t を独立変数とする関数 $x = x(t)$ についての微分方程式について各問に答えよ。

$$x'' - x' + 7x = 0 \tag{1}$$

1. 微分方程式 (13) を微分演算子 D を用いて表し、特性方程式を求めよ。

   ……………………………………………………………………

   微分演算子を $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ として方程式を書き換える。

$$\begin{aligned} x'' - x' + 7x =& 0 && (2)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x + 7x =& 0 && (3)\\ DDx - Dx + 7x =& 0 && (4)\\ (D^2 - D + 7)x =& 0 && (5) \end{aligned}$$

   よって、特性方程式は変数を λ とすると $\lambda^2 - \lambda + 7 = 0$ である。

---

2. 微分方程式 (13) の基本解を求めよ。

   ……………………………………………………………………

   特性方程式 $\lambda^2 - \lambda + 7 = 0$ の解は $\lambda = \frac{1}{2}\left(1 \pm 3\sqrt{3}i\right)$ となる。
   基本解は $e^{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)t}$ である。
   そこでオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を利用して一般解を変形する。

$$\begin{aligned} x =& A_1 e^{\left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)t} + A_2 e^{\left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)t} && (6)\\ =& A_1 e^{\frac{1}{2}t} e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}it} + A_2 e^{\frac{1}{2}t} e^{-\frac{3\sqrt{3}}{2}it} && (7)\\ =& A_1 e^{\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}t + i\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right) + A_2 e^{\frac{1}{2}t}\left(\cos -\frac{3\sqrt{3}}{2}t + i\sin -\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right) && (8)\\ =& A_1 e^{\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}t + i\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right) + A_2 e^{\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}t - i\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t\right) && (9)\\ =& (A_1 + A_2)e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}t + (A_1 - A_2)ie^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t && (10) \end{aligned}$$

   $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$ を互いに共役として、$A_1 = a + bi, A_2 = a - bi\ (a, b \in \mathbb{R})$ とおく。$A_1 + A_2 = 2a,\ A_1 - A_2 = 2bi$ であるので、$C_1 = 2a,\ C_2 = -2b$ とすれば式 (10) は次のようになる。

$$x = C_1 e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}t + C_2 e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t \tag{11}$$

よって、基本解は次の 2 つになる。

$$e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}t,\quad e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t \tag{12}$$

---

t を独立変数とする関数 $x = x(t)$ についての微分方程式について各問に答えよ。

$$x'' - 4x' + 7x = 0 \tag{13}$$

1. 微分方程式 (13) を微分演算子 D を用いて表し、特性方程式を求めよ。

   ....

   微分演算子を用いると次の式が得られる。

$$x'' - 4x' + 7x = 0 \tag{14}$$

$$DDx - 4Dx + 7x = 0 \tag{15}$$

$$(D^2 - 4D + 7)x = 0 \tag{16}$$

   よって、特性方程式は変数を λ とすると $\lambda^2 - 4\lambda + 7 = 0$ である。

---

2. 微分方程式 (13) の基本解を求めよ。

   ....

   特性方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 7 = 0$ の解は $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}i$ となる。
   基本解は $e^{\left(2\pm\sqrt{3}i\right)t}$ である。基本解が複素数となるので、変形を行うことにより基本解は次の 2 つになる。

$$e^{2t}\cos\sqrt{3}t,\quad e^{2t}\sin\sqrt{3}t \tag{17}$$

$$x'' - 2x' - 3x = 27t^2 \tag{18}$$

t を独立変数とする関数 $x = x(t)$ についての微分方程式 (18) について、一般解が次で与えられることを、逆演算子を利用して確認せよ。

$$x(t) = -9t^2 + 12t - 14 + C_1e^{3t} + C_2e^{-t} \qquad (C_1, C_2\text{:const}) \tag{19}$$

....

式 (18) を微分演算子を用いると次のようになる。

$$(D^2 - 2D - 3)x = 27t^2 \tag{20}$$

これを逆演算子を用いて計算をする。

$$x = \frac{1}{D^2 - 2D - 3} 27t^2 \tag{21}$$

$$= \frac{1}{(D+1)(D-3)} 27t^2 \tag{22}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{D-3} - \frac{1}{D+1}\right) 27t^2 \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

$$x'' + x' + x = 7e^{2t} \tag{25}$$

t を独立変数とする関数 $x = x(t)$ についての微分方程式 (23) について、一般解が次で与えられることを、逆演算子を利用して確認せよ。

$$x(t) = e^{2t} + C_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \qquad (C_1, C_2\text{:const}) \tag{26}$$

. . . .
