1. 開区間 $X = (0, \pi)$ および $Y = (-1, 1)$ にユークリッド位相 $\mathscr{O}(\mathbb{R}^1)$ の相対位相をそれぞれ与え、位相空間 $(X, \mathscr{O}(\mathbb{R}^1)_X)$ および $(Y, \mathscr{O}(\mathbb{R}^1)_Y)$ を考える。また、写像 $f : X \to Y$ を $f(x) = \cos x$ と定める。この時、次の問いに答えよ。ただし、f が全単射であること、および

$$\mathscr{B}_X = \{(a, b) \subset X \mid 0 \leq a < b \leq \pi\},\ \mathscr{B}_Y = \{(a, b) \subset Y \mid -1 \leq a < b \leq 1\} \tag{1}$$

がそれぞれ位相空間 $(X, \mathscr{O}(\mathbb{R}^1)_X)$, $(Y, \mathcal{O}(\mathbb{R}^1)_Y)$ の基底であることは証明を抜きにして認めて構わない。

(a) 写像 f が位相空間 $(X, \mathscr{O}(\mathbb{R}^1)_X)$ から $(Y, \mathscr{O}(\mathbb{R}^1)_Y)$ への連続写像であることを示せ。

....

写像 $f : X \to Y$ が連続写像であるとは、Y の任意の開集合 V に対しその逆像 $f^{-1}(V)$ が開集合となる時にいう。

....

開区間 $Y = (-1, 1)$ の任意の開集合 $V(\neq \emptyset)$ は $a, b \in [-1, 1] \quad (a \neq b)$ とすると $V = (a, b)$ と書ける。
この時、$\cos\alpha = a,\ \cos\beta = b$ となる $\alpha, \beta \in X(\alpha \neq \beta)$ が存在する。
また、X 上の関数 cos は狭義の単調減少関数である為、X 上の 3 点 s, t, u が $s < t < u$ を満たす時、$f(s) > f(t) > f(u)$ となる。写像 f は全単射であるので、Y 上の 3 点 S, T, U が $S < T < U$ であるとき、$f^{-1}(S) > f^{-1}(T) > f^{-1}(U)$ である。
これを用いて逆像 $f^{-1}(V)$ は次のよう書ける。

$$f^{-1}(V) = (\beta, \alpha) \tag{2}$$

この逆像は X の開集合であるので、写像 f は連続写像である。

(b) 位相空間 $(X, \mathscr{O}(\mathbb{R}^1)_X)$ と $(Y, \mathscr{O}(\mathbb{R}^1)_Y)$ が同相であることを示せ。

....

写像 f は全単射であるので、逆写像 f^{-1} が存在する。f^{-1} は、先ほどと同じ議論により連続写像であることがわかる。つまり、$f^{-1} : Y \to X$ において、開集合 $W \subset X$ の逆像 $(f^{-1})^{-1}(W) \subset Y$ も開集合となる。
この為、f は同型写像となり、X, Y は同型であることがわかる。

---

2. 3 次元ユークリッド位相空間 $(\mathbb{R}^3, \mathscr{O}(\mathbb{R}^3))$ がコンパクトではないことを示せ。

…………………………………………………………………

$\mathbb{R}^3$ の開集合を $U_n = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < n\}$ とする。ただし、$n \in \mathbb{N}$。この時、すべての自然数 n についての U_n の和集合は $\mathbb{R}^3$ を被覆する。つまり次を満たす。

$$\mathbb{R}^3 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \tag{3}$$

しかし、U_n をどのように選択しても有限個の選択では $\mathbb{R}^3$ を被覆できない。つまり、$\mathbb{R}^3$ はコンパクトでないということがいえる。

---

3. $C^0([0,1])$ を閉区間 $[0,1]$ 上で定義された連続関数全体の集合とする。この時、写像

$$\mu : C^0([0,1]) \times C^0([0,1]) \to \mathbb{R},\ \mu(f,g) = \max\{|g(x) - f(x)| \mid x \in [0,1]\} \tag{4}$$

