

分 类 号 _____

学号 D201477383

学校代码 10487

密级 _____

华中科技大学

博士学位论文

Bessel 波入射下目标声散射特性及声辐射
力（矩）研究

学位申请人： 龚志雄

学科专业： 船舶与海洋结构物设计制造

指导教师： 李威教授

赵耀教授

答辩日期： 2018 年 7 月 29 日

A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for
the Degree of Doctor of Philosophy in Engineering

**Study on acoustic scattering characteristics of objects in Bessel beams and
the related radiation force and torque**

Ph. D. Candidate : Gong Zhixiong
Major : Design and Construction of Naval
Architecture and Ocean Structure
Supervisor : Prof. Li Wei
Prof. Zhao Yao

Huazhong University of Science & Technology
Wuhan 430074, P.R.China

July, 2018

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除文中已经标明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：

日期： 年 月 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权华中科技大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保 密，在_____年解密后适用本授权书。
本论文属于 不保密。

(请在以上方框内打“√”)

学位论文作者签名：

指导教师签名：

日期： 年 月 日

日期： 年 月 日

摘 要

Bessel 波具有无衍射特性和自重建性，在传播过程中能够携带轨道角动量。Bessel 波因其特殊的波形结构和物理性质，在学术研究和工程应用中均具有重要的研究价值。特别在声学操控领域，如粒子捕捉，细胞筛选，芯片技术和表面化学等领域，Bessel 波具有广阔的应用前景，引起了国内外学者的广泛关注。目前，声学 Bessel 波散射和操控的研究工作主要集中在简单目标的理论和实验模型，而对工程实践中广泛存在的复杂目标和模型的研究工作还很不足。因此，建立与发展复杂的声学 Bessel 波散射和操控模型显得十分必要和迫切。

本文通过建立任意 Bessel 波入射下球形和非球形目标的散射模型，通过理论方法和数值模型研究 Bessel 波的散射特性和物理机理。文中推导了正入射时基于柱面波函数球谐展开的波形系数和任意入射时基于多极展开法的波形系数，得到了球形目标的散射理论解。同时，基于半解析半数值的 T 矩阵法，结合推导的入射波形系数，得到了求解任意目标声散射的数值模型。研究表明，特定波锥角的 Bessel 波正入射下，相应的弹性共振被抑制，但偏轴入射时不存在明显的共振抑制。此外，通过提出任意刚性目标的几何射线模型，准确地预报了 Bessel 波反向散射的物理机理；并引入亮点模型定性地解释了非球形表面在 Bessel 波入射下的散射强度的变化规律。结合理论推导，指出并验证了 Bessel 波正入射时回旋目标的散射场关于散射角和波锥角具有交换对称的特性。

声场与目标之间通过声散射发生能量交换，具体体现为动量和角动量传递与转换。动量交换在宏观上表现为声场对目标施加一个辐射力，而角动量交换则为声场对目标施加一个辐射力矩，这在粒子动力学领域具有十分重要的地位。本文考虑的理想介质中不存在动量的吸收和增加，因此根据动量守恒定理，可将目标表面的近场散射积分等效到远场任意球表面上的积分，简化了理论推导和数值计算过程。基于辐射应力张量法，推导了任意波入射下笛卡尔坐标系下的三维声辐射力和力矩的理论公式，并用入射和散射波形系数给出了紧凑表达式。因此，基于分波序列法和 T 矩阵法计算得到的散射场，代入推导的辐射力和力矩公式，可以直接计算目标在 Bessel 声场中受

华 中 科 技 大 学 博 士 学 位 论 文

到的力和力矩。不同于在普通平面波入射的情况，本文工作揭示了 Bessel 波入射下目标受到的辐射力和力矩可能存在反转现象，并揭示了相应的物理机理，这在粒子分离等领域具有重要作用。如性质相同尺寸不同的粒子，在 Bessel 波入射下，受声辐射力的影响部分尺寸的粒子靠近声源，而其余部分则远离声源，因此声场可将粒子按照不同尺寸分离出来。

本文结合 Bessel 波入射下的散射模型，独立推导了一般位置入射下的声散射场和声辐射力（矩）的理论表达式，为研究 Bessel 波入射下声散射和相关辐射力（矩）特性研究提供了有效的手段，并通过数值计算和理论推导进一步揭示了相应的物理现象和机理。本文的研究工作表明声学 Bessel 波在粒子操控领域具有巨大的潜在应用，可用于设计通用的三维声学镊子数值工具箱。同时，对相关领域的理论与实验研究均具有指导和参考作用。

关键词：Bessel 波；多极展开法；T 矩阵法；分波序列法；几何射线法；辐射应力张量法；弹性共振抑制；声辐射力/力矩反转；目标/粒子操纵；声学镊子数值工具箱

ABSTRACT

Nondiffracting Bessel beam could propagate with orbital angular momentum and is characterized by the properties of non-diffraction and self-reconstruction. Both in academic field and engineering applications, Bessel beams are of great importance due to the peculiar wave shapes and physical properties, which have broad applications in the fields of acoustic manipulations, such as particle trapping, cell selection, lab-on-a-chip technique and surface chemistry, and is attracting more and more attentions all over the world. Up to date, studies of acoustic scattering and manipulations from Bessel beams have mainly focused on theoretical and experimental models of simple objects, whereas the related investigations on complicated models are not enough. Hence, it is necessary and urgent to establish and develop complex models of acoustic scattering and manipulations from Bessel beams.

The present work developed the scattering model of spherical and non-spherical objects illuminate by Bessel beams with arbitrary order and location to investigate the scattering characteristics and related physical mechanisms. The theoretical solutions of the incident beam shape coefficients are derived for the on-axis incidence based on the spherical expansion of cylindrical wave function and for the off-axis incidence on the multipole expansion method. Based on the above derivation, a semi-analytical and semi-numerical method, the T-matrix method, is introduced to study the scattering from an arbitrary shape in Bessel beams. It is found that the elastic resonance contribution will be suppressed with a selected half cone angle of Bessel beams when the object is placed on the axis of the beam, whereas the resonance suppression fails for the off-axis incidence. For a rigid non-spherical shape in Bessel beams, a geometrical ray model is proposed to predict the intervals of backscattering form function versus dimensionless frequency and reveal the physical mechanism, which help us to better understand the beam structure and validate the effectiveness of our homemade programms. The highlight model is introduced to qualitatively explain the scattering phenomena of rigid non-spherical shapes in Bessel beams. Moreover, the angle exchange symmetry of the scattering field from a rotationally symmetrical object placed on the axis of Bessel beams is observed and interpreted with the

theoretical derivations.

The interactions of the Bessel beams and objects will induce the transfer of the linear and angular momenta, which leads to the radiation forces and torques on the objects from the acoustic fields and is of great importance in the field of particle dynamics. According to conservations of linear and angular momenta in the ideal medium, the integral of scattering over the near-field surface of objects could be equivalent to that of far-field scattering over an arbitrary spherical surface, which simplifies the theoretical derivations and numerical computations. Based on the radiation stress tensor approach, the three dimensional radiation forces and torques in Cartesian coordinates on an object exerted by arbitrary acoustic fields are derived theoretically, which are given with closed-form expressions in terms of the incident and scattered beam shape coefficients. The unknown scattered coefficients could be calculated by the partial-wave series method and T-matrix method with the known incident coefficients of Bessel beams. Unlike in the ordinary plane waves, the radiation force and torque in Bessel beams may reverse under certain circumstances and the corresponding physical mechanisms are revealed, which is very potential in the field of particle separation. For example, considering the particles with same properties but different sizes, part of them may be induced negative radiation force to move close to the source, while part may be induced the positive force and move far away from the source, resulting in the separation of the particles with different sizes.

Based on the proposed scattering models of Bessel beams, the present work has derived the theoretical formulas of acoustic scattering and radiation force (torque) under the illumination of the incident beam with arbitrary order and location. The numerical computations and theoretical derivations reveal the corresponding physical phenomena and mechanics. The present study suggests that acoustic Bessel beams have greatly potential applications in the field of particle manipulations, which could help design the general three-dimensional acoustic tweezers numerical toolbox. Meanwhile, this work is useful to related theoretical and experimental researches as guidance and reference.

Keywords: Bessel beam; Multipole expansion method; T-matrix method; Partial-wave series method; Geometrical ray method; Radiation stress tensor approach; Elastic resonance

华 中 科 技 大 学 博 士 学 位 论 文

suppression; Acoustic radiation force and torque reversal; Object/particle manipulation;
Acoustic tweezers numerical toolbox

目 录

摘 要	I
ABSTRACT	III
1 绪 论	
1.1 课题研究背景及意义	1
1.2 Bessel 波声散射国内外研究现状	2
1.3 非接触操控及 Bessel 波的潜在应用	12
1.4 本文的主要研究工作	17
2 Bessel 波入射下散射模型及理论研究	
2.1 引言	20
2.2 Bessel 波正入射散射理论模型研究	20
2.3 Bessel 波一般入射散射理论模型研究	23
2.4 基于 T 矩阵法声散射数值模型研究	27
2.5 T 矩阵与散射分波系数的联系	42
2.6 本章小结	44
3 一般声场下目标声辐射力和力矩理论研究	
3.1 引言	45
3.2 线动量应力张量法	45
3.3 角动量应力张量法	54
3.4 Bessel 波声学镊子数值工具箱	60
3.5 本章小结	61
4 Bessel 波入射下球形目标声散射研究	
4.1 引言	63
4.2 远场形态函数和共振散射理论	63

华 中 科 技 大 学 博 士 学 位 论 文

4.3 Bessel 波一般入射下声散射理论模型验证	64
4.4 Bessel 波一般入射下球形目标的散射特性研究	66
4.5 本章小结	77
5 Bessel 波入射下复杂目标声散射研究	
5.1 引言	78
5.2 基于 T 矩阵法刚性复杂目标散射特性研究	78
5.3 基于 T 矩阵法弹性复杂目标散射特性研究	96
5.4 本章小结	101
6 Bessel 波入射下三维声辐射力特性和机理	
6.1 引言	102
6.2 Bessel 波入射下声辐射力计算有效性验证	102
6.3 轴向声辐射力反转及物理机理研究	105
6.4 三维声辐射力特性研究	110
6.5 Bessel 驻波入射下声辐射力研究	114
6.6 本章小结	115
7 Bessel 波入射下三维声辐射力矩特性和机理	
7.1 引言	117
7.2 Bessel 入射下吸收球形目标声辐射力矩特性研究	117
7.3 Bessel 入射下刚性复杂目标声辐射力矩特性研究	123
7.4 本章小结	130
8 全文总结与工作展望	
8.1 全文总结	132
8.2 本文的主要创新点	134
8.3 下一步工作展望	135
致 谢	137
参考文献	139

华 中 科 技 大 学 博 士 学 位 论 文

附 录 I 攻读博士学位期间的主要学术成果及参与基金.....	156
附 录 II 贝塞尔函数和球谐函数.....	159
附 录 III 基于分波序列法球形目标的散射系数	164
附 录 IV 球坐标系下推导弹性转换子矩阵部分表达式.....	169

1 緒 论

1.1 课题研究背景及意义

水下声散射研究是水声工程领域的一个重要分支，其在声导航、海洋地形/资源探测、水下目标勘察、目标成像与反演、水下无线通讯技术等经济和国防工业领域有十分重要的意义。自第二次世界大战以来，水下声散射的研究在理论体系，数值手段和试验条件上得到了蓬勃的发展。此外，水下声散射的研究对生物医学，表面化学等领域中颗粒在流体内的声学特性研究具有一定的指导作用。然而，目前关于声散射的理论研究和工程实践，大多是基于普通平面波或近似平面波入射的理论进行分析。近年来，Bessel 波（一种非平面无衍射波）因其定向性好、自重建性、能够长距离不失真传播等优异特性，受到越来越多的学者关注，并通过理论，数值模型和实验等不同手段进行深入研究，包括散射机理的探究和与声散射相关的粒子操控等领域的应用探索。

声散射现象常伴随着声场和作用目标之间的能量传递，具体体现在声场线动量和角动量转移到目标上，由此而产生声场作用下目标受到的声辐射力和力矩。因此，声辐射力和力矩与入射波和相应的散射声场密切相关。直观上，以理想流体中非吸声目标的声辐射力为例，普通平面波照射到目标上，会产生背离声源的辐射推力（正辐射力）。这可以用动量守恒和牛顿第三定律来解释：平面波照射目标，给目标远离声源向前的动量，因此受到声场远离声源的辐射排斥力（正辐射力）。不同于普通平面波，Bessel 波的波矢方向与波轴成一定的夹角，在一定的声场和目标参数条件下，可以产生辐射拉力（负辐射力），这在微流控系统，粒子操控，细胞分拣，声悬浮，弱引力环境等领域表现出巨大的应用潜力。

目标和粒子操纵在生物工程、物理化学、芯片技术、航空航天等领域一直受到世界不同领域的学者关注。声学粒子操纵的本质就是通过声场作用对目标产生预期的作用力或力矩，以此来控制粒子的运动、悬停、旋转等。目前相对成熟的技术主要是基

于驻波调节来控制声场中粒子运动。但驻波场的特点是波节与波腹交替排列，并存在一系列平衡点，无法在固定声源的情况下持续定向操纵粒子；并且形成驻波的条件易受双声源校准、声源与反射面之间的距离及声源发生器频率的影响。因此，研究单波束粒子操纵，具有十分重大的意义，而 Bessel 波正是一类有巨大潜力的无衍射波。

不同于普通平面波，Bessel 波因其特殊的波形结构，适用于普通平面波的研究方法可能全部或部分无法适用于 Bessel 波的研究。例如 Bessel 波散射在正轴入射下可以基于分波序列法用平面波叠加理论求解，但在任意位置入射时，平面波叠加理论则无法求解。这便需要发展新的方法来弥补平面波叠加法的不足，因任意位置入射在工程实践中更为普遍。同样，Bessel 波入射时，许多适用于平面波散射的数值模型可能遇到新的困难甚至失效。此外，产生水下近似 Bessel 声波的实验流程复杂，设备成本高昂，也是制约其进一步发展的重要因素。

基于以上背景，本文致力于推导 Bessel 波任意入射条件下不同材料组成（如刚性、柔性、流体、弹性等）球形目标散射的理论解。同时针对非球形目标，将 T 矩阵法引入系统求解 Bessel 波声散射及声辐射力、力矩的数值模型。本文着重在理论方法和数值模型两方面完善 Bessel 波声散射和相关操纵应用的研究手段，并为开发声学镊子数值工具箱打下基础。

本论文工作部分基于国家自然科学基金（项目批准号：51579112；项目名称：水下复杂弹性体声散射场计算方法及其三维形状反演研究）、华中科技大学自主创新研究基金（项目名称：水下弹性体 Bessel 波照射下声散射场特性研究）以及国际交流合作项目（华盛顿州立大学 Philip L. Marston 教授），旨在丰富声学 Bessel 波的理论和数值模型研究，以期指导实验设计以及探索日后在工程领域的潜在价值。本章将主要对 Bessel 波声散射及粒子操纵相关领域的国内外研究现状进行系统扼要的概括，并给出全文的研究思路。

