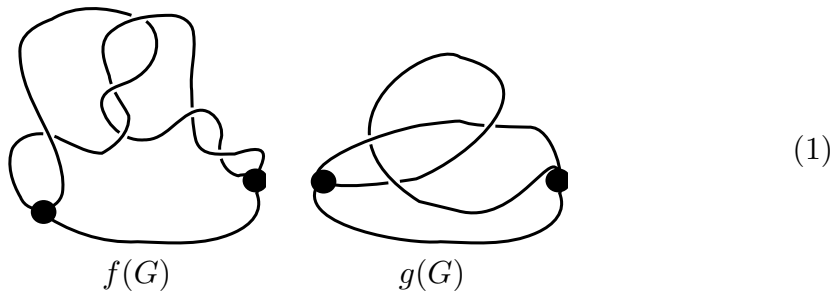
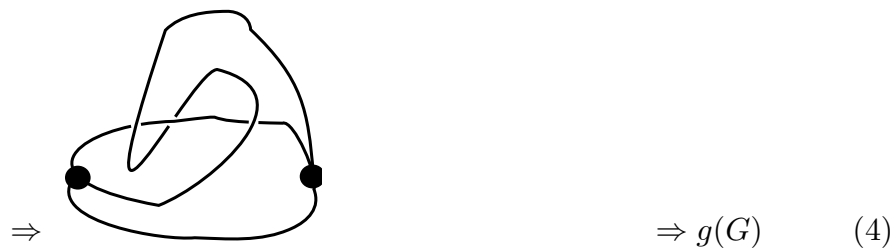
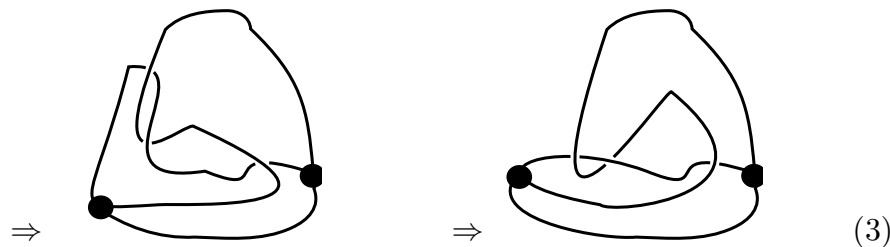
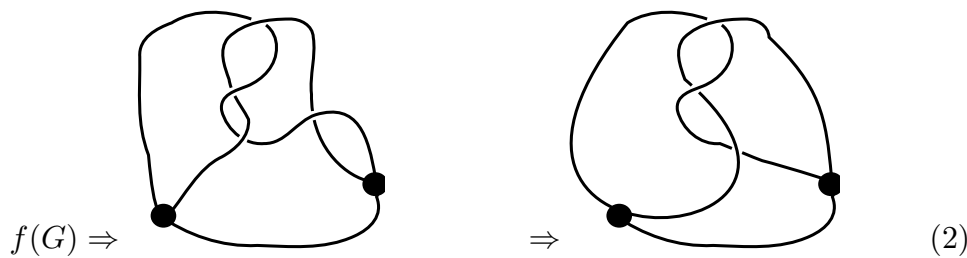


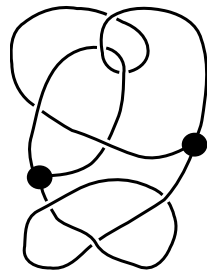
1. 次の空間グラフ $f(G), g(G)$ は互いに同型であることを確かめよ。



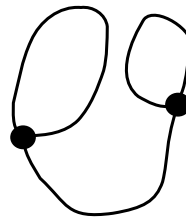
.....



2. 次の空間グラフ $f(G), g(G)$ は互いに同型であることを確かめよ。



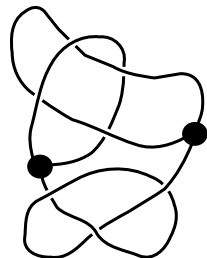
$f(G)$



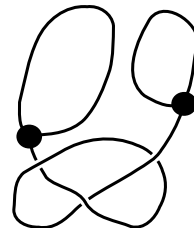
$g(G)$

(5)

.....



