$a \in \mathbb{Z}$ で、$a \neq 1, -3, -5$ とする。この時、$x^3 + ax + 2$ は既約 $\mathbb{Z}$-多項式であることを示せ。

. . . .

$x^3 + ax + 2$ はモニック多項式であるので、次数が 0 と 3 の式に分けることはない。

つまり、$x^3 + ax + 2 = fg$ となる $\deg f = 1, \deg g = 2$ があるとする。f, g は次のような式とする。

$$f = x + \alpha_0, \quad g = x^2 + \beta_1 x + \beta_0 \qquad \alpha_0, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

fg を計算する。

$$fg = (x + \alpha_0)(x^2 + \beta_1 x + \beta_0) \tag{2}$$

$$= x^3 + (\alpha_0 + \beta_1)x^2 + (\alpha_0\beta_1 + \beta_0)x + \alpha_0\beta_0 \tag{3}$$

$x^3 + ax + 2 = fg$ より次の 3 つの式が得られる。

$$\alpha_0 + \beta_1 = 0, \quad \alpha_0\beta_1 + \beta_0 = a, \quad \alpha_0\beta_0 = 2 \tag{4}$$

$\alpha_0\beta_0 = 2$ を満たす整数の組は次の 4 つである。

$$(\alpha_0,\ \beta_0) = (1, 2),\ (2, 1),\ (-1, -2),\ (-2, -1) \tag{5}$$

$\alpha_0 + \beta_1 = 0$ より $\beta_1 = -\alpha_0$ となるので、$\alpha_0\beta_1 + \beta_0 = a$ より $-\alpha_0^2 + \beta_0 = a$ となる。これに $(\alpha_0,\ \beta_0)$ を代入し a を求める。

- $(\alpha_0, \beta_0) = (1, 2)$ の時、$-\alpha_0^2 + \beta_0 = 1$ となる。
- $(\alpha_0, \beta_0) = (-1, -2)$ の時、$-\alpha_0^2 + \beta_0 = -3$ となる。
- $(\alpha_0, \beta_0) = (2, 1)$ の時、$-\alpha_0^2 + \beta_0 = -3$ となる。
- $(\alpha_0, \beta_0) = (-2, -1)$ の時、$-\alpha_0^2 + \beta_0 = -5$ となる。

よって、$x^3 + ax + 2 = fg$ となるのであれば $a = 1, -3, -5$ となる。

つまり、$a \neq 1, -3, -5$ のとき $x^3 + ax + 2$ は既約である。