1.2 Bessel 波声散射国内外研究现状

1.2.1 水下声散射研究方法概述及 T 矩阵法

声波作为一种信息载体，相对于光波和电磁波，其优势在于能够在水下有效地远

距离传播。声波在水下传播时，遇到不均匀的介质（如水下目标，或不同介质的交界面）时会发生散射现象。过去几十年，声散射的研究方法逐步发展和丰富，有理论方法如 Sommerfeld-Waston 变换（SWT）^[1]、分波序列法（也称简正级数法）^[2,3]等；近似和数值方法包括 Kirchhoff 高频近似^[4,5]，T 矩阵法^[6,7]、（改进）有限元法^[8-10]、边界元法^[11,12]、时域有限差分法^[13,14]等；根据声换能器和水听器的相对位置，声散射测试系统可以分为收发分置和收发合置方法；根据信号时长分为脉冲信号法和连续信号法等。图 1.1 给出了上述方法的分类概要图。不同的研究手段有其自身的优势和不足之处，关于典型的声散射研究方法的部分总结，一些文献从不同方面给出了较为详尽介绍及分类^[15,16]。

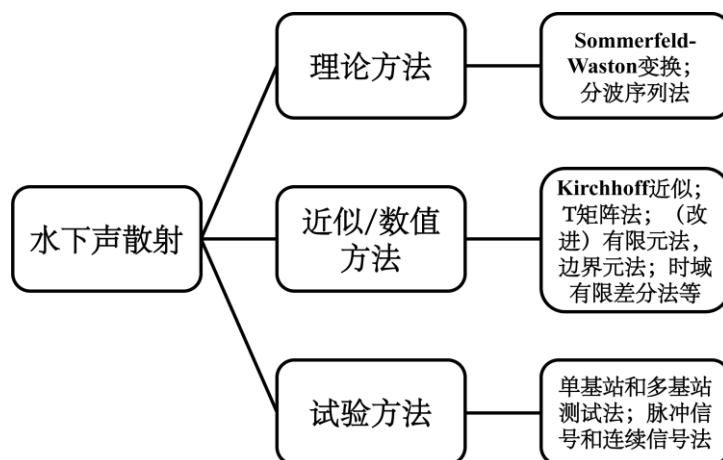


图 1.1 水下声散射研究方法概要图

众所周知，不同的研究方法一般有其各自的适用范围和局限性，比如在不同频率范围，上述方法的有效性和适用性可能表现不同。参考光学领域频率分区的方法，可将分析的频域区间分为：瑞利区 ($0 < ka < 1$)、Mie 共振区 ($1 < ka < 10$) 和几何区 ($ka > 10$)。其中 ka 为球形目标的无量纲频率， k 表示波数， a 表示目标的特征长度。基于分波序列法的声散射理论来源于原子核散射理论 (nuclear scattering theory)^[17]，其优势在于可求解球形目标在任意频率范围的理论解（如 $ka > 200$ ），但在求解非球形目标时，该方法在普通球坐标系下失效，需要考虑复杂坐标系或引入新的数值技术来求解。对于基于伽辽金加权残值思想的有限元法，则需要根据经验法离散化连续的系统模型，并保证求解域的收敛。但当频率达到一定高时，其局限在于：一是整体刚度矩阵维数巨大，需要较大的计算消耗（计算机内存及时间成本）；二是高频时

华 中 科 技 大 学 博 士 学 位 论 文

矩阵求解容易出现不稳定，导致计算结果发散而造成显著误差。此外，有限元在有效求解无限域或移动边界问题时也无法适用。有限元的优势在于可以求解任意复杂形状的有限目标的声散射。边界元的特点是可以减少空间维度来进行数值离散，如三维空间问题，只需要对目标的边界上离散，降低了数值求解的维度，因此可以求解更简单的线性系统方程，减少需要的计算内存，提升计算效率^[11]。有限元和边界元方法目前已开发出较为成熟的商业软件，如 COMSOL, LMS Virtual LAB 等。Kirchhoff 高频近似适合求解刚性目标在高频范围的声散射，其在中低频范围求解声散射问题可能失效，而且无法求解弹性散射的贡献。本论文的主要目的不是比较各种数值算法的优劣，而是将计算声散射行之有效的 T 矩阵法，扩展到 Bessel 波声散射的计算，其能够有效计算 Rayleigh 区、Mie 共振区和部分几何区内的三维目标声散射。

T 矩阵法，也称零场理论或扩展边界积分法，是由 P.C. Waterman 提出的一种半解析半数值方法^[6,18]，“解析”在于 T 矩阵法的公式体系基于 Helmholtz 方程的积分形式和零场理论（在散射体内部所有场点上其入射场为零），有严格的理论推导和完备性、收敛性的证明；“数值”在于数值编程求解过程中其无穷阶矩阵需要数值截断，以及积分过程需要借助数值手段来对散射体的表面积分进行求解。T 矩阵法的核心思想是将所有场量（包括入射场、散射场、散射体表面未知场，格林函数）在一组正交完备基函数下展开，根据边界条件通过已知的入射场展开系数来求解未知的散射场系数。展开系数也称为波形系数。求得到散射场展开系数，再根据给出的正交完备基函数，便可求得整个散射声场。通常，二维声散射问题采用圆柱波函数，三维散射问题则采用球波函数作为基波函数来展开入射场和散射场。T 矩阵（也称转换矩阵）给出了入射波和散射波展开系数的线性关系，其与散射体的几何现状，材料组成和流体介质间的边界条件有关，而与入射声源无关。入射声源决定了入射波的展开系数。

T 矩阵法最初用来求解电磁散射问题^[18]，之后扩展到声散射问题^[6]，并由 Varadan, Bostrom, Lim 等学者发展求解平面波入射下弹性介质中的声散射^[19-21]，多层次目标^[22-24]以及多个目标^[25-27]，波导中的声散射^[28-30]，掩埋目标^[31,32]等复杂声散射问题。理论上，T 矩阵可以求解任意形状的目标散射，但在实际应用中发现，其对具有回旋对称的目标，如球，椭球，有限圆柱及多目标组合体等自然或工程实践中广泛存在的目标，求

解精度和效率与其它数值方法比较，具有一定的优势。但需注意，对不具回旋对称性的目标，基于 T 矩阵法求解声散射问题的计算量很大，同时还会出现数值计算上的困难，如对矩阵进行求逆操作，导致计算结果不稳定可靠。因此，T 矩阵法更多被用来求解回旋对称目标，即使在相对较高频率也有较好的精度和计算效率。近来，Lim 将离散声源法^[33]引入到 T 矩阵法中，成功地求解了在球坐标系中平面波照射下大尺度比弹性细长和扁平椭球的声散射问题，且计算频率可高达 $ka = 100$ 的频率范围^[34,35]。然而，自 Waterman 提出并发展 T 矩阵法以来，公开发表的绝大部分研究均是考虑在平面波入射下的散射问题，这主要有两个原因：一是平面波的入射展开系数在给定的基本波函数下比较容易得到，二是非平面声波的实现及其潜在应用在近二三十年才逐步引起国内外学术界和工业界的广泛关注。因此，本文旨在将 T 矩阵法发展用来求解 Bessel 声场散射问题，并着重讨论 Bessel 声场下的散射特性和散射体的动力学特性，以此来扩展 T 矩阵法的适用范围以及在粒子操纵领域中引入新的解决手段。

1.2.2 无衍射波的概念及分类

衍射（Diffraction）和频散（Dispersion），在光束和声束传播过程中时常发生。衍射导致波束或脉冲产生空间展宽，而频散导致脉冲时间展宽，这在一定程度上限制了波束或脉冲的性能及其应用^[36]。因此，发展相应的技术来克服衍射和频散带来的缺陷，便显得尤为重要。无衍射波（Nondiffracting Waves），也称局部波（Localized wave），顾名思义，即在传播过程中能够保持横向轮廓分布不变，并可以轴向较长距离不失真地传播。无衍射波已被发现在声学，光学，电磁学，力学，地球物理学甚至粒子物理学和引力波等领域具有潜在应用，并被广泛研究。目前，无衍射波在光学领域发展相对较为成熟，而在声学领域相对滞后，仍需加大研究力度，其中在声学领域的一个应用是针对人体内移动器官的高分辨率超声扫描成像技术^[37,38]。国内国防科技大学曾新吾教授课题组对无衍射波束在声学领域的可行性进行了初步的探讨，并分别用理论和数值手段对理想无衍射声束和非线性声学条件下无衍射声束的可行性进行了分析^[39]。现考虑满足在自由空间线性均质条件下的波动方程，则任意理想无衍射波的一般表达式可表示为^[36]：

$$\Phi(R, \varphi, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\omega/c}^{\omega/c} dk_z A_{nm}(k_z, \omega) J_n(k_r R) e^{ik_z z} e^{-i\omega t} e^{in\varphi} \right] \quad (1.1)$$

其中 ω 表示角频率, c 为介质中的波速, 则波数为 $k = \omega/c$ 。波数的径向分量 k_r 和轴向分量 k_z 满足: $k^2 = k_r^2 + k_z^2$, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为径(横)向坐标, z 为轴向坐标, φ 表示方位角。 $J_n(k_r R)$ 是 n 阶柱 Bessel 函数, $A_{nm}(k_z, \omega)$ 是包含任意频谱分布 $S_{nm}(\omega)$ 的函数。由式 (1.1) 可知, 一般的无衍射波可以看作是 Bessel 波通过时间和空间的耦合叠加而成, 并且排除其反向传播的分量(只考虑角频率 $0 \leq \omega \leq \infty$)。选取不同的频谱函数, 可以得到不同的无衍射波。如当谱函数选取为

$$S(k_r, \omega) = \frac{\delta\left(k_r - \frac{\omega}{c} \sin \theta\right)}{k_r} \delta(\omega - \omega_0) \quad (1.2)$$

时, 表达式 (1.1) 可描述 Bessel 波; 当谱函数选取为

$$S(k_r, \omega) = \frac{\delta\left(k_r - \frac{\omega}{c} \sin \theta\right)}{k_r} F(\omega) \quad (1.3)$$

时, 表达式 (1.1) 可描述无衍射 X 形脉冲波^[36]。其中, $F(\omega)$ 表示频谱。

目前为止, 已发现了多种典型的无衍射波, 并通过理论数值模型或实验加以研究, 如 Airy 波^[40], Lommel 波^[41], Mathieu 波^[42,43]等, 其中最广为人知的两类无衍射波是 X 形波和 Bessel 波。理想的无衍射波的共性包括能够远距离不失真传播, 即横向强度分布能够保持不变向前传播, 而实际制备的声场均是由有限尺寸的孔径声发生器和有限的声源能量产生, 因此只能生成近似的无衍射声场。尽管实际上只能生成近似无衍射波, 但其仍然有较大的场深度, 即在靠近声源附近仍有较长距离能够保持近似无衍射传播, 这在生物医学成像, 组织识别和无损检测等领域均有潜在应用^[44]。但不同波有其自身特性, 最显著地区别在于横向轮廓分布的不同。其他差异如 Airy 波具有自弯曲和自加速特性^[40]; 当选择不同的波形参数时, 可得到径向对称或不对称的横向声强分布的 Lommel 波。此外, 通过选择合适的波形参数, Lommel 波可退化为高阶螺旋 Bessel 波^[41]; Mathieu 波可以看作椭圆化的 Bessel 波, 在光学领域已有部分成果发表, 但在声学领域的研究似乎还未公开发表。上述无衍射波在光学领域研究较为广泛, 在

声学领域研究相对滞后，如 Airy 波，Lommel 波近年才开始有公开发表的研究成果，Mathieu 波甚至还没找到相关的公开发表文献。X 形波和 Bessel 波的研究开展有 20 余年，并在医学成像领域表现出潜在的应用^[37,38,44]。但到目前未知，对无衍射波的研究并不很全面和透彻，比如近年来 Bessel 波的涡旋特性在粒子操纵^[45]和水下声通信^[46]等领域表现出的强大优势与潜力，仍需投入更多时间和精力去发展研究，以期在生物医疗，芯片技术，物理化学，微引力环境等领域成功地应用。

1.2.3 声学 Bessel 波传播与散射的研究现状

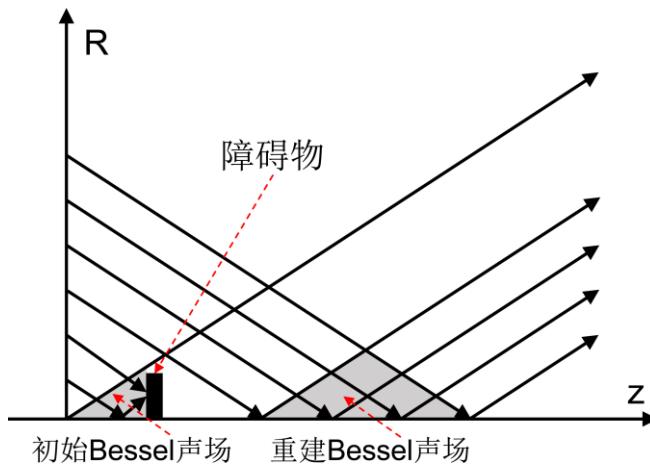


图 1.2 Bessel 波自重建性射线图

Bessel 波束概念首先是由 Durnin 于 1987 年在光学领域提出^[47]，并通过实验近似地实现^[48]，此后，其相关的理论、实验及实际应用研究吸引了国内外众多学者的兴趣。1989 年，Hsu^[49]通过对压电陶瓷圆盘不均匀地极化，制作了 Bessel 波声换能器并得到了近似的 Bessel 声波束，这项研究工作极大的促进了相关学者通过理论和实验手段进一步研究 Bessel 波的在声学领域的神奇特性。通过已发表的研究成果可知，Bessel 波相比于平面波，有以下两个主要特性，即无衍射性^[50-52]和自重建性^[53-55]。无衍射性表明沿着 Bessel 波传播方向，垂直于波轴的平面上 Bessel 波的横向能量密度分布轮廓保持不变；自我重建性则描述了 Bessel 波能够重新恢复到原始的能量密度分布的轮廓，但有一个前提：整个波束不会被障碍物完全阻挡。Bessel 波的自重建性可由图 1.2 射线图形象地给出(因对称性只给出上半个平面的射线图)， z 表示 Bessel 波轴向距离， R 表示径向距离。根据图 1.2 可观察到最初的 Bessel 波声场由上下半平

面波矢叠加形成，见图中左边的阴影区；当越过障碍物一定传播距离后，上下半平面的波矢重新形成 Bessel 波声场，就好像障碍物并不存在一样。基于 Bessel 波的这些特性，Bessel 波的研究引起越来越多研究人员的兴趣和重视，包括在光学^[56-60]，电磁学^[61-63]以及声学领域^[64-67]。

