
m, n を自然数とする。

$m^2 = 2^n + 1$ を満たす m, n を求めよ。

$m^2 = 2^n + 1$ を変形する。

$$m^2 = 2^n + 1 \tag{1}$$

$$(m+1)(m-1) = 2^n \tag{2}$$

2 は素数なので、自然数 α, β ($\alpha > \beta$) を用いて $m+1 = 2^\alpha, m-1 = 2^\beta$ と分ける。この時、 $\alpha + \beta = n$ である。

$(m+1) - (m-1) = 2$ であり、 $(m+1) - (m-1) = 2^\alpha - 2^\beta$ である。

これより、 $2^\alpha - 2^\beta = 2$ である。 $2^\beta(2^{\alpha-\beta} - 1) = 2$ となるが、2 は素数なので、 $(2^\beta, 2^{\alpha-\beta} - 1) = (1, 2)$ である場合と $(2^\beta, 2^{\alpha-\beta} - 1) = (2, 1)$ の場合がありえる。 $2^{\alpha-\beta} - 1 = 2$ となる自然数 α, β は存在しない為、前者はありえない。

$$2^\beta = 2, \quad 2^{\alpha-\beta} - 1 = 1 \tag{3}$$

これを満たすのは $\alpha = 2, \beta = 1$ であるので、 $(m, n) = (3, 3)$ となる。