1. $(X, \mathcal{M})$ を可測空間とし、$f : X \to [0, \infty]$ は $\mathcal{M}$-可測とする。X 上の $[0, \infty]$-値関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ で次の条件を満たすものを構成せよ。
(a) $^{\forall} n \in \mathbb{N}$ に対し、f_n は $\mathcal{M}$-可測
(b) $^{\forall} n \in \mathbb{N}$ と $^{\forall} x \in X$ に対し、$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$
(c) $^{\forall} x \in X$ に対し、$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$

……………………………………………………………………………

$f_n(x) = f(x) - \frac{1}{n}$ と定義すると、f は $\mathcal{M}$-可測関数なので、f_n も可測関数。
$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ であり、$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ である。

---

2. $(X, \mathcal{M})$ を可測空間とする。$z \in X$ を固定し、$\delta_z : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ を次で定義する。

$$\delta_z(A) = \begin{cases} 1 & (z \in A) \\ 0 & (z \notin A) \end{cases} \tag{1}$$

この定義により δ_z は $(X, \mathcal{M})$ 上の測度となる。
(a) $A \in \mathcal{M}$ に対し、$\delta_z(A) = \mathbf{1}_A(z)$ が成り立つことを示せ。

……………………………………………………………………………

指示関数 $\mathbf{1}_A(z)$ は次のような定義である。

$$\mathbf{1}_A(z) = \begin{cases} 1 & (z \in A) \\ 0 & (z \notin A) \end{cases} \tag{2}$$

$z \in A$ であれば、$\delta_z(A) = \mathbf{1}_A(z) = 1$ であり、$z \notin A$ であれば、$\delta_z(A) = \mathbf{1}_A(z) = 0$ である。
つまり、$A \in \mathcal{M}$ に対し、$\delta_z(A) = \mathbf{1}_A(z)$ である。

(b) $f : X \to [0, \infty)$ を $\mathcal{M}$-可測な単関数とする。この時、次が成り立つことを示せ。

$$\int_X f d\delta_z = f(z) \tag{3}$$

……………………………………………………………………………

$\{\alpha_j\}_{j=1}^{k} \subset \mathbb{R}$ と $\{A_j\}_{j=1}^{k} \subset \mathcal{M}$ に対して、$f = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ とすると、ルベーグ積分の定義より左辺は次のようになる。

$$\int_X f d\delta_z = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \delta_z(A_j) \tag{4}$$

前問より、$\delta_z(A) = \mathbf{1}_A(z)$ であるので、次が成り立つ。

$$\int_X f d\delta_z = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \delta_z(A_j) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}(z) = f(z) \tag{5}$$

（c）$\mathcal{M}$-可測な関数 $f : X \to [0, \infty]$ に対し、(a) と同じ等式が成り立つことを示せ。

. . . .

$f(A) = \mathbf{1}_A(z)$
