
$\mathbb{R}^2$ 上の定置関数を次のように定める。

$$1 : \mathbb{R}^2 \to \{1\}, \quad (x, y) \mapsto 1 \tag{1}$$

有界集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の関数 1 が積分可能である時、D を面積確定であるという。また、$\int_D 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ を D の面積と言う。D の面積を $\mathrm{Area}(D)$ と書く。

1. 積分定理が使えるような 2 次元領域 D は面積確定であることを示せ。
2. $\mathbb{R}^2$ 上の 3 つの C^1-級ベクトル場 $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次のように定める。

$$\boldsymbol{f}_1(x, y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}_2(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}_3(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

積分定理が使えるような 2 次元領域に対し、以下が成り立つことを示せ。

$$\mathrm{Area}(D) = \int_{\partial D} \boldsymbol{f}_1 = \int_{\partial D} \boldsymbol{f}_2 = \int_{\partial D} \boldsymbol{f}_3 \tag{3}$$

…………………………………………………………………………

1. 領域 D はある集合 I に含まれていて無限に広がっておらず、縦線集合又は横線集合であるため、積分する順序が決まっている。
   D の境界 ∂D は有限個曲線 C_i を繋いだものである。
   これにより、D は境界に囲まれた領域であり、この領域は 2 変数の一方を固定すれば直線で表せる。この順序で積分することで面積を求めることが出来る。
2.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より } \boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{f}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{f}_3 \tag{4}$$

これにより次の式が成り立つ。

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{f}_1 = \int_{\partial D} \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{f}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{f}_3\right) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} \boldsymbol{f}_2 + \frac{1}{2}\int_{\partial D} \boldsymbol{f}_3 \tag{5}$$

積分定理が式 (9) を満たす定理であるなら、$\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ とすると次の式が得られる。

$$\iint_D (1 - 0)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D} (0\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) = \int_{\partial D} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} \tag{6}$$

これにより $\mathrm{Area}(D) = \int_{\partial D} \boldsymbol{f}_2$ が得られる。同様にして $\mathrm{Area}(D) = \int_{\partial D} \boldsymbol{f}_3$ である。

これを式 (5) に当てはめると

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{2}\int_{\partial D} \boldsymbol{f}_2 + \frac{1}{2}\int_{\partial D} \boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{2}\int_{\partial D} \mathrm{Area}(D) + \frac{1}{2}\int_{\partial D} \mathrm{Area}(D) = \mathrm{Area}(D) \tag{7}$$

が得られる。

よって次の式が成り立つ。

$$\mathrm{Area}(D) = \int_{\partial D} \boldsymbol{f}_1 = \int_{\partial D} \boldsymbol{f}_2 = \int_{\partial D} \boldsymbol{f}_3 \tag{8}$$

グリーンの定理

D を有界閉領域、$P(x, y)$, $Q(x, y)$ を C^1-級関数の時、次の式が成り立つ。

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D} (P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y) \tag{9}$$