参考文献

測度論 (1) ルベーグ測度と完全加法性

http://racco.mikeneko.jp/Kougi/2018a/AMA/2018a_ama14.pdf

X を集合、$\mathcal{F}$ を X の有限加法族とする。

外測度 m^* について m^*-可測集合全体を $\mathcal{M}_{m^*}$ とする。

$\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_{m^*}$ であり、任意の $A \in \mathcal{F}$ に対し、$m(A) = m^*(A)$ が成り立つならば、$(X, \mathcal{F})$ 上の有限加法的測度 m は完全加法的である。

$$m\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \tag{1}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$A_k \in \mathcal{F},\ A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$(各 k について互いに素) とする。

Carathèodory の意味で可測から、任意の集合 $S \subset X$ に対して次が成り立つ。

$$m^*(S) = m^*(S \cap A) + m^*(S \cap A^c) \tag{2}$$

$A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$ より $S \cap A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty}(S \cap A_k)$ なので、外測度 m^* の完全劣加法性から次が成り立つ。

$$m^*(S \cap A) = m^*\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(S \cap A_k)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*\left(S \cap A_k\right) \tag{3}$$

$m = m^*$ であるので、(2) と (3) から次の不等式が成り立つ。

$$m(S) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m\left(S \cap A_k\right) + m(S \cap A^c) \tag{4}$$

もし、この不等号が次のように等号であったとする。

$$m(S) = \sum_{k=1}^{\infty} m\left(S \cap A_k\right) + m(S \cap A^c) \tag{5}$$

S は任意の集合なので $S = A$ とすれば

$$m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m\left(A \cap A_k\right) + m(A \cap A^c) = \sum_{k=1}^{\infty} m\left(A_k\right) + m(A \cap A^c) = \sum_{k=1}^{\infty} m\left(A_k\right) \tag{6}$$

である。$A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$ であるから $m\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m\left(A_k\right)$ が得られる。

そこで、自然数 n について次の不等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

$$m^*(S) \geq \sum_{k=1}^{n} m^*\left(S \cap A_k\right) + m^*(S \cap A^c) \tag{7}$$

$n = 1$ の場合

$A_1 \subset A$ より $A_1^c \supset A^c$ となるので次が得られる。

$$m^*(S) = m^*\left(S \cap A_1\right) + m^*(S \cap A_1^c) \geq m^*\left(S \cap A_1\right) + m^*(S \cap A^c) \tag{8}$$

$n = l$ の時成り立つと仮定し $n = l + 1$ について考える。

$$m^*(S) \geq \sum_{k=1}^{l} m^*\left(S \cap A_k\right) + m^*(S \cap A^c) \tag{9}$$

この式の S は任意の集合であるので、$S \cap A_{l+1}^c$ で置き換える。

$$m^*(S \cap A_{l+1}^c) \geq \sum_{k=1}^{l} m^*\left(S \cap A_{l+1}^c \cap A_k\right) + m^*(S \cap A_{l+1}^c \cap A^c) \tag{10}$$

A_{l+1} と A_k は互いに素であるので、$A_{l+1}^c \cap A_k = A_k$ である。また、$A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$ より $A_{l+1}^c \cap A^c = A^c$ である。これにより次のような式となる。

$$m^*(S \cap A_{l+1}^c) \geq \sum_{k=1}^{l} m^*\left(S \cap A_k\right) + m^*(S \cap A^c) \tag{11}$$

A_{l+1} は加速であるので、次の式が成り立つ。

$$m^*(S) = m^*(S \cap A_{l+1}) + m^*(S \cap A_{l+1}^c) \tag{12}$$

これにより次の不等式が成り立つ。

$$\begin{align} m^*(S) &= m^*(S \cap A_{l+1}) + m^*(S \cap A_{l+1}^c) \tag{13} \\ &\geq m^*(S \cap A_{l+1}) + \sum_{k=1}^{l} m^*\left(S \cap A_k\right) + m^*(S \cap A^c) \tag{14} \\ &\geq \sum_{k=1}^{l+1} m^*\left(S \cap A_k\right) + m^*(S \cap A^c) \tag{15} \end{align}$$
