東京農工

工学部 3 年次編入試験

2021 年度

---

1. 2 変数関数 $f(x,y)$ について次の問いに答えよ。

$$f(x,y) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2y - y^3 + 11x^2 + 6xy + 3y^2 - 12x \tag{1}$$

（a）$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を満たす点 (x,y) を全て求めよ。

（b）$z = f(x,y)$ の極値を求めよ。

2. 次の 2 つの曲面で囲まれた図形 V の体積を求めよ。

$$x^2 + 2y + z = 0 \tag{2}$$

$$y^2 - z - 3 = 0 \tag{3}$$

3. n は自然数とする。次の行列 A に対し、A^n を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

4. 次の微分方程式の解 $y = y(x)$ で、$y(0) = 0, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0) = 1$ を満たすものを求めよ。

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 5y = 5\sin x \tag{5}$$

....

偏微分の記号

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \qquad f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}f(x,y) \tag{6}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \qquad f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) \tag{7}$$

ヘッセ行列

2 変数関数 $f(x,y)$ のヘッセ行列 $H(f)$ は次のように定義される。

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \tag{8}$$

2 変数の偏微分を行う順序で $H(f)$ の成分の場所が決まる。

ヘッセ行列の行列式を $\overset{\text{ヘッシアン}}{\text{Hessian}}$ という。

$$|H(f)| = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 \tag{9}$$

極値

関数 $f(x,y)$ の極値 (極大値、極小値) の求め方

1. $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を満たす点 (a,b) を求める。
2. 上の条件を満たす点 (a,b) について $|H(f(a,b))|$ を計算する。
   - $|H(f(a,b))| < 0$ の時、$f(a,b)$ は極値ではない。
   - $|H(f(a,b))| > 0$ の時、$f(a,b)$ は極値である。
3. $f_{xx}(a,b)$ を計算する。
   - $f_{xx}(a,b) > 0$ であれば、$f(a,b)$ は極小値である。
   - $f_{xx}(a,b) < 0$ であれば、$f(a,b)$ は極大値である。

上記条件のどれかが 0 になる場合 ($|H(f(a,b))| = 0$ や $f_{xx}(a,b) = 0$) はこの方法では判定できない。

ヤコビ行列

重積分の座標変換に次のヤコビ行列の行列式を用いる。ヤコビ行列式の事を $\overset{\text{ヤコビアン}}{\text{Jacobian}}$ という。

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \tag{10}$$

変数変換を $x = r\cos\theta,\ y = r\cos\theta$ とするとヤコビ行列は次のようになる。

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{11}$$

ヤコビ行列式は以下の通りである。

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \tag{12}$$

微分方程式

2 階線形微分方程式の解法

$$y'' + ay' + by = r(x) \quad (a,b: \text{定数},\ r(x): x\text{の関数}) \tag{13}$$

まずはじめに右辺の関数がない同次方程式について考える。

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{14}$$

この方程式の解を $y_1 = e^{\alpha x}$ とすると上の式に当てはめて

$$\alpha^2 e^{\alpha x} + a\alpha e^{\alpha x} + b e^{\alpha x} = 0 \tag{15}$$

$$(\alpha^2 + a\alpha + b) e^{\alpha x} = 0 \tag{16}$$

が得られる。$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ の時に同次方程式は成り立つので、この $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ を**特性方程式**という。特定方程式は 2 次式であるから解も 2 つ存在し、これを α, β とすると同次方程式の解は $e^{\alpha x}, e^{\beta x}$ である。(基本解) また、これらを用いてできる $c_\alpha e^{\alpha x} + c_\beta e^{\beta x}$ (c_α, c_β は定数) も同次方程式の解となる。(一般解)

特性方程式が虚数解を持つ場合はオイラーの公式を用いて解を計算する。

$$(\text{Eular}（オイラー）\text{の公式}) \qquad e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \tag{17}$$

式 (13) の特殊解を一つ求める。この式の右端 $\cdots + by = r(x)$ から y を予測しそれを式 (13) に当てはめて成立するように係数などを求める。

この特殊解が求まれば同次方程式の一般解と加えたものが式 (13) の一般解となる。

1.（a）まず、偏微分した式を求める。

$$f_x(x,y) = 2x^2+6xy+22x+6y-12 \tag{18}$$
$$f_y(x,y) = 3x^2-3y^2+6x+6y \tag{19}$$
$$= 3(x+y)(x-y+2) \tag{20}$$

