**線形代数 置換 互換**

$n$ 次の置換 $\sigma$ に対し、以下を満たす自然数の組 $(i,j)$ の個数を $f(\sigma)$ とする。

$$1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j) \tag{1}$$

このとき、$\sigma$ が奇置換 $\Leftrightarrow$ $f(\sigma)$ が奇数を示せ。

.......................................................................................

$\sigma$ が奇置換とする。

$i$ と $j$ を入れ替える互換を $(i,j)$ とすると、$\sigma$ は奇数個の互換の積で表せる。

つまり、次を満たす $i,j$ の組が奇数個存在する。

$$1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j) \tag{2}$$

よって、$f(\sigma)$ が奇数となることがわかる。

.......................................................................................

逆に $f(\sigma)$ が奇数であるとする。

置換 $\sigma$ は

$$1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j) \tag{3}$$

を満たすものが奇数個あるということである。

これを満たす $i,j$ で互換 $(i,j)$ を作れば $\sigma$ はこの $(i,j)$ の積で表せる。

つまり、奇数個の互換の積で表せるため、奇置換ということがわかる。