問題

$\mathbb{C}^\times$ の部分群 H を次のように定める。

$$H = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^6 = 1\}, \quad \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\backslash\{0\} \tag{1}$$

1. 次の中で H に属する複素数を全て選べ。

$$1,\ -1,\ i,\ -i,\ \sqrt{3}i,\ -\sqrt{3}i \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i,\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}i,\ \frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i,\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i,\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}i \tag{4}$$

....

$z^6 = 1$ を満たす複素数を探す。

全ての複素数はオイラーの公式から $re^{i\theta}$ と表せる。$(re^{i\theta})^6 = r^6e^{6i\theta}$ であり、$e^{2\pi ni} = 1$ であるので、$r = 1,\ 6\theta = 2\pi n\ (n \in \mathbb{Z})$ を満たせばよい。

$$1 = e^{i0},\ -1 = e^{i\pi},\ i = e^{\frac{i\pi}{2}},\ -i = e^{\frac{3i\pi}{2}},\ \sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{2}},\ -\sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{\frac{3i\pi}{2}} \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i = e^{\frac{5i\pi}{3}},\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i \tag{6}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}i,\ \frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i,\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i,\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}i \tag{7}$$

---

2. H の要素数を求めよ。
3. H が巡回群であるか否かを答えよ。

問題

1. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。任意の整数 k に対して、$\bar{k} \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ を k の n によるじょうよとする。このとき、$\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を $k \mapsto \bar{k}$ とすると、ϕ は準同型写像であることを示せ。
2. $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to D_4$ を $(i, j) \mapsto r^i s^j$ とすると ϕ は同型写像であることを示せ。