$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&a&0\\-2&-1&a\end{pmatrix}\tag{1}$$

上記連立方程式が自明でない解をもつときの a の値を求め、その時の解を求めよ。

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-z\\x+ay\\-2x-y+az\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x-z=0\\x+ay=0\\-2x-y+az=0\end{cases}\tag{2}$$

最初の式から $x=z$ を満たすことがわかるので、z を x に置き換えると $x+ay=0,(a-2)x-y=0$ となる。ここから y を代入し消去すると

$$x+a(a-2)x=0\ \Leftrightarrow\ x(a^2-2a+1)=0\ \Leftrightarrow\ x(a-1)^2=0\tag{3}$$

$x(a-1)^2=0$ より $x=0$ または $a=1$ である。
$x=0$ の時、$y=0,z=0$ となる為、自明な解である。
そこで、$a=1$ の場合を考える。この時の行列 A の階数は 2 である。

$$\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\-2&-1&1\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=2\tag{4}$$

その為、A は退化し、方程式の解は 1 次元の解空間となる。
$x=z,y=(a-2)x$ であるので、方程式の解は次のようになる。

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\(a-2)x\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-x\\x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\tag{5}$$

x は任意の数でいいので定数 c を用いると次のようになる。

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\tag{6}$$