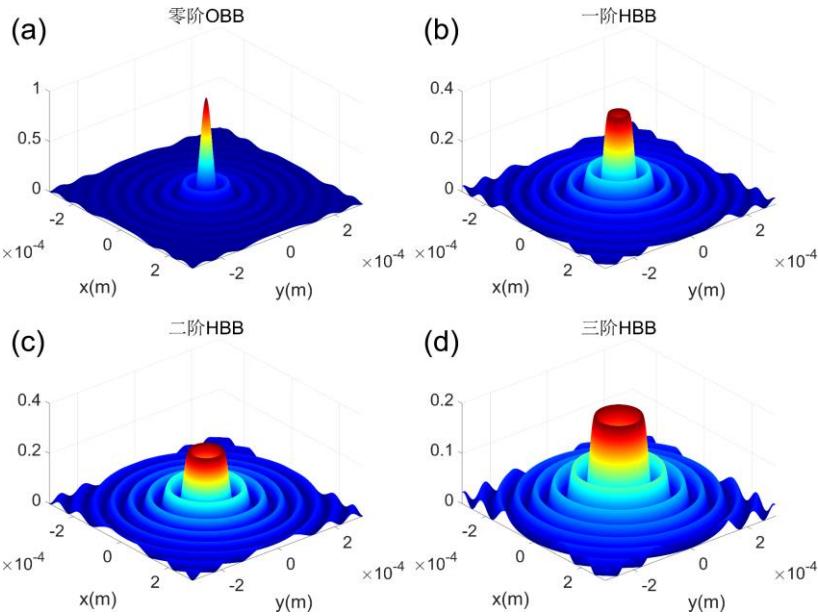


图 1.3 Bessel 波横向截面强度分布图

图 1.3 给出了第 0-3 阶 Bessel 波横向声强幅值的轮廓分布图，用 m 表示 Bessel 波的拓扑荷数，也称阶数，其描述当 Bessel 波沿轴向传递 2π 的距离时，声场的相位从 0 到 2π 改变的周期数。可以看出：零阶 ($m=0$) 普通 Bessel 波 (Ordinary Bessel beam, OBB) 声场横向强度分布的中心处 (波轴上) 最大，而 1-3 阶 ($m=1, 2, 3$) 螺旋 Bessel 波 (Helicoidal Bessel beam, HBB) 横向强度分布是中空的。这可由柱 Bessel 函数 $J_m(k_r R)$ 的性质来解释：声强幅值与柱 Bessel 函数的平方 J_m^2 成正比， J_0 在 $k_r R=0$ 处有峰值，而当 $m \geq 1$ 时 J_m 在 $k_r R=0$ 零值处为零，相邻的第一个峰值在 $k_r R=0$ 周围两侧，这便解释了高阶 Bessel 波声强幅值中心是零。对 OBB 和 HBB，其横向强度幅值分布均具有径向旋转对称性。但需要注意相位分布，HBB 在径向有相位梯度，也叫螺旋位错，而 OBB 的相位分布具有径向对称性。新加坡国立大学的 Qiu 和 Yang 对光学上漩涡波的制备方式进行了简要的概括^[68]，如使用螺旋相位平面，超表面技术，计算机生成全

息图技术，等离子体纳米结构技术，以及主动激光涡旋技术等。Bessel 波是漩涡波中的一种，其物理上可以用简单紧凑的形式给出理论表达式，实验上也比其他复杂漩涡波相对较易试验。与光学漩涡波的制备类似，在声学领域，除了 Hsu 用压电陶瓷不均匀极化产生近似 Bessel 波以外^[49]，近年来，国内外学者发展了一些行之有效的方式来产生近似 Bessel 波。法国巴黎第六大学 Thomas 教授团队基于逆滤波技术 (Inverse filter technique) 用有限孔径的阵列在水箱实验环境下产生了高阶漩涡 Bessel 波短脉冲^[45,69]；南加州大学 Shung 教授团队及合作者利用多焦点菲涅尔透镜 (Multi-foci Fresnel lens) 通过实验成功产生了近似零阶 Bessel 波^[70]； Jimenez 及合作者提出用刚性圆环面旋转对称光栅成功制备了近似零阶 Bessel 声波^[71]，并进一步发展使用阿基米德螺旋衍射光栅来制备近似高阶 Bessel 波^[72]；西北工业大学洪振宇教授及合作者采用圆环分布的 64 个独立调制的压电传感器成功产生了二维 Bessel 形漩涡波，并讨论了该工作在声操控设备的潜在应用^[73]；武汉大学刘正猷和邱春印教授团队采用声学超材料制备了二维 Bessel 半波 (half-Bessel beams)，并用全波模拟加以验证^[74]；Chillara 及合作者通过利用横向边界固定的压电圆盘声换能器径向模式在水下成功产生了近似 Bessel 尔波，这比 Thomas 教授的水下参数化阵列法更经济^[75]；南京大学刘晓峻教授及合作者提出用带周期结构的平面声棱镜，将发散声束转化为近似零阶 Bessel 波^[76]；墨西哥学者 Volke-Sepulveda 及合作者采用螺旋状主动衍射光栅 (Spiral-shaped active diffraction gratings) 在空气中可以生成较宽频域范围的 Bessel 漩涡波，并能同时产生不同拓扑荷数的漩涡波^[77]。上述不同的 Bessel 波制备方法，丰富了用实验研究 Bessel 波的手段，也促进了未来 Bessel 波在工程实践中的成功应用。但上述讨论大部分集中在研究如何产生近似 Bessel 波及其在空气或水中的传播规律，而对声学 Bessel 的散射特性研究及声场与粒子间的交互作用讨论较少，该研究对 Bessel 波的散射物理机理和工程实践应用十分重要，下面将在此方面作进一步的阐述。

自 Durnin 提出 Bessel 波的概念以来，对 Bessel 波的研究越来越广泛，尤其是近十多年来，对声学 Bessel 波的研究有了一个较大的发展，并发展了相应的理论，数值和实验手段来加以研究。Marston 于 2006 年基于平面波叠加法和辐射应力张量法首次发表了关于 Bessel 波照射下水下物体的声辐射力研究，并发现了声辐射力反转

现象，即粒子被拉向声源方向^[64]，研究对象包括刚性、液体和弹性球。同年，Marston 提交了研究刚性球和柔性球的形态函数在不同波形参数下散射特性的文章，并用光学射线几何模型分析了散射规律^[78]，并在之后的工作中扩展到研究弹性球和球壳的共振散射问题，并解释了共振散射的抑制机理^[79,80]。需要注意，Marston 关于 Bessel 的声散射及声辐射力计算，是基于平面波叠加理论推导计算，该方法无法适用于计算 Bessel 波偏轴入射时的声散射问题。为了克服这个计算难题，巴西学者 Glauber T. Silva 和华中科技大学李威和龚志雄等分别从数值上^[81]和理论上^[82]推导了 Bessel 波入射时的入射波形系数，并计算研究了相应的声散射特性。值得注意的是，Silva 利用球谐变换法推导得到的波形系数因分母存在发散项，因此对计算的频域范围有限制，此外，因需在选定球表面大量离散数据点进行数值积分，增加了额外的计算量以及引入了额外的计算误差，而理论推导并不存在这样的限制，可以求解任意频域的精确解。在实验研究方面，法国 Thomas 研究组采用 127 个球形聚焦阵列超声换能器产生 Bessel 漩涡波来控制水下弹性小球，并给出了小球的运动轨迹^[69]；布里斯托大学 Drinkwater 教授课题组设计圆环形带有匹配层的 64 单元超声阵列产生 Bessel 波来控制琼脂基上 45 和 90 微米的聚苯乙烯小球^[83]，为设计灵巧的声学镊子设备提供了支撑；西北工业大学洪振宇课题组与布里斯托大学 Drinkwater 教授合作，研究了基于声辐射力和二维 Bessel 形漩涡波轨道角动量传递的二相流体微粒混合，并揭示了粒子旋转速度与声场能量之间在瑞利区存在线性关系^[73]。

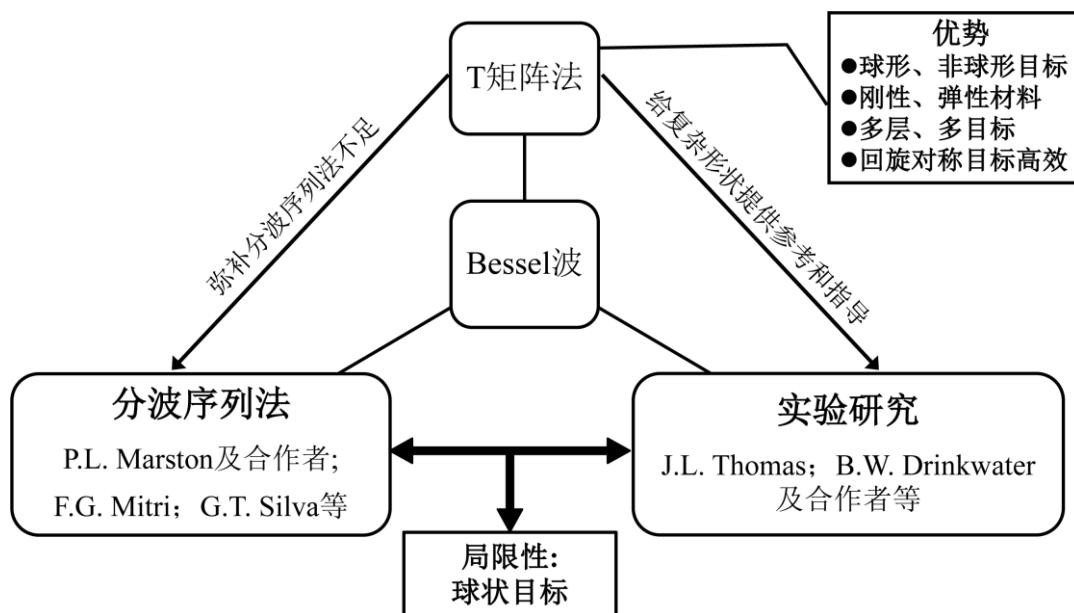
不足的是，以上理论和实验研究手段，其研究目标局限在球状目标，而对工程上广泛存在的其它复杂形状的目标，如椭球，有限圆柱等，在实际计算研究上还不够成熟。主要难点是基于球坐标系下的分波序列法，无法有效求解非球形目标的声散射场，而椭球坐标系因其推导复杂，且适用目标形状有限，并不十分高效。在实验研究上，目前主要集中在球形目标，并重点考虑在较低频率范围内，这是因为球形目标在实验中相对椭球等其他复杂形状比较容易与 Bessel 波束校准，而低频范围实验研究者可以采用近似理论对实验结论进行验证。此外，水下实验设备价格高昂，如 Thomas 教授课题组整套水箱实验设备需要约 12 万欧元。基于以上描述，十分有必要引入高效的数值方法来弥补理论和实验方法的不足，而 T 矩阵法是被证明行之有效的方法，Bessel

波声散射及相关研究目前的主要研究现状如图 1.4 所示。

T 矩阵法经过近六十年的发展，已被证实是一种高效的声散射计算工具，尤其是针对具有回旋对称的目标^[84-86]。此外，T 矩阵法与其他方法相比，在计算电磁散射领域也表现处很强的竞争力^[87]。理论上，在给定散射体表面形状函数的条件下，T 矩阵法可以计算任意复杂形状目标的声散射。但实际上，由于任意形状目标的声散射在数值积分过程中，计算量过大，并可能存在数值计算不稳定，最后造成计算结果不准确可靠。回旋对称形状在自然界和工程实践中广泛存在，而 T 矩阵法计算回旋对称形状的声散射可以在理论上和数值上极大化简，并得到准确可靠的计算结果。T 矩阵法已被证实是一种强大的数值计算工具^[88]，可用于求解水下均匀介质中非球形目标的声散射，如（超）椭球形状^[34,35,89-91]，柱球组合体^[91-93]；以及多层散射体^[22-24]或多目标的声散射^[25-27]，波导中的声散射^[28-30]，甚至水下掩埋目标的声散射计算^[31,32]等。然而，从目前公开发表的文献来看，T 矩阵法绝大部分应用在平面波入射下的声散射问题求解，这主要是因为在以前的水下声散射研究中，主要考虑平面波入射下的情形。此外，平面波的入射展开系数比较容易推导，因此便于通过 T 矩阵法计算声散射场。

本文旨在将强大的数值计算工具 T 矩阵法引入到计算声学 Bessel 波的研究中，一是克服理论方法和试验方法的不足，二是通过相对经济而又通用的计算手段，为设计 Bessel 声散射和声学镊子数值工具箱打下基础。目前本课题组基于球谐函数叠加理论推导出了零阶 Bessel 波入射系数，已成功将 T 矩阵法引入到计算大尺度比刚性椭球^[90,91]和柱球组合体^[91,93]声散射特性中，并提出了有效的几何模型来预报 Franz 波和镜反射波的干涉模型。不同于平面波，Bessel 波的波矢方向与波轴成一个波锥角，因此本课题组进一步研究了前向散射特性，并用光学理论成功的对物理机理进行了解释^[91]。为了将 T 矩阵法发展能够计算任意入射方位下任意阶 Bessel 波的声散射，我们进一步在理论上推导了基于多极展开法入射波形系数^[82]。此外，对 Bessel 波入射下弹性椭球的声散射特性也进行了简要的探讨和研究^[67]。目前国内关于 Bessel 波散射的研究，主要集中在光学和电磁学领域，如西安电子科技大学韩一平教授团队，对不同目标下 Bessel 电磁波的散射特性及辐射力进行了探讨^[94-96]；而声学 Bessel 波散射研究相对滞后于光学和电磁 Bessel 波的研究，但已在国内外声学领域越来越受重视。流

体中 Bessel 声散射和粒子操纵的相关研究，目标公开报道还比较少，而这些方向的研究在生物药物靶向传递，细胞筛选，芯片技术等领域表现出了较大的应用潜能，这也是作者开展此方向研究的一个重要动力。需要注意，中国科学技术大学冯焕清和彭虎教授课题组开展了关于声学 Bessel 波的制备，传播以及非线性特性研究等方面的工作，以期在生物医学成像领域有所应用^[97,98]，东南大学丁德胜对小瓣数 Bessel 波的基本波和二次谐波的传播性质进行了探讨^[99]，但上述工作对流体环境中粒子散射特性和操控研究并未开展。Bessel 波在其散射特性和声辐射力（矩）等物理性质上所表现出的一些新颖特性，在水下探测、粒子操纵、水下通讯、无损检测等领域都有较大的应用潜力，这也是本文研究的主要动力和目的。



1.3 非接触操控及 Bessel 波的潜在应用

1.3.1 非接触目标操控的概念及意义

Acoustofluidics，声流控学，即通过声场驱动（操纵）流体中的粒子的一个专有概念；类似的概念有 Optofluidics，光流控学，即通过光波来驱动流体中的粒子。非接触操控主要是基于声流或光流等场量作用于目标，根据实际需要生成特定的场分布对粒

子进行操纵。“非接触”表示设备与目标不进行直接的物理接触，而是通过场能的作用来操纵粒子，比如通过目标在物理场中进行能量吸收、声场与目标之间进行动量转移、角动量传递等方式，粒子可能会出现转移，旋转等运动。

非接触操控目前是微流控技术领域的一个研究热点，对一些敏感、排斥接触的特定环境具有巨大潜在应用，如人体中细胞分流，药物靶向传递，微细芯片结构加工制造等。非接触操纵能够通过场能控制目标实现移动、悬浮、旋转等，具有广泛的实际应用，如原子排列，药物定向传递，细胞分拣与计数，太空飞船中目标捕捉等。磁悬浮列车是大家熟知的一种非接触操控的应用，通过磁场使列车克服自身重力而悬浮来最大限度减小滑动摩擦和磨损，以减小运营和维护成本。除了磁悬浮技术，还有其他悬浮技术如声悬浮、光悬浮、气动悬浮、电动悬浮、射频悬浮、超导悬浮等^[100]。现有的通过不同方式和原理设计出的微流控制系统^[101]，在生物医学、物理化学以及芯片技术等领域具有潜在的广泛应用。本文主要是基于声流控学来研究普通 Bessel 波和 Bessel 漩涡波在目标非接触操纵中的特殊性能及潜在应用。

1.3.2 声流控国内外研究现状

自 1970 年以来，由 Ashkin 等最初证实光辐射力可以操纵和捕捉带电粒子^[102]，并最终通过实验成功设计了光学镊子（Optical tweezers）^[103]，光学操控的概念和研究开始广为人知^[104-106]。澳大利亚昆士兰大学的 Nieminen 教授团队发布了光学镊子数值工具箱^[107]，主要通过用高斯波来对不同形状的粒子进行数值模拟操控研究。上述研究证明了光学镊子的在粒子操纵、原子冷却和排列、电子捕捉、光学成像等领域具有潜在或实际应用价值。但光学镊子的一个缺陷是高强度激光容易产生过热造成对目标和介质的热损伤^[108]，这在一定程度上阻碍了光学镊子的应用。此外，光学镊子中因光波以光速传播，在相同强度下与声学镊子相比，产生的辐射力较小。在相同的场强下，声学镊子比光学镊子产生的辐射力大 5 个量级左右，因此可以用来操纵更大的目标。这是由于辐射力 F 的幅值正比于场强 I 大小，而反比于波束在介质中的传播速度 c ，即 $F \propto I/c$ ^[109]。鉴于更好的生物兼容性（不产生局部过热）和能够产生更大的辐射力等优良特性，且操纵的粒子可以从微观（如纳米）到宏观尺寸（如厘米），因此声学

