冪零元

環 R の元 $x \in R$ が冪零元であるとは、ある自然数 n が存在し、$x^n = 0$ となることをいう。

1. $(A, +, \cdot)$ を可換環とする。$\mathcal{N}(A) = \{a \in A \mid a\text{が冪零元である}\}$ (冪零根基と呼ぶ) と定義する。

(a) $a, b, k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。$n = a^k b^\ell$ であるとき、$ab + n\mathbb{Z} \in \mathcal{N}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ であることを示せ。

k と ℓ の最小公倍数を m とする。つまり、$m = km_k = \ell m_\ell$ となる自然数 m_k, m_ℓ が存在する。

$$(ab)^m = (a^k)^{m_k}(b^\ell)^{m_\ell} = a^k b^\ell \cdot (a^k)^{m_k - 1}(b^\ell)^{m_\ell - 1} = n(a^k)^{m_k-1}(b^\ell)^{m_\ell - 1} \tag{1}$$

$(ab)^m$ は n の倍数であるので、$(ab + n\mathbb{Z})^m$ も n の倍数となる。
$(ab + n\mathbb{Z})^m \in n\mathbb{Z}$ であるから $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上で $(ab + n\mathbb{Z})^m = 0$ である。
よって、$ab + n\mathbb{Z} \in \mathcal{N}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ である。

(b) $\mathcal{N}(\mathbb{Z}/72\mathbb{Z})$ を求めよ。

$\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ は次のような環である。

$$\mathbb{Z}/72\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{71}\} \tag{2}$$

この環では 72 の倍数は 0 となる。
$72 = 2^3 \cdot 3^2$ であるので、$1, \ldots, 71$ の内、2 と 3 の因数のみで出来た数は何度かかけると 72 の倍数になる。

$$2^1 \times 3^1 = 6 \qquad 2^2 \times 3^1 = 12 \qquad 2^3 \times 3^1 = 24 \qquad 2^4 \times 3^1 = 48 \tag{3}$$
$$2^1 \times 3^2 = 18 \qquad 2^2 \times 3^2 = 36 \tag{4}$$
$$2^1 \times 3^3 = 54 \tag{5}$$

よって、$\mathcal{N}(\mathbb{Z}/72\mathbb{Z})$ は上記 7 つと $\bar{0}$ を加えた 8 つの元を持つことがわかる。

$$\mathcal{N}(\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}) = \{\bar{0}, \bar{6}, \bar{12}, \bar{18}, \bar{24}, \bar{36}, \bar{48}, \bar{54}\} \tag{6}$$