$\boxed{\mathbf{3}}$

1. $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A が開集合であることの定義を述べよ。
2. $A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) > 1\}$ が $\mathbb{R}^2$ の開集合となることを示せ。
3. $\overline{A^\circ} \neq (\overline{A})^\circ$ となる例をあげ、$\overline{A^\circ}$ と $(\overline{A})^\circ$ の包含関係を予想せよ。

....

1)

任意の $\boldsymbol{a} \in A$ に対し次を満たす近傍 U が存在する。

$$\boldsymbol{a} \in U \subset A \tag{1}$$

A のすべての点には様々な近傍があります。A が開集合であるためには、各点において点ごとの近傍のうち最低限一つは A に含まれる状態であればいいです。

2)

A の点 $\boldsymbol{a}$ に対し様々な近傍があり、この近傍のうち一つ U が A に含まれる $(U \subset A)$ ことを示せばよい。具体的に示すことは、次のようなことです。

A の任意の点は原点 $\mathbf{0}$ との距離が 1 より大きいので、この間の距離で原点より離れるように近傍を取れればいい。任意の点 $\boldsymbol{a} \in A$ に対し、$\boldsymbol{a}$ の近傍 $U(\boldsymbol{a})$ が存在し、$U(\boldsymbol{a}) \subset A$ となることを示す。

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ とおく。$\delta = \frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}-1}{2}$ とおく。この δ を用いて $\boldsymbol{a}$ の近傍 $U(\boldsymbol{a}, \delta)$ を考える。

$U(\boldsymbol{a}, \delta) \subset A$ を示す。$\boldsymbol{u} \in U(\boldsymbol{a}, \delta)$ について次の計算により $d(\boldsymbol{u}, \mathbf{0}) > 1$ となり $\boldsymbol{u} \in A$ である。

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{u}, \mathbf{0}) &\geq d(\boldsymbol{a}, \mathbf{0}) - d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}) && (2) \\ &> \sqrt{a_1^2 + a_2^2} - \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} - 1}{2} && (3) \\ &= \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + 1}{2} && (4) \\ &> \frac{1+1}{2} = 1 && (5) \end{aligned}$$

任意の $\boldsymbol{a} \in A$ について $U(\boldsymbol{a}, \delta) \subset A$ であることがわかり、A は近傍を含むため開集合である。

3)

A を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とする。$\overline{A}$ を A の閉包、A° を A の内部 (又は 開核) とする。

$\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合で、A° は A の部分集合の内、最大の開集合です。この様な関係です。
$A^\circ \subset A \subset \overline{A}$

集合 S_1 と S_2 を原点中心で半径 1 の円板の境界をつけない集合 S_1 と境界をつけた集合 S_2 とします。

$$S_1 = \{\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\boldsymbol{s}, \mathbf{0}) < 1\} \quad S_2 = \{\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\boldsymbol{s}, \mathbf{0}) \leq 1\} \tag{6}$$

S_1 は開集合、S_2 は閉集合となりそれぞれの内部と閉包は次のような関係になります。

$$S_1^\circ = S_1 \quad \overline{S_1} = S_2 \quad S_2^\circ = S_1 \quad \overline{S_2} = S_2 \tag{7}$$

この為、$\overline{S_1^\circ} = S_2$ であり、$(\overline{S_1})^\circ = S_1$ となります。閉包は元の集合より大きくなり、内部は小さくなる為、$\overline{A^\circ} \supset (\overline{A})^\circ$ となりそうです。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\mathbb{R}^2$ 全体で定義される $\mathbb{R}^2$ への連続写像 (ベクトル値関数)$\boldsymbol{f}$ について

1. $\boldsymbol{f}$ が点 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ で連続であることの定義を述べよ。
2. $\boldsymbol{f}(\mathbb{R}^2)$ の任意の開集合 A に対し、$\boldsymbol{f}^{-1}(A)$ が $\mathbb{R}^2$ の開集合となることを示せ。
3. $\mathbb{R}^2$ の任意の開集合 A に対して、$\boldsymbol{f}(A)$ が $\mathbb{R}^2$ の開集合となるか? 正しいなら証明を、正しくないなら反例を示せ。

....

1)

$\boldsymbol{f}$ が点 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ で連続であるとは、$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ の任意の近傍 U に対し、$\boldsymbol{f}^{-1}(U)$ が $\boldsymbol{a}$ の近傍であることです。これは写像 $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ によって $\boldsymbol{a}$ の行き先 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ に近傍 U があり、この近傍 U の中に行き先がある点の集合 $(\subset \mathbb{R}^2)$ が $\boldsymbol{a}$ の近傍であることを意味します。

解答に合わせると次のようにかけます。

任意の正の実数 $\varepsilon > 0$ に対し次を満たす正の実数 $\delta > 0$ が存在する。

$$\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{a}, \delta)) \subset U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}), \varepsilon) \tag{8}$$

2)

A を開集合とする。もし $\boldsymbol{f}^{-1}(A) = \emptyset$ であれば開集合であるので、$\boldsymbol{f}^{-1}(A) \neq \emptyset$ とする。

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{f}^{-1}(A)$ とすれば、$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in A$ であり A は近傍である。

$\boldsymbol{f}$ は連続写像であるので、$\boldsymbol{x}$ の近傍 $U(\boldsymbol{x})$ で $\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{x})) \subset A$ を満たすものが存在する。

任意の点 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{f}^{-1}(A)$ について近傍が存在する為、$\boldsymbol{f}^{-1}(A)$ は開集合となる。

3)

次のような全て一点 $\mathbf{0}$ へ対応させる写像 (定値写像) を考える。

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \boldsymbol{x} \mapsto \mathbf{0} \tag{9}$$

この $\boldsymbol{f}$ は連続写像である。これは任意の開集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ に対し次のように $\boldsymbol{f}^{-1}(A)$ も開集合となる。

$$\boldsymbol{f}^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & \mathbf{0} \notin A \\ \mathbb{R}^2 & \mathbf{0} \in A \end{cases} \tag{10}$$

開集合 A をうつした先は全て $\mathbf{0}$ であるから $\boldsymbol{f}(A) = \{\mathbf{0}\}$ となる。近傍を使い開集合を定めるのなら 1 点のみの集合は開集合ではないので、$\boldsymbol{f}(A)$ は開集合ではない。