Laplace 変換

実関数 $f(t)$ から複素関数 $F(s)$ を得る。$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{1}$$

性質

複素数 s が $\mathrm{Re}(s) > 0$ を満たす時

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{2}$$

複素数 s が $\mathrm{Re}(s) > a$ を満たす時

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \tag{3}$$

線形性 $a.b$ が定数

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] \tag{4}$$

定数 a が $a > 0$、$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ とする。

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad \mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a) \tag{5}$$

微分

$f^{(i)}(x)$ は連続 $(i = 0, \ldots, n-1)$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0) \tag{6}$$

逆ラプラス変換

ある条件下においてラプラス変換した後の関数に対応する変換前の関数は一つだけになる。この為、次のような対応表が作ることが出来る。

$$F(s) = \frac{1}{s^n} \qquad \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \tag{7}$$

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \qquad \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = e^{at} \tag{8}$$

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sin\omega t \tag{9}$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \cos\omega t \tag{10}$$

$$F(s) = \frac{1}{(s-a)^n} \qquad \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!} \tag{11}$$

$$F(s) = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = e^{at}\sin\omega t \tag{12}$$

$$F(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = e^{at}\cos\omega t \tag{13}$$

逆変換の公式

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-Ti}^{\sigma+Ti} e^{st}F(s)\mathrm{d}s \tag{14}$$

問題

次の関数 $F(s)$ から逆ラプラス変換で $f(t)$ を求めよ。

1.

$$F(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} \tag{15}$$

2.

$$F(s) = \frac{s^2+9s-6}{s(s-1)(s+3)} \tag{16}$$

解法

ラプラス変換は線形性がある為、逆変換を行いたい式を式 (7)〜(13) の和と定数倍に分けることを考える。

うまく分けることが出来たのならそれぞれの式を対応する逆変換の式に置き換えて式を整理する。

1.

$$F(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \tag{17}$$

式 (8) より次の式が得られる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-(-1)}\right] = e^{-t} \quad (18)\\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-(-2)}\right] = e^{-2t} \quad (19)\\ & \quad (20)\end{aligned}$$

これにより次のようなラプラス変換があることが分かる。

$$\mathcal{L}\left[e^{-t} - e^{-2t}\right] = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \quad (21)$$

ラプラスの逆変換は次のようになる。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+3s+2}\right] = e^{-t} - e^{-2t} \quad (22)$$

2.

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{s^2+9s-6}{s(s-1)(s+3)} = \frac{s^2+3s}{s(s-1)(s+3)} + \frac{6s-6}{s(s-1)(s+3)} \quad (23)\\ &= \frac{1}{s-1} + \frac{6}{s(s+3)} = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+3} \quad (24)\end{aligned}$$

式 (7) より次の式が得られる。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{t^{1-1}}{(1-1)!} = 1 \quad (25)$$

式 (8) より次の式が得られる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] &= e^{t} \quad (26)\\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-(-3)}\right] = e^{-3t} \quad (27)\end{aligned}$$

これらにより次のようなラプラス変換があることが分かる。

$$\mathcal{L}\left[e^{t} + 2 - 2e^{-3t}\right] = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+3} \quad (28)$$

よって求めるべき逆変換は次のような式となる。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2+9s-6}{s(s-1)(s+3)}\right] = e^{t} + 2 - 2e^{-3t} \quad (29)$$