$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点は次の連立方程式を解くことで求まる。

$$\begin{cases} 2x^2+6xy+22x+6y-12=0 \\ 3(x+y)(x-y+2)=0 \end{cases} \tag{21}$$

2 つ目の式より $x+y=0$ の場合と $x-y+2=0$ の場合に分けて考える。

$x+y=0$ の場合

$y=-x$ を $2x^2+6xy+22x+6y-12=0$ に代入し解くと、$(x,y)=(1,-1),(3,-3)$ が得られる。

$x-y+2=0$ の場合

同様に $y=x+2$ を代入すると $(x,y)=(-5,-3),(0,2)$ が得られる。

よって、求めるべき点は次の 4 点である。

$$(x,y)=(1,-1),(3,-3),(-5,-3),(0,2) \tag{22}$$

（b）$z=f(x,y)$ の極値を求めよ。

上で求めた点のヘッセ行列を求め極値の判定を行う。

$$H(f)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+6y+22 & 6x+6 \\ 6x+6 & -6y+6 \end{pmatrix} \tag{23}$$

- 点 $(1,-1)$ の場合

$$|H(f(1,-1))| = \begin{vmatrix} 20 & 12 \\ 12 & 12 \end{vmatrix} = 96 > 0 \tag{24}$$

であり、$f_{xx}(1,-1)=20>0$ より $f(1,-1)=-\frac{16}{3}$ は極小値である。

- 点 $(3,-3)$ の場合

$$|H(f(3,-3))| = \begin{vmatrix} 16 & 24 \\ 24 & 24 \end{vmatrix} = -192 < 0 \tag{25}$$

であるので $f(3,-3)=0$ は極値ではない。

- 点 $(-5,-3)$ の場合

$$|H(f(-5,-3))| = \begin{vmatrix} -16 & -24 \\ -24 & 24 \end{vmatrix} = -960 < 0 \tag{26}$$

であるので $f(-5,-3) = \frac{512}{3}$ は極値ではない。

- 点 $(0,2)$ の場合

$$|H(f(0,2))| = \begin{vmatrix} 34 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = -240 < 0 \tag{27}$$

であるので $f(0,2) = 4$ は極値ではない。

以上により $(x,y) = (1,-1)$ の時、極小値 $z = -\frac{16}{3}$ となる。

2.

$$x^2 + 2y + z = 0, \quad y^2 - z - 3 = 0 \tag{28}$$

この式は次のように z の式に変形する。

$$z = -x^2 - 2y, \quad z = y^2 - 3 \tag{29}$$

2 つの曲面の共有点について調べる。

$$-x^2 - 2y = y^2 - 3 \tag{30}$$

$$x^2 + (y+1)^2 = 4 \tag{31}$$

共有点は中心 $(0,-1)$、半径 2 の円周上にある。
求めるべき体積は次の領域 D 上にある。

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y+1)^2 \leq 4\} \tag{32}$$

D 上では曲面 $z = -x^2 - 2y$ の方が曲面 $z = y^2 - 3$ より上にある。実際に差を求めると次のように D 上では 0 以上になる。

$$(-x^2 - 2y) - (y^2 - 3) = -x^2 - (y+1)^2 + 4 \geq 0 \tag{33}$$

この為、求めるべき体積は次の積分を計算することで得られる。

$$\iint_D ((-x^2 - 2y) - (y^2 - 3))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{34}$$

$$= \iint_D (-x^2 - (y+1)^2 + 4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{35}$$

変数変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta - 1$ とするとヤコビ行列は次のようになる。

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{36}$$

積分する領域 D も次のように書き換えられる。

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y+1)^2 \leq 4\} \tag{37}$$
$$= \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \tag{38}$$

この為、積分は次のように計算される。

$$\iint_D (-x^2 - (y+1)^2 + 4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{39}$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (-(r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 + 4) \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{40}$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (-r^2 + 4)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{41}$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{r^4}{4} + 2r^2\right]_{r=0}^{r=2} \mathrm{d}\theta \tag{42}$$
$$= \int_0^{2\pi} 4\mathrm{d}\theta \tag{43}$$
$$= [4\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 8\pi \tag{44}$$

3. A^n を求める。

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \tag{45}$$

とりあえず A^2 を計算してみる。

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \tag{46}$$

あまり 0 が増えないので他の方法で求める。
方針は対角化行列 $P^{-1}AP$ を求めこれを n 乗する。
まず、固有値と固有ベクトルを求める。

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{47}$$

これを解くと固有値 $\lambda = -1, 2$ が求まる。

$\lambda = -1$ の時

$$\begin{pmatrix} -2-(-1) & -1 \\ 4 & 3-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \tag{48}$$

