弧状連結

位相空間 X の任意の 2 点 x, y に対し、閉区間 $I = [0, 1]$ から X への連続写像 $\sigma : I \to X$ で、$\sigma(0) = x, \sigma(1) = y$ を満たすものが存在する時、X は弧状連結であるという。

. . . .

連結

位相空間 X において、開集合 $A, B \subset X$ が $X = A \cup B,\ A \cap B = \emptyset$ であるなら $A = \emptyset$ または $B = \emptyset$ である時、X は連結であるという。

---

1. — **弧状連結の位相的性質** —

   弧状連結性は位相的性質であることを示せ。

   . . . .

   位相空間 X, Y を同相とし、X を弧状連結であるとする。このときの同相写像を $f : X \to Y$ とする。

   任意の 2 点 $y_1, y_2 \in Y$ に対して $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in X$ が存在する。X は弧状連結空間であるから $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)$ の間にはパスが存在する。f は連続写像であるので、$f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)$ を結ぶパスは y_1, y_2 を結ぶパスに対応する。

   X が弧状連結であるから Y も弧状連結になるので、弧状連結製は位相的性質である。

   ---

2. — **弧状連結なら連結** —

   弧状連結ならば連結であることを示せ。

   . . . .

   位相空間 X を弧状連結空間とする。点 $x_0 \in X$ を一つ定める。任意の点 $p \in X$ についてパス $\sigma : I = [0, 1] \to X$ が存在し $x_0 = \sigma(0),\ p = \sigma(1)$ である。つまり、x_0 と p は X の連結な部分集合に含まれる。

   任意の点 $p \in X$ について言えるので、X のすべての点は $x_0 \in X$ と同じ連結な部分集合に含まれる。

   よって、X は連結な空間である。
