$A,\ B$ を斜体とし、$f : A \to B$ を環の準同型写像とする。このとき、f は単射であることを示せ。

……………………………………………………………………………

A と B の零元を $0_A,\ 0_B$、単位元を $1_A,\ 1_B$ とする。f は環の準同型 (f は零写像ではない) であるので、$f(0_A) = 0_B,\ f(1_A) = 1_B$ である。

$a \in \mathrm{Ker} f \setminus \{0_A\}$ とする。$a \neq 0_A$ より $a^{-1} \in A$ である。これにより次のように $1_B = f(a)f(a^{-1})$ である。

$$1_B = f(1_A) = f(aa^{-1}) = f(a)f(a^{-1}) \tag{1}$$

だが、$f(a) = 0_B$ であるので、$f(a)f(a^{-1}) = 0_B$ となり、$1_B = 0_B$ となる。B は斜体であるので $1_B \neq 0_B$ であることと矛盾する。

つまり、$a \in \mathrm{Ker} f \setminus \{0_A\}$ という元は存在せず、$\mathrm{Ker} f = \{0_A\}$ であり、f が単射であることが示せる。