系 2,12 K-ベクトル空間 V から W への線形写像 f があり、V の基底を $e_1, e_2, \ldots, e_n$ とする。この時、次が同値である。

(a) f が同型写像

(b) $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ が W の基底

命題 2,13 K-ベクトル空間 V から W への線形写像 f が同型ならば、逆写像 $f^{-1}: W \to V$ も線形写像であり、同型である。

. . . .

命題の証明

V の基底を $e_1, e_2, \ldots, e_n$ とする。f が同型なので、上の系より $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ が W の基底である。

V の元 $v = k_1 e_1 + \cdots + k_n e_n$ は $f(v) \in W$ に対応する。

$$f(v) = f(k_1 e_1 + \cdots + k_n e_n) = k_1 f(e_1) + \cdots + k_n f(e_n) \tag{1}$$

これにより任意の元 $w = k_1 f(e_1) + \cdots + k_n f(e_n) \in W$ に対し $k_1 e_1 + \cdots + k_n e_n$ を対応させる写像が存在する。

$$f^{-1}: W \to V, \quad k_1 f(e_1) + \cdots + k_n f(e_n) \mapsto k_1 e_1 + \cdots + k_n e_n \tag{2}$$

$k_1, \ldots, k_n$ の内、$k_i = 1$ としそれ以外を 0 とすれば、$f^{-1}(f(e_i)) = e_i$ となる。その為、次のように f^{-1} は線形写像であることがわかる。

$$\begin{aligned} f^{-1}(k_1 f(e_1) + \cdots + k_n f(e_n)) &= k_1 e_1 + \cdots + k_n e_n && (3) \\ &= k_1 f^{-1}(f(e_1)) + \cdots + f^{-1}(f(k_n e_n)) && (4) \end{aligned}$$

また、f^{-1} は W の基底 $f(e_i)$ を V の基底 e_i にうつすので同型写像であることもわかる。

問 2.4-1 線形写像 $t: K[x]_2 \to K[x]_4$ を $f(x) \mapsto f((x+1)^2)$ で定める。
$K[x]_2$ の基底 $a_1 = 1, a_2 = x, a_3 = x^2$ と、$K[x]_4$ の基底 $b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = x^2, b_4 = x^3, b_5 = x^4$ に関する t の表現行列を求めよ。

. . . .

線形写像 t で a_1, a_2, a_3 を移すと次のようになる。

$$
\begin{aligned}
t(a_1) =& t(1) = 1 \quad &= b_1 \qquad (5)\\
t(a_2) =& t(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \quad &= b_3 + 2b_2 + b_1 \qquad (6)\\
t(a_3) =& t(x^2) = ((x+1)^2)^2 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 & \qquad (7)\\
=& b_5 + 4b_4 + 6b_3 + 4b_2 + b_1 & \qquad (8)
\end{aligned}
$$

これらをベクトルとして並べ、行列の積で表す。

$$
\begin{pmatrix} t(a_1) & t(a_2) & t(a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (9)
$$

よって、線形写像 t の表現行列は次の行列である。

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (10)
$$

問 2.4-2 $a_1, \dots, a_n$ と $b_1, \dots, b_n$ をそれぞれ K^n の線形独立な元とし、これらを並べてできる n 次行列をそれぞれ A と B とする。

この時、K^n の基底 $a_1, \dots, a_n$ から $b_1, \dots, b_n$ への変換行列は $A^{-1}B$ であることを示せ。

....

n 次正方行列 A, B は次のような行列である。

$$
A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \qquad (11)
$$

変換行列 M は次の式を満たすような行列である。

$$
\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} M \qquad (12)
$$

これは $B = AM$ ということである。$a_1, \dots, a_n$ は線形独立であるので A は正則である。そこで、両辺に左から A^{-1} をかけることで $A^{-1}B = M$ となる。
つまり、変換行列は $A^{-1}B$ となる。

問 2.6-1 次の行列 A に対し、$\mathrm{Im}L_A$ と $\mathrm{Ker}L_A$ の基底を求めよ。

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

L_A とは次のような写像である。

$$L_A : K^3 \to K^2, \quad \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x} \tag{13}$$

