固有値を使った計算

$$5x^2+4xy+2y^2=0 \tag{1}$$

式を次のように行列で表す。

$$5x^2+4xy+2y^2=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \tag{2}$$

2 次正方行列は対称行列であるので直交行列 P $(P^{-1}={}^tP)$ を用いて対角化したものが次の式である。

$$P\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}{}^tP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix} \tag{3}$$

式を変形する。

$$\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}={}^tP\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}P \tag{4}$$

これを式 (2) に当てはめる。

$$\begin{aligned}5x^2+4xy+2y^2&=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} &(5)\\ &=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}{}^tP\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} &(6)\\ &={}^t\left(P\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\left(P\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right) &(7)\end{aligned}$$

X,Y を次のようにおく。

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \tag{8}$$

これを式 (7) に当てはめると次の式が得られる。

$${}^t\left(P\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\left(P\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)={}^t\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=X^2+6Y^2 \tag{9}$$

以上により $5x^2+4xy+2y^2=0$ は座標変換 $\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ によって $X^2+6Y^2=0$ となる。
