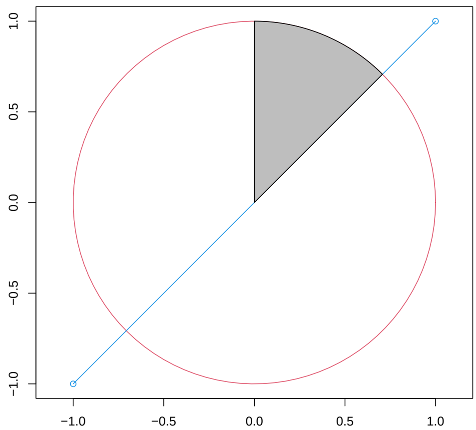
1. 次の積分値を求めよ。

(a)

$$\iint_D (x^2 - y^2)dxdy, \quad D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\} \tag{1}$$

D ⊂ $\mathbb{R}^2$ とする。領域 D は次のような円の一部である。



y を先に積分する場合、y の積分範囲は直線 $y = x$ 上の点から円周上の点の区間となる。

$$\iint_D (x^2 - y^2)dxdy = \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 - y^2)dydx \tag{2}$$

x を先に積分する場合は積分を分けて考える必要がある。

極座標に変換する場合、$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と置く。それぞれの積分範囲は $r : 0 \to 1,\ \theta : \pi/4 \to \pi/2$ であり、ヤコビ行列式より $dxdy = rdrd\theta$ である。

$$\iint_D (x^2 - y^2)dxdy = \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta) \cdot rd\theta dr \tag{3}$$

$r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = r^2\cos 2\theta$ であるので、積分は次のように計算できる。

$$\iint_D (x^2 - y^2)dxdy = \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos 2\theta \cdot r d\theta dr = \int_0^1 r^3 dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta \quad (4)$$

$$= \left[\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=1} \left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} \quad (5)$$

(b)

$$\iiint_E \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dxdydz, \quad E = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\} \quad (6)$$

....

$E \subset \mathbb{R}^3$ とする。

領域 E は $z \geq 0$ の範囲で切り取られた半球である。

次のように極座標変換を行う。

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta \quad (7)$$

E より r, θ, φ の積分範囲は次のようになる。

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (8)$$

ヤコビアンを計算する。

$$\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}\right| = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin\theta \quad (9)$$

これにより $dxdydz = r^2 \sin\theta\ drd\theta d\varphi$ となる。

変数変換により $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r,\ x^2 + y^2 = r^2 \sin^2\theta$ であるので、問題の式は次のようになる。

$$\iiint_E \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dxdydz = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r \sin^2\theta \cdot r^2 \sin\theta\ d\varphi d\theta dr \quad (10)$$

3 倍角の公式 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ を利用し計算を行う。

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^3 \sin^3\theta \; d\varphi d\theta dr \tag{11}$$

$$= \int_0^1 r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \tag{12}$$

$$= \left[\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=1} \left[-\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{12}\cos 3\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} [\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \tag{13}$$

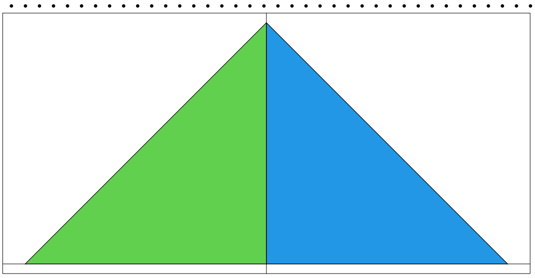
$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12}\right) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3} \tag{14}$$

---

2. 次の積分の順序を交換せよ。ただし、f は積分の順序を交換できる関数とする。

(a)

$$\int_{-1}^{0} dx \int_0^{1+x} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy \tag{15}$$



1 つ目の積分範囲は $-1 \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq 1+x$ であり、2 つ目の積分範囲は $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x$ である。図では 1 つ目の積分領域が緑、2 つ目は青である。

問いの積分は y について積分してから x について積分をする。縦向けの積分なので、$y=0$ から $y=1+x$ または $y=1-x$ までの積分となるため 2 つに分けている。先に横向けの積分を行えば一つにまとめることができる。

x は $y=1+x$ から $y=1-x$ まで区間で積分をして、そのあと、y は 0 から 1 に積分をする。

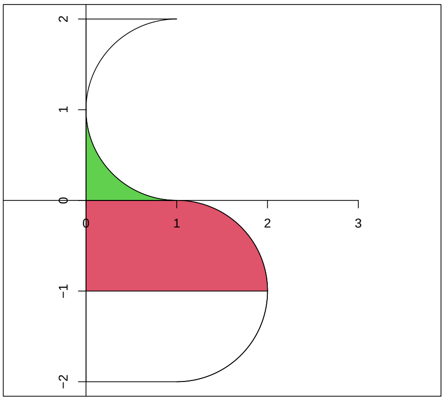
$$\int_{-1}^{0} dx \int_0^{1+x} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy \tag{16}$$

$$= \int_0^1 \int_{y-1}^{-y+1} f(x,y)dxdy \tag{17}$$

(b)

$$\int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{1+\sqrt{1-(y+1)^2}} f(x,y)dx + \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{1-\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)dx \tag{18}$$

....



1 つ目の積分範囲は $-1 \leq y \leq 0,\ 0 \leq x \leq 1+\sqrt{1-(y+1)^2}$ である。$0 \leq x \leq 1+\sqrt{1-(y+1)^2}$ は中心 $(1,-1)$ で半径 1 の円の右半分から y 軸までの領域を指しており、$-1 \leq y \leq 0$ で範囲を制限したものが、上の図の下側の図形 (赤) である。

2 つ目の積分範囲は $0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq 1-\sqrt{1-(y-1)^2}$ である。$0 \leq x \leq 1-\sqrt{1-(y-1)^2}$ は中心 $(1,1)$ で半径 1 の円の左半分から y 軸までの領域を指しており、$0 \leq y \leq 1$ に制限したものが、上の図の上側の図形 (緑) である。

変数 y について先に積分した後、x について積分を行うので、$0 \leq x \leq 1$ と $1 \leq x \leq 2$ の二つに分けて考える。

$0 \leq x \leq 1$ の範囲では $-2 \leq y \leq 1-\sqrt{1-(x-1)^2}$ であるので、積分は次の式で表せる。

$$\int_{0}^{1} \int_{-2}^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y)dydx \tag{19}$$

$1 \leq x \leq 2$ の範囲では $-2 \leq y \leq -1+\sqrt{1-(x-1)^2}$ であるので、積分は次の式で表せる。

$$\int_{1}^{2} \int_{-2}^{-1+\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y)dydx \tag{20}$$

よって、積分順を入れ替えると次のようになる。

$$\int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{1+\sqrt{1-(y+1)^2}} f(x,y)dx + \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{1-\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)dx \quad (21)$$

$$= \int_{0}^{1} dx \int_{-2}^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y)dy + \int_{1}^{2} dx \int_{-2}^{-1+\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y)dy \quad (22)$$