
有限加法族

集合 X の部分集合族 $\mathcal{F}$ が**有限加法族**であるとは次を満たすときをいう。

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow X \backslash A \in \mathcal{F}$
3. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

有限加法的測度

集合 X 上の有限加法族 $\mathcal{F}$ について、$m : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ が $(X, \mathcal{F})$ 上の**有限加法的測度**であるとは、次の 2 つの条件を満たすときをいう。

1. $m(\emptyset) = 0$
2. $A, B \in \mathcal{F}$ が互いに素である時、$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

外測度

X を集合とする。$\Gamma : 2^X \to [0, \infty]$ が X 上の**外測度**であるとは、次の 3 つの条件を満たすときをいう。

1. $\Gamma(\emptyset) = 0$
2. $A, B \subset X$ が $A \subset B$ を満たす時、$\Gamma(A) \leq \Gamma(B)$
3. X の任意の部分集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し、$\Gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$

Γ-可測

X を集合とする。$\Gamma : 2^X \to [0, \infty]$ を X 上の外測度とする。

集合 $E \subset X$ が **Γ-可測** (または Carathéodory（カラテオドリ）の意味で可測) とは、任意の $A \subset X$ に対し次を満たすときをいう。

$$\Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap (X \backslash E)) = \Gamma(A) \tag{1}$$

また、Γ-可測集合全体を $\mathcal{M}_\Gamma$ と表す。

命題 (X 上の外測度)

X を集合、$\mathcal{F}$ を X 上の有限加法族、μ を $(X, \mathcal{F})$ 上の有限加法的測度とする。$\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ を次で定義する。

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \;\middle|\; A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \text{であり、} E_j \in \mathcal{F} \text{、} j \in \mathbb{N} \right\} \tag{2}$$

このとき、μ^* は X 上の外側度である。

可測関数

(X, Σ_X), (Y, Σ_Y) を可測空間、つまり、X, Y は集合で、Σ_X, Σ_Y は σ-加法族とする。

関数 $f : X \to Y$ について ${}^\forall E \in \Sigma_Y$ に対して $f^{-1}(E) \in \Sigma_X$ が成り立つとき、関数 $f : X \to Y$ が可測であるという。この集合 Y が $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ の時、Σ_Y はボレル集合族として定義する。

μ-零集合

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。$A \subset X$ が μ-零集合であるとは, $A \subset N$ かつ $\mu(N) = 0$ を満たす $N \in \mathcal{M}$ が存在することをいう。

完備

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。全ての μ-零集合が $\mathcal{M}$ に属する時、$(X, \mathcal{M}, \mu)$ あるいは μ のことを完備という。

. (X,M, µ) を測度空間とする. 全ての µ-零集合が M に属すとき, (X,M, µ), あるいは µ のことを完備であるという.

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とし、その完備化を $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ で表す。また、$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ とする。

1. $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{M}$-可測であるとする。$\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ が μ-零集合であるならば、f は $\overline{\mathcal{M}}$-可測であることを示せ。
2. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は X 上の $\overline{\mathbb{R}}$-値関数の列とし、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、f_n は $\mathcal{M}$-可則であるとする。$\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}$ が μ-零集合であるならば、f は $\overline{\mathcal{M}}$-可測になることを示せ。

. . . .
