1

関数 $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ を三角関数を用いて $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx}$ と Fourier 級数展開を出来るか考える。

「f は可積分」、「$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$ は絶対収束」という仮定の下では $\widehat{f}(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x$ と求めることが出来る。

これにより $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$ が収束するが、級数は $f(x)$ と一致するかは不明である。

関数 f によっては、その Fourier 級数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx}$ が収束しない例もあり、級数の収束するかと収束先が $f(x)$ であるかを考える必要がある。

2

Poisson の定理 ($^\forall f \in C_{per}[-\pi, \pi]$ に対して、$P_r f \xrightarrow{r\nearrow 1} f$(一様収束)) を利用し、$f \in C^2_{per}[-\pi, \pi]$ ならばフーリエ級数 $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$ に展開できる事が示せる。

これにより $f \in C^2_{per}[-\pi, \pi]$ は Fourier 展開が出来るための十分条件ではあるが、$C^2_{per}[-\pi, \pi]$ ではない関数でも Fourier 展開が可能なものもある。

3

$f \in C^2_{\mathrm{per}}[-\pi, \pi]$ であれば、Fourier 展開 $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx}$ が出来るが、$f \in C^1_{\mathrm{per}}[-\pi, \pi]$ の時もこのように展開ができる事が示せる。

まず、$C_{\mathrm{per}}[-\pi, \pi]$ に内積を定義し、内積から距離を定義する。この距離において Bessel の不等式 $\left\| \sum_{n=-M}^{N} \hat{f}(n) e_n \right\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$ $(e_n(x) := e^{inx})$ が成立する。この不等式を利用することで $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) < \infty$ ということが示せ、C^1 関数の Fourier 展開ができることがわかる。

$f \in C_{\mathrm{per}}[-\pi, \pi]$ の場合は先程定義した距離においての収束を考えることで Fourier 展開ができる。

$p < \infty$ において $L^p(\mu)$ のコーシー列は概収束する部分列を持つことから収束することがわかる。

$L^\infty(\mu)$ のコーシー列は esssup を考えることにより収束することがわかる。よって、$L^p(\mu)$ は完備な距離空間である。

これにより、$\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e_n$ は距離 $\|\cdot\|_2$ により収束する。