$$D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \tag{1}$$

$$\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\tau > 0\} \tag{2}$$

$$\mathbf{e}_n(z) = \exp(2\pi i n z) \tag{3}$$

等角写像

写像 $F : D^2 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ が次の式を満たすとき等角写像という。

$$|F_x| = |F_y|, \quad (F_x, F_y) = 0 \tag{4}$$

テータ関数

$$\theta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2 \tau)\mathbf{e}_n(z) \tag{5}$$

$$\theta(z + a\tau + b, \tau) = \exp(-\pi i a^2 \tau - 2\pi i a z)\theta(z,\tau), \quad a, b \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

$$\theta(z+1,\tau) = \theta(z,\tau), \quad \theta(z+\tau,\tau) = \exp(-\pi i \tau - 2\pi i z)\theta(z,\tau) \tag{7}$$

$\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ 上の正則関数全体の集合を $\mathcal{H}$ とする。$\mathcal{H}$ は $\mathbb{C}$ 上の線形空間である。
$a, b \in \mathbb{R}$ とする。$\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への線形写像 S_b, T_a を次のように定義する。

$$S_b f(z,\tau) = f(z+b,\tau), \quad T_a f(z,\tau) = \exp(\pi i a^2 \tau + 2\pi i a z) f(z + a\tau, \tau) \tag{8}$$

指標付きテータ関数

$a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に対して $\theta_{a,b}$ を次のように定める。

$$\theta_{a,b} = S_b(T_a\theta) = \exp(2\pi i a b) T_a(S_b\theta) \tag{9}$$

$$\theta_{a,b}(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(\pi i (n+a)^2 \tau + 2\pi i (n+a)(z+b)) \tag{10}$$

性質

$a, b, a', b' \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$

$$\theta_{0,0}(z,\tau) = \theta(z,\tau) \tag{11}$$

$$S_{b'}\theta_{a,b}(z,\tau) = \theta_{a,b}(z+b',\tau) = \theta_{a,b+b'}(z,\tau) \tag{12}$$

$$T_{a'}\theta_{a,b}(z,\tau) = \exp(\pi i {a'}^2\tau + 2\pi i a' z)\theta_{a,b}(z+a'\tau,\tau) = \exp(-2\pi i a' b)\theta_{a+a',b}(z,\tau) \tag{13}$$

$$\theta_{a+p,b+q}(z,\tau) = \exp(2\pi i a q)\theta_{a,b}(z,\tau) \quad p, q \in \mathbb{Z} \tag{14}$$

$$\theta_{a,b}(z+2,\tau) = \theta_{a,b}(z,\tau) \tag{15}$$

$$\theta_{a,b}(z+2\tau,\tau) = \exp(-4\pi i(\tau+z))\theta_{a,b}(z,\tau) \tag{16}$$

第 1 回　問題 1.2.1. (x, y) について複素数値関数 f を $f = a + bi$ と表す。ただし、a, b は実数値関数とする。$\bar{f}$ が $z = x + yi$ についての正則関数とすると F は等角写像となることを示せ。

…………………………………………………………………………

$\bar{f} = a - bi$ であるので、写像 $F : D^2 \to \mathbb{R}^2$ は $F = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ となる。

Cauchy-Riemann 方程式から $a_x = -b_y,\ a_y = b_x$ である。

$$|F_x| = |a_x^2 + b_x^2| = |a_y^2 + b_y^2| = |F_y| \tag{17}$$

$$(F_x, F_y) = a_x a_y + (-b_x)(-b_y) = a_x a_y + (-a_y)(a_x) = 0 \tag{18}$$

これにより F は等角写像である。

問題 1.2.2. F_x が F_y を $\pi/2$ 回転したベクトルとなるとき、$\bar{f} = a - bi$ は $z = x + yi$ についての正則関数となることを示せ。

…………………………………………………………………………

$$F = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad F_x = \begin{pmatrix} a_x \\ b_x \end{pmatrix}, \quad F_y = \begin{pmatrix} a_y \\ b_y \end{pmatrix} \tag{19}$$

