1. 加法定理

$$\begin{aligned} f(x-u)f(x+u)f(y-v)f(y+v)-f(x-v)f(x+v)f(y-u)f(y+u) \\ =f(x-y)f(x+y)f(u-v)f(u+v) \end{aligned} \tag{1}$$

$f(x)$ が次の式である時、上の加法定理 (1) が成立することを示せ。

(a) $f(x)=x$

(b) $f(x)=\sin x$

(c) $f(x)=\theta_1(x \mid \tau)$

(a) $f(x)=x$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= (x-u)(x+u)(y-v)(y+v)-(x-v)(x+v)(y-u)(y+u) && (2)\\ &= \left(x^2-u^2\right)\left(y^2-v^2\right)-\left(x^2-v^2\right)\left(y^2-u^2\right) && (3)\\ &= -x^2v^2-y^2u^2+x^2u^2+y^2v^2 && (4)\\ &= x^2(u^2-v^2)-y^2(u^2-v^2) && (5)\\ &= (x^2-y^2)(u^2-v^2) && (6)\\ &= (x-y)(x+y)(u-v)(u+v)=(\text{右辺}) && (7) \end{aligned}$$

(b) $f(x)=\sin x$

$\sin\alpha$ と $\sin\beta$ の積の公式

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right) \tag{8}$$

$$\sin(x-u)\sin(x+u)=\frac{1}{2}\left(\cos 2u-\cos 2x\right) \tag{9}$$

$$\sin(y-v)\sin(y+v)=\frac{1}{2}\left(\cos 2v-\cos 2y\right) \tag{10}$$

$$\sin(x-v)\sin(x+v)=\frac{1}{2}\left(\cos 2v-\cos 2x\right) \tag{11}$$

$$\sin(y-u)\sin(y+u)=\frac{1}{2}\left(\cos 2u-\cos 2y\right) \tag{12}$$

$$\sin(x-y)\sin(x+y)=\frac{1}{2}\left(\cos 2y-\cos 2x\right) \tag{13}$$

$$\sin(u-v)\sin(u+v)=\frac{1}{2}\left(\cos 2v-\cos 2u\right) \tag{14}$$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{1}{4}(\cos 2u - \cos 2x)(\cos 2v - \cos 2y) && (15)\\
&\qquad - \frac{1}{4}(\cos 2v - \cos 2x)(\cos 2u - \cos 2y) && (16)\\
&= \frac{1}{4}(-\cos 2x \cos 2v - \cos 2y \cos 2u + \cos 2x \cos 2u + \cos 2y \cos 2v) && (17)\\
&= \frac{1}{4}(\cos 2x - \cos 2y)(\cos 2u - \cos 2v) && (18)\\
&= \sin(x-y)\sin(x+y)\sin(u-v)\sin(u+v) = (\text{右辺}) && (19)
\end{aligned}
$$

(c) $f(x) = \theta_1(x \mid \tau)$

. . . .

---

2. テータ関数

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u \mid \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{e}\left[(n+a)^2\tau + 2(n+a)(u+b)\right] \tag{20}$$

$$\left(a, b \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{C},\ \tau \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z \geq 0\},\ \mathbf{e}[x] \overset{\text{def}}{=} \exp \sqrt{-1}\pi x\right) \tag{21}$$

の変換性 (準周期性) は

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u+1 \mid \tau) = \mathbf{e}[2a]\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u \mid \tau) \tag{22}$$

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u+\tau \mid \tau) = \mathbf{e}[-\tau - 2(u+b)]\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u \mid \tau) \tag{23}$$

であり、$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u \mid \tau) = 0$ の $\mathrm{mod}(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$ での zero 点の個数は 1 個で、それは $\frac{1}{2} - \frac{a}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{2}\right)\tau \mod (\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$ であった。
テータ関数の記号は次のものを用いる。

$$\theta_1(u \mid \tau) = -\vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u+\tau \mid \tau), \qquad \theta_2(u \mid \tau) = \vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (u+\tau \mid \tau) \tag{24}$$

$$\theta_3(u \mid \tau) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (u+\tau \mid \tau), \qquad \theta_4(u \mid \tau) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u+\tau \mid \tau) \tag{25}$$

(a) テータ関数の定義を用いて次を表わせ。

. . . .

$$\alpha \in \mathbb{R}\text{に対して}\quad \vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u+\alpha \mid \tau) = \vartheta\begin{bmatrix} a \\ b+\alpha \end{bmatrix}(u \mid \tau) \tag{26}$$

i. $\theta_1\left(u+\frac{1}{2}\middle|\tau\right)$ を $\theta_2\,(u \mid \tau)$ を用いて表わせ。

$$\begin{aligned}
\theta_1\left(u+\frac{1}{2}\middle|\tau\right) &= -\vartheta\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}(u+\frac{1}{2}+\tau \mid \tau) && (27)\\
&= -\vartheta\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}(u+1+\tau \mid \tau) && (28)\\
&= -\mathbf{e}[1]\vartheta\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}(u+\tau \mid \tau) && (29)\\
&= -\mathbf{e}[1]\theta_2(u \mid \tau) && (30)
\end{aligned}$$

---

ii. $\theta_2\left(u+\frac{1}{2}\middle|\tau\right)$ を $\theta_1\,(u|\tau)$ を用いて表わせ。

$$\begin{aligned}
\theta_2\left(u+\frac{1}{2}\middle|\tau\right) &= \vartheta\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}(u+\frac{1}{2}+\tau \mid \tau) && (31)\\
&= \vartheta\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}(u+\tau \mid \tau) && (32)\\
&= -\theta_1(u \mid \tau) && (33)
\end{aligned}$$

---

iii. $\theta_3\left(u+\frac{1}{2}\middle|\tau\right)$ を $\theta_4\,(u|\tau)$ を用いて表わせ。

$$\begin{aligned}
\theta_3(u+\frac{1}{2} \mid \tau) &= \vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(u+\frac{1}{2}+\tau \mid \tau) && (34)\\
&= \vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}(u+\tau \mid \tau) && (35)\\
&= \theta_4(u \mid \tau) && (36)
\end{aligned}$$

---

iv. $\theta_4\left(u+\frac{1}{2}\middle|\tau\right)$ を $\theta_3\,(u|\tau)$ を用いて表わせ。

$$\theta_4(u+\frac{1}{2}\mid\tau)=\vartheta\begin{bmatrix}0\\1/2\end{bmatrix}(u+\frac{1}{2}+\tau\mid\tau) \tag{37}$$
$$=\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u+1+\tau\mid\tau) \tag{38}$$
$$=\mathbf{e}[0]\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u+\tau\mid\tau) \tag{39}$$
$$=\theta_3(u\mid\tau) \tag{40}$$

(b) テータ関数の定義を用いて次を表わせ。

$$\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(u\mid\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}\left[(n+a)^2\tau+2(n+a)(u+b)\right] \tag{41}$$
$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}\left[n^2\tau+2n(u+a\tau+b)+a^2\tau+2a(u+b)\right] \tag{42}$$
$$=\mathbf{e}[a^2\tau+2a(u+b)]\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}[n^2\tau+2n(u+a\tau+b)] \tag{43}$$
$$=\mathbf{e}[a^2\tau+2a(u+b)]\vartheta\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix}(u+a\tau\mid\tau) \tag{44}$$

i. $\theta_1\left(u+\frac{\tau}{2}\middle|\tau\right)$ を $\theta_4\left(u|\tau\right)$ を用いて表わせ。

$$\theta_1(u+\frac{\tau}{2}\mid\tau) \tag{45}$$
$$=-\vartheta\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}(u+\frac{3}{2}\tau\mid\tau) \tag{46}$$
$$=-\mathbf{e}[\frac{\tau}{4}+u+\frac{3}{2}\tau+\frac{1}{2}]\vartheta\begin{bmatrix}0\\1/2\end{bmatrix}(u+\frac{1}{2}\tau+\frac{3}{2}\tau\mid\tau) \tag{47}$$
$$=-\mathbf{e}[\frac{7}{4}\tau+u+\frac{1}{2}]\mathbf{e}[-\tau-2(u+\tau+\frac{1}{2})]\vartheta\begin{bmatrix}0\\1/2\end{bmatrix}(u+\tau\mid\tau) \tag{48}$$
$$=-\mathbf{e}[-\frac{5}{4}\tau-u-\frac{1}{2}]\theta_4(u\mid\tau) \tag{49}$$

