1. σ を 0 でない定数とし、実数値弱定常過程 $\varepsilon = \{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ はホワイトノイズ $WN(0, \sigma^2)$ であるとする。この時、全ての $t, h \in \mathbb{Z}$ に対して次が成り立つ。

$$E[\varepsilon_{t+h}\varepsilon_t] = \sigma^2 \frac{\sin \pi h}{\pi h} \tag{1}$$

....

共分散は次の式より得られる。

$$Cov(\varepsilon_{t+h}, \varepsilon_t) = E[\varepsilon_{t+h}\varepsilon_t] - E[\varepsilon_{t+h}]E[\varepsilon_t] \tag{2}$$

ε_i はホワイトノイズであるので期待値は 0、分散は σ^2 である。よって、$Cov(\varepsilon_{t+h}, \varepsilon_t) = E[\varepsilon_{t+h}\varepsilon_t]$ である。
任意の $t \in \mathbb{Z}$ に対し、$h \neq 0$ である $h \in \mathbb{Z}$ について $Cov(\varepsilon_{t+h}, \varepsilon_t) = E[\varepsilon_{t+h}\varepsilon_t] = 0$ となる。また、$V[\epsilon_t] = \sigma^2$ となるので、$E[\varepsilon_t\varepsilon_t] = \sigma^2$ である。

$$E[\varepsilon_t\varepsilon_t] = \sigma^2 = \sigma^2 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin(\pi h)}{\pi h} = \sigma^2 \frac{\sin(\pi \cdot 0)}{\pi \cdot 0} \tag{3}$$

$$E[\varepsilon_{t+h}\varepsilon_t] = \sigma^2 = 0 = \sigma^2 \frac{0}{\pi h} = \sigma^2 \frac{\sin \pi h}{\pi h} \tag{4}$$

上記のように h の値について式が成り立つのでまとめると次を得る。

$$E[\varepsilon_{t+h}\varepsilon_t] = \sigma^2 \frac{\sin \pi h}{\pi h} \qquad (t, h \in \mathbb{Z}) \tag{5}$$

---

2. $W = \{W(t); t \geq 0\}$ をブラウン運動、つまり次の性質を満たす実数値確率過程とする。
   - $W(0) = 0$
   - $W(t)$ は t について連続
   - 全ての $n \in \mathbb{N}$ と全ての $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対して、実数値確率変数列 $\{W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})\}$ は独立であり、なおかつ各 $i = 1, \ldots, n$ に対して、実数値確率変数 $W(t_i) - W(t_{i-1})$ は正規分布 $N(0, t_i - t_{i-1})$ に従う。

   このとき、次の問いに答えよ。

   (a) 各 $t > 0$ に対して、平均 $E[W(t)]$ を求めよ。

   ....

$W(t_i)-W(t_{i-1})$ は $N(0,t_i-t_{i-1})$ に従うので、$E[W(t_i)-W(t_{i-1})]=0$ である。$E[W(t_i)-W(t_{i-1})]=E[W(t_i)]-E[W(t_{i-1})]$ であるから $E[W(t_i)]=E[W(t_{i-1})]$ となる。
$W(t_1),W(t_0)$ についても同様に $E[W(t_1)]=E[W(t_0)]$ であるが $E[W(t_0)]=E[W(0)]=E[0]=0$ となるので、$E[W(t_n)]=\cdots=E[W(t_1)]=0$ である。

(b) $0<s\le t$ に対して、$Cov[W(s),W(t)]=s$ が成り立つことを示せ。

…………………………………………………………………………

確率変数 $W(s)$ と $W(t)-W(s)$ は独立であるので、$Cov(W(s),W(t)-W(s))=0$ である。
共分散は $Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$ と期待値で表せるので、

$$Cov(W(s),W(t)-W(s)) \tag{6}$$
$$=E[W(s)(W(t)-W(s))]-E[W(s)]E[(W(t)-W(s))] \tag{7}$$

