円 $C : x^2 + y^2 = 1$ と直線 $l : y = ax - 2a$ の交点

円の式に直線の式を代入すると次の式が得られる。

$$(a^2 + 1)x^2 - 4a^2x + 4a^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

この代入は円の式が変形されただけではなく、$\mathbb{R}^2$ 全体の変換を行っていると考える。

次の写像 f が変換写像。

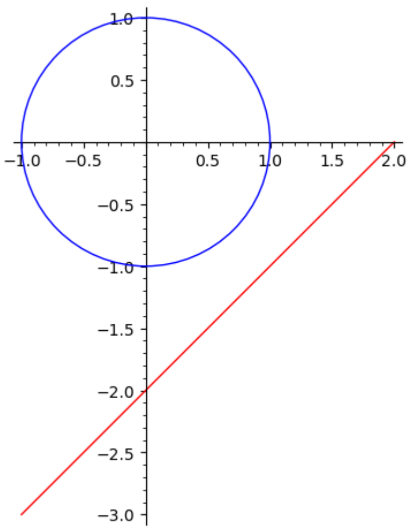
$$f : \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 (x, y) \mapsto (X, Y) = (x, y - ax + 2a) \tag{2}$$

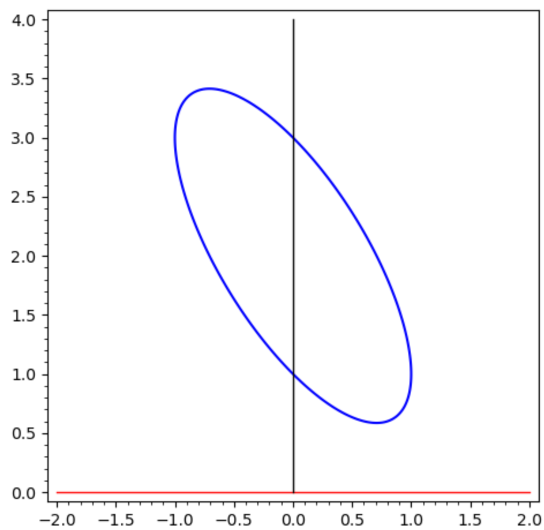
写像の定義域を $A = \mathbb{R}^2$、値域を $B = \mathbb{R}^2$ と呼ぶことにする。A は xy 平面、B は XY 平面。

$y = ax - 2a$ を変形して $y - ax + 2a = 0$ となる。$y = ax - 2a$ を代入するという事は y と $ax - 2a$ が等しい世界であり、これは $y - ax + 2a$ が 0 となる世界のことを指す。A の直線 l は $y = ax - 2a$ を満たすので、$y - ax + 2a = 0$ を満たす点の集まりである。B では $Y = y - ax + 2a = 0$ である為、X 軸と重なる。つまり、写像 f で A の直線 l は B の X 軸に対応する。

A では C は円、l は直線であるが、写像 f にて変換された B では l が X 軸になっている。C は B では $(a^2 + 1)X^2 + (2aY - 4a^2)X + Y^2 - 4aY + 4a^2 - 1 = 0$ で表される楕円になる。

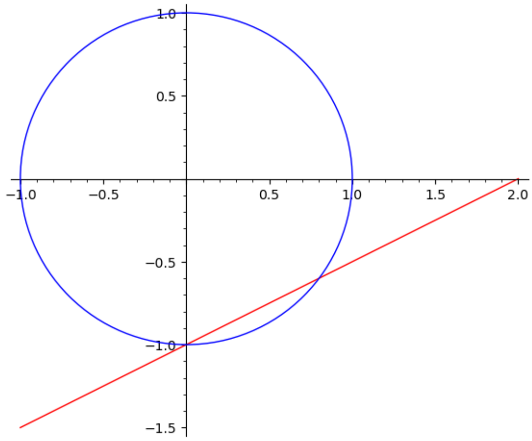
$a = 1$ の場合　左:A xy 平面　　　　右:B XY 平面

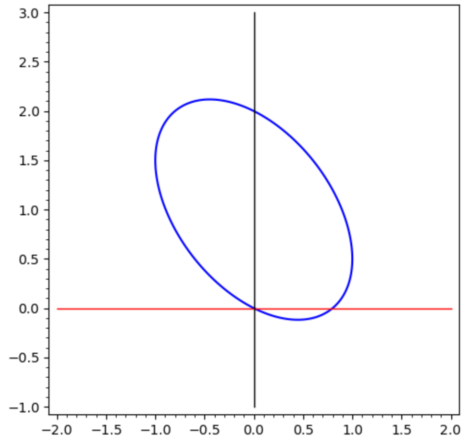




....

$a = \frac{1}{2}$ の場合　左:A xy 平面　　　　右:B XY 平面





A の円 C と直線 l との交点は B の楕円と X 軸の交点として現れる。f の逆写像 f^{-1} が存在し、B での交点は A でも交点となる為、B での交点を考えるだけでよい。

$$f^{-1} : B(=\mathbb{R}^2) \to A(=\mathbb{R}^2) \quad (X, Y) \mapsto (x, y) = (X, Y + aX - 2a) \tag{3}$$

B での交点を求めるために、X 軸の式 $Y = 0$ を楕円の式に代入すると最初の式 $(a^2+1)x^2 - 4a^2x + 4a^2 - 1 = 0$ が得られる。これを解くと x の値が求まるが、f の定義から A でも B でも同じ値が交点の x 座標であり、値の範囲は $-1 \leq x \leq 1$ $(-1 \leq X \leq 1)$ となる。

これにより、$x^2+y^2 = 1$ と $y = ax-2a$ の交点の x 座標は方程式 $(a^2+1)x^2-4a^2x+4a^2-1 = 0$ の解と対応している。

グラフの式 sagemath

`https://sagecell.sagemath.org/`

....

```
a=1

c=circle((0,0), 1)
l=plot(a*(x-2),[x,-1,2],color='red')
show(c+l,aspect_ratio=1)

var('x,y')
b=implicit_plot((a^2+1)*x^2+(2*a*y-4*a^2)*x+y^2-4*a*y+4*a^2-1,[x,-1,1],[y,0,4])
xax=line([(-2,0),(2,0)],color='red')
yax=line([(0,0),(0,4)],color='black')
show(b+xax+yax,aspect_ratio=1)

save(c+l,'tra.png', aspect_ratio=1)
save(b+xax+yax,'trb.png', aspect_ratio=1)
```

....

```
a=1/2

c=circle((0,0), 1)
l=plot(a*(x-2),[x,-1,2],color='red')
show(c+l,aspect_ratio=1)

var('x,y')
b=implicit_plot((a^2+1)*x^2+(2*a*y-4*a^2)*x+y^2-4*a*y+4*a^2-1,[x,-1,1],[y,-1,3])
xax=line([(-2,0),(2,0)],color='red')
yax=line([(0,-1),(0,3)],color='black')
show(b+xax+yax,aspect_ratio=1)

save(c+l,'tra_h.png', aspect_ratio=1)
save(b+xax+yax,'trb_h.png', aspect_ratio=1)
```