これより固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が得られる。

$\lambda = 2$ の時

$$\begin{pmatrix} -2-2 & -1 \\ 4 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \tag{49}$$

これより固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ が得られる。

よって行列 A を対角化すると次のようになる。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{ただし } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \tag{50}$$

対角化行列を n 乗する。

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \tag{51}$$

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \tag{52}$$

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \tag{53}$$

ここで、

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{54}$$

であるので、

$$\begin{aligned} A^n =& P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} & (55) \\ =& \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & (56) \\ =& \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^n \\ (-1)^{n+1} & -2^{n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & (57) \\ =& \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n \cdot 4 - 2^n & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^{n+1} \cdot 4 + 2^{n+2} & (-1)^{n+1} + 2^{n+2} \end{pmatrix} & (58) \end{aligned}$$

である。

4.

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5y=5\sin x \tag{59}$$

この方程式の特殊解を考える。

$\cdots+5y=5\sin x$ とあり、微分を行うことから三角関数であると考え次のようにおく。

$$y=A\sin x+B\cos x \tag{60}$$

ここから導関数を求める。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=A\cos x-B\sin x,\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-A\sin x-B\cos x \tag{61}$$

これを問題の式 (59) に当てはめる。

$$(-A\sin x-B\cos x)+2(A\cos x-B\sin x)+5(A\sin x+B\cos x)=5\sin x \tag{62}$$

$$(-A-2B+5A-5)\sin x+(-B+2A+5B)\cos x=0 \tag{63}$$

$\sin x,\ \cos x$ の係数が 0 になるように $A,\ B$ を求める。

$$A=1,\ B=-\frac{1}{2} \tag{64}$$

これで特殊解は次のようになる。

$$y=\sin x-\frac{1}{2}\cos x \tag{65}$$

次に付随する同次方程式の一般解を求める。

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5y=0 \tag{66}$$

特性方程式 $\lambda^2+2\lambda+5=0$ の解は $\lambda=-1\pm 2i$ であるので、基本解は次の 2 つ。

$$e^{(-1+2i)x}=e^{-x}(\cos 2x+i\sin 2x),\quad e^{(-1-2i)x}=e^{-x}(\cos 2x-i\sin 2x) \tag{67}$$

ここから一般解は定数 $c_\alpha,\ c_\beta$ を用いて次のようになる。

$$c_\alpha e^{(-1+2i)x}+c_\beta e^{(-1-2i)x}=(c_\alpha+c_\beta)e^{-x}\cos 2x+(c_\alpha-c_\beta)ie^{-x}\sin 2x \tag{68}$$

定数部分を $C_1 = c_\alpha + c_\beta$, $C_2 = (c_\alpha - c_\beta)i$ とおくと同次方程式の一般解は次のようになる。

$$C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x \tag{69}$$

これにより問題の方程式の解は特殊解 (65) と同次式の一般解 (69) から

$$y = \sin x - \frac{1}{2} \cos x + C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x \tag{70}$$

である。

初期値 $y(0) = 0, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0) = 1$ を満たすように C_1, C_2 を求める。

$y(0) = 0$ より $C_1 = \frac{1}{2}$ が分かる。

微分をするとこの式になるので、

$$y' = \cos x + \frac{1}{2} \sin x + (-C_1 + 2C_2) e^{-x} \cos 2x + (-2C_1 - C_2) e^{-x} \sin 2x \tag{71}$$

これより $C_2 = \frac{1}{4}$ が得られる。

よって求めるべき方程式の解は

$$y = \sin x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x + \frac{1}{4} e^{-x} \sin 2x \tag{72}$$

2022 年度

1. 2 変数関数 $f(x,y)$ について次の問いに答えよ。

$$f(x,y)=2x^3+xy^2+9x^2+y^2-2 \tag{73}$$

（a）$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) を全て求めよ。

（b）$z=f(x,y)$ の極値を求めよ。

2. 以下の問いに答えよ。

（a）次の広義積分の値を求めよ。

$$\int_0^\infty \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x \tag{74}$$

（b）次の重積分の値を求めよ。

$$\iint_D (x-y)e^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D=\{(x,y)\mid 0\leq x-y\leq 2,\ 0\leq x+y\leq 3\} \tag{75}$$

3. t は実数とする。次の 3 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ に対し、$A\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$ が成り立つ時、以下の問いに答えよ。

$$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&2&1\\-1&t&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}2\\-9\\3\end{pmatrix} \tag{76}$$

（a）t の値を求めよ。

（b）A の逆行列を求めよ。

（c）A の固有値のうち最小のものを p とする。p に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$ の形のものを求めよ。

