次の微分方程式の原点周りの級数解と、その収束半径を求めよ。

1. $y'' + xy' + y = 0$
2. $(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = 0$

....

級数解を次のようにおく。

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

これを微分する。

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{2}$$

y, y', y'' を微分方程式に当てはめ係数 a_n を求める。

.... $y'' + xy' + y = 0$ の場合 ....

級数解を代入し同じ次数の項をまとめると次のようになる。

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \tag{3}$$

$$2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n) x^n = 0 \tag{4}$$

任意の x について成立する為、この式は恒等的に 0 である。よって、次の式が得られる。

$$2a_2 + a_0 = 0 \qquad (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0 \tag{5}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} a_0 \qquad a_{n+2} = -\frac{1}{n+2} a_n \tag{6}$$

a_n は次のような形で得られる。

$$a_n = -\frac{1}{n} a_{n-2} = \left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-2}\right) a_{n-4} = \left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-2}\right)\left(-\frac{1}{n-4}\right) a_{n-6} \tag{7}$$

漸化式 (6) が一つ飛ばしているので、n が偶数の場合と奇数の場合で分けて考える。

$n = 2k$ の場合

$$a_{2k} = \left(-\frac{1}{2k}\right)\left(-\frac{1}{2(k-1)}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}\right) a_0 = \frac{(-1)^k}{2^k k!} a_0 \tag{8}$$

となる。

$x=0$ における e^x の Taylor 展開は $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ であるので、

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k k!} \tag{9}$$

となる。つまり、y の偶数番目の総和は

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k k!}a_0x^{2k}=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k k!}=a_0e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{10}$$

となる。この級数の収束半径は

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^k}{2^k k!}a_0\right|\Big/\left|\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!}a_0\right|=\lim_{k\to\infty}2(k+1)=\infty \tag{11}$$

であるので、実数全体で収束する。

$n=2k+1$ の場合

$$a_{2k+1}=\left(-\frac{1}{2k+1}\right)\left(-\frac{1}{2(k-1)+1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2+1}\right)a_1=\frac{(-1)^k 2^k k!}{(2k+1)!}a_1 \tag{12}$$

である。収束半径は同じように考えて

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^k 2^k k!}{(2k+1)!}a_1\right|\Big/\left|\frac{(-1)^{k+1}2^{k+1}(k+1)!}{(2(k+1)+1)!}a_1\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+3)(2k+2)}{2(k+1)}=\infty \tag{13}$$

となるので、実数全体となる。

この為、級数解 y は次のようになる。

$$y=a_0e^{-\frac{x^2}{2}}+a_1\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k 2^k k!}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right) \tag{14}$$

収束半径は ∞(実数全体で収束) となる。

……………………$(x-1)y''-(x+1)y'+2y=0$ の場合……………………

y, y', y'' を微分方程式に代入する。

$$(x-1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-(x+1)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0 \tag{15}$$

展開をし、x の次数が揃うように n の値を振り直す。

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0 \tag{16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0 \tag{17}$$

定数項から順に同類項をまとめる。

$$(-2a_2 - a_1 + 2a_0) + \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)na_{n+1} - (n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n - (n+1)a_{n+1} + 2a_n)x^n = 0 \tag{18}$$

これより次の式が得られる。

$$-2a_2 - a_1 + 2a_0 = 0 \tag{19}$$

$$-(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2-1)a_{n+1} + (-n+2)a_n = 0 \quad (n \geq 1) \tag{20}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_1 + a_0 \tag{21}$$

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}((n+1)(n-1)a_{n+1} + (-n+2)a_n) \tag{22}$$

この式より係数 a_i を計算してみる。

$$a_3 = \frac{1}{6}a_1, \qquad a_4 = \frac{1}{12} \times 3a_3 = \frac{1}{24}a_1 \tag{23}$$

$$a_5 = \frac{1}{20}(8a_4 - a_3) = \frac{1}{120}a_1, \qquad a_6 = \frac{1}{30}(15a_5 - 2a_4) = \frac{1}{720}a_1 \tag{24}$$

これにより一般項は $a_k = \frac{1}{k}a_{k-1}$ $(k \geq 4)$ を満たしていると予測できる。その為、数学的帰納法で証明を行う。

まず、$k = 4$ の時、式 (22) に代入することで、$a_4 = \frac{1}{4}a_3$ であることがわかる。

そこで、a_{n+1} までは全て成立していると仮定し、a_{n+2} について考える。

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}((n+1)(n-1)a_{n+1} + (-n+2)a_n) \tag{25}$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)}((n+1)(n-1)\frac{1}{n+1}a_n + (-n+2)a_n) \tag{26}$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)}((n-1) + (-n+2))a_n \tag{27}$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)}a_n = \frac{1}{n+2}a_{n+1} \tag{28}$$

よって、$a_k = \frac{1}{k}a_{k-1}$ $(k \geq 4)$ が成立することがわかる。上の計算で $a_3 = \frac{1}{6}a_1$ であることが求まるので $n \geq 4$ において $a_n = \frac{1}{n!}a_1$ ということがわかる。

これより、級数解 y は次のような式となる。

$$y = a_0 + a_1 x + \left(-\frac{1}{2}a_1 + a_0\right)x^2 + a_1 \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k \tag{29}$$

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ であるので、級数解をこれに合わせて変形する。

$$\begin{aligned} y = a_0 + a_1 x + \left(-\frac{1}{2}a_1 + a_0\right)x^2 &- a_1\left(\frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2\right) \\ &+ a_1\left(\frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2\right) + a_1 \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k \end{aligned} \tag{30}$$

これにより級数解は

$$y = (a_0 - a_1) + (a_0 - a_1)x^2 + a_1 e^x \tag{31}$$

となり、y は実数全体で収束するので収束半径は $+\infty$ となる。