1. $a|bc$ を満たす零でない整数 a,b,c に対して $\frac{a}{GCD(a,b)}|c$ であることを示せ。

…………………………………………………………………………

$g = GCD(a,b)$ とする。これにより $a = a'g,\ b = b'g$ となる $a', b' \in \mathbb{Z}$ が存在する。$a|bc$ より $a'|b'c$ である。g は a と b の最大公約数であるので、a', b' は互いに素である。よって、$a'|b'c$ から、$a'|c$ であることになる。

$a = a'g = a'GCD(a,b)$ より $a' = \frac{a}{GCD(a,b)}$ が得られる。

$a'|c$ であるので、$\frac{a}{GCD(a,b)}|c$ であることがわかる。

2.

環 R に対して、部分環 $I \subset R$ が次を満たす時、I をイデアルという。

$$r \in R,\ x \in I \Rightarrow rx \in I \tag{1}$$

積が非可換であるときは $rx \in I$ や $xr \in I$ と異なるものになるので、右側イデアル (左イデアル)、左側イデアル (右イデアル) と呼ばれる。

$rx \in I$ の様に右側にイデアルの元がある時に右側イデアル、左側に R の元がある場合に左イデアルということが多いが、テキストなどによって異なる場合もあるので注意が必要。この場合、右側イデアルと左イデアルは同じものを指すが、右側イデアルや右イデアルは (right ideal) と書き、左側イデアルや左イデアルは (left ideal) と書いてあったりする。

(a) $R = \mathbb{Z}$ とする。$(100, 160, 240) = (a)$ を満たす $a \in \mathbb{Z}$ を一つ挙げよ。

…………………………………………………………………………

$-3, 2 \in R$ より $20 = -3 \cdot 100 + 2 \cdot 160 \in (100, 160, 240)$ である。よって、$(20) \subset (100, 160, 240)$ である。

$5, 8, 12 \in R$ より $100 = 5 \cdot 20 \in (20),\ 160 = 8 \cdot 20 \in (20),\ 240 = 12 \cdot 20 \in (20)$ である。これにより $(100, 160, 240) \subset (20)$ である。

よって、$(100, 160, 240) = (20)$

(b) $R = \mathbb{Q}[x]$ とする。$(x^2, x^3 + 3x + 1) = (ax^3 + bx^2 + cx + 1)$ を満たす $a, b, c \in \mathbb{Z}$ を一組挙げよ。

…………………………………………………………………………

$f = x^2,\ g = x^3 + 3x + 1$ とおく。

$$(g - xf) - 3(x(g - xf) - 3f) = 1 \tag{2}$$

$$((x^3 + 3x + 1) - x(x^2)) - 3(x((x^3 + 3x + 1) - x(x^2)) - 3(x^2)) = 1 \tag{3}$$

$(1-3x)g+(3x^2-x+9)f=1$ であるので、$(1) \subset (x^2, x^3+3x+1)$ である。
$(1)=R$ であるので、$R \subset (x^2, x^3+3x+1)$ である。
よって、$(1)=(ax^3+bx^2+cx+1)$ であるので、$(a,b,c)=(0,0,0)$ である。

(c) $R=\mathbb{R}[x]$ とする。$(x^3-1, x^5-1)=(ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+1)$ を満たす $a,b,c,d,e \in \mathbb{Z}$ を一組挙げよ。

....

$f=x^3-1, g=x^5-1$ とする。

$$-f+x(-x^2f+g)=-x+1-(x^3-1)+x(-x^2(x^3-1)+(x^5-1))=-x+1 \tag{4}$$

$(-1-x^3)f+xg=-x+1$ であるので、$-x+1 \in (x^3-1, x^5-1)$ であり、$(-x+1) \subset (x^3-1, x^5-1)$ である。
x^3-1, x^5-1 はそれぞれ次のような変形ができる。

$$x^3-1=-(x^2+x+1)(-x+1), \quad x^5-1=-(x^4+x^3+x^2+x+1)(-x+1) \tag{5}$$

つまり、$x^3-1 \in (-x+1)$ であり、$x^5-1 \in (-x+1)$ である。その為、$(x^3-1, x^5-1) \subset (-x+1)$ である。
これらより $(x^3-1, x^5-1)=(-x+1)$ である事がわかる。よって、$(a,b,c,d,e)=(0,0,0,0,-1)$ である。

(d) $R=\mathbb{Z}[x]$ とする。$(x^3-1, x^4+1)=(ax^2+b, cx+d)$ を満たす $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ を一組挙げよ。

....

$$-x(x^3-1)+(x^4+1)=x+1 \tag{6}$$
$$-(x^3-1)+x^2(-x(x^3-1)+(x^4+1))=x^2+1 \tag{7}$$

これにより $x+1 \in (x^3-1, x^4+1)$、$x^2+1 \in (x^3-1, x^4+1)$ であり、$(x+1, x^2+1) \subset (x^3-1, x^4+1)$ である。

$$(x+1)(x^2+1)-(x+1)-(x^2+1)=x^3-1 \tag{8}$$
$$(x^2+1)^2-(x^2+1)-x*(x+1)+(x+1)=x^4+1 \tag{9}$$

これにより $x^3-1 \in (x+1, x^2+1)$、$x^4+1 \in (x+1, x^2+1)$ であり、$(x^3-1, x^4+1) \subset (x+1, x^2+1)$ である。

よって、$(x^3-1, x^4+1)=(x+1, x^2+1)$ であるので、$(a,b,c,d)=(1,1,1,1)$ である。