二面体群

6 次二面体群 D_6 は次のように定義される。

$$D_6 = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^6 = \beta^2 = e,\ \alpha\beta = \beta\alpha^{-1} \rangle \tag{1}$$

e は単位元、α は回転、β は鏡映を意味している。

具体的な D_6 の元は次の通り。

$$D_6 = \{e,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5,\ \beta,\ \alpha\beta,\ \alpha^2\beta,\ \alpha^3\beta,\ \alpha^4\beta,\ \alpha^5\beta\} \tag{2}$$

問題

6 次二面体群 D_6 の部分群を全て求めよ。

. . . .

D_6 の元の位数

$$[\textbf{位数 1}]\ e \qquad [\textbf{位数 2}]\ \alpha^3, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta, \alpha^3\beta, \alpha^4\beta, \alpha^5\beta \tag{3}$$

$$[\textbf{位数 3}]\ \alpha^2, \alpha^4 \qquad [\textbf{位数 6}]\ \alpha, \alpha^5 \tag{4}$$

元の位数から巡回群は次の 10 個になる。

$$[\textbf{位数 1}]\ \{e\} \tag{5}$$

$$[\textbf{位数 2}]\ \{e, \alpha^3\}, \{e, \beta\}, \{e, \alpha\beta\}, \{e, \alpha^2\beta\}, \{e, \alpha^3\beta\}, \{e, \alpha^4\beta\}, \{e, \alpha^5\beta\} \tag{6}$$

$$[\textbf{位数 3}]\ \{e, \alpha^2, \alpha^4\} \tag{7}$$

$$[\textbf{位数 6}]\ \{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5\} \tag{8}$$

部分群 $\langle \alpha^k, \alpha^l \rangle$ は $\alpha^{k+l} \in \langle \alpha^k, \alpha^l \rangle$ である。これにより $\langle \alpha^{k+l} \rangle \subset \langle \alpha^k, \alpha^l \rangle$ である。β を含まない部分群のうち最大のものは位数 6 の $\langle \alpha \rangle$ である。この為、α や α^5 を含む部分群 $\langle \alpha^k, \alpha^l \rangle$ は $\langle \alpha \rangle$ と一致する。α や α^5 を含まないのは $\langle \alpha^2, \alpha^4 \rangle$ のみだが、$\langle \alpha^2, \alpha^4 \rangle = \langle \alpha^2 \rangle$ である。これらにより部分群 $\langle \alpha^k, \alpha^l \rangle$ は巡回群のどれかと一致する。これは生成元が 3 つ以上の場合 ($\langle \alpha^l, \alpha^m, \alpha^n \rangle$) でも同様である。

次に α^k と β を含む元から生成される部分群を考える。

$\langle \alpha^k, \beta \rangle$ の部分群は $\langle \alpha^k \rangle$ に β を付け加えた部分群になる。$\langle \alpha^k \rangle$ は 3 種類あったので、つぎの 3 つとなる。

$$\langle \alpha, \beta \rangle = D_6 \tag{9}$$

$$\langle \alpha^2, \beta \rangle = \{e, \alpha^2, \alpha^4, \beta, \alpha^2\beta, \alpha^4\beta\} \tag{10}$$

$$\langle \alpha^3, \beta \rangle = \{e, \alpha^3, \beta, \alpha^3\beta\} \tag{11}$$

$\langle \alpha^k, \alpha^l\beta \rangle$ の形の部分群は元 β を含めば上の 3 つのどれかと一致する。この為、上と一致しない部分群は次の 3 つになる。

$$\langle \alpha^2, \alpha\beta \rangle = \{e, \alpha^2, \alpha^4, \alpha\beta, \alpha^3\beta, \alpha^5\beta\} \tag{12}$$
$$\langle \alpha^3, \alpha\beta \rangle = \{e, \alpha^3, \alpha\beta, \alpha^4\beta\} \tag{13}$$
$$\langle \alpha^3, \alpha^2\beta \rangle = \{e, \alpha^3, \alpha^2\beta, \alpha^5\beta\} \tag{14}$$

$\langle \alpha^k\beta, \alpha^l\beta \rangle$ の形の部分群は必ず α^{k-l} を含む。

$$\alpha^k\beta\alpha^l\beta = \beta\alpha^{-k}\alpha^l\beta = \beta\alpha^{l-k}\beta = \alpha^{k-l} \tag{15}$$

この為、上記 6 つの部分群のどれかと一致する。

3 つ以上の元から生成される部分群について考える。

$\langle \alpha^k, \alpha^l, \alpha^m \rangle$ であれば巡回群となる。β を含む元を生成元としてもつ場合 ($\langle \alpha^k\beta, \alpha^l\beta, \alpha^m\beta \rangle$ 等)、式 (15) より α^k の形の元が含まれる。逆元が含まれるので、α^k は $\alpha, \alpha^2\alpha^3$ のどれかである。β が生成される場合、$\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \alpha^2, \beta \rangle, \langle \alpha^3, \beta \rangle$ のどれかと一致する。β が生成されない場合、$\langle \alpha^2, \alpha\beta \rangle, \langle \alpha^3, \alpha\beta \rangle, \langle \alpha^3, \alpha^2\beta \rangle$ のどれかと一致する。

以上により D_6 の部分群は次の 16 個である。

[位数 1] $\{e\}$ (16)

[位数 2] $\{e, \alpha^3\}, \{e, \beta\}, \{e, \alpha\beta\}, \{e, \alpha^2\beta\}, \{e, \alpha^3\beta\}, \{e, \alpha^4\beta\}, \{e, \alpha^5\beta\}$ (17)

[位数 3] $\{e, \alpha^2, \alpha^4\}$ (18)

[位数 4] $\{e, \alpha^3, \beta, \alpha^3\beta\}, \{e, \alpha^3, \alpha\beta, \alpha^4\beta\}, \{e, \alpha^3, \alpha^2\beta, \alpha^5\beta\}$ (19)

[位数 6] $\{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5\}$ (20)

$\{e, \alpha^2, \alpha^4, \beta, \alpha^2\beta, \alpha^4\beta\}, \{e, \alpha^2, \alpha^4, \alpha\beta, \alpha^3\beta, \alpha^5\beta\}$ (21)

[位数 12] D_6 (22)
