
有限加法族

集合 X の部分集合族 $\mathcal{F}$ が**有限加法族**であるとは次を満たすときをいう。

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow X \backslash A \in \mathcal{F}$
3. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

有限加法的測度

集合 X 上の有限加法族 $\mathcal{F}$ について、$m : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ が $(X, \mathcal{F})$ 上の**有限加法的測度**であるとは、次の 2 つの条件を満たすときをいう。

1. $m(\emptyset) = 0$
2. $A, B \in \mathcal{F}$ が互いに素である時、$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

外測度

X を集合とする。$\Gamma : 2^X \to [0, \infty]$ が X 上の**外測度**であるとは、次の 3 つの条件を満たすときをいう。

1. $\Gamma(\emptyset) = 0$
2. $A, B \subset X$ が $A \subset B$ を満たす時、$\Gamma(A) \leq \Gamma(B)$
3. X の任意の部分集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し、$\Gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$

Γ-可測

X を集合とする。$\Gamma : 2^X \to [0, \infty]$ を X 上の外測度とする。

集合 $E \subset X$ が **Γ-可測** (または Carathéodory（カラテオドリ）の意味で可測) とは、任意の $A \subset X$ に対し次を満たすときをいう。

$$\Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap (X \backslash E)) = \Gamma(A) \tag{1}$$

また、Γ-可測集合全体を $\mathcal{M}_\Gamma$ と表す。

命題 (X 上の外測度)

X を集合、$\mathcal{F}$ を X 上の有限加法族、μ を $(X, \mathcal{F})$ 上の有限加法的測度とする。$\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ を次で定義する。

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \;\middle|\; A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \text{であり、} E_j \in \mathcal{F} \text{、} j \in \mathbb{N} \right\} \tag{2}$$

このとき、μ^* は X 上の外側度である。

1. X を集合とし、$\mathcal{M}$ を X 上の有限加法族とする。また、m を $(X, \mathcal{M})$ 上の有限加法的測度とする。

(a) $A, B \subset \mathcal{M}$ が $A \subset B$ を満たすならば $m(A) \leq m(B)$、更に $m(A) < \infty$ ならば $m(B \backslash A) = m(B) - m(A)$ が成り立つことを示せ。

$A \subset B$ より次の式が成り立つ。

$$A \cup (B \backslash A) = B \tag{3}$$
$$m(A) + m(B \backslash A) = m(B) \tag{4}$$

これより、$m(A) \leq m(B)$ である。また、$m(A) < \infty$ であれば $m(A)$ を移項し $m(B \backslash A) = m(B) - m(A)$ となる。

(b) $N \in \mathbb{N}$ とし、$\{A_n\}_{n=1}^{N} \subset \mathcal{M}$ とする。このとき、$m\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{N} m(A_n)$ が成り立つことを示せ。

$A_1, A_2 \subset \mathcal{M}$ について次の式が成り立つ。

$$A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \backslash A_2),\ A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \backslash A_1) \tag{5}$$

これにより次が得られる。

$$m(A_1) = m(A_1 \cap A_2) + m(A_1 \backslash A_2),\ m(A_2) = m(A_2 \cap A_1) + m(A_2 \backslash A_1) \tag{6}$$

また、$A_1 \cup A_2$ は次のように分けられる。

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \backslash A_2) \cup (A_2 \backslash A_1) \tag{7}$$

$m(A_1 \cup A_2)$ と $m(A_1),\ m(A_2)$ の関係が次のようになる。

$$\begin{aligned} m(A_1 \cup A_2) &= m(A_1 \cap A_2) + m(A_1 \backslash A_2) + m(A_2 \backslash A_1) && (8)\\ &\leq 2m(A_1 \cap A_2) + m(A_1 \backslash A_2) + m(A_2 \backslash A_1) && (9)\\ &= m(A_1) + m(A_2) && (10) \end{aligned}$$

$A_1 \cup A_2$ と A_3 について同様に行うと次が得られる。

$$m(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \leq m(A_1) + m(A_2) + m(A_3) \tag{11}$$

これを繰り返すと次の式が得られる。

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{N} m(A_n) \tag{12}$$

2. 関数 $m : 2^{\mathbb{N}} \to [0, \infty]$ を次で定義する。

$$m(A) = \begin{cases} \infty & A \subset \mathbb{N}\text{が無限集合} \\ 0 & A \subset \mathbb{N}\text{が有限集合} \end{cases} \tag{13}$$

(m は $(\mathbb{N},\ 2^{\mathbb{N}})$ 上の有限加法的測度である。)
m に**命題** (X 上の外測度) を適用し、$\mathbb{N}$ 上の外測度 m^* を得る。m^*-可測な集合の全体 $\mathcal{M}_{m^*}$ はどのようなものか。理由をつけて答えよ。

....

m^*-可測な集合 $E \subset \mathbb{N}$ は次の式を満たす。

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (\mathbb{N} \backslash E)) = m^*(A), \quad {}^{\forall}A \subset \mathbb{N} \tag{14}$$

$m^*(S)$ は S を被覆する集合列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ を用いて $\sum m(A_k)$ の下限で定義している。$m(A_k)$ は 0 か ∞ のどちらかの値のみをとる。つまり、S が有限集合のみで被覆できれば $m^*(S) = 0$、そうでなければ $m^*(S) = \infty$ である。
$k \in \mathbb{N}$ に対して、要素一つだけの集合 $A_k = \{k\}$ とする。これにより $\mathbb{N} = \bigcup_k A_k$ である。この為、$m^*(\mathbb{N}) = 0$ となる。任意の部分集合 S は A_k で被覆できる為、$m^*(S) = 0$ である。
よって、全て部分集合は m^*-可測であり、$\mathcal{M}_{m^*} = 2^{\mathbb{N}}$ である。