微分方程式

---

1. 微分方程式 $(x+1)y' - \alpha y = 0$ の $x = 3$ における級数解と、その収束半径を求めよ。ただし、$\alpha \in \mathbb{R}$ は定数とする。

   ……………………………………………………………………

   方程式の解を $x = 3$ における級数として表すと次のようになる。

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n \tag{1}$$

   これを微分すると次のようになる。

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-3)^{n-1} \tag{2}$$

   微分方程式は次のように変形し級数を当てはめる。

$$(x+1)y' - \alpha y = (x+3)y' - 2y' - \alpha y = 0 \tag{3}$$

$$(x+3)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-3)^{n-1} - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-3)^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n = 0 \tag{4}$$

   この式を x の指数を揃えるように n を付け替える。

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-3)^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-3)^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n = 0 \tag{5}$$

   $(x-3)$ の指数が揃うようにまとめるとこの式が得られる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n a_n - 2(n+1) a_{n+1} - \alpha a_n)(x-3)^n = 0 \tag{6}$$

   よって、${}^{\forall} n$ に対して $n a_n - 2(n+1) a_{n+1} - \alpha a_n = 0$ となる a_n が微分方程式の解となる。

$$n a_n - 2(n+1) a_{n+1} - \alpha a_n = 0 \tag{7}$$

$$(n-\alpha) a_n = 2(n+1) a_{n+1} \tag{8}$$

$$a_{n+1} = \frac{n-\alpha}{2(n+1)} a_n \tag{9}$$

この式から a_n の式を求める。

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{(n-1)-\alpha}{2((n-1)+1)} a_{n-1} = \frac{n-1-\alpha}{2n} \cdot \frac{n-2-\alpha}{2(n-1)} a_{n-2} && (10) \\ =& \cdots = \frac{n-1-\alpha}{2n} \cdot \frac{n-2-\alpha}{2(n-1)} \cdots \frac{n-n-\alpha}{2\times 1} a_0 && (11) \\ =& \frac{(n-1-\alpha)(n-2-\alpha)\cdots(-\alpha)}{2^n n!} a_0 && (12) \\ =& \frac{a_0}{2^n n!} \prod_{k=0}^{n-1} (k-\alpha) && (13) \\ & && (14) \end{aligned}$$

ここから級数解は次のように求まる。

$$y = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_0}{2^n n!} \prod_{k=0}^{n-1} (k-\alpha) \right) (x-3)^n \tag{15}$$

また収束半径 r はダランベールの公式を用いる。

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{16}$$

公式に (9) の値を当てはめて収束半径を求める。

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{\frac{n-\alpha}{2(n+1)} a_n} \right| = 2 \tag{17}$$

---

2. 以下の 2 階線型微分方程式の $x=0$ における級数解を求めよ。

$$y'' + \frac{1}{x+1} y' = 0 \tag{18}$$

....

級数解を $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とおく。
y', y'' を求める。

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{19}$$

$y'' + \frac{1}{x+1}y' = 0$ を変形し、$xy'' + y'' + y' = 0$ として、(19) を代入し、x の指数が揃うように n を取り直す。

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = 0 \tag{20}$$

$$(2a_2 + a_1) + \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)na_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_{n+1})x^n = 0 \tag{21}$$

この式の x の係数は全て 0 となることから次の 2 つの式が得られる。

$$2a_2 + a_1 = 0, \qquad (n+1)^2 a_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0 \tag{22}$$

a_{n+1} と a_n は次のような関係があることがわかる。

$$a_{n+1} = -\frac{n}{n+1}a_n \quad (n \geq 1) \tag{23}$$

これより a_n は次のように表せる。

$$a_n = -\frac{n-1}{n}a_{n-1} = \left(-\frac{n-1}{n}\right)\left(-\frac{n-2}{n-1}\right)a_{n-2} = \cdots = \frac{(-1)^{n-1}}{n}a_1 \tag{24}$$

よって、級数解は次のようになる。

$$y = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}a_1 x^n \tag{25}$$

ここで、$\log(1+x)$ の $x=0$ を中心としたテーラー展開は次のようになる。

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \tag{26}$$

これを用いて解が次のようになる。

$$y = a_0 + a_1\log(1+x) \quad (a_0, a_1 : \text{定数}) \tag{27}$$

$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は整数定数とする。次の微分方程式の級数解を考えることで、任意の m に対して多項式解を持つことを示し、その次数を求めよ。

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0 \tag{28}$$

··

級数解を $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とおき、y', y'' を求める。

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{29}$$

これを与式 (28) に代入し計算をする。

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + m(m+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \tag{30}$$

x の次数に対してまとめると次式を得る。

$$\begin{aligned} &2a_2 + m(m+1)a_0 + (6a_3 + (m^2+m-2)a_1)x \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + (-n(n+1) + m(m+1))a_n)x^n = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

恒等的に 0 であるので、定数項、1 次の項、2 次以降の項はそれぞれ 0 となる。

$$2a_2 + m(m+1)a_0 = 0, \qquad 6a_3 + (m^2+m-2)a_1 = 0 \tag{32}$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (-n(n+1) + m(m+1))a_n = 0 \tag{33}$$

これにより a_n の式が出来る。

$$a_2 = -\frac{m(m+1)}{2}a_0, \qquad a_3 = -\frac{(m-1)(m+2)}{6}a_1 \tag{34}$$

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - m(m+1)}{(n+2)(n+1)}a_n = \frac{(n-m)(n+1+m)}{(n+2)(n+1)}a_n \tag{35}$$

a_{n+2} の式に $n=0,\ n=1$ を代入すると他の 2 つが求まる為、実際にはこれらは同じ式である。

$n = m$ の時、$a_{m+2} = 0$ となり、これ以降 1 つおきに 0 になる。

a_n の偶数番目と奇数番目は次のようになる。

$$a_{2k} = \frac{a_0}{(2k)!} \prod_{i=1}^{k} (2i-2-m)(2i-1+m) \tag{36}$$

$$a_{2k+1} = \frac{a_1}{(2k+1)!} \prod_{i=1}^{k} (2i-1-m)(2i+m) \tag{37}$$

m の偶数か奇数かによって対応する係数が途中から 0 となる。