log の Taylor 展開

$f(x) = \log(1+2x)$ とする。

$$
\begin{aligned}
f(x) =& \log(1+2x) & f(0) =& 0 & (1)\\
f'(x) =& \frac{2}{1+2x} & f'(0) =& 2 & (2)\\
f''(x) =& \frac{-4}{(1+2x)^2} & f'(0) =& -4 & (3)\\
f'''(x) =& \frac{16}{(1+2x)^3} & f'(0) =& 16 & (4)\\
f^{(4)}(x) =& \frac{-96}{(1+2x)^4} & f'(0) =& -96 & (5)\\
f^{(n)}(x) =& \frac{2^n(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+2x)^n} & f'(0) =& 2^n(-1)^{n-1}(n-1)! & (6)
\end{aligned}
$$

$x=0$ における Taylor 展開

$$
f(x) = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \tag{7}
$$

$$
\log(1+2x) = \frac{0}{1}x^0 + \frac{2}{1}x + \frac{-4}{2}x^2 + \frac{16}{6}x^3 + \frac{-96}{24}x^4 + \cdots + \frac{2(-2)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n + \cdots \tag{8}
$$

$$
= 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + \cdots + \frac{2^n(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots \tag{9}
$$

$x \in [0,1]$ において、$x^n > x^{n+1}$ である。

上記、Taylor 展開により

$$
2x - 2x^2 + \frac{8}{81}x^3 \leq 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + \cdots = \log(1+2x) \tag{10}
$$

であり、

$$
\log(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + \cdots \leq 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 \tag{11}
$$

となるので、

$$
2x - 2x^2 + \frac{8}{81}x^3 \leq \log(1+2x) \leq 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 \tag{12}
$$

Lagrange の剰余項

$$R_n = f^{(n)}(c) \times \frac{(x-a)^n}{n!}, \quad c \in (a, x) \tag{13}$$

$x = 0$ における Taylor 展開とその剰余項 (Lagrange)

$$\begin{aligned}\log(1+2x) =& 2x - 2x^2 + \frac{16}{(1+2c)^3}\frac{x^3}{3!} \quad (14)\\ =& 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{-96}{(1+2c)^4}\frac{x^4}{4!} \quad (15)\end{aligned}$$

左の不等式

(14) は第 3 項が Lagrange の剰余項である。(10) を示すには次の不等式を確認すればよい。

$$2x - 2x^2 + \frac{8}{81}x^3 \leq 2x - 2x^2 + \frac{16}{(1+2c)^3}\frac{x^3}{3!} \tag{16}$$

そこで右辺 − 左辺が正になることを確認する。

$$\begin{aligned}&\left(2x - 2x^2 + \frac{16}{(1+2c)^3}\frac{x^3}{3!}\right) - \left(2x - 2x^2 + \frac{8}{81}x^3\right) \quad (17)\\ =& \frac{16}{(1+2c)^3}\frac{x^3}{3!} - \frac{8}{81}x^3 \quad (18)\\ =& \left(\frac{1}{(1+2c)^3} - \frac{1}{27}\right)\frac{8}{3}x^3 > 0 \quad (19)\end{aligned}$$

$c \in (0, x)$ より $c < 1$ であるので、$1 + 2c < 3$ である。また、$x \in [0, 1]$ であるので、正であることがわかる。

右の不等式

(15) は第 4 項が Lagrange の剰余項である。(11) を示すには次の不等式を確認すればよい。

$$2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{-96}{(1+2c)^4}\frac{x^4}{4!} \leq 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 \tag{20}$$

そこで右辺 − 左辺が正になることを確認する。

$$\begin{aligned}&\left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3\right) - \left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{-96}{(1+2c)^4}\frac{x^4}{4!}\right) \quad (21)\\ =& -\frac{-96}{(1+2c)^4}\frac{x^4}{4!} = \frac{4}{(1+2c)^4}x^4 > 0 \quad (22)\end{aligned}$$

$c \in (0, x),\ x \in [0, 1]$ であるので正であることがわかる。