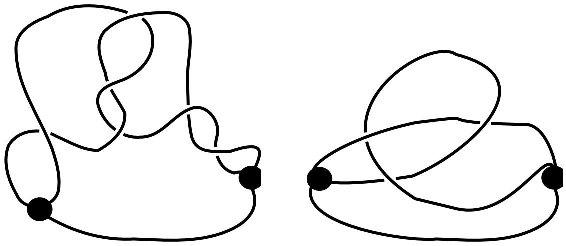
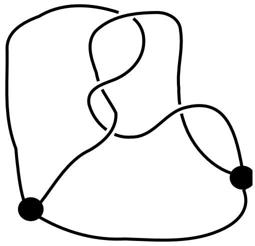
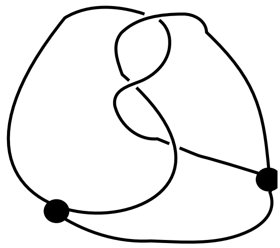
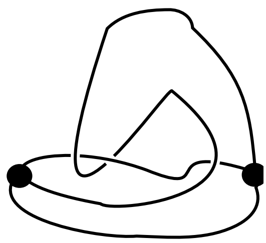
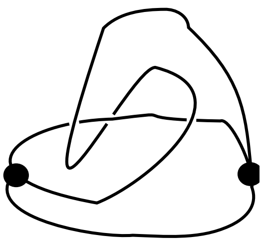
1. 次の空間グラフ $f(G), g(G)$ は互いに同型であることを確かめよ。



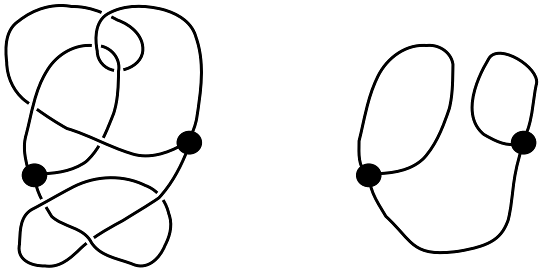
$f(G)$ $g(G)$ (1)

$f(G) \Rightarrow$  $\Rightarrow$  (2)

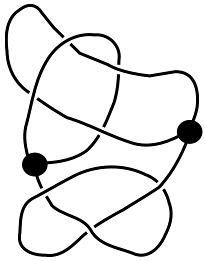
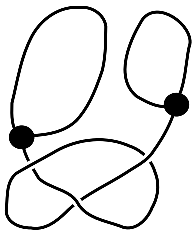
$\Rightarrow$  $\Rightarrow$  (3)

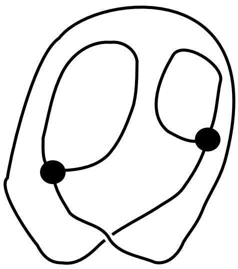
$\Rightarrow$  $\Rightarrow g(G)$ (4)

2. 次の空間グラフ $f(G), g(G)$ は互いに同型であることを確かめよ。



$f(G)$ $\qquad$ $g(G)$ $\qquad$ (5)

$f(G) \Rightarrow$  $\Rightarrow$  (6)

$\Rightarrow$  $\Rightarrow g(G)$ (7)

---

3. 空間グラフの同型関係 $\cong$ について、以下が成り立つことをそれぞれ示せ。

(a) 空間グラフ $f(G)$ に対し、$f(G) \cong f(G)$

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3 \times [0,1] \tag{8}$$

写像 Φ を恒等写像とすると $\Phi(f(G)) = f(G)$ である。

(b) 空間グラフ $f(G), g(G)$ に対し、$f(G) \cong g(G)$ ならば $g(G) \cong f(G)$

$f(G) \cong g(G)$ であるので、同相写像 Φ が存在し、$\Phi(f(G)) = g(G)$ である。
Φ は同相写像なので、$X \circ \Phi = \Phi \circ X = id$ となる同相写像 X が存在する。
この X により、$X(g(G)) = f(G)$ であるので、$g(G) \cong f(G)$ である。

