

Laplacian

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} \tag{1}$$

Report 1.12

U は連結とする。関数 u は U 上で C^2 -級、 \overline{U} 上で C^1 -級であり、次を満たしているとする。

$$\Delta u = 0 \text{ (in } U), \ u = g \text{ (on } \partial U, \ g \geq 0) \tag{2}$$

g が ∂U 上のどこかで正であるなら u は U 内で常に正であることを示せ。

.....
 \overline{U} 上で C^1 -級であるので、 u は連続である。この為、ある点 $x_0 \in \overline{U}$ が存在し、 $u(x_0)$ は最小となる。つまり、 $u(x_0) \leq u(x)$ ($\forall x \in \overline{U}$) である。

もし、 $x_0 \in \partial U$ であれば、 $u(x_0) = g(x_0) \geq 0$ であり、 $0 \leq u(x_0) \leq u(x)$ となる。

もし、 $x_0 \in U$ であれば、 u は U で定数関数となる。 ∂U にて $g \leq 0$ なる点があるので $u \geq 0$ である。

Report 1.13

$$\tilde{u} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y) f(y) dy \tag{3}$$

$n = 2$ のとき、 \tilde{u} は有界ではないことを示せ。

.....
調和関数 $\Phi(x)$ は $n = 2$ において $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \log |x|$ である。
 $|x|$ がそれぞれ 0 と ∞ に飛ばした場合、 $\Phi(x) \rightarrow \infty$ ($|x| \rightarrow 0$) と $\Phi(x) \rightarrow -\infty$ ($|x| \rightarrow \infty$) であるので、 $|\Phi(x)| \rightarrow \infty$ である。

$$\tilde{u} = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(y) f(x - y) dy \tag{4}$$

Report 1.14

$n = 2, \ N = 3$ のとき、次の式を示せ。

$$u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} \tag{5}$$

.....

1. 次の初期値問題の解である関数 u を求めよ。

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du + cu = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (6)$$

$c \in \mathbb{R}$ と $b \in \mathbb{R}^n$ は定数とする。

.....
式を次のように変形する。

$$u_t + b \cdot Du + cu = 0 \Rightarrow u_t + b \cdot Du = -cu \quad (7)$$

ここから、左辺は u を微分すると u の定数倍になることが読み取れる。

$$u = \exp\left(\frac{c}{n+1} \left(t + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{b_i}\right)\right) \quad (8)$$

$$u(x, t) = g(x - tb) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0) \quad (9)$$

2. Laplace 方程式 $\Delta u = 0$ は回転不変である、つまり n 次直交行列 O で変換しても Laplace 方程式を満たすことを示せ。

$$v(x) = u(Ox) \quad (x \in \mathbb{R}^n) \Rightarrow \Delta v = 0 \quad (10)$$

.....
 O を n 次直交行列とし、 $O = \{o_{ij}\}$ とする。 O は直交行列であるので、 O の転置行列と逆行列が一致する。

$$O^t O = {}^t O O = E, \quad \sum_{i=1}^n o_{ki} o_{li} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & (k = l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases} \quad (11)$$

x はベクトルであり、その成分を $x = (x_1, \dots, x_n)$ とし、 $\bar{x} = Ox$ とする。これにより、 $v(x) = u(\bar{x})$ となる。

x_i における偏微分は合成関数の微分より次のように変形できる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} = \sum_{k=1}^n o_{ki} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} \quad (12)$$

2 階の偏微分は次のように求められる。

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \left(\sum_{k=1}^n o_{ki} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^n o_{li} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_l} \right) = \sum_{k,l=1}^n o_{ki} o_{li} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} \quad (13)$$

これらを用いて Δv を計算する。

$$\Delta v = \Delta u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k,l=1}^n o_{ki} o_{li} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} u(\bar{x}) \quad (14)$$

$$= \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i=1}^n o_{ki} o_{li} \right) \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} u(\bar{x}) = \sum_{k,l=1}^n \delta_{kl} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} u(\bar{x}) \quad (15)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_k^2} u(\bar{x}) = \Delta u \quad (16)$$

よって、 $\Delta u = 0$ であれば、 $\Delta v = 0$ である。

3. 平均値定理の証明を利用し、 $n \geq 3$ の時、次の式を証明せよ。

$$u(0) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(0,r)} g dS + \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{B(0,r)} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) f dx \quad (17)$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B^0(0,r) \\ u = g & \text{on } \partial B^0(0,r) \end{cases} \quad (18)$$

.....

