

---

1. 加法定理

$$\begin{aligned} f(x-u)f(x+u)f(y-v)f(y+v) - f(x-v)f(x+v)f(y-u)f(y+u) \\ = f(x-y)f(x+y)f(u-v)f(u+v) \end{aligned} \quad (1)$$

$f(x)$  が次の式である時、上の加法定理 (1) が成立することを示せ。

(a)  $f(x) = x$

(b)  $f(x) = \sin x$

(c)  $f(x) = \theta_1(x \mid \tau)$

---

(a)  $f(x) = x$

.....  
 (左辺)  $= (x-u)(x+u)(y-v)(y+v) - (x-v)(x+v)(y-u)(y+u)$  (2)

$$= (x^2 - u^2)(y^2 - v^2) - (x^2 - v^2)(y^2 - u^2) \quad (3)$$

$$= -x^2v^2 - y^2u^2 + x^2u^2 + y^2v^2 \quad (4)$$

$$= x^2(u^2 - v^2) - y^2(u^2 - v^2) \quad (5)$$

$$= (x^2 - y^2)(u^2 - v^2) \quad (6)$$

$$= (x-y)(x+y)(u-v)(u+v) = (\text{右辺}) \quad (7)$$


---

(b)  $f(x) = \sin x$

.....  
 $\sin \alpha$  と  $\sin \beta$  の積の公式

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)) \quad (8)$$

$$\sin (x-u) \sin (x+u) = \frac{1}{2} (\cos 2u - \cos 2x) \quad (9)$$

$$\sin (y-v) \sin (y+v) = \frac{1}{2} (\cos 2v - \cos 2y) \quad (10)$$

$$\sin (x-v) \sin (x+v) = \frac{1}{2} (\cos 2v - \cos 2x) \quad (11)$$

$$\sin (y-u) \sin (y+u) = \frac{1}{2} (\cos 2u - \cos 2y) \quad (12)$$

$$\sin (x-y) \sin (x+y) = \frac{1}{2} (\cos 2y - \cos 2x) \quad (13)$$

$$\sin (u-v) \sin (u+v) = \frac{1}{2} (\cos 2v - \cos 2u) \quad (14)$$

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{4}(\cos 2u - \cos 2x)(\cos 2v - \cos 2y) \quad (15)$$

$$- \frac{1}{4}(\cos 2v - \cos 2x)(\cos 2u - \cos 2y) \quad (16)$$

$$= \frac{1}{4}(-\cos 2x \cos 2v - \cos 2y \cos 2u + \cos 2x \cos 2u + \cos 2y \cos 2v) \quad (17)$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 2x - \cos 2y)(\cos 2u - \cos 2v) \quad (18)$$

$$= \sin(x - y) \sin(x + y) \sin(u - v) \sin(u + v) = (\text{右辺}) \quad (19)$$

$$(c) \ f(x) = \theta_1(x \mid \tau)$$

.....

## 2. テータ関数

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u \mid \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{e}[(n+a)^2 \tau + 2(n+a)(u+b)] \quad (20)$$

$$(a, b \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{C}, \tau \in \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z \geq 0\}, \mathbf{e}[x] \stackrel{\text{def}}{=} \exp \sqrt{-1} \pi x) \quad (21)$$

の変換性 (準周期性) は

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u+1 \mid \tau) = \mathbf{e}[2a] \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u \mid \tau) \quad (22)$$

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u+\tau \mid \tau) = \mathbf{e}[-\tau - 2(u+b)] \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u \mid \tau) \quad (23)$$

であり、 $\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u \mid \tau) = 0$  の  $\text{mod}(\mathbb{Z} \oplus \tau \mathbb{Z})$  での zero 点の個数は 1 個で、それは

$\frac{1}{2} - \frac{a}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{2}\right) \tau \pmod{\mathbb{Z} \oplus \tau \mathbb{Z}}$  であった。

テータ関数の記号は次のものを用いる。

$$\theta_1(u \mid \tau) = -\vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u+\tau \mid \tau), \quad \theta_2(u \mid \tau) = \vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (u+\tau \mid \tau) \quad (24)$$

$$\theta_3(u \mid \tau) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (u+\tau \mid \tau), \quad \theta_4(u \mid \tau) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u+\tau \mid \tau) \quad (25)$$

(a) テータ関数の定義を用いて次を表わせ。

.....

