$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. A の固有値 α, β $(\alpha > \beta)$ を求めよ。
2. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となる正方行列 P を一つ求めよ。
3. A^n を求めよ。
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} A^n$ を求めよ。
5. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ を用いて、$\Phi(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$ を求めよ。ただし、$A^0 = I$ であり、x は実数の変数である。($\Phi(t)$ を t の関数を成分とする行列として求めよ)
6. 微分方程式 $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ の解 $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ で初期条件 $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たすものを求めよ。

---

1. 行列 A の固有値とは $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ となるような λ の事をいう。この時のベクトル $\boldsymbol{x}$ は固有ベクトルという。

   固有方程式 $\det(A - \lambda I) = 0$ を計算する。$(\lambda + 1)(\lambda - 5) = 0$ より $\lambda = -1,\ 5$ となる。

   よって、固有値は $\alpha = 5,\ \beta = -1$ となる。

   ....

2. それぞれの固有値における固有ベクトルを求める。

   $\alpha = 5$ の時、$(A - 5I)\boldsymbol{x} = 0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ が固有ベクトルである。

$$(A - 5I)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{2}$$

   よって、$x_1 - x_2 = 0$ が得られる。この為、ベクトル $\boldsymbol{x}$ は次のようになる。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

   固有値 $\alpha = 5$ の固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選択する。(x_1 を自由に決めれば他の値でもよい。)

固有値 $\beta = -1$ の固有ベクトルも同様にして求め $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

求めた固有ベクトルを並べた行列を P とすると、A の対角化が出来る。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

ちなみにベクトルの順序を入れ替えると次のように固有値も入れ替わる。

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \tag{5}$$

…………………………………………………………………………

3. A^n は対角行列を用いて考える。

対角行列を $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とすると、$P^{-1}AP = D$ である。この両辺に左から P をかけ、右から P^{-1} を書けると $A = PDP^{-1}$ となる。これの n 乗を考える。

$$\begin{aligned}
A^n =& (PDP^{-1})^n & (6)\\
=& PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}\cdots PDP^{-1} & (7)\\
=& PD^nP^{-1} & (8)\\
=& \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} & (9)\\
=& \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n & -2(-1)^n \\ 5^n & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & (10)\\
=& \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 2\cdot 5^n - 2(-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 2\cdot 5^n + (-1)^n \end{pmatrix} & (11)
\end{aligned}$$

…………………………………………………………………………

4. 上の A^n を使って行列の成分を計算する。

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} A^n =& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\cdot 10^n} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 2\cdot 5^n - 2(-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 2\cdot 5^n + (-1)^n \end{pmatrix} & (12)\\
=& \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{10}\right)^n & \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{10}\right)^n \\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{10}\right)^n & \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{10}\right)^n \end{pmatrix} & (13)
\end{aligned}$$

各成分は等比級数の和を計算することで得られる。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{10}\right)^n = \frac{\frac{-1}{10}}{1-\frac{-1}{10}} = -\frac{1}{11} \tag{14}$$

この級数の和を当てはめて次のように行列が求まる。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}-\frac{2}{3}\frac{1}{11} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3}\frac{1}{11} \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{11} & \frac{2}{3}-\frac{1}{3}\frac{1}{11} \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{7}{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \tag{16}$$

…………………………………………………………………

5. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ であるので、次のような関係となる。

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n = \Phi(t) \tag{17}$$

また、行列指数関数の性質から正則行列 P を用いて次のような変形が行える。

$$e^{tA} = e^{tPDP^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1} \qquad (A = PDP^{-1}) \tag{18}$$

そこで e^{tD} を計算する。D は A の対角行列。

$$e^{tD} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5t)^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \tag{19}$$

よって、$\Phi(t)$ は次のような行列となる。

$$\Phi(t) = e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} \tag{20}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{5t}+2e^{-t} & 2e^{5t}-2e^{-t} \\ e^{5t}-e^{-t} & 2e^{5t}+e^{-t} \end{pmatrix} \tag{21}$$

…………………………………………………………………

6. A の対角行列 D を用いて、$A = PDP^{-1}$ と書ける。この正則行列 P を使って、

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \tag{22}$$

と置くと

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} && (23)\\ P\begin{pmatrix}X'(t)\\Y'(t)\end{pmatrix} &= PDP^{-1}P\begin{pmatrix}X(t)\\Y(t)\end{pmatrix} && (24)\\ \begin{pmatrix}X'(t)\\Y'(t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}5 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X(t)\\Y(t)\end{pmatrix} && (25)\\ \begin{pmatrix}X'(t)\\Y'(t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}5X(t)\\-Y(t)\end{pmatrix} && (26)\\ & && (27)\end{aligned}$$

と変形が出来る。これにより $X(t), Y(t)$ の微分方程式が解ける。

$$X'(t) = 5X(t) \qquad \frac{X'(t)}{X(t)} = 5 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log X(t) = 5 \qquad \log X(t) = 5t + C \tag{28}$$

C は積分定数である。これより e^C を新たな定数として C_x に置き直すと次の式が得られる。

$$X(t) = C_x e^{5t} \tag{29}$$

同様にして $Y(t) = C_y e^{-t}$ が得られる。
式 (22) より $x(t), y(t)$ は次のようになる。

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}X(t)\\Y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_x e^{5t}\\C_y e^{-t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_x e^{5t} - 2C_y e^{-t}\\C_x e^{5t} + C_y e^{-t}\end{pmatrix} \tag{30}$$

また、初期条件 $\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ を満たす C_x, C_y を求める。

$$\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_x\\C_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \tag{31}$$

これを解くと $(C_x, C_y) = (1, 1)$ であるので、(30) に代入し次のような解となる。

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{5t} - 2e^{-t}\\e^{5t} + e^{-t}\end{pmatrix} \tag{32}$$