次の積分を求めよ。

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x \tag{1}$$

....

$f(x)$ を次のように定め、問題の積分を $f(x+1)$ の積分として考える。

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1}, \qquad \int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty f(x+1)\mathrm{d}x \tag{2}$$

この積分値を求めるために複素数上での積分に広げて考える。具体的には実数の区間 $[0, R]$ を含む積分路 C 上で次の式を計算する。

$$\int_C f(z+1)\log z\mathrm{d}z \tag{3}$$

最終的に $R \to \infty$ とするので R は十分に大きい値をとる。$(R > 2)$

被積分関数 $f(z+1)\log z = \frac{\log z}{(z+1)^3+1}$ に対して、積分経路を次のように考える。

複素平面上において、0 中心の半径 R の円周と、$0 < \delta < \frac{1}{2}$ となる十分に小さな δ を利用し実数直線の正の部分を $+\delta i$ だけ平行移動した直線と、実数直線の正の部分を $-\delta i$ だけ平行移動した直線、0 中心の十分に小さな $\varepsilon > 0$ の半径の円周の 4 つを作る。半径 ε の円と $+\delta i$ だけ平行移動した直線との交点を P_1 $(Re(P_1) > 0)$、半径 R の円と $+\delta i$ だけ平行移動した直線との交点を P_2 $(Re(P_2) > 0)$、半径 R の円と $-\delta i$ だけ平行移動した直線との交点を P_3 $(Re(P_3) > 0)$、半径 ε の円と $-\delta i$ だけ平行移動した直線との交点を P_4 $(Re(P_4) > 0)$ とする。

P_1 から P_2 へ向かう直線を C_1、P_2 から円周を反時計回りに回って P_3 へ向かう曲線を C_2、P_3 から P_4 へ向かう直線を C_3、P_4 から円周を時計回りに回って P_1 へ向かう曲線を C_4 とする。この時の複素数 z の偏角は 0 から 2π の間の値をとるものとする。$(0 \leq \arg z \leq 2\pi)$

この 4 つの積分路をつないで一つの積分路とし、C で表す。$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ であり、各 C_i は次のような曲線である。

- C_1 P_1 から P_2 へ向かう直線であり、この直線上の複素数は $z = x + \delta i$ $(x \in \mathbb{R})$ である。
- C_2 P_2 から円周を反時計回りに回って P_3 へ向かう曲線であり、円周上の複素数は $z = Re^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R}, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ である。
- C_3 P_3 から P_4 へ向かう直線であり、この直線上の複素数は $z = x - \delta i$ $(x \in \mathbb{R})$ である。

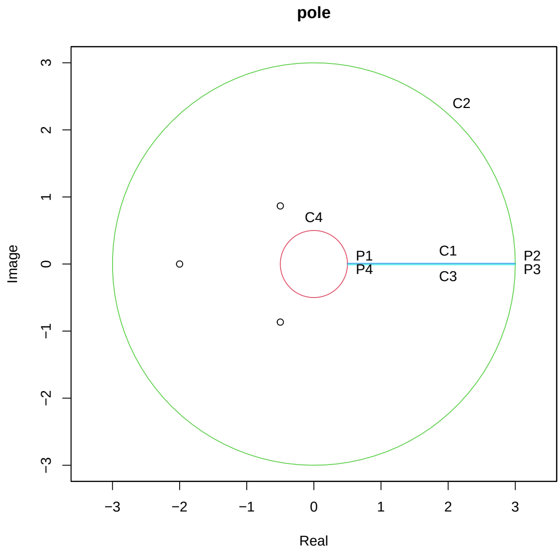

図 1　極の場所と積分経路

C_4　P_4 から円周を反時計回りに回って P_1 へ向かう曲線であり、円周上の複素数は $z = \varepsilon e^{i\theta}$ $(\varepsilon \in \mathbb{R}, 0 \leq \varepsilon \leq 2\pi)$ である。

C 上の積分は次のような式となる。

$$\int_C f(z)\log z\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\log z\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\log z\mathrm{d}z + \int_{C_3} f(z)\log z\mathrm{d}z + \int_{C_4} f(z)\log z\mathrm{d}z \tag{4}$$

$\delta \to 0$ と極限をとれば各積分路上の複素数 z は次のような式で表される。

C_1　$z = xe^{0i}$ $(x : 1 \to R)$
C_2　$z = Re^{i\theta}$ $(\theta : 0 \to 2\pi)$
C_3　$z = xe^{2\pi i}$ $(x : R \to 1)$
C_4　$z = \varepsilon e^{i\theta}$ $(\theta : 2\pi \to 0)$

