正規分布 $N(m, \sigma)$ において

$$\text{平均 } m \tag{1}$$
$$\text{分散 } \sigma \tag{2}$$
$$\text{確率密度関数 } \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{3}$$

母集団は正規分布 $N(\mu, 2)$ である。母平均 μ、母分散 2

標本として 50 個取り出す。取り出した個体の平均は 10 である。

信頼係数 0.95 における μ の信頼区間を算出

(1). 取り出した 50 個の標本 $X_i (i = 1, \ldots, 50)$ に対し、次のように標本平均 $\overline{X_{50}}$ を定め、分散 $V(\overline{X_{50}})$ を求める。

$$\overline{X_{50}} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} X_i$$

$X_i (i = 1, \ldots, 50)$ が独立同分布 (平均 μ、分散 2) であれば正規分布でなくても $V(\overline{X_{50}}) = \frac{2}{50}$ である。

$$\begin{aligned}
V(\overline{X_{50}}) &= V\left(\frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} X_i\right) && (4) \\
&= \frac{1}{50^2} \sum_{i=1}^{50} V(X_i) && (5) \\
&= \frac{1}{50^2} \sum_{i=1}^{50} 2 \qquad\qquad V(X_i) = 2 \ (i = 1, \ldots, 50) && (6) \\
&= \frac{2}{50} && (7)
\end{aligned}$$

$\overline{X_{50}}$ の平均 $E(\overline{X_{50}})$ は、$E(\overline{X_{50}}) = \mu$ である。

平均と分散を利用し確率変数 $\overline{X_{50}}$ を正規化すると $\frac{\overline{X_{50}} - \mu}{\sqrt{V(\overline{X_{50}})}}$ であり、こ

の正規化した確率変数の平均、分散、密度関数は

$$\text{平均 } 0 \tag{8}$$

$$\text{分散 } 1 \tag{9}$$

$$\text{確率密度関数 } \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{10}$$

(2).

$$\int_{-1.96}^{1.96} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0.95$$

この式は正規分布 (平均 0、分散 1) の空間で -1.96 から 1.96 に含まれる部分が全体の 95% であることを意味している。

標準正規分布 $N(0,1)$ において確率変数 S についての確率は

$$P(-1.96 \leq S \leq 1.96) = 0.95$$

となる。これは 95% の確率で確率変数 S が区間 $[-1.96, 1.96]$ に含まれることを意味している。

$\frac{\overline{X_{50}}-\mu}{\sqrt{V(\overline{X_{50}})}}$ は $N(0,1)$ に従うので、これが区間 $[-1.96, 1.96]$ に含まれる確率が 95% である。

そこで、式の変形を行う。

$$-1.96 \leq \frac{\overline{X_{50}}-\mu}{\sqrt{V(\overline{X_{50}})}} \leq 1.96 \tag{11}$$

$$\overline{X_{50}} - 1.96\sqrt{V(\overline{X_{50}})} \leq \mu \leq \overline{X_{50}} + 1.96\sqrt{V(\overline{X_{50}})} \tag{12}$$

$V(\overline{X_{50}}) = \frac{2}{50}$ は先ほど求めたとおり $\frac{2}{50}$ であり、標本平均 $\overline{X_{50}}$ の代わりにサンプルとして得た平均値 10 を当てはめる。

$$10 - 1.96\sqrt{\frac{2}{50}} \leq \mu \leq 10 + 1.96\sqrt{\frac{2}{50}} \tag{13}$$

$$9.608 \leq \mu \leq 10.392 \tag{14}$$

求める区間は $9.608 \leq \mu \leq 10.392$。