$f(G) \Rightarrow$



\Rightarrow

(6)



\Rightarrow

$\Rightarrow g(G)$

(7)

3. 空間グラフの同型関係 \cong について、以下が成り立つことをそれぞれ示せ。

(a) 空間グラフ $f(G)$ に対し、 $f(G) \cong f(G)$

.....

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \quad (8)$$

写像 Φ を恒等写像とすると $\Phi(f(G)) = f(G)$ である。

(b) 空間グラフ $f(G), g(G)$ に対し、 $f(G) \cong g(G)$ ならば $g(G) \cong f(G)$

.....

$f(G) \cong g(G)$ であるので、同相写像 Φ が存在し、 $\Phi(f(G)) = g(G)$ である。
 Φ は同相写像なので、 $X \circ \Phi = \Phi \circ X = id$ となる同相写像 X が存在する。
 この X により、 $X(g(G)) = f(G)$ であるので、 $g(G) \cong f(G)$ である。

- (c) 空間グラフ $f(G), g(G), h(G)$ に対し、 $f(G) \cong g(G)$ かつ $g(G) \cong h(G)$ ならば
 $f(G) \cong h(G)$

.....

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \quad (9)$$

$$X : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \quad (10)$$

$f(G) \cong g(G)$ より同相写像 Φ が存在し、 $\Phi(f(G)) = g(G)$ である。
 また、 $g(G) \cong h(G)$ より同相写像 X が存在し、 $X(g(G)) = h(G)$ である。
 Φ, X が同相写像であるので、その合成写像 $X \circ \Phi$ も同相写像であり、
 $X(\Phi(f(G))) = h(G)$ である。
 よって、 $f(G) \cong h(G)$ である。

4. X, Y, Z を位相空間とし、 $\varphi : X \rightarrow Y, \psi : Y \rightarrow Z$ をそれぞれ写像とするととき、合成写像 $\psi \circ \varphi : X \rightarrow Z$ について、以下の問いに答えよ。

- (a) φ, ψ がともに全単射ならば、 $\psi \circ \varphi$ も全単射であることを示せ。

.....

全射性

φ, ψ がともに全射であるので、任意の $y \in Y$ に対し $y = \varphi(x)$ となる $x \in X$ が存在し、任意の $z \in Z$ に対し $z = \psi(y)$ となる $y \in Y$ が存在する。

任意の $z \in Z$ に対し $z = \psi(y)$ となる $y \in Y$ が存在するので、この $y \in Y$ について $y = \varphi(x)$ となる $x \in X$ が存在する。

つまり、 $\forall z \in Z$ に対し、 $z = \psi \circ \varphi(x)$ となる $x \in X$ が存在する。

よって、 $\psi \circ \varphi$ は全射である。

単射性

φ, ψ がともに単射である。

$y_1, y_2 \in Y$ に対し、 $\psi(y_1) = \psi(y_2)$ であれば $y_1 = y_2$ である。

φ は全射であるので、 $y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2)$ となる $x_1, x_2 \in X$ が存在する。

φ は単射であるので、 $x_1 = x_2$ である。

つまり、 $\psi(\varphi(x_1)) = \psi(\varphi(x_2))$ であれば $x_1 = x_2$ である。

よって、 $\psi \circ \varphi$ は単射である。

この2つより $\psi \circ \varphi$ は単全射である。

-
- (b) φ, ψ がともに連続写像ならば、 $\psi \circ \varphi$ も連続写像であることを示せ。

.....
 φ, ψ が連続写像であるので、任意の開集合 $U_Y \subset Y, U_Z \subset Z$ に対して、 $\varphi^{-1}(U_Y), \psi^{-1}(U_Z)$ が開集合となる。

$\psi^{-1}(U_Z)$ が開集合であるので、 $\varphi^{-1}(\psi^{-1}(U_Z))$ も開集合となる。

つまり、任意の開集合 $U_Z \subset Z$ に対して、 $(\varphi^{-1} \circ \psi^{-1})(U_Z)$ も開集合となる。

$(\varphi^{-1} \circ \psi^{-1})(U_Z) = (\psi \circ \varphi)^{-1}(U_Z)$ であるので、写像 $\psi \circ \varphi : X \rightarrow Z$ は連続写像である。

