$$\bar{s}(\tilde{f}, \Delta'') \leq \bar{s}(\tilde{f}, \Delta') \tag{1}$$

Δ', Δ'' は分割であり、Δ'' は Δ' を更に分割したものである。

$$\bar{s}(\tilde{f}, \Delta_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\sup_{\Delta_{ij}} \tilde{f}) \times |\Delta_{ij}| \tag{2}$$

分割 Δ' の中から一つ取り出し、これを Δ'_{ij} とする。

Δ'_{ij} は Δ'' では 1 つ以上に分割されている。この時、2 つの分割の関係は次のようになる。

$$\Delta'_{ij} = \bigcup_{k} \Delta''_{k},\ |\Delta'_{ij}| = \sum_{k} |\Delta''_{k}| \tag{3}$$

Δ'_{ij} の分割の一つと比較すると次のような包含関係がある。

$$\Delta''_{k} \subset \Delta'_{ij} \tag{4}$$

狭い領域での上限は広い領域での上限より小さくなる為、包含関係から次の式が得られる。

$$\sup_{\Delta''_{k}} \tilde{f} \leq \sup_{\Delta'_{ij}} \tilde{f} \tag{5}$$

この不等式から次の不等式が得られる。

$$\begin{aligned}
\sup_{\Delta'_{ij}} \tilde{f} \times |\Delta'_{ij}| &= \sup_{\Delta'_{ij}} \tilde{f} \times \sum_{k} |\Delta''_{k}| \qquad (6) \\
&= \sum_{k} \left(\sup_{\Delta'_{ij}} \tilde{f} \times |\Delta''_{k}| \right) \qquad (7) \\
&\geq \sum_{k} \left(\sup_{\Delta''_{k}} \tilde{f} \times |\Delta''_{k}| \right) \qquad (8)
\end{aligned}$$

任意の Δ'_{ij} に対してこの不等式が成り立つので、分割 Δ' とより細かい分割 Δ'' についても次の式が成り立つ。

$$\bar{s}(\tilde{f}, \Delta'') \leq \bar{s}(\tilde{f}, \Delta') \tag{9}$$