A を可換環とする。

$A \setminus \{0\}$ が乗法群である時、A を体という。

体は 2 つの演算それぞれで可換である。

……………………………………………………………………

環 A に対して、$A \setminus \{0\}$ が乗法群である時、A を斜体 または 可除環という。

斜体は乗法の可換を仮定しない。

……………………………………………………………………

F を体とする。直積集合 F^4 に成分毎の加法を定義することにより $(F^4, +)$ は加法群となる。

$p, q \in F \setminus \{0\}$ とする。$(H_F(p,q), +)$ を加法群 F^4 とする。

$H_F(p,q)$ に演算 $\cdot$ を定義する。

F^4 の基底を $\{1, i, j, k\}$ とする。$(a_0, a_1, a_2, a_3) = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$i^2 = i \cdot i = p,\ j^2 = j \cdot j = q,\ i \cdot j = -j \cdot i = k$ とする。

$$
\begin{aligned}
&(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) \cdot (b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) && (1)\\
=&a_0(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) + a_1 i(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) && (2)\\
&+ a_2 j(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) + a_3 k(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) && (3)\\
=&a_0 b_0 + a_1 b_1 i^2 + a_2 b_2 j^2 + a_3 b_3 k^2 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) i + (a_0 b_2 + a_2 b_0) j && (4)\\
&+ (a_0 b_3 + a_3 b_0) k + (a_1 b_2 - a_2 b_1) ij + (a_1 b_3 - a_3 b_1) ik + (a_2 b_3 - a_3 b_2) jk && (5)\\
=&a_0 b_0 + a_1 b_1 p + a_2 b_2 q - a_3 b_3 pq + (a_0 b_1 + a_1 b_0) i + (a_0 b_2 + a_2 b_0) j && (6)\\
&+ (a_0 b_3 + a_3 b_0) k + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k + (a_1 b_3 - a_3 b_1) pj - (a_2 b_3 - a_3 b_2) qi && (7)\\
=&a_0 b_0 + a_1 b_1 p + a_2 b_2 q - a_3 b_3 pq + (a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_2 b_3 q - a_3 b_2 q) i && (8)\\
&+ (a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_1 b_3 p - a_3 b_1 p) j + (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1) k && (9)
\end{aligned}
$$

2 つの演算を定めた $(H_F(p,q), +, \cdot)$ は環となる。

F を体、$p, q \in F^\times$ とする。$a^2 = p$ を満たす $a \in F$ が存在するとき、$H_F(p,q)$ は斜体でないことを示せ。

……………………………………………………………………

$a^2 = p \in F^\times$ より $a \in F^\times$ である。つまり、$1 + a^{-1} i \neq 0,\ 1 - a^{-1} i \neq 0$ である。

$$(1 + a^{-1} i) \cdot (1 - a^{-1} i) = 1 - (a^{-1} i)^2 = 1 - (a^{-1})^2 i^2 = 1 - (a^{-1})^2 a^2 = 0 \qquad (10)$$

これにより $1 + a^{-1} i,\ 1 - a^{-1} i$ は零因子である。

よって、$H_F(p,q)$ は零因子を持つ環であり、斜体ではない。