が、$C^0([0,1])$ の距離関数であることを示せ。

…………………………………………………………………

集合 X 上の関数 d が距離関数であるとは $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が次のすべてを満たすときをいう。

- $d(x,y) \geq 0$
- $d(x,y) = 0$ ならば $x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

…………………………………………………………………

$\forall f, g \in C^0([0,1])$ とする。$|f(x) - g(x)| \geq 0$ $(x \in [0,1])$ であるので、$\mu(f,g) \geq 0$ である。
$\mu(f,g) = 0$ であるとすると、$\mu(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0,1]\}$ より $\forall x \in [0,1]$ について $|f(x) - g(x)| = 0$ であるから $f = g$ となる。
次の式より $\mu(f,g) = \mu(g,f)$ である。

$$\begin{aligned}
\mu(f,g) =& \max\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0,1]\} && (5)\\
=& \max\{|g(x) - f(x)| \mid x \in [0,1]\} && (6)\\
=& \mu(g,f) && (7)
\end{aligned}$$

$\forall f, g, h \in C^0([0,1])$ において

$$
\begin{aligned}
\mu(f,g)+\mu(g.h) =& \max\{|f(x)-g(x)| \mid x \in [0,1]\} && (8)\\
&+\max\{|g(x)-h(x)| \mid x \in [0,1]\} && (9)\\
\geq& \max\{|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)| \mid x \in [0,1]\} && (10)\\
\geq& \max\{|f(x)-h(x)| \mid x \in [0,1]\} && (11)\\
=& \mu(f,h) && (12)
\end{aligned}
$$

であるので、$\mu(f,g)+\mu(g.h) \geq \mu(f,h)$ である。
以上より関数 μ は距離関数である。

---

4. $\mathbb{R}^2$ の距離関数 $d_{\max} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$
d_{\max}((x,y),(x',y')) = \max\{|x'-x|, |y'-y|\} \tag{13}
$$

と定める。この時、2 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^2, d)$ から距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_{\max})$ への写像

$$
f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (2x, 3y) \tag{14}
$$

が、点 $(0,0)$ で連続であることを示せ。

……………………………………………………………………

空間 X, Y とそれぞれ距離関数 d_X, d_Y について写像 $f : X \to Y$ があるとする。
この時、1 点 x_0 で連続であるとは任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し

$$
d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \tag{15}
$$

であるときをいう。

……………………………………………………………………

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ とすると、$f(a,b) = (2a, 3b)$ である。
$d((a,b),(0,0)) = \sqrt{a^2+b^2}$ であり、$d_{\max}((2a,3b),(0,0)) = \max\{|2a|,\ |3b|\}$ である。
任意の $\varepsilon > 0$ に対し $d(a,b) < \frac{\varepsilon}{3}$ とする。この時、$d(a,b) = \sqrt{a^2+b^2} < \frac{\varepsilon}{3}$ よ

り $a^2+b^2<\frac{\varepsilon^2}{9}$ を得る。ここから次のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2<\frac{\varepsilon^2}{9} &\Rightarrow a^2<\frac{\varepsilon^2}{9}<\frac{\varepsilon^2}{4} &(16)\\
&\Rightarrow 4a^2<\varepsilon^2 &(17)\\
&\Rightarrow |2a|<\varepsilon &(18)\\
a^2+b^2<\frac{\varepsilon^2}{9} &\Rightarrow b^2<\frac{\varepsilon^2}{9} &(19)\\
&\Rightarrow 9b^2<\varepsilon^2 &(20)\\
&\Rightarrow |3b|<\varepsilon &(21)
\end{aligned}
$$

これより $d_{\max}((2a,3b),(0,0))<\varepsilon$ であることがわかる。

つまり､任意の $\varepsilon>0$ に対し $d((a,b),(0,0))<\frac{\varepsilon}{3}$ とすると $d_{\max}(f(a,b),f(0,0))<\varepsilon$ であることがわかる。

よって、写像 f は点 $(0,0)$ で連続である。