---

2 次元空間における次の閉曲線 C 上の線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を計算せよ。

ここで、閉曲線 C は原点を中心とする半径 a の円周で、$(a, 0)$ を始点に反時計回りに一周する。$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{e}_y, \quad (\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y) \tag{1}$$

曲線 C 上では、$\boldsymbol{r}, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ は次の式で表される。

$$\boldsymbol{r} = a(\cos\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\boldsymbol{e}_y), \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = a(-\sin\theta\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\boldsymbol{e}_y)\mathrm{d}\theta \tag{2}$$

$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$ は曲線 C 上で極座標表示をすると次のようになる。この時、$a > 0$ である。

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y = a(\cos\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\boldsymbol{e}_y) \tag{3}$$

ここから、$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$ であることがわかる。そこで、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の各成分を極座標表示に書き換える。

$$\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-a\sin\theta}{\sqrt{(a\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2}} = -\sin\theta \tag{4}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{a\cos\theta}{\sqrt{(a\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2}} = \cos\theta \tag{5}$$

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は内積であるので、各成分ごとの積を計算することで次のような式となる。θ は円周一周りなので、0 から 2π の積分範囲となる。

$$\int_C \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin\theta\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\boldsymbol{e}_y)\cdot(a(-\sin\theta\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\boldsymbol{e}_y)\mathrm{d}\theta) \tag{6}$$

$$= \int_0^{2\pi} a(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} a\mathrm{d}\theta = 2\pi a \tag{7}$$
