1.（a）N 個の格子からなる自由境界条件の 1 次元 Ising 模型の分配関数 $Z_N^{(\mathrm{open})}$ を求めよ。

$$Z_N^{(\mathrm{open})} = \sum_{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{N-1}=\pm 1} \exp\left[K\sum_{j=0}^{N-2}\sigma_j\sigma_{j+1}\right] \tag{1}$$

…………………………………………………………………………………………

各 j に対して $\sigma_j = \pm 1$ であるので、積 $\sigma_j\sigma_{j+1}$ は次の 4 つがある。

$$\sigma_j\sigma_{j+1} = \begin{cases} 1 & (\sigma_j,\sigma_{j+1}) = (1,1) \\ -1 & (\sigma_j,\sigma_{j+1}) = (1,-1) \\ -1 & (\sigma_j,\sigma_{j+1}) = (-1,1) \\ 1 & (\sigma_j,\sigma_{j+1}) = (-1,-1) \end{cases} \tag{2}$$

2 個の格子 $(N=2)$ で考えてみると次のような結果が得られる。

$$\begin{aligned} Z_2^{(\mathrm{open})} &= \sum_{\sigma_0,\sigma_1=\pm 1} \exp\left[K\sum_{j=0}^{2-2}\sigma_j\sigma_{j+1}\right] && (3)\\ &= \sum_{\sigma_0,\sigma_1=\pm 1} \exp\left[K\sigma_0\sigma_1\right] && (4)\\ &= \exp[K] + \exp[-K] + \exp[-K] + \exp[K] && (5)\\ &= 2\left(\exp[K] + \exp[-K]\right) && (6) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Z_N^{(\mathrm{open})} &= \sum_{\sigma_0,\ldots,\sigma_{N-1}=\pm 1} \exp\left[K\sum_{j=0}^{N-2}\sigma_j\sigma_{j+1}\right] && (7)\\
&= \sum_{\sigma_0,\ldots,\sigma_{N-1}=\pm 1} \exp\left[K\sum_{j=0}^{N-3}\sigma_j\sigma_{j+1}\right]\exp\left[K\sigma_{N-2}\sigma_{N-1}\right] && (8)\\
&= \sum_{\sigma_0,\ldots,\sigma_{N-2}=\pm 1} \exp\left[K\sum_{j=0}^{N-3}\sigma_j\sigma_{j+1}\right]\left(\exp\left[K\sigma_{N-2}\right]+\exp\left[-K\sigma_{N-2}\right]\right) && (9)\\
&= \sum_{\sigma_0,\ldots,\sigma_{N-2}=\pm 1} \exp\left[K\sum_{j=0}^{N-4}\sigma_j\sigma_{j+1}\right]\\
&\qquad \exp\left[K\sigma_{N-3}\sigma_{N-2}\right]\left(\exp\left[K\sigma_{N-2}\right]+\exp\left[-K\sigma_{N-2}\right]\right) && (10)\\
&= (\exp[K]+\exp[-K]) \sum_{\sigma_0,\ldots,\sigma_{N-3}=\pm 1} \exp\left[K\sum_{j=0}^{N-4}\sigma_j\sigma_{j+1}\right]\\
&\qquad \left(\exp\left[K\sigma_{N-3}\right]+\exp\left[-K\sigma_{N-3}\right]\right) && (11)\\
&\ \vdots\\
&= (\exp[K]+\exp[-K])^{N-3} \sum_{\sigma_0,\sigma_1=\pm 1} \exp\left[K\sum_{j=0}^{0}\sigma_j\sigma_{j+1}\right]\\
&\qquad \left(\exp\left[K\sigma_1\right]+\exp\left[-K\sigma_1\right]\right) && (12)\\
&= 2(\exp[K]+\exp[-K])^{N-1} && (13)
\end{aligned}
$$

$\sum$ の末尾より一つずつ分けて $\sigma_j = \pm 1$ を代入していくと、式 (6) より上記結果が得られる。

$$
Z_N^{(\mathrm{open})} = 2(\exp[K]+\exp[-K])^{N-1} \qquad (14)
$$

(b) 遷移行列 T の N 乗の行列 T^N を求めよ。

$$
T = \begin{pmatrix} e^{K} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K} \end{pmatrix} = e^{-K}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \qquad a = e^{2K} \qquad (15)
$$