F_x が F_y を $\pi/2$ 回転したベクトルとなる為、次の式が成り立つ。

$$F_x = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} F_y \tag{20}$$

$$a_x = -b_y, \quad b_x = a_y \tag{21}$$

$\bar{f} = a - bi$ は Cauchy-Riemann 方程式を満たすので $z = x + yi$ について正則関数である。

第 3 回　問題 1.1.1.　関数 f を次の様に定める。

$$f(z,\tau)=\theta(-z+\frac{1}{2}\tau-\frac{b}{2\pi i},\tau) \tag{22}$$

この時、次の式を満たすことを示せ。

$$f(z+1,\tau)=f(z,\tau),\quad f(z+\tau,\tau)=\exp(-2\pi iz-b)f(z,\tau) \tag{23}$$

....

$\theta(z+1,\tau)=\theta(z,\tau)$ より

$$f(z+1,\tau)=\theta(-(z+1)+\frac{1}{2}\tau-\frac{b}{2\pi i},\tau)=\theta(-z+\frac{1}{2}\tau-\frac{b}{2\pi i},\tau)=f(z,\tau) \tag{24}$$

$\theta(z+\tau,\tau)=\exp(-\pi i\tau-2\pi iz)\theta(z,\tau)$ であるので、両辺に $\exp(\pi i\tau+2\pi iz)$ をかけることで $\exp(\pi i\tau+2\pi iz)\theta(z+\tau,\tau)=\theta(z,\tau)$ である。

$$\begin{aligned}
f(z+\tau,\tau)&=\theta(-(z+\tau)+\frac{1}{2}\tau-\frac{b}{2\pi i},\tau) &(25)\\
&=\theta(-z+\frac{1}{2}\tau-\frac{b}{2\pi i}-\tau,\tau) &(26)\\
&=\exp(\pi i\tau+2\pi i(-z+\frac{1}{2}\tau-\frac{b}{2\pi i}-\tau))\theta(-z+\frac{1}{2}\tau-\frac{b}{2\pi i},\tau) &(27)\\
&=\exp(-2\pi iz-b)f(z,\tau) &(28)
\end{aligned}$$

問題 1.1.1.　整数 a,b に対し次が成り立つことを確認せよ。

$$T_a\theta(z,\tau)=\theta(z,\tau),\quad S_b\theta(z,\tau)=\theta(z,\tau) \tag{29}$$

....

$b\in\mathbb{Z}$ より $\theta(z+\tau,\tau)=\exp(-\pi i\tau-2\pi iz)\theta(z,\tau)$ を繰り返し行うと次の式を得る。

$$\begin{aligned}
T_a\theta(z,\tau)&=\exp(\pi ia^2\tau+2\pi iaz)\theta(z+a\tau,\tau) &(30)\\
&=\exp(\pi ia^2\tau+2\pi iaz)\exp(-\pi i\tau-2\pi i(z+(a-1)\tau))\theta(z+(a-1)\tau,\tau) &(31)\\
&=\exp(\pi ia^2\tau+2\pi iaz)\exp(-a\pi i\tau-2a\pi iz-2\pi i\tau\sum_{j=1}^{a}(a-j)))\theta(z,\tau) &(32)\\
&=\exp(\pi ia^2\tau-a\pi i\tau-2\pi i\tau a^2+2\pi i\tau\frac{1}{2}a(a+1)))\theta(z,\tau) &(33)\\
&=\exp(0)\theta(z,\tau)=\theta(z,\tau) &(34)
\end{aligned}$$

$a \in \mathbb{Z}$ より $\theta(z+1,\tau)=\theta(z,\tau)$ を繰り返し行うと次が得られる。

$$S_b\theta(z,\tau)=\theta(z+b,\tau)=\theta(z+(b-1),\tau)=\theta(z+(b-2),\tau)=\cdots=\theta(z,\tau) \tag{35}$$