積分路 C は閉じているので、留数定理により積分 $\int_C f(z+1)\log z\mathrm{d}z$ は C の内部にある極から求まる。

$f(z+1)\log z = \frac{\log z}{(z+1)^3+1}$ の極は $(z+1)^3+1=0$ を満たし、R が十分に大きく ε が十分に小さいので全て C の内部に存在する。

$w = z+1$ として $w^3+1=0$ を満たす複素数を求める。$w^3 = -1 = e^{(2n+1)\pi i}$ から $w = e^{\frac{\pi}{3}i}, e^{\pi i}, e^{\frac{5\pi}{3}i}$ である。$\omega = e^{\frac{\pi}{3}i}$ と置けば、$w = \omega, \omega^3, \omega^5$ であり、次のような因数分解ができる。$w^3+1 = (w-\omega)(w-\omega^3)(w-\omega^5)$

オイラーの公式により極は次の複素数と等しい。

$$\omega = e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{5}$$

$$\omega^3 = e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \tag{6}$$

$$\omega^5 = e^{\frac{5\pi}{3}i} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{7}$$

これらを用いて 3 つの極の留数を求める。

$$\mathrm{Res}(f(z+1)\log z, \omega - 1) = \mathrm{Res}(f(w)\log(w-1), \omega) \tag{8}$$

$$= \lim_{w\to\omega}(w-\omega)\times\frac{\log(w-1)}{w^3+1} = \lim_{w\to\omega}\frac{\log(w-1)}{(w-\omega^3)(w-\omega^5)} \tag{9}$$

$$= \frac{\log(\omega-1)}{(\omega-\omega^3)(\omega-\omega^5)} = \frac{\log(\omega-1)}{\omega^2(1-\omega^2)(1-\omega^4)} \tag{10}$$

$$= \frac{\log(\omega-1)}{\omega^2(1-\omega^2)(1+\omega)} = \frac{\log(\omega-1)}{3\omega^2} \tag{11}$$

ここで、$(1-\omega^2)(1+\omega)$ は $\omega = e^{\frac{\pi}{3}i}$ に注意して計算をした。

$$(1-\omega^2)(1+\omega) = 1 + \omega - \omega^2 - \omega^3 = 2 + e^{\frac{\pi}{3}i} - e^{\frac{2\pi}{3}i} = 3 \tag{12}$$

また、$(\omega-1)^2$ を計算し、$\log(\omega-1)$ を求める。

$$(\omega-1)^2 = (e^{\frac{\pi}{3}i} + e^{\frac{3\pi}{3}i})^2 = (e^{\frac{2\pi}{3}i})^2 = e^{\frac{4\pi}{3}i} \tag{13}$$

つまり、$\omega - 1$ は大きさ 1、偏角 $\frac{2\pi}{3}$ ということである。$(\omega-1)^2$ の対数をとる。

$$2\log(\omega-1) = \log e^{\frac{4\pi}{3}i} = \frac{4\pi}{3}i \quad \Rightarrow \quad \log(\omega-1) = \frac{2\pi}{3}i \tag{14}$$

これにより $\omega - 1$ の留数は次のように求まる。

$$\mathrm{Res}(f(z+1)\log z, \omega-1) = \frac{\log(\omega-1)}{\omega^2(1-\omega^2)(1+\omega)} = \frac{2\pi}{9\omega^2}i \tag{15}$$

同様にして $\omega^3 - 1$ の留数も計算する。

$$\mathrm{Res}(f(z+1)\log z, \omega^3-1) = \mathrm{Res}(f(w)\log(w-1), \omega^3) \tag{16}$$

$$= \lim_{w\to\omega^3}(w-\omega^3)\times\frac{\log(w-1)}{w^3+1} = \lim_{w\to\omega^3}\frac{\log(w-1)}{(w-\omega)(w-\omega^5)} \tag{17}$$

$$= \frac{\log(\omega^3-1)}{(\omega^3-\omega)(\omega^3-\omega^5)} = \frac{\log(\omega^3-1)}{-\omega^3(1+\omega)(1-\omega^2)} = \frac{\log(\omega^3-1)}{3} \tag{18}$$

