確率過程

$X = \{X_t \mid t \in \mathbb{Z}\}$: 時系列

${}^\forall n \in \mathbb{N}$, ${}^\forall t_i \in \mathbb{Z}$ $(1 \le i \le n)$, ${}^\forall k \in \mathbb{Z}$

強定常性

$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ と $(X_{t_1+k}, \ldots, X_{t_n+k})$ が同じ分布を持つ時、時系列 X は強定常性を持つという。

弱定常性

- ${}^\forall X_i \in X$ に対して期待値 $E[X_i]$ が一定である。$E[X_i] = \mu$
- ${}^\forall X_i, X_{i+k} \in X$ に対して共分散 $Cov(X_i, X_{i+k})$ は k についてのみ依存する。$Cov(X_i, X_{i+k}) = \sigma_k$

上記の 2 つを満たす時、時系列 X は弱定常性を持つという。

任意の確率過程 ${}^\forall X_i, X_j \in X$ に対して共分散 $Cov[X_i, X_j]$ が存在する場合、時系列 X が強定常性を持つのなら弱定常性も持つ。

X が強定常性を持つので、${}^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ と $(X_{t_1+k}, \ldots, X_{t_n+k})$ が同じ分布である。

この為、$n = 1$ の場合、(X_{t_1}) と (X_{t_1+k}) が同じ分布である。これにより $E[X_{t_1}] = E[X_{t_1+k}]$ であるが、${}^\forall k \in \mathbb{Z}$ であるので全ての期待値が一致する。

$n = 2$ の場合、(X_{t_1}, X_{t_2}) と (X_{t_1+k}, X_{t_2+k}) が同じ分布である。この為、$Cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = Cov(X_{t_1+k}, X_{t_2+k})$ である。これにより X_α, X_β の共分散はこれを k だけスライドさせた $X_{\alpha+k}, X_{\beta+k}$ の共分散と一致する。つまり、確率過程 X_α, X_β の添字の差 $\beta - \alpha$ の値に対して共分散が定まる。

これにより、期待値と共分散の条件が弱定常性を満たす。