1. S_3 を 3 次置換群とする。f を S_3 から $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ への準同型写像とする。
このとき、任意の $\sigma \in S_3$ に対して、$f(\sigma) = \bar{0}$ であることを示せ。ただし、$\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ の元のことを $\bar{x}$ $(x \in \mathbb{Z})$ のように書く。

$^\forall\sigma \in S_3$ に対して、$\sigma^6 = e$ (単位元) である。
f は加法群 $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ への準同型であるので、$f(e) = \bar{0}$ である。$f(\sigma^6) = 6f(\sigma)$ であるので、$6f(\sigma) = \bar{0}$ である。
$^\forall\bar{m} \in \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ に対して、$\bar{m}$ の位数は 19 の約数である。
$f(\sigma) \in \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ であるので、位数は 19 の約数だが、$6f(\sigma) = \bar{0}$ であるので、$f(\sigma)$ の位数は 6 と 19 の公約数となる。
よって、位数が 1 となることがわかるので、$f(\sigma) = \bar{0}$ である。

2. 群 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ を考える。$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ の元のことを $\bar{x}$ $(x \in \mathbb{Z})$ のように書く。
$\bar{a} \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ に対して、群の準同型 $f_{\bar{a}}$ を次のように定義する。

$$f_{\bar{a}} : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \qquad \bar{x} \mapsto \bar{a} \cdot \bar{x} (= \overline{ax}) \tag{1}$$

このとき、$f_{\bar{a}}$ が群 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ の自己同型写像になるような $\bar{a} \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ は合計何個あるか答えよ。
¶ 群 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ の自己同型写像とは、$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ への群の同型写像のこと。

$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \bar{7}\}$ は有限の加法群である。よって、$f_{\bar{a}}$ が単射であれば全射となるので、全単射であることがいえる。
よって、単射である性質 $\mathrm{Ker} f_{\bar{a}} = \{\bar{0}\}$ について調べる。
$f_{\bar{a}}(\bar{0}) = \bar{a}\bar{0} = \bar{0}$ であるので、$\bar{x} \neq \bar{0}$ に対して $f_{\bar{a}}(\bar{x}) \neq \bar{0}$ となればよい。
$\bar{0}$ は 8 の倍数であるので、$\bar{x} = \bar{1}, \ldots, \bar{7}$ に対して ax が 8 の倍数にならないときの a を求めればよい。
つまり、奇数の場合 $f_{\bar{1}}, f_{\bar{3}}, f_{\bar{5}}, f_{\bar{7}}$ は自己同型写像である。
$f_{\bar{0}}(\bar{1}) = \bar{0}, f_{\bar{2}}(\bar{4}) = \bar{0}, f_{\bar{4}}(\bar{2}) = \bar{0}, f_{\bar{6}}(\bar{4}) = \bar{0}$ であるので、これらは単射ではない。
よって、自己同型写像となるのは 4 つ $f_{\bar{1}}, f_{\bar{3}}, f_{\bar{5}}, f_{\bar{7}}$ である。