1. $f \in C^m_{\text{per}}[-\pi,\pi]$ ならば $\left(\widehat{f^{(m)}}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ が有界であることを示せ。

Hint: 有界閉区間上の連続関数に対しては最大値、最小値の存在定理が成り立つので、特に有界である。

$$C^m_{\text{per}}[-\pi,\pi] = \left\{ f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} f\text{は}C^m\text{級であり、}0 \le {}^\forall k \le m \\ \text{に対し}f^{(k)}(\pi) = f^{(k)}(-\pi) \end{array} \right\} \tag{1}$$

$f \in C^m_{\text{per}}[-\pi,\pi]$ であるので、導関数 $f^{(m)}(x)$ は連続関数である。
閉区間 $[-\pi,\pi]$ 上の連続関数 $f^{(m)}(x)$ は最大値最小値が存在する。

$$\widehat{f^{(m)}}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \tag{2}$$

$\widehat{f^{(m)}}(n)$ を次のように評価する。

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f^{(m)}(x)e^{-inx}\right|\mathrm{d}x \le \int_{-\pi}^{\pi}\left|f^{(m)}(x)\right|\left|e^{-inx}\right|\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\left|f^{(m)}(x)\right|\mathrm{d}x < \infty \tag{3}$$

よって、$\widehat{f^{(m)}}(n)$ は値を持つため、$\left(\widehat{f^{(m)}}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ は有界である。

---

2. Fourier 級数の対称な部分和を $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)e^{inx} = \int f(y)D_N(x-y)\mathrm{d}y$ と書いたときの D_N (Dirichlet 核) が $D_N(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}x\right)}{2\pi\sin\frac{x}{2}}$ であることを示せ。

Hint: $\sin\frac{x}{2}$ を移項して三角関数の積和公式を使う。

フーリエ級数とフーリエ係数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{inx}, \quad \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \tag{4}$$

$\widehat{f}(n)e^{inx}$ は次のように変形できる。

$$\widehat{f}(n)e^{inx} = \frac{e^{inx}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{e^{inx}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}\mathrm{d}y \tag{5}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\frac{e^{in(x-y)}}{2\pi}\mathrm{d}y \tag{6}$$

$\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{inx}$ を計算する。

$$\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\frac{e^{in(x-y)}}{2\pi}\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{n=-N}^{N} \frac{e^{in(x-y)}}{2\pi}\mathrm{d}y \tag{7}$$

つまり、$D_N(x-y)$ は

$$D_N(x-y) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{e^{in(x-y)}}{2\pi} \tag{8}$$

である。

$\sum_{n=-N}^{N} e^{inX}$ を考える。

$$\begin{cases} e^{inX} = \cos nX + i\sin nX \\ e^{-inX} = \cos nX - i\sin nX \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \cos nX = \frac{1}{2}\left(e^{inX} + e^{-inX}\right) \tag{9}$$

より次の式が得られる。

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{inX} = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos nX \tag{10}$$

ここで、三角関数の積和の公式から次が得られる。

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) = 2\cos nx \sin\frac{x}{2} \tag{11}$$

$$\cos nx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)\right) \tag{12}$$

これを用いると

$$\sum_{n=1}^{N} \cos nx = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)\right) \tag{13}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\left(\frac{2N+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \tag{14}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \tag{15}$$

を得る。式 (10) にこれを代入する。

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{inX} = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}X\right)}{\sin\frac{X}{2}} \tag{16}$$

式 (8) より

$$D_N(x) = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}x\right)}{2\pi \sin \frac{x}{2}} \tag{17}$$

である。