$\mathbb{R}^2$ 上で点 $(2,0)$ と $(-2,0)$ からの距離の差が 2 となる点集合 (双曲線) を、$\mathbb{R}^2$ に以下の 2 つの距離が与えられた場合にそれぞれ求めよ。

1. $d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$
2. $d_2((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$

---

点 $(x,y)$ と 点 $(2,0)$ の距離 と点 $(x,y)$ と 点 $(-2,0)$ の距離 を考え、この 2 つの距離の差が 2 となるように $(x,y)$ の軌跡を考える。

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

1.

$$d_1((x,y),(2,0)) = |x-2| + |y-0| = |x-2| + |y| \tag{1}$$
$$d_1((x,y),(-2,0)) = |x+2| + |y-0| = |x+2| + |y| \tag{2}$$

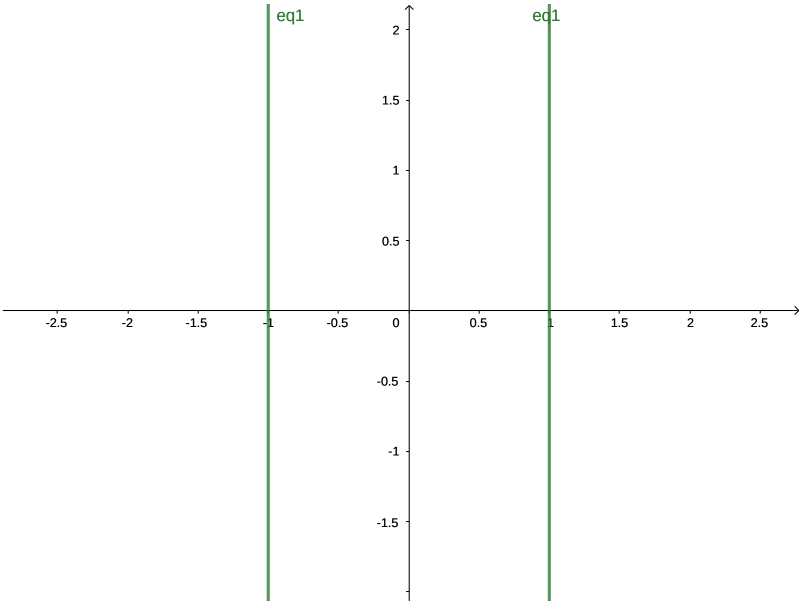
であるので、これらの距離の差はどちらが大きいかで次の 2 つを考えられる。

$$d_1((x,y),(2,0)) - d_1((x,y),(-2,0)) = |x-2| - |x+2| \tag{3}$$
$$d_1((x,y),(-2,0)) - d_1((x,y),(2,0)) = |x+2| - |x-2| \tag{4}$$

(3) の式が正の場合を考える。この時、$x<0$ である。これは $|x-2| > |x+2|$ より両辺を 2 乗すると得られる。
絶対値を外すため 2 乗をし式を整理する。

$$|x-2| - |x+2| = 2 \tag{5}$$
$$x^2 - 4x + 4 - 2|x^2-4| + x^2 + 4x + 4 = 4 \tag{6}$$
$$x^2 + 2 = |x^2 - 4| \tag{7}$$
$$(x^2+2)^2 = (x^2-4)^2 \tag{8}$$
$$(x^2+2)^2 - (x^2-4)^2 = 0 \tag{9}$$
$$6(2x^2-2) = 0 \tag{10}$$
$$x = \pm 1 \tag{11}$$

(3) の式の場合、$x<0$ より $x=-1$ となる。
(4) の式の場合も同様に考えると $x=1$ となる。
よってこの場合の軌跡は $x=\pm 1$ の 2 本の直線を表す。




2. この距離は次のようになる。

$$d_2((x,y),(2,0)) = \max\{|x-2|,|y|\} \tag{12}$$
$$d_2((x,y),(-2,0)) = \max\{|x+2|,|y|\} \tag{13}$$

それぞれ max により大きいほうが距離となる。
問題は距離の差が 2 である時とあるので、考える式は次の 2 つである。

$$d_2((x,y),(2,0)) - d_2((x,y),(-2,0)) = 2 \tag{14}$$
$$d_2((x,y),(-2,0)) - d_2((x,y),(2,0)) = 2 \tag{15}$$