---

ii. $\theta_2\left(u+\frac{\tau}{2}\middle|\tau\right)$ を $\theta_3\left(u|\tau\right)$ を用いて表わせ。

. . . .

$$\begin{aligned}\theta_2(u+\frac{\tau}{2}\mid\tau) &= \vartheta\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}(u+\frac{3}{2}\tau\mid\tau) &(50)\\ &= \mathbf{e}[\frac{\tau}{4}+u+\frac{3}{2}\tau]\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u+2\tau\mid\tau) &(51)\\ &= \mathbf{e}[\frac{\tau}{4}+u+\frac{3}{2}\tau]\mathbf{e}[-\tau-2(u+\tau)]\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u+\tau\mid\tau) &(52)\\ &= \mathbf{e}[-\frac{5}{4}\tau-u]\theta_3(u\mid\tau) &(53)\end{aligned}$$

---

iii. $\theta_3\left(u+\frac{\tau}{2}\middle|\tau\right)$ を $\theta_2\left(u|\tau\right)$ を用いて表わせ。

. . . .

$$\begin{aligned}\theta_3\left(u+\frac{\tau}{2}\middle|\tau\right) &= \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u+\frac{\tau}{2}+\tau\mid\tau) &(54)\\ &= \mathbf{e}[-\frac{\tau}{4}-u-\tau]\vartheta\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}(u+\tau\mid\tau) &(55)\\ &= \mathbf{e}[-\frac{5}{4}\tau-u]\theta_2\left(u|\tau\right) &(56)\end{aligned}$$

---

iv. $\theta_4\left(u+\frac{\tau}{2}\middle|\tau\right)$ を $\theta_1\left(u|\tau\right)$ を用いて表わせ。

. . . .

$$\begin{aligned}\theta_4\left(u+\frac{\tau}{2}\middle|\tau\right) &= \vartheta\begin{bmatrix}0\\1/2\end{bmatrix}(u+\frac{\tau}{2}+\tau\mid\tau) &(57)\\ &= \mathbf{e}[-\frac{\tau}{4}-(u+\tau+\frac{1}{2})]\vartheta\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}(u+\tau\mid\tau) &(58)\\ &= \mathbf{e}[-\frac{5}{4}\tau-u-\frac{1}{2}]\theta_1\left(u|\tau\right) &(59)\end{aligned}$$

(c)　i. $\theta_1\left(u+\frac{1}{2}\middle|2\tau\right)$ を $\theta_2\left(u|2\tau\right)$ を用いて表わせ。

. . . .

$$\theta_1\left(u+\frac{1}{2}\middle|2\tau\right) = -\vartheta\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}(u+\frac{1}{2}+2\tau \mid 2\tau) \tag{60}$$
$$= -\vartheta\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}(u+1+2\tau \mid 2\tau) \tag{61}$$
$$= -\mathbf{e}[1]\vartheta\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}(u+2\tau \mid 2\tau) \tag{62}$$
$$= -\mathbf{e}[1]\theta_2\left(u|2\tau\right) \tag{63}$$

---

ii. $\theta_2\left(u+\frac{1}{2}\middle|2\tau\right)$ を $\theta_1\left(u|2\tau\right)$ を用いて表わせ。

$$\theta_2\left(u+\frac{1}{2}\middle|2\tau\right) = \vartheta\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}(u+\frac{1}{2}+2\tau \mid 2\tau) \tag{64}$$
$$= \vartheta\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}(u+2\tau \mid 2\tau) \tag{65}$$
$$= -\theta_1\left(u|2\tau\right) \tag{66}$$

---

iii. $\theta_3\left(u+\frac{1}{2}\middle|2\tau\right)$ を $\theta_4\left(u|2\tau\right)$ を用いて表わせ。

$$\theta_3\left(u+\frac{1}{2}\middle|2\tau\right) = \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u+\frac{1}{2}+2\tau \mid 2\tau) \tag{67}$$
$$= \vartheta\begin{bmatrix}0\\1/2\end{bmatrix}(u+2\tau \mid 2\tau) \tag{68}$$
$$= \theta_4\left(u|2\tau\right) \tag{69}$$

