線形代数 直交行列

$$T : \text{直交行列} \Leftrightarrow T^2 : \text{直交行列} \tag{1}$$

…………………………………………………………………………

T : 直交行列 $\Rightarrow T^2$: 直交行列

T は直交行列であるので、${}^tT = T^{-1}$ である。

$${}^t(T^2)T^2 = {}^tT{}^tTTT = {}^tTET = {}^tTT = E \tag{2}$$

同様に $T^2\ {}^t(T^2) = E$ であるので、T^2 は直交行列である。

…………………………………………………………………………

T : 直交行列 $\Leftarrow T^2$: 直交行列

T^2 は直交行列であるので、${}^t(T^2) = (T^2)^{-1}$ である。

$$E ={}^t(T^2)T^2 = {}^t(TT)TT \tag{3}$$
$$T^{-1}T^{-1} ={}^tT{}^tT \tag{4}$$
$$(T^{-1})^2 =({}^tT)^2 \tag{5}$$

正則行列全体の集合 $GL(n)$ 上の写像 f を次のように定める。

$$f : GL(n) \to GL(n), \quad A \mapsto A^2 \tag{6}$$

この写像は $f^{-1}(0) = \{0\}$ より単射である。よって、$(T^{-1})^2 = ({}^tT)^2$ から $T^{-1} = {}^tT$ が得られる。

つまり、T は直交行列である。