T^N の行列要素を次のように置いたときの A_N と B_N の漸化式を考えて T^N を求める。

$$
T^N = e^{-NK}\begin{pmatrix} A_N & B_N \\ B_N & A_N \end{pmatrix} \qquad (16)
$$

…………………………………………………………………………………………

T^N の計算をする。

$$T^N = e^{-NK}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}^{N-1} = e^{-NK}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{N-1} & B_{N-1} \\ B_{N-1} & A_{N-1} \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$= e^{-NK}\begin{pmatrix} aA_{N-1}+B_{N-1} & A_{N-1}+aB_{N-1} \\ A_{N-1}+aB_{N-1} & aA_{N-1}+B_{N-1} \end{pmatrix} \tag{18}$$

A_N と B_N の漸化式は次のようになる。

$$A_1 = a, \quad A_N = aA_{N-1} + B_{N-1} \tag{19}$$

$$B_1 = 1, \quad B_N = A_{N-1} + aB_{N-1} \tag{20}$$

$A_N + \alpha B_N = \beta(A_{N-1} + \alpha B_{N-1})$ を満たす (α, β) を見つける為に、この左辺に (19)、(20) を代入し計算する。

$$aA_{N-1} + B_{N-1} + \alpha(A_{N-1} + aB_{N-1}) = \beta(A_{N-1} + \alpha B_{N-1}) \tag{21}$$

$$a + \alpha = \beta, \quad 1 + a\alpha = \alpha\beta \tag{22}$$

$$(\alpha, \beta) = (1, a+1),\ (-1, a-1) \tag{23}$$

これにより次の式が得られる。

$$\begin{cases} A_N + B_N = (a+1)(A_{N-1} + B_{N-1}) \\ A_N - B_N = (a-1)\,(A_{N-1} - B_{N-1}) \end{cases} \tag{24}$$

数列 $\{A_N \pm B_N\}$ の一般項が次のように求まる。

$$\begin{cases} A_N + B_N = (a+1)^N \\ A_N - B_N = (a-1)^N \end{cases} \tag{25}$$

よって、この式の和と差から次が得られる。

$$A_N = \frac{1}{2}\left((a+1)^N + (a-1)^N\right), \quad B_N = \frac{1}{2}\left((a+1)^N - (a-1)^N\right) \tag{26}$$

これにより T^N が次のように求まる。

$$T^N = \frac{e^{-NK}}{2}\begin{pmatrix} (a+1)^N + (a-1)^N & (a+1)^N - (a-1)^N \\ (a+1)^N - (a-1)^N & (a+1)^N + (a-1)^N \end{pmatrix} \tag{27}$$

(c) T^N と $Z_N^{(\mathrm{open})}$ はどのように関係しているか?

…………………………………………………………………………………………

式 (14) より

$$Z_N^{(\mathrm{open})} = 2(e^K + e^{-K})^{N-1} \tag{28}$$
$$= 2e^{-(N-1)K}(a+1)^{N-1} \tag{29}$$

式 (27) より

$$T^{N-1} = \frac{e^{-(N-1)K}}{2}\begin{pmatrix}(a+1)^{N-1}+(a-1)^{N-1} & (a+1)^{N-1}-(a-1)^{N-1}\\(a+1)^{N-1}-(a-1)^{N-1} & (a+1)^{N-1}+(a-1)^{N-1}\end{pmatrix} \tag{30}$$

$$= \frac{1}{4}Z_N^{(\mathrm{open})}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} + \frac{(a-1)^{N-1}}{4(a+1)^{N-1}}Z_N^{(\mathrm{open})}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix} \tag{31}$$

---

2. N 個の 1 次元格子の各点上の変数 σ_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$ がそれぞれ $\sigma_j \in \{0, 1, 2\}$ の 3 つの値をとり、隣り合う格子点 σ_j と σ_{j+1} の値によってその起こり得る相対確率 (Boltzmann 重率) が

$$\exp\left[K(2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}} - 1)\right], \qquad \delta_{a,b} = \begin{cases}1 & (a = b)\\0 & (a \neq b)\end{cases} \tag{32}$$

であるような模型を考える。この模型の周期境界条件 $(\sigma_N = \sigma_0)$ のもとでの分配関数 $Z_N^{(\mathrm{close})}$ を求めよ。

$$Z_N^{(\mathrm{close})} = \sum_{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{N-1}=0,1,2} \exp\left[K\sum_{j=0}^{N-1}(2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}} - 1)\right] \tag{33}$$

....

