定義

位相空間

集合 X に部分集合族 $\mathcal{O}$ が開集合の公理をみたすとき、その集合と集合族の組 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間という。

開集合の公理

X: 集合、$\mathcal{O}$: 部分集合族

1. $X \in \mathcal{O},\ \emptyset \in \mathcal{O}$
2. $A_i \in \mathcal{O}$ に対して $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{O}$
3. $A_k \in \mathcal{O}$ に対して $\bigcup_{k \in \Lambda} A_k \in \mathcal{O}$

距離空間

集合 X に距離関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が定義される時集合と関数の組 (X, d) を距離空間という。

距離関数

関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が次を満たす時距離関数という。

1. $d(x, y) \geq 0,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

距離位相

集合 X に対し距離関数を用いて開集合族 $\mathcal{O}$ が定められる時 $(X, \mathcal{O})$ を距離位相空間という。

$\mathcal{O} = \{O \subset X \mid {}^{\forall} x \in O, {}^{\exists} \varepsilon > 0\ s.t.\ U_\varepsilon(x) \subset O\}$ ($U_\varepsilon(x)$ は点 x に於ける ε-近傍である)

離散位相

全ての部分集合が開集合である時、離散位相という。

密着位相

全体集合と空集合のみが開集合となる時、密着位相という。

....

位相空間は何を開集合と定めるかによって異なる性質を持つ。

問題

1. 有限集合上の距離位相空間は離散空間であることを示せ。

   ....

   X を有限集合とし、d を距離関数とする。

$x \in X$ とする。x と異なる X の点との距離の内、最小のものを m とする。

$$m = d(x, \{x\}^c) \tag{1}$$

x の近傍 $U_m(x)$ は x のみの集合となる。$U_m(x) = \{x\}$ より集合 $\{x\}$ は $U_m(x) \subset \{x\}$ を満たす為、開集合である。
任意の点 $x \in X$ に対して 1 点集合 $\{x\}$ が開集合となる。この為、複数の点が含まれた集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ も各点における近傍が含まれるため開集合となる。
つまり任意の部分集合が開集合となるので離散位相となる。

---

2. 距離空間において $x \in A$ が A の内点であるための必要十分条件は $d(x, A^c) > 0$ であることを示せ。

……………………… $x \in A$が内点 $\Rightarrow$ $d(x, A^c) > 0$ ………………………

$x \in A$ が内点であれば x の近傍 U が存在し $x \in U \subset A$ である。${}^\forall y \in U$ に対して $d(x, A^c) > d(x, y)$ である為、$d(x, A^c) > 0$ となる。

……………………… $x \in A$が内点 $\Leftarrow$ $d(x, A^c) > 0$ ………………………

$d(x, A^c) > 0$ より、$2\varepsilon = d(x, A^c)$ とすると、x の近傍 $U_\varepsilon(x)$ と A^c の共通部分は空集合である。$U_\varepsilon(x) \cap A^c = \emptyset$
よって、$U_\varepsilon(x) \subset A$ であるので、$x \in A$ は内点である。

………………………………………………………………………………

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad d(x, A^c) > 0 \tag{2}$$

このように思えるので、$d(x, A^c)$ の定義を確認する必要があり。

---

3. 位相空間 X が離散位相空間であるための必要十分条件は全ての 1 点集合が開集合となることであることを示せ。

……………………… Xが離散位相 $\Rightarrow$ 1 点集合が開集合 ………………………

X が離散位相空間である時、全ての部分集合は開集合となる。1 点からなる集合 $\{x\}$ も部分集合であるのでこれらも開集合となる。

……………………… Xが離散位相 $\Leftarrow$ 1 点集合が開集合 ………………………

${}^\forall x \in X$ において $\{x\}$ が開集合であるとする。
$x \neq y$ のとき、$\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ より $\emptyset$ は開集合となる。
X の全ての部分集合も 1 点集合の和集合として表せる。任意個の和集合も開集合となるので任意の部分集合も開集合である。
よって、X は離散位相空間となる。