
ナブラ ∇

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1}$$

ベクトル場 $\boldsymbol{f}$

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)) \tag{2}$$

回転 rot

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \nabla \times \boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z},\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x},\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) \tag{3}$$

発散 div

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \langle \nabla, \boldsymbol{f} \rangle = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \tag{4}$$

. . . .

ベクトルの回転や発散は 2 次元上で考える場合 3 つ目の成分は 0(定数) として考える。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(x, y) &=^t (f_1(x, y, 0) \quad f_2(x, y, 0) \quad 0) && (5)\\
\operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x, y)) && (6)\\
\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(x, y) &= \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial z},\ \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x},\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y}\right) && (7)\\
&= \left(0,\ 0,\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y}\right) && (8)
\end{aligned}$$

. . . .

Green(グリーン) **の定理**

$$\int_{\partial D} (P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y) = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{9}$$

Gauss(ガウス) **の発散定理**

$$\int_{\partial D} \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}s = \int_D \operatorname{div} \boldsymbol{A} \ \mathrm{d}S \tag{10}$$

Stokes(ストークス) **の定理**

$$\int_{\partial D} \langle \boldsymbol{A}, \mathrm{d}s \rangle = \int_D \langle \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \mathrm{d}S \rangle \tag{11}$$

倍角の公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \tag{12}$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \tag{13}$$

半角の公式

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \qquad \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \tag{14}$$

3 倍角の公式

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \qquad \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \tag{15}$$
$$\sin^3\theta = \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) \qquad \cos^3\theta = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta) \tag{16}$$

---

1. ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ と領域 D を次のように定める。

$$\boldsymbol{f}(x,y) = {}^t(2x-3y^2 \quad 3x^2-4y^3) \tag{17}$$
$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\} \tag{18}$$

この時、次を求めよ。

$$\int_D \mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{19}$$

$$\int_D \mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D}(f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y) \tag{20}$$

∂D は単位円の円周であるので、$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$ とおいて積分を行う。

$$\mathrm{d}x = -\sin\theta\mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}y = \cos\theta\mathrm{d}\theta \tag{21}$$
$$f_1 = 2x-3y^2 = 2\cos\theta - 3\sin^2\theta \tag{22}$$
$$f_2 = 3x^2-4y^3 = 3\cos^2\theta - 4\sin^3\theta \tag{23}$$

$$\int_{\partial D} (f_1 \mathrm{d}x + f_2 \mathrm{d}y) \tag{24}$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2\sin\theta\cos\theta + 3\sin^3\theta + 3\cos^3\theta - 4\sin^3\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta \tag{25}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-2\sin 2\theta + \frac{3}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) + \frac{3}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta) + \frac{1}{2}\sin 4\theta\right)\mathrm{d}\theta \tag{26}$$

$$= \left[\cos 2\theta + \frac{3}{4}\left(-3\cos\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3\theta + 3\sin\theta\right) - \frac{1}{8}\cos 4\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \tag{27}$$

$$=0 \tag{28}$$

---

2. ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ と領域 D を次のように定める。

$$\boldsymbol{f}(x,y) = {}^t\begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \tag{29}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \tag{30}$$

この時、次を求めよ。

$$\int_D \mathrm{div}\,\boldsymbol{f}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{31}$$

. . . .

D の境界は半径 2 の円周 S_2 と半径 1 の円周 S_1 であり、半径 2 の円は正の向き、半径 1 の円は負の向きとなる。この円周を極座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ で置いて積分を行う。半径より $r = 2$ または $r = 1$ である。

$$\boldsymbol{f}(r\cos\theta, r\sin\theta) = {}^t\begin{pmatrix} \frac{r\cos\theta}{r^2} & \frac{r\sin\theta}{r^2} \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{r} & \frac{\sin\theta}{r} \end{pmatrix} \tag{32}$$

これらを用いて次のように積分を行う。

$$\int_D \mathrm{div}\,\boldsymbol{f}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}s = \int_{S_2} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}s + \int_{S_1} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}s = 0 \tag{33}$$

半径 2 の円周 (S_2) 上の積分は次のようになる。

$$\int_{S_2} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{\cos\theta}{2}, \frac{\sin\theta}{2}\right), (-2\sin\theta, 2\cos\theta) \right\rangle \mathrm{d}\theta = 0 \tag{34}$$

同様に、半径 1 の円周 (S_1) 上の積分は次のようになる。

$$\int_{S_1} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}s = \int_{2\pi}^{0} \langle (\cos\theta, \sin\theta), (-\sin\theta, \cos\theta) \rangle \mathrm{d}\theta = 0 \tag{35}$$

---

3. ベクトル場 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{P}$ と領域 D, S を次のように定める。

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = {}^t(z^2 + 1 \quad xy \quad y^2 + x) \tag{36}$$

$$\boldsymbol{P}(u, v) = {}^t(u \quad v \quad 4 - u^2 - v^2) \tag{37}$$

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 4\}, \quad S = \boldsymbol{P}(D) \tag{38}$$

この時、次を求めよ。

$$\int_S \langle \mathrm{rot}\, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}A \tag{39}$$

…………………………………………………………………

$$\int_S \langle \mathrm{rot}\, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}A = \int_{\partial S} \langle \boldsymbol{f}, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \rangle \tag{40}$$

$$D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi\} \tag{41}$$

$$S = \boldsymbol{P}(D) = \{{}^t(r\cos\theta \quad r\sin\theta \quad 4 - r^2) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi\} \tag{42}$$

つまり、S は $(0, 0, 4)$ を頂点とした二次関数のグラフを回転させた図形である。境界 ∂S は $z = 0$ の平面上の半径 2 の円周である。

そこで、$x = 2\cos\theta, y = 2\sin\theta, z = 0$ とおく。

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin\theta \mathrm{d}\theta \\ 2\cos\theta \mathrm{d}\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$\int_{\partial S} \langle \boldsymbol{f}, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \rangle = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} z^2+1 \\ xy \\ y^2+x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \tag{44}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4\cos\theta\sin\theta \\ 4\sin^2\theta + 2\cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ 2\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \tag{45}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-2\sin\theta + 8\sin\theta\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \tag{46}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-2\sin\theta + 8\sin\theta - 8\sin^3\theta\right)\mathrm{d}\theta \tag{47}$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\sin 3\theta\mathrm{d}\theta \tag{48}$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\cos 3\theta\right]_0^{2\pi} = 0 \tag{49}$$