(c) 空間グラフ $f(G), g(G), h(G)$ に対し、$f(G) \cong g(G)$ かつ $g(G) \cong h(G)$ ならば $f(G) \cong h(G)$

……………………………………………………………………

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3 \times [0,1] \tag{9}$$
$$X : \mathbb{R}^3 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3 \times [0,1] \tag{10}$$

$f(G) \cong g(G)$ より同相写像 Φ が存在し、$\Phi(f(G)) = g(G)$ である。
また、$g(G) \cong h(G)$ より同相写像 X が存在し、$X(g(G)) = h(G)$ である。
Φ, X が同相写像であるので、その合成写像 $X \circ \Phi$ も同相写像であり、$X(\Phi(f(G))) = h(G)$ である。
よって、$f(G) \cong h(G)$ である。

---

4. X, Y, Z を位相空間とし、$\varphi : X \to Y,\ \psi : Y \to Z$ をそれぞれ写像とするとき、合成写像 $\psi \circ \varphi : X \to Z$ について、以下の問いに答えよ。

(a) φ, ψ がともに全単射ならば、$\psi \circ \varphi$ も全単射であることを示せ。

……………………………………………………………………

全射性

φ, ψ がともに全射であるので、任意の $y \in Y$ に対し $y = \varphi(x)$ となる $x \in X$ が存在し、任意の $z \in Z$ に対し $z = \psi(y)$ となる $y \in Y$ が存在する。
任意の $z \in Z$ に対し $z = \psi(y)$ となる $y \in Y$ が存在するので、この $y \in Y$ について $y = \varphi(x)$ となる $x \in X$ が存在する。
つまり、${}^{\forall} z \in Z$ に対し、$z = \psi \circ \varphi(x)$ となる $x \in X$ が存在する。
よって、$\psi \circ \varphi$ は全射である。

単射性

φ, ψ がともに単射である。
$y_1, y_2 \in Y$ に対し、$\psi(y_1) = \psi(y_2)$ であれば $y_1 = y_2$ である。
φ は全射であるので、$y_1 = \varphi(x_1),\ y_2 = \varphi(x_2)$ となる $x_1, x_2 \in X$ が存在する。
φ は単射であるので、$x_1 = x_2$ である。
つまり、$\psi(\varphi(x_1)) = \psi(\varphi(x_2))$ であれば $x_1 = x_2$ である。

よって、$\psi\circ\varphi$ は単射である。

この 2 つより $\psi\circ\varphi$ は単全射である。

(b) φ, ψ がともに連続写像ならば、$\psi\circ\varphi$ も連続写像であることを示せ。

. . . .

φ, ψ が連続写像であるので、任意の開集合 $U_Y \subset Y,\ U_Z \subset Z$ に対して、$\varphi^{-1}(U_Y),\ \psi^{-1}(U_Z)$ が開集合となる。

$\psi^{-1}(U_Z)$ が開集合であるので、$\varphi^{-1}(\psi^{-1}(U_Z))$ も開集合となる。

つまり、任意の開集合 $U_Z \subset Z$ に対して、$(\varphi^{-1}\circ\psi^{-1})(U_Z)$ も開集合となる。

$(\varphi^{-1}\circ\psi^{-1})(U_Z) = (\psi\circ\varphi)^{-1}(U_Z)$ であるので、写像 $\psi\circ\varphi\colon X \to Z$ は連続写像である。

(c) φ が X から Y への同相写像で、かつ、ψ が Y から Z への同相写像ならば、$\psi\circ\varphi$ は X から Z への同相写像となることを示せ。

. . . .