4. 関数 $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ が開集合 U の境界上を除いて調和的である時、次が成り立つことを示せ。

$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u \quad (19)$$

HINT : $\varepsilon > 0$ の時 $u_\varepsilon = u + \varepsilon|x|^2$ とおくと、 U の内部では最大値を取らないことを示せばよい。

.....

5. 次のような $v \in C^2(\bar{U})$ を 劣調和関数 (subharmonic) という。

$$-\Delta v \leq 0 \quad \text{in } U \quad (20)$$

(a) v が次を満たすことを示せ。

$$v(x) \leq \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} v dy \quad \text{for all } B(x,r) \subset U \quad (21)$$

.....

(b) 次を示せ。

$$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u \quad (22)$$

.....

(c) $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ はなめらかな凸関数とする。

u は調和関数、 $v = \phi(u)$ とした時、 v は劣調和関数であることを示せ。

.....

(d) u が調和的である時、 $v = |Du|^2$ は劣調和的であることを示せ。

.....

6. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ は有界であるとする。

この時、 U のみに依存した定数 C が存在し、次の式が成り立つことを示せ。

$$\max_{\overline{U}} |u| \leq C \left(\max_{\partial U} |g| + \max_{\overline{U}} |f| \right) \quad (23)$$

なお、 u は滑らかな関数で、次の解である。

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{on } \partial U \end{cases} \quad (24)$$

HINT : $\lambda = \max_{\overline{U}} |f|$ に対して、 $-\Delta \left(u + \frac{|x|^2}{2n} \lambda \right) \leq 0$

.....

参考文献

偏微分方程式：講義ノート

https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~karel/files/notes_pde_2015.pdf

非線型解析：講義ノート

https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~karel/files/notes_nonlinear_analysis_2019.pdf

$C^\infty(\Omega)$ は Ω 上で無限に微分可能 (calculus) な関数の集合

$\text{supp}(f)$ は f の台 (サポート) といい、 $f(x) \neq 0$ となる点 x の集合

$$C_c^\infty(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp}(\phi) \text{ がコンパクト}\} \tag{25}$$

$C_0^\infty(\Omega)$ も $C_c^\infty(\Omega)$ と同じ意味として使われる。

テスト関数

関数 ϕ は C^∞ 級でコンパクトな台を持ち、その境界上では 0 になるとき、テスト関数という。

∂U 上で $\phi = 0$ となるテスト関数は $\phi \in C_c^\infty(U)$ とかけられる。

可積分関数のなす線形空間 (L^p 空間、エルピー空間) であり、次のような集合である。
 p -ノルム空間

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_\Omega |f(x)| dx < \infty \right\} \tag{26}$$

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\} \tag{27}$$

$f \in L^p(\Omega)$ のノルム $\|f\|_{L^p}$ は次で定義する。

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{28}$$

局所可積分関数

Ω : 開集合、 $p \in [1, \infty)$ とする。可測関数 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が p 乗局所可積分関数であるとは任意のコンパクト集合 $k \subset \Omega$ に対して $\int_k |f(x)|^p dx < \infty$ が成り立つことと定義する。

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \left| \forall K \subset \Omega \text{ コンパクト}, \int_K |f(x)|^p dx < \infty \right. \right\} \quad (29)$$

