
微分方程式

- $$y' = f(x)y \tag{1}$$

  両辺を y で割り、左辺が対数の微分の形になっているのでこれを積分することで右辺も不定積分の形にできる。

  $$\frac{y'}{y} = f(x) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log y = f(x) \qquad \log y = \int f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

- $$y' = f(x)y + g \tag{3}$$

  後ろに余計なものがある場合、最初に特殊解 $\bar{y}$ を求める。特殊解 $\bar{y}$ とは $\bar{y}' = f(x)\bar{y} + g$ を満たす式のことである。
  特殊解の求め方は g によって異なる。g が多項式であれば y も同じ次数の多項式と仮定して考える。g が定数なら y も定数だとして考える。
  特殊解が見つかれば

  $$y' = f(x)y + g \qquad \bar{y}' = f(x)\bar{y} + g \tag{4}$$

  この 2 つの式の差を取ることで、g が消えて次の式になる。

  $$y' - \bar{y}' = f(x)(y - \bar{y}) \tag{5}$$

  $Y = y - \bar{y}$ とおくと $Y' = f(x)Y$ である。この形が、$y' = f(x)y$ と同じなので、同様の方法で Y が求まりここから解は $y = Y + \bar{y}$ となる。

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

後ろに定数のベクトルがついているので、$x(t), y(t)$ を定数だと仮定し、特殊解を求める。

$x'(t),\ y'(t)$ は定数を微分している為、ともに 0 となる。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

この連立方程式の解 $(x, y) = (1, 1)$ を特殊解とし、2 つの式の差を求める。

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) - 1 \\ y(t) - 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

これを $X(t) = x(t) - 1,\ Y(t) = y(t) - 1$ と置いて次の式になる。

$$\begin{pmatrix} X'(t) \\ X'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \tag{9}$$