問題 I 次の 3×3 の実対称行列 A を考える。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

また、線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と定義する。ここで、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ は 3 次元列ベクトルである。

(1). f の合成写像を次のように与える。

$$g(\boldsymbol{x}) = f \circ f(\boldsymbol{x}) = f\left(f(\boldsymbol{x})\right) \tag{2}$$

この合成写像は $g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ と表すことができる。行列 B を行列 A を用いて表せ。

(2). 以下の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は行列 A の固有ベクトルである。

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

各ベクトルに対応する固有値をそれぞれ答えよ。

(3). 行列 P を (2) の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を用いて次のように定義する。

$$P = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

この行列の逆行列 P^{-1} は、ある行列 X を用いて $P^{-1} = X\,{}^tP$ と表される。行列 X を求めよ。ただし、${}^tP$ は P の転置行列である。

(4). 実数パラメータ a, b, c を用いて、ベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3$ と表されるとき、次を満たす行列 Y を求めよ。

$$A\boldsymbol{x} = PY \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{5}$$

ただし、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ および P は (2)-(3) で用いたベクトルおよび行列である。

(5). f を 5 回合成した写像 $h(\boldsymbol{x}) = f \circ f \circ f \circ f \circ f(\boldsymbol{x}) = f(f(f(f(f(\boldsymbol{x})))))$ は、(3) の行列 P を用いて $h(\boldsymbol{x}) = (PZ\,{}^tP)\boldsymbol{x}$ と表すことができる。行列 Z を求めよ。

. . . .

(1).
$$g(\boldsymbol{x}) = f(f(\boldsymbol{x})) = f(A\boldsymbol{x}) = AA\boldsymbol{x} \tag{6}$$

よって、$B = A^2$ である。

(2). 行列の固有値 λ、固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ を満たす。

固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ がわかっているのであれば、対応する固有値 λ_i は $A\boldsymbol{v}_i = \lambda_i\boldsymbol{v}_i$ を満たす。

それぞれを計算すると $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2$ である。

(3). 実対称行列の固有値は実数となり、固有値が異なるときの固有ベクトルは直交する。

$i \neq j$ であれば、内積 $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = 0$ である。

$$^tPP = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{v}_1|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{v}_2|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |\boldsymbol{v}_3|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \tag{7}$$

ここに、逆行列をかけると次の式が得られる。

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1} {}^tP = P^{-1} \tag{8}$$

よって、$P^{-1} = X\ {}^tP$ を満たす行列 X は以下のようになる。

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \tag{9}$$

(4). $\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3$ より

$$A\boldsymbol{x} = A(a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3) = aA\boldsymbol{v}_1 + bA\boldsymbol{v}_2 + cA\boldsymbol{v}_3 \tag{10}$$

$$= a\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + b\lambda_2\boldsymbol{v}_2 + c\lambda_3\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{v}_1 & \lambda_2\boldsymbol{v}_2 & \lambda_3\boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{12}$$

よって、$Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である。

(5). $h(\boldsymbol{x}) = A^5\boldsymbol{x}$ である。

行列 P を用いて行列 A は次のように対角化できる。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

これを変形すると次の式が得られる。

$$A = P\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} \tag{14}$$

これと、(3) を用いて A^5 を計算する。

$$\begin{aligned}
A^5 &= P\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}\cdots P\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} && (15)\\
&= P\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^5 P^{-1} = P\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}{}^tP && (16)\\
&= P\begin{pmatrix} -16 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix}{}^tP && (17)
\end{aligned}$$

よって、$Z = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix}$ である。

問題 2 (2). 実数関数 $g(x)$ は以下のように定義される。

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\exp\left(-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right) & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases} \tag{18}$$

以下の問に答えよ。ただし、$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2/2)dx = \sqrt{2\pi}$ を証明なしで使ってもよい。

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ を求めよ。

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx$ を求めよ。

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} x^n g(x)dx$ を求めよ。ただし、n は自然数である。

....

(a) $\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2/2)dx = \sqrt{2\pi}$ を利用するため、$t = \ln x$ と置く。これにより $dt/dx = 1/x$ である。

そこで、$t = \ln x$ と置いて置換積分を考える。

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)dx \tag{19}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt \tag{20}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} = 1 \tag{21}$$

(b) $t = \ln x$ と置くと $x = \exp(t)$ である。そこで、$xg(x)$ を変形する。

$$xg(x) = x\frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \exp(t) \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \tag{22}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \exp\left(-\frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}x} \exp\left(-\frac{1}{2}(t-1)^2\right) \tag{23}$$

ここで、$s = t - 1$ と置くと $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2)dx$ の形の式が得られる。そこで、$s = \ln x - 1$ として置換積分を行う。このとき、$ds/dx = 1/x$ である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx = \int_{0}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)dx \tag{24}$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}s^2\right)ds = \exp\left(\frac{1}{2}\right) \tag{25}$$

(c) 上記の問いを踏まえ、$u = \ln x - n$ と置く。このとき、$x = \exp(u + n)$ であり、$du/dx = 1/x$ である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n g(x)dx = \int_{0}^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)\frac{dx}{x} \tag{26}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp n(u+n) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(u+n)^2\right)du \tag{27}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2} + \frac{n^2}{2}\right)du \tag{28}$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{n^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du \tag{29}$$

$$= \exp\left(\frac{n^2}{2}\right) \tag{30}$$