定義

領域 D 上の関数 $f(z)$ が正則であるとは、$f(z))$ が D の任意の点に於いて微分可能であるときにいう。

定理

関数 $f(z)$ が点 $a+bi$ で微分可能であることと次の条件が必要十分である。

$z=x+yi$ とすると $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ と書ける時、$u(x,y),\ v(x,y)$ が共に点 $a+bi$ で全微分可能であり、次の Cauchy-Riemann（コーシー リーマン）の関係式が成り立つ。

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial v}{\partial y}(a,b),\quad \frac{\partial u}{\partial y}(a,b)=-\frac{\partial v}{\partial x}(a,b) \tag{1}$$

問題

$z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R}),\ f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\ (u,v$ は実数値関数) とし、$f(z)$ は $\mathbb{C}$ 上で正則であるとする。

1. $u(x,y)=4x^3y-4xy^3$ のとき、$v(x,y)$ が満たす全微分方程式 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ を求めよ。
2. 上記 1 を用いて、$v(x,y)$ を求めよ。

....

$f(z)$ は $\mathbb{C}$ 上で正則である為、$\mathbb{C}$ の任意の点で Cauchy-Riemann（コーシー リーマン）の関係式が成り立つ。

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \tag{2}$$

1. $v(x,y)$ の全微分は
$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy \tag{3}$$
であるが、$u(x,y)=4x^3y-4xy^3$ と上記関係式より
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-4x^3+12xy^2,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=12x^2y-4y^3 \tag{4}$$
である。この為、求めるべき方程式は次の式である。
$$(-x^3+3xy^2)dx+(3x^2y-y^3)dy=0 \tag{5}$$

2. $v(x,y)$ の全微分が 0 となる式 $dv=0$ が得られたので、次の式を利用し $v(x,y)$ を計算する。
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-4x^3+12xy^2,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=12x^2y-4y^3 \tag{6}$$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -4x^3 + 12xy^2$ より x で積分を行うと次のような式が得られる。

$$v = \int (-4x^3 + 12xy^2)dx + C(y) = -x^4 + 6x^2y^2 + C(y) \tag{7}$$

$C(y)$ は x を含まない y の関数である。これを y で偏微分する。

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-x^4 + 6x^2y^2 + C(y)) = 12x^2y + \frac{\partial}{\partial y}C(y) \tag{8}$$

$\frac{\partial v}{\partial y} = 12x^2y - 4y^3$ より

$$12x^2y + \frac{\partial}{\partial y}C(y) = 12x^2y - 4y^3 \tag{9}$$

であるから $\frac{\partial}{\partial y}C(y) = -4y^3$ であり、積分をすることで $C(y) = -y^4$ であることが分かる。

$dv = 0$ であるので定数 C を用いて $v(x, y) = C$ となる。よって、式 (7) より

$$v(x, y) = -x^4 + 6x^2y^2 - y^4 = C \tag{10}$$

であることが分かる。