
G を位数 4 の群とする。

このとき、$G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ または $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であることを示せ。

....

G は群であるので、単位元を e として、次のようにかける。

$$G = \{e,\ a,\ b,\ c\} \tag{1}$$

群に単位元は一つなので、$a \cdot a \neq a$ である。

そこで、$a \cdot a$ が e, b, c のどれかになるが、$a \cdot a = b$ と $a \cdot a = c$ は b と c を入れ替えることで同じとなるので、$a \cdot a = e$ と $a \cdot a = b$ の二つの場合に分ける。

$a \cdot a = e$ の場合　a の位数が 2 なので、$\{e, a\}$ が部分群になる。

次に $a \cdot b = a$ とすると左から a^{-1} をかけると $b = e$ となる。その為、$a \cdot b \neq a$ である。

$a \cdot b = b$ とすると b が単位元となり、単位元が 2 つになるので $a \cdot b \neq b$ である。

$a \cdot b = e$ とすると $b = a^{-1}$ となり、$a \cdot a = e$ と矛盾するので、$a \cdot b \neq e$ である。

よって、$a \cdot b = c$ ということになる。

ここまでをまとめると次のような関係がある。

$$\begin{array}{c|cccc} & e & a & b & c \\ \hline e & e \cdot e = e & e \cdot a = a & e \cdot b = b & e \cdot c = c \\ a & a \cdot e = a & a \cdot a = e & a \cdot b = c & a \cdot c = \\ b & b \cdot e = b & b \cdot a = & b \cdot b = & b \cdot c = \\ c & c \cdot e = c & c \cdot a = & c \cdot b = & c \cdot c = \end{array} \tag{2}$$

残りの箇所も埋める。

$a \cdot c$ は横の演算結果から $a \cdot c = b$ ということになる。これは左から a を異なる元にかければ異なる結果となるためである。

次に $b \cdot a$ を考える。もし、$b \cdot a = b$ とすれば a が単位元であることになり矛盾する。よって、$b \cdot a = c$ である。

これにより $c \cdot a = b$ である。

次に $b \cdot c$ を考える。$b \cdot c = e$ と仮定すれば $b = c^{-1}$ となる。この為、$c \cdot b = e$ となり、残った $b \cdot b,\ c \cdot c$ はともに a となり矛盾する。よって、$b \cdot c = a$ である。

残りも同様に考えると次の表ができる。

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & e & a & b & c \\ \hline
e & e\cdot e=e & e\cdot a=a & e\cdot b=b & e\cdot c=c \\
a & a\cdot e=a & a\cdot a=e & a\cdot b=c & a\cdot c=b \\
b & b\cdot e=b & b\cdot a=c & b\cdot b=e & b\cdot c=a \\
c & c\cdot e=c & c\cdot a=b & c\cdot b=a & c\cdot c=e
\end{array} \tag{3}
$$

$a\cdot a=b$ の場合　$a\cdot b$ と $a\cdot c$ のどちらかが単位元となるが、$e\cdot c=c$ であるので $a\cdot c\neq c$ である。よって、$a\cdot b=c$ と $a\cdot c=e$ となる。

同様に $b\cdot a=c$ と $c\cdot a=e$ となる。

$a\cdot c=e$ であるので $b\cdot c\neq e$ である。よって、$b\cdot b=e$ と $b\cdot c=a$ となる。

同様に $c\cdot b=a$ となる。

残りは $c\cdot c=b$ となる。

これをまとめると次のようになる。

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & e & a & b & c \\ \hline
e & e\cdot e=e & e\cdot a=a & e\cdot b=b & e\cdot c=c \\
a & a\cdot e=a & a\cdot a=b & a\cdot b=c & a\cdot c=e \\
b & b\cdot e=b & b\cdot a=c & b\cdot b=e & b\cdot c=a \\
c & c\cdot e=c & c\cdot a=e & c\cdot b=a & c\cdot c=b
\end{array} \tag{4}
$$

(3) **の表が表す群について**

群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次のような 4 つの元を持ち、成分ごとの和でもって加法群となる。

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1})\} \tag{5}$$

この群に対して写像 $f:G\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を次のように定義する。

$$f(e)=(\bar{0},\bar{0}),\ f(a)=(\bar{1},\bar{0}),\ f(b)=(\bar{0},\bar{1}),\ f(b)=(\bar{1},\bar{1}) \tag{6}$$

この f は同型写像となることから $G\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となる。

(4) **の表が表す群について**

群 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ は次のような集合であり、整数の和から自然に導入される加法により加法群となる。

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}=\{\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3}\} \tag{7}$$

この群に対して写像 $g:G\to\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ を次のように定義する。

$$g(e)=\bar{0},\ g(a)=\bar{1},\ g(b)=\bar{2},\ g(b)=\bar{3} \tag{8}$$

この g は同型写像となることから $G\cong\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ となる。