华中科技大学博士学位论文

镊子的研究正吸引越来越多科研工作者的兴趣，其发展也越来越受到重视。

声学镊子的概念借鉴于光学镊子，最早的概念由 Wu 提出，并通过试验利用两束校准的反向传播超声聚焦波束成功地将乳胶粒子和蛙卵进行轴向和横向移动^[110]。设计声学镊子的框架主要包括两大类：一类是利用驻波场产生梯度力来操纵粒子；另一类是利用漩涡波等具有特殊波形结构的单波束产生辐射力来操纵粒子。驻波场用于声捕获从提出至今已发展了 50 余年，并具有比较广泛的应用。驻波场主要有两种产生模式，即两个声源产生校准的双波束^[110]和一个声源产生声束通过一个反射器形成驻波场^[111,112]。此外，单束波用于声捕获近年来才得以在实验上三维空间中实现^[113]，可以采用包括无衍射波如 Bessel 波，Lommel 波等，以及具有衍射特性的高斯波等来实现。注意，高斯波在光学镊子领域使用较多，主要是因为激光在传播过程中，因为平面波传播过程中发生衍射而自然形成高斯场。单波束声学镊子在一些情形下比驻波型声学镊子更具有竞争力，比如单波束漩涡波声学镊子可以连续长距离吸引或排斥目标而不用改变声场特性或移动声源位置；和驻波场不同，单波束声场不存在多个交替变化的平衡位置^[83,114]。

目前关于声学镊子的研究以理论和试验手段为主，也逐步引入了一些数值计算方法。声学镊子实际研究内容主要以声场与粒子相互作用产生的辐射力和辐射力矩为主，也部分考虑到流体介质的粘性作用产生的声流（Acoustic streaming）。声流不同类型^[115]以及对粒子操纵产生 Stokes 阻力的影响^[116]，但并不是本文的研究重点，本文主要研究不考虑流体粘性的理想介质中声散射产生的声辐射力和力矩对目标的影响。L.V. King 最先比较全面地用近场方法，对球体表面压强的变分进行积分，讨论了刚性球的声辐射力，并给出了基于长波近似小球辐射力的理论解^[117]；日本学者 Yosioka 等基于 King 的推导，得出了非粘性流体中平面波或驻波入射下可压缩球的声辐射压力公式^[118]；美国学者 Westervelt 通过对远场表面的辐射应力张量积分推导出声辐射力表达式^[119,120]，该公式与前苏联科学家 Gor'kov^[121]独立推导的辐射力公式一致。此后，Yosioka 进一步发展到求解弹性球^[122]和可吸收球^[123]的声辐射力。关于声辐射压力和声辐射力的一些讨论与综述，可以参考已发表的相关文献^[124-127]。

国外关于声学镊子理论方面的研究，主要有美国华盛顿州立大学的 Philip

华中科技大学博士学位论文

Marston^[64], 丹麦科技大学 Henrik Bruus^[128]等; 关于试验方面的探索开展较多, 有瑞士苏黎世联邦理工大学 Dual 教授课题组^[129]; 布里斯托大学 Drinkwater 教授及合作者^[130], 法国 Thomas 教授课题组^[45,69,109,113,131], 瑞典隆德大学 Laurell 教授实验室^[132], 杜克大学 Tony Jun Huang 教授课题组^[133], 加州大学圣迭亚哥分校 Friend 教授 MADLab 团队^[134], 澳大利亚莫纳什大学 Neild 教授及合作者^[135]。国内在声学镊子领域的研究已发展了多年, 包括西北工业大学解文军教授团队^[111,112,136]; 武汉大学邱春印教授课题组采用两束交叉平面波的干涉通过数值计算成功生成了横向稳定的声辐射拉力场^[137]; 浙江大学杨克己和范宗尉等通过采用较少的换能器来旋转和移动非球形粒子等^[138]; 南京大学刘晓宙教授课题组采用高斯波来控制粒子的运动^[139]; 以及章东教授课题组研究了驻波入射下声辐射力和声流对粒子排列的影响^[140]; 陕西师范大学张小凤教授课题组研究了流体柱在阻抗边界条件下的声辐射力特性^[141]; 西安交通大学王朝晖教授团队对表面驻波条件下刚性圆柱^[142]和可压缩圆柱^[143]的声辐射力进行了探讨等。

声学操控的巨大潜在应用, 吸引着越来越多国内外学者投身研究, 致力于发展相应的理论和实验技术。但该研究离实际医学临床应用仍有一定的差距, 如需要考虑人体组织中液体的吸收特性以及血管或细胞膜等界面对声场的影响, 导致实际上的声辐射力或力矩预报不够准确。因此, 需要引入数值工具来探索更为复杂, 更准确的模型, 为实际应用作指导。本课题主要探讨将 T 矩阵法引入到声操控领域, 并期待设计出服务于实验与工程的声学镊子数值工具箱。一方面, 是对理论模型的局限性进行探讨与进一步深化, 另一方面是为实验设计作指导和验证, 以节省经济和人力成本。下节将详细探讨无衍射 Bessel 波在声操控领域的优势及研究进展, 下述部分内容给出了本文的主要研究动力和意义。

1.3.3 Bessel 波非接触目标操控应用

Bessel 波的幅值和相位分布相对简单, 其波形表达式具有简易的数学表达式, 是理想 Helmholtz 方程的一个解, 因此便于用理论方法加以研究。关于 Bessel 波的散射特性研究以及实验上的近似制备, 已在 1.2.3 小节详细叙述, 本小节重点讨论 Bessel

在辐射力和力矩方面的研究情况。Marston 根据 Bessel 波的波矢与波轴方向成一个波锥角的物理特性，利用平面波叠加定理计算分析了普通 Bessel 波^[64]和 Bessel 漩涡波^[144,145]入射下球形粒子的声辐射力特性，得到了负声辐射力，并在物理上解释了产生的原因。Zhang 和 Marston 进一步通过理论推导，在数学上给出了产生负声辐射力的条件^[146]。此外，Zhang 和 Marston 推导了非傍轴漩涡波下回旋对称粒子的轴向声辐射力矩与入射波拓扑荷数，角频率以及粒子吸收能量之间的理论公式^[147]。

在 Bessel 波粒子操控的实验研究方面，近似的 Bessel 声场可以在实验上实现，以此来研究粒子在 Bessel 波声场的动力学特性。法国学者 Baresch 等通过水下换能器阵列实现了三维弹性粒子的捕获及粒子动力学的运动轨迹^[45]；英国学者 Courtney 等通过电信号分别调节圆环形 16 单元^[148]和 64 单元^[83]阵列的相位和幅值形成近似的 Bessel 波声场，来实现微粒的汇聚与分离；国内学者洪振宇等探讨了二维 Bessel 漩涡波的轨道角动量传递到微粒簇上使其旋转的问题^[73]。Bessel 旋涡波是声涡旋场的一种，关于漩涡波声场操控的部分研究可参考文献[113,130]及相关引用。

目前关于 Bessel 波在非接触操纵领域的数值研究中，包括：华盛顿州立大学 Thiessen 教授等在美国声学学术会议上汇报了采用三维有限元法计算球形粒子的声辐射力，与 Marston 推导的理论解验证正确，但并未公开发表完整的文献^[149,150]；新加坡国立大学的 Wijaya 和 Lim 采用三维边界元法计算了非球形粒子的声辐射力和力矩^[151]；美国学者 Mitri 基于分波序列法通过对刚性椭球表面的数值积分求解了 Bessel 波正入射时的声辐射力^[152,153]。不同的数值方法均有其优势和不足，以上公开发表的工作，主要讨论回旋粒子在 Bessel 波正入射下的声辐射力和力矩，并且重点讨论小尺度比下的情况。以有限元和边界元法为例，在计算三维回旋对称目标的力和力矩时，其计算效率相对较低，并且在高频计算域内会极大增加计算耗费和降低计算精度。基于此，本文将 T 矩阵法引入到计算声辐射力和力矩的领域，克服上述数值方法的不足，可以有效求解任意频域内 Bessel 波正入射和斜入射时非球形回旋体的声辐射力和力矩，这将在粒子操控领域引入新的数值手段，可以弥补理论方法的不足，并指导实验设计。

1.4 本文的主要研究工作

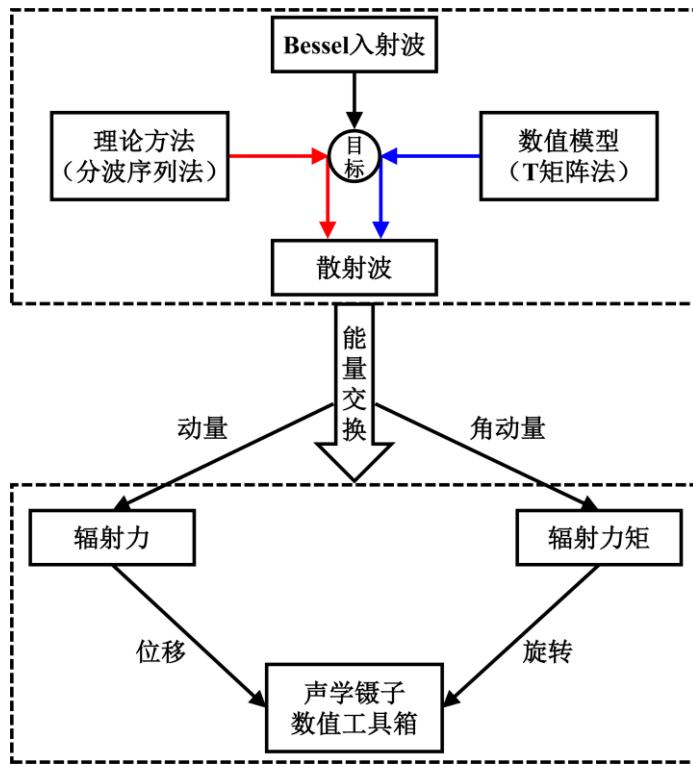


图 1.5 本文研究框架

论文主要开展了声学 Bessel 波入射下目标散射的理论和数值模型研究，并探讨了球形和非球形回旋粒子在 Bessel 漩涡波入射下的声辐射力和力矩，探索其在非接触操控领域在实际工程应用中的可行性。本文建立了一种适用于任意拓扑荷数的 Bessel 波任意位置入射下的理论和数值计算模型。论文的研究框图如图 1.5 所示，基本内容主要包含以下几个部分：

第一章，概述了论文研究工作的背景和意义，简要给出了水下声散射常用的方法，以及无衍射波的概念和分类，并引出本文的研究兴趣——Bessel 波声散射的特性及研究现状；简要介绍了非接触操控及其在国内外的研究现状，并给出了 Bessel 波粒子操控的优势及潜在应用。

第二章，基于球谐函数叠加理论简要回顾了正入射时球形目标在 Bessel 波入射下的理论表达式，并基于多极展开法，推导了任意位置入射下任意阶 Bessel 波的理论模型表达式。此外，推导了基于 T 矩阵法计算 Bessel

波入射下任意形状目标声散射的数值模型，以便于通过编程实现。通过对对比 T 矩阵和分波系数之间的区别和联系，来分析 T 矩阵法与分波序列法之间的关系。

第三章，根据辐射应力（矩）张量积分法，推导了基于入射和散射波形系数的任意声场入射下声辐射力和力矩分量在笛卡尔坐标系下的具体表达式，并简要回顾了正入射下辐射力和力矩的理论表达式。基于本章的理论推导和分析，提出了声学镊子数值工具箱的结构框架以及可行性分析。

第四章，根据推导的理论公式，简要回顾球形目标 Bessel 波正入射的散射特性，并着重探讨 Bessel 在正入射和偏轴入射下的共振散射特性，解释了共振抑制的物理机理以及抑制作用失效的现象和规律。简要探讨了薄球壳和厚球壳的共振散射理论中背景散射的选取以及壳体中弹性波的主要成分。

第五章，基于 T 矩阵法探讨非球形目标在 Bessel 波正入射和斜入射下的散射特性，并简要讨论了 T 矩阵在实际编程中的数值技术和难点。通过提出反向散射的几何射线模型，来预报 Bessel 波入射下反向散射形态函数峰值的频率间隔，并通过直接数值结果验证正确，进一步认识了 Bessel 波的结构以及解释了刚性反向散射的物理机理。指出并解释了 Bessel 波正入射时回旋对称目标的散射场关于波锥角和散射角的交换对称性；提出了柱球组合体的几何射线模型定性地分析了偏轴入射时前向散射场的物理分布规律。

第六章，基于第三章推导的声辐射力公式，验证了分波序列法理论模型和 T 矩阵法数值模型计算声辐射力的有效性。研究了单束 Bessel 波入射下的声辐射力特性，发现了轴向声辐射力存在反转的新奇现象，并对反转的物理机理进行了解释。探讨了典型形状目标产生辐射力反转的参数分布特性，并研究了凹表面和凸表面形状的目标的三维辐射力随 Bessel 波参数以及偏轴量变化的二维分布特性，指出了相应的规律和物理机

华 中 科 技 大 学 博 士 学 位 论 文

理。简要推导了 Bessel 驻波的入射波形系数，并进行了验证和分析。

第七章，基于第三章推导的声辐射力矩公式，验证了本文推导的公式及编写的程序的有效性。研究了存在吸收作用的球和球壳在 Bessel 波正入射和偏轴入射时的轴向声辐射力矩分布特性，并对正入射时轴向力矩的峰值随频率的分布特性以及偏轴入射时力矩出现反转的物理机理进行了解释。探讨了 Bessel 波斜入射下刚性目标的声辐射力矩在瑞利区和几何区随入射角变化的特性，并对相应的规律进行了解释。研究了具有光滑和粗糙表面的目标的三维声辐射力矩随 Bessel 参数或偏轴量参数变化的二维分布图，分析并解释了力矩的分布规律，以及粗糙度对力矩分布的影响。

第八章，对全文的研究工作进行了系统简要地总结，并指出本文的主要创新点。通过分析本文研究工作的创新点和局限性，对下一步可能有学术和工程价值的工作和方向进行了展望。

2 Bessel 波入射下散射模型及理论研究

2.1 引言

计算声散射模型一般有以下三种：分离变量法，变分法和积分方程直接数值解。通常，分离变量法主要对球形目标或无限长圆柱目标有效，变分法属于一种近似求解法，可用伽辽金法进行求解，本文主要基于分离变量法推导了 Bessel 波入射下球形目标的理论公式，并基于积分方程数值求解推导了 T 矩阵法的数值模型。全文只考虑理想介质中的声散射，即整个流体场无粘性，绝热且均质分布。对于普通平面波入射的球状目标散射特性研究，已有大量的文献运用分波序列法给出了精确理论解。不同于普通平面波入射，Bessel 波入射与目标的几何位置相关。本章首先回顾已有的理论方法及其局限性，并基于多极展开法首次推导了 Bessel 波任意入射方向时三维球的理论散射系数。传统球坐标系下，分波序列法对具有不同材料特性的球体能够准确求解散射场；但对非球状目标，需要借助数值方法来求解，因此本章推导了 Bessel 波入射下的 T 矩阵法数值模型，来求解非球形目标的声散射。

