三角形 ABC について $|\overrightarrow{AB}|=1,\ |\overrightarrow{AC}|=2,\ |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{6}$ とし、外接円の中心を O とする。直線 AO と外接円との交点の内、A 以外の交点を P とする。

(1). $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。
(2). $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ が成り立つような実数 s,t を求めよ。
(3). 直線 $\overrightarrow{AP}$ と直線 $\overrightarrow{BC}$ の交点を D とするとき、線分 AD の長さ $|AD|$ を求めよ。

---

(1). 内積は次の式で求められる。

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC \tag{1}$$

また、$\cos\angle BAC$ は三角形 ABC に対する余弦定理により次の式で求められる。

$$\cos\angle BAC=\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} \tag{2}$$

これらを合わせると次が得られる。

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2} \tag{3}$$

$$=\frac{1^2+2^2-\sqrt{6}^2}{2}=-\frac{1}{2} \tag{4}$$

....

別解
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ であるので、次の式が得られる。

$$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AB}|^2 \tag{5}$$

これにより式 (3) が得られる。

---

(2). 線分 AP は外接円の直径である。その為、$\angle ABP=\angle ACP=\pi/2$ であり、$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CP}=0$ である。
$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\ (s,t\in\mathbb{R})$ より $\overrightarrow{BP},\overrightarrow{CP}$ は次の様に $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ で表せる。

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=(s-1)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC} \tag{6}$$

$$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AC}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=s\overrightarrow{AB}+(t-1)\overrightarrow{AC} \tag{7}$$

ここから内積を計算する。

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP} = s-1-\frac{t}{2}, \qquad \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CP} = -\frac{s}{2}+4(t-1) \tag{8}$$

内積が 0 となるため、$s, t \in \mathbb{R}$ は次の連立方程式を満たす。

$$\begin{cases} s-1-\frac{t}{2}=0 \\ -\frac{s}{2}+4(t-1)=0 \end{cases} \tag{9}$$

これを解くと $(s,t)=(\frac{8}{5},\ \frac{6}{5})$ を得る。

$$\overrightarrow{AP} = \frac{8}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{5}\overrightarrow{AC} \tag{10}$$

---

(3). 点 D は辺 BC 上の点であるので、$0<u<1$ となる実数を用いて次の様に表せる。

$$\overrightarrow{AD} = (1-u)\overrightarrow{AB}+u\overrightarrow{AC} \tag{11}$$

また、点 D は辺 AP 上の点であるので、$0<v<1$ となる実数を用いて $\overrightarrow{AD}=v\overrightarrow{AP}$ である。

前問より $\overrightarrow{AD}$ は次の様に表せる。

$$\overrightarrow{AD} = v\overrightarrow{AP} = \frac{8v}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{6v}{5}\overrightarrow{AC} \tag{12}$$

式 (11)、式 (12) より次の連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} 1-u &= \frac{8v}{5} \\ u &= \frac{6v}{5} \end{cases} \tag{13}$$

これを解くと $(u,v)=(\frac{3}{7},\frac{5}{14})$ である。

$\overrightarrow{AD}$ は次の様に表せる。

$$\overrightarrow{AD} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC} \tag{14}$$

$|\overrightarrow{AD}|^2$ を計算する。

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = \left|\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}\right|^2 \tag{15}$$

$$= \left(\frac{4}{7}\right)^2|\overrightarrow{AB}|^2+2\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left(\frac{3}{7}\right)^2|\overrightarrow{AC}|^2 \tag{16}$$

$$= \left(\frac{4}{7}\right)^2-\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}+\left(\frac{3}{7}\right)^2\cdot 2^2 = \frac{40}{7^2} \tag{17}$$

これにより $|\overrightarrow{AD}|$ が求まる。

$$|\overrightarrow{AD}| = \frac{2}{7}\sqrt{10} \tag{18}$$