
合成関数の微分 (連鎖公式)

$y = f(x), x = u(t)$ の時

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

$z = f(x, y),\ x = u(t),\ y = v(t)$ の時

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

$$= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

……………………………………………………………

面積

$D \subset \mathbb{R}^2$ を有界集合とする。関数 $f : D \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 1$ を定義し f が D 上積分可能である時、D は面積確定であるといい、$\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ を D の面積といい、$\mathrm{Area}(D)$ とかく。

2.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) \tag{4}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto g(u, v) \tag{5}$$

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \varphi(t) \tag{6}$$

$f,\ g,\ \varphi$ を C^1-級関数とする。
この時、${}^\forall t \in \mathbb{R}$ において

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t, g(t, \varphi(t))) \tag{7}$$

を f, g の偏微分、φ の微分で表し、その式を証明せよ。

……………………………………………………………

合成関数の微分より

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x, y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}g(u,v)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial g(u,v)}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial g(u,v)}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{9}$$

$f(t,g(t,\varphi(t)))$ は $f(x,y)$ に次を代入した式である。

$$x=t,\ y=g(u,v),\ u=t,\ v=\varphi(t) \tag{10}$$

この為、x,y を置き換えると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t,g(u,v)) =\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(t,g(u,v))\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(t,g(u,v))\frac{\mathrm{d}g(u,v)}{\mathrm{d}t} \tag{11}$$

$$=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(t,g(u,v))+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(t,g(u,v))\frac{\mathrm{d}g(u,v)}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

同様に u,v を置き換える。

$$\frac{\mathrm{d}g(t,\varphi(t))}{\mathrm{d}t} =\frac{\partial g(u,v)}{\partial u}(t,\varphi(t))\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial g(u,v)}{\partial v}(t,\varphi(t))\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} \tag{13}$$

$$=\frac{\partial g(u,v)}{\partial u}(t,\varphi(t))+\frac{\partial g(u,v)}{\partial v}(t,\varphi(t))\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} \tag{14}$$

式 (12) に式 (14) を代入すると

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t,g(u,v))\\ &\quad= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(t,g(u,v))+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(t,g(u,v))\left(\frac{\partial g(u,v)}{\partial u}(t,\varphi(t))\right.\\ &\qquad\qquad\left.+\frac{\partial g(u,v)}{\partial v}(t,\varphi(t))\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

これにより次のような式を得る。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t,g(t,\varphi(t))) \tag{16}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(t,g(t,\varphi(t)))+\frac{\partial f}{\partial y}(t,g(t,\varphi(t)))\left(\frac{\partial g}{\partial u}(t,\varphi(t))+\frac{\partial g}{\partial v}(t,\varphi(t))\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t)\right) \tag{17}$$

---

3. 領域 D は次のような集合とする。

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x^2+y^2\le 4\} \tag{18}$$

開区間 I を $I=(-3,3)$ とし、写像 $\boldsymbol{f}$ を次のように定義する。

$$\boldsymbol{f}:I^2\to\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\mapsto\begin{pmatrix}f_1(x,y)\\ f_2(x,y)\end{pmatrix} \tag{19}$$

$$f_1(x,y)=y-2xy^2,\quad f_2(x,y)=2x-2x^2y \tag{20}$$

閉区間上の写像 C_1, C_2 を次のように定める。

$$C_1 : [1, e] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (2\cos(2\pi\log(t)),\, 2\sin(2\pi\log(t))) \tag{21}$$

$$C_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \left(\cos\left(\frac{2\pi e}{e-1}(e^{-t} - e^{-1})\right), \sin\left(\frac{2\pi e}{e-1}(e^{-t} - e^{-1})\right)\right) \tag{22}$$

（a）$\boldsymbol{f}$ が連続写像であることを示せ。

（b）D が面積確定であることを示し、Area(D) を求めよ。

（c）C_1 と C_2 が C^1-級曲線であることを示せ。

（d）次の線積分の値を求めよ。

$$\int_{C_1} \boldsymbol{f} + \int_{C_2} \boldsymbol{f} \tag{23}$$

……………………………………………………………

（a）写像 f_1, f_2 は多項式で表される関数であるので連続写像である。写像 $\boldsymbol{f}$ は連速写像 f_1, f_2 で定義されるためこれもまた連続写像である。

（b）領域 D は半径 2 と半径 1 の同心円の間の領域である。

領域 D は極座標で表示すると次のようになる。

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\} \tag{24}$$

$$= \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le r \le 2,\, 0 \le \theta < 2\pi\} \tag{25}$$

変数変換は次のように行う。

$$x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta \tag{26}$$

ヤコビ行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \tag{27}$$

これらを用いて Area(D) を計算する。

$$\mathrm{Area}(D) = \int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad = \int_D r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{28}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \qquad = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 3\pi \tag{29}$$