2.2 Bessel 波正入射散射理论模型研究

理想的 Bessel 波是柱坐标系声学标量 Helmholtz 方程的一个理论解，它在传播过程中横向声强保持不变，是一种无衍射波。同时，在遇到小障碍物后，能够在障碍物后方进行波形重建^[53-55]。当入射波原点与目标中心重合时，在柱坐标系下(R, z, φ)任意阶理想 Bessel 波速度势的表达式为

$$\Phi_B = \Phi_0 i^m e^{i(k_z z - \omega t)} J_m(k_r R) e^{im\varphi} \quad (2.1)$$

其中， Φ_0 是入射波幅值， i^m 是为了计算方便以及区分关于相位 φ 系数 m 取正值和负值而增加的相移，有 $i^m J_m = i^{-m} J_{-m}$ 。 J_m 是 m 阶柱贝塞尔函数， k_z 和 k_r 分别是波数 $k = \omega/c$ 的轴向和径向分量，满足 $k_z = k \cos \beta$ 与 $k_r = k \sin \beta$ ，其中 ω 表示入射波的角频率， c 表示入射波在周围介质中的传播相速度， β 是表征 Bessel 波特性的一个几何参数，称

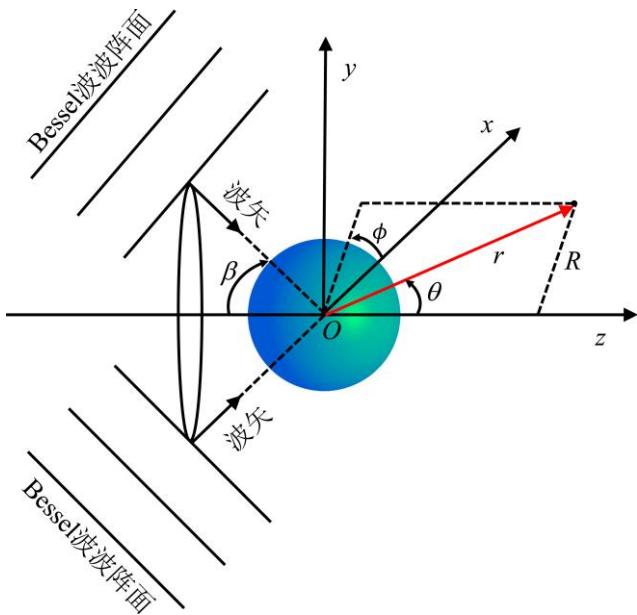


图 2.1 Bessel 波正入射的理论模型及几何关系图

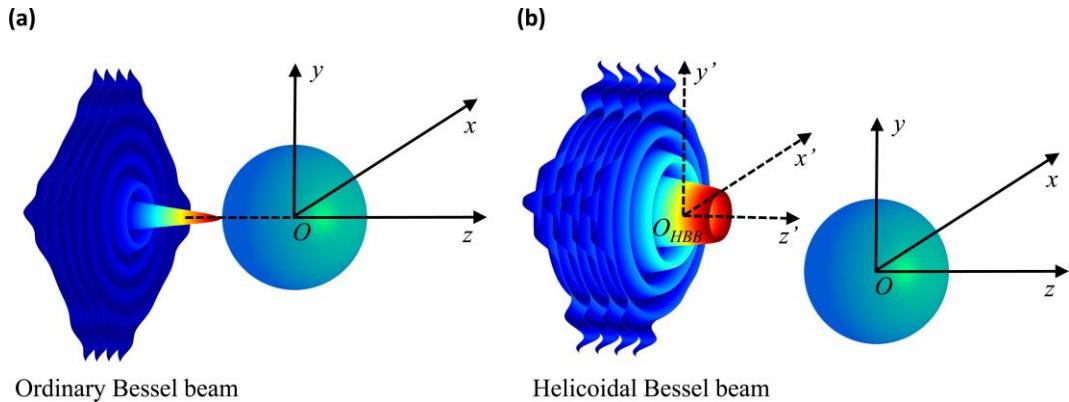


图 2.2 Bessel 波入射下的理论模型 (a) 零阶正入射 (b) 高阶任意入射

为波锥角，其描述了波矢分量与波轴的夹角。当波锥角 β 为零时，Bessel 波退化为普通平面波。 $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是柱坐标系下场点的径向坐标， x, y, z 为笛卡尔坐标系下的位置坐标。 m 描述了 Bessel 波拓扑荷数（也称阶数），它表示在波传播 2π 范围内，相位角 φ 从 0 到 2π 变换的周期数；其值的正负描述 Bessel 波相位变化的螺旋方向。为了求解工程实际中三维目标（如球，椭球等）的声散射特性及在其相关领域中进行研究，需将柱坐标系下的 Bessel 波表达式在球坐标系 (r, θ, ϕ) 展开，根据图 2.1 的几何关系，可知 $R = r \sin \theta$ 和 $z = r \cos \theta$ ，其中 r 是球坐标系下场点到原点的距离， θ 是场点矢量与 z 坐标轴正方向的夹角。根据文献[154]中 7.9 小节中式 (83) 柱波函数的展开

式，有

$$\begin{aligned} J_m(k_r R) e^{ik_z z} &= J_m(kr \sin \theta \sin \beta) e^{i(kr \cos \theta \cos \beta)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+2m)!} (2n+2m+1) i^n P_{n+m}^m(\cos \theta) P_{n+m}^m(\cos \beta) j_{n+m}(kr) \end{aligned} \quad (2.2)$$

将式 (2.2) 代入 (2.1)，可得球坐标系下任意阶 Bessel 波函数在原点的展开式

$$\Phi_B = \Phi_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+2m)!} (2n+2m+1) i^{n+m} j_{n+m}(kr) P_{n+m}^m(\cos \theta) P_{n+m}^m(\cos \beta) e^{im\varphi} \quad (2.3)$$

其中， $e^{-i\omega t}$ 是时谐因子，因入射场，散射场，弹性内部场都包含相同的时谐因子，故在下文中所有场量均省略 $e^{-i\omega t}$ 。为使上式结构更紧凑，采用变量代换 $n' = n+m$ ，有 $n \in [0, \infty]$ 则 $n' \in [m, \infty]$ ，并最终用 n' 替换 n ，可得到

$$\Phi_B = \Phi_0 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (2n+1) i^n j_n(kr) P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \beta) e^{im\varphi} \quad (2.4)$$

其中 j_n 表示球贝塞尔函数， P_n^m 表示连带勒让德函数。美国学者 Marston 沿袭 Durnin^[47] 在光学 Bessel 波表达式的思路，根据 Bessel 波的物理性质，提出用平面波叠加法对方位角积分，分别推导得到了 0 阶^[78] 和 1 阶^[80] Bessel 波的表达式，其实质是利用了球谐函数叠加定理^[155] 来对积分表达式进行求解。在一个小的相位角增量 $d\varphi$ 中，与波轴成夹角 β 的平面波分量和 Bessel 波积分表达式分别为

$$d\Phi_B/d\varphi = \Phi_0 (2\pi)^{-1} e^{ik_z z} \exp(im\varphi + ik_r x \cos \varphi + ik_r y \sin \varphi) \quad (2.5)$$

$$\Phi_B = \int_0^{2\pi} (d\Phi_B/d\varphi) d\varphi \quad (2.6)$$

当拓扑荷数 $m=0, 1$ 时，Marston 推导得到零阶 Φ_{B0} 和一阶 Bessel 波速度势 Φ_{B1} 表达式分别为

$$\Phi_{B0} = \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(kr) P_n(\cos \theta) P_n(\cos \beta) \quad (2.7)$$

$$\Phi_{B1} = \Phi_0 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} i^n j_n(kr) P_n^1(\cos \theta) P_n^1(\cos \beta) e^{im\varphi} \quad (2.8)$$

上述两式与任意阶 Bessel 波速度势的通用表达式 (2.4) 在拓扑荷数 $m=0$ 和 $m=1$ 时一致。Marston 团队将光学 Bessel 波的研究引入到声学领域，并探讨了其特有的声散射

特性与物理机理，以及其在粒子操控领域的作用机理和潜在应用，引起了国内外学者的广泛关注。此外，美国学者 Mitri 也对 Bessel 波在声学领域的发展做出了贡献。在得到球坐标系下任意阶 Bessel 波入射时的表达式，根据散射理论，易知球形目标的散射速度势的理论解为

$$\Phi_s = \Phi_0 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (2n+1) i^n A_n h_n^{(1)}(kr) P_n^m(\cos\theta) P_n^m(\cos\beta) e^{im\varphi} \quad (2.9)$$

其中 A_n 为无量纲的分波系数，满足 $A_n = (s_n - 1)/2$ ，该关系式是借鉴了量子力学中的粒子散射关系式^[156]。散射系数 s_n 引入使分波系数 A_n 结构式更紧凑，其与无量纲频率，球形目标的边界条件和材料参数有关。当球形目标不考虑吸收时，根据能量守恒定律，满足 $|s_n| = 1$ ^[78]。对不同材料属性的球状目标，已有大量的研究给出了分波系数 A_n 或散射系数 s_n 的具体表达式，将在后文具体计算中参考简要列出。根据式 (2.9)，可求出正入射时任意阶 Bessel 波入射下球状目标的散射场。值得注意的是，上述平面波叠加法或称柱波函数展开只能够求解正入射（波轴过球心）时的 Bessel 波散射的理论解，但当 Bessel 波入射方向偏离球心位置时，上述理论方法则无法对散射场求解。为了克服该方法的局限性，本文首次推导了任意入射时任意阶 Bessel 波入射下球状目标散射场的理论解。

2.3 Bessel 波一般入射散射理论模型研究

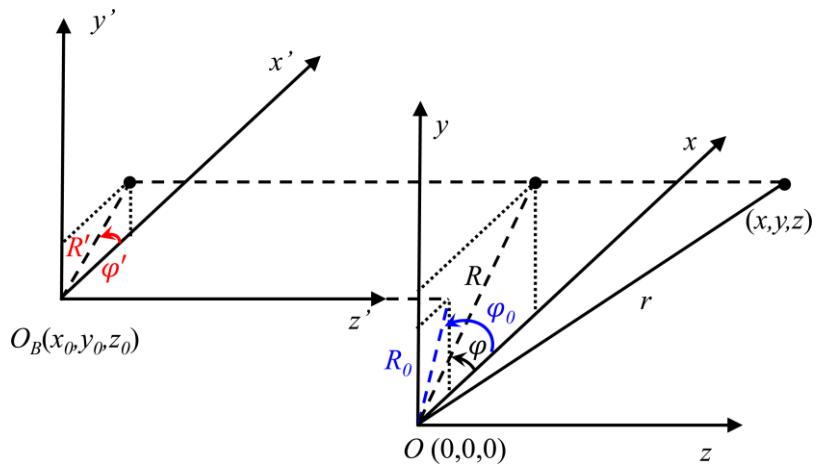


图 2.3 坐标关系图

考虑任意阶 Bessel 波相对于球心任意位置入射（见图 2.2b），因柱面波函数展开法只能计算 Bessel 波原点与球心重合的情况，其散射场的计算无法用叠加理论计算求解。根据球散射的理论解，问题的关键是求得任意入射下的 Bessel 波在球心处的入射波表达式。图 2.2b 中球状目标的中心在 $Oxyz$ 坐标系的原点，入射 Bessel 波的原点设为 $O_Bx'y'z'$ 坐标系的原点， O_B 在 (x, y, z) 坐标系中的坐标位置为 (x_0, y_0, z_0) 。因此，任意方向入射时任意阶 Bessel 波柱坐标系下的速度势为

$$\Phi_B = \Phi_0 i^M e^{ik_z(z-z_0)} J_M(k_r R') e^{iM\varphi'} \quad (2.10)$$

特别说明，为了后续方便推导公式（主要是区别球谐函数引入的相位信息 $e^{im\varphi}$ ），此小节用 M 表示 Bessel 波的拓扑荷数。其中， $R' = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ ， $\varphi' = \tan^{-1}[(y-y_0)/(x-x_0)]$ 分别表示在 $Oxyz$ 坐标系下的场点半径和相位，坐标系中几何关系见图 2.3，其余的参数同式（2.1）。与正入射不同，由于柱波的原点不在坐标系原点，式（2.10）中的柱波表达式无法运用柱波函数展开法得到球坐标系下的表达式。为了求得任意入射下的入射波表达式，首先通过球谐展开来求解入射波系数，也称波形系数（Beam-shape coefficients）。根据球谐展开的思想，任意函数都可以展开为

$$\Phi_B(r, \theta, \phi) = \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} \times j_n(kr) Y_{nm}(\theta, \varphi) \quad (2.11)$$

展开系数函数 a_{nm} 为

$$a_{nm} = \frac{1}{\Phi_0 j_n(kr)} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \Phi_B(r, \theta, \phi) Y_{nm}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.12)$$

其中 $Y_{nm}(\theta, \varphi)$ 表示球谐函数， $Y_{nm}^*(\theta, \varphi)$ 表示其复共轭。球谐函数的表达式为

$$Y_{nm}(\theta, \varphi) = \xi_{nm} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (2.13)$$

式中，归一化系数 $\xi_{nm} = [(2n+1)(n-m)!]^{1/2} [4\pi(n+m)!]^{-1/2}$ ，球谐函数的共轭只需将（2.13）中的指数函数变为 $e^{-im\varphi}$ ，即 $Y_{nm}^*(\theta, \varphi) = \xi_{nm} P_n^m(\cos \theta) e^{-im\varphi}$ 。若求得球谐函数展开系数 a_{nm} ，便可根据公式（2.11）求得任意位置入射时的 Bessel 波函数。通过观察，

将式(2.10)直接代入(2.12)并不能直接得到期望的入射波函数表达式,因此为推导求得入射波函数,需引入柱贝塞尔函数的平移叠加定理^[157],具体如下

$$J_M(k_r R') e^{iM\varphi'} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\sigma_0) J_{l+M}(\sigma) e^{i(l+M)\varphi} e^{-il\varphi_0} \quad (2.14)$$

式中, $\sigma_0 = k_r R_0$, $R_0 = \sqrt{(x_0^2 + y_0^2)}$, $\varphi_0 = \tan^{-1}(y_0/x_0)$, $\sigma = k_r R$, $R = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ 和 $\varphi = \tan^{-1}(y/x)$ 。将公式(2.14)代入到式(2.10),得

$$\Phi_B = \Phi_0 i^M e^{ik_z(z-z_0)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\sigma_0) J_{l+M}(\sigma) e^{i(l+M)\varphi} e^{-il\varphi_0} \quad (2.15)$$

将上式及球谐函数的共轭展开式代入到式(2.12),并将对轴角 θ 和方位角 φ 的积分分别整理得到如下表达式

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \frac{1}{\Phi_0 j_n(kr)} \times \\ &\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \Phi_0 i^M e^{ik_z(z-z_0)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\sigma_0) J_{l+M}(\sigma) e^{i(l+M)\varphi} e^{-il\varphi_0} \xi_{nm} P_n^m(\cos\theta) e^{-im\varphi} \sin\theta d\theta d\varphi \quad (2.16) \\ &= \frac{i^M}{j_n(kr)} \xi_{nm} \int_{\theta=0}^{\pi} e^{ik_z(z-z_0)} P_n^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\sigma_0) J_{l+M}(\sigma) e^{i(l+M-m)\varphi} e^{-il\varphi_0} d\varphi \end{aligned}$$

上式当且仅当 $l+M-m=0$ (即 $l=m-M$)时,对 $d\varphi$ 积分才有值。用 M, m 替换式(2.16)中的 l ,可得

$$a_{nm} = \frac{2\pi i^M}{j_n(kr)} \xi_{nm} \int_{\theta=0}^{\pi} e^{ik_z(z-z_0)} P_n^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta \times J_{m-M}(\sigma_0) J_m(\sigma) e^{-i(m-M)\varphi_0} \quad (2.17)$$

