# $\sigma$ -加法族

集合 X の集合族  $\Sigma$  が「 $\sigma$ -加法族である」とは次を満たすときをいう。

- 1.  $X \in \Sigma$
- 2.  $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$
- 3.  $A_i \in \Sigma \ (i \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$

# 生成される $\sigma$ -加法族

X の部分集合族 A について、A を含む最小の σ-加法族を  $σ_X(A)$  と表す。

$$\sigma_X(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{M}: \sigma\text{-}m \not \succeq k \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{M}}} \mathcal{M} \tag{1}$$

#### ボレル $\sigma$ -加法族

 $(X,\mathcal{O})$  を位相空間とする。 $\sigma_X(\mathcal{O})$  を X 上のボレル  $\sigma$ -加法族といい、 $\mathcal{B}(X)$  と表す。  $\mathcal{B}(X)$  の元のことをボレル集合という。

### 演習問題 3.4.

 $\mathbb{R}$  には通常の位相を入れるものとし、 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  を連続関数とする。また、 $\mathbb{R}$  の部分集合 A に対し、 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$  とする。

- 1. K を  $\mathbb R$  のコンパクト集合とするとき、f(K) も  $\mathbb R$  のコンパクト集合になることを示せ。
- 2.  $f(\mathbb{R})$  は  $\mathbb{R}$  のボレル集合であることを示せ。

.....

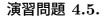
1. f(K) の任意の開被覆  $\{U_{\lambda}\}_{{\lambda}\in\Lambda}$  をとってくる。

関数 f は連続であるので、 $f^{-1}(U_{\lambda})$  は開集合である。よって、 $\{f^{-1}(U_{\lambda})\}$  は K の 開被覆である。

K はコンパクトであるので、この開被覆は有限個  $\{f(U_{\lambda_k})\}$  を選ぶことが出来る。

$$K = \bigcup_{k=1}^{n} f(U_{\lambda_k}) \tag{2}$$

これにより  $\{U_{\lambda_k}\}$  が f(K) の有限開被覆となり、f(K) がコンパクトであることになる。



 $(X, \mathcal{M})$  を可測空間とし、 $f, g: X \to \mathbb{R}$  は  $\mathcal{M}$ -可測であるとする。

このとき、 $\{x \in X \mid f(x) < g(x)\} \in \mathcal{M}$  であることを示せ。

.....

区間  $I_{\alpha} \subset \mathbb{R}$  を次のように定義する。

$$I_{\alpha} = \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid -\infty \le x \le \alpha \} \tag{3}$$

f,g は  $\mathcal{M}$ -可測であるので、任意の  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して  $f^{-1}(I_{\alpha}), g^{-1}(I_{\alpha}) \in \mathcal{M}$  である。

# 演習問題 4.6.

 $(X,\mathcal{M})$  を可測空間とし、 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  を X 上の  $\mathbb{R}$ -値関数の列とする。 $\forall n \in \mathbb{N}$  に対し、 $f_n$  が  $\mathcal{M}$ -可測であることを仮定する。

$$E = \left\{ x \in X \mid \lim_{n \to \infty} f_n \mathfrak{N}(\overline{\mathbb{R}} \cap \mathcal{E}) \right\}$$
 (4)

とおくとき、 $E \in \mathcal{M}$  であることを示せ。

.....