1. (a) c:定数、E:3 次単位行列、$|cE|$ の値

3 次の正方行列 A の行列式は次のようにして計算できる。

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \tag{2}$$

$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \tag{3}$$

三角行列で行う場合、0 となる場所が出てくるので、行列式は対角成分の積を求めるだけでよい。

$cE = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ より $|cE| = c^3$ となる。

(b) 3 次正方行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ に対し、$|\tilde{A}| = |A|^2$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$ を認めるなら次のようになる。

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} \qquad \text{両辺に}|A|A\text{をかける} \tag{4}$$

$$|A|E = \tilde{A}A \qquad \text{両辺の行列式を求める} \tag{5}$$

$$||A|E| = |\tilde{A}A| \tag{6}$$

$$|A|^3 = |\tilde{A}||A| \qquad |A|\text{で割る} \tag{7}$$

$$|A|^2 = |\tilde{A}| \tag{8}$$

講義ではこれを逆にたどり $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$ を示したと思います。$|A|^2 = |\tilde{A}|$ の証明をするのであれば講義の順を追う必要があります。

2. 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解を求めよ。ただし、A は正則。

行列 A は正則である為、逆行列 A^{-1} が存在する。これを連立方程式の両辺にかけると $\boldsymbol{x}$ が求まる。

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

3. $\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が線形独立であることを示せ。

(a) 線形結合 $c_1\boldsymbol{a_1} + c_2\boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{0}$ を書き換えると次のようになる。

$$(\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2})\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{11}$$

これにより $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) 行列 A は正則である。

行列式が 0 でない場合に正則であるので、$|A| = 1 \neq 0$ より A は正則。

(c) $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$ の線形独立性。

$A = (\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2})$ とすると

$$c_1\boldsymbol{a_1} + c_2\boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{0} \tag{12}$$

$$(\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2})\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{13}$$

$$A\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{14}$$

$$A^{-1}A\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\boldsymbol{0} \tag{15}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{16}$$

となる。

$c_1\boldsymbol{a_1} + c_2\boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{0}$ を満たす時、$c_1 = 0, c_2 = 0$ となるので $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$ は線形独立である。

4. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ の時、外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求める。

外積で求まるベクトルの第 i 成分は、元の 2 つのベクトルの i 以外の成分より求まる。具体的には次のように行列式の形になる。

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

5. 線形変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix}$ とする。

この時、$f\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を求めよ。

この線形写像を表す行列を $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とおく。これにより $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$、$A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix}$ である。

(補足) 2 つの式を一つにまとめ、左から逆行列をかけて求めてもよい。

成分ごとに計算をすると次のようになる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} a_{11} + 2a_{12} = 1 \\ a_{21} + 2a_{22} = 8 \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} 3a_{11} + a_{12} = 8 \\ 3a_{21} + a_{22} = 14 \end{cases} \tag{19}$$

4 つの式の連立方程式を解くことで行列 A の成分が求まる。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

これを利用し計算を行う。

$$f\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

6. ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする。
直線 $l : y = ax$ に関して対称に移動する線形変換を表す行列が

$$\frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

であることを用いても良いものとする。

(a) ベクトル $\boldsymbol{a}$ を原点を中心に $\frac{\pi}{4}$ 回転させたベクトルを求めよ。
原点を中心として θ だけ回転させる線形変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{23}$$

である。これを用いて $\frac{\pi}{4}$ 回転させたベクトルは

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{24}$$

(b) ベクトル $\boldsymbol{a}$ を x 軸に関して対称に折り返したベクトルを求めよ。また、その移動を表す行列を求めよ。
x 軸について対称であるので y 成分の符号を変えれば良い。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{25}$$

この変換に対応する行列 A は

$$A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} \tag{26}$$

を満たす為、$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) ベクトル $\boldsymbol{a}$ を直線 $y = \frac{1}{2}x$ に関して対称に移動したベクトルを求めよ。

$$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\begin{pmatrix} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 & 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) \\ 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2}\right)^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{27}$$