問題 1.2.1. 下記補題を用いて $R_{(0,1/2)}$ と $R_{(1/2,0)}$ を求めよ。さらに $R_{(0,1/2)}\cdot R_{(1/2,0)}=iR_{(1/2,0)}\cdot R_{(0,1/2)}$ を直接計算により確認せよ。

補題

$\delta \in \Delta = \{0,1/2,1,3/2\}$

$$S_{\frac{1}{2}}\xi_\delta = \exp(\pi i\delta)\xi_\delta \tag{36}$$

$$T_{\frac{1}{2}}\xi_\delta = \xi_{\delta+\frac{1}{2}} \tag{37}$$

. . . .

$$\xi_\delta = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \exp(\pi i(\delta+2m)\tau + 2\pi i(\delta+2m)z) \tag{38}$$

$$V_2 = \{f=\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta\xi_\delta \mid a_\delta \in \mathbb{C}\} \tag{39}$$

$$\begin{pmatrix}\theta_{0,0} & \theta_{0,\frac{1}{2}} & \theta_{\frac{1}{2},0} & \theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_0 & \xi_{\frac{1}{2}} & \xi_1 & \xi_{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & i\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -i\end{pmatrix} \tag{40}$$

$T_{1/2}: V_2 \to V_2$ は次の様に表せる。

$$\begin{pmatrix}\theta_{0,0} & \theta_{0,\frac{1}{2}} & \theta_{\frac{1}{2},0} & \theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\theta_{0,0} & \theta_{0,\frac{1}{2}} & \theta_{\frac{1}{2},0} & \theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\end{pmatrix} R_{(1/2,0)} \tag{41}$$

$$\begin{pmatrix}\xi_0 & \xi_{\frac{1}{2}} & \xi_1 & \xi_{\frac{3}{2}}\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\xi_0 & \xi_{\frac{1}{2}} & \xi_1 & \xi_{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \tag{42}$$

これにより次の式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & i\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -i\end{pmatrix} R_{(1/2,0)} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \tag{43}$$

逆行列を求め、左からかける。

$$
\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & i\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -i\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -i & 0 & i\end{pmatrix} \tag{44}
$$

$$
R_{(1/2,0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -i & 0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ -i & 0 & i & 0\end{pmatrix} \tag{45}
$$

$S_{\frac{1}{2}}\xi_\delta = \exp{(\pi i\delta)}\xi_\delta$ より $S_{1/2} : V_2 \to V_2$ は次の様に表せる。

$$
\begin{pmatrix}\theta_{0,0} & \theta_{0,\frac{1}{2}} & \theta_{\frac{1}{2},0} & \theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\theta_{0,0} & \theta_{0,\frac{1}{2}} & \theta_{\frac{1}{2},0} & \theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\end{pmatrix} R_{(0,1/2)} \tag{46}
$$

$$
\begin{pmatrix}\xi_0 & \xi_{\frac{1}{2}} & \xi_1 & \xi_{\frac{3}{2}}\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\xi_0 & \xi_{\frac{1}{2}} & \xi_1 & \xi_{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\exp{(\pi i\frac{0}{2})} & 0 & 0 & \\ 0 & \exp{(\pi i\frac{1}{2})} & 0 & \\ 0 & 0 & \exp{(\pi i\frac{2}{2})} & \\ 0 & 0 & 0 & \exp \end{pmatrix} \tag{47}
$$

同様に計算すると $R_{(0,1/2)}$ を得られる。

$$
R_{(0,1/2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -i & 0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\exp{(\pi i\frac{0}{2})} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \exp{(\pi i\frac{1}{2})} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \exp{(\pi i\frac{2}{2})} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \exp{(\pi i\frac{3}{2})}\end{pmatrix} \tag{48}
$$

$$
= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & i & 0 & -i\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{49}
$$

$$R_{(0,1/2)} \cdot R_{(1/2,0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \tag{50}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -i & 1 & i \\ -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix} \tag{51}$$

$$R_{(1/2,0)} \cdot R_{(0,1/2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{52}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix} \tag{53}$$

問題 1.2.2. H_2 は $(1,0,0)$ を単位元とする群であることを確かめよ。

....

