1. 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{1}{1+x^n}dx \tag{1}$$

....

$n\in\mathbb{N}$ とし、連続関数 $f_n:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ を次で定義する。

$$f_n(x)=\frac{1}{1+x^n} \tag{2}$$

$x\in[1,\infty)$ に対し、次のような不等式が成り立つ。

$$\frac{1}{1+x}>\frac{1}{1+x^2}>\frac{1}{1+x^3}>\cdots \tag{3}$$

そこで、$n>1$ の自然数と $x\in[1,\infty)$ に対し、次の不等式が成り立つ。

$$|f_n(x)|=\left|\frac{1}{1+x^n}\right|\leq(1+x^2)^{-1} \tag{4}$$

$\int_1^\infty(1+x^2)^{-1}dx$ は $x=\tan\theta$ として置換積分をすると次のように計算できる。

$$\int_1^\infty(1+x^2)^{-1}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\tan^2\theta)^{-1}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4} \tag{5}$$

$\int_1^\infty(1+x^2)^{-1}dx<\infty$ であるので、μ を $[1,\infty)$ 上のルベーグ速度とすると、$n\geq 2$ において次の式が成り立つ。

$$\int_1^\infty f_n(x)dx=\int_{[1,\infty)}f_n d\mu \tag{6}$$

$n\in\mathbb{N}$ に対し、f_n は連続関数であるので、$\mathcal{B}([1,\infty))$-可測関数である。また、$x\in(1,\infty)$ に対し、$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$ であり、$x=1$ のとき、$f_n(x)=1/2$ である。

関数 $g:[1,\infty)\to[0,\infty)$ を $g(x)=(1+x^2)^{-1}$ で定義する。g は連続関数であり、$\int_1^\infty|g(x)|dx=\frac{\pi}{4}<\infty$ である。したがって、$\int_{[1,\infty)}gd\mu<\infty$ である。

$n\geq 2$ と $x\in[1,\infty)$ に対し、$|f_n(x)|\leq g(x)$ が成り立つので、ルベーグの収束定理から次が得られる。

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty\frac{1}{1+x^n}dx=\lim_{n\to\infty}\int_{[1,\infty)}f_n d\mu=\int_{[1,\infty)}\lim_{n\to\infty}f_n d\mu=0 \tag{7}$$

2. $a \in (0, \infty)$ と $a = 0$ のそれぞれの場合で次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^\infty \frac{n^2 x e^{-n^2 x^2}}{1 + x^2} dx \tag{8}$$

. . . .