弧状連結

位相空間 X の任意の 2 点 x, y に対し、閉区間 $I = [0, 1]$ から X への連続写像 $\sigma : I \to X$ で、$\sigma(0) = x, \sigma(1) = y$ を満たすものが存在する時、X は弧状連結であるという。

連結

位相空間 X において、開集合 $A, B \subset X$ が $X = A \cup B,\ A \cap B = \emptyset$ であるなら $A = \emptyset$ または $B = \emptyset$ である時、X は連結であるという。

1. — **弧状連結の位相的性質** —

弧状連結性は位相的性質であることを示せ。

位相空間 X, Y を同相とし、X を弧状連結であるとする。このときの同相写像を $f : X \to Y$ とする。

任意の 2 点 $y_1, y_2 \in Y$ に対して $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in X$ が存在する。X は弧状連結空間であるから $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)$ の間にはパスが存在する。f は連続写像であるので、$f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)$ を結ぶパスは y_1, y_2 を結ぶパスに対応する。

X が弧状連結であるから Y も弧状連結になるので、弧状連結製は位相的性質である。

2. — **弧状連結なら連結** —

弧状連結ならば連結であることを示せ。

位相空間 X を弧状連結空間とする。点 $x_0 \in X$ を一つ定める。任意の点 $p \in X$ についてパス $\sigma : I = [0, 1] \to X$ が存在し $x_0 = \sigma(0),\ p = \sigma(1)$ である。つまり、x_0 と p は X の連結な部分集合に含まれる。

任意の点 $p \in X$ について言えるので、X のすべての点は $x_0 \in X$ と同じ連結な部分集合に含まれる。

よって、X は連結な空間である。

3. — **2 点集合** —

2 点集合 $\{a, b\}$ 上の位相 $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ は弧状連結であることを示せ。

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

次の写像 f が連続となるように定義できれば任意の $\{a, b\}$ の点が弧状連結であるので、$\{a, b\}$ が弧状連結であるといえる。

$$f : [0, 1] \to \{a, b\}, \quad f(0) = a, f(1) = b \tag{1}$$

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$、$f^{-1}(\{a, b\}) = [0, 1]$ であるので、$f^{-1}(\{a\})$ が開集合となるように f が定義できればよい。
そこで、f を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} a & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ b & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \end{cases} \tag{2}$$

これにより $f^{-1}(\{a\}) = \left[0, \frac{1}{2}\right)$ となるので開集合となり、f は連続写像として定義できる。つまり、f により a, b は弧状連結である。
$\{a, b\}$ の任意の点が弧状連結であるため、$\{a, b\}$ は弧状連結である。
