1. (a) 関数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ と $F:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して、$f(n)\ll F(n)\quad(n\in\mathbb{N})$ が成り立つとき、実数 $x\geq 1$ に対して、次が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n\leq x}f(n)\ll\sum_{n\leq x}F(n) \tag{1}$$

(b) 関数 $f_i:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ と $F_i:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ $(i=1,\ldots,K)$ に対して、条件 $|f_k(n)|\leq 1, f_k(n)\ll F_k(n)$ $(k\in\{1,\ldots,K\},\ n\in\mathbb{N})$ (但し、ここで implicit constant は絶対定数) が成立すれば、次が成り立つことを示せ。

$$\prod_{k=1}^{K}(1+f_k(n))=1+O_k\left(\sum_{k=1}^{K}F_k(n)\right) \tag{2}$$

2. 集合 X 上の関数 $f,g:X\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して関係 $\asymp$ を次のように定義する。

$$F(x)\asymp G(x)\quad(x\in X)\ \overset{\text{def}}{\iff}\ F(x)\ll G(x)\text{ かつ }G(x)\ll F(x)\quad(x\in X) \tag{3}$$

(a) 集合 X 上の関数 $f,g:X\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$f(x)+g(x)\asymp\max(f(x),g(x))\quad(x\in X) \tag{4}$$

(b) 集合 X 上の関数 $f,g:X\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$(f(x)+g(x))^{\frac{1}{2}}\asymp f(x)^{\frac{1}{2}}+g(x)^{\frac{1}{2}}\quad(x\in X) \tag{5}$$

3. 実数 $x\in\mathbb{R}$ に対して、$\exp(ix)=1+O(|x|)$ が成立することを示せ。

4. 関数 $\Phi:[1,+\infty)\to\mathbb{C}$ と $F:[1,+\infty)\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して次の式が成立するとする。

$$\Phi(x)=1+O(F(x))\quad(x\geq 1) \tag{6}$$

このとき、次を示せ。

(a) もし、$\lim_{x\to\infty}F(x)=0$ だったなら、ある $x_0=x_0(\Phi)$ が存在して次が成立する。

$$\frac{1}{\Phi(x)}=1+O(F(x))\quad(x\geq x_0) \tag{7}$$

(b) もし、$\frac{1}{\Phi(x)}\ll 1$ $(x\geq 1)$ だったなら次が成立する。

$$\frac{1}{\Phi(x)}=1+O(F(x))\quad(x\geq 1) \tag{8}$$

但し、ここで implicit constant は $\frac{1}{\Phi(x)}\ll 1$ $(x\geq 1)$ の implicit constant に依存する。

5. 実数 $x \geq 1$ に対して、次が成立することを示せ。

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d|n} (-1)^d = (-\log 2) \cdot x + O(x^{\frac{1}{2}}) \tag{9}$$

(Hint: hyperbola method を用いる)

6. 数論的関数 $\chi_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ r : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ を次のように定める。

$$\chi_4(n) = \begin{cases} +1 & (n \equiv 1 \pmod 4) \\ 0 & (n \equiv 0 \pmod 2) \\ -1 & (n \equiv 3 \pmod 4) \end{cases}, \quad r(n) = 4 \sum_{d|n} \chi_4(d) \tag{10}$$

このとき、$x \geq 1$ に対して、次が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n \leq x} r(n) = \pi x + O(x^{\frac{1}{2}}) \tag{11}$$

(Hint: hyperbola method を用いる)

(補足：実は、$n \in \mathbb{N}$ に対して、$r(n) = \#\{(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \mid u^2 + v^2 = n\}$ となることが知られている。格子点の数え上げと上記の結果を比較してみると良い)
