確率空間

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が確率空間であるとは、

- $\Omega(\neq \emptyset)$ を集合 (全体集合や全事象)
- $\mathcal{F}(\subset 2^{\Omega})$ を σ-加法族 ($A \in \mathcal{F}$ を事象)
- P を確率測度

の組のことをいう。

条件付き確率

$$P(X \mid A) = \frac{P(A \cap X)}{P(A)} \tag{1}$$

条件付き期待値

確率変数が離散の場合。連続であれば積分。

$$E[X \mid A] = \frac{E[X, A]}{P(A)} = \sum_{x} x \frac{P(X \cap A)}{P(A)} \tag{2}$$

条件付き分散

$$V[X \mid A] = E[X^2 \mid A] - (E[X \mid A])^2 \tag{3}$$

マルチンゲール
martingale

$$\{M_n\} \text{ が } (\mathcal{F}_n)\text{-マルチンゲール (martingale)} \tag{4}$$

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad M_n \in L^1 \wedge E[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n \ a.s. \ {}^{\forall}n \geq 1 \tag{5}$$

特に、$E[M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n] \leq 0$ のとき優マルチンゲール、$E[M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n] \geq 0$ のとき劣マルチンゲールという。

almost surely (a.s.)

a.s.(almost surely) とは「ほぼ確実に」という意味で、確率が 1 であることを意味する。極僅かな部分を除いて確実であるということで、「ほとんど至る所で (almost everywhere a.e.)」と同じような意味である。

右連続左極限関数 càdlàg RCLL

実数の部分集合 $I(\subset \mathbb{R})$ 上で定義された関数 f において次を満たすとき、右連続左極限関数という。

${}^{\forall}p \in I$ について左極限 $\lim_{x \to p-0} f(x)$ が存在し、右連続 ($f(p) = \lim_{x \to p+0} f(x)$) である

フランス語の continue à droite, limite à gauche を省略し càdlàg や、英語の right continuous with left limits を省略し RCLL などともいう。

問題

1. $(X_t)_{t\geq 0}$ が $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲール、càdlàg とする。次を証明せよ。

$$\lambda P\left(\inf_{0\leq s\leq t} X_s > \lambda\right) \leq E\left[X_t \vee 0\right] - E\left[X_0\right],\ ({}^\forall\lambda > 0, {}^\forall t \geq 0) \tag{6}$$

....

$E[X_0]$ を次のように正の部分と負の部分の二つに分ける。

$$E[X_0] = E[X_0 > 0] + E[X_0 \leq 0] \tag{7}$$

一つ目の問いから次の不等式が成り立つ。

$$\lambda P\left(\sup_{0\leq s\leq t} X_s > \lambda\right) \leq E\left[X_t \vee 0\right],\ ({}^\forall\lambda > 0, {}^\forall t \geq 0) \tag{8}$$

$t = 0$ とすると上記式は次のようになる。

$$\lambda P\left(X_0 > \lambda\right) \leq E\left[X_0 \vee 0\right] \tag{9}$$

$$\lambda P\left(\inf_{0\leq s\leq t} X_s > \lambda\right) \leq \lambda P\left(\sup_{0\leq s\leq t} X_s > \lambda\right) \tag{10}$$

より

$$\lambda P\left(\inf_{0\leq s\leq t} X_s > \lambda\right) + E[X_0 > 0] \leq \lambda P\left(\sup_{0\leq s\leq t} X_s > \lambda\right) \tag{11}$$

$$\lambda P\left(\sup_{0\leq s\leq t} X_s > \lambda\right) \leq E\left[X_t \vee 0\right] - E[X_0 \leq 0] \tag{12}$$

が成り立てば

$$\lambda P\left(\inf_{0\leq s\leq t} X_s > \lambda\right) + E[X_0 > 0] \leq E\left[X_t \vee 0\right] - E[X_0 \leq 0] \tag{13}$$

より

$$\lambda P\left(\inf_{0\leq s\leq t} X_s > \lambda\right) \leq E\left[X_t \vee 0\right] - E[X_0] \tag{14}$$

が得られる。

---

2. $(X_t)_{t\geq 0}$: $(\mathcal{F}_t)$ - 劣マルチンゲール (sub-martingale) 、$\sup_{t\geq 0} E\left[X_t \vee 0\right] < \infty$ とする。このとき、次が成り立つことを証明せよ。

$$^{\exists} X_\infty \in L^1 \ s.t. \ \lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty \ a.s. \tag{15}$$

. . . .

次を利用して証明する。

$$E[v((X_s)_{0\leq s\leq t}; a, b)] \leq \frac{1}{b-a} E[(X_t - a) \vee 0], \quad (^{\forall} a < b, a, b \in \mathbb{R}) \tag{16}$$

. . . .

条件より $\sup_{t\geq 0} E\left[X_t \vee 0\right] < \infty$ であるため、ある実数 $a \in \mathbb{R}$ を一つとってきたとき

$$\sup_{t\geq 0} E\left[(X_t - a) \vee 0\right] = \sup_{t\geq 0} E\left[X_t \vee 0\right] - a < \infty \tag{17}$$

である。

式 (16) の右辺の分母は $a < b$ より $b - a > 0$ である。$t \to \infty$ とすると右辺は $\sup_{t\geq 0} E\left[(X_t - a) \vee 0\right]$ が動くがこれが発散しないため $E[v((X_s)_{0\leq s\leq t}; a, b)]$ は存在する。

よって $X_t \to X_\infty$ $(t \to \infty)$ は存在することがわかる。