定義

補有限位相

集合 X に対して部分集合族 $\mathcal{O}_{cf}$ を定める。

$$\mathcal{O}_{cf} = \{\emptyset\} \cup \{O \subset X \mid X \backslash O \text{ は有限集合}\} \tag{1}$$

$\mathcal{O}_{cf}$ を補有限位相といい、$(X, \mathcal{O}_{cf})$ を補有限位相空間という。

距離関数

集合 X 上の実数値関数 d が次を満たすとする。

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \tag{2}$$

$$d(a,b) \geq 0 \tag{3}$$

$$d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b \tag{4}$$

$$d(a,b) = d(b,a) \tag{5}$$

$$d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c) \tag{6}$$

このとき、関数 d を距離関数という。

集合 X に距離関数 d が定義される場合、この 2 つの組合せ (X, d) を距離空間という。

ノルム

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して次の値を L_p ノルムという。

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{7}$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して L_2 ノルム $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2$ がユークリッド距離を表している。$d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2$ と書いたりする。

L_1 ノルムを距離関数として書く場合、$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_1$ と書く。

問題

1. [補有限位相空間]

   集合 X 上の補有限位相空間 $(X, \mathcal{O}_{cf})$ が位相空間であることを確かめよ。

   ……………………………………………………………………………………

   $X^c = \emptyset$ より $X \in \mathcal{O}_{cf}$ である。

   $A, B \in \mathcal{O}_{cf}$ に対して $A \cap B \in \mathcal{O}_{cf}$ であることを示す。

   補集合を考えれば $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ である。要素の個数は $|(A \cap B)^c| \leq |A^c| + |B^c|$ であるので、有限である。よって、$A \cap B \in \mathcal{O}_{cf}$ である。

   また、$A_i \in \mathcal{O}_{cf}$ に対して、$A_1^c \supset (A_1 \cup A_2)^c$ である。これを繰り返し次のような集合の列ができる。

   $$A_1^c \supset (A_1 \cup A_2)^c \supset (A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c \supset \cdots \supset (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^c \supset \cdots \tag{8}$$

$A_i \in \mathcal{O}_{cf}$ であるので、A_1^c は有限集合となり、これに含まれる集合は有限集合である。よって、$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{O}_{cf}$ となる。
以上により、$\mathcal{O}_{cf}$ は開集合族となり、$(X, \mathcal{O}_{cf})$ は位相空間となる。

---

2. [補有限位相空間]
$(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{cf})$ において $a < b$ なる任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して開区間 (a, b) は開集合ではないことを示せ。

....

(a, b) の補集合は $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$ である。これは有限集合ではないので $(a, b) \notin \mathcal{O}_{cf}$ であり、開集合ではない。

---

3. [$\mathbb{R}$ 上の開集合]
$(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{d_1})$ における $\mathbb{R}$ において、$[a, b)$ および $[a, b]$ は開集合でないことを示せ。

....

$x, y \in \mathbb{R}$ について距離関数 d_1 は $d_1(x, y) = |x - y|$ となる L_1 ノルム (マンハッタン距離) を示している。
この時、開集合族 $\mathcal{O}_{d_1}$ は次のような集合族である。

$$\mathcal{O}_{d_1} = \{O \subset \mathbb{R} \mid {}^{\forall}x \in O, {}^{\exists}\varepsilon > 0 \ s.t. \ d_1(x, y) < \varepsilon \Rightarrow y \in O\} \tag{9}$$

$a \in [a, b)$ である。$d_1(a, y) < \varepsilon$ となる y が存在する区間は $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ である。$\varepsilon > 0$ をどれほど小さく取ってきても区間 $(a - \varepsilon, a)$ の点は区間 $[a, b)$ に含まれることはない。よって、$[a, b) \notin \mathcal{O}_{d_1}$ となり開集合ではない。
$[a, b]$ も同様に $[a, b] \notin \mathcal{O}_{d_1}$ であり開集合ではない。