$2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}} - 1$ は次の 9 パターンの値がある。

$$2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}} - 1 = \begin{cases}1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (0, 0)\\-1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (0, 1)\\-1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (0, 2)\\-1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (1, 0)\\1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (1, 1)\\-1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (1, 2)\\-1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (2, 0)\\-1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (2, 1)\\1 & (\sigma_j, \sigma_{j+1}) = (2, 2)\end{cases} \tag{34}$$

そこで、$\Delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}} = K(2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}} - 1)$ とおくと、Δ は次のような式となる。

$$\Delta_{a,b} = \begin{cases}K & (a = b)\\-K & (a \neq b)\end{cases} \tag{35}$$

$a, b \in \{0,1,2\}$ のとき、次の式が得られる。

$$\sum_{\sigma=0,1,2} \exp[\Delta_{a,\sigma}] \exp[\Delta_{\sigma,b}] = \begin{cases} \exp[2K] + 2\exp[-2K] & (a = b) \\ \exp[-2K] + 2 & (a \neq b) \end{cases} \tag{36}$$

$N = 2$ の場合、$Z_2^{(\mathrm{close})}$ を計算する。

$$\begin{aligned}
Z_2^{(\mathrm{close})} &= \sum_{\sigma_0,\sigma_1=0,1,2} \exp\left[K \sum_{j=0}^{2-1} (2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}} - 1)\right] && (37)\\
&= \sum_{\sigma_0,\sigma_1=0,1,2} \exp\left[K(2\delta_{\sigma_0,\sigma_1} - 1)\right] \exp\left[K(2\delta_{\sigma_1,\sigma_2} - 1)\right] && (38)\\
&= \sum_{\sigma_0,\sigma_1=0,1,2} \exp\left[2K(2\delta_{\sigma_0,\sigma_1} - 1)\right] && (39)\\
&= 3\exp[2K] + 6\exp[-2K] && (40)
\end{aligned}$$

$N = 3$ の場合、$Z_3^{(\mathrm{close})}$ を計算する。

$$\begin{aligned}
Z_3^{(\mathrm{close})} &= \sum_{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2=0,1,2} \exp\left[K \sum_{j=0}^{3-1} (2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}} - 1)\right] && (41)\\
&= \sum_{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2=0,1,2} \prod_{j=0}^{2} \exp[\Delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}}] && (42)\\
&= \sum_{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2=0,1,2} \exp[\Delta_{\sigma_0,\sigma_1}] \exp[\Delta_{\sigma_1,\sigma_2}] \exp[\Delta_{\sigma_2,\sigma_3}] && (43)\\
&= \sum_{\sigma_0,\sigma_1=0,1,2} \sum_{\sigma_2=0,1,2} \exp[\Delta_{\sigma_0,\sigma_1}] \exp[\Delta_{\sigma_1,\sigma_2}] \exp[\Delta_{\sigma_2,\sigma_3}] && (44)
\end{aligned}$$

$\sigma_1 = 0$ のとき

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma_2=0,1,2} \exp[\Delta_{\sigma_0,0}] \exp[\Delta_{0,\sigma_2}] \exp[\Delta_{\sigma_2,\sigma_3}] && (45)\\
&= \exp[\Delta_{\sigma_0,0}](\exp[K]\exp[\Delta_{0,\sigma_3}] + \exp[-K]\exp[\Delta_{1,\sigma_3}] + \exp[-K]\exp[\Delta_{2,\sigma_3}]) && (46)\\
&= \exp[K]\exp[\Delta_{\sigma_0,0}]\exp[\Delta_{0,\sigma_3}] \\
&\qquad + \exp[-K](\exp[\Delta_{\sigma_0,0}]\exp[\Delta_{1,\sigma_3}] + \exp[\Delta_{\sigma_0,0}]\exp[\Delta_{2,\sigma_3}]) && (47)
\end{aligned}$$

