1. $f(z) = \frac{1}{z^2-3z-4}$ とする。

（1）$z=0$ を中心として、$1<|z|<4$ でのローラン展開せよ

……………………………………………………………………

$z^2-3z-4=(z+1)(z-4)$ より $f(z)$ は $z=-1,4$ の時、1 位の極を持つ。この為、$1<|z|<4$ において $f(z)$ は正則。

$$f(z) = \frac{1}{z^2-3z-4} = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1+z}+\frac{1}{4-z}\right) \tag{1}$$

$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ (|z|<1)$ を利用し、$\frac{1}{4-z}$ を展開する。

$$\frac{1}{4-z} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{z}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n \quad (|z|<4) \tag{2}$$

$t=z^{-1}$ として $\frac{1}{1+z}$ を展開する。

$$\frac{1}{1+z} = \frac{t}{1+t} = t\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n \quad (|t|<1) \tag{3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-1} \quad (1<|z|) \tag{4}$$

$1<|z|<4$ において

$$f(z) = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1+z}+\frac{1}{4-z}\right) \tag{5}$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-1} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n\right) \tag{6}$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n} - \frac{1}{20}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^n} \tag{7}$$

（2）$z=-1$ 周りのローラン展開と、収束する最大開集合 D を求めよ

……………………………………………………………………

$w=z+1$ と置き、$f(z)=\frac{1}{z^2-3z-4}$ を変形する。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z^2-3z-4} &= \frac{1}{w(w-5)} \tag{8}\\
&= \frac{1}{w}\frac{\frac{-1}{5}}{1-\frac{w}{5}} \tag{9}\\
&= -\frac{1}{5w}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{5}\right)^n \quad \left(0<\left|\frac{w}{5}\right|<1\right) \tag{10}\\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{n-1}}{5^{n+1}} \tag{11}\\
&= -\frac{1}{5w}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{5^{n+2}} \tag{12}\\
&= -\frac{1}{5(z+1)}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{5^{n+2}} \quad (0<|z+1|<5) \tag{13}
\end{aligned}
$$

$0<|z+1|<5$ 上で

$$
f(z) = -\frac{1}{5(z+1)}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{5^{n+2}} \tag{14}
$$