まず、式 (14) について考える。距離の差 $d_2((x,y),(2,0)) - d_2((x,y),(-2,0))$ は次の 4 つの場合が考えられる。

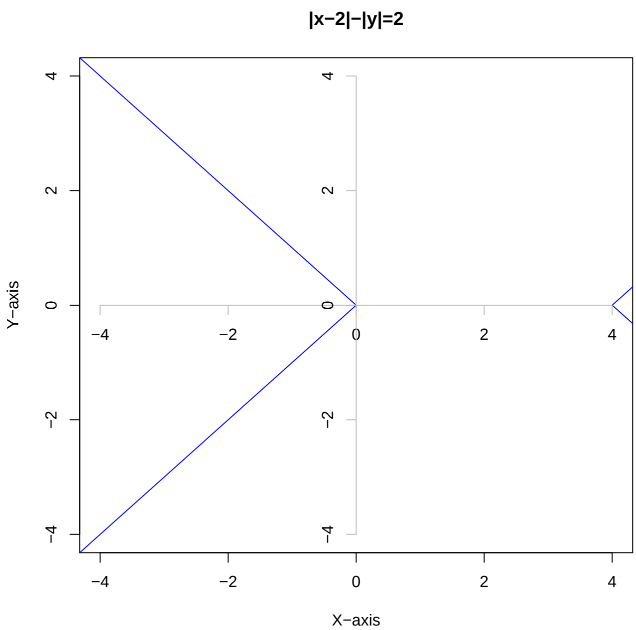
$$|x-2| - |x+2| \qquad (|x-2| > |y|,\ |x+2| > |y|) \tag{16}$$
$$|x-2| - |y| \qquad (|x-2| > |y|,\ |x+2| \leq |y|) \tag{17}$$
$$|y| - |x+2| \qquad (|x-2| \leq |y|,\ |x+2| > |y|) \tag{18}$$
$$|y| - |y| \qquad (|x-2| \leq |y|,\ |x+2| \leq |y|) \tag{19}$$

右側に書かれた条件式より導き出される領域は文末に示してある。
この時、式 (19) は 0 となるので 距離の差が 2 になることはない。また、式 (18) は 条件式に $|x+2| > |y|$ とあるので $|y| - |x+2| < 0$ であり、距離の差は 2 にならない。この為、実際に考える必要があるのは式 (16) と式 (17) である。

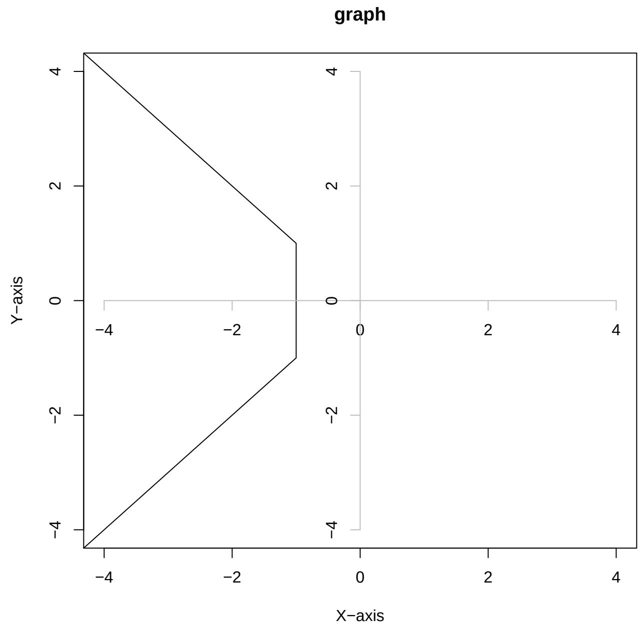
そこで、式 (16) について考える。
前問より $|x-2|-|x+2| \quad = 2$ を満たすのは $x=-1$ である。$|x-2|>|y|$ の該当する領域は図 1 の表され、$|x+2|>|y|$ の領域は図 3 で表されるので、式 (16) の条件の示す領域はこの 2 つの重なった部分となる。よって、直線 $x=-1$ のうち、$-1<y<1$ の部分の線分となる。
次に、式 (17) について考える。
条件は図 1 と図 4 の示す領域である。式は $|x-2|-|y|=2$ であるので 2 つの絶対値の場合分けを行うと次の 4 つに分わけられる。

$$x \geq 2,\ y \geq 0 \text{ の時、} \quad y = x-4 \tag{20}$$
$$x < 2,\ y \geq 0 \text{ の時、} \quad y = -x \tag{21}$$
$$x \geq 2,\ y < 0 \text{ の時、} \quad y = -x+4 \tag{22}$$
$$x < 2,\ y < 0 \text{ の時、} \quad y = x \tag{23}$$