（c）t が $1 \to e$ に変化するのに対して $\log(t)$ は単調増加で $0 \to 1$ に変化する。これにより $C_1(t) = (2\cos(2\pi\log(t)),\, 2\sin(2\pi\log(t)))$ は原点中心の半径 2 の円周となる。

$$C_1(\theta) = (2\cos\theta,\, 2\sin\theta) \tag{30}$$

t が $0 \to 1$ に変化するのに対して $e^{-t} - e^{-1}$ は単調減少で $1 - e^{-1} \to 0$ に変化する。つまり、$\frac{2\pi e}{e-1}(e^{-t} - e^{-1})$ は $2\pi \to 0$ へと変化する。これにより $C_2(t) = \left(\cos\left(\frac{2\pi e}{e-1}(e^{-t} - e^{-1})\right), \sin\left(\frac{2\pi e}{e-1}(e^{-t} - e^{-1})\right)\right)$ は原点中心の半径 1 の円周となる。

$$C_2(\theta) = (\cos\theta,\, \sin\theta) \tag{31}$$

ただし、C_1 は正の向き、C_2 は負の向きとなっている。

$\sin\theta,\, \cos\theta$ は C^∞-級関数であるので、$C_1,\, C_2$ は C^1-級である。

（d）$C_1.C_2$ の示す図形は $\boldsymbol{f}$ の定義域に含まれている。

$\boldsymbol{f}$ を極座標 $(x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta)$ に変数変換する。

$$\boldsymbol{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y - 2xy^2 \\ 2x - 2x^2y \end{pmatrix} \tag{32}$$

$$= \begin{pmatrix} y - 2xy^2 \\ 2x - 2x^2y \end{pmatrix} \tag{33}$$

C_1 を $(2\cos\theta,\, 2\sin\theta)$ とし 0 から 2π まで曲線として積分を考える。

$x = 2\cos\theta,\, y = 2\sin\theta$ とすると、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -2\sin\theta = -y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = 2\cos\theta = x \tag{34}$$

であるので、C_1 上の積分は次のようになる。

$$\int_{C_1} \boldsymbol{f} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} y - 2xy^2 \\ 2x - 2x^2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \mathrm{d}\theta \tag{35}$$

$$= \int_0^{2\pi} (-y^2 + 2xy^3 + 2x^2 - 2x^3y)\mathrm{d}\theta \tag{36}$$

$$= \int_0^{2\pi} (-4\sin^2\theta + 32\cos\theta\sin^3\theta + 8\cos^2\theta - 32\cos^3\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta \tag{37}$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2(1 - \cos 2\theta) + 4(1 + \cos 2\theta) - 16\sin 2\theta\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta \tag{38}$$

$$= \int_0^{2\pi} (2 + 6\cos 2\theta - 8\sin 4\theta)\mathrm{d}\theta \tag{39}$$

C_2 を $(\cos\theta,\, \sin\theta)$ とし 2π から 0 まで曲線として積分を考える。

$x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ とすると、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta = -y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \cos\theta = x \tag{40}$$

であるので、C_2 上の積分は次のようになる。

$$\int_{C_2} \boldsymbol{f} = \int_{2\pi}^{0} \begin{pmatrix} y - 2xy^2 \\ 2x - 2x^2 y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \mathrm{d}\theta \tag{41}$$

$$= \int_{2\pi}^{0} (-y^2 + 2xy^3 + 2x^2 - 2x^3 y)\mathrm{d}\theta \tag{42}$$

$$= \int_{2\pi}^{0} (-\sin^2\theta + 2\cos\theta\sin^3\theta + 2\cos^2\theta - 2\cos^3\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta \tag{43}$$

$$= \int_{2\pi}^{0} \left(-\frac{1-\cos 2\theta}{2} + (1+\cos 2\theta) - \sin 2\theta\cos 2\theta \right) \mathrm{d}\theta \tag{44}$$

$$= \int_{2\pi}^{0} \left(\frac{1+3\cos 2\theta}{2} - \frac{1}{2}\sin 4\theta \right) \mathrm{d}\theta \tag{45}$$

2 つの積分は区間が等しく向きが逆になっているので次のように合わせて計算をする。

$$\int_{C_1} \boldsymbol{f} + \int_{C_2} \boldsymbol{f} \tag{46}$$

$$= \int_{0}^{2\pi} (2 + 6\cos 2\theta - 8\sin 4\theta)\mathrm{d}\theta + \int_{2\pi}^{0} \left(\frac{1+3\cos 2\theta}{2} - \frac{1}{2}\sin 4\theta \right) \mathrm{d}\theta \tag{47}$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{2}\cos 2\theta - \frac{15}{2}\sin 4\theta \right) \mathrm{d}\theta \tag{48}$$

$$= \left[\frac{3}{2}\theta + \frac{9}{4}\sin 2\theta + \frac{15}{8}\cos 4\theta \right]_0^{2\pi} \tag{49}$$

$$=3\pi \tag{50}$$