σ-加法族

集合 X の集合族 Σ が「σ-加法族である」とは次を満たすときをいう。

1. $X \in \Sigma$
2. $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$
3. $A_i \in \Sigma \ (i \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$

生成される σ-加法族

X の部分集合族 $\mathcal{A}$ について、$\mathcal{A}$ を含む最小の σ-加法族を $\sigma_X(\mathcal{A})$ と表す。

$$\sigma_X(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{M}:\sigma\text{-加法族} \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{M}}} \mathcal{M} \tag{1}$$

ボレル σ-加法族

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。$\sigma_X(\mathcal{O})$ を X 上のボレル σ-加法族といい、$\mathcal{B}(X)$ と表す。

---

1. $X = \{1,2,3,4,5\}, \mathcal{A} = \{\{1\},\{3,4\}\}$ とする時、$\sigma_X(\mathcal{A})$ を具体的に書け。

   ……………………………………………………………………

$$\{1\}^c = \{2,3,4,5\} \qquad \{3,4\}^c = \{1,2,5\} \qquad \{1\} \cap \{3,4\} = \emptyset \tag{2}$$

$$\{1\} \cup \{3,4\} = \{1,3,4\} \qquad \{1\}^c \cup \{3,4\}^c = X \tag{3}$$

   よって、σ-加法族 $\sigma_X(\mathcal{A})$ は次のようになる。

$$\sigma_X(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{1\}, \{3,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4,5\}, X\} \tag{4}$$

---

2. $\mathbb{R}$ には通常の位相を入れるものとする。この位相を $\mathcal{O}$ とする。
   (a) $\mathbb{R}$ の開集合 $U(\neq \emptyset)$ を任意にとる。有理数 $x \in U$ に対し、$I_x = \bigcup_{\substack{I:\text{開区間} \\ x \in I \subset U}} I$ と定義する時、$U = \bigcup_{x \in U \cap \mathbb{Q}} I_x$ が成り立つことを示せ。

   ……………………………………………………………………

   $U \supset \bigcup_{x \in U \cap \mathbb{Q}} I_x$ を示す。
   $^\forall \alpha \in \bigcup_{x \in U \cap \mathbb{Q}} I_x$ とする。このとき、$\alpha \in I_x$ となる I_x が存在する。
   $I_x = \bigcup_{\substack{I:\text{開区間} \\ x \in I \subset U}} I$ より、$I_x \subset U$ であるため、$\alpha \in U$ である。
   $U \subset \bigcup_{x \in U \cap \mathbb{Q}} I_x$ を示す。
   $^\forall \beta \in U$ とする。β が有理数と無理数の場合を考える。

β が有理数であれば、$\beta \in I_\beta \subset \bigcup_{x\in U\cap\mathbb{Q}} I_x$ である。
β が無理数とする。U は開集合であるので、ε-近傍 $U_\varepsilon(\beta) = (\beta-\varepsilon, \beta+\varepsilon)$ で $U_\varepsilon(\beta) \subset U$ となるものが存在する。この ε-近傍に含まれる有理数 x_β を一つ取ってくると、$U_\varepsilon(\beta) \subset I_{x_\beta}$ である。よって、$U_\varepsilon(\beta) \subset \bigcup_{x\in U\cap\mathbb{Q}} I_x$ であるので、$\beta \in \bigcup_{x\in U\cap\mathbb{Q}} I_x$ となる。

(b) $\mathcal{A} = \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ とする時、$\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が成り立つことを示せ。

....

$\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ と $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ を示す。

$\boxed{\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})}$

${}^\forall O \in \mathcal{O}$ とする。$O = (a, b)$ $(a, b \in \mathbb{R})$ である。
$A, B_n \in \mathcal{A}$ を $A = (-\infty, a],\ B_n = (-\infty, b-1/n]$ とする。これにより、O を次のようにかける。

$$O = A^c \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}) \tag{5}$$

よって、$\mathcal{O} \subset \sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ であり、$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ である。

$\boxed{\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})}$

${}^\forall A \in \mathcal{A}$ とする。この時、$A = (-\infty, a]$ $(a \in \mathbb{R})$ である。${}^\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$B_n = (-\infty, a+1/n)$ とおけば、$B_n \in \mathcal{O}$ であり、$B_n \in \sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である。これより、$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である。よって、$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ より、$\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ となる。
以上により、$\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である。
