
ハウスドルフ空間、T_2-空間

位相空間 X において、任意の異なる 2 点 $a, b \in X,\ a \neq b$ をとってくる。それぞれの近傍 $U_a(\ni a),\ U_b \ni b$ が存在し $U_a \cap U_b = \emptyset$ である時、X をハウスドルフ空間 または T_2-空間という。

T_1-空間

位相空間 X において、任意の点 $a \in X$ の近傍 U_a が次を満たすように存在するとき X を T_1-空間という。

$$b \in X, b \neq a \text{ に対し } b \notin U_a \tag{1}$$

距離空間の分離公理

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ はハウスドルフ空間 (T_2-空間) であることを示せ。

....

$a, b \in \mathbb{R}^n,\ a \neq b$ とし、2 点間の距離 $d(a, b) = l > 0$ とする。

ここで、a, b のそれぞれの開近傍を $U(a, \frac{l}{2}),\ U(b, \frac{l}{2})$ とすると、$U(a, \frac{l}{2}) \cap U(b, \frac{l}{2}) = \emptyset$ であるので、$\mathbb{R}^n$ はハウスドルフ空間である。

---

3 点集合の分離公理

3 点集合の位相のうち、T_1-空間となるものをすべて答えよ。

....

$X = \{a, b, c\}$ とする。この時、部分集合は次の 8 個である。

$$\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a, b\},\ \{b, c\},\ \{c, a\},\ X \tag{2}$$

T_1-空間は任意の点に対してその他の点を含まない近傍が存在する。

例えば、$a \in X$ の近傍で $b \in X$ を含まないものとなると $\{a\}$ または $\{a, c\}$ が開集合でないといけない。$a \in X$ の近傍で $c \in X$ を含まないものとなると $\{a\}$ または $\{a, b\}$ が開集合でないといけない。ここから $\{a\}$ が開集合であるか、$\{a\}$ が開集合でないなら $\{a, b\}, \{a, c\}$ が開集合でないといけない。もし、$\{a, b\}, \{a, c\}$ が開集合であるなら、開集合の公理から $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$ となるので、$\{a\}$ が開集合であることになる。よって、$a \in X$ の近傍を考えると $\{a\}$ は開集合となる。

同様に $b \in X$ の近傍と $c \in X$ の近傍を考えると $\{b\}, \{c\}$ が開集合となる。

$X = \{a, b, c\}$ に対し、$\{a\}, \{b\}, \{c\}$ が開集合であれば、$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}, \{b\} \cup \{c\} = \{b, c\}, \{c\} \cup \{a\} = \{c, a\}$ も開集合となり、位相 $\mathcal{O}$ の要素はすべての部分集合となる。

つまり、$X = \{a, b, c\}$ の T_1-空間となる位相は離散位相のみとなる。

ハウスドルフ空間の商空間

一般にハウスドルフ空間の商空間はハウスドルフ空間にならないことを例を用いて示せ。

. . . .

$S = \{a, b\}$ とし、実数 $\mathbb{R}$ から S への全射を次のように定義する。

$$f : \mathbb{R} \to S, \quad x \mapsto \begin{cases} a & (x = 0) \\ b & (x \neq 0) \end{cases} \tag{3}$$

$\mathbb{R}$ の位相は距離空間から定義される位相が入っているとする。この場合、$\mathbb{R}$ はハウスドルフ空間である。

S には商位相を導入する。つまり、S の部分集合 U は $f^{-1}(U)$ が $\mathbb{R}$ の開集合である時に開集合である。

今、S の部分集合は次の 4 つ。

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, S \tag{4}$$

これらの逆像はつぎのようになる。

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset,\ f^{-1}(\{a\}) = \{0\},\ f^{-1}(\{b\}) = \mathbb{R}\backslash\{0\},\ f^{-1}(S) = \mathbb{R} \tag{5}$$

この時、$\emptyset, \mathbb{R}\backslash\{0\}, \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ の開集合であるので、$\emptyset, \{b\}, S$ が S の開集合である。しかし、$\{a\}$ は S の開集合ではないので、S はハウスドルフ空間ではない。
