1. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。S_n は次を満たす。

$$S_1 = 1, \qquad S_{n+1} - 3S_n = n + 1 \ (n \geq 1) \tag{1}$$

(a) S_n を求めよ。

(b) a_n を求めよ。

2. 数列 $\{a_n\}$ が次を満たす。

$$a_1 = 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} k a_k = n^2 a_n \ (n \geq 1) \tag{2}$$

(a) a_n を a_{n-1} $(n \geq 2)$ で表せ。

(b) a_n を求めよ。

---

1. (a) $S_{n+1} - 3S_n = n + 1$ より $S_{n+2} - 3S_{n+1} = n + 2$ である。この 2 つの式の差を求める。

$$(S_{n+2} - 3S_{n+1}) - (S_{n+1} - 3S_n) = (n + 2) - (n + 1) \tag{3}$$

$$S_{n+2} - S_{n+1} = 3(S_{n+1} - S_n) + 1 \tag{4}$$

$b_n = S_{n+1} - S_n$ と置くと $b_{n+1} = 3b_n + 1$ が得られるので、b_n の一般項を求める。

$$b_{n+1} = 3b_n + 1 \tag{5}$$

$$b_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(b_n + \frac{1}{2}\right) \tag{6}$$

b_n の初項は $b_1 = S_2 - S_1 = 5 - 1 = 4$ であるので、数列 $\{b_n + \frac{1}{2}\}$ の初項は $\frac{9}{2}$ である。一般項は次のようになる。

$$b_n + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \cdot 3^{n-1} = \frac{3^{n+1}}{2} \tag{7}$$

$b_n = \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{1}{2}$ は S_n の階差数列である。この為、S_n の一般項は次のように求

まる。

$$S_n = S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \tag{8}$$
$$= 1 + \frac{9}{2}\sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2} \tag{9}$$
$$= 1 + \frac{9}{2}\cdot\frac{(3^{n-1}-1)}{3-1} - \frac{n-1}{2} \tag{10}$$
$$= \frac{1}{4}(4 + 3^{n+1} - 9 - 2(n-1)) \tag{11}$$
$$= \frac{1}{4}(3^{n+1} - 2n - 3) \tag{12}$$

……………………………………………………………………

[別解]

$S_{n+1} - 3S_n = n + 1$ を $S_{n+1} + a(n+1) + b = 3(S_n + an + b)$ となるように a, b を求める。

$$S_{n+1} + a(n+1) + b = 3(S_n + an + b) \tag{13}$$
$$S_{n+1} - 3S_n = 2an + (2b - a) \tag{14}$$

これにより $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{4}$ となる。
$c_n = S_n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}$ とすると、$c_{n+1} = 3c_n$ である。$c_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$ より c_n の一般項は次のようになる。

$$c_n = \frac{9}{4}\cdot 3^{n-1} \tag{15}$$

$c_n = S_n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}$ であるので、S_n を求めると次のようになる。

$$S_n = \frac{9}{4}\cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2}n - \frac{3}{4} \tag{16}$$
$$= \frac{1}{4}(3^{n+1} - 2n - 3) \tag{17}$$

……………………………………………………………………

(b) S_n は初項から第 n 項までの和であるので、$a_n = S_n - S_{n-1}$ である。

$$a_n = S_n - S_{n-1} \tag{18}$$
$$= \left(\frac{1}{4}(3^{n+1} - 2n - 3)\right) - \left(\frac{1}{4}(3^n - 2(n-1) - 3)\right) \tag{19}$$
$$= \frac{1}{4}\left(2\cdot 3^n - 2\right) = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right) \tag{20}$$

2. (a) $\sum_{k=1}^{n} ka_k = n^2 a_n$ より $\sum_{k=1}^{n-1} ka_k = (n-1)^2 a_{n-1}$ $(n \geq 2)$ である。
これにより次の式が得られる。

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = \sum_{k=1}^{n-1} ka_k + na_n \tag{21}$$

$$= (n-1)^2 a_{n-1} + na_n \tag{22}$$

条件の式より

$$n^2 a_n = (n-1)^2 a_{n-1} + na_n \tag{23}$$

であるので、変形をして次の式が得られる。

$$a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1} \tag{24}$$

(b) $a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1}$ より $na_n = (n-1)a_{n-1}$ である。これを繰り返すと次のような式が得られる。

$$na_n = (n-1)a_{n-1} = (n-2)a_{n-2} = \cdots = 2a_2 = 1a_1 \tag{25}$$

初項が $a_1 = 1$ であるので、上記式は 1 である。$na_n = 1$ であるので

$$a_n = \frac{1}{n} \tag{26}$$

である。