为了进一步对轴角 θ 积分,首先将式(2.17)柱坐标系(R, z, φ)中的部分物理参数在球坐标系(r, θ, φ)下表示,有 $e^{ik_z z} = e^{i(ikr \cos\beta \cos\theta)}$, $J_m(\sigma) = J_m(kr \sin\beta \sin\theta)$,代入上式整理得

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \frac{2\pi i^M e^{-ik_z z_0}}{j_n(kr)} \xi_{nm} J_{m-M}(\sigma_0) e^{-i(m-M)\varphi_0} \times \\ &\int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \sin\theta e^{i(ikr \cos\beta \cos\theta)} P_n^m(\cos\theta) J_m(kr \sin\beta \sin\theta) \quad (2.18) \end{aligned}$$

为了最终求解入射系数,引入定理^[158]

$$\int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \sin \theta e^{ikr \cos \beta \cos \theta} P_n^m(\cos \theta) J_m(kr \sin \beta \sin \theta) = 2i^{n-m} P_n^m(\cos \beta) j_n(kr) \quad (2.19)$$

该定理给出了对连带勒让德函数，指数函数和柱贝塞尔函数混合乘积在角度微元上进行积分的理论解。将 (2.19) 代入到 (2.18)，可得入射波系数^[82]

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \frac{2\pi i^M e^{-ik_z z_0}}{j_n(kr)} \xi_{nm} J_{m-M}(\sigma_0) e^{-i(m-M)\phi_0} \times 2i^{n-m} P_n^m(\cos \beta) j_n(kr) \\ &= 4\pi \xi_{nm} i^{n-m+M} P_n^m(\cos \beta) \times e^{-ik_z z_0} J_{m-M}(\sigma_0) e^{-i(m-M)\phi_0} \end{aligned} \quad (2.20)$$

将入射波系数代入到式 (2.11)，可得到任意阶 Bessel 波任意入射方向下的速度势表达式

$$\Phi_B(r, \theta, \varphi) = \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{4\pi \xi_{nm} i^{n-m+M} P_n^m(\cos \beta) e^{-ik_z z_0} J_{m-M}(\sigma_0) e^{-i(m-M)\phi_0}}{j_n(kr) Y_{nm}(\theta, \varphi)} \times \right) \quad (2.21)$$

上式在正入射时退化为式 (2.4)。同样，根据散射定理，可知球形目标的散射速度势在任意入射方向下的理论解为

$$\Phi_s(r, \theta, \varphi) = \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{4\pi \xi_{nm} i^{n-m+M} P_n^m(\cos \beta) e^{-ik_z z_0} J_{m-M}(\sigma_0) e^{-i(m-M)\phi_0}}{A_n h_n^{(1)}(kr) Y_{nm}(\theta, \varphi)} \times \right) \quad (2.22)$$

此处应注意， A_n 表示球形目标散射的分波系数，因其与无量纲频率，球形目标的边界条件和材料参数有关，而与入射波的类型和性质无关，故其具体表达式的推导和求解，与 2.2 节正入射时一致。 a_{nm} 表示入射波的波形系数，其表征将入射波分解为各个球谐分波的集合。（注意，正入射时散射场只与分波序列指数 n 有关，与相位指数 m 无关，而任意入射时散射场既与 n 相关，也与 m 相关。主要原因是，正入射时，入射波与球形目标均根据相位角旋转对称，而任意入射打破了相位角对称性，需考虑相位信息。）上述两节给出了 Bessel 波正入射和任意入射在球形目标上时散射场的理论解，但对非球形目标，上述理论解表现出了其局限性。实际工程中，非球形目标，如椭球，柱球组合体，超椭球等比较常见，因此提出研究 Bessel 波作用在非球形目标上的散射场计算和研究非常有必要。接下来，详细说明用数值模型来探讨该类型问题。

2.4 基于 T 矩阵法声散射数值模型研究

2.4.1 Neumann 和 Dirichlet 边界条件下的转化矩阵

2.4.1.1 散射问题的积分表达式

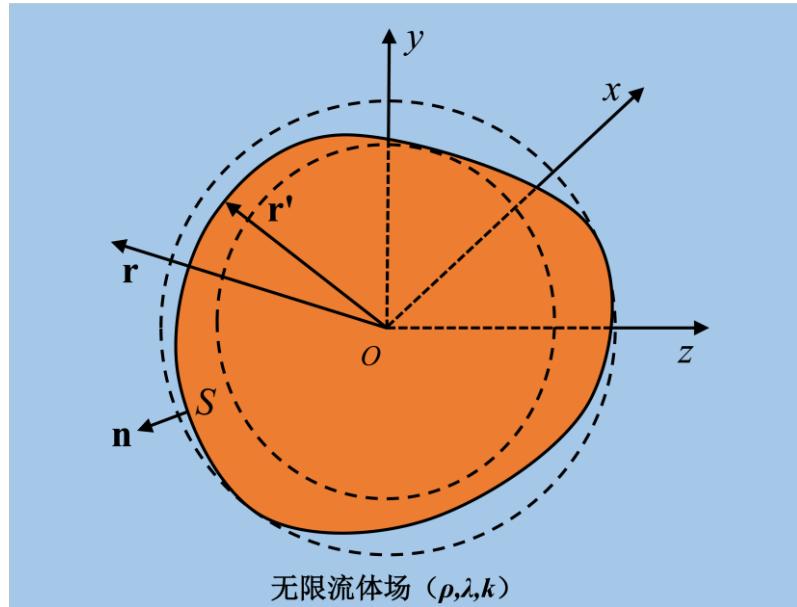


图 2.4 不可穿透散射体（刚性或柔性边界条件）的散射模型

考虑一个任意形状声不可透的散射体计算模型，如图 2.4 所示。散射体中心定义为坐标系原点 O ，散射体表面定义为 S ，表面上的场点定义为 \mathbf{r}' ，任意散射场点定义为 \mathbf{r} ，表面连续变化的外向单位法向量定义 \mathbf{n} 。图中虚线圆分别描述了散射体的最大内切球和最小外接球示意图。对不可穿透的散射体，散射体内部不存在声场的传播，故只有周围理想流体介质中存在声场，可以用标量速度势来描述整个声场。根据线性波动方程，采用分离变量法可以将速度势分解为时间部分和空间部分。分离上述速度势的时间因子 $e^{-i\omega t}$ ，则其空间部分满足标量 Helmholtz 方程。理想流体介质中入射场 $\Phi_i(\mathbf{r})$ ，散射场 $\Phi_s(\mathbf{r})$ 以及两者的叠加场（实际声场） $\Phi(\mathbf{r})=\Phi_i(\mathbf{r})+\Phi_s(\mathbf{r})$ 均满足声学 Helmholtz 方程，即

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{pmatrix} \Phi(\mathbf{r}) \\ \Phi_i(\mathbf{r}) \\ \Phi_s(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = 0 \quad (2.23)$$

上式中， \mathbf{r} 表示任意场点矢量， k 表示流体中声传播的波数。若流体介质中存在声源，则第一个式子等号右边不为零。本文考虑的声散射问题，除了散射体外计算域中均不包含其它声源。格林函数 $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 是 Helmholtz 方程的解，

$$(\nabla^2 + k^2)g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.24)$$

其描述的是：存在一个 \mathbf{r}' 处的点源产生的在任意场点 \mathbf{r} 处的散射场。本文计算散射的数值模型中，点源分布在散射体表面 S 上。上式中的解为

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)/(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (2.25)$$

因为考虑散射数值模型的计算域中不存在声源，故对散射场来说，(2.23) 中对任意分布在散射体表面 S 的外部体积域中均成立。对入射场来说，根据惠更斯原理，散射体表面成为了二次声源，因此对于散射体表面 S 的内部体积域均成立。将格林函数的 Helmholtz 方程以及声场的 Helmholtz 方程经过代数运算并在体积域上积分，再利用高斯定理，将声场体积域积分转为散射体表面积分，整理可得到 Helmholtz 积分表达式^[6,84]

$$\Phi_i(\mathbf{r}) + \int_S [\Phi_+ \mathbf{n} \cdot \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - (\mathbf{n} \cdot \nabla_+ \Phi) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dS = \begin{cases} \Phi(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \text{ 在 } S \text{ 外部} \\ 0 & \mathbf{r} \text{ 在 } S \text{ 内部} \end{cases} \quad (2.26)$$

该过程实际上与格林定理吻合。其中， Φ_+ 和 $\mathbf{n} \cdot \nabla_+ \Phi$ 分别表示散射体表面的总速度势和速度的法向分量， $+$ 号表示从散射体外部流体域指向散射体表面。上式中，第一个公式是 Helmholtz-Poincare 公式，其实质是基于惠更斯原理来表明散射场 $\Phi_s(\mathbf{r})$ 是由散射体表面被入射声场激发的的二次声源所产生。第二个公式是零场方程，也称扩展边界条件，其指明散射体内部的声场总和为零。 T 矩阵法的核心思想是将已知的入射场，未知的散射体表面场，格林函数和待求的散射场在球坐标系（三维情况）或者柱坐标系（二维情况）下的基波函数展开，并通过边界条件最终求得转换矩阵的具体表达式。本文仅考虑三维散射的情况，下文将引入基波函数和边界条件，来推导求解转换矩阵。

2.4.1.2 球坐标系下的基波函数及场量展开式

通常在球坐标系下，将归一化后的球谐函数 $Y_{nm\sigma}(\theta, \varphi)$ 作为基波函数来将展开声场，包括入射场，散射场，散射体表面场以及格林函数。T 矩阵法中通常定义基波函数 $\Phi_{nm\sigma}$

$$\Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}) = \xi'_{nm} h_n^{(1)}(kr) P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos(m\varphi), & \sigma=e \\ \sin(m\varphi), & \sigma=o \end{cases} \quad (2.27)$$

其中归一化系数

$$\xi'_{nm} = \left(\varepsilon_m \frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!} \right)^{1/2} \quad (2.28)$$

其中 $h_n^{(1)}(kr)$ 表示第一类球汉克尔函数， $P_n^m(\cos \theta)$ 表示连带勒让德函数， $\sigma=e,o$ 指明方位角指数的奇偶性，其中 e 表示方位角取偶， o 表示方位角取奇， $m=0,1,2,\dots,n$ 指明方位角阶数，非零整数 n 指明球谐波函数的阶数，也叫分波阶数。需要注意，上述球谐函数归一化系数 ξ'_{nm} 中有一个 Neumann 系数 ε_m 满足 $\varepsilon_m=2-\delta_{m0}$ 。 δ_{m0} 表示 Delta 函数，有 $\delta_{00}=1$ ，其余 $\delta_{m0}=0$ 。该定义实质上与 (2.3) 小节中的归一化系数 ξ_{nm} 定义一致，Neumann 系数的引入是因为和 (2.3) 节中求和符号对 m 求和区间为 $[-n, n]$ 相比，T 矩阵方法中经常根据旋转对称性和勒让德多项式的性质，将求和符号中 m 的取值区间设为 $[0, n]$ ，故多了一个 Neumann 系数 ε_n 。经过推导和验算，T 矩阵法中若对整数 m 取值区间为 $[-n, n]$ ，则不需要额外增加 Neumann 系数 ε_m ，但此时需要注意，编写程序时 m 取正值和负值时勒让德函数应该要区别求解，因 Matlab 语言中只封装了 m 取非负值的勒让德函数。 m 取负值时可根据勒让德函数的性质编程求解（见附录 II）。特别说明，T 矩阵法在求解旋转对称目标的散射问题时正确且高效，通过推导以及观察，通常采用欧拉公式 $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ 将指数函数表示成三角函数组合的复数形式，该思想主要来源于量子力学理论，方便实际求解中根据对称性，利用三角函数的正交性，以及三角函数与球谐函数（或连带勒让德函数）积分的性质，来简化推导过程和数值编程。

在给定的基波函数下，可以将入射场，散射场，格林函数以及散射体表面的未知

场展开成系数与基波函数的乘积形式。需要注意，入射声场在坐标原点的声场是有限的，而第一类球汉克尔函数 $h_n^{(1)}(kr)$ 在原点处奇异（实际上是第二类球贝塞尔函数 $y_n(kr)$ 在原点处奇异），因此不能直接用（2.27）的基波函数展开入射波，需要将基波函数中的第一类球汉克尔函数 $h_n^{(1)}(kr)$ 用第一类球贝塞尔函数 $j_n(kr)$ 替换，生成入射场的完备基波函数 $\text{Re}\phi_{nm\sigma}$ 。入射场和散射场分别在各自的完备基波函数展开为

$$\Phi_i(\mathbf{r}) = \sum_{nm\sigma} a_{nm\sigma} \text{Re}\Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}) \quad (2.29)$$

$$\Phi_s(\mathbf{r}) = \sum_{nm\sigma} s_{nm\sigma} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}) \quad (2.30)$$

其中， $\sum_{nm\sigma}$ 表示 $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma}$ ， $a_{nm\sigma}$ 表示已知的入射波系数， $s_{nm\sigma}$ 表示未知待求的散射波系数。此处散射系数采用符号 $s_{nm\sigma}$ 而不是传统 T 矩阵法中的符号 $f_{nm\sigma}$ ，是为了与上节理论方法推导过程中使用的散射系数一致。需要注意，基于基波函数展开后，当 \mathbf{r} 在 S 外部时，积分表达式（2.26）适用于散射体最小外接球外面的场点，但根据分析问题域的连续性，积分表达式可以在散射体外表面任何场点处成立。同样，当 \mathbf{r} 在 S 内部时，积分表达式可以在散射体内部任何场点处成立，而不仅仅在最大内切球内成立。同时，该基波函数能够保证散射场自动满足远场辐射条件（也称 Sommerfeld 辐射条件）。

此外，格林函数 $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 可以根据基波函数双正交展开为^[85]

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{nm\sigma} ik\Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}_>) \text{Re}\Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}_<) \quad (2.31)$$

上式中 $\mathbf{r}_> = \max(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 表示取场点 \mathbf{r} 和散射体表面点 \mathbf{r}' 中的较大者， $\mathbf{r}_< = \min(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 表示取场点 \mathbf{r} 和散射体表面点 \mathbf{r}' 中的较小者。目前，联系入射系数 $a_{nm\sigma}$ 和散射系数 $s_{nm\sigma}$ 的转换矩阵还无法求解，故需要引入表面场的边界条件以及表面场的展开式。

2. 4. 1. 3 边界条件及转换 (T) 矩阵

上述给出的方程无法推导求解转化矩阵，还需要引入新的约束条件，因此通过引入边界条件，来给出关于表面场速度势或速度法向分量的约束条件。当散射体满足 Neumann 边界条件，也称刚性边界条件，满足

$$\mathbf{n} \cdot \nabla_{+} \Phi_{+}(\mathbf{r}') = 0 \quad (2.32)$$

刚性边界条件表明：散射体表面的速度法向分量与接触的流体中速度的法向分量均为零。此时，散射体表面未知场的速度势 $\Phi_{+}(\mathbf{r})$ 根据完备基波函数可展开为^[159]

$$\Phi_{+}(\mathbf{r}') = \sum_{nm\sigma} \alpha_{nm\sigma} \operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}') \quad (2.33)$$