である。ここで、$E[W(s)]=0$ となるので、次の式が得られる。

$$0=Cov(W(s),W(t)-W(s)) \tag{8}$$
$$=E[W(s)(W(t)-W(s))]=E[W(s)W(t)]-E[(W(s))^2] \tag{9}$$

よって、$E[W(s)W(t)]=E[(W(s))^2]$ である。
確率変数 $W(t_i)-W(t_{i-1})$ は正規分布 $N(0,t_i-t_{i-1})$ に従うので、$V[W(s)-W(0)]=V[W(s)]=s$ である。分散は $V[X]=E[X^2]-(E[X])^2$ となるので、期待値で表現できる。

$$V[W(s)]=E[(W(s))^2]-(E[W(s)])^2 \tag{10}$$
$$=E[(W(s))^2]-(0)^2=E[(W(s))^2] \tag{11}$$

これまでをまとめると次の式になる。

$$E[W(s)W(t)]=E[(W(s))^2]=V[W(s)]=s \tag{12}$$

共分散 $Cov(W(s),W(t))$ を計算する。

$$Cov(W(s),W(t))=E[W(s)W(t)]-E[W(s)]E[W(t)] \tag{13}$$
$$=E[W(s)W(t)]=s \tag{14}$$

以上により $Cov(W(s),W(t))=s$ が得られる。

---

3. $\theta > 0$ および $\alpha \neq 0$ はともに定数とし、確率過程 W はブラウン運動であるとする。各 $t \in \mathbb{Z}$ に対して次のような時系列 $\varepsilon = \{\epsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ を考える。

$$\varepsilon_t = \frac{\alpha}{\sqrt{2\theta}} \left\{ W\left(e^{2\theta t}\right) - W\left(e^{2\theta(t-1)}\right) \right\} e^{-\theta t} \tag{15}$$

この時、次の問いに答えよ。

(a) 各 $t \in \mathbb{Z}$ に対して ε_t の平均 $E[\varepsilon_t]$ を求めよ。

…………………………………………………………………………

$\theta > 0$ より $e^{2\theta t} > e^{2\theta(t-1)}$ である。
ブラウン運動であるので、確率変数 $W\left(e^{2\theta t}\right) - W\left(e^{2\theta(t-1)}\right)$ は正規分布 $N(0, e^{2\theta t} - e^{2\theta(t-1)})$ に従う。
よって、$E[\varepsilon_t]$ は次のように求まる。

$$E[\varepsilon_t] = E\left[\frac{\alpha}{\sqrt{2\theta}} \left\{ W\left(e^{2\theta t}\right) - W\left(e^{2\theta(t-1)}\right) \right\} e^{-\theta t}\right] \tag{16}$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2\theta}} E\left[W\left(e^{2\theta t}\right) - W\left(e^{2\theta(t-1)}\right)\right] e^{-\theta t} \tag{17}$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2\theta}} \cdot 0 \cdot e^{-\theta t} = 0 \tag{18}$$

(b) 時系列 ε は弱定常性を満たすことを示せ。

…………………………………………………………………………

弱定常性ということは期待値が一定で共分散が離れ具合にのみ依存しているということである。

$$^{\forall}\varepsilon_t,\ \varepsilon_{t+h} \in \varepsilon \qquad E[\varepsilon_t] = E[\varepsilon_{t+h}] = \mu, \quad Cov(\varepsilon_{t+h}, \varepsilon_t) = \gamma_h \tag{19}$$

$E[\varepsilon_t] = 0$ であるので期待値は一定となる。
共分散は $Cov(aX, Y) = Cov(X, aY) = aCov(X, Y)$ となるので、$\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}$ の定数部分も外に出せる。