---

iv. $\theta_4\left(u+\frac{1}{2}\middle|2\tau\right)$ を $\theta_3\left(u|2\tau\right)$ を用いて表わせ。

$$\theta_4\left(u+\frac{1}{2}\middle|2\tau\right) = \vartheta\begin{bmatrix}0\\1/2\end{bmatrix}(u+\frac{1}{2}+2\tau \mid 2\tau) \tag{70}$$

$$= \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u+1+2\tau \mid 2\tau) \tag{71}$$

$$= \mathbf{e}[0]\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u+2\tau \mid 2\tau) \tag{72}$$

$$= \theta_3\left(u|2\tau\right) \tag{73}$$

（d） i. $\theta_1\left(u+\tau|2\tau\right)$ を $\theta_4\left(u|2\tau\right)$ を用いて表わせ。

. . . .

$$\theta_1\left(u+\tau|2\tau\right) \tag{74}$$

$$= -\vartheta\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}(u+\tau+2\tau \mid 2\tau) \tag{75}$$

$$= -\mathbf{e}[\frac{2\tau}{4}+u+3\tau+\frac{1}{2}]\vartheta\begin{bmatrix}0\\1/2\end{bmatrix}(u+2\tau+2\tau \mid 2\tau) \tag{76}$$

$$= -\mathbf{e}[\frac{7}{2}\tau+u+\frac{1}{2}]\mathbf{e}[-2\tau-2(u+2\tau+\frac{1}{2})]\vartheta\begin{bmatrix}0\\1/2\end{bmatrix}(u+2\tau \mid 2\tau) \tag{77}$$

$$= -\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau-u-\frac{1}{2}]\theta_4\left(u|2\tau\right) \tag{78}$$

---

ii. $\theta_2\left(u+\tau|2\tau\right)$ を $\theta_3\left(u|2\tau\right)$ を用いて表わせ。

. . . .

$$\theta_2\left(u+\tau|2\tau\right) = \vartheta\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}(u+\tau+2\tau \mid 2\tau) \tag{79}$$

$$= \mathbf{e}[\frac{2\tau}{4}+u+3\tau]\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u+2\tau+2\tau \mid 2\tau) \tag{80}$$

$$= \mathbf{e}[\frac{7}{2}\tau+u]\mathbf{e}[-2\tau-2(u+2\tau)]\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u+2\tau \mid 2\tau) \tag{81}$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau-u]\theta_3\left(u \mid 2\tau\right) \tag{82}$$

---

iii. $\theta_3\left(u+\tau|2\tau\right)$ を $\theta_2\left(u|2\tau\right)$ を用いて表わせ。

. . . .

$$\theta_3\left(u+\tau|2\tau\right) = \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(u+\tau+2\tau\mid 2\tau\right) \tag{83}$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{2\tau}{4}-u-2\tau]\vartheta\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}\left(u+2\tau\mid 2\tau\right) \tag{84}$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau-u]\theta_2\left(u\mid 2\tau\right) \tag{85}$$

---

iv. $\theta_4\left(u+\tau|2\tau\right)$ を $\theta_1\left(u|2\tau\right)$ を用いて表わせ。

. . . .

$$\theta_4\left(u+\tau\mid 2\tau\right) = \vartheta\begin{bmatrix}0\\1/2\end{bmatrix}\left(u+\tau+2\tau\mid 2\tau\right) \tag{86}$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{2\tau}{4}-u-2\tau-\frac{1}{2}]\vartheta\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}\left(u+2\tau\mid 2\tau\right) \tag{87}$$

$$= -\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau-u-\frac{1}{2}]\theta_1\left(u\mid 2\tau\right) \tag{88}$$

(e) $\theta_1(u\mid 2\tau),\ \theta_2(u\mid 2\tau),\ \theta_3(u\mid 2\tau),\ \theta_4(u\mid 2\tau)$ の $u\mapsto u+1$ としたときの変換性 (準周期性) を求めよ。

. . . .

