論法

関数の極限を定義する為の論法である。単純に極限 $\left(\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)\right)$ を定義する場合のほか、関数の連続性を定義する場合にも利用する。

定義 関数の連続

$\boxed{\mathbb{R}\text{ 上で定義された関数 } f(x) \text{ が点 } a \in \mathbb{R} \text{ で連続である}}$

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の正の実数 ε に対し、次の条件を満たす正の実数 δ が存在する

[条件] $|x-a| < \delta$ であるなら $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である。

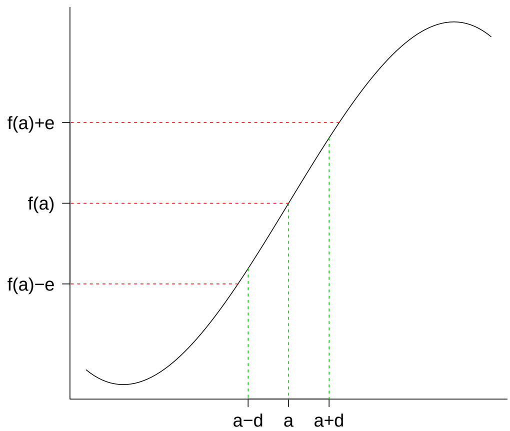
記号で書くと次の通り

$$^{\forall}\varepsilon > 0,\ ^{\exists}\delta > 0 \quad s.t. \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (\spadesuit)$$

[解説]

関数の連続を考える場合、記号等は次のような順に決定する。

(1). 関数 $f(x)$
(2). 点 $a \in \mathbb{R}$
(3). 実数 $\varepsilon > 0$
(4). 実数 $\delta > 0$



(4) の δ は条件「$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$」を満たすものが一つ存在すればよく、右上のグラフのような位置関係を意味している。(グラフの記号は ε の代わりに e 、δ の代わりに d を利用)

ε がどんな値であっても、ε に対して δ が存在することが連続の定義となる。集合で書けば、次のような式を満たす δ があることを定義としている。

$$(f(a-\delta), f(a+\delta)) \subset (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \qquad (\heartsuit)$$

ε は任意の値なので大きくても小さくてもいいが、大きい場合は δ も存在を見つけやすいので、ε がとても小さい場合を調べることが重要である。

もし不連続であれば、ε が十分に小さいと $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ の端にグラフがない事が起きる。この場合、δ はどんな値を取っても式 $(\heartsuit)$ を満たすことが出来ない。

記号の決定の (2) $a \in \mathbb{R}$ がある区間上の任意の点だとすれば区間上で連続という。