$(1+\omega)(1-\omega^2) = 3$ より分母は 3 であるので、$(\omega^3-1)^2$ を計算し $\log(\omega^3-1)$ を求める。

$$(\omega^3-1)^2 = (e^{\pi i} + e^{\pi i})^2 = 4e^{2\pi i} \tag{19}$$

この計算より ω^3-1 は大きさ 2、偏角 π ということがわかる。両辺の対数をとる。

$$2\log(\omega^3-1)=\log 4e^{2\pi i}=\log 4+2\pi i \quad \Rightarrow \log(\omega^3-1)=\log 2+\pi i \tag{20}$$

これにより ω^3-1 の留数は次のように求まる。

$$\mathrm{Res}(f(z+1)\log z,\omega^3-1)=\frac{\log(\omega^3-1)}{3}=\frac{1}{3}\log 2+\frac{\pi}{3}i \tag{21}$$

同様にして ω^5-1 の留数も計算する。

$$\mathrm{Res}(f(z+1)\log z,\omega^5-1)=\mathrm{Res}(f(w)\log(w-1),\omega^5) \tag{22}$$

$$=\lim_{w\to\omega^5}(w-\omega^5)\times\frac{\log(w-1)}{w^3+1}=\lim_{w\to\omega^5}\frac{\log(w-1)}{(w-\omega)(w-\omega^3)} \tag{23}$$

$$=\frac{\log(\omega^5-1)}{(\omega^5-\omega)(\omega^5-\omega^3)}=\frac{\log(\omega^5-1)}{\omega^4(\omega+1)(1-\omega^2)}=\frac{\log(\omega^5-1)}{3\omega^4} \tag{24}$$

$(\omega^5-1)^2$ を計算し $\log(\omega^5-1)$ を求める。

$$(\omega^5-1)^2=(e^{\frac{5\pi}{3}i}+e^{\pi i})^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+(-1)\right)^2=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 \tag{25}$$

$$=(\omega^4)^2=\omega^8=e^{\frac{8\pi}{3}i} \tag{26}$$

これにより ω^5-1 は大きさ 1、偏角 $\frac{4\pi}{3}$ ということがわかる。両辺の対数をとる。

$$2\log(\omega^5-1)=\log e^{\frac{8\pi}{3}i}=\frac{8\pi}{3}i \quad \Rightarrow \log(\omega^5-1)=\frac{4\pi}{3}i \tag{27}$$

これにより ω^5-1 の留数は次のように求まる。

$$\mathrm{Res}(f(z+1)\log z,\omega^5-1)=\frac{\log(\omega^5-1)}{3\omega^4}=\frac{4\pi}{9\omega^4}i \tag{28}$$

各留数をまとめると次の 3 つとなる。

- $\omega-1$ での留数 $\frac{\log(\omega-1)}{3\omega^2},\ \log(\omega-1)=\log 1+\frac{2\pi}{3}i$
- ω^3-1 での留数 $\frac{\log(\omega^3-1)}{3},\ \log(\omega^3-1)=\log 2+\frac{3\pi}{3}i$
- ω^5-1 での留数 $\frac{\log(\omega^5-1)}{3\omega^4},\ \log(\omega^5-1)=\log 1+\frac{4\pi}{3}i$

留数定理により、C 上の積分は次のようになる。

$$\int_C\frac{\log z}{(z+1)^3+1}\mathrm{d}z=2\pi i\left(\frac{2\pi}{9\omega^2}i+\left(\frac{1}{3}\log 2+\frac{\pi}{3}i\right)+\frac{4\pi}{9\omega^4}i\right) \tag{29}$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{3}\log 2+\frac{\pi i}{9}\left(2\omega^4+3+4\omega^2\right)\right) \tag{30}$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{6}\log 2+\frac{\pi i}{9}\left(\sqrt{3}i\right)\right)=2\pi i\left(\frac{1}{6}\log 2-\frac{\sqrt{3}\pi}{9}\right) \tag{31}$$

C は 4 つに分かれるためそれぞれの積分を考える。

C_1 は直線であり、$z = xe^{0i} = x$ $(x : \varepsilon \to R)$ となる複素数での積分である。この時 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$ である。

$$\int_{C_1} f(z+1)\log z \mathrm{d}z = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\log x}{(x+1)^3+1}\mathrm{d}x \tag{32}$$

C_2 は半径 R の円周上であり、$z = Re^{i\theta}$ $(\theta : 0 \to 2\pi)$ となる複素数での積分である。このとき、$\mathrm{d}z = iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ である。

$$\int_{C_2} f(z+1)\log z \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{\log Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta}+1)^3+1} iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(\log R + i\theta)iRe^{i\theta}}{(Re^{i\theta}+1)^3+1}\mathrm{d}\theta \tag{33}$$

