問題

次の行列 A に対し、$\mathrm{Im}L_A$ と $\mathrm{Ker}L_A$ の基底を求めよ。

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

L_A とは次のような写像である。

$$L_A : K^2 \to K^3, \quad \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x} \tag{1}$$

$\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}$ を次のように置く。

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$x_i \in K$ に対して $\mathrm{Im}L_A$ を考える。

$$L_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 \tag{3}$$

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は線形独立であるのでこれが $\mathrm{Im}L_A$ の基底となる。

$$\mathrm{Im}L_A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \tag{4}$$

$\mathrm{Ker}L_A$ は $L_A(\boldsymbol{x}) = 0$ を満たす $\boldsymbol{x} \in K^2$ 全体の集合である。
式 (3) より $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$ の解空間の基底を求める。左辺を計算すると次のようになる。

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

これは成分ごとに 0 となるときは $x_1 = 0, x_2 = 0$ となる。
よって、$\mathrm{Ker}L_A$ は次のように生成される。

$$\mathrm{Ker}L_A = \langle \boldsymbol{0} \rangle = \{\boldsymbol{0}\} \tag{6}$$

---

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

A による線形写像 L_A は次のような写像である。

$$L_A : K^3 \to K^3, \quad \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x} \tag{7}$$

行列 A を列ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ に分け、$\boldsymbol{x}$ を次のように置く。

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次従属であり、$\boldsymbol{a}_2 = 2\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_3 = 3\boldsymbol{a}_1$ となるので $A\boldsymbol{x}$ は次のように計算できる。

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)\boldsymbol{a}_1 \tag{9}$$

これにより $\mathrm{Im}L_A$ は次のようになる。

$$\mathrm{Im}L_A = \langle \boldsymbol{a}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \tag{10}$$

$\mathrm{Ker}L_A$ は式 (9) が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ になるような $\boldsymbol{x}$ の解空間を求めればよい。式 (9) より、$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ となるときの $\boldsymbol{x}$ について調べる。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

よって、$\mathrm{Ker}L_A$ は次のように生成される。

$$\mathrm{Ker}L_A = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \tag{12}$$