---

1. $\mathbb{R}^2$ 内の開集合 $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ 上の C^1-級ベクトル場 $\boldsymbol{f}: U \to \mathbb{R}^2$ を次のように定める。

$$\boldsymbol{f}(x, y) = {}^t \begin{pmatrix} \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

(a) $R > 0$ とし、C^1-級閉曲線 $C_R : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ を $C_R(t) = (R\cos t, R\sin t)$ と定める。$\boldsymbol{f}$ の C_R に沿った次の線積分を求めよ。

$$\int_{C_R} \boldsymbol{f} \tag{2}$$

(b) 積分定理が使える領域 $D_{R,r}$ $(0 < r < R)$ を $D_{R,r} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$ とする。この時次の値を求めよ。

$$\int_{D_{R,r}} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{f} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3}$$

(c) 次の命題 (P) の真偽を評価し、その証明を与えよ。

命題 (P): ある C^2-級関数 $g : U \to \mathbb{R}$ が存在して $\boldsymbol{f} = \nabla g$ となる

....

(a) 次のように x, y をおく。

$$x = R\cos t \qquad y = R\sin t \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -R\sin t \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = R\cos t \tag{5}$$

これを使うと $\boldsymbol{f}$ は次のように t の関数となる。

$$\boldsymbol{f}(x, y) = {}^t \begin{pmatrix} \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} = {}^t \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{6}$$

その為、積分の値は次のように求められる。

$$\int_{C_R} \boldsymbol{f} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} \mathrm{d}t \tag{7}$$

$$= \int_0^{2\pi} (R\sin^2 t + R\cos^2 t)\mathrm{d}t = [Rt]_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi R \tag{8}$$

(b) ストークスの定理より次の式が成り立つ。

$$\int_{D_{R,r}} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{f} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D_{R,r}} \boldsymbol{f} \mathrm{d}s \tag{9}$$

$\partial D_{R,r}$ は 2 つの円からなる。半径 R の円を S_R、r の円を S_r とすると 2 つの積分に分かれる。

$$\int_{\partial D_{R,r}} \boldsymbol{f} \mathrm{d}s = \int_{S_R} \boldsymbol{f} \mathrm{d}s - \int_{S_r} \boldsymbol{f} \mathrm{d}s \tag{10}$$

先程の問と同じようにして次の積分が求まる。

$$\int_{S_R} \boldsymbol{f} \mathrm{d}s = 2\pi R, \qquad \int_{S_r} \boldsymbol{f} \mathrm{d}s = 2\pi r \tag{11}$$

これにより積分値は次のように求まる。

$$\int_{D_{R,r}} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{f} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 2\pi R - 2\pi r \tag{12}$$

（c）次の 2 つの関数の偏微分がある。

$$\frac{\partial}{\partial x} y \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{\sqrt{y^2}}\right) = y \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2}} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}} \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} x \operatorname{arcsinh}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2}}\right) = x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{14}$$

これより関数 g が次の 2 つを満たすことはない。

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-y}{\sqrt{y^2 + x^2}}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}} \tag{15}$$

よって、$\boldsymbol{f} = \nabla g$ となる関数 g は存在しない。

---

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^3-級関数とし、C^2-級の関数 $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ を