$\mathbb{R}^2$ の道 l が次を満たす。

- $l(0) = (-1,0),\ l(\frac{1}{2}) = (0,17),\ l(1) = (1,0)$

3 点 $(-1,0),(0,17),(1,0)$ を通る曲線の例として $y = -17(x-1)(x+1)$ があげられる。このグラフの $-1 \leq x \leq 1$ の部分をうまく閉区間 $I = [0,1]$ に当てはめる。

$$I \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto 2x - 1 \tag{1}$$
$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad x \mapsto (x, -17(x-1)(x+1)) \tag{2}$$

この 2 つの合成で道 l ができる。

$$l : I \to \mathbb{R}^2; x \mapsto (2x-1, -68x(x-1)) \tag{3}$$

$l(x) = (2x-1, -68x(x-1))$ とすれば 3 つの条件を満たす。

---

1. 次を満たす $\mathbb{R}^2$ の道 l と m の例をあげよ。
   - 道の合成 $l * m$ は定義できるが、$m * l$ は定義出来ない。

   合成が次のような定義なら「$l(1) = m(0)$ かつ $l(0) \neq m(1)$」を満たす道をあげればよい。

   $$l * m(s) = \begin{cases} l(2s) & (0 \leq s \leq \frac{1}{2}) \\ m(2s-1) & (\frac{1}{2} \leq s \leq 1) \end{cases} \tag{4}$$

   $l(s) = (s,s)$、$m(s) = (s+1, s+1)$ とすれば $l(1) = m(0), l(0) \neq m(1)$ である。
2. 次の条件を満たす $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ の道 l と m の例をあげよ。
   - $l(0) = m(0),\ l(1) = m(1),\ l(\frac{1}{2}) \neq m(\frac{1}{2})$
   - l と m はホモトピックである

   l と m を次のようにおく。

   $$l(x) = (2x-1, -x(x-1)),\ m(x) = (2x-1, -2x(x-1)) \tag{5}$$

   この時、次のように条件の 1 つ目を満たす。

   $$l(0) = m(0) = (-1,0), l(1) = m(1) = (1,0) \tag{6}$$
   $$l\left(\frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{4}\right), m\left(\frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \tag{7}$$

   そこで、写像 Φ を次のように定める。

   $$\Phi(s,t) = (2x-1,\ -x(1+t)(x-1)) \tag{8}$$

   これは $\Phi(s,0) = l(s),\ \Phi(s,1) = m(s)$ を満たす。また、各成分ごとに連続であるため連続写像でもある。
   よって、式 (5) のように定めた道 l, m はホモトピックである。