

開集合の公理

集合 X の部分集合族 \mathcal{O} について次の 3 条件を開集合の公理という。

1. $\emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}$
2. $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$
3. $O_\lambda \in \mathcal{O} (\lambda \in \Lambda)$ ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

問題

1. 相対位相

(X, \mathcal{O}) が位相空間とする。 $A \subset X$ を部分集合とする。 $\mathcal{O}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{O}\}$ とする時、 (A, \mathcal{O}_A) は位相空間であることを確かめよ。

.....

\mathcal{O}_A に対して開集合の公理を確認すればよい。

$\emptyset, X \in \mathcal{O}$ より

$$\emptyset = A \cap \emptyset \in \mathcal{O}_A, A = A \cap X \in \mathcal{O}_A \quad (1)$$

$\forall U_1, U_2 \in \mathcal{O}_A$ に対して $U_1 = A \cap O_1, U_2 = A \cap O_2$ となる $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ が存在する。

$$U_1 \cap U_2 = (A \cap O_1) \cap (A \cap O_2) = A \cap (O_1 \cap O_2) \in \mathcal{O}_A \quad (2)$$

$\forall U_\lambda \in \mathcal{O}_A (\lambda \in \Lambda)$ に対して $U_\lambda = A \cap O_\lambda$ となる $O_\lambda \in \mathcal{O}$ が存在する。

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap O_\lambda) = A \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \right) \in \mathcal{O}_A \quad (3)$$

以上により \mathcal{O}_A は開集合の公理を満たす。よって、 (A, \mathcal{O}_A) は位相空間である。

2. $X = \mathbb{Z}, \mathcal{L} = \{[3n-1, \infty) \cap X \mid n \in \mathbb{Z}\}, \{(-\infty, 2n] \cap X \mid n \in \mathbb{Z}\}$ とする。 \mathcal{L} によって生成される X 上の位相は離散位相か?

.....

離散位相は全ての部分集合が開集合となる位相空間である。

$$[-1, \infty) \cap (\infty, 0] = \{-1, 0\} \quad (4)$$

$$[2, \infty) \cap (\infty, 0] = \emptyset \quad (5)$$

$$[-1, \infty) \cap (\infty, -2] = \emptyset \quad (6)$$

上記のように $\{0\}$ という集合は作ることができない。この為、 \mathcal{L} は離散位相を生成しない。

-
3. $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{T} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, 4\}$ とする。 \mathcal{T} によって生成される集合 X の開集合系を求めよ。

.....
 $\mathcal{T} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, 4\}$ とあるが、 $\mathcal{T} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ ではないかと思うのでこちらで記述を行う。

.....

$$\{1, 2\} \cap \{4\} = \emptyset \quad (7)$$

$$\{1, 2\} \cup \{2, 3\} \cup \{4\} = X \quad (8)$$

$$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\} \quad (9)$$

$$\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\} \quad (10)$$

$$\{1, 2\} \cup \{4\} = \{1, 2, 4\} \quad (11)$$

$$\{2, 3\} \cup \{4\} = \{2, 3, 4\} \quad (12)$$

$$\{2\} \cup \{4\} = \{2, 4\} \quad (13)$$

$$(14)$$
