**ディリクレ級数 (Dirichlet series)**

複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $s \in \mathbb{C}$ に対して、次で表される級数のことをディリクレ級数 (Dirichlet series) という。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{1}$$

**収束軸**

ディリクレ級数の $s$ の実部 $\mathrm{Re}(s)$ に対し、$\mathrm{Re}(s) > \sigma$ の範囲で収束し、$\mathrm{Re}(s) < \sigma$ の範囲で発散する時、$\sigma$ を収束軸という。

ディリクレ級数が常に収束する時は収束軸は $-\infty$、常に発散するときは $\infty$ とする。

**収束軸の計算**

$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ とする。

- $s_n$ が発散する場合

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log|s_n|}{\log n} \tag{2}$$

- $s_n$ が収束する場合

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log\left|\sum_{i=n}^{\infty} a_i\right|}{\log n} \tag{3}$$

…………………………………………………………………………

**Abel の級数変形法**

複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はその部分和 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ のなす数列 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界であるとする。すなわち、$^\forall N \in \mathbb{N}$ に対して $|s_N| = \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leq M$ なる $M \in \mathbb{R}$ が存在する。また、実数列 $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は正項かつ単調減少 $(\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \cdots \geq \varepsilon_n \geq \cdots \geq 0)$ であるとする。

このとき、級数 $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_n$ について次が成り立つ。

1. $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ の時、級数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_n$ は収束し、かつ $|S| \leq M\varepsilon_1$ である。
2. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する時、級数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_n$ は収束し、かつ $|S| \leq M\varepsilon_1$ である。

---

複素数 $\omega \in \mathbb{C}$ を $\omega^n = 1$ となる最小の自然数が $n = 6$ であるものとする。この時、$a_n = \omega^n$ として定まる Dirichlet 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{n^s}$ の収束軸を求めよ。

…………………………………………………………………………

$\omega = 1, \exp(\frac{\pi}{3}i), \exp(\frac{2\pi}{3}i), \exp(\pi i), \exp(\frac{4\pi}{3}i), \exp(\frac{5\pi}{3}i)$ は $\omega^6 = 1$ を満たす。

$\omega^n=1$ となる最小の自然数が 6 であるので、$1^1=1$、$\exp(\pi i)^2=1$、$\exp(\frac{2\pi}{3}i)^3=\exp(\frac{4\pi}{3}i)^3=1$ は $\omega$ ではない。

つまり、$\omega=\exp(\frac{\pi}{3}i),\exp(\frac{5\pi}{3}i)$ である。

$1+\omega^3=0$ より

$$\sum_{n=1}^{1}\omega^n=\omega,\ \sum_{n=1}^{2}\omega^n=\omega+\omega^2,\ \sum_{n=1}^{3}\omega^n=\omega+\omega^2+\omega^3=\omega+\omega^2-1 \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{4}\omega^n=\omega^2+\omega^3=\omega^2-1,\ \sum_{n=1}^{5}\omega^n=\omega^3=-1,\ \sum_{n=1}^{6}\omega^n=0 \tag{5}$$

である。$\omega^6=1$ よりこの 6 種類が繰り返し現れる。

$s_n=\sum_{k=1}^{n}\omega^k$ として数列 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を考えると、上記の数列が繰り返し現れる数列になる。

$$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{\omega,\ \omega+\omega^2,\ \omega+\omega^2-1,\ \omega^2-1,\ -1,\ 0,\ \ldots\} \tag{6}$$

これより数列 $\{|s_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ は次のようになる。

$$\{|s_n|\}_{n\in\mathbb{N}}=\{1,\sqrt{3},2,\sqrt{3},1,0,\ldots\} \tag{7}$$

よって、${}^\forall N\in\mathbb{N}$ に対して $|s_N|\leq 2$ である。

また、$s=\sigma+it$ $(\sigma,t\in\mathbb{R},\ i=\sqrt{-1})$ とすれば、

$$n^s=n^{\sigma+it}=\exp((\log n)(\sigma+it))=\exp(\sigma\log n)\exp(it\log n)=n^\sigma\exp(i\log n^t) \tag{8}$$

$$|n^s|=n^\sigma \tag{9}$$

である。

そこで、実数列 $\{n^{-\sigma}\}_{n\in\mathbb{N}}$ について考える。${}^\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $n^{-\sigma}>0$ であり、$\sigma>0$ において単調減少な数列である。極限を取ってみると次のようになる。

$$\lim_{n\to\infty}n^{-\sigma}=\begin{cases}0 & (\sigma>0)\\ 1 & (\sigma=0)\\ \infty & (\sigma<0)\end{cases} \tag{10}$$

Abel の級数変形法より数列 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\omega^n n^{-\sigma}$ は $\sigma>0$ において収束し、$|S|\leq 2\cdot 1^{-\sigma}=2$ である。

$\sigma<0$ においては $\lim_{n\to\infty}n^{-\sigma}=\infty$ より $S$ は発散する。

つまり、級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^n}{n^\sigma}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^n}{|n^s|}$ は $\sigma>0$ で収束、$\sigma<0$ で発散する。

よって、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^n}{n^s}$ においても $\sigma>0$ で収束、$\sigma<0$ で発散する為、収束軸は $\sigma=0$ である。