$L^p_{loc}(\Omega)$ の他、 $L_{p,loc}(\Omega)$ や $L_p(\Omega, \log)$ 等の記号が使われている。

次のような包含関係がある。

$$L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \quad (30)$$

弱微分

$u \in L^1([a, b])$ とする。 $\phi(a) = \phi(b) = 0$ を満たす任意の無限階可能関数 ϕ (テスト関数 $\phi \in C^\infty_c([a, b])$) に対して次を満たす $v \in L^1([a, b])$ を u の弱微分という。

$$\int_a^b u(t) \phi'(t) dt = - \int_a^b v(t) \phi(t) dt \quad (31)$$

この式は部分積分の式の変形である。

多重指数

n 個の数の組 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ を用いて微分 $D^\alpha u$ を表す。

$|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ とする。

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (32)$$

ソボレフ Sobolev 空間

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \left| \begin{array}{l} u \text{ は } k \text{ 階弱微分可能} \\ k \text{ 階までの全ての導関数が } L^p(\Omega) \text{ に含まれる} \end{array} \right. \right\} \quad (33)$$

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \left| \begin{array}{l} \alpha \text{ は多重指数} \\ 0 \leq |\alpha| \leq k \Rightarrow D^\alpha u \in L^p(\Omega) \end{array} \right. \right\} \quad (34)$$

ノルム $\|u\|_{W^{k,p}}$ は次のように定義する。

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (35)$$

2.1. $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ の第 γ Hölder 半ノルムを次で定義する。

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\} \quad (36)$$

この定義は半ノルムであることを確認せよ。

.....
半ノルムとは絶対斉次性 ($p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$) と劣加法性 ($p(x + y) \leq p(x) + p(y)$) を満たす写像 p のことをいう。

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ とする。

$$[\lambda u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|\lambda u(x) - \lambda u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\} \quad (37)$$

$$= |\lambda| \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\} = |\lambda| [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \quad (38)$$

よって、絶対斉次性を満たす。

劣加法性を確認する。

$$[u + v]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|(u(x) + v(x)) - (u(y) + v(y))|}{|x - y|^\gamma} \right\} \quad (39)$$

$$\leq \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)| + |v(x) - v(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\} \quad (40)$$

$$\leq \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\} + \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\} \quad (41)$$

$$= [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} + [v]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \quad (42)$$

以上により半ノルムであることが確認できる。

2.3. U 上の滑らかな関数全体を $C_c^\infty(U) \subset W^{k,p}(U)$ とし、これの閉包を $W_0^{k,p}(U)$ とする。 $W_0^{k,p}(U)$ は $|\alpha| \leq k - 1$ を満たす α において ∂U 上で $D^\alpha u = 0$ となる関数 $u \in W^{k,p}(U)$ の集まりである。

トレースの定理を認めてこれを示せ。

トレースの定理

U を有界、 ∂U を C^1 とする。

$$T : W^{1,p}(U) \rightarrow L^p(\partial U) \quad (43)$$

この時、次を満たす有界線形作用素 T が存在する。

- (a) $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\overline{U})$ に対して $Tu = u|_{\partial U}$
- (b) 各 $u \in W^{1,p}(U)$ に対し、 $\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$ である。定数 C は p と U のみに依存する。
-

$$F : W^{k,p}(U) \rightarrow W^{1,p}(U), \quad u \mapsto D^\alpha u \quad (44)$$

上記写像とトレースの定理の写像 T の合成 $T \circ F$ を考える。

$T(u) = u|_{\partial U}$ であるから $T(u) = 0$ となる u は ∂U 上で $u = 0$ ということである。

つまり、 $(T \circ F)(u) = 0$ となる関数 u は ∂U 上で $D^\alpha u = 0$ を満たす。

$f \in C_c^\infty(U)$ とすれば $\text{supp}(f) \subset U$ であり、 ∂U 上では $f = 0$ となる。つまり、 ∂U 上 $D^\alpha f = 0$ である。

$f \in W_0^{k,p}(U)$ が $f_i \in C_c^\infty(U)$ により $f = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i$ とする。

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_i - f\|_{W^{k,p}(U)} = 0 \quad (45)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_i - f\|_{W^{k,p}(U)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha (f_i - f)\|_{L^p(U)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (46)$$

∂U 上では $f_k = 0$ であるので、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i \quad (47)$$

2.5. $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ は可算で稠密な $U = B^0(0, 1)$ の部分集合とする。

$$u(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} |x - r_k|^{-\alpha} \quad (x \in U) \quad (48)$$

$0 \leq \alpha \leq \frac{n-p}{p}$ であれば $u \in W^{1,p}(U)$ である。

この時、 u は U の部分集合である開集合上で有界ではないことを示せ。

.....

