距離空間

空間 X に関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が定義され、d が次の 3 つを満たすとする。

1. ${}^\forall x, y \in X$ に対し、$d(x,y) \geq 0$ であり、$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. ${}^\forall x, y \in X$ に対し、$d(x,y) = d(y,x)$
3. ${}^\forall x, y, z \in X$ に対し、$d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

この時、関数 d を距離関数といい、距離関数が定義された空間 X を距離空間という。

ユークリッド距離

$\mathbb{R}^n$ の元 $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ に対し、

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \tag{1}$$

をユークリッド距離という。

開集合

集合 X の部分集合 O が開集合であるとは、任意の点 $x \in O$ についてある ε 近傍 $U_\varepsilon(x)$ が存在し $U_\varepsilon(x) \subset O$ であるときをいう。

閉集合

集合 X の部分集合 C が閉集合であるとは、C の補集合 $X \backslash C$ が開集合となるときをいう。

$\mathbb{R}^n$ 上の通常のユークリッド距離 d_n に対して $(\mathbb{R}^n, d_n)$ は距離空間になることを示せ。

....

ユークリッド距離 d_n が距離関数の 3 条件を満たすことを確認する。

${}^\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ とする。

$$d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \geq 0 \tag{2}$$

ユークリッド距離は正の平方根であるため常に 0 以上である。また、$d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ となる時 $x_i = y_i$ であり、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ であれば $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ となる。つまり、$d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ である。

$$d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} = d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \tag{3}$$

根号の中は平方和であるので、$(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$ となり、$d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ である。

三角不等式 $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \geq d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ を示す。

最初に示した通り d_n は常に 0 以上である。そこで、2 乗の差が正となることを示せばよい。

$$(d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}))^2 - (d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}))^2 \geq 0 \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&(d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}))^2 - (d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}))^2 && (5)\\
=&\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2}\right)^2 - \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2}\right)^2 && (6)\\
=&2\left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2\right)} - \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)(y_i - z_i)\right) && (7)\\
\geq&2\left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)(y_i - z_i)\right)^2} - \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)(y_i - z_i)\right) = 0 && (8)
\end{aligned}$$

式 (7) には Schwarz（シュワルツ）の不等式 $((\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2)$ を利用した。

三角不等式 $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \geq d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ が成り立つことが示せた。

これによりユークリッド距離 d_n は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数となるので、$(\mathbb{R}^n, d_n)$ は距離空間である。

$\mathbb{R}^n$ の 2 つの元 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ に対して $d_n^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|x_i - y_i| \in \mathbb{R} \mid i = 1, \ldots, n\}$ とすると $(\mathbb{R}^n, d_n^*)$ は距離空間になることを示せ。

....

d_n^* の定義に $|x_i - y_i|$ とあるので、$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し $d_n^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$ である。また、$d_n^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ であり、$d_n^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ である。

次の式の通り $d_n^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d_n^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ である。

$$\begin{aligned}
d_n^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \max\{|x_i - y_i| \in \mathbb{R} \mid i = 1, \ldots, n\} && (9)\\
&= \max\{|y_i - x_i| \in \mathbb{R} \mid i = 1, \ldots, n\} = d_n^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) && (10)
\end{aligned}$$

三角不等式 $d_n^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_n^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \geq d_n^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ を示す。

$d_n^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ は定義からある k が存在し $d_n^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = |x_k - z_k|$ となる。

実数の絶対値における三角不等式から $\boldsymbol{y}$ の k 成分 y_k を用いて次の不等式が成り立つ。

$$|x_k - y_k| + |y_k - z_k| \geq |x_k - z_k| \tag{11}$$

d_n^* の定義より $d_n^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq |x_k - y_k|$、$d_n^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \geq |y_k - z_k|$ である。

$$d_n^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_n^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \geq |x_k - y_k| + |y_k - z_k| \geq |x_k - z_k| = d_n^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \tag{12}$$

これにより d_n^* は距離関数であり、$(\mathbb{R}^n, d_n^*)$ は距離空間になる。

閉集合の無限個の和集合が閉集合ではない開集合となる例をあげ、それを証明せよ。

....

$\mathbb{R}$ 上の集合を考える。

$$A_1 = [0, 0] = \{0\},\ A_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ A_3 = \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right], \tag{13}$$

$$A_4 = \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right],\ \ldots,\ A_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right],\ \ldots \tag{14}$$

この時、各 A_i は閉集合であるが、$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ は閉集合ではなく開集合となる。

$A_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ に対して補集合は次のようになる。

$$A_n^c = \left(-\infty, -1 + \frac{1}{n}\right) \cup \left(1 - \frac{1}{n}, \infty\right) \tag{15}$$

${}^\forall x \in A_n^c$ とすると $x \in \left(-\infty, -1 + \frac{1}{n}\right)$ または $x \in \left(1 - \frac{1}{n}, \infty\right)$ である。

$x \in \left(-\infty, -1 + \frac{1}{n}\right)$ の場合を考える。$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\left(-1 + \frac{1}{n}\right) - x\right)$ とすると

$$x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_n^c \tag{16}$$

である。$x \in \left(1 - \frac{1}{n}, \infty\right)$ の場合も同様の議論により x の ε 近傍は A_n の補集合に含まれる。この為、補集合 A_n^c が開集合となり、A_n は閉集合である。

閉集合 A_n の和集合 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ について考える。

A_n は次のような包含関係が成り立っている。

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots \tag{17}$$

${}^\forall x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ とする。この時、ある k が存在し $x \in A_k$ であり、$x = -1 + \frac{1}{k}$ 又は $x = 1 - \frac{1}{k}$ 又は $-1 + \frac{1}{k} < x < 1 - \frac{1}{k}$ である。

$-1 + \frac{1}{k} < x < 1 - \frac{1}{k}$ の場合

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{2}\left(x - \left(-1 + \frac{1}{k}\right)\right), \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{k}\right) - x\right)\right\} \tag{18}$$

このように ε を定義すると ε 近傍 $U_\varepsilon(x)$ は $U_\varepsilon(x) \subset A_k$ である。

$x = -1 + \frac{1}{k}$ 又は $x = 1 - \frac{1}{k}$ の場合

閉集合 A_{k+1} が存在し $x \in A_{k+1}$ である。

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{2}\left(x - \left(-1 + \frac{1}{k+1}\right)\right), \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) - x\right)\right\} \tag{19}$$

このように ε を定義すると ε 近傍 $U_\varepsilon(x)$ は $U_\varepsilon(x) \subset A_{k+1}$ である。

この為、$^\forall x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ について ε 近傍が存在し $U_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ であることが分かる。

つまり、$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ は開集合となる。
