定義

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。

近傍系

$x \in X$ の近傍系 $\mathcal{N}(x)$ とは、$x \in X$ の近傍全体の集合族。

$$\mathcal{N}(x) = \{U \subset X \mid {}^{\exists}O \in \mathcal{O} \ s.t. \ x \in O \subset U\} \tag{1}$$

内点

$a \in A$ に対して a の近傍 $U \in \mathcal{N}(a)$ が存在し $U \subset A$ となるとき、a は A の内点であるという。

触点

集合 A に対して $x \in X$ が A の触点であるとは次を満たすときをいう。

$$^{\forall}U \in \mathcal{N}(x) \text{ に対して } U \cap A \neq \emptyset$$

開核、内部

A の全ての内点の集合を開核や内部といい、A° と書く。

$$A^{\circ} = \{a \in A \mid {}^{\exists}U \in \mathcal{N}(a) \ s.t. \ U \subset A\} \tag{2}$$

閉包

A の触点全体の集合を A の閉包といい $\bar{A}$ と書く。

$$\bar{A} = \{x \in X \mid {}^{\forall}U \in \mathcal{N}(x), \ U \cap A \neq \emptyset\} \tag{3}$$

問題

1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。部分集合 $A \subset X$ に対して、$x \in A^{\circ}$ であることと、${}^{\exists}N \in \mathcal{N}(x)$ に対して $N \subset A$ であることは同値であることを示せ。

   ……………………………………………………………………

   $x \in A^{\circ} \Rightarrow N \subset A$

   $x \in A^{\circ}$ より $x \in U \subset A$ となる近傍 $U \in \mathcal{N}(x)$ が存在する。よって、${}^{\exists}N \in \mathcal{N}(x)$ に対して $N \subset A$ である。

   $x \in A^{\circ} \Leftarrow N \subset A$

   $N \subset A$ となる $N \in \mathcal{N}(x)$ が存在するとする。

   $N \in \mathcal{N}(x)$ であれば、N は x の近傍であり、$x \in N$ である。これが $N \subset A$ となるので $x \in N \subset A$ となり x は A の内点である。よって、$x \in A^{\circ}$ である。

2. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。部分集合 $A \subset X$ に対して、$x \in \bar{A}$ であることと、$^\forall N \in \mathcal{N}(x)$ に対して $N \cap A \neq \emptyset$ であることは同値であることを示せ。

……………………………………………………………………………

$x \in \bar{A} \Rightarrow N \cap A \neq \emptyset$

$x \in \bar{A}$ であるので x は A の触点である。触点であれば、$^\forall N \in \mathcal{N}(x)$ に対して $N \cap A \neq \emptyset$ である。

$x \in \bar{A} \Leftarrow N \cap A \neq \emptyset$

$^\forall N \in \mathcal{N}(x)$ に対して $N \cap A \neq \emptyset$ であることは x が A の触点であることを示している。よって、$x \in \bar{A}$ である。

---

3. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。部分集合 $A \subset X$ に対して、収束する A の点列 x_n の収束点 x は A の触点であることを示せ。

……………………………………………………………………………

$x_n \in A$ $(n \in \mathbb{N})$ に対して $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ である。この極限は次のように書くことができる。

$$^\forall U \in \mathcal{N}(x),\ ^\exists N_0 \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ N > N_0 \Rightarrow x_N \in U \tag{4}$$

つまり、$N > N_0$ となる数 N に対して $x_N \in A$ は $x_N \in U$ である。$^\forall U \in \mathcal{N}(x)$ と A について $x_N \in U \cap A$ であるので $U \cap A \neq \emptyset$ である。

よって、x は A の触点である。
