Laplacian

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} \tag{1}$$

Report 1.12

U は連結とする。関数 u は U 上で C^2-級、$\overline{U}$ 上で C^1-級であり、次を満たしているとする。

$$\Delta u = 0 \ (\text{in } U), \ u = g \ (\text{on } \partial U, \ g \geq 0) \tag{2}$$

g が ∂U 上のどこかで正であるなら u は U 内で常に正であることを示せ。

. . . .

$\overline{U}$ 上で C^1-級であるので、u は連続である。この為、ある点 $x_0 \in \overline{U}$ が存在し、$u(x_0)$ は最小となる。つまり、$u(x_0) \leq u(x)$ $({}^\forall x \in \overline{U})$ である。

もし、$x_0 \in \partial U$ であれば、$u(x_0) = g(x_0) \geq 0$ であり、$0 \leq u(x_0) \leq u(x)$ となる。

もし、$x_0 \in U$ であれば、u は U で定数関数となる。∂U にて $g \leq 0$ なる点があるので $u \geq 0$ である。

Report 1.13

$$\tilde{u} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy \tag{3}$$

$n = 2$ のとき、$\tilde{u}$ は有界ではないことを示せ。

. . . .

調和関数 $\Phi(x)$ は $n = 2$ において $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \log |x|$ である。

$|x|$ がそれぞれ 0 と ∞ に飛ばした場合、$\Phi(x) \to \infty$ $(|x| \to 0)$ と $\Phi(x) \to -\infty$ $(|x| \to \infty)$ であるので、$|\Phi(x)| \to \infty$ である。

$$\tilde{u} = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(y) f(x-y) dy \tag{4}$$

Report 1.14

$n = 2, \ N = 3$ のとき、次の式を示せ。

$$u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \tag{5}$$

. . . .
