問

(1). $I \subset \mathbb{R}$、$f: I \to \mathbb{R}$、$g: I \to \mathbb{R}$ とし、f, g は I 上連続とする。
関数 $h: I \to \mathbb{R}$ を $h(x) = f(x)g(x)$ と定義すると I 上連続であることを示せ。

(2). $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ に対して定数 $K > 0$ が存在し、${}^\forall x \in [a, b],\ |f(x)| \leq K$ とする。
f が $[a, b]$ 上積分可能であれば次の式を満たすことを示せ。

$$-K(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq K(b-a) \tag{1}$$

定義 関数の連続

区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f(x)$ が点 $a \in I$ で連続であるとは、任意の正の実数 ε に対し次を満たす正の実数 δ が存在するときをいう。

区間 I の任意の点 x に対し $|x-a| < \delta$ であるなら $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である。

$${}^\forall \varepsilon > 0,\ {}^\exists \delta > 0\ s.t.\ {}^\forall x \in I,\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{2}$$

${}^\forall a \in I$ で $f(x)$ が連続である時 $f(x)$ は I 上で連続であるという。

. . . .

解答 問 (1)

問の条件より ${}^\forall \varepsilon > 0$ について

$${}^\exists \delta_f > 0\ s.t.\ |x-a| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{3}$$

$${}^\exists \delta_g > 0\ s.t.\ |x-a| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon \tag{4}$$

そこで $|x-a| < \delta_f$ を満たす範囲の x の値 $|f(x)|$ と $|g(a)|$ の最大値を M とおく。

$$M = \max\{|f(x)| \mid |x-a| < \delta_f\} \cup \{|g(a)|\} \tag{5}$$

この M を用いて式 (3) と式 (4) を次のように取り直す。

$$|x-a| < \delta'_f \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad |x-a| < \delta'_g \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2M} \tag{6}$$

このとき、δ'_f, δ'_g の小さい方を δ とする。$\delta = \min\{\delta'_f, \delta'_g\}$

$|x-a|<\delta$ において

$$
\begin{aligned}
&|f(x)g(x)-f(a)g(a)| && (7)\\
&=|f(x)g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)g(a)| && (8)\\
&=|f(x)(g(x)-g(a))+(f(x)-f(a))g(a)| && (9)\\
&\leq |f(x)||g(x)-g(a)|+|f(x)-f(a)||g(a)| && (10)\\
&< M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2M}\cdot M=\varepsilon && (11)
\end{aligned}
$$

となる。

これにより $a\in I$ において関数 $h(x)=f(x)g(x)$ が連続であることが言える。また、$^{\forall}a\in I$ としても同様の議論が言えるので、関数 $h(x)$ は I 上連続である。

....

簡略した解答

f,g が点 $a\in I$ で連続であるので

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a),\quad \lim_{x\to a} g(x)=g(a) \tag{12}$$

これにより

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a} h(x) &= \lim_{x\to a} f(x)g(x) && (13)\\
&=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) && (14)\\
&=f(a)g(a)=h(a) && (15)
\end{aligned}
$$

$^{\forall}a\in I$ においても連続であるので、関数 h は I 上連続である。

定義 定積分

区間 $[a,b]$ 内に異なる $n-1$ 個の点を取ってくる。この点を小さい方から $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ とする。

区間 $[a,b]$ を n 個の区間に分ける。$x_0=a,\ x_n=b$ とすると次のように分ける。

$$[a,b]=\bigcup_{i=0}^{n-1}[x_i,x_{i+1}] \tag{16}$$

各区間 $[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$ 内の任意の 1 点を選び、それぞれ $p_1,\ p_2,\ldots,\ p_n$ とする。

この時、区間の幅 x_k-x_{k-1} と $f(p_k)$ との積を全ての区間求め合計する。区間の数 n を大きくし合計の極限を求めたものを a から b における関数 $f(x)$ の定積分という。

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(p_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{17}$$

....

解答 問 (2)

$-K \leq f(x) \leq K$ と定積分の定義より

$$\begin{align}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(p_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{18}\\
&\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} K(x_k - x_{k-1}) \tag{19}\\
&= \lim_{n\to\infty} K\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \tag{20}\\
&= \lim_{n\to\infty} K(b-a) = K(b-a) \tag{21}
\end{align}$$

また同様に

$$\begin{align}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(p_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{22}\\
&\geq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-K)(x_k - x_{k-1}) \tag{23}\\
&= \lim_{n\to\infty}(-K)\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \tag{24}\\
&= \lim_{n\to\infty}(-K)(b-a) = -K(b-a) \tag{25}
\end{align}$$

この 2 つを合わせると次の式が得られる。

$$-K(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq K(b-a) \tag{26}$$