同相写像とは、全単射な連続写像であり、その逆写像も連続写像であるものをいう。

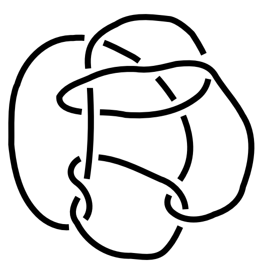
先の問より、φ, ψ が全単射な連続写像であるので、合成写像 $\psi\circ\varphi$ も全単射な連続写像である。

また、$\varphi^{-1}: Y \to X,\ \psi^{-1}: Z \to Y$ も連続写像であるので、その合成写像 $\varphi^{-1}\circ\psi^{-1} = (\psi\circ\varphi)$ も連続写像である。

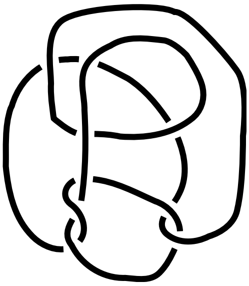
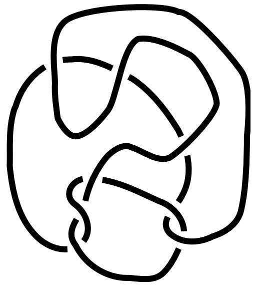
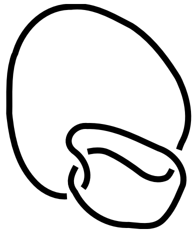
よって、$\psi\circ\varphi$ は同相写像である。

---

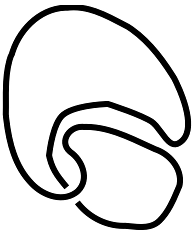
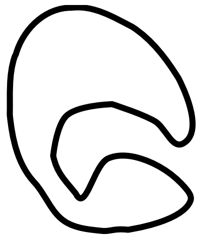
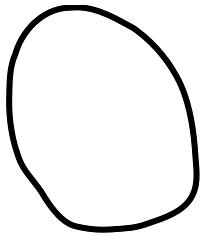
5. 次の図式が表す結び目 K は自明であることを確かめよ。



. . . .

$K \Rightarrow$  $\Rightarrow$  $\Rightarrow$ 

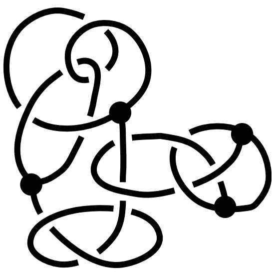
$$(11)$$

$\Rightarrow$  $\Rightarrow$  $\Rightarrow$ 

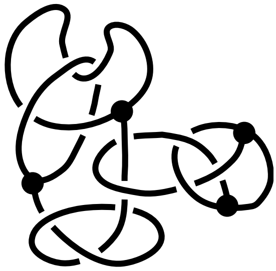
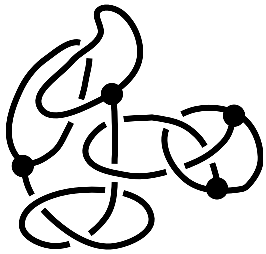
$$(12)$$

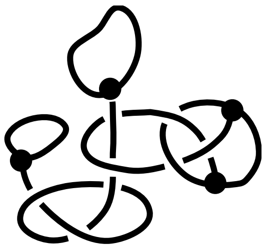
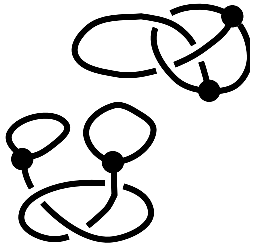
---

6. 次の図式が表す空間グラフ $f(G)$ は分離していることを確かめよ。



. . . .

$f(G) \Rightarrow$  $\Rightarrow$  (13)

$\Rightarrow$  $\Rightarrow$  (14)

---

7. $f(G), g(G)$ は、それぞれ次の図式 $\tilde{f}(G), \tilde{g}(G)$ で表された空間グラフとする。この時、$\tilde{f}(G)$ と $\tilde{g}(G)$ の間の Reidemeister（ライデマイスター）変形の列を具体的に図示せよ。

. . . .

Reidemeister 変形

捻る、パスの上下と移動する、交点の上下を移動する

. . . .
