問

(1). $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right)$ を計算せよ。

(2). $\alpha\in\mathbb{R}$、$f(x)=x^\alpha\ (x\neq 0)$ とする。この時、$\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ を求めよ。

(3). $f(x,y,z)=x^2+y^3+z^4$ とし、$g(t)=f(t-1,t-2,t-3)$ とする。この時、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t)$ の $t=3$ での値を求めよ。

(4). $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)\\ 0 & \text{other}\end{cases}$$

とする。この時、$\displaystyle\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$ を求めよ。

---

**問 (1)** $\lim_{x\to+0}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right)$

極限を求めるためにまず微分をする。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-\frac{1}{x}}=x^{-2}e^{-x^{-1}} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}e^{-\frac{1}{x}} &=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{-2}e^{-x^{-1}} \tag{2}\\ &=-2x^{-3}e^{-x^{-1}}+x^{-4}e^{-x^{-1}} \tag{3}\\ &=x^{-4}e^{-x^{-1}}(-2x+1) \tag{4}\end{aligned}$$

後半部分の極限は $-2x+1\to 1(x\to+0)$ となるので、前半部分について考える。

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^4e^{\frac{1}{x}}}=0 \tag{5}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $\frac{1}{x^4e^{\frac{1}{x}}}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$x^{-4}e^{-x^{-1}}=\frac{1}{x^4e^{\frac{1}{x}}} \tag{6}$$

この分母がどのような値に近づくかを調べる。$f(x)=x^4e^{\frac{1}{x}}$ とする。$f'(x)$ を計算する。

$$\begin{aligned}f'(x) &=4x^3e^{\frac{1}{x}}-x^2e^{\frac{1}{x}} \tag{7}\\ &=x^2e^{\frac{1}{x}}(4x-1) \tag{8}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ を満たすのは $x=0,1/4$ であるが、$x>0$ の範囲では $x=1/4$ だけになる。

$x>0$ の範囲では $f(x)>0$ であり、$f(1)=1<f(2)$ であるから $x=1/4$ のときに極小となる。実際に $0<x<1/4$ において $f'(x)<0$ である。

よって

$$\lim_{x\to+0} x^4 e^{\frac{1}{x}} = +\infty \tag{9}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{x^4 e^{\frac{1}{x}}} = 0 \tag{10}$$

であるから

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to+0} x^{-4}e^{-x^{-1}}(-2x+1) \tag{11}$$

$$= 0 \tag{12}$$

---

**問 (2)**

$f(x)=x^\alpha$ $(x\neq 0)$ の積分は $\alpha$ によって変わる。

$\alpha=0$ の場合

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 \mathrm{d}x = 1 \tag{13}$$

$\alpha=-1$ の場合

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 x^{-1}\mathrm{d}x \tag{14}$$

$$= [\log x]_1^2 = \log 2 \tag{15}$$

上記以外

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 x^\alpha \mathrm{d}x \tag{16}$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_1^2 = \frac{1}{\alpha+1}(2^{\alpha+1}-1) \tag{17}$$

---

**問 (3)**

$$g(t) = f(t-1, t-2, t-3) \tag{18}$$
$$= (t-1)^2 + (t-2)^3 + (t-3)^4 \tag{19}$$

これを $t$ で微分する。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t) = 2(t-1) + 3(t-2)^2 + 4(t-3)^3 \tag{20}$$

これに $t = 3$ を代入し $2(3-1) + 3(3-2)^2 + 4(3-3)^3 = 2 \times 2 + 3 = 7$ となる。

---

**問 (4)**

積分を区間ごとに分け、その区間における $f(x)$ に置き換える。

$$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\mathrm{d}x \tag{21}$$
$$= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} 0\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{3}} 0\mathrm{d}x \tag{22}$$
$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\mathrm{d}x = [-\cos x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \tag{23}$$
$$= -\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \tag{24}$$