実数列 $\{u_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$，$\{f_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ を次で定義する。

$$u_0 = 1, \quad u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}, \quad f_0 = 0, \quad f_{2n} = \frac{1}{2n}u_{2n-2} \tag{1}$$

任意の自然数 n に対し、u_{2n} と f_{2n} は次で与えられることを示せ。

$$u_{2n} = (-1)^n\binom{-1/2}{n}, \quad f_{2n} = (-1)^{n-1}\binom{1/2}{n} \tag{2}$$

ここで、$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \tag{3}$$

と定義する。

....

u_{2n} について、それぞれの式を変形する。

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(2n-k) = \frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(n+k) \tag{4}$$

$$(-1)^n\binom{-1/2}{n} = (-1)^n\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right) = \frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(2+4k) \tag{5}$$

そこで $\prod_{k=1}^{n}(n+k) = \prod_{k=0}^{n-1}(2+4k)$ が成り立てばよい。

$n=1$ の時、両辺は共に 2 となる。

$n=N$ の時、等号が成り立つと仮定し、$n=N+1$ の場合を考える。

$$\prod_{k=1}^{N+1}((N+1)+k) = \prod_{k=1}^{N+1}(N+(k+1)) = \prod_{k=2}^{N+2}(N+k) \tag{6}$$

$$= \left(\prod_{k=2}^{N}(N+k)\right)(N+N+1)(N+N+2) = \left(\prod_{k=1}^{N}(N+k)\right)\cdot 2(2N+1) \tag{7}$$

$$= \left(\prod_{k=0}^{N-1}(2+4k)\right)\cdot(4N+2) = \prod_{k=0}^{N}(2+4k) \tag{8}$$

これにより次の式が成り立つことがわかる。

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = (-1)^n\binom{-1/2}{n} \tag{9}$$

f_{2n} について式を変形する。

$$f_{2n} = \frac{1}{2n} u_{2n-2} = \frac{1}{2n}(-1)^{n-1}\binom{-1/2}{n-1} \tag{10}$$

$$= \frac{1}{2n}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-2}\left(-\frac{1}{2}-k\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-2}\left(\frac{1}{2}+k\right) \tag{11}$$

$(-1)^{n-1}\binom{1/2}{n}$ を変形すると次のようになる。

$$(-1)^{n-1}\binom{1/2}{n} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right) = \frac{-1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}+k\right) \tag{12}$$

$$= \frac{-1}{n!}\left(-\frac{1}{2}+0\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}+k\right) = \frac{-1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\prod_{k=0}^{n-2}\left(\frac{1}{2}+k\right) \tag{13}$$

これにより $f_{2n} = (-1)^{n-1}\binom{1/2}{n}$ となる。

---

1 次元の単純ランダムウォークを $S = \{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ で表し、$S_0 = 0$ と仮定する。自然数 n に対し

$$L_{2n} = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq m \leq 2n \text{ かつ } S_m = 0\} \tag{14}$$

とおく。任意の実数 $\alpha \in [0, 1]$ に対して、次が成り立つことを示せ。

$$\lim_{n\to\infty} P(L_{2n} \leq 2\alpha n) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\alpha} \tag{15}$$

....

S は 1 次元の単純ランダムウォークであるので、時刻 t における位置 S_t に対して時刻 $t+1$ における位置 S_{t+1} が $S_t + 1$ または $S_t - 1$ となる事をいう。どちらかに移動する確率はそれぞれ 1/2 である。

$$P(S_{t+1} - S_t = 1) = \frac{1}{2}, \quad P(S_{t+1} - S_t = -1) = \frac{1}{2} \tag{16}$$
