定義

ベクトル空間

集合 V に対し、

$$\text{和} \qquad \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in W \Rightarrow \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W \tag{1}$$

$$\text{スカラー倍} \quad \boldsymbol{a} \in W, c \in K \Rightarrow c\boldsymbol{a} \in W \tag{2}$$

が定義されていて、次の 8 個の公理を満たすとき V を K 上のベクトル空間という。

公理

1. ${}^\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in V$ に対して $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
2. ${}^\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in V$ に対して $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$
3. ${}^\forall\boldsymbol{a} \in V$ に対して $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$ となる元 $\boldsymbol{0}$ がある
4. ${}^\forall\boldsymbol{a} \in V$ に対して $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a'} = \boldsymbol{0}$ となる V の元 $\boldsymbol{a'}$ がある
5. ${}^\forall c \in K$ と ${}^\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in V$ に対して $c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = c\boldsymbol{a}+c\boldsymbol{b}$
6. ${}^\forall c,c' \in K$ と ${}^\forall\boldsymbol{a} \in V$ に対して $(c+c')\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{a}+c'\boldsymbol{a}$
7. ${}^\forall c,c' \in K$ と ${}^\forall\boldsymbol{a} \in V$ に対して $c(c'\boldsymbol{a}) = (cc')\boldsymbol{a}$
8. ${}^\forall\boldsymbol{a} \in V$ に対して $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

問題

ベクトル空間 V の部分集合 W が次の条件を満たすとする。

$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in W \Rightarrow \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W \tag{3}$$

$$\boldsymbol{a} \in W, c \in K \Rightarrow c\boldsymbol{a} \in W \tag{4}$$

このとき、W はベクトル空間の公理を満たすことを示せ。

. . . .

V はベクトル空間であるので公理をすべて満たしている。部分集合 $W \subset V$ の元についてて W の中で公理を満たしていることを確認する。

1. ${}^\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in W$ とする。
   $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in W \subset V$ であるので、V の公理から $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ が満たされる。
   式 (3) より、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W$ であり、$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \in W$ であるから、W の中で $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ である。
2. ${}^\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in W$ とする。
   $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in W \subset V$ より V 上で $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ を満たす。
   式 (3) より、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W$ であり、$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} \in W$ である。よって、$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} \in W$ であり、$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \in W$ であるから W 上でも $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ である。

3. ${}^\forall \boldsymbol{a} \in W$ とする。

   $\boldsymbol{a} \in W \subset V$ である為、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$ となる元 $\boldsymbol{0}$ が V に存在する。

   $0 \in K, \boldsymbol{a} \in V$ より $0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \in V$ だが $\boldsymbol{a} \in W$ であるので式 (4) より $0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \in W$ となる。

4. ${}^\forall \boldsymbol{a} \in W$ とする。

   $\boldsymbol{a} \in W \subset V$ である為、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a'} = \boldsymbol{0}$ となる元 $\boldsymbol{a'}$ が V に存在する。

   上の条件 3 より $0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ である。$0 \in K$ であるが、K 上で $1 + \alpha = 0$ なる α が存在する。

   また、次にある条件 6 $[(1+\alpha)\boldsymbol{a} = 1\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{a}]$ と条件 8 $[1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}]$ により W 上で次の式が成り立つ。

$$0 = 0\boldsymbol{a} = (1+\alpha)\boldsymbol{a} = 1\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{a} \tag{5}$$

   この $\alpha\boldsymbol{a} \in W$ は $\boldsymbol{a'} \in V$ と一致する。

5. ${}^\forall c \in K,\ {}^\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ とする。

   $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W \subset V$ であるので、V 上で $c(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = c\boldsymbol{a} + c\boldsymbol{b}$ である。

   式 (3) より $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$ であり、式 (4) より $c(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \in W$ となる。

   $c \in K,\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ であるから式 (4) より $c\boldsymbol{a}, c\boldsymbol{b} \in W$ であり、式 (3) より $c\boldsymbol{a} + c\boldsymbol{b} \in W$ である。

   つまり、W 上でも $c(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = c\boldsymbol{a} + c\boldsymbol{b}$ である。

6. ${}^\forall c, c' \in K,\ {}^\forall \boldsymbol{a} \in W$ とする。

   $\boldsymbol{a} \in W \subset V$ である為、V 上で $(c + c')\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{a} + c'\boldsymbol{a}$ である。

   $c, c' \in K$ より $c + c' \in K$ である為、式 (4) より $(c + c')\boldsymbol{a} \in W$ である。

   また、式 (4) より $c\boldsymbol{a}, c'\boldsymbol{a} \in W$ であり、式 (3) より $c\boldsymbol{a} + c'\boldsymbol{a} \in W$ である。

   つまり、W 上で $(c + c')\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{a} + c'\boldsymbol{a}$ となる。

7. ${}^\forall c, c' \in K,\ {}^\forall \boldsymbol{a} \in W$ とする。

   $\boldsymbol{a} \in W \subset V$ である為、V 上で $c(c'\boldsymbol{a}) = (cc')\boldsymbol{a}$ であるが、式 (4) より $c'\boldsymbol{a} \in W$ であり $c(c'\boldsymbol{a}) \in W$ である。$cc' \in K$ であるので $(cc')\boldsymbol{a} \in W$ である。つまり、W の元としても $c(c'\boldsymbol{a}) = (cc')\boldsymbol{a}$ である。

8. ${}^\forall \boldsymbol{a} \in W$ とする。

   $\boldsymbol{a} \in W \subset V$ である為、V 上で $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ であるが、W の元としても $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ である。