2.7. 弱微分の性質

$u \in W^{k,p}(U)$, $|\alpha| \leq k$ とする。

このとき、 $V \subset U$ が開集合であるなら $u \in W^{k,p}(V)$ となることを示せ。

.....

$u \in W^{k,p}(U)$ であるから $D^\alpha u \in L^p(U)$ である。つまり、任意のテスト関数 $\phi \in C_c^\infty(U)$ に対して次を満たす。

$$\int_U D^\alpha u(x) \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U u(x) D^\alpha \phi(x) dx \quad (49)$$

この ϕ は $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ で C^∞ 級な関数あり、関数の台 $\text{supp}(f) = \{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$ は $\text{supp}(f) \subset U$ である。

(49) は任意の ϕ について成り立つ。この為、 $U \setminus V$ 上で 0 となるテスト関数 $\bar{\phi}$ についても成り立つので、 $V \subset U$ 上に制限した次の式も成り立つ。

$$\int_V D^\alpha u(x) \bar{\phi}(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_V u(x) D^\alpha \bar{\phi}(x) dx \quad (50)$$

つまり、 $D^\alpha u \in L^p(V)$ である。よって、 $u \in W^{k,p}(V)$ である。

2.9. $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ が $W^{k,p}(U)$ の $\overline{\text{Cauchy}}$ 列とする。

この時、 $|\alpha| \leq k$ となる各 α に対して $\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty$ は $L^p(U)$ の Cauchy 列となることを示せ。

.....

$\{u_m\}_{m=1}^\infty$ がコーシー列であるので、次の極限が 0 となる。

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \|u_i - u_j\|_{W^{k,p}(U)} = 0 \quad (51)$$

極限を取るノルムは次のように $L^p(U)$ のノルムで書き換える。

$$\|u_i - u_j\|_{W^{k,p}(U)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha(u_i - u_j)\|_{L^p(U)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (52)$$

これが 0 に収束するので、 $0 \leq |\alpha| \leq k$ において各 $\|D^\alpha(u_i - u_j)\|_{L^p(U)}$ は 0 に収束する。

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \|D^\alpha(u_i - u_j)\|_{L^p(U)} = \lim_{i,j \rightarrow \infty} \|D^\alpha u_i - D^\alpha u_j\|_{L^p(U)} = 0 \quad (53)$$

これにより $\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty$ はコーシー列だとわかる。

この問では $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし、 ∂U は滑らかな境界とする。関数は指定がない限り滑らかな関数であるとする。

1. $U \subset \mathbb{R}^n$ は開集合、 $f \in L^1_{loc}(U)$ とする。

$\forall \phi \in C_c^\infty(U)$ に対して、恒等式 $\int_U f \phi dx = 0$ が成り立つなら、ほとんど至るところで $f = 0$ である。

.....

$f \in L^1_{loc}(U)$ より、任意のコンパクトな集合 $K \subset U$ において $\int_K |f(x)| dx < \infty$ である。

テスト関数 ϕ と f の積の U 上の積分が 0 となる。

$$\int_U f \phi dx = \int_K f \phi dx + \int_{U \setminus K} f \phi dx = 0 \quad (54)$$

$\phi_K \in C_c^\infty(U)$ が $\text{supp}(\phi_K) = K$ を満たすとする。つまり、 $\phi_K \in C_c^\infty(K)$ とする。

これにより $U \setminus K$ 上で $\phi_K = 0$ となる為、 $\int_{U \setminus K} f \phi_K dx = 0$ となる。

よって、 $\int_K f \phi_K dx = 0$ となる。

任意の関数 ϕ_K に対して積分が 0 となるので、 $f = 0$ となる。

2. $k \in \{0, 1, \dots\}$, $0 < \gamma \leq 1$ とする。この時、 $C^{k, \gamma}(\overline{U})$ はバナッハ空間となることを示せ。

.....