この 4 つの式からグラフが次のように描ける。

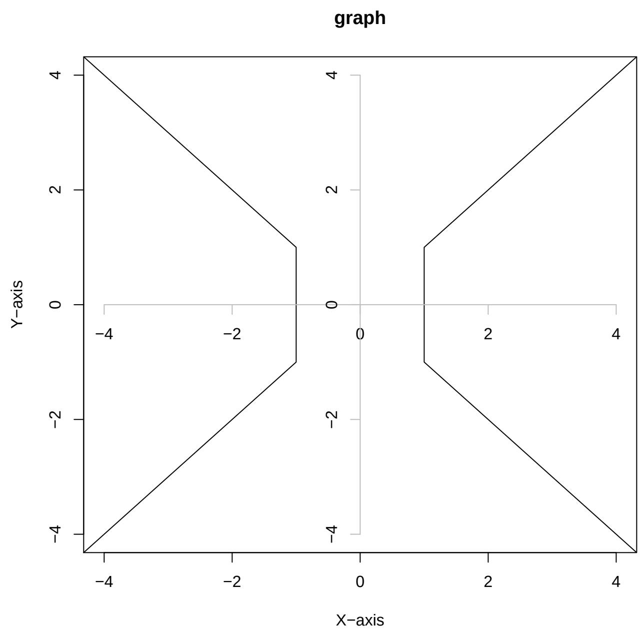



このグラフは図 1 には全て含まれるので、図 4 と重なる部分が条件を満たす軌跡となる。グラフの $x \leq 1$ の部分が図 4 と重なるので、式 (16) の結果である直線 $x=-1$ のうち、$-1<y<1$ の部分の線分と合わせると次のグラフが得られる。




これが式 (14) の示すグラフとなる。

同様に式 (15) も考えると、同じようなグラフが求められるので、それらをまとめると次のグラフとなる。これが距離 $d_2$ における双曲線である。



それぞれの不等式が示す領域

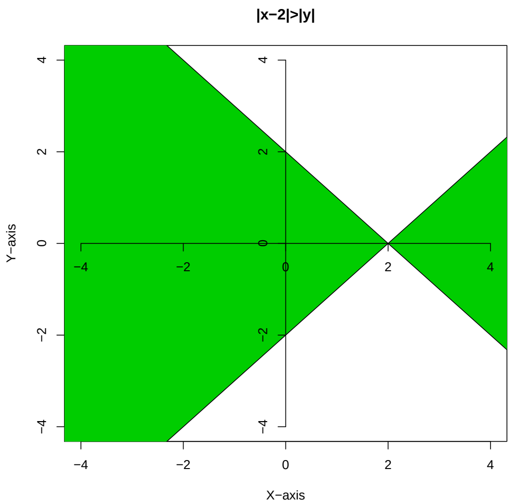



図 1　$|x-2| > |y|$

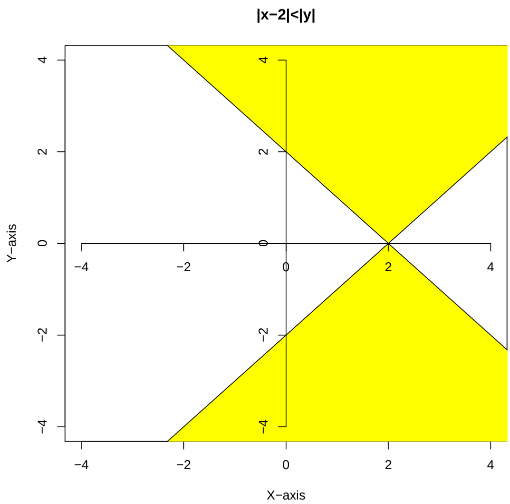



図 2　$|x-2| \leq |y|$

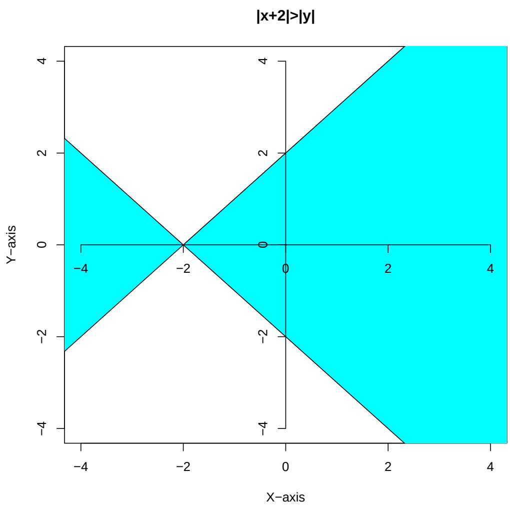



図 3　$|x+2| > |y|$

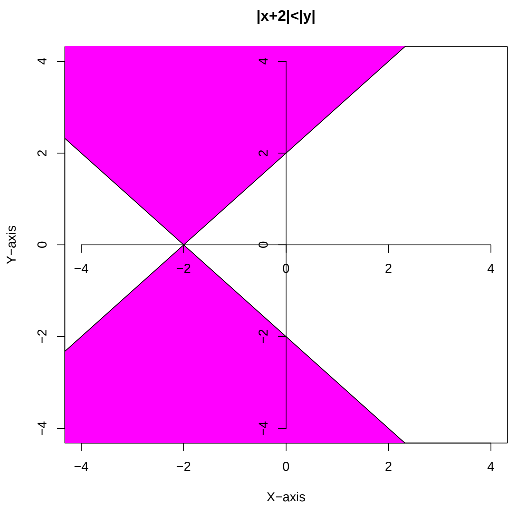



図 4　$|x+2| \leq |y|$