反復法を用いて、次の連立１次方程式の近似解を与えるアルゴリズムを考察する。

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 = & 4 \\ x_1 + 5x_2 = & 6 \end{cases} \tag{1}$$

連立方程式は次のように行列で表現できます。

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{2}$$

それぞれの行列を次のようにし、連立方程式は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となるようにします。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{3}$$

また、行列 A を分解し次のようにおきます。

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

この時、$A = L + D + U$ であり、$A\boldsymbol{x} = (L + D + U)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となります。

(i). 方程式 (1) に対して、ガウス・ザイデルの反復法による反復過程を与えよ。

$(L + D + U)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ より次のように変形できます。

$$(L + D + U)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{5}$$

$$(L + D)\boldsymbol{x} + U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{6}$$

$$(L + D)\boldsymbol{x} = -U\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \tag{7}$$

この時、右辺の $\boldsymbol{x}$ を $k + 1$ 回目の近似解 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ を、左辺の $\boldsymbol{x}$ は k 回目の近似解 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ を表すとして書き直すと次のようになります。

$$(L + D)\boldsymbol{x}^{(k+1)} = -U\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = -(L + D)^{-1}U\boldsymbol{x}^{(k)} + (L + D)^{-1}\boldsymbol{b} \tag{9}$$

行列 $L + D$ は三角行列なので $\det D \neq 0$ であれば逆行列が存在します。

$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = {}^t(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}), \boldsymbol{x}^{(k)} = {}^t(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ として、上の式を計算します。

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$= -\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{25} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_2^{(k)} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{25} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x_2^{(k)} \\ -\frac{1}{25}x_2^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{26}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x_2^{(k)} + \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{25}x_2^{(k)} + \frac{26}{25} \end{pmatrix} \tag{12}$$

これにより次の式が得られます。

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}x_2^{(k)} + \frac{4}{5}, \quad x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{25}x_2^{(k)} + \frac{26}{25} \tag{13}$$

…………………………………………………………………………

連立方程式を変形することでも上の式が得られます。

$$5x_1 - x_2 = 4 \quad \longrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{5}(x_2 + 4) \tag{14}$$

この変形した式の左辺を $k+1$ 回目の近似値 $x_1^{(k+1)}$ とし、右辺を k 回目 $x_2^{(k)}$ とします。これにより次の式が得られます。

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}(x_2^{(k)} + 4) \tag{15}$$

同様に二つ目の式も変形します。

$$x_1 + 5x_2 = 6 \quad \longrightarrow \quad x_2 = \frac{1}{5}(-x_1 + 6) \tag{16}$$

左辺を $k+1$ 回目の近似値 $x_2^{(k+1)}$ をします。右辺は先ほど求めた $k+1$ 番目の近似値 $x_1^{(k+1)}$ を使います。(ヤコビ法では k 番目を使います。)

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-x_1^{(k+1)} + 6) \tag{17}$$

(15) と (17) の式を使って近似解を求めていきます。(15) の式を (17) に代入することで (13) の式が得られます。

(ii). 初期値を $\boldsymbol{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}\right) = (0, 0)$ とする時、$m = 1, 2, 3$ に対して解の近似列 $\boldsymbol{x}^{(m)}$ を求めよ。(有効数字 4 桁)

…………………………………………………………………………

(13) の式を利用し求めます。

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}x_2^{(k)} + \frac{4}{5}, \quad x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{25}x_2^{(k)} + \frac{26}{25} \tag{18}$$

まず、$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$ を計算します。

$$x_1^{(1)} = \frac{4}{5} = 0.8000 \tag{19}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{26}{25} = 1.040 \tag{20}$$

これを利用し $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$ を計算します。

$$x_1^{(2)} = \frac{126}{125} = 1.008 \tag{21}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{624}{625} = 0.9984 \tag{22}$$

最後に $x_1^{(3)}, x_2^{(3)}$ を計算します。

$$x_1^{(3)} = \frac{3124}{3125} = 0.99968 \fallingdotseq 0.9996 \tag{23}$$

$$x_2^{(3)} = \frac{15626}{15625} = 1.000064 \fallingdotseq 1.000 \tag{24}$$

(iii). (i) で与えた反復過程が $\|\cdot\|_\infty$ について収束することを示せ。

....

(9) より

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = -(L+D)^{-1}U\boldsymbol{x}^{(k)} + (L+D)^{-1}\boldsymbol{b} \tag{25}$$

であるが、$M = -(L+D)^{-1}U$ とおくと次のようになる。

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = M\boldsymbol{x}^{(k)} + (L+D)^{-1}\boldsymbol{b} \tag{26}$$

連立方程式の解を $\hat{\boldsymbol{x}}$ とおくと次のような等号である。

$$\hat{\boldsymbol{x}} = M\hat{\boldsymbol{x}} + (L+D)^{-1}\boldsymbol{b} \tag{27}$$

2 つの式の差を考えると

$$\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{(k+1)} = M\hat{\boldsymbol{x}} - M\boldsymbol{x}^{(k)} = M(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{(k)}) \tag{28}$$

同様に k を一つ減らしても同じような式が得られる。

$$\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{(k)} = M(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}) \tag{29}$$

これらを繰り返し求め、順に代入していくと次の式が得られます。

$$\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{(k)} = M^k(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{(0)}) \tag{30}$$

ここで、

$$\begin{align} M &= -(L+D)^{-1}U \tag{31} \\ &= -\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{32} \\ &= -\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{25} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{25} \end{pmatrix} \tag{33} \end{align}$$

であり、$\|M\|_\infty = \frac{1}{5} < 1$ となる。$\|M^k\|_\infty \to 0 \quad (k \to \infty)$ となるから、初期値 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ によらず次の様になる。

$$\|\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty = \|M^k(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{(0)})\|_\infty \to 0 \quad (k \to \infty) \tag{34}$$

この為、k が十分に大きい時 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ は解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ に収束する。

SageMathCell

https://sagecell.sagemath.org/

計算用コード

```
a, b = var('a b')

L=Matrix([[0,0],[1,0]])
D=Matrix([[5,0],[0,5]])
U=Matrix([[0,-1],[0,0]])

x=Matrix([a,b]).transpose()
y=Matrix([4,6]).transpose()

x0=Matrix([0,0]).transpose()

print("==L+D の逆行列==")
print((L+D).inverse())
```

```
print("==計算式==")
print((L+D).inverse()*(-U*x+y))
print("==1回目==")
x1=(L+D).inverse()*(-U*x0+y)
print(x1)
print("==2回目==")
x2=(L+D).inverse()*(-U*x1+y)
print(x2)
print("==3回目==")
x3=(L+D).inverse()*(-U*x2+y)
print(x3)
print("==収束性==")
M=-(L+D).inverse()*U
print(M)
```

実行結果

```
==L+D の逆行列==
[   1/5        0]
[-1/25      1/5]
==計算式==
[      1/5*b + 4/5]
[-1/25*b + 26/25]
==1回目==
[   4/5]
[26/25]
==2回目==
[126/125]
[624/625]
==3回目==
[   3124/3125]
[15626/15625]
==収束性==
[      0     1/5]
[      0  -1/25]
```