-
- (c) φ が X から Y への同相写像で、かつ、 ψ が Y から Z への同相写像ならば、 $\psi \circ \varphi$ は X から Z への同相写像となることを示せ。

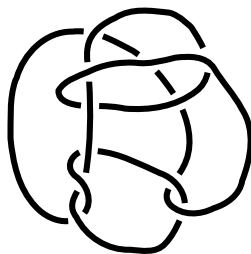
.....
同相写像とは、全単射な連続写像であり、その逆写像も連続写像であるものをいう。

先の問より、 φ, ψ が全単射な連続写像であるので、合成写像 $\psi \circ \varphi$ も全単射な連続写像である。

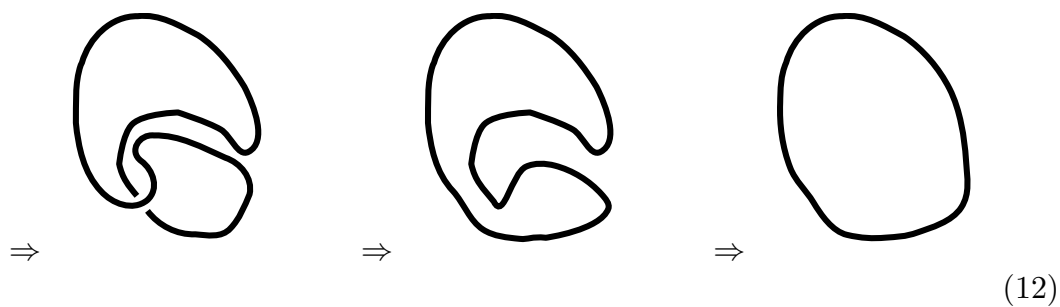
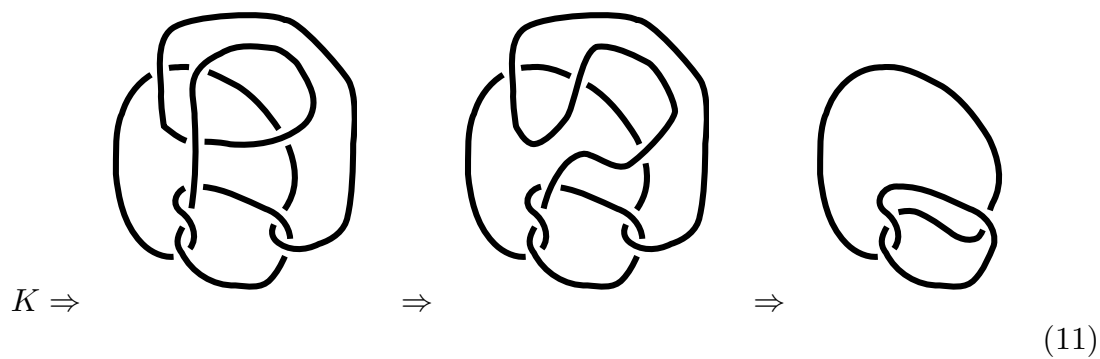
また、 $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X, \psi^{-1} : Z \rightarrow Y$ も連続写像であるので、その合成写像 $\varphi^{-1} \circ \psi^{-1} = (\psi \circ \varphi)^{-1}$ も連続写像である。

よって、 $\psi \circ \varphi$ は同相写像である。

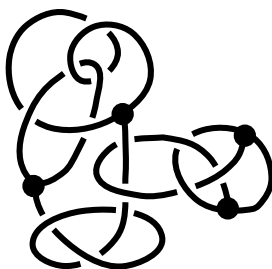
-
5. 次の図式が表す結び目 K は自明であることを確かめよ。



.....



6. 次の図式が表す空間グラフ $f(G)$ は分離していることを確かめよ。



.....

$$f(G) \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} \quad (13)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \end{array} \quad (14)$$
