
$$\mathcal{L}(\mathbb{R}) : \mathbb{R}\text{のルベーグ可測集合全体} \tag{1}$$

$$C^m_{per}([-\pi,\pi]) = \left\{ f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \mid f : C^m\text{級、}f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)\ (0 \le k \le m) \right\} \tag{2}$$

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \{ f : X \to \mathbb{C} \mid f : \mathcal{F}\text{可測、}\int_X |f(x)|^p \mu(dx) < \infty \} \tag{3}$$

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \mu(dx) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{4}$$

$$L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu)/\sim, \quad f \sim g \Leftrightarrow f = g\ \mu - a.e. \tag{5}$$

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \,\middle|\, f : \mathcal{F}\text{可測、}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx < \infty \right\} \tag{6}$$

第 6 回　任意の $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ に対して、次を証明せよ。

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x) - g(x)1B(0,m)(x)|^p \mathrm{d}x \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{7}$$

(HINT: Lebesgue の収束定理を使う。仮定の殆どは $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ の定義からわかる。)

. . . .

$g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ より g は可測関数で、$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^p dx < \infty$ である。
任意の $m \in \mathbb{R}$ に対して $|g(x)1_{B(0,m)}(x)| \le |g(x)|$ であり、$g(x) = \lim_{m\to\infty} g(x)1_{B(0,m)}(x)$ である。
これより次の式が成り立つ。

$$0 \le |g(x) - g(x)1_{B(0,m)}(x)| \le |g(x)| \tag{8}$$

$$\lim_{m\to\infty} |g(x) - g(x)1_{B(0,m)}(x)| = 0 \tag{9}$$

$g(x) - g(x)1_{B(0,m)}(x)$ も可測関数であるから、Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x) - g(x)1_{B(0,m)}(x)|^p \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{m\to\infty} |g(x) - g(x)1_{B(0,m)}(x)|^p \mathrm{d}x \tag{10}$$

となる。
よって、

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x) - g(x)1_{B(0,m)}(x)|^p \mathrm{d}x = 0 \tag{11}$$

Lebesgue（ルベーグ）の収束定理より

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| \mathrm{d}x = \lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x) 1_{B(0,m)}(x)| \mathrm{d}x \tag{12}$$

であるから

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| \mathrm{d}x - \lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x) 1_{B(0,m)}(x)| \mathrm{d}x = 0 \tag{13}$$

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left(|g(x)| - |g(x) 1_{B(0,m)}(x)| \right) \mathrm{d}x = 0 \tag{14}$$

$|x - y| \leq |x| + |-y|$ より $|x - y| - |-y| \leq |x|$

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \tag{15}$$

$|g(x) 1_{B(0,m)}(x)| \leq |g(x)|$ より

$$|g(x)| - |g(x) 1_{B(0,m)}(x)| \geq |g(x) - g(x) 1_{B(0,m)}(x)| \tag{16}$$

$$|g(x) - g(x) 1_{B(0,m)}(x)| \leq |g(x)| \tag{17}$$

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x) - g(x) 1_{B(0,m)}(x)|^p \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{m \to \infty} |g(x) - g(x) 1_{B(0,m)}(x)|^p \mathrm{d}x \tag{18}$$

第 7 回　$a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ に対して $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n \in L^2((-\pi, \pi), \frac{1}{2\pi} \mathrm{d}x)$ とおく。このとき、次の式を示せ。

$$\hat{f}(m) = \lim_{N \to \infty} \left\langle \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n, e_m \right\rangle \tag{19}$$

(HINT: 内積が片方の変数について連続であることをまず示す。それは $\langle u_n, v \rangle - \langle u, v \rangle = \langle u_n - u, v \rangle$ に Schwarz（シュワルツ）の不等式を使って分かる。)

....

第 10 回　内積空間 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ において、以下の集合は閉部分集合であることを示せ。

1. $u \in V$ と $c \in \mathbb{C}$ に対して、$\{v \in V : \langle u, v\rangle = c\}$

   ··

   V の部分集合 $S_{(u,c)}$ を次のようにおく。

   $$S_{(u,c)} = \{v \in V : \langle u, v\rangle = c\} \tag{20}$$

   $p \in S^c_{(u,c)}$ とし、$\varepsilon = \min\{|\langle p, s\rangle|/2 : s \in S_{(u,c)}\}$ とおき、p の ε 近傍を $U_{(p,\varepsilon)} = \{v \in V : |\langle v, p\rangle| < \varepsilon\}$ とする。このとき、$S_{(u,c)} \cap U_{(p,\varepsilon)} = \emptyset$ である。任意の $S^c_{(u,c)}$ に対して同様の ε 近傍が存在するため、$S^c_{(u,c)}$ は開集合である。よって、$S_{(u,c)}$ は閉集合である。

   ---

2. 一般の $A \subset V$ に対して $A^\perp = \{v \in V : {}^\forall u \in A,\ \langle u, v\rangle = 0\}$
   (HINT: 内積は片方の変数について連続、連続写像による閉集合の逆像は閉集合、閉集合族の共通部分は閉集合、などを思い出す。)

   ··

   $v \in V$ に対して連続写像 f_v を次のように定義する。

   $$f_v : V \to \mathbb{C}, \quad u \mapsto \langle u, v\rangle \tag{21}$$

   逆像 $f_v^{-1}(\{0\})$ は閉集合 $\{0\} \subset V$ の逆像であるので、閉集合である。
   $A \subset V$ の任意の元 $a \in A$ に対して逆像が考えられ、$A^\perp$ は次のような閉集合の共通部分である。

   $$A^\perp = \bigcap_{a \in A} f_a^{-1}(\{0\}) \tag{22}$$

   閉集合の共通部分は閉集合となるので、$A^\perp$ は閉集合である。
