1. – 連続全射な開写像 –

連続な全射 f が、開写像もしくは閉写像であるなら f は商写像であることを示せ。

………………………………………………………………

$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし連続な全射を $f : X \to Y$ とする。
f が開写像であれば $O \in \mathcal{O}_X \Rightarrow f(O) \in \mathcal{O}_Y$ である。
任意の集合 $S \subset Y$ に対して、$f^{-1}(S) \in \mathcal{O}_X$ とする。f は開写像であるので、$f(f^{-1}(S)) \in \mathcal{O}_Y$ であるが f は全射であるので $f(f^{-1}(S)) = S$ となる。
つまり、$f^{-1}(S) \in \mathcal{O}_X \Rightarrow S \in \mathcal{O}_Y$ であるので、f は商写像である。
f が閉写像であれば C が閉集合なら $f(C)$ も閉集合となる。
任意の集合 $S \subset Y$ に対して、$f^{-1}(S)$ を閉集合とする。f は閉写像であるので、$f(f^{-1}(S))$ は閉集合となるが f は全射であるので $f(f^{-1}(S)) = S$ となる。
つまり、$f^{-1}(S)$ が閉集合であれば S も閉集合となる為、f は商写像である。

---

2. – 商空間 –

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし、$f : X \to Y$ を全射とする。このとき、$(Y, \mathcal{O}_Y)$ を f における商空間、つまり $\mathcal{O}_Y = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{O}\}$ とすると、$(Y, \mathcal{O}_Y)$ は f を連続にする最強の位相であることを示せ。

………………………………………………………………

f を連続とするような Y の任意の位相を $\mathcal{T}$ とする。$G \in \mathcal{T}$ であれば $f^{-1}(G) \in \mathcal{O}$ であるため、$G \in \mathcal{O}_Y$ となる。
よって、$\mathcal{T} \subset \mathcal{O}_Y$ となり、$\mathcal{O}_Y$ が最も強い位相であることがわかる。

---

3. – 商写像 –

商写像は連続であることを示せ。

………………………………………………………………

写像 $f : X \to Y$ が商写像であるとは f は全射であり、Y の位相 $\mathcal{O}_Y$ が商位相となるときをいう。
$\mathcal{O}_Y = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{O}\}$ であるので、

$$S \subset Y \text{が開集合} \Leftrightarrow f^{-1}(S) \subset X \text{が開集合} \tag{1}$$

である。
よって、f は連続写像である。
