## 定義

## 問題

1. ある関数 $R:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ が存在して、実数 $x\geq 1$ に対して、次が成立することを示せ。

$$\sum_{n\leq x}\log n = x\log x - x + R(x) \quad \text{かつ} \quad |R(x)|\leq \log x + 1 \tag{1}$$

問題の式を変形することで次が得られる。

$$R(x)=\sum_{n\leq x}\log n - x\log x + x \tag{2}$$

$$\sum_{n\leq x}\log n - x(\log x - 1) \tag{3}$$

$x=0$ における $\log(x+1)$ のテイラー展開

$$\log(x+1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \tag{4}$$

$x=1$ における $\log x$ のテイラー展開

$$\log x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} \tag{5}$$

---

2. ある定数 $c$ と関数 $R:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ が存在して、実数 $x\geq 1$ に対して、次が成立することを示せ。

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{x} + c + R(x) \quad \text{かつ} \quad |R(x)|\leq \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{6}$$

3. ある定数 $c$ と関数 $R:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ が存在して、実数 $x\geq e$ に対して、次が成立することを示せ。

$$\sum_{n\leq x}\frac{\log n}{n} = \frac{1}{2}(\log x)^2 + c + R(x) \quad \text{かつ} \quad |R(x)|\leq \frac{\log x}{x} \tag{7}$$

4. 実数 $x, k \geq 1$ に対して、次を示せ。

$$\sum_{n \leq x} \left(\log \frac{x}{n}\right)^k \leq k!x \tag{8}$$

(ヒント：微分積分学の基本定理を

$$\left(\log \frac{x}{n}\right)^k = k \int_1^{\frac{x}{n}} \frac{(\log u)^{k-1}}{u} \mathrm{d}u \tag{9}$$

という形で用いる。)

---