$$1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots = \frac{1}{1+x^3} \tag{1}$$

上の式は次の式から求まる。

$$\sum_{i=0}^{n}(-x^3)^i = 1 + (-x^3) + (-x^3)^2 + \cdots + (-x^3)^n \tag{2}$$

$$(-x^3)\sum_{i=0}^{n}(-x^3)^i = (-x^3)(1 + (-x^3) + (-x^3)^2 + \cdots + (-x^3)^n) \tag{3}$$

上記の 2 つの式の差を考えると

$$(1 - (-x^3))\sum_{i=0}^{n}(-x^3)^i = 1 - (-x^3)^{n+1} \tag{4}$$

$1 + x^3 \neq 0$ の時、式を変形し極限を取ると

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}(-x^3)^i = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(-x^3)^{n+1}}{1+x^3} \tag{5}$$

$\lim_{n\to\infty}(-x^3)^{n+1}$ が $|x| < 1$ のとき収束するので、$|x| < 1$ のとき次の式が成り立つ。

$$1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots = \frac{1}{1+x^3} \tag{6}$$

この式の定積分を $|x| < 1$ の範囲で行うので、

$$\int_0^1 (1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx \tag{7}$$

となる。