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ に対して } \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u + \alpha \mid \tau) = \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b + \alpha \end{bmatrix} (u \mid \tau) \quad (26)$$

---

i.  $\theta_1 \left( u + \frac{1}{2} \middle| \tau \right)$  を  $\theta_2(u \mid \tau)$  を用いて表わせ。

---

$$\theta_1 \left( u + \frac{1}{2} \middle| \tau \right) = -\vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u + \frac{1}{2} + \tau \mid \tau) \quad (27)$$

$$= -\vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (u + 1 + \tau \mid \tau) \quad (28)$$

$$= -\mathbf{e}[1] \vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (u + \tau \mid \tau) \quad (29)$$

$$= -\mathbf{e}[1] \theta_2(u \mid \tau) \quad (30)$$

---

ii.  $\theta_2 \left( u + \frac{1}{2} \middle| \tau \right)$  を  $\theta_1(u \mid \tau)$  を用いて表わせ。

---

$$\theta_2 \left( u + \frac{1}{2} \middle| \tau \right) = \vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (u + \frac{1}{2} + \tau \mid \tau) \quad (31)$$

$$= \vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u + \tau \mid \tau) \quad (32)$$

$$= -\theta_1(u \mid \tau) \quad (33)$$

---

iii.  $\theta_3 \left( u + \frac{1}{2} \middle| \tau \right)$  を  $\theta_4(u \mid \tau)$  を用いて表わせ。

---

$$\theta_3(u + \frac{1}{2} \mid \tau) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (u + \frac{1}{2} + \tau \mid \tau) \quad (34)$$

$$= \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u + \tau \mid \tau) \quad (35)$$

$$= \theta_4(u \mid \tau) \quad (36)$$

---

iv.  $\theta_4 \left( u + \frac{1}{2} \middle| \tau \right)$  を  $\theta_3(u \mid \tau)$  を用いて表わせ。

$$\theta_4(u + \frac{1}{2} \mid \tau) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u + \frac{1}{2} + \tau \mid \tau) \quad (37)$$

$$= \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (u + 1 + \tau \mid \tau) \quad (38)$$

$$= \mathbf{e}[0] \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (u + \tau \mid \tau) \quad (39)$$

$$= \theta_3(u \mid \tau) \quad (40)$$

(b) テータ関数の定義を用いて次を表わせ。

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u \mid \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{e} [(n + a)^2 \tau + 2(n + a)(u + b)] \quad (41)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{e} [n^2 \tau + 2n(u + a\tau + b) + a^2 \tau + 2a(u + b)] \quad (42)$$

$$= \mathbf{e}[a^2 \tau + 2a(u + b)] \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{e}[n^2 \tau + 2n(u + a\tau + b)] \quad (43)$$

$$= \mathbf{e}[a^2 \tau + 2a(u + b)] \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} (u + a\tau \mid \tau) \quad (44)$$

i.  $\theta_1(u + \frac{\tau}{2} \mid \tau)$  を  $\theta_4(u \mid \tau)$  を用いて表わせ。

$$\theta_1(u + \frac{\tau}{2} \mid \tau) \quad (45)$$

$$= -\vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u + \frac{3}{2}\tau \mid \tau) \quad (46)$$

$$= -\mathbf{e}[\frac{\tau}{4} + u + \frac{3}{2}\tau + \frac{1}{2}] \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u + \frac{1}{2}\tau + \frac{3}{2}\tau \mid \tau) \quad (47)$$

$$= -\mathbf{e}[\frac{7}{4}\tau + u + \frac{1}{2}] \mathbf{e}[-\tau - 2(u + \tau + \frac{1}{2})] \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u + \tau \mid \tau) \quad (48)$$

$$= -\mathbf{e}[-\frac{5}{4}\tau - u - \frac{1}{2}] \theta_4(u \mid \tau) \quad (49)$$

ii.  $\theta_2\left(u + \frac{\tau}{2} \middle| \tau\right)$  を  $\theta_3(u|\tau)$  を用いて表わせ。

.....

$$\theta_2\left(u + \frac{\tau}{2} \middle| \tau\right) = \vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{3}{2}\tau \middle| \tau\right) \quad (50)$$

$$= \mathbf{e}[\frac{\tau}{4} + u + \frac{3}{2}\tau] \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (u + 2\tau \middle| \tau) \quad (51)$$

$$= \mathbf{e}[\frac{\tau}{4} + u + \frac{3}{2}\tau] \mathbf{e}[-\tau - 2(u + \tau)] \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (u + \tau \middle| \tau) \quad (52)$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{5}{4}\tau - u] \theta_3(u \middle| \tau) \quad (53)$$

---

iii.  $\theta_3\left(u + \frac{\tau}{2} \middle| \tau\right)$  を  $\theta_2(u|\tau)$  を用いて表わせ。

.....

$$\theta_3\left(u + \frac{\tau}{2} \middle| \tau\right) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\tau}{2} + \tau \middle| \tau\right) \quad (54)$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{\tau}{4} - u - \tau] \vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (u + \tau \middle| \tau) \quad (55)$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{5}{4}\tau - u] \theta_2(u|\tau) \quad (56)$$