$\sigma_1 = 1, 2$ の場合も同様に考え、それらの和を取ると次の式となる。

$$
\begin{aligned}
\sum_{\sigma_0=0,1,2} &(\exp[K](\exp[\Delta_{\sigma_0,0}]\exp[\Delta_{0,\sigma_3}] \\
&+ \exp[\Delta_{\sigma_0,1}]\exp[\Delta_{1,\sigma_3}] + \exp[\Delta_{\sigma_0,2}]\exp[\Delta_{2,\sigma_3}]) \\
&+ \exp[-K](\exp[\Delta_{\sigma_0,0}]\exp[\Delta_{1,\sigma_3}] + \exp[\Delta_{\sigma_0,0}]\exp[\Delta_{2,\sigma_3}] \\
&+ \exp[\Delta_{\sigma_0,1}]\exp[\Delta_{0,\sigma_3}] + \exp[\Delta_{\sigma_0,1}]\exp[\Delta_{2,\sigma_3}] \\
&+ \exp[\Delta_{\sigma_0,2}]\exp[\Delta_{0,\sigma_3}] + \exp[\Delta_{\sigma_0,2}]\exp[\Delta_{1,\sigma_3}])
\end{aligned} \tag{48}
$$

$$
= \exp[K](3\exp[2K] + 6\exp[-2K]) + \exp[-K](6\exp[-2K] + 12) \tag{49}
$$

$$
= 3\exp[3K] + 18\exp[-K] + 6\exp[-3K] \tag{50}
$$

$N = 4$ の場合、$Z_4^{(\mathrm{close})}$ を計算する。

$$
Z_4^{(\mathrm{close})} = \sum_{\sigma_0,\ldots,\sigma_3=0,1,2} \exp\left[K\sum_{j=0}^{4-1}(2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}} - 1)\right] \tag{51}
$$

$$
\tag{52}
$$

式 (35) を使って式を変形する。

$$
Z_N^{(\mathrm{close})} = \sum_{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{N-1}=0,1,2} \exp\left[K\sum_{j=0}^{N-1}(2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}} - 1)\right] \tag{53}
$$

$$
= \sum_{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{N-1}=0,1,2} \prod_{j=0}^{N-1} \exp[\Delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}}] \tag{54}
$$

$$
\begin{aligned}
= \sum_{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{N-1}=0,1,2} \left(\prod_{j=0}^{N-3} \exp[\Delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}}]\right) \sum_{\sigma_{N-1}=0,1,2} \\
\exp[\Delta_{\sigma_{N-2},\sigma_{N-1}}]\exp[\Delta_{\sigma_{N-1},\sigma_N}]
\end{aligned} \tag{55}
$$

$$
\begin{aligned}
= \sum_{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{N-2}=0,1,2} \left(\prod_{j=0}^{N-3} \exp[\Delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}}]\right) (\exp[\Delta_{\sigma_{N-2},0}]\exp[\Delta_{0,\sigma_N}] \\
+ \exp[\Delta_{\sigma_{N-2},1}]\exp[\Delta_{1,\sigma_N}] + \exp[\Delta_{\sigma_{N-2},2}]\exp[\Delta_{2,\sigma_N}])
\end{aligned} \tag{56}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{\sigma_{N-2}=0,1,2} &\exp[\Delta_{\sigma_{N-3},\sigma_{N-2}}](\exp[\Delta_{\sigma_{N-2},0}]\exp[\Delta_{0,\sigma_N}] \\
&+ \exp[\Delta_{\sigma_{N-2},1}]\exp[\Delta_{1,\sigma_N}] + \exp[\Delta_{\sigma_{N-2},2}]\exp[\Delta_{2,\sigma_N}])
\end{aligned} \tag{57}
$$

$$\sum_{i=0,1,2} \exp[\Delta_{\sigma_{N-3},i}] \left(\sum_{j=0,1,2} \exp[\Delta_{i,j}] \exp[\Delta_{j,\sigma_N}] \right) \tag{58}$$

$$= \sum_{i=0,1,2} \sum_{j=0,1,2} \exp[\Delta_{\sigma_{N-3},i}] \exp[\Delta_{i,j}] \exp[\Delta_{j,\sigma_N}] \tag{59}$$

