---

**単因子**

行列に対し、行と列に対する変形を繰り返し行い対角成分以外を 0 とする。このとき、対角成分を因子の順に並べたものを単因子という。

例えば、$(2,6,18)$ など。

---

1. $R=\mathbb{Z}$ として、次の行列の単因子を求めよ。

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \tag{1}$$

………………………………………………………………

行における変形は左から、列における変形は右からかけることにより行える。

次の行列 $P_1,\ldots,P_5$ を $A$ にかけることにより行列の変形をおこなう。

$$AP_1=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ -4 & 14 & 16 \end{pmatrix}, \qquad P_1=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$AP_1P_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 44 & -18 & 16 \end{pmatrix}, \qquad P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$P_3AP_1P_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -18 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -22 & 16 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$P_3AP_1P_2P_4=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}, \qquad P_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$P_5P_3AP_1P_2P_4=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}, \qquad P_5=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

よって、単因子は $(-1,2,-18)$ である。

---

2. $R=\mathbb{C}[x]$ として、次の行列の単因子を求めよ。

$$A=\begin{pmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ -1 & x-2 & 0 \\ -1 & 1 & x-3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

………………………………………………………………

$$P_1 A = \begin{pmatrix} 0 & (x-1)(x-3) & 0 \\ -1 & x-2 & 0 \\ 0 & -x+3 & x-3 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & x-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$P_1 A P_2 = \begin{pmatrix} 0 & (x-1)(x-3) & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & x-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$P_1 A P_2 P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (x-1)(x-3) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & x-3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$P_4 P_1 A P_2 P_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)(x-3) \end{pmatrix}, \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

これにより単因子は $(-1, x-3, (x-1)(x-3))$ である。

Sagemath にて確認用計算。

```
A=matrix(CC['x'],[[x-2,-1,0],[-1,x-2,0],[-1,1,x-3]])
print(A,"\n")

P1=matrix(CC['x'],[[1,x-2,0],[0,1,0],[0,-1,1]])
print(P1*A,"\n")

P2=matrix(CC['x'],[[1,x-2,0],[0,1,0],[0,1,1]])
print(P1*A*P2,"\n")

P3=matrix(CC['x'],[[1,0,0],[0,0,1],[0,1,0]])
print(P1*A*P2*P3,"\n")

P4=matrix(CC['x'],[[0,1,0],[0,0,1],[1,0,0]])
print(P4*P1*A*P2*P3,"\n")
```