開集合

集合 A において、任意の $a \in A$ に対し次を満たす $\varepsilon \in > 0$ が存在する時 A を開集合という。

$d(a,b) < \varepsilon$ となる全ての b が $b \in A$ である。なお、$d(a,b)$ は二点間の距離を表す。

つまり、$a \in A$ の周りの点は必ず A に含まれる時に A を開集合という。

……………………………………………………………………

区間 $(a,b) \subset \mathbb{R}$ について

$p_0 \in (a,b)$ とするとき、ε を次のように定める。

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{p_0 - a}{2}, \frac{b - p_0}{2}\right\} \tag{1}$$

これにより 点 p_0 から距離 ε 未満の全ての点が区間 (a,b) に含まれる。

p_0 は区間内のどの点であっても上記を満たす為、(a,b) は開集合となる。

区間 $(a,b]$ は多くの点が開集合の定義を満たすが、端の点 $b \in (a,b]$ はどれほど ε を小さくとっても b より大きい点は区間 $(a,b]$ に含まれないので開集合ではない。

---

n 次元開立方体 $X \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ。

$$X = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mid -1 < x_i < 1 \ (i = 1, 2, 3, \dots, n)\} \tag{2}$$

……………………………………………………………………

点 $p \in \mathbb{R}^n$ を中心とした半径 r の開球 $B(p,r)$ を次のように定義する。

$$B(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - p| < r\} \tag{3}$$

任意の点 $x \in X$ について開球 $B(x,r)$ が X に含まれるようになるには $x \in X$ に対して開球の半径 r_x をうまく取る必要がある。

点 $x \in X$ から X の外部に最も近いのは次の $2n$ 個の点のどれかになる。

$$(\pm1, 0, 0, \dots, 0),\ (0, \pm1, 0, \dots, 0),\ (0, 0, \pm1, \dots, 0),\ \dots\ ,\ (0, 0, 0, \dots, \pm1) \tag{4}$$

そこで、最も近い点との距離の半分を開球の半径 r_x とすれば良い。

$$2r_x = \min\{|x_1 - 1|,\ |x_1 + 1|,\ |x_2 - 1|,\ |x_2 + 1|, \dots, |x_n - 1|,\ |x_n + 1|\} \tag{5}$$

このように r_x を定めると任意の点 $x \in X$ について $B(x, r_x) \subset X$ となる。

よって、X は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。