$\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}$ を次のように置く。

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$x_i \in K$ に対して $\mathrm{Im}L_A$ を考える。

$$L_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 \tag{15}$$

$\boldsymbol{a}_2 = 2\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_3$ であるので、$L_A(\boldsymbol{x}) = (x_1 + 2x_2)\boldsymbol{a}_1 + (2x_2 + x_3)\boldsymbol{a}_3$ である。$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$ は線形独立であるのでこれが $\mathrm{Im}L_A$ の基底となる。

$$\mathrm{Im}L_A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \tag{16}$$

$\mathrm{Ker}L_A$ は $L_A(\boldsymbol{x}) = 0$ を満たす $\boldsymbol{x} \in K^3$ 全体の集合である。
式 (15) より $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ の解空間の基底を求める。左辺を計算すると次のようになる。

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

これは成分ごとに見ると $x_1 + 2x_2 = 0,\ 2x_2 + x_3 = 0$ となるので、$\alpha = x_2$ と置くと、$x_1 = -2\alpha,\ x_3 = -2\alpha$ である。よって、$\boldsymbol{x}$ は次のようになる。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

これにより $\boldsymbol{x}$ は 1 次元空間となり、$\mathrm{Ker}L_A$ は次のように生成される。

$$\mathrm{Ker}L_A = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \tag{19}$$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

…………………………………………………………………

A による線形写像 L_A は次のような写像である。

$$L_A : K^2 \to K^2, \quad \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x} \tag{20}$$

行列 A を列ベクトルに分ける。

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は一次独立なので A は正則行列であり、$\mathrm{Im}L_A$ は 2 次元、$\mathrm{Ker}L_A$ は 0 次元である。つまり、次のような基底で表すことが出来る。

$$\mathrm{Im}L_A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathrm{Ker}L_A = \langle 0 \rangle \tag{22}$$

問 3.2-3 計量ベクトル空間 V の任意の基底を $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ とする。

グラム シュミット
Gram-Schmidt の正規直交化法を用いて基底 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ を定めた時、$\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ は互いに直交することを示せ。

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{v}_1, \quad \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{e}_i)}{\|\boldsymbol{e}_i\|^2} \boldsymbol{e}_i \quad (j > 1) \tag{23}$$

e_i, e_j が直交するとは $i \neq j$ の時 $(e_i, e_j) = 0$ となることである。
証明は $e_1, \dots, e_j$ が互いに直交するなら $(e_{j+1}, e_1) = (e_{j+1}, e_2) = \cdots = (e_{j+1}, e_j) = 0$ となることを帰納的に示す。

…………………………………………………………………

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は次のようなベクトルである。

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{v}_1, \ \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_1)}{\|\boldsymbol{e}_1\|^2} \boldsymbol{e}_1 \tag{24}$$

この 2 つの内積 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ を求める。

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) =& (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_1)}{\|\boldsymbol{e}_1\|^2} \boldsymbol{e}_1) && (25) \\
=& (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2} \boldsymbol{v}_1) && (26) \\
=& (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2} (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) && (27) \\
=& (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2} \|\boldsymbol{v}_1\|^2 && (28) \\
=& 0 && (29)
\end{aligned}$$

$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 0$ より $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は直交している。

$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_j$ $(1 < j < n)$ が直交していると仮定し、これらと $\boldsymbol{e}_{j+1}$ が直交していることを確認する。

$1 \leq k \leq j$ として内積 $(\boldsymbol{e}_{j+1}, \boldsymbol{e}_k)$ を計算する。

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{e}_{j+1}, \boldsymbol{e}_k) &= \left(\boldsymbol{v}_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} \frac{(\boldsymbol{v}_{j+1}, \boldsymbol{e}_i)}{\|\boldsymbol{e}_i\|^2} \boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_k \right) && (30) \\
&= (\boldsymbol{v}_{j+1}, \boldsymbol{e}_k) - \left(\sum_{i=1}^{j} \frac{(\boldsymbol{v}_{j+1}, \boldsymbol{e}_i)}{\|\boldsymbol{e}_i\|^2} \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k \right) && (31) \\
&= (\boldsymbol{v}_{j+1}, \boldsymbol{e}_k) - \left(\frac{(\boldsymbol{v}_{j+1}, \boldsymbol{e}_k)}{\|\boldsymbol{e}_k\|^2} \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_k \right) \quad (i \neq k \text{ の時 } (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k) = 0) && (32) \\
&= (\boldsymbol{v}_{j+1}, \boldsymbol{e}_k) - \frac{(\boldsymbol{v}_{j+1}, \boldsymbol{e}_k)}{\|\boldsymbol{e}_k\|^2} (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_k) && (33) \\
&= 0 && (34)
\end{aligned}
$$

これにより $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_j$ が互いに直交していればこのベクトルと $\boldsymbol{e}_{j+1}$ は直交する。

よって、$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は互いに直交する。
