
D を $\mathbb{R}^2$ の部分集合 (開集合?) とする。

$\boldsymbol{f}$ を C^1-級ベクトル場とする。

$$\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} \tag{1}$$

- $$(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f})(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \tag{2}$$

- $$(\mathrm{div}\, \boldsymbol{f})(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \tag{3}$$

- $$(*\boldsymbol{f})(x,y) = \begin{pmatrix} -f_2(x,y) \\ f_1(x,y) \end{pmatrix} \tag{4}$$

$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f} = -\,\mathrm{div}(*\boldsymbol{f})$ を示せ。

. . . .

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(*\boldsymbol{f}) &= \mathrm{div} \begin{pmatrix} -f_2(x,y) \\ f_1(x,y) \end{pmatrix} && (5) \\ &= -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f} && (6) \end{aligned}$$

よって、$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f} = -\,\mathrm{div}(*\boldsymbol{f})$ となる。

$\boldsymbol{g} = *\boldsymbol{f}$ とおく。

$\boldsymbol{g}$ に対して Green の定理を用いると

$$\int_D \mathrm{rot}\, \boldsymbol{g}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D} \boldsymbol{g} \tag{7}$$

であり、$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{g} = \mathrm{div}\, \boldsymbol{f}$ となることを示せ。

. . . .

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} -f_2(x,y) \\ f_1(x,y) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{g} = \mathrm{rot} \begin{pmatrix} -f_2(x,y) \\ f_1(x,y) \end{pmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \tag{8}$$

グリーンの定理より右辺は

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{g} = \int_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial(-f_2)}{\partial y}(x,y) \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9}$$

であり、左辺は

$$\int_D \operatorname{rot} \boldsymbol{g} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{10}$$

である為、$\int_D \operatorname{rot} \boldsymbol{g} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D} \boldsymbol{g}$ である。

また、

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \tag{11}$$

であるので、$\operatorname{rot} \boldsymbol{g} = \operatorname{div} \boldsymbol{f}$ である。