4. 次の微分方程式の解 $y=y(x)$ で、$y(0)=0,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0)=0$ を満たすものを求めよ。

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6y=3x+e^{-x} \tag{77}$$

解答

1.（a）偏微分を行う。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 18x \tag{78}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y = 2y(x+1) \tag{79}$$

この 2 つの式の連立方程式を解くと次の 4 つの解を得る。

$$(-3, 0),\ (0, 0),\ (-1, -2\sqrt{3}),\ (-1, 2\sqrt{3}) \tag{80}$$

（b）$z = f(x, y)$ のヘッセ行列を求める。

$$H(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x + 18 & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{pmatrix} \tag{81}$$

先程の 4 つの解を用いてヘッセ行列式を求める。

- $(x, y) = (-3, 0)$

$$H(f(-3, 0)) = \begin{vmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 72 > 0 \tag{82}$$

  f_{xx} の成分 -18 は負であるので、$(-3, 0)$ では極大値となる。

- $(x, y) = (0, 0)$

$$H(f(0, 0)) = \begin{vmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 36 > 0 \tag{83}$$

  f_{xx} の成分 18 は正であるので、$(0, 0)$ では極小値となる。

- $(x, y) = (-1, -2\sqrt{3})$

$$H(f(-1, -2\sqrt{3})) = \begin{vmatrix} 6 & -4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = -48 < 0 \tag{84}$$

  よって極値ではない。

- $(x, y) = (-1, 2\sqrt{3})$

$$H(f(-1, 2\sqrt{3})) = \begin{vmatrix} 6 & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = -48 < 0 \tag{85}$$

  よって極値ではない。

これより極値は次のよう求まる。

$$\text{極大値}\ z = 25 \quad (x, y) = (-3, 0) \tag{86}$$

$$\text{極小値}\ z = -2 \quad (x, y) = (0, 0) \tag{87}$$

2. (a) $x = \tan\theta$ と置くことで積分区間を $(0, \infty)$ から $(0, \frac{\pi}{2})$ へと変える。また、$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$ より $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$ と置き換える。

$$\int_0^\infty \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2\theta + \tan\theta + 1}{(\tan^2\theta+1)^2}\frac{1}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \tag{88}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)\mathrm{d}\theta \tag{89}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos 2\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\mathrm{d}\theta \tag{90}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \tag{91}$$

$$= \frac{1}{2} \tag{92}$$

(b) $X = x - y,\ Y = x + y$ と変数変換する。この時のヤコビ行列式は次のようになる。

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \tag{93}$$

また、積分する領域 D から積分する区間は $0 \leq X \leq 2,\ 0 \leq Y \leq 3$ となる。

$$\iint_D (x-y)e^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^3\int_0^2 Xe^Y \cdot 2\mathrm{d}X\mathrm{d}Y \tag{94}$$

$$= \int_0^3 \left[X^2e^Y\right]_{X=0}^{X=2}\mathrm{d}Y \tag{95}$$

$$= \int_0^3 4e^Y\mathrm{d}Y \tag{96}$$

$$= \left[4e^Y\right]_0^3 \tag{97}$$

$$= 4(e^3-1) \tag{98}$$

3. (a) t に関わる部分だけ抜き出す。

$$\begin{pmatrix} -1 & t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \tag{99}$$

これを解いて $t=-1$。

（b）逆行列は余因子行列を用いる方法と掃き出し法がある。

$$(A\ E) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{100}$$

$$\xrightarrow{\text{1 行目を 3 で割る}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{101}$$

$$\xrightarrow{\text{1 行目を 3 行目に足す}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{102}$$

$$\xrightarrow{\text{2 行目を 2 で割る}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{103}$$

$$\xrightarrow{\text{2 行目に 1/3 掛けて 1 行目から引く}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{104}$$

$$\xrightarrow{\text{2 行目に 2/3 掛けて 3 行目に足す}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \tag{105}$$

$$\to (\text{略}) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \tag{106}$$

これにより逆行列 A^{-1} は次のようになる。

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \tag{107}$$

（c）固有値を λ とする。固有方程式 $|A-\lambda E|=0$ を計算する。

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix} \tag{108}$$

$$= (3-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)+1) + (-1)(1-(2-\lambda)) \tag{109}$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0 \tag{110}$$

これにより固有値は $1, 2$ である。

固有値が 1 の固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} 3-1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{111}$$

この式を解くと次の結果が得られる。

$$x_1 = 0,\ x_2 + x_3 = 0 \tag{112}$$

問題は $x_3 = 1$ となる固有ベクトルを求めるので、$x_2 = -1,\ x_3 = 1$ である。よって、求めるべき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{113}$$

4.

