R は単位元 e を持つ環とする。

$S \subset R$ は $e \in S$ である部分環、A を R の部分集合とする。

S と A を含む R の部分環を A_λ とする。つまり、$S \cup A \subset A_\lambda \subset R$ である。

$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を部分環 A_λ 全てを集めたの集合族である。

$$S[A] = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \tag{1}$$

上記の様に $S[A]$ を定める。これにより $S[A]$ は R の部分環となる。

$S[A]$ は S 上 A で生成された部分環という。

特に、$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ である時、$S[A] = S[a_1, \ldots, a_n]$ とかく。

F は体とする。

$K \subset F$ は F の部分体、A は F の部分集合とする。

K と A を含む F の部分体を K_λ とする。つまり、$K \cup A \subset K_\lambda \subset F$ である。

$\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を部分体 K_λ 全てを集めたの集合族である。

$$K(A) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda \tag{2}$$

上記の様に $K(A)$ を定める。これにより $K(A)$ は F の部分体となる。

$K(A)$ は K 上 A で生成された部分体という。

特に、$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ である時、$K(A) = K(a_1, \ldots, a_n)$ とかく。

---

1. $S[A]$ は S と A を含むような最小の部分環である。

   ....

   $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は S と A を含むような部分環全体の集合族である。

   $A_\alpha, A_\beta \in \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ であれば次が満たされる。

$$A_\alpha \cap A_\beta \subset A_\alpha, \quad A_\alpha \cap A_\beta \subset A_\beta \tag{3}$$

   S と A を含むような部分環 $\tilde{A}$ を取ってくる。

   この時、$\tilde{A} \in \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ であり、$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \tilde{A}$ である。つまり、$S[A] \subset \tilde{A}$ である。

   $\tilde{A}$ は S と A を含むような部分環をどの様に選択しても必ず $S[A] \subset \tilde{A}$ である。

   よって、$S[A]$ は S と A を含む最小の部分環となる。

---

2. R を単位元 e を持つ可換環、S を e を含む R の部分環、$A=\{a_1,\dots,a_n\}$ を R の部分集合とする。

$$S[a_1,\dots,a_n]=\left\{\sum_{\text{有限和}} c_{k_1,\dots,k_n}a_1^{k_1}\dots a_n^{k_n}\;\middle|\; c_{k_1,\dots,k_n}\in S; k_i\text{は0以上の整数}\right\} \tag{4}$$

…………………………………………………………………………

等式 (4) の右辺を $\tilde{S}$ と書く。

${}^\forall a\in\tilde{S}$ とする。

$\tilde{S}$ の定義より $a=\sum_{\text{有限和}} c_{k_1,\dots,k_n}a_1^{k_1}\dots a_n^{k_n}$ である。

$c_{k_1,\dots,k_n}\in S,\ A=\{a_1,\dots,a_n\}$ であるので、a は S と A を含む R の部分環に含まれる。

よって、$\tilde{S}\subset S[A]$ である。

また、$\tilde{S}$ は S と A を含む為、S と A を含む最小の部分環 $S[A]$ を含む。つまり、$S[A]\subset\tilde{S}$ である。

以上により $S[A]=\tilde{S}$ である。

---

3. $K(A)$ は K と A を含むような最小の部分体である。

…………………………………………………………………………

F の部分体のうち、K と A を含むような部分体 K_λ 全体の集合を $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とする。

${}^\forall L\in\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して $K(A)\subset L$ を示せば、$K(A)$ は最小の部分体であることといえる。

K と A を含む部分環を $\tilde{K}$ とする。

この時、$\tilde{K}\in\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ であり、$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}K_\lambda\subset\tilde{K}$ である。つまり、$K(A)\subset\tilde{K}$ である。

$\tilde{K}$ を K と A が含まれるようにどの様に取ってきても必ず $K(A)\subset\tilde{K}$ であるので、$K(A)$ は最小の部分体である。

---

4. F を体とし、K を F の部分体とする。$A=\{a_1,\dots,a_n\}$ を F の部分集合とする。この時、次の式が成り立つ。

$$K(a_1,\dots,a_n)=\{ab^{-1}\mid a,b\in K[a_1,\dots,a_n],\ b\neq 0\} \tag{5}$$

…………………………………………………………………………

等式 (5) の右辺を $\tilde{K}$ とおく。

$K(a_1,\dots,a_n)\subset\tilde{K}$ と $K(a_1,\dots,a_n)\supset\tilde{K}$ を示せれば $K(a_1,\dots,a_n)=\tilde{K}$ が言える。

$K(a_1,\dots,a_n)$ は K,A を含む最小の部分体である。$\tilde{K}$ は $K\subset\tilde{K}$、$A\subset\tilde{K}$ より上の定理から $K(a_1,\dots,a_n)\subset\tilde{K}$ である。

$K[a_1,\dots,a_n]$ は体 K に $a_1,\dots,a_n$ を付け加えた環である。

この時、$a=\sum c_{k_1,\dots,k_n}a_1^{k_1}\dots a_n^{k_n}$ と表せる。

$K[a_1,\dots,a_n]$ は K と $\{a_1,\dots,a_n\}$ を含む最小の部分環である。このため、$K[a_1,\dots,a_n]\subset K(a_1,\dots,a_n)$ である。

$K[a_1,\dots,a_n]$ の逆元だけを集めた集合 $K^{-1}[a_1,\dots,a_n]$ も $K^{-1}[a_1,\dots,a_n]\subset K(a_1,\dots,a_n)$ である。

よって、$K[a_1,\dots,a_n]$ の元と $K^{-1}[a_1,\dots,a_n]$ の元をかけた集合 $\tilde{K}$ は $\tilde{K}\subset K(a_1,\dots,a_n)$ となる。

これにより次の等号が成り立つ。

$$K(a_1,\dots,a_n)=\tilde{K}=\{ab^{-1}\mid a,b\in K[a_1,\dots,a_n],\ b\neq 0\} \tag{6}$$

---

5. 有理数体 $\mathbb{Q}$ を複素数体 $\mathbb{C}$ の部分体と考え、純虚数 $i=\sqrt{-1}$ を取る。この時、次が成り立つ。

$$\mathbb{Q}(i)=\mathbb{Q}[i]=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{Q}\} \tag{7}$$

....

$\mathbb{Q}[i]$ は $\mathbb{Q}$ と i を含む最小の環であり、$\mathbb{Q}(i)$ は $\mathbb{Q}$ と i を含む最小の体である。

任意の $\mathbb{Q}[i]$ の元は $\mathbb{Q}(i)$ の元であるので、$\mathbb{Q}[i]\subset\mathbb{Q}$ である。

$\mathbb{Q}(i)$ の元は $f,g\in\mathbb{Q}[i]$ を用いて $fg^{-1}=f/g$ とかける。

$g\in\mathbb{Q}[i]$ の共役複素数 $\bar{g}\in\mathbb{Q}[i]$ を用いて $g\bar{g}\in\mathbb{Q}$ である。

$$fg^{-1}=\frac{f}{g}=\frac{f\bar{g}}{g\bar{g}}\in\mathbb{Q}[i] \tag{8}$$

このため、$\mathbb{Q}(i)\subset\mathbb{Q}[i]$ である。

以上により $\mathbb{Q}(i)=\mathbb{Q}[i]$ である。
