1. 行列 A の固有値を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

……………………………………………………………………………………

固有値 λ は固有方程式 $|A - \lambda E| = 0$ を解くことで求まる。

……………………………………………………………………………………

$$|A - \lambda E| = 0 \tag{2}$$

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

$$(-5-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

$$(-5-\lambda)(-2-\lambda)^2(4-\lambda) = 0 \tag{5}$$

固有値は $-5, -2, 4$

---

2. 行列 A が対角化可能か判定し、対角化可能であれば正則行列 P を求め A を対角化せよ。

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

……………………………………………………………………………………

まず、固有値を求める。固有方程式 $|A - \lambda E| = 0$ を計算すると $(\lambda + 1)^3 = 0$ で $\lambda = -1$ となる。

固有値 -1 の固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求める為に、$(A + E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を計算する。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

重複度 3 だが、固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \neq 0$ と 1 次元になるので、行列 A は対角化不可能である。

---

3. 実対称行列 A を直交行列によって対角化せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

……………………………………………………………………………………

固有値 λ を求めるために固有方程式 $|A-\lambda E|=0$ を計算する。

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

$$(2-\lambda)^3 + 2 - 3(2-\lambda) = 0 \tag{11}$$

$$(\lambda-1)^2(\lambda-4) = 0 \tag{12}$$

固有値は $1, 4$ である。

固有ベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ を求める。

固有値 4 の場合

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-4 & 1 \\ 1 & 1 & 2-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{13}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{x} = k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad k_3 \neq 0 \tag{15}$$

固有値 1 の場合

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{16}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{より} \quad x_3 = -x_1 - x_2 \tag{17}$$

$$\boldsymbol{x} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2) \neq (0, 0) \tag{18}$$

固有値 4 の固有空間は 1 次元なので、基底を正規化すると $\frac{1}{\sqrt{3}}{}^t(1,1,1)$

固有値 1 の固有空間は 2 次元なので、シュミットの直交化法で正規直交基底を得る。
$\frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(1,0,-1)$ と $\frac{1}{\sqrt{6}}{}^t(-1,2,-1)$

これを用いて次のように直交行列 T を作る。

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \tag{19}$$

直交行列 T を利用し、対称行列 A を対角化すると次のようになる。

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

---

4. n 次行列 A の固有値を α とする。α に対する固有空間 W_α は $\mathbb{C}^n$ の部分空間であることを示せ。

....

固有値を求める固有方程式 $|A-\lambda E|=0$ は変数 λ の n 次方程式である。複素数 $\mathbb{C}$ の範囲で考えれば n 次方程式は n 個の 1 次式の積に分解できる。(代数学の基本定理)

固有値は重複度を含め n 個になり、一つの固有値 α の重複度は n を超えない。この為、α の固有空間 W_α の次元は α の重複度を超えないので、n 以下になり、$W_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ であることが分かる。

行列の計算確認 -sagemath-

`https://sagecell.sagemath.org/`

```
A=Matrix([[2,1,1],[1,2,1],[1,1,2]])
B=Matrix(
      [[1/sqrt(3),  1/sqrt(2),-1/sqrt(6)],
       [1/sqrt(3),          0,  2/sqrt(6)],
       [1/sqrt(3),-1/sqrt(2),-1/sqrt(6)]]
)
C=B.transpose()
print("——")
print(C*B)
print("——")
print(C*A*B)
print("——")
```