$$\theta_1(u+\frac{1}{2}\mid 2\tau) = -\mathbf{e}[1]\theta_2\left(u\mid 2\tau\right) \tag{89}$$

$$\theta_2(u+\frac{1}{2}\mid 2\tau) = -\theta_1\left(u\mid 2\tau\right) \tag{90}$$

$$\theta_3(u+\frac{1}{2}\mid 2\tau) = \theta_4(u\mid 2\tau) \tag{91}$$

$$\theta_4(u+\frac{1}{2}\mid 2\tau) = \theta_3(u\mid 2\tau) \tag{92}$$

$$\theta_1(u+1\mid 2\tau) = -\mathbf{e}[1]\theta_2(u+\frac{1}{2}\mid 2\tau) = \mathbf{e}[1]\theta_1\left(u\mid 2\tau\right) \tag{93}$$

$$\theta_2(u+1\mid 2\tau) = -\theta_1(u+\frac{1}{2}\mid 2\tau) = \mathbf{e}[1]\theta_2\left(u\mid 2\tau\right) \tag{94}$$

$$\theta_3(u+1\mid 2\tau) = \theta_4(u+\frac{1}{2}\mid 2\tau) = \theta_3(u\mid 2\tau) \tag{95}$$

$$\theta_4(u+1\mid 2\tau) = \theta_4(u+\frac{1}{2}\mid 2\tau) = \theta_3(u\mid 2\tau) \tag{96}$$

(f) $\theta_1(u \mid 2\tau)$, $\theta_2(u \mid 2\tau)$, $\theta_3(u \mid 2\tau)$, $\theta_4(u \mid 2\tau)$ の $u \mapsto u + 2\tau$ としたときの変換性 (準周期性) を求めよ。

. . . .

$$\theta_1(u+\tau \mid 2\tau) = -\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u - \frac{1}{2}]\theta_4(u \mid 2\tau) \tag{97}$$

$$\theta_2(u+\tau \mid 2\tau) = \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u]\theta_3(u \mid 2\tau) \tag{98}$$

$$\theta_3(u+\tau \mid 2\tau) = \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u]\theta_2(u \mid 2\tau) \tag{99}$$

$$\theta_4(u+\tau \mid 2\tau) = -\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u - \frac{1}{2}]\theta_1(u \mid 2\tau) \tag{100}$$

$$\theta_1(u+2\tau \mid 2\tau) = -\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u - \frac{1}{2}]\theta_4(u+\tau \mid 2\tau) \tag{101}$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u - \frac{1}{2}]\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u - \frac{1}{2}]\theta_1(u \mid 2\tau) \tag{102}$$

$$= \mathbf{e}[-5\tau - 2u - 1]\theta_1(u \mid 2\tau) \tag{103}$$

$$\theta_2(u+2\tau \mid 2\tau) = \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u]\theta_3(u+\tau \mid 2\tau) \tag{104}$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u]\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u]\theta_2(u \mid 2\tau) \tag{105}$$

$$= \mathbf{e}[-5\tau - 2u]\theta_2(u \mid 2\tau) \tag{106}$$

$$\theta_3(u+2\tau \mid 2\tau) = \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u]\theta_2(u+\tau \mid 2\tau) \tag{107}$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u]\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u]\theta_3(u \mid 2\tau) \tag{108}$$

$$= \mathbf{e}[-5\tau - 2u]\theta_3(u \mid 2\tau) \tag{109}$$

$$\theta_4(u+2\tau \mid 2\tau) = -\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u - \frac{1}{2}]\theta_1(u+\tau \mid 2\tau) \tag{110}$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u - \frac{1}{2}]\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u - \frac{1}{2}]\theta_4(u \mid 2\tau) \tag{111}$$

