1. 次の広義積分が絶対収束することを示せ。

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$

…………………………………………………………………………

$x \geq 0$ の時 $\sqrt{x} > 0, x^2-2x+2 \geq 0$ である。

$a > 0$ とすると問の積分は次の様になる。

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x \tag{1}$$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^n e^{-itx}}{\cosh x}\mathrm{d}x \qquad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ t \in \mathbb{R})$

…………………………………………………………………………

---

2. (a) $a \in \mathrm{R}$ に対して広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{2iax-x^2}\mathrm{d}x$ は絶対収束することを示せ。

…………………………………………………………………………

(b) $a > 0$ と仮定する。また、$R > 0$ とする。$\mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(z) = e^{2iaz-z^2}$ を $-R, R, R+ia, -R+ia$ を頂点とする長方形の境界に沿って積分してから $R \to \infty$ とすることで $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{2iax-x^2}\mathrm{d}x$ を求めよ。

(ヒント: 虚軸に並行な線積分は $R \to \infty$ のとき 0 に収束することを示す)

…………………………………………………………………………
