次の広義 2 重積分を計算せよ。

$$\iint_D \frac{2y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R} \mid 0\leq y\leq x\leq 1, x>0\} \tag{1}$$

$f(x)=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$ とし、$D_n=\{(x,y)\mid \frac{1}{n}\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x\}$ とする。$\{D_n\}$ は $D$ の近似列である。

$D$ において $x>0, y\geq 0$ であるので $f(x)\geq 0$ である。

| |
|---|
| $D$ は領域の英語 Domain の頭文字から、$n$ は自然数 natural number または 数 number の頭文字からとっているので暗にそれを示唆している<br>特に $n$ を自然数として数列を構成したい為、$D_n$ は $\frac{1}{n}$ を用いて定義している |

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\log(x^2+y^2)=\frac{2y}{x^2+y^2}=f(x) \tag{2}$$

このように $y$ の偏微分を考えると $f(x)$ が得られる。この為、次の積分が得られる。

$$\int f(x)\mathrm{d}y=\log(x^2+y^2)+C \qquad (C: 積分定数) \tag{3}$$

$y$ は $0\leq y\leq x$ であるから定積分は次のようになる。

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}y=\left[\log(x^2+y^2)\right]_{y=0}^{y=x}=\log(x^2+x^2)-\log(x^2+0^2)=\log 2 \tag{4}$$

領域 $D_n$ 上での積分値を $I_n$ として数列 $\{I_n\}$ を作る。この数列の極限が広義積分の値となる。

$$\lim_{n\to\infty} I_n=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{2y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^1\int_0^x\frac{2y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^1\log 2\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\log 2=\log 2 \tag{6}$$

よって広義積分は次のように求められる。

$$\iint_D\frac{2y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\log 2 \tag{7}$$