$$= \mathbf{e}[-5\tau - 2u - 1]\theta_4(u \mid 2\tau) \tag{112}$$

参考資料

代数学演習– テータ関数 –

```
https://www.juen.ac.jp/math/nakagawa/thetafunction.pdf
```

テータ関数

```
http://www.wannyan.net/scidog/ellipse/ch04.pdf
```

$$\theta_1(u+1 \mid \tau) = -\theta_1(u \mid \tau) \tag{113}$$
$$\theta_2(u+1 \mid \tau) = -\theta_2(u \mid \tau) \tag{114}$$
$$\theta_3(u+1 \mid \tau) = \theta_3(u \mid \tau) \tag{115}$$
$$\theta_4(u+1 \mid \tau) = \theta_4(u \mid \tau) \tag{116}$$
$$\theta_1(u+\tau \mid \tau) = -\mathrm{e}\left[-\tau-2u\right]\theta_1(u \mid \tau) \tag{117}$$
$$\theta_2(u+\tau \mid \tau) = \mathrm{e}[-\tau-2u]\theta_2(u \mid \tau) \tag{118}$$
$$\theta_3(u+\tau \mid \tau) = \mathrm{e}[-\tau-2u]\theta_3(u \mid \tau) \tag{119}$$
$$\theta_4(u+\tau \mid \tau) = -\mathrm{e}\left[-\tau-2u\right]\theta_4(u \mid \tau) \tag{120}$$
$$\theta_1(-u \mid \tau) = -\theta_1(u \mid \tau) \tag{121}$$
$$\theta_2(-u \mid \tau) = \theta_2(u \mid \tau) \tag{122}$$
$$\theta_3(-u \mid \tau) = \theta_3(u \mid \tau) \tag{123}$$
$$\theta_4(-u \mid \tau) = \theta_4(u \mid \tau) \tag{124}$$

---

1. $b(u \mid \tau)$ をテータ関数の積で表せ。

. . . .

$$b(u \mid \tau) = \frac{\theta_2\left(\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right)\theta_1\left(u+\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right) - \theta_1\left(\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right)\theta_2\left(u+\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right)}{2[\theta_1\theta_2]\left(\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right)} \tag{125}$$

$$b(u+1 \mid \tau) = -b(u \mid \tau), \quad b(u+2\tau \mid \tau) = \mathrm{e}[-4\tau-2(\eta+2u)]b(u \mid \tau) \tag{126}$$

$$\begin{cases} p=1,\ q=1,\ A_1=2\tau+\eta,\ A_2=2,\ B=\frac{1}{2} \\ \#(\text{zeros of } b(u \mid \tau)) \equiv A_2 p = 2 \pmod{(\mathbb{Z}\oplus 2\tau\mathbb{Z})} \\ \sum(\text{zeros of } b(u \mid \tau)) \equiv -\eta+\tau \pmod{(\mathbb{Z}\oplus 2\tau\mathbb{Z})} \end{cases} \tag{127}$$

$b(0 \mid \tau)$ の定義式から $b(0 \mid \tau) = 0$ となる。つまり、$u \equiv 0 \pmod{(\mathbb{Z}\oplus 2\tau\mathbb{Z})}$ は $b(u \mid \tau)$ の zero である。

また、次の式から $b(\tau - \eta \mid \tau) = 0$ となる。

$$\theta_1(\tau - \eta + \frac{\eta}{2} \mid \tau) = -\mathbf{e}[\eta - \tau]\theta_1\left(-\eta + \frac{\eta}{2} \mid \tau\right) = \mathbf{e}[\eta - \tau]\theta_1\left(\frac{\eta}{2} \mid \tau\right) \tag{128}$$

$$\theta_2(\tau - \eta + \frac{\eta}{2} \mid \tau) = \mathbf{e}[\eta - \tau]\theta_2\left(-\eta + \frac{\eta}{2} \mid \tau\right) = \mathbf{e}[\eta - \tau]\theta_2\left(\frac{\eta}{2} \mid \tau\right) \tag{129}$$

この為、$b(u \mid \tau)$ は $\theta_1(u \mid 2\tau)$ と $\theta_4(u + \eta \mid 2\tau)$ を因子に持つ。
$f(u)$ を次のように置く。