ハイゼンベルク群 H_2 の定義は次の通り。

$$H_2 = \{(\lambda, a, b) \mid \lambda \in \mu_4,\ a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\} \tag{54}$$

$\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{0, 1/2\}$ は加法群である。
${}^{\forall}(\lambda, a, b), (\lambda', a', b') \in H_2$ に対して次の様に定義する。

$$(\lambda, a, b) \cdot (\lambda', a', b') = (\lambda\lambda' \exp(2\pi i b a'), a + a', b + b') \tag{55}$$

$\mu_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\}$ より、$\exp(2\pi i b a') \in \mu_4$ である。よって、$\lambda\lambda' \exp(2\pi i b a') \in \mu_4$ であり、H_2 は演算で閉じていることがわかる。
$a' = 0$ または $b = 0$ であれば $\exp(2\pi i b a') = 1$ である。よって、${}^{\forall}h \in H_2$ にたいして $h \cdot (1,0,0) = (1,0,0) \cdot h = h$ となり、$(1,0,0)$ は H_2 の単位元である。
$(\lambda, a, b) \in H_2$ に対して $(\lambda^{-1} \exp(2\pi i b a), -a, -b)$ は次の様に逆元となる。

$$(\lambda, a, b) \cdot (\lambda^{-1} \exp(2\pi i b a), -a, -b) \tag{56}$$
$$= (\lambda\lambda^{-1} \exp(2\pi i b a) \exp(2\pi i b(-a)), a - a, b - b) \tag{57}$$
$$= (1, 0, 0) \tag{58}$$
$$(\lambda^{-1} \exp(2\pi i b a), -a, -b) \cdot (\lambda, a, b) \tag{59}$$
$$= (\lambda^{-1} \exp(2\pi i b a) \lambda \exp(2\pi i(-b)a), -a + a, -b + b) \tag{60}$$
$$= (1, 0, 0) \tag{61}$$

$a, a', a'', b, b', b'' \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ とし、$\lambda, \lambda', \lambda'' \in \mu_4$ する。

$$\begin{aligned} &(\lambda\lambda' \exp(2\pi i b a'))\, \lambda'' \exp(2\pi i (b + b') a'') && (62)\\ &= \lambda\lambda'\lambda'' \exp(2\pi i b a' + 2\pi i b a'' + 2\pi i b' a'') && (63)\\ &= \lambda (\lambda'\lambda'' \exp(2\pi i b' a''))\exp(2\pi i b(a' + a'')) && (64)\end{aligned}$$

この為、次の式が成り立つ。

$$((\lambda, a, b) \cdot (\lambda', a', b')) \cdot (\lambda'', a'', b'') = (\lambda, a, b) \cdot ((\lambda', a', b') \cdot (\lambda'', a'', b'')) \quad (65)$$

以上により H_2 は群である。

第 4 回　問題 1.1.1.　次の事実を確認せよ。

1. $\theta_{1/2,0}(z, \tau)$ は領域 $\Omega(\tau)$ に次の零点を持つ。

$$z = \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2} + \tau, \quad \frac{3}{2} + \tau \qquad (66)$$

2. $\theta_{0,1/2}(z, \tau)$ は領域 $\Omega(\tau)$ に次の零点を持つ。

$$z = \frac{1}{2}\tau, \quad 1 + \frac{1}{2}\tau, \quad \frac{3}{2}\tau, \quad 1 + \frac{3}{2}\tau \qquad (67)$$

3. $\theta(z, \tau) = \theta_{0,0}(z, \tau)$ は領域 $\Omega(\tau)$ に次の零点を持つ。

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau, \quad \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\tau, \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\tau, \quad \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\tau \qquad (68)$$

. . . .
