$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ とスカラー $x, y \in \mathbb{R}$ について以下の問いに答えよ。

1. 内積 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ を求めよ。

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 0 \tag{2}$$

---

2. $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}_3 - x\boldsymbol{a}_1 - y\boldsymbol{a}_2$ とおく。$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の両方と直交するとき、x, y と $\boldsymbol{c}$ を求めよ。

次の内積を求める。

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) = 3, (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) = 2, (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0, (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) = 3, (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = -4 \tag{3}$$

$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ と直交するので、$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_1) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_2) = 0$ を満たす。

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_1) =& (\boldsymbol{a}_3 - x\boldsymbol{a}_1 - y\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) && (4)\\
=& (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1) - x(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) - y(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) = 3 - 3x - 0y = 0 && (5)\\
x =& 1 && (6)\\
(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_1) =& (\boldsymbol{a}_3 - x\boldsymbol{a}_1 - y\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) && (7)\\
=& (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2) - x(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) - y(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) = -4 - 0x - 2y = 0 && (8)\\
y =& -2 && (9)
\end{aligned}$$

よって、答えは次のようになる。

$$x = 1,\ y = -2,\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

---

3. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{c}$ の大きさをそれぞれ $\|\boldsymbol{a}_1\|, \|\boldsymbol{a}_2\|, \|\boldsymbol{c}\|$ とし、$\boldsymbol{b}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}, \boldsymbol{b}_2 = \dfrac{\boldsymbol{a}_2}{\|\boldsymbol{a}_2\|}, \boldsymbol{b}_3 = \dfrac{\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|}$ とおく。このとき、$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ をそれぞれ求めよ。

それぞれのベクトルの大きさは次の通り。$\|\boldsymbol{a}_1\| = \sqrt{3},\ \|\boldsymbol{a}_2\| = \sqrt{2},\ \|\boldsymbol{c}\| = \sqrt{6}$

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{11}$$