其中， $\alpha_{nm\sigma}$ 表示未知表面场的展开系数。将上式，边界条件表达式以及入射场展开式 (2.29) 代入积分表达式 (2.26) 第二式，此时有 $\mathbf{r}_{<} = \mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}_{>} = \mathbf{r}'$ ，

$$\sum_{nm\sigma} a_{nm\sigma} \operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}) + \int_S \sum_{nm\sigma} \alpha_{nm\sigma} \operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left[\sum_{nm\sigma} ik \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}') \operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}) \right] dS = 0 \quad (2.34)$$

同时，将散射场展开式 (2.30) 代入积分表达式 (2.26) 第一式，此时有 $\mathbf{r}_{<} = \mathbf{r}'$ 和 $\mathbf{r}_{>} = \mathbf{r}$ ，

$$\int_S \sum_{nm\sigma} \alpha_{nm\sigma} \operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left[\sum_{nm\sigma} ik \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}) \operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}') \right] dS = \sum_{nm\sigma} s_{nm\sigma} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}) \quad (2.35)$$

整理式 (2.34) 和 (2.35)，消去未知表面场展开系数 $\alpha_{nm\sigma}$ 可得入射波形系数 \mathbf{a} (或 $a_{nm\sigma}$) 和散射波形系数 \mathbf{s} (或 $s_{nm\sigma}$) 的矩阵形式：

$$\mathbf{s} = \mathbf{T} \mathbf{a} \quad (2.36)$$

其中，转换矩阵为 $\mathbf{T} = -\operatorname{Re} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{-1}$ 。 \mathbf{Q} 矩阵中以表面积分形式给出的元素 $Q_{nm\sigma, n'm'\sigma'}$ 表达式为

$$Q_{nm\sigma, n'm'\sigma'} = \int_S \operatorname{Re} \Phi_{n'm'\sigma'}(\mathbf{r}) \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}) dS \quad (2.37)$$

将基波函数的表达式 (2.27) 代入上式，便可求得 $Q_{nm\sigma, n'm'\sigma'}$ 的具体表达式，方便编程进行数值计算，将在计算部分具体给出和讨论。

当散射体满足 Dirichlet 边界条件，也称柔性边界条件，有

$$\Phi_{+}(\mathbf{r}') = 0 \quad (2.38)$$

柔性边界条件表明：散射体表面以及接触的流体中速度势均为零。此时，散射体表面未知场的速度势 $\Phi_{+}(\mathbf{r})$ 的法向导数根据基波函数可展开为^[6]

$$\frac{\partial}{\partial n} \Phi_{+}(\mathbf{r}') = \frac{\partial}{\partial n} \sum_{nm\sigma} \beta_{nm\sigma} \operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}') \quad (2.39)$$

实际上，未知场的展开表达式是任意的，但为了计算方便，选择将未知表面场的法向梯度基于完备基波函数展开。与刚性边界条件推导转换矩阵过程类似，将边界条件，入射场和散射场展开式分别代入可得积分表达式（2.26），分别有

$$\sum_{nm\sigma} a_{nm\sigma} \operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}) + \int_S \left[-\sum_{nm\sigma} ik \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}') \operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} \sum_{nm\sigma} \beta_{nm\sigma} \operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}') \right] dS = 0 \quad (2.40)$$

$$\int_S \left[-\sum_{nm\sigma} ik \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}) \operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \sum_{nm\sigma} \beta_{nm\sigma} \operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}') \right] dS = \sum_{nm\sigma} s_{nm\sigma} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}) \quad (2.41)$$

整理式（2.40）和（2.41），消去未知表面场展开系数 $\beta_{nm\sigma}$ 可求得入射系数和散射系数的矩阵形式（2.36），其转换矩阵仍为 $\mathbf{T} = -\operatorname{Re} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{-1}$ ，其中 \mathbf{Q} 矩阵元素的表达式为

$$Q_{nm\sigma, n'm'\sigma'} = \int_S \Phi_{n'm'\sigma'}(\mathbf{r}) \mathbf{n} \cdot \nabla \operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}) dS \quad (2.42)$$

通过推导可知，Neumann 和 Dirichlet 边界条件下，根据边界条件不同，散射体表面未知场的展开形式也相应发生变化，见式（2.33）和（2.39）。但散射体基于 \mathbf{Q} 矩阵的转换矩阵 \mathbf{T} 有相同的表达形式。对具体的边界条件， \mathbf{Q} 矩阵的元素 $Q_{nm\sigma, n'm'\sigma'}$ 表达形式不同。因此在数值编程过程中，只需要修改 $Q_{nm\sigma, n'm'\sigma'}$ 表达式中相应的一部分，便可将计算刚性散射体的程序扩展到计算柔性目标的散射。

2.4.2 弹性边界条件转换矩阵

考虑无限域理想流体介质中一个包含空腔的任意形状弹性散射体，如图 2.5 所示。当空腔消失时，目标退变为实心弹性散射体，故本节采用相对来说较为通用的计算模型推导，可以解决基于 \mathbf{T} 矩阵法的弹性实心和壳体声散射问题。散射体中心定义为坐标系原点 O ，散射体外表面定义为 S ，内表面定义为 S_0 ，外表面 S 上的点定义为 \mathbf{r}' ，任意散射场点定义为 \mathbf{r} ，外表面 S 连续变化的外向单位法向量定义为 \mathbf{n} ，内表面 S_0 连续变化的外向单位法向量定义为 \mathbf{n}_0 ，虚线表示弹性体最小外接球的二维示意图。线性均质弹性材料中，定义密度为 ρ ， λ_0 和 μ_0 表示拉梅系数（分别描述弹性材料的体积和剪切模量）， k_p 和 k_s 表示纵向和横向波数。纵向波数满足 $k_p = \rho_0 \omega^2 / (\lambda_0 + 2\mu_0)$ ，横向波数满足 $k_s = \rho_0 \omega^2 / \mu_0$ ， ω 表示入射波的圆频率。理想流体介质中 ρ, λ, k 分别表示

介密度，拉梅系数和流体介质中的波数。不同于声不可透目标，声波可以穿过散射体与流体之间的界面，在弹性散射体内部传播。由于标量速度势只能描述外部流体介质场，而无法单独使用来描述散射体的内部声场，因此本节推导弹性目标的转换矩阵将用位移场 \mathbf{U} 来统一描述弹性场及弹性场所处的理想流体场。在弹性场中，根据 Helmholtz 定理，声波在弹性介质传播过程中，位移场可以分解为无旋的标量势函数 Φ 与无源的矢量势函数 Ψ 的叠加形式 $\mathbf{U} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi$ ，其中有 $\nabla \times \Phi = 0$ 和 $\nabla \cdot \Psi = 0$ ^[160]。在下文推导过程中，因为所有场量均包含相同的时谐因子 $e^{-i\omega t}$ ，故本节推导过程中将其均省略。

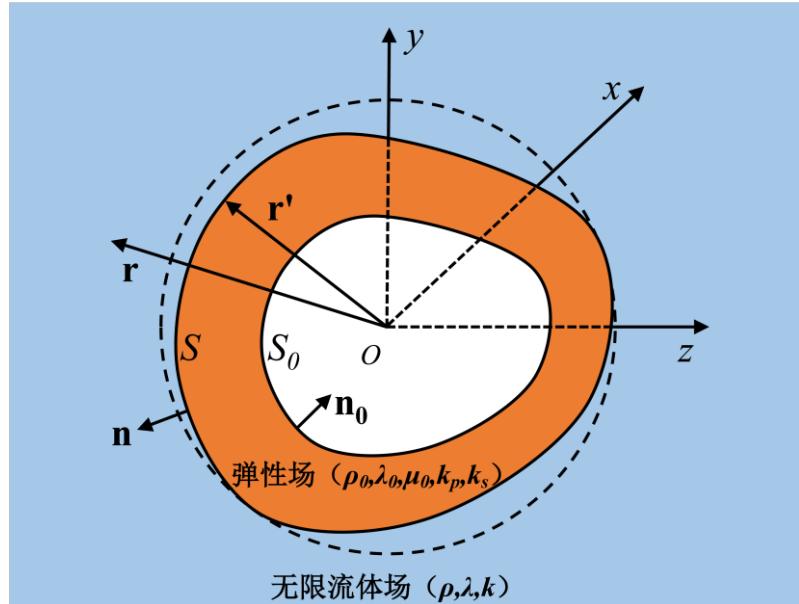


图 2.5 弹性（壳）体的几何散射模型

2. 4. 2. 1 积分表达式

Pao 和 Varatharajulu^[19]根据弹性场的运动方程和格林位移张量，通过代数运算以及对体积域积分，运用散度定理，给出了各向同性介质内弹性波的积分表达式。基于弹性波的积分表达式，Bostrom 进一步推导了浸没在流体介质中的弹性体的积分表达式^[24,26]。不同于刚性和柔性边界条件下的积分表达式，弹性散射体浸没在流体中的积分表达式更为复杂，但实际推导流程同刚（柔）性边界条件类似，只是弹性边界条件是根据位移场的运动方程和高阶格林位移（应力）张量来推导。流体场和弹性内部场基于位移的积分表达式分别为

$$\mathbf{U}_i + k \int_S [\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_+ (\nabla \cdot \mathbf{G}) - \nabla \cdot \mathbf{U}_+ \mathbf{n} \cdot \mathbf{G}] dS = \begin{cases} \mathbf{U} & \mathbf{r} \text{在 } S \text{ 外部} \\ 0 & \mathbf{r} \text{在 } S \text{ 内部} \end{cases} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{k_s}{\mu_0} \int_S [\mathbf{U}_- \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0) - \mathbf{t}_- \cdot \mathbf{G}_0] dS + \frac{k_s}{\mu_0} \int_{S_0} [\mathbf{U}_+ \cdot (\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0) - \mathbf{t}_+^0 \cdot \mathbf{G}_0] dS \\ & = \begin{cases} \mathbf{U} & \mathbf{r} \text{ 在 } S \text{ 和 } S_0 \text{ 之间} \\ 0 & \mathbf{r} \text{ 在 } S \text{ 外部或 } S_0 \text{ 内部} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.44)$$

上式中，位移 \mathbf{U} 和外表面法向应力张量 \mathbf{t} 上的加号表示从 S 外部流体介质中趋近外表面，减号表示从 S 内部弹性介质中趋近外表面。 \mathbf{t}_+^0 表示内表面 S_0 的法向应力张量。 \mathbf{G} 和 \mathbf{G}_0 分别表示流体介质和弹性体中自由空间格林位移张量， $\boldsymbol{\Sigma}_0$ 表示弹性体的格林表面应力张量， $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0$ 表示其法向分量。弹性体应力张量的法向分量 \mathbf{t} 与位移向量 \mathbf{U} 的关系式为

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{U}) &= \mathbf{n} \lambda_0 \nabla \cdot \mathbf{U} + 2\mu_0 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} + \mu_0 \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{U}) \\ &= \mathbf{n} \cdot [\lambda_0 (\nabla \cdot \mathbf{U}) \mathbf{I} + \mu_0 (\nabla \mathbf{U} + \mathbf{U} \nabla)] \end{aligned} \quad (2.45)$$

上式中，中括号里的表达式即为弹性体应力张量的数学表述。内表面 \mathbf{t}_+^0 的表达式只需将上式中外表面的单位法向量 \mathbf{n} 替换成内表面的单位法向量 \mathbf{n}_0 。弹性介质中，格林表面应力张量的法向分量 $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0$ 与格林位移张量 \mathbf{G}_0 的关系，与弹性体应力张量的法向分量 \mathbf{t} 与位移矢量 \mathbf{U} 的关系相同，写作

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0 = \mathbf{t}(\mathbf{G}_0) &= \mathbf{n} \lambda_0 \nabla \cdot \mathbf{G}_0 + 2\mu_0 \frac{\partial \mathbf{G}_0}{\partial n} + \mu_0 \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{G}_0) \\ &= \mathbf{n} \cdot [\lambda_0 (\nabla \cdot \mathbf{G}_0) \mathbf{I} + \mu_0 (\nabla \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \nabla)]; \end{aligned} \quad (2.46)$$

有了场量的积分表达式，还需要将进一步将场量在完备基波函数展开，才能推导联系已知入射系数和未知散射系数的转换矩阵及其具体的表达式。

2.4.2.2 基函数及场量展开式

为了根据边界条件求解积分表达式，需要将相应的场量用合适的基波函数展开。当考虑 Neumann 和 Dirichlet 边界条件下的声传播问题时，只有流体介质中存在纵波传播，而散射体内部不存在声波传播。当考虑理想流体中弹性散射体声传播问题时，

除了流体介质中存在纵波传播以外，声波可以穿过两种介质界面，且纵波在弹性介质中会发生模式转换^[161]，故散射体中存在纵波和横波的传播。为了计算方便，需重新定义基波函数。流体域中的基波函数为^[24]

$$\Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}) = (1/k)\nabla \cdot [h_n^{(1)}(kr)Y_{nm\sigma}(\theta, \varphi)] \quad (2.47)$$

球谐函数的定义与 2.4.3 节式 (2.27) 一致， k 为流体介质中的波数，入射波的完备基波函数 $\text{Re}\Phi_{nm\sigma}$ 需将上式中的第一类汉克尔函数 $h_n^{(1)}(kr)$ 替换成第一类贝塞尔函数 $j_n(kr)$ 。弹性介质中的基波函数为

$$\begin{aligned} \Psi_{1nm\sigma}(\mathbf{r}) &= [n(n+1)]^{-1/2} \nabla \times [\mathbf{r} h_n^{(1)}(k_s r) Y_{nm\sigma}(\theta, \varphi)] \\ &= h_n^{(1)}(k_s r) \mathbf{A}_{1nm\sigma}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{2nm\sigma}(\mathbf{r}) &= (1/k_s) \nabla \times \Psi_{1nm\sigma}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{[k_s r h_n^{(1)}(k_s r)]'}{k_s r} \mathbf{A}_{2nm\sigma}(\theta, \varphi) + [n(n+1)]^{1/2} \frac{h_n^{(1)}(k_s r)}{k_s r} \mathbf{A}_{3nm\sigma}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{3nm\sigma}(\mathbf{r}) &= (k_p/k_s)^{3/2} (1/k_p) \nabla \cdot [h_n^{(1)}(k_p r) Y_{nm\sigma}(\theta, \varphi)] \\ &= \left(\frac{k_p}{k_s} \right)^{3/2} \left(h_n^{(1)}'(k_p r) \mathbf{A}_{3nm\sigma}(\theta, \varphi) + [n(n+1)]^{1/2} \frac{h_n^{(1)}(k_p r)}{k_p r} \mathbf{A}_{2nm\sigma}(\theta, \varphi) \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

其中， $\Psi_{1nm\sigma}$ 和 $\Psi_{2nm\sigma}$ 描述两个横波的基波函数， $\Psi_{3nm\sigma}$ 描述一个纵波的基波函数。求导符号表示对括号内整个变量求导，如 $[k_s r h_n^{(1)}(k_s r)]' = [\text{d}/\text{d}(k_s r)][k_s r h_n^{(1)}(k_s r)]$ 。向量球谐函数分别为

$$\mathbf{A}_{1nm\sigma}(\theta, \varphi) = [n(n+1)]^{-1/2} \nabla \times [\mathbf{r} Y_{nm\sigma}(\theta, \varphi)] \quad (2.51)$$

$$\mathbf{A}_{2nm\sigma}(\theta, \varphi) = [n(n+1)]^{-1/2} r \nabla Y_{nm\sigma}(\theta, \varphi) \quad (2.52)$$

$$\mathbf{A}_{3nm\sigma}(\theta, \varphi) = \bar{\mathbf{r}} Y_{nm\sigma}(\theta, \varphi) \quad (2.53)$$