---

iv.  $\theta_4\left(u + \frac{\tau}{2} \middle| \tau\right)$  を  $\theta_1(u|\tau)$  を用いて表わせ。

.....

$$\theta_4\left(u + \frac{\tau}{2} \middle| \tau\right) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\tau}{2} + \tau \middle| \tau\right) \quad (57)$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{\tau}{4} - (u + \tau + \frac{1}{2})] \vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u + \tau \middle| \tau) \quad (58)$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{5}{4}\tau - u - \frac{1}{2}] \theta_1(u|\tau) \quad (59)$$

---

(c) i.  $\theta_1\left(u + \frac{1}{2} \middle| 2\tau\right)$  を  $\theta_2(u|2\tau)$  を用いて表わせ。

.....

$$\theta_1 \left( u + \frac{1}{2} \middle| 2\tau \right) = -\vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u + \frac{1}{2} + 2\tau \mid 2\tau) \quad (60)$$

$$= -\vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (u + 1 + 2\tau \mid 2\tau) \quad (61)$$

$$= -\mathbf{e}[1]\vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (u + 2\tau \mid 2\tau) \quad (62)$$

$$= -\mathbf{e}[1]\theta_2(u|2\tau) \quad (63)$$

---

ii.  $\theta_2 \left( u + \frac{1}{2} \middle| 2\tau \right)$  を  $\theta_1(u|2\tau)$  を用いて表わせ。

.....

$$\theta_2 \left( u + \frac{1}{2} \middle| 2\tau \right) = \vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (u + \frac{1}{2} + 2\tau \mid 2\tau) \quad (64)$$

$$= \vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u + 2\tau \mid 2\tau) \quad (65)$$

$$= -\theta_1(u|2\tau) \quad (66)$$

---

iii.  $\theta_3 \left( u + \frac{1}{2} \middle| 2\tau \right)$  を  $\theta_4(u|2\tau)$  を用いて表わせ。

.....

$$\theta_3 \left( u + \frac{1}{2} \middle| 2\tau \right) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (u + \frac{1}{2} + 2\tau \mid 2\tau) \quad (67)$$

$$= \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u + 2\tau \mid 2\tau) \quad (68)$$

$$= \theta_4(u|2\tau) \quad (69)$$

---

iv.  $\theta_4 \left( u + \frac{1}{2} \middle| 2\tau \right)$  を  $\theta_3(u|2\tau)$  を用いて表わせ。

.....

$$\theta_4 \left( u + \frac{1}{2} \middle| 2\tau \right) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u + \frac{1}{2} + 2\tau \mid 2\tau) \quad (70)$$

$$= \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (u + 1 + 2\tau \mid 2\tau) \quad (71)$$

$$= \mathbf{e}[0] \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (u + 2\tau \mid 2\tau) \quad (72)$$

$$= \theta_3 (u \mid 2\tau) \quad (73)$$

(d) i.  $\theta_1 (u + \tau \mid 2\tau)$  を  $\theta_4 (u \mid 2\tau)$  を用いて表わせ。

.....

$$\theta_1 (u + \tau \mid 2\tau) \quad (74)$$

$$= -\vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u + \tau + 2\tau \mid 2\tau) \quad (75)$$

$$= -\mathbf{e}[\frac{2\tau}{4} + u + 3\tau + \frac{1}{2}] \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u + 2\tau + 2\tau \mid 2\tau) \quad (76)$$

$$= -\mathbf{e}[\frac{7}{2}\tau + u + \frac{1}{2}] \mathbf{e}[-2\tau - 2(u + 2\tau + \frac{1}{2})] \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u + 2\tau \mid 2\tau) \quad (77)$$

$$= -\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u - \frac{1}{2}] \theta_4 (u \mid 2\tau) \quad (78)$$

ii.  $\theta_2 (u + \tau \mid 2\tau)$  を  $\theta_3 (u \mid 2\tau)$  を用いて表わせ。

.....

$$\theta_2 (u + \tau \mid 2\tau) = \vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (u + \tau + 2\tau \mid 2\tau) \quad (79)$$

$$= \mathbf{e}[\frac{2\tau}{4} + u + 3\tau] \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (u + 2\tau + 2\tau \mid 2\tau) \quad (80)$$

$$= \mathbf{e}[\frac{7}{2}\tau + u] \mathbf{e}[-2\tau - 2(u + 2\tau)] \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (u + 2\tau \mid 2\tau) \quad (81)$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u] \theta_3 (u \mid 2\tau) \quad (82)$$

iii.  $\theta_3 (u + \tau \mid 2\tau)$  を  $\theta_2 (u \mid 2\tau)$  を用いて表わせ。

.....