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) \tag{20}$$

$$= \frac{\alpha^2}{2\theta} e^{-\theta t} e^{-\theta(t+h)} \tag{21}$$

$$\cdot Cov(W\left(e^{2\theta t}\right) - W\left(e^{2\theta(t-1)}\right), W\left(e^{2\theta(t+h)}\right) - W\left(e^{2\theta(t+h-1)}\right)) \tag{22}$$

$W\left(e^{2\theta t}\right) - W\left(e^{2\theta(t-1)}\right)$ と $W\left(e^{2\theta(t+h)}\right) - W\left(e^{2\theta(t+h-1)}\right)$ は独立である為、共分散は 0 となる。よって、$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0$ となる。
つまり、ε は弱定常性を持つといえる。

---

4. $\theta > 0$ および $\alpha \neq 0$ はともに定数とし、確率過程 W はブラウン運動であるとする。各 $t \in \mathbb{Z}$ に対して次のような時系列 $Z = \{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ を考える。

$$Z_t = \frac{\alpha}{\sqrt{2\theta}} e^{-\theta t} W(e^{2\theta t}) \tag{23}$$

ε を前問で定義した時系列とするとき、時系列 Z は AR(1) モデルとなることを説明せよ。

....

Z_t の期待値は次のようにすべて 0 となる。

$$E[Z_t] = E\left[\frac{\alpha}{\sqrt{2\theta}} e^{-\theta t} W(e^{2\theta t})\right] = \frac{\alpha}{\sqrt{2\theta}} e^{-\theta t} E[W(e^{2\theta t})] = \frac{\alpha}{\sqrt{2\theta}} e^{-\theta t} \cdot 0 = 0 \tag{24}$$

Z_t の分散を計算する。

$$V[Z_t] = V\left[\frac{\alpha}{\sqrt{2\theta}} e^{-\theta t} W(e^{2\theta t})\right] = \frac{\alpha^2}{2\theta} e^{-2\theta t} V\left[W(e^{2\theta t})\right] \tag{25}$$

$0 < s \leq t$ に対して $Cov(W(s), W(t)) = s$ であることに注意すると

$$V\left[W(e^{2\theta t})\right] = Cov\left(W(e^{2\theta t}), W(e^{2\theta t})\right) = e^{2\theta t} \tag{26}$$

であるので、分散が求まる。

$$V[Z_t] = \frac{\alpha^2}{2\theta} \tag{27}$$

期待値 $E[Z_{t+h} - Z_t]$ は $E[Z_{t+h} - Z_t] = E[Z_{t+h}] - E[Z_t] = 0$ となる。
分散 $V[Z_{t+h} - Z_t]$ を求める。

$$V[Z_{t+h} - Z_t] = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\theta}} e^{-\theta(t+h)}\right)^2 V[W(e^{2\theta(t+h)}) - W(e^{2\theta t})] \tag{28}$$

定数部分をまとめるとブラウン運動の分散が残るので計算をする。

$$V[W(e^{2\theta(t+h)}) - W(e^{2\theta t})] = e^{2\theta(t+h)} - e^{2\theta t} = e^{2\theta t}(e^{2\theta h} - 1) \tag{29}$$

これにより分散が次のように求まる。

$$V[Z_{t+h} - Z_t] = \frac{\alpha^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta h}) \tag{30}$$

各 Z_t の期待値と分散は次のように一定となり、二つの差 $Z_{t+h} - Z_t$ の期待値と分散は次のようになる。

$$E[Z_t] = 0, \quad V[Z_t] = \frac{\alpha^2}{2\theta}, \quad E[Z_{t+h} - Z_t] = 0, \quad V[Z_{t+h} - Z_t] = \frac{\alpha^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta h}) \tag{31}$$

確率変数 Z_t は期待値、分散が t によらず決定し、$Z_{t+h} - Z_t$ の分散が h にのみ依存して決まる。つまり、Z_{t+h} は過去の一つの Z_t から影響を受ける。この為、$\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ は AR(1) モデルといえる。