$$f(u) = \theta_1(u \mid 2\tau)\theta_4(u + \eta \mid 2\tau) \tag{130}$$

$f(u)$ の周期を確認する。

$$\begin{aligned}
f(u+1) &= \theta_1(u + 1 \mid 2\tau)\theta_4(u + 1 + \eta \mid 2\tau) && (131)\\
&= -\theta_1(u \mid 2\tau)\theta_4(u + \eta \mid 2\tau) && (132)\\
&= -f(u) && (133)\\
f(u+2\tau) &= \theta_1(u + 2\tau \mid 2\tau)\theta_4(u + 2\tau + \eta \mid 2\tau) && (134)\\
&= (-\mathbf{e}[-2u - 2\tau]\theta_1(u \mid 2\tau))(-\mathbf{e}[-2(u+\eta) - 2\tau]\theta_4(u + \eta \mid 2\tau)) && (135)\\
&= \mathbf{e}[-4u - 4\tau - 2\eta]\theta_1(u \mid 2\tau)\theta_4(u + \eta \mid 2\tau) && (136)\\
&= \mathbf{e}[-4u - 4\tau - 2\eta]f(u) && (137)
\end{aligned}$$

これにより $b(u \mid \tau)$ と $f(u)$ の変換性、零点が一致してる為、次の正則関数が出来る。

$$\frac{b(u \mid \tau)}{\theta_1(u \mid 2\tau)\theta_4(u + \eta \mid 2\tau)} \tag{138}$$

閉包 $\overline{\mathbb{C}/(\mathrm{mod}\ \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})}$ 上で $\mathbb{C}$ 上の関数値が決まる。
コンパクト集合上の正則関数は最大値を持つ。
リウヴィルの定理により、有界な整関数は定数関数である。
つまり、定数 c で次のようになる。

$$c = \frac{b(u \mid \tau)}{\theta_1(u \mid 2\tau)\theta_4(u + \eta \mid 2\tau)} \tag{139}$$

$u = -\eta$ を代入すると $b(-\eta \mid 2\tau) = -1$ であるので、

$$c = \frac{-1}{\theta_1(-\eta \mid 2\tau)\theta_4(0 \mid 2\tau)} \tag{140}$$

である。

よって、$b(u \mid \tau)$ は次のようにかける。

$$b(u \mid \tau) = -\frac{\theta_1(u \mid 2\tau)\theta_4(u+\eta \mid 2\tau)}{\theta_1(-\eta \mid 2\tau)\theta_4(0 \mid 2\tau)} \tag{141}$$

---

2. $c(u \mid \tau) = (w_{10}(u \mid \tau) + w_{11}(u \mid \tau))/2$ をテータ関数の積で表せ。

. . . .

$$c(u \mid \tau) = \frac{\theta_3\left(\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right)\theta_4\left(u+\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right) + \theta_4\left(\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right)\theta_3\left(u+\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right)}{2[\theta_3\theta_4]\left(\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right)} \tag{142}$$

$$\begin{aligned}
\theta_3\left(u+\frac{\eta}{2}+2\tau\middle|\tau\right) &= \mathbf{e}[-\tau-2(u+\frac{\eta}{2}+\tau)]\theta_3(u+\frac{\eta}{2}+\tau \mid \tau) && (143)\\
&= \mathbf{e}[-3\tau-2u-\eta]\mathbf{e}[-\tau-2(u+\frac{\eta}{2})]\theta_3(u+\frac{\eta}{2} \mid \tau) && (144)\\
&= \mathbf{e}[-4\tau-4u-2\eta]\theta_3(u+\frac{\eta}{2} \mid \tau) && (145)\\
\theta_4\left(u+\frac{\eta}{2}+2\tau\middle|\tau\right) &= \mathbf{e}[-4\tau-4u-2\eta]\theta_4(u+\frac{\eta}{2} \mid \tau) && (146)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(u+1 \mid \tau) &= c(u \mid \tau) && (147)\\
c(u+2\tau \mid \tau) &= \mathbf{e}[-4\tau-4u-2\eta]c(u \mid \tau) && (148)
\end{aligned}$$

