関数 f_1, f_2 を次のように定義する。

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \tag{1}$$

$$f_1 : A \to \mathbb{R}, \quad f_1(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \tag{2}$$

$$f_2 : A \to \mathbb{R}, \quad f_2(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \tag{3}$$

1. f_1 は A 上 C^1 級であるか？
2. f_2 は A 上 C^1 級であるか？

C^1 級

関数 f が C^1 級 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

- 定義域の任意の点において $f_x,\ f_y$ が存在
- 定義域の任意の点において $f,\ f_x,\ f_y$ が連続

....

連続

S: $\mathbb{R}^n$ の部分集合

$f : S \to \mathbb{R}^m$ 関数

$a \in S$ において f が連続 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

この定義は $\varepsilon - \delta$ で書くと次のようになる。($B(a;\delta)$ は 中心 a、半径 δ の開球)

$$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists\delta > 0\ s.t.\ ^\forall x \in B(a;\delta) \cap S,\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{4}$$

....

偏微分

U: $\mathbb{R}^n$ の開集合

$f : U \to \mathbb{R}^m$ 関数

$a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ において x_i について f が偏微分可能 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 次の極限値が存在

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{h} \tag{5}$$

---

1. 次のように開集合 U と関数 g を定義する。

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\} \tag{6}$$
$$g : U \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \tag{7}$$

- g の偏微分可能性について
  $^\forall(a,b) \in U$ とする。

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h,b) - g(a,b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4-(a+h)^2-b^2} - \sqrt{4-a^2-b^2}}{h} \tag{8}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(4-(a+h)^2-b^2) - (4-a^2-b^2)}{h(\sqrt{4-(a+h)^2-b^2} + \sqrt{4-a^2-b^2})} \tag{9}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2ah - h^2}{h(\sqrt{4-(a+h)^2-b^2} + \sqrt{4-a^2-b^2})} \tag{10}$$
$$= \frac{-a}{\sqrt{4-a^2-b^2}} \tag{11}$$
$$\tag{12}$$

  これにより関数 g は点 (a,b) において x で偏微分可能である。同様の計算で y でも偏微分可能となる。

- 連続性

$$g_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \quad g_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \tag{13}$$

  とすると、g, g_x, g_y は $4 - x^2 - y^2 > 0$ の範囲において連続である。よって、U 上連続となる。

これにより g は U 上 C^1 級である。
$A \subset U$ であり、g の定義域を A に制限した関数が f_1 である為、f_1 も C^1 級である。

2. 集合 A は閉集合である。

$$A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \tag{14}$$

とすると、$A^\circ \subset A$ は開集合となる。
関数 f_2 を A° 上に制限すると C^1 級である。

ただ、A の境界上 ($x^2 + y^2 = 1$ 上) での偏微分の定義によって f_2 は C^1 級かどうかが変わる。
もし、境界上は定義域内においてのみ偏微分の極限が存在することで偏微分可能だとするのであれば f_2 は A 上で C^1 級であるが、そうでない場合は C^1 級ではない。