定義

問題

1. ある関数 $R : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ が存在して、実数 $x \geq 1$ に対して、次が成立することを示せ。

$$\sum_{n \leq x} \log n = x \log x - x + R(x) \quad \text{かつ} \quad |R(x)| \leq \log x + 1 \tag{1}$$

問題の式を変形することで次が得られる。

$$R(x) = \sum_{n \leq x} \log n - x \log x + x \tag{2}$$

$$\sum_{n \leq x} \log n - x(\log x - 1) \tag{3}$$

$x = 0$ における $\log(x+1)$ のテイラー展開

$$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \tag{4}$$

$x = 1$ における $\log x$ のテイラー展開

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \tag{5}$$

2. ある定数 c と関数 $R : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ が存在して、実数 $x \geq 1$ に対して、次が成立することを示せ。

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{x} + c + R(x) \quad \text{かつ} \quad |R(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{6}$$

3. ある定数 c と関数 $R : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ が存在して、実数 $x \geq e$ に対して、次が成立することを示せ。

$$\sum_{n \leq x} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2}(\log x)^2 + c + R(x) \quad \text{かつ} \quad |R(x)| \leq \frac{\log x}{x} \tag{7}$$

4. 実数 $x, k \geq 1$ に対して、次を示せ。

$$\sum_{n \leq x} \left(\log \frac{x}{n} \right)^k \leq k! x \tag{8}$$

(ヒント：微分積分学の基本定理を

$$\left(\log \frac{x}{n} \right)^k = k \int_1^{\frac{x}{n}} \frac{(\log u)^{k-1}}{u} \mathrm{d}u \tag{9}$$

という形で用いる。)