上面三个向量球谐函数 $\mathbf{A}_{\tau nm\sigma}$ ($\tau = 1, 2, 3$) 构成了单位球上的一组正交完备向量基。其中， r 表示位置矢量 \mathbf{r} 的长度， $\bar{\mathbf{r}}$ 表示位置矢量 \mathbf{r} 的单位向量，即 $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ 。基波函数的散度和旋度算子满足如下性质^[24]：

$$\nabla \cdot \Phi_{\sigma nm} = -kh_n^{(1)}(kr)Y_{\sigma nm}, \quad \nabla \times \Phi_{\sigma nm} = 0 \quad (2.54)$$

$$\nabla \cdot \Psi_{1\sigma nm} = 0, \quad \nabla \times \Psi_{1\sigma nm} = k_s \Psi_{2\sigma nm} \quad (2.55)$$

$$\nabla \cdot \Psi_{2\sigma nm} = 0, \quad \nabla \times \Psi_{2\sigma nm} = k_s \Psi_{1\sigma nm} \quad (2.56)$$

$$\nabla \cdot \Psi_{3\sigma nm} = -\left(k_p/k_s\right)^{3/2} k_p h_n^{(1)}(k_p r) Y_{\sigma nm}, \quad \nabla \times \Psi_{1\sigma nm} = 0 \quad (2.57)$$

式 (2.54) 描述了流体介质中的基波函数的性质, 式 (2.55-57) 描述了弹性散射体中三个基波函数的性质。在给定的基波函数下, 可以将入射场, 散射场, 格林位移张量以及散射体表面的未知场展开成系数与基波函数的乘积形式。流体域和弹性介质中格林位移张量分别展开为

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i \sum_{nm\sigma} \operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}_<) \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}_>) \quad (2.58)$$

$$\mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i \sum_{nm\sigma} \operatorname{Re} \psi_{\tau nm\sigma}(\mathbf{r}_<) \psi_{\tau nm\sigma}(\mathbf{r}_>) \quad (2.59)$$

上式中, $\psi_{\tau nm\sigma}$ 中 $\tau=1, 2, 3$ 分别对应式 (2.48-50), $\operatorname{Re} \psi_{\tau nm\sigma}$ 表示基波函数 $\psi_{\tau nm\sigma}$ 中, 第一类汉克尔函数 $h_n^{(1)}$ 替换成第一类贝塞尔函数 j_n 。 $\mathbf{r}_> = \max(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 表示取场点 \mathbf{r} 和散射体表面 S 上的点 \mathbf{r}' 中的较大者; $\mathbf{r}_< = \min(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 表示取场点 \mathbf{r} 和散射体表面 S 上的点 \mathbf{r}' 中的较小者。

入射场和流体介质中散射场的展开式分别是

$$\mathbf{U}_i = \sum_{nm\sigma} a_{nm\sigma} \operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}) \quad (2.60)$$

$$\mathbf{U}_s = \sum_{nm\sigma} s_{nm\sigma} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}), \quad r > \max_{\mathbf{r}' \in S} r' \quad (2.61)$$

其中, 入射场在坐标原点的声场是有限的, 故用正则化后的基波函数展开。式 (2.61) 中, 散射场在散射体外表面 S 的外部场点展开, 即考虑流体介质中的散射场, 故散射场也是基于流体介质中的基波函数展开。 $\max_{\mathbf{r}' \in S} r'$ 表示散射体外表面上的点距坐标原点最远的距离。根据瑞利假设: 散射场的展开式在目标最小外接球 (虚线圆示意图) 外收敛, 且在目标外表面 S 的任何空间均具有收敛性并能够正确描述散射声场。因此, 该散射场展开式在任意流体介质中均成立, 而不仅仅局限于最小外接球以外的流体中。

将入射场和格林位移张量的展开式代入式 (2.43) 中的零场方程 (第二个公式),

此时 \mathbf{r} 在 S 内部，有 $\mathbf{r}_> = \mathbf{r}'$, $\mathbf{r}_< = \mathbf{r}$ ，整理得

$$a_{nm\sigma} = -ik \int_S [\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_+ \nabla \cdot \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}') - \nabla \cdot \mathbf{U}_+ \mathbf{n} \cdot \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}')] dS \quad (2.62)$$

将散射场 ($\mathbf{U}_s = \mathbf{U} - \mathbf{U}_i$) 和格林位移张量的展开式代入式 (2.43) 中的 Helmholtz-Poincare 公式 (第一个公式)，此时 \mathbf{r} 在 S 外部，有 $\mathbf{r}_> = \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_< = \mathbf{r}'$ ，整理得

$$s_{nm\sigma} = ik \int_S [\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_+ \nabla \cdot \operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}') - \nabla \cdot \mathbf{u}_+ \mathbf{n} \cdot \operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}')] dS \quad (2.63)$$

此外，根据式 (2.44) 中的零场方程，当场点在外表面 S 外部或内表面 S_0 内部时，需分情况讨论。当 \mathbf{r} 在 S 外部时，有 $\mathbf{r}_> = \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_< = \mathbf{r}'$ ，则将格林位移张量 $\mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 的展开式和格林应力张量的法向分量 $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0$ 的关系式代入，整理得

$$\begin{aligned} 0 = & -i \frac{k_s}{\mu_0} \int_S [\mathbf{U}_- \cdot \mathbf{t}(\operatorname{Re} \Psi_{tnm\sigma}) - \mathbf{t}_- \cdot \operatorname{Re} \Psi_{tnm\sigma}] dS \\ & + i \frac{k_s}{\mu_0} \int_{S_0} [\mathbf{U}_+ \cdot \mathbf{t}^0(\operatorname{Re} \Psi_{tnm\sigma}) - \mathbf{t}_+^0 \cdot \operatorname{Re} \Psi_{tnm\sigma}] dS \end{aligned} \quad (2.64)$$

同理，当 \mathbf{r} 在 S_0 内部时，有 $\mathbf{r}_> = \mathbf{r}'$, $\mathbf{r}_< = \mathbf{r}$ ，则将格林位移张量 $\mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 的展开式和格林应力张量的法向分量 $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0$ 的关系式代入，整理得

$$\begin{aligned} 0 = & -i \frac{k_s}{\mu_0} \int_S [\mathbf{U}_- \cdot \mathbf{t}(\Psi_{tnm\sigma}) - \mathbf{t}_- \cdot \Psi_{tnm\sigma}] dS \\ & + i \frac{k_s}{\mu_0} \int_{S_0} [\mathbf{U}_+ \cdot \mathbf{t}^0(\Psi_{tnm\sigma}) - \mathbf{t}_+^0 \cdot \Psi_{tnm\sigma}] dS \end{aligned} \quad (2.65)$$

需要注意，积分表达式 (2.44) 中的 Helmholtz-Poincare 公式并未使用，其只决定弹性体内部的散射场，而本文主要考虑弹性散射体外部流体介质中的声场，故在以下推导过程中并未使用该积分表达式。目前为止，还无法求得联系入射和散射系数的转换矩阵，需要引入边界条件以及根据边界条件将散射体表面的未知场用适当的形式展开。

2.4.2.3 边界条件及表面未知场展开

弹性散射体与流体介质的交界面上满足：(1) 法向位移连续；(2) 法向应力连续；(3) 流体中不存在切向力，故交界面处切向应力为零。与无限域理想流体接触

的外表面 S 上的边界条件可表述为

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_+ = \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_- \quad (2.66)$$

$$\lambda \nabla \cdot \mathbf{U}_+ = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_- \quad (2.67)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{t} = 0 \quad (2.68)$$

此外，弹性壳内表面 S_0 上满足

$$\mathbf{t}_+^0 = 0 \quad (2.69)$$

此处加号表示从空腔趋近内表面 S_0 。将边界条件 (2.66) 代入式 (2.62) 和 (2.63)，则未知表面场 $\nabla \cdot \mathbf{U}_+$ 可展开为

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_+ = k \sum_{nm\sigma} \gamma_{nm\sigma} Y_{nm\sigma}(\theta, \varphi) \quad \text{在外表面 } S \text{ 上} \quad (2.70)$$

将边界条件 (2.67-69) 代入式 (2.64) 和 (2.65)，则未知场 \mathbf{U}_- 和 \mathbf{U}_+ 可展开为

$$\mathbf{U}_- = \sum_{nm\sigma} \alpha_{nm\sigma} \mathbf{A}_{nm\sigma} \quad \text{在外表面 } S \text{ 上} \quad (2.71)$$

$$\mathbf{U}_+ = \sum_{nm\sigma} \beta_{nm\sigma} \mathbf{A}_{nm\sigma} \quad \text{在内表面 } S_0 \text{ 上} \quad (2.72)$$

需要注意，未知表面场的展开式除了上述基于球谐向量基展开外，任何其他的完备向量基均可以作为展开的基波函数，本文选择上文给出的单位球上的完备正交向量基作为展开基波函数。

2.4.2.4 转换 (T) 矩阵

在将已知的入射场，待求的散射场和相关的未知表面场在相应的基波函数展开后，将其代入到整理后的积分表达式，整理成矩阵和向量的形式可得^[24]

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= -i\mathbf{Q}\mathbf{a} + i\mathbf{M}\boldsymbol{\gamma}, \\ \mathbf{s} &= i\text{Re}\mathbf{Q}\mathbf{a} - i\text{Re}\mathbf{M}\boldsymbol{\gamma}, \\ 0 &= -\mathbf{R}\mathbf{a} + \mathbf{P}\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{Q}^0\boldsymbol{\beta}, \\ 0 &= -\text{Re}\mathbf{R}\mathbf{a} + \text{Re}\mathbf{P}\boldsymbol{\gamma} + \text{Re}\mathbf{Q}^0\boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (2.73)$$

其中，上述矩阵的具体元素表达式为

$$Q_{nm\sigma, \tau'n'm'\sigma'} = k \int_S \nabla \cdot \Phi_{nm\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_{\tau'n'm'\sigma'} dS \quad (2.74)$$

$$M_{nm\sigma, n'm'\sigma'} = k^2 \int_S \mathbf{n} \cdot \Phi_{nm\sigma} Y_{n'm'\sigma'} dS \quad (2.75)$$

$$R_{\tau n m \sigma, \tau' n' m' \sigma'} = \frac{k_s}{\mu_0} \int_S \mathbf{t}(\Psi_{\tau n m \sigma}) \cdot \mathbf{A}_{\tau' n' m' \sigma'} dS \quad (2.76)$$

$$P_{\tau n m \sigma, n' m' \sigma'} = \frac{\lambda}{\mu_0} k k_s \int_S \mathbf{n} \cdot \Psi_{\tau n m \sigma} Y_{n' m' \sigma'} dS \quad (2.77)$$

$$Q^0_{\tau n m \sigma, \tau' n' m' \sigma'} = \frac{k_s}{\mu_0} \int_{S_0} \mathbf{t}^0(\Psi_{\tau n m \sigma}) \cdot \mathbf{A}_{\tau' n' m' \sigma'} dS \quad (2.78)$$

将上述式子整理，可得到联系已知入射系数 \mathbf{a} 和未知散射系数 \mathbf{s} 的线性关系，即转换矩阵的表达式

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & -[\mathbf{R}\mathbf{Q}(\mathbf{R}\mathbf{E}\mathbf{R} + \mathbf{T}^0\mathbf{R})^{-1}(\mathbf{R}\mathbf{P} + \mathbf{T}^0\mathbf{P}) - \mathbf{R}\mathbf{M}] \\ & \times [\mathbf{Q}(\mathbf{R}\mathbf{E}\mathbf{R} + \mathbf{T}^0\mathbf{R})^{-1}(\mathbf{R}\mathbf{P} + \mathbf{T}^0\mathbf{P}) - \mathbf{M}]^{-1} \end{aligned} \quad (2.79)$$

上式中， \mathbf{T} 矩阵的元素 $T_{\tau n m \sigma, \tau' n' m' \sigma'}$ 将入射和散射系数的关系关联为：

$s_{n m \sigma} = T_{n m \sigma, n' m' \sigma'} a_{n' m' \sigma'}$ 。矩阵前面的符号 $\mathbf{R}\mathbf{E}$ 表示具体的矩阵元素中应用正则化后的基波代替外向波进行计算，即将基波函数中的 $h_n^{(1)}$ 替换成 j_n 。此外，弹性体内部空腔对应的转换矩阵为

$$\mathbf{T}^0 = -\mathbf{R}\mathbf{E}\mathbf{Q}^0(\mathbf{Q}^0)^{-1} \quad (2.80)$$

实际上，空腔部分可以是任何其它材料的填充物，只要矩阵 \mathbf{T}^0 可以求出，便可以根据式 (2.79) 求解整个弹性目标的转换矩阵。代入关系式 $\mathbf{s} = \mathbf{T}\mathbf{a}$ 中，便可求得考虑的弹性目标的散射场。此外，当不存在空腔时，弹性体退化成实心体，此时内部转换矩阵 $\mathbf{T}^0 = 0$ 。部分用于推导 \mathbf{T} 矩阵中子矩阵在球坐标系下的具体表达式见附录 IV。本文将重点考虑弹性实心体和内部为空腔的弹性壳体目标的声散射研究。

2.4.3 基于 \mathbf{T} 矩阵法 Bessel 波入射波形系数

\mathbf{T} 矩阵法在声学领域的研究，大部分集中在平面波的散射特性方面，而对非平面波的散射特性以及相应的声辐射力和力矩的研究相对较少。根据上述推导， \mathbf{T} 矩阵法是一种半解析半数值方法，“半解析”源于 \mathbf{T} 矩阵法公式基于严格的理论推导，并没有采用近似方法或者假设条件；“半数值”主要体现在两方面：一是表面积分需要采用数值积分，二是转换矩阵和入射/散射系数矩阵需要在有限值处截断。 \mathbf{T} 矩阵的主要

思想主要是将已知的入射场，待求的散射场以及未知的表面场在合适的基波函数展开后，根据边界条件推导出联系入射系数和散射系数线性关系的转换矩阵。根据上述推导可知，转换矩阵仅与散射体的性质（如材料参数、散射体尺寸大小、几何形状和位置分布）相关，与入射波无关。因此，若正确求得散射体的转换矩阵，只需要推导不同入射波的入射系数，便可方便地求得不同入射波照射下目标的散射场，而不需要重新求解转换矩阵。本文的重心在于研究 Bessel 波入射下的声场特性，为求得散射场，故需要根据其波形方程（速度势表达式），在基波函数下展开先求解其入射展开系数。

2.4.3.1 基于球谐函数叠加定理求解普通 Bessel 波入射系数

根据 2.2 节的理论推导可知，考虑波轴过坐标系原点的任意阶 Bessel 入射时，其 Bessel 波速度势在原点的展开式为

$$\Phi_B = \Phi_0 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (2n+1) i^n j_n(kr) P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \beta) e^{im\varphi} \quad (2.81)$$

本文中，基于 T 矩阵法求得入射系数的基波函数统一选择为

$$\operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma}(\mathbf{r}) = \xi'_{nm} j_n(kr) P_n^m(\cos \theta') \begin{cases} \cos(m\varphi'), & \sigma = e \\ \sin(m\varphi'), & \sigma = o \end{cases} \quad (2.82)$$

此处归一化系数采用 ξ'_{nm} 表明 m 取值为 $[0, n]$ 。其中， θ' 和 φ' 分别描述基波函数的轴角和方位角。为了便于理解和重新推导，入射波矢量的夹角和方位角分别为 θ 和 φ ，定义入射波矢量和基波函数场点之间的夹角为 γ ，如图 2.6 所示。

根据 T 矩阵思想，需要将入射波在基波函数上展开，也就是将入射波速度势分解成入射系数与基波函数的乘积形式，即

$$\Phi_B = a_{nm\sigma} \times \operatorname{Re} \Phi_{