

$$\{M_n\} \text{ が } (\mathcal{F}_n)\text{-マルチンゲール (martingale)} \quad (1)$$

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} M_n \in L^1 \wedge E[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n \text{ a.s. } \forall n \geq 1 \quad (2)$$

a.s.(almost surely) とは「ほぼ確実に」という意味で、確率が1であることを意味する。

問題

1. 次を証明せよ。

$$\lambda P \left(\inf_{0 \leq s \leq t} X_s > \lambda \right) \leq E[X_t \vee 0] - E[X_0], \quad (\forall \lambda > 0, \forall t \geq 0) \quad (3)$$

2. $(X_t)_{t \geq 0} : (\mathcal{F}_t)$ - 劣マルチンゲール (sub-martingale) 、 $\sup_{t \geq 0} E[X_t \vee 0] < \infty$ とする。このとき、次が成り立つことを証明せよ。

$$\exists X_a \in L^1 \text{ s.t. } \lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X_\infty \text{ a.s.} \quad (4)$$