$$\begin{aligned} = \sum_{i=0,1,2} \exp[\Delta_{\sigma_{N-3},i}](&\exp[\Delta_{i,0}] \exp[\Delta_{0,\sigma_N}] \\ &+ \exp[\Delta_{i,1}] \exp[\Delta_{1,\sigma_N}] + \exp[\Delta_{i,2}] \exp[\Delta_{2,\sigma_N}]) \end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned} =& \exp[K](\exp[\Delta_{\sigma_{N-3},0}] \exp[\Delta_{0,\sigma_N}] \\ &\quad + \exp[\Delta_{\sigma_{N-3},1}] \exp[\Delta_{1,\sigma_N}] + \exp[\Delta_{\sigma_{N-3},2}] \exp[\Delta_{2,\sigma_N}]) \\ &+ \exp[-K](\exp[\Delta_{\sigma_{N-3},0}](\exp[\Delta_{1,\sigma_N}] + \exp[\Delta_{2,\sigma_N}]) \\ &\quad + \exp[\Delta_{\sigma_{N-3},1}](\exp[\Delta_{0,\sigma_N}] + \exp[\Delta_{2,\sigma_N}]) \\ &\quad + \exp[\Delta_{\sigma_{N-3},2}](\exp[\Delta_{0,\sigma_N}] + \exp[\Delta_{1,\sigma_N}])) \end{aligned} \tag{61}$$

これに $\exp[\Delta_{\sigma_{N-4},\sigma_{N-3}}]$ をかけて、$\sigma_{N-3} = 0, 1, 2$ で和を考える。

$Z_N^{(\mathrm{close})}$ を計算する。

exp の中は次のように変形できる。

$$K \sum_{j=0}^{N-1} (2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}} - 1) = 2K \sum_{j=0}^{N-1} \delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}} - NK \tag{62}$$

これを用いて $Z_N^{(\mathrm{close})}$ を次のように変形する。

$$Z_N^{(\mathrm{close})} = \sum_{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{N-1}=0,1,2} \exp\left[K \sum_{j=0}^{N-1} (2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}} - 1) \right] \tag{63}$$

$$= \exp[-NK] \sum_{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{N-1}=0,1,2} \prod_{j=0}^{N-1} \exp\left[2K\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}}\right] \tag{64}$$

後方の 3 つだけ取り出して計算する。

$$\sum_{\sigma_{N-2},\sigma_{N-1}=0,1,2} \prod_{i=N-3}^{N-1} \exp[2K\delta_{\sigma_i,\sigma_{i+1}}] \tag{65}$$

$$\begin{aligned} =& \exp[2K] \sum_{l=0}^{2} \exp[2K\delta_{\sigma_{N-3},l}] \exp[2K\delta_{l,\sigma_N}] \\ &+ \sum_{m=0}^{2} \sum_{\substack{n=0,1,2 \\ m \neq n}} \exp[2K\delta_{\sigma_{N-3},m}] \exp[2K\delta_{n,\sigma_N}] \end{aligned} \tag{66}$$

これに $\exp[2K\delta_{\sigma_{N-4},\sigma_{N-3}}]$ をかけ、$\sigma_{N-3}=0,1,2$ で和を考える。

$$\sum_{\sigma_{N-3}=0}^{2}\exp[2K\delta_{\sigma_{N-4},\sigma_{N-3}}]\exp[2K\delta_{\sigma_{N-3},l}] \tag{67}$$

$$=\exp[2K\delta_{\sigma_{N-4},l}]\exp[2K]+\sum_{\sigma_{N-3}\neq l}\exp[2K\delta_{\sigma_{N-4},\sigma_{N-3}}] \tag{68}$$

$$\sum_{\sigma_{N-3},\ldots,\sigma_{N-1}=0,1,2}\prod_{i=N-4}^{N-1}\exp[2K\delta_{\sigma_i,\sigma_{i+1}}] \tag{69}$$

$$\begin{aligned}&=\exp[2K]\sum_{l=0}^{2}\exp[2K\delta_{\sigma_{N-3},l}]\exp[2K\delta_{l,\sigma_N}]\\&\quad+\sum_{\substack{m,n=0,1,2\\ m\neq n}}\exp[2K\delta_{\sigma_{N-3},m}]\exp[2K\delta_{n,\sigma_N}]\end{aligned} \tag{70}$$

$$Z_N^{(\mathrm{close})}=\sum_{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{N-1}=0,1,2}\exp\left[K\sum_{j=0}^{N-1}(2\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}}-1)\right] \tag{71}$$

$$=\exp[-NK]\sum_{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{N-1}=0,1,2}\prod_{j=0}^{N-1}\exp\left[2K\delta_{\sigma_j,\sigma_{j+1}}\right] \tag{72}$$

$$Z_N^{(\mathrm{close})}=3\exp[NK]+\cdots+3\exp[-NK] \tag{73}$$
