1. 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{1}{1+x^n}dx \tag{1}$$

....

$n\in\mathbb{N}$ とし、連続関数 $f_n:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ を次で定義する。

$$f_n(x)=\frac{1}{1+x^n} \tag{2}$$

$x\in[1,\infty)$ に対し、次のような不等式が成り立つ。

$$\frac{1}{1+x}>\frac{1}{1+x^2}>\frac{1}{1+x^3}>\cdots \tag{3}$$

そこで、$n>1$ の自然数と $x\in[1,\infty)$ に対し、次の不等式が成り立つ。

$$|f_n(x)|=\left|\frac{1}{1+x^n}\right|\le(1+x^2)^{-1} \tag{4}$$

$\int_1^\infty(1+x^2)^{-1}dx$ は $x=\tan\theta$ として置換積分をすると次のように計算できる。

$$\int_1^\infty(1+x^2)^{-1}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\tan^2\theta)^{-1}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4} \tag{5}$$

$\int_1^\infty(1+x^2)^{-1}dx<\infty$ であるので、μ を $[1,\infty)$ 上のルベーグ速度とすると、$n\ge2$ において次の式が成り立つ。

$$\int_1^\infty f_n(x)dx=\int_{[1,\infty)}f_n d\mu \tag{6}$$

$n\in\mathbb{N}$ に対し、f_n は連続関数であるので、$\mathcal{B}([1,\infty))$-可測関数である。また、$x\in(1,\infty)$ に対し、$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$ であり、$x=1$ のとき、$f_n(x)=1/2$ である。

関数 $g:[1,\infty)\to[0,\infty)$ を $g(x)=(1+x^2)^{-1}$ で定義する。g は連続関数であり、$\int_1^\infty|g(x)|dx=\frac{\pi}{4}<\infty$ である。したがって、$\int_{[1,\infty)}gd\mu<\infty$ である。

$n\ge2$ と $x\in[1,\infty)$ に対し、$|f_n(x)|\le g(x)$ が成り立つので、ルベーグの収束定理から次が得られる。

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty\frac{1}{1+x^n}dx=\lim_{n\to\infty}\int_{[1,\infty)}f_n d\mu=\int_{[1,\infty)}\lim_{n\to\infty}f_n d\mu=0 \tag{7}$$

2. $a \in (0, \infty)$ と $a = 0$ のそれぞれの場合で次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \frac{n^2 x e^{-n^2x^2}}{1+x^2} dx \tag{8}$$

………………………………………………………………………………………

$n \in \mathbb{N}$ に対して、連続関数 $f_n(x)$ を次のように定義する。

$$f_n(x) = \frac{n^2 x e^{-n^2x^2}}{1+x^2} \tag{9}$$

$x \in (0, \infty),\ n \in \mathbb{N}$ において $n^2x^2 < e^{n^2x^2}$ である。これにより $n^2x^2e^{-n^2x^2} < 1$ であるので、次のような不等式が成り立つ。

$$|f_n(x)| = \left| \frac{n^2 x e^{-n^2x^2}}{1+x^2} \right| = \frac{|n^2x^2e^{-n^2x^2}|}{|x(1+x^2)|} < \frac{1}{x(1+x^2)} < \frac{1}{x^3} \tag{10}$$

$a > 0$ において $\int_a^\infty x^{-3} dx = \frac{1}{2a^2} < \infty$ である。したがって、μ を $[a, \infty)$ 上のルベーグ測度とすると次の式が得られる。

$$\int_a^\infty f_n(x) dx = \int_{[a,\infty)} f_n d\mu \tag{11}$$

f_n は連続関数だから $\mathcal{B}([a, \infty))$-可測関数である。また、$^\forall x \in [a, \infty)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2x^2}{e^{n^2x^2}} = 0 \tag{12}$$

であるので、

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \tag{13}$$

関数 $g : [a, \infty) \to [0, \infty)$ を $g(x) = x^{-3}$ で定義する。g は連続関数で $\int_a^\infty |g(x)| dx < \infty$ である。したがって、$\int_{[a,\infty)} g d\mu < \infty$ である。
また、$^\forall n \in \mathbb{N}$ と $^\forall x \in [a, \infty)$ に対し $|f_n(x)| \leq g(x)$ が成り立つ。
これにより、収束定理から次の式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,\infty)} f_n d\mu = \int_{[a,\infty)} \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = 0 \tag{14}$$

$a = 0$ の場合を考える。ルベーグ測度 μ において 1 点集合 $\{0\}$ は測度 0 ($\mu(\{0\}) = 0$) である。その為、$a = 0$ を付け加えても積分値は変わらない。

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \frac{n^2 x e^{-n^2x^2}}{1+x^2} dx = 0 \tag{15}$$