$$\theta_3(u + \tau | 2\tau) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (u + \tau + 2\tau | 2\tau) \quad (83)$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{2\tau}{4} - u - 2\tau] \vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (u + 2\tau | 2\tau) \quad (84)$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u] \theta_2(u | 2\tau) \quad (85)$$

iv.  $\theta_4(u + \tau | 2\tau)$  を  $\theta_1(u | 2\tau)$  を用いて表わせ。

.....

$$\theta_4(u + \tau | 2\tau) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u + \tau + 2\tau | 2\tau) \quad (86)$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{2\tau}{4} - u - 2\tau - \frac{1}{2}] \vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (u + 2\tau | 2\tau) \quad (87)$$

$$= -\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u - \frac{1}{2}] \theta_1(u | 2\tau) \quad (88)$$

(e)  $\theta_1(u | 2\tau)$ ,  $\theta_2(u | 2\tau)$ ,  $\theta_3(u | 2\tau)$ ,  $\theta_4(u | 2\tau)$  の  $u \mapsto u + 1$  としたときの変換性 (準周期性) を求めよ。

.....

$$\theta_1(u + \frac{1}{2} | 2\tau) = -\mathbf{e}[1] \theta_2(u | 2\tau) \quad (89)$$

$$\theta_2(u + \frac{1}{2} | 2\tau) = -\theta_1(u | 2\tau) \quad (90)$$

$$\theta_3(u + \frac{1}{2} | 2\tau) = \theta_4(u | 2\tau) \quad (91)$$

$$\theta_4(u + \frac{1}{2} | 2\tau) = \theta_3(u | 2\tau) \quad (92)$$

$$\theta_1(u + 1 | 2\tau) = -\mathbf{e}[1] \theta_2(u + \frac{1}{2} | 2\tau) = \mathbf{e}[1] \theta_1(u | 2\tau) \quad (93)$$

$$\theta_2(u + 1 | 2\tau) = -\theta_1(u + \frac{1}{2} | 2\tau) = \mathbf{e}[1] \theta_2(u | 2\tau) \quad (94)$$

$$\theta_3(u + 1 | 2\tau) = \theta_4(u + \frac{1}{2} | 2\tau) = \theta_3(u | 2\tau) \quad (95)$$

$$\theta_4(u + 1 | 2\tau) = \theta_4(u + \frac{1}{2} | 2\tau) = \theta_3(u | 2\tau) \quad (96)$$



- 
- (f)  $\theta_1(u \mid 2\tau)$ ,  $\theta_2(u \mid 2\tau)$ ,  $\theta_3(u \mid 2\tau)$ ,  $\theta_4(u \mid 2\tau)$  の  $u \mapsto u + 2\tau$  としたときの変換性 (準周期性) を求めよ。

.....

$$\theta_1(u + \tau \mid 2\tau) = -\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u - \frac{1}{2}]\theta_4(u \mid 2\tau) \quad (97)$$

$$\theta_2(u + \tau \mid 2\tau) = \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u]\theta_3(u \mid 2\tau) \quad (98)$$

$$\theta_3(u + \tau \mid 2\tau) = \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u]\theta_2(u \mid 2\tau) \quad (99)$$

$$\theta_4(u + \tau \mid 2\tau) = -\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u - \frac{1}{2}]\theta_1(u \mid 2\tau) \quad (100)$$

$$\theta_1(u + 2\tau \mid 2\tau) = -\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u - \frac{1}{2}]\theta_4(u + \tau \mid 2\tau) \quad (101)$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u - \frac{1}{2}]\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u - \frac{1}{2}]\theta_1(u \mid 2\tau) \quad (102)$$

$$= \mathbf{e}[-5\tau - 2u - 1]\theta_1(u \mid 2\tau) \quad (103)$$

$$\theta_2(u + 2\tau \mid 2\tau) = \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u]\theta_3(u + \tau \mid 2\tau) \quad (104)$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u]\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u]\theta_2(u \mid 2\tau) \quad (105)$$

$$= \mathbf{e}[-5\tau - 2u]\theta_2(u \mid 2\tau) \quad (106)$$

$$\theta_3(u + 2\tau \mid 2\tau) = \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u]\theta_2(u + \tau \mid 2\tau) \quad (107)$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u]\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u]\theta_3(u \mid 2\tau) \quad (108)$$

$$= \mathbf{e}[-5\tau - 2u]\theta_3(u \mid 2\tau) \quad (109)$$

$$\theta_4(u + 2\tau \mid 2\tau) = -\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u - \frac{1}{2}]\theta_1(u + \tau \mid 2\tau) \quad (110)$$

$$= \mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u - \frac{1}{2}]\mathbf{e}[-\frac{5}{2}\tau - u - \frac{1}{2}]\theta_4(u \mid 2\tau) \quad (111)$$

$$= \mathbf{e}[-5\tau - 2u - 1]\theta_4(u \mid 2\tau) \quad (112)$$


---