3. $0 < \beta < \gamma \leq 1$ とする。この時、次の不等式を示せ。

$$\|u\|_{C^{0, \gamma}(U)} \leq \|u\|_{C^{0, \beta}(U)}^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}} \|u\|_{C^{0, 1}(U)}^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}} \quad (55)$$

.....

4. 開集合 U を $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_i| < 1 \ (i = 1, 2)\}$ とする。

$u(x)$ を次のように定義する。

$$u(x) = \begin{cases} 1 - x_1 & x_1 > 0, |x_2| < x_1 \\ 1 + x_1 & x_1 < 0, |x_2| < -x_1 \\ 1 - x_2 & x_2 > 0, |x_1| < x_2 \\ 1 + x_2 & x_2 < 0, |x_1| < -x_2 \end{cases} \quad (56)$$

$1 \leq p \leq \infty$ に対して u は $W^{1, p}(U)$ に属するのは p がいくつのときか調べよ。

.....

$$W^{1,p}(U) = \{u \in L^p(U) \mid 0 \leq |\alpha| \leq 1 \Rightarrow D^\alpha u \in L^p(U)\} \quad (57)$$

$$L^p(U) = \left\{ f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_U |f(x)|^p dx < \infty \right\} \quad (58)$$

5. $n = 1$ とある p ($1 \leq p < \infty$) について $u \in W^{1,p}(0, 1)$ を仮定する。

(a) u はほとんど至るところで絶対連続関数であり、 $u' \in L^p(0, 1)$ である。

.....

(b) $1 < p < \infty$ とする。 $x, y \in [0, 1]$ に対し、ほとんど至るところで次が成り立つ。

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |u'|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (59)$$

.....

6. U, V を開集合とし、 $V \subset\subset U$ とする。

この時、滑らかな関数 ζ が存在し、 V 上で $\zeta \equiv 1$ 、 ∂U の近くで $\zeta = 0$ となるものが存在する。

(HINT: $V \subset\subset W \subset\subset U$ を取ってきて、mollify χ_W)

.....

7. U を有界とし、 $U \subset\subset \bigcup_{i=1}^N V_i$ とする。

この時、 C^∞ 級関数 ζ_i ($i = 1, \dots, N$) が存在し次を満たす。

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta_i \leq 1, & \text{supp}(\zeta_i) \subset V_i \ (i = 1, \dots, N) \\ \sum_{i=1}^N \zeta_i = 1 & U \text{ 上} \end{cases} \quad (60)$$

関数 $\{\zeta_i\}_{i=1}^N$ は 1 の分割となっている。

.....

8. U を有界とし、 C^1 な境界を持つとする

この時、一般的な関数 $u \in L^p(U)$ ($1 \leq p \leq \infty$) は ∂U 上で trace を持たないことを示せ。

より正確には、 $u \in C(\overline{U}) \cap L^p(\partial U)$ について $Tu = u|_{\partial U}$ を満たす有界線形作用素 $T : L^p(U) \rightarrow L^p(\partial U)$ は存在しないことを示せ。。

.....

9. 部分積分を行い、任意の $u \in C_c^\infty(U)$ に対し、次の補間不等式を示せ。

$$\|Du\|_{L^2} \leq C \|u\|_{L^2}^{1/2} \|D^2u\|_{L^2}^{1/2} \tag{61}$$

U を有界、 ∂U は滑らかであるとする。 $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ であるとき、上記不等式を示せ。

(HINT: 関数列 $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset C_c^\infty(U)$ を $H_0^1(U)$ 内で u 、 $\{w_k\}_{k=1}^\infty \subset C^\infty(\overline{U})$ を $H^2(U)$ 内で u に収束するように取れる。)

.....

10.

.....