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6y = 3x + e^{-x} \tag{114}$$

この方程式の特殊解を予測し次のように置く。

$$y = Ax + B + Ce^{-x} \quad (A, B, C : 定数) \tag{115}$$

微分すると次のような式が得られる。

$$y' = A - Ce^{-x}, \quad y'' = Ce^{-x} \tag{116}$$

この式を問題の式に代入し、定数 A, B, C を求める。

$$Ce^{-x} - 5(A - Ce^{-x}) + 6(Ax + B + Ce^{-x}) = 3x - e^{-x} \tag{117}$$

$$6Ax + (-5A + 6B) + (C + 5C + 6C)e^{-x} = 3x - e^{-x} \tag{118}$$

$$A = \frac{1}{2},\ B = \frac{5}{12},\ C = \frac{1}{12} \tag{119}$$

よって特殊解は

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{12} + \frac{1}{12}e^{-x} \tag{120}$$

次に同次方程式の解を求める。

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \tag{121}$$

特性方程式 $\lambda^2-5\lambda+6=0$ を解くと $\lambda=2,3$ となるので同次方程式の一般解は $c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ となる。

これと、式 (120) の特殊解と用いて一般解は次のようになる。

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+\frac{1}{2}x+\frac{5}{12}+\frac{1}{12}e^{-x} \tag{122}$$

これに初期値条件 $y(0)=0,\ y'(0)=0$ を考える。導関数 y' をまず計算する。

$$y'=2c_1e^{2x}+3c_2e^{3x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}e^{-x} \tag{123}$$

初期値を満たすように c_1,c_2 を求める。

$$y(0)=c_1+c_2+\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=0 \tag{124}$$

$$y'(0)=2c_1+3c_2+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=0 \tag{125}$$

$$c_1=-\frac{13}{12},\ c_2=\frac{7}{12} \tag{126}$$

これにより方程式の解は次夜のようになる。

$$y=-\frac{13}{12}e^{2x}+\frac{7}{12}e^{3x}+\frac{1}{2}x+\frac{5}{12}+\frac{1}{12}e^{-x} \tag{127}$$

定数係数の 2 階線形微分方程式の特殊解について

方程式を解く上で特殊解を一つ見つける必要がある。特殊解を見つける方法はいくつかあるが、予測で大まかに決めるのが早い。

$$y''+ay'+by=r(x) \tag{128}$$

この時の $r(x)$ の式によって予測される式が変わる。

- $r(x)$ が多項式の場合
  $r(x)$ と次数が同じ多項式

$$c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0 \quad (c_i:\text{定数}) \tag{129}$$

- $r(x)=e^{kx}$ の場合 (k は定数)
  微分することで変化があまりないので、定数倍した式

$$ce^{kx} \quad (c:\text{定数}) \tag{130}$$

付随する同次方程式の基本解と同じ形をしている場合は x をかけた式

$$cxe^{kx} \quad (c: \text{定数}) \tag{131}$$

- $r(x) = \sin kx$ 又は $r(x) = \cos kx$ の場合 (k は定数)
  微分により $\sin kx$ と $\cos kx$ が交互に現れるのでこれらを繋いだ式

$$c_1 \sin kx + c_2 \cos kx \quad (c_i: \text{定数}) \tag{132}$$

- $r(x)$ が上記 3 種類の組み合わせの場合
  特殊解もそれぞれを組み合わせた式にする。

計算の訂正

式 (88) 以降の変形が間違っていました。

$$\frac{\tan^2\theta+\tan\theta+1}{(\tan^2\theta+1)^2}\frac{1}{\cos^2\theta} \qquad \text{(式 (138) で置き換え)} \tag{133}$$

$$=\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos^4\theta}}\times\frac{1}{\cos^2\theta} \tag{134}$$

$$=\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}} \qquad (\cos^2\theta\text{を分子分母に掛ける}) \tag{135}$$

$$=1+\sin\theta\cos\theta \qquad \text{(倍角の公式 }\ \sin 2\theta) \tag{136}$$

$$=1+\frac{1}{2}\sin 2\theta \tag{137}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta} \tag{138}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta$ を $\cos 2\theta$ として計算してました。$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ で計算し直しています。

これにより

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\mathrm{d}\theta \tag{139}$$

$$=\left[\theta-\frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \tag{140}$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\times(-1)\right)-\left(0-\frac{1}{4}\times(1)\right) \tag{141}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2} \tag{142}$$