$c(\tau \mid \tau) = c(\tau-\eta \mid \tau) = 0$ より $\tau,\ \tau-\eta$ が $c(u \mid \tau)$ の零点である。
$\theta_4(\tau \mid 2\tau) = 0$ より、$\tau,\ \tau-\eta$ は $\theta_4(u \mid 2\tau),\ \theta_4(u+\eta \mid 2\tau)$ の零点である。
$f(u) = \theta_4(u \mid 2\tau)\theta_4(u+\eta \mid 2\tau)$ と置く。このとき、次の式が得られる。

$$f(u+1) = f(u), \quad f(u+2\tau) = \mathbf{e}[-4\tau-4u-2\eta]f(u) \tag{149}$$

$c(u \mid \tau)$ の変換性は $f(u)$ と同じで、零点も同じである為次の関数は正則関数である。

$$\frac{c(u \mid \tau)}{\theta_4(u \mid 2\tau)\theta_4(u+\eta \mid 2\tau)} \tag{150}$$

この関数が前問と同様に定数関数であるので、その定数を c とおく。

$$c = \frac{c(u \mid \tau)}{\theta_4(u \mid 2\tau)\theta_4(u+\eta \mid 2\tau)} \tag{151}$$

$c(0 \mid \tau) = 1$ であるので、$c = \frac{1}{\theta_4(0|2\tau)\theta_4(\eta|2\tau)}$ となる。

ここから $c(u \mid \tau)$ は次のように表される。

$$c(u \mid \tau) = \frac{\theta_4(u \mid 2\tau)\theta_4(u+\eta \mid 2\tau)}{\theta_4(0 \mid 2\tau)\theta_4(\eta \mid 2\tau)} \tag{152}$$

---

3. $d(u \mid \tau) = (w_{10}(u \mid \tau) - w_{11}(u \mid \tau))/2$ をテータ関数の積で表せ。

....

$$d(u \mid \tau) = \frac{\theta_3\left(\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right)\theta_4\left(u+\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right) - \theta_4\left(\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right)\theta_3\left(u+\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right)}{2[\theta_3\theta_4]\left(\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right)} \tag{153}$$

$$d(u+1 \mid \tau) = d(u \mid \tau),\ d(u+2\tau \mid \tau) = \mathbf{e}[-4\tau - 4u - 2\eta]d(u \mid \tau) \tag{154}$$

$u \equiv 0 \pmod{(\mathbb{Z} \oplus 2\tau\mathbb{Z})}$ と $u \equiv -\eta \pmod{(\mathbb{Z} \oplus 2\tau\mathbb{Z})}$ が、$d(u \mid \tau)$ の零点である。
$\theta_1(u \mid 2\tau),\ \theta_1(u+\eta \mid 2\tau)$ が $0,\ -\eta$ を零点として持つ。
そこで、$f(u) = \theta_1(u \mid 2\tau)\theta_1(u+\eta \mid 2\tau)$ とおくと、$f(u+1) = f(u),\ f(u+2\tau) = \mathbf{e}[-4\tau - 4u - 2\eta]f(u)$ である為、$d(u \mid \tau)$ と同じ変換性である。
$f(u)$ と $d(u \mid \tau)$ の零点も等しいので次の式が正則関数である。

$$\frac{d(u \mid \tau)}{\theta_1(u \mid 2\tau)\theta_1(u+\eta \mid 2\tau)} \tag{155}$$

これまでの問いと同じく定数関数であるので、定数 c を用いて次のようにかける。

$$c = \frac{d(u \mid \tau)}{\theta_1(u \mid 2\tau)\theta_1(u+\eta \mid 2\tau)} \tag{156}$$

ここで、

$$d(\tau \mid \tau) = \frac{\theta_3\left(\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right)\theta_4\left(\tau+\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right) - \theta_4\left(\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right)\theta_3\left(\tau+\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right)}{2[\theta_3\theta_4]\left(\frac{\eta}{2}\middle|\tau\right)} = \mathbf{e}[-\tau - \eta] \tag{157}$$

であるので、定数 c は次のように表せる。

$$c = \frac{\mathbf{e}[-\tau - \eta]}{\theta_1(\tau \mid 2\tau)\theta_1(\tau+\eta \mid 2\tau)} \tag{158}$$

これにより $d(u \mid \tau)$ は次のように表すことが出来る。

$$d(u \mid \tau) = \frac{\mathbf{e}[-\tau - \eta]\theta_1(u \mid 2\tau)\theta_1(u+\eta \mid 2\tau)}{\theta_1(\tau \mid 2\tau)\theta_1(\tau+\eta \mid 2\tau)} \tag{159}$$
