1. 乗法群 $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^\times$ の元を全て列挙し、それぞれの位数を求めよ。

…………………………………………………………………………

集合 $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ の要素は 18 個あり、次のようになる。

$$\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{17}\} \tag{1}$$

乗法群 $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^\times$ は集合 $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ の要素から単元となるものだけを選んだ集合である。単元となるのは 18 と互いに素な数の元であるので具体的には次のような集合である。

$$(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^\times = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{17}\} \tag{2}$$

それぞれの元の位数を計算する。

$$\bar{5} \times \bar{5} = \bar{7} \tag{3}$$

$$\bar{5} \times \bar{5} \times \bar{5} = \bar{17} \tag{4}$$

$$\bar{5} \times \bar{5} \times \bar{5} \times \bar{5} = \bar{13} \tag{5}$$

$$\bar{5} \times \bar{5} \times \bar{5} \times \bar{5} \times \bar{5} = \bar{11} \tag{6}$$

$$\bar{5} \times \bar{5} \times \bar{5} \times \bar{5} \times \bar{5} \times \bar{5} = \bar{1} \tag{7}$$

これにより $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^\times = \langle \bar{5} \rangle$ であることが分かる。つまり、$\bar{5}$ の位数は 6 である。
同様に計算すると次のようになる。

$$\bar{7} \times \bar{7} \times \bar{7} = \bar{1} \tag{8}$$

$$\bar{11} \times \bar{11} \times \bar{11} \times \bar{11} \times \bar{11} \times \bar{11} = \bar{1} \tag{9}$$

$$\bar{13} \times \bar{13} \times \bar{13} = \bar{1} \tag{10}$$

$$\bar{17} \times \bar{17} = \bar{1} \tag{11}$$

これらをまとめると次のようになる。

元	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{11}$	$\bar{13}$	$\bar{17}$
位数	1	6	3	6	3	2

---

2. 正三角形の対称群 $D_6 = \langle r, s \mid r^3 = s^2 = e,\ rs = sr^{-1} \rangle$ に対し、H を頂点 1 を動かさない対称変換からなる部分群とする。頂点 1 を通る線対称の反射を s と呼び、左 $2\pi/3$ 回転を r と呼ぶ。
この時、頂点 1 を頂点 3 に移す対象変換からなる集合は D_6 の H に関する左剰余類であるか調べよ。

正三角形の頂点は左回りに 1,2,3 とする。
対称群 D_6 と部分群 H は次のような群である。

$$D_6 =\{e, r, r^2, s, rs, r^2s\} \tag{12}$$
$$H =\{e, s\} \tag{13}$$

また、頂点 1 を頂点 3 に移す対称変換は r^2, rs の 2 つである。これを S とする。

$$S = \{r^2, rs\} = \{r^2, sr^2\} \tag{14}$$

$r^2 \in D_6$ を H に右からかけると S となるので、右剰余類である。

$$Hr^2 = \{xr^2 \mid x \in H\} = \{er^2, sr^2\} = S \tag{15}$$

しかし、H に左から何をかけても S とはならないので左剰余類ではない。