問題 14.2

行列 A に対して A^n を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

A の Jordan 標準形と正則行列 P は次のようになる。

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{27} & \frac{5}{27} \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \\ 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}, \qquad A = P \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \tag{2}$$

Jordan 標準形の n 乗を考える。

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ 0 & a_n & b_n \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

行列 D^n の 0 でない成分を a_n, b_n, c_n とおき、この数列の一般項を求める。

$a_n = 2^n$ であるので、D^{n+1} は次のようになる。

$$D^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & b_n & c_n \\ 0 & 2^n & b_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n + 2b_n & b_n + 2c_n \\ 0 & 2^n & 2^n + 2b_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \tag{4}$$

初項 $b_1 = 1$ である漸化式 $b_{n+1} = 2^n + 2b_n$ を解く。

$$b_{n+1} = 2^n + 2b_n \tag{5}$$
$$\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} + \frac{2b_n}{2^{n+1}} \tag{6}$$

これにより数列 $\frac{b_n}{2^n}$ は初項 $\frac{1}{2}$、公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列である。よって、b_n の一般項は $b_n = 2^{n-1}n$ となる。

これを用いて初項 $c_1 = 0$ である漸化式 $c_{n+1} = 2^{n-1}n + 2c_n$ を解く。

$$c_{n+1} = 2^{n-1}n + 2c_n \tag{7}$$
$$\frac{c_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2^{n-1}n}{2^{n+1}} + \frac{2c_n}{2^{n+1}} \tag{8}$$
$$\frac{c_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{n}{4} + \frac{c_n}{2^n} \tag{9}$$

これにより階差数列 $\frac{c_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{c_n}{2^n}$ は初項 $\frac{1}{4}$、差 $\frac{n}{4}$ である。よって、c_n の一般項は次のように求まる。

$$\frac{c_n}{2^n} = \frac{c_1}{2^1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{4} = \frac{n(n-1)}{8} \tag{10}$$

$$c_n = 2^{n-3} n(n-1) \tag{11}$$

よって、A^n は次のように計算できる。

$$A^n = P \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 2^{n-3}n(n-1) \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \tag{12}$$

問題 14.3

A を n 次複素正方行列とする。A の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$(重複あり) とし、$\rho(A)$ を次のように定める。

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\} \tag{13}$$

$\rho(A) < 1$ のとき、$\lim_{k\to\infty} A^k = 0$ であることを示せ。

....

A が対角か可能である場合、A^k は次のように表せる。

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} \tag{14}$$

$\rho(A) < 1$ より対角行列の n 乗は k が大きくなると 0 に収束する。よって、$\lim_{k\to\infty} A^k = 0$ となる。

A が対角か可能でない場合、Jordan 標準形を考える。

$$A^k = P \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1)^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{m_n}(\lambda_n)^k \end{pmatrix} P^{-1} \tag{15}$$

A^k は Jordan 細胞の k 乗という形で表現できる。

固有値 0 の Jordan 細胞 $J_m(0)$ は冪零行列であるので、固有値は 0 でない場合を考える。

$J_m(\lambda)^k$ の各成分を計算する。

$$J_m(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_{(1)_k} & a_{(2)_k} & a_{(3)_k} & \cdots & a_{(m)_k} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{(3)_k} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{(2)_k} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{(1)_k} \end{pmatrix} \tag{16}$$

左下は常に 0 であるので、右上の成分を数列 $a_{(i)_k}$ $(i = 1, \ldots, m)$ で表している。これを利用し $k+1$ 乗を計算する。

$$J_m(\lambda)^{k+1} = \begin{pmatrix} a_{(1)_k} & a_{(2)_k} & a_{(3)_k} & \cdots & a_{(m)_k} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{(3)_k} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{(2)_k} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{(1)_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_{(1)_k} & a_{(1)_k} + \lambda a_{(2)_k} & a_{(2)_k} + \lambda a_{(3)_k} & \cdots & a_{(m-1)_k} + \lambda a_{(m)_k} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{(2)_k} + \lambda a_{(3)_k} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{(1)_k} + \lambda a_{(2)_k} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda a_{(1)_k} \end{pmatrix} \tag{18}$$

ここから次の漸化式を解くことで $J_m(\lambda)^k$ の成分が求まる。

- $a_{(1)_{k+1}} = \lambda a_{(1)_k}$、　初項 $a_{(1)_1} = \lambda$
- $a_{(2)_{k+1}} = a_{(1)_k} + \lambda a_{(2)_k}$、　初項 $a_{(2)_1} = 1$
- $a_{(3)_{k+1}} = a_{(2)_k} + \lambda a_{(3)_k}$、　初項 $a_{(3)_1} = 0$
- $a_{(4)_{k+1}} = a_{(3)_k} + \lambda a_{(4)_k}$ 、　初項 $a_{(4)_1} = 0$

  $\vdots$
- $a_{(m)_{k+1}} = a_{(m-1)_k} + \lambda a_{(m)_k}$ 、　初項 $a_{(m)_1} = 0$

数列の一般項は次のようになる。

$$a_{(1)_k} = \lambda^k \qquad a_{(2)_k} = k\lambda^{k-1} \qquad a_{(3)_k} = \frac{1}{2}k(k-1)\lambda^{k-2} \tag{19}$$

これらは $|\lambda| < 1$ の範囲で、k を大きくすると 0 に収束する。

A が n 次正方行列であるので、数列 $a_{(i)_k}$ は最大で n 種類 $(a_{(1)_k}, a_{(2)_k}, \ldots, a_{(n)_k})$ であるので、$a_{(n)_k}$ の一般項は k^n の式と λ^k の式の積で表される。(ランダウの記号で書けば $O(k^n)$ と $O(\lambda^k)$)

よって、$J_m(\lambda)^k$ の各成分は k を大きくすると 0 に収束する。つまり次の式が成り立つ。

$$\lim_{k \to \infty} J_m(\lambda)^k = 0 \tag{20}$$

よって、式 (15) の Jordan 細胞は零行列に収束する。

つまり、次が成り立つ。

$$\rho(A) < 1 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} A^k = 0 \tag{21}$$
