次元に関する定義

f を次のような線形写像 (線形変換) とする。

$$f : V \to V \quad (V : \text{vec sp}) \tag{1}$$

この時、$s_d(f)$ を次のように定義する。

$$s_d(f) = \dim \operatorname{Ker} f^d / \operatorname{Ker} f^{d-1} \tag{2}$$

つまり、$s_d(f)$ は整数値を取り、次の式により求まる。

$$s_d(f) = \dim \operatorname{Ker} f^d - \dim \operatorname{Ker} f^{d-1} \tag{3}$$

---

1. 4 次冪零行列 A に対し、$(s_1(A), s_2(A), s_3(A), s_4(A))$ の候補をすべて求め、各々に対応する Jordan(ジョルダン) 標準形を求めよ。

   ……………………………………………………………………

   $(s_1(A), s_2(A), s_3(A), s_4(A))$ の候補は次の 5 通り。

   $$(4,0,0,0),\ (3,1,0,0),\ (2,2,0,0),\ (2,1,1,0),\ (1,1,1,1) \tag{4}$$

   $(s_i(A)) = (4,0,0,0)$ の場合、$(m_1, m_2, m_3, m_4) = (1,1,1,1)$ となるので、ジョルダン標準形は次のようになる。

   $$J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0) = 0 \tag{5}$$

   $(s_i(A)) = (3,1,0,0)$ の場合、$(m_1, m_2, m_3, m_4) = (2,1,1,0)$ となるので、ジョルダン標準形は次のようになる。

   $$J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_2(0) \tag{6}$$

   $(s_i(A)) = (2,2,0,0)$ の場合、$(m_1, m_2, m_3, m_4) = (2,2,0,0)$ となるので、ジョルダン標準形は次のようになる。

   $$J_2(0) \oplus J_2(0) \tag{7}$$

   $(s_i(A)) = (2,1,1,0)$ の場合、$(m_1, m_2, m_3, m_4) = (3,1,0,0)$ となるので、ジョルダン標準形は次のようになる。

   $$J_1(0) \oplus J_3(0) \tag{8}$$

$(s_i(A)) = (1,1,1,1)$ の場合、$(m_1, m_2, m_3, m_4) = (4,0,0,0)$ となるので、ジョルダン標準形は次のようになる。

$$J_4(0) \tag{9}$$

---

2. 次の行列の $\overset{\text{ジョルダン}}{\text{Jordan}}$ 標準形を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 10 & -9 & 6 \\ 15 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & -4 \\ 7 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & -5 \end{pmatrix} \tag{10}$$

……………………………………………………………………

A のジョルダン標準形

A の固有値を求める。

固有方程式 $\det(A-\lambda E) = 0$ を解くと、$\det(A-\lambda E) = -\lambda(\lambda-5)(\lambda+5) = 0$ であるので、$\lambda = 0, 5, -5$ が得られる。それぞれの固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は次のようになる。

$$[\lambda = 0]\ \boldsymbol{x} = k\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad [\lambda = 5]\ \boldsymbol{x} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad [\lambda = -5]\ \boldsymbol{x} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

3 次正方行列で異なる固有値が 3 つあるので、ジョルダン標準形はこれを並べたものになる。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \tag{12}$$

B のジョルダン標準形

B の固有値を求める。

固有方程式 $\det(B-\lambda E) = 0$ を解くと、$\det(B-\lambda E) = \lambda^4 = 0$ であるので、$\lambda = 0$(4 重解) となる。

この時の固有空間は

$$(B-0E)\boldsymbol{x}=0 \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=0 \tag{14}$$

$$\left\{k_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\mid k_1,k_2\in K\right\} \tag{15}$$

であり、固有ベクトルは $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ である。

この固有ベクトルに対し、次を満たすベクトル $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}$ を求める。

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{17}$$

固有値とそれに対応するベクトル $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ を並べた行列 P を用いて次のようにジョルダン標準形が求まる。

$$P=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\qquad P^{-1}BP=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \tag{18}$$

C のジョルダン標準形

$C^4\neq 0,\ C^5=0$ である。$C^4\boldsymbol{p}\neq 0$ となるベクトル $\boldsymbol{p}\neq 0$ に対し、$\boldsymbol{p},C\boldsymbol{p},C^2\boldsymbol{p},C^3\boldsymbol{p},C^4\boldsymbol{p}$ は 1 次独立である。

C の固有値を求める。

固有方程式 $\det(C-\lambda E)=0$ を解くと、$\det(C-\lambda E)=-\lambda^5=0$ であるので、$\lambda=0$(5 重解) となる。

この固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_\lambda$ は $\boldsymbol{x}_\lambda = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ である。

$C\boldsymbol{x}_\lambda = 0$ より $\boldsymbol{x}_\lambda = C^4\boldsymbol{p}$ と考え、$C^3\boldsymbol{p}, C^2\boldsymbol{p}, C\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}$ を求める。そこで、次を満たすベクトル $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}$ を求める。

$$\begin{pmatrix}2&2&2&2&-4\\7&1&1&1&-5\\1&7&1&1&-5\\1&1&7&1&-5\\1&1&1&7&-5\end{pmatrix}\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\2\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\alpha} = k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\\0\end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\begin{pmatrix}2&2&2&2&-4\\7&1&1&1&-5\\1&7&1&1&-5\\1&1&7&1&-5\\1&1&1&7&-5\end{pmatrix}\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\\0\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta} = k_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{144}\begin{pmatrix}1\\1\\5\\-1\\0\end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\begin{pmatrix}2&2&2&2&-4\\7&1&1&1&-5\\1&7&1&1&-5\\1&1&7&1&-5\\1&1&1&7&-5\end{pmatrix}\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{144}\begin{pmatrix}1\\1\\5\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma} = k_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{1728}\begin{pmatrix}1\\9\\-3\\-1\\0\end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{pmatrix}2&2&2&2&-4\\7&1&1&1&-5\\1&7&1&1&-5\\1&1&7&1&-5\\1&1&1&7&-5\end{pmatrix}\boldsymbol{\delta} = \frac{1}{1728}\begin{pmatrix}1\\9\\-3\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\delta} = k_4\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{20736}\begin{pmatrix}17\\-7\\-3\\-1\\0\end{pmatrix} \tag{22}$$

この為、$\boldsymbol{p} = \frac{1}{20736}\begin{pmatrix} 17 \\ -7 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と置くと $C^3\boldsymbol{p}, C^2\boldsymbol{p}, C\boldsymbol{p}$ は次のようになる。

$$C^3\boldsymbol{p} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C^2\boldsymbol{p} = \frac{1}{144}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C\boldsymbol{p} = \frac{1}{1728}\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

これに $C^4\boldsymbol{p} = \boldsymbol{x}_\lambda$ を加えた正則行列 $P = (C^4\boldsymbol{p}\ C^3\boldsymbol{p}\ C^2\boldsymbol{p}\ C\boldsymbol{p}\ \boldsymbol{p})$ により C ジョルダン標準形は次のようになる。

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$
