Laplacian

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} \tag{1}$$

Report 1.12

U は連結とする。関数 u は U 上で C^2-級、$\overline{U}$ 上で C^1-級であり、次を満たしているとする。

$$\Delta u = 0 \ (\mathrm{in}\ U),\ u = g \ (\mathrm{on}\ \partial U,\ g \geq 0) \tag{2}$$

g が ∂U 上のどこかで正であるなら u は U 内で常に正であることを示せ。

. . . .

$\overline{U}$ 上で C^1-級であるので、u は連続である。この為、ある点 $x_0 \in \overline{U}$ が存在し、$u(x_0)$ は最小となる。つまり、$u(x_0) \leq u(x)$ $({}^{\forall}x \in \overline{U})$ である。

もし、$x_0 \in \partial U$ であれば、$u(x_0) = g(x_0) \geq 0$ であり、$0 \leq u(x_0) \leq u(x)$ となる。

もし、$x_0 \in U$ であれば、u は U で定数関数となる。∂U にて $g \leq 0$ なる点があるので $u \geq 0$ である。

Report 1.13

$$\tilde{u} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy \tag{3}$$

$n = 2$ のとき、$\tilde{u}$ は有界ではないことを示せ。

. . . .

調和関数 $\Phi(x)$ は $n = 2$ において $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \log|x|$ である。

$|x|$ がそれぞれ 0 と ∞ に飛ばした場合、$\Phi(x) \to \infty$ $(|x| \to 0)$ と $\Phi(x) \to -\infty$ $(|x| \to \infty)$ であるので、$|\Phi(x)| \to \infty$ である。

$$\tilde{u} = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(y) f(x-y) dy \tag{4}$$

Report 1.14

$n = 2,\ N = 3$ のとき、次の式を示せ。

$$u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \tag{5}$$

. . . .

---

1. 次の初期値問題の解である関数 u を求めよ。

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du + cu = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{6}$$

$c \in \mathbb{R}$ と $b \in \mathbb{R}^n$ は定数とする。

……………………………………………………………………………………

式を次のように変形する。

$$u_t + b \cdot Du + cu = 0 \;\Rightarrow\; u_t + b \cdot Du = -cu \tag{7}$$

ここから、左辺は u を微分すると u の定数倍になることが読み取れる。

$$u = \exp\left(\frac{c}{n+1}\left(t + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{b_i}\right)\right) \tag{8}$$

$$u(x,t) = g(x - tb) \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0) \tag{9}$$

---

2. Laplace 方程式 $\Delta u = 0$ は回転不変である、つまり n 次直交行列 O で変換しても Laplace 方程式を満たすことを示せ。

$$v(x) = u(Ox) \quad (x \in \mathbb{R}^n) \Rightarrow \Delta v = 0 \tag{10}$$

……………………………………………………………………………………

O を n 次直交行列とし、$O = \{o_{ij}\}$ とする。O は直交行列であるので、O の転置行列と逆行列が一致する。

$$O^t O = {}^t O O = E, \quad \sum_{i=1}^{n} o_{ki} o_{li} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & (k = l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases} \tag{11}$$

x はベクトルであり、その成分を $x = (x_1, \ldots, x_n)$ とし、$\bar{x} = Ox$ とする。これにより、$v(x) = u(\bar{x})$ となる。

x_i における偏微分は合成関数の微分より次のように変形できる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} = \sum_{k=1}^{n} o_{ki} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} \tag{12}$$

2 階の偏微分は次のように求められる。

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} o_{ki}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_k}\right)\cdot\left(\sum_{l=1}^{n} o_{li}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_l}\right) = \sum_{k,l=1}^{n} o_{ki}o_{li}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} \tag{13}$$

これらを用いて Δv を計算する。

$$\begin{aligned}\Delta v =&\Delta u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{n} o_{ki}o_{li}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l}u(\bar{x}) &(14)\\ =&\sum_{k,l=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} o_{ki}o_{li}\right)\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l}u(\bar{x}) = \sum_{k,l=1}^{n}\delta_{kl}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l}u(\bar{x}) &(15)\\ =&\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k^2}u(\bar{x}) = \Delta u &(16)\end{aligned}$$

よって、$\Delta u = 0$ であれば、$\Delta v = 0$ である。

---

3. 平均値定理の証明を利用し、$n \geq 3$ の時、次の式を証明せよ。

$$\begin{aligned}u(0) =&\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(0,r)} g dS \\ &+ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\int_{B(0,r)}\left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}}\right) f dx\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B^0(0,r) \\ u = g & \text{on } \partial B^0(0,r) \end{cases} \tag{18}$$

. . . .

---

4. 関数 $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ が開集合 U の境界上を除いて調和的である時、次が成り立つことを示せ。

$$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u \tag{19}$$

HINT : $\varepsilon > 0$ の時 $u_\varepsilon = u + \varepsilon|x|^2$ とおくと、U の内部では最大値を取らないことを示せばよい。

. . . .

---

5. 次のような $v \in C^2(\overline{U})$ を 劣調和関数 (subharmonic) という。

$$-\Delta v \leq 0 \quad \text{in } U \tag{20}$$

(a) v が次を満たすことを示せ。

$$v(x) \leq \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} v dy \quad \text{for all} B(x,r) \subset U \tag{21}$$

…………………………………………………………………………

(b) 次を示せ。

$$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u \tag{22}$$

…………………………………………………………………………

(c) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はなめらかな凸関数とする。

u は調和関数、$v = \phi(u)$ とした時、v は劣調和関数であることを示せ。

…………………………………………………………………………

(d) u が調和的である時、$v = |Du|^2$ は劣調和的であることを示せ。

…………………………………………………………………………

---

6. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ は有界であるとする。

この時、U のみに依存した定数 C が存在し、次の式が成り立つことを示せ。

$$\max_{\overline{U}} |u| \leq C \left(\max_{\partial U} |g| + \max_{\overline{U}} |f| \right) \tag{23}$$

なお、u は滑らかな関数で、次の解である。

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{on } \partial U \end{cases} \tag{24}$$

HINT : $\lambda = \max_{\overline{U}} |f|$ に対して、$-\Delta \left(u + \frac{|x|^2}{2n} \lambda \right) \leq 0$

…………………………………………………………………………

2.1. $u : U \to \mathbb{R}$ の第 γ Hölder（ヘルダー）半ノルムを次で定義する。

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \sup_{\substack{x,y\in U \\ x\neq y}} \left\{ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\gamma}} \right\} \tag{25}$$

この定義は半ノルムであることを確認せよ。

………………………………………………………………………………

半ノルムとは絶対斉次性 ($p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$) と劣加法性 ($p(x+y) \leq p(x) + p(y)$) を満たす写像 p のことをいう。

${}^{\forall}\lambda \in \mathbb{R}$ とする。

$$[\lambda u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \sup_{\substack{x,y\in U \\ x\neq y}} \left\{ \frac{|\lambda u(x)-\lambda u(y)|}{|x-y|^{\gamma}} \right\} \tag{26}$$

$$=|\lambda| \sup_{\substack{x,y\in U \\ x\neq y}} \left\{ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\gamma}} \right\} = |\lambda| [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \tag{27}$$

よって、絶対斉次性を満たす。

劣加法性を確認する。

$$[u+v]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \sup_{\substack{x,y\in U \\ x\neq y}} \left\{ \frac{|(u(x)+v(x))-(u(y)+v(y))|}{|x-y|^{\gamma}} \right\} \tag{28}$$

$$\leq \sup_{\substack{x,y\in U \\ x\neq y}} \left\{ \frac{|u(x)-u(y)|+|v(x)-v(y)|}{|x-y|^{\gamma}} \right\} \tag{29}$$

$$\leq \sup_{\substack{x,y\in U \\ x\neq y}} \left\{ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\gamma}} \right\} + \sup_{\substack{x,y\in U \\ x\neq y}} \left\{ \frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^{\gamma}} \right\} \tag{30}$$

$$=[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} + [v]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \tag{31}$$

以上により半ノルムであることが確認できる。

2.3. U 上の滑らかな関数全体を $C_c^{\infty}(U) \subset W^{k,p}(U)$ とし、これの閉包を $W_0^{k,p}(U)$ とする。$W_0^{k,p}(U)$ は $|\alpha| \leq k-1$ を満たす α において ∂U 上で $D^{\alpha}u = 0$ となる関数 $u \in W^{k,p}(U)$ の集まりである。

定理 17 を認めてこれを示せ。

………………………………………………………………………………

2.5. $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ は可算で稠密な $U = B^0(0,1)$ の部分集合とする。

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x - r_k|^{-\alpha} \quad (x \in U) \tag{32}$$

$0 \leq \alpha \leq \frac{n-p}{p}$ であれば $u \in W^{1,p}(U)$ である。
この時、u は U の部分集合である開集合上で有界ではないことを示せ。

2.7. **弱微分の性質**

$u \in W^{k,p}(U),\ |\alpha| \leq k$ とする。
このとき、$V \subset U$ が開集合であるなら $u \in W^{k,p}(V)$ となることを示せ。

2.9. $W^{k,p}(U)$ が完備であることを示せばよい。そこで、$\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ が $W^{k,p}(U)$ の Cauchy（コーシー）列とする。
この事実が成り立つことを示せ。