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{(\log R + i\theta)iRe^{i\theta}}{(Re^{i\theta}+1)^3+1}\mathrm{d}\theta\right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|\log R + i\theta||i||R||e^{i\theta}|}{|(Re^{i\theta}+1)^3+1|}\mathrm{d}\theta \tag{34}$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{|\log R + i\theta|R}{|Re^{i\theta}+1|^3-1}\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{2\pi} \frac{(|\log R| + 2\pi)R}{(R-1)^3-1}\mathrm{d}\theta \tag{35}$$

$$= \frac{(|\log R| + 2\pi)R}{(R-1)^3-1} \cdot 2\pi \to 0 \quad (R \to \infty) \tag{36}$$

つまり、C_2 上の積分は $R \to \infty$ において 0 に収束する。

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} f(z+1)\log z \mathrm{d}z = 0 \tag{37}$$

次に C_3 上の積分を考える。C_3 は直線であり、$z = xe^{2\pi i}$ $(x : R \to \varepsilon)$ となる複素数での積分である。この時 $\mathrm{d}z = e^{2\pi i}\mathrm{d}x$ である。

$$\int_{C_3} f(z+1)\log z \mathrm{d}z = \int_R^{\varepsilon} \frac{\log xe^{2\pi i}}{(xe^{2\pi i}+1)^3+1} e^{2\pi i}\mathrm{d}x = \int_R^{\varepsilon} \frac{\log x + 2\pi i}{(x+1)^3+1}\mathrm{d}x \tag{38}$$

$$= -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\log x}{(x+1)^3+1}\mathrm{d}x - 2\pi i \int_{\varepsilon}^{R} \frac{1}{(x+1)^3+1}\mathrm{d}x \tag{39}$$

$$\to -\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x+1)^3+1}\mathrm{d}x - 2\pi i \int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)^3+1}\mathrm{d}x \quad (\varepsilon \to 0, R \to \infty) \tag{40}$$

C_4 上の積分を考える。C_4 は半径 ε の円周上であり、$z = \varepsilon e^{i\theta}$ $(\theta : 2\pi \to 0)$ となる複素数での積分である。このとき、$\mathrm{d}z = i\varepsilon e^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ である。

$$\int_{C_4} f(z+1)\log z \mathrm{d}z = \int_{2\pi}^{0} \frac{\log \varepsilon e^{i\theta}}{(\varepsilon e^{i\theta}+1)^3+1} i\varepsilon e^{i\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{2\pi}^{0} \frac{(\log \varepsilon + i\theta)i\varepsilon e^{i\theta}}{(\varepsilon e^{i\theta}+1)^3+1}\mathrm{d}\theta \tag{41}$$

$$\left|\int_{C_4} f(z+1)\log z\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{2\pi}^{0} \frac{(\log\varepsilon + i\theta)i\varepsilon e^{i\theta}}{(\varepsilon e^{i\theta}+1)^3+1}\mathrm{d}\theta\right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|\log\varepsilon + i\theta||i||\varepsilon||e^{i\theta}|}{|(\varepsilon e^{i\theta}+1)^3+1|}\mathrm{d}\theta \quad (42)$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{(|\log\varepsilon| + i\theta)\varepsilon}{1-|\varepsilon e^{i\theta}+1|^3}\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{2\pi} \frac{(|\log\varepsilon| + 2\pi)\varepsilon}{1-(1-\varepsilon)^3}\mathrm{d}\theta \quad (43)$$

$$= \frac{(|\log\varepsilon| + 2\pi)\varepsilon}{1-(1-\varepsilon)^3} \cdot 2\pi \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0) \quad (44)$$

よって、C_4 上の積分は $\varepsilon \to 0$ において 0 に収束する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_4} f(z+1)\log z\mathrm{d}z = 0 \quad (45)$$

各 C_i 上の積分により C 上の積分は次のようになる。

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_C f(z)\log z\mathrm{d}z \quad (46)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^3+1}\mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^3+1}\mathrm{d}x - 2\pi i\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^3+1}\mathrm{d}x \quad (47)$$

$$= -2\pi i\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^3+1}\mathrm{d}x = -2\pi i\int_1^\infty \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x \quad (48)$$

である。

一方、式 (31) により積分値は留数から求まる。

$$\int_C \frac{\log z}{(z+1)^3+1}\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\frac{1}{6}\log 2 - \frac{\sqrt{3}\pi}{9}\right) \quad (49)$$

よって、次の結果が得られる。

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\log 2 + \frac{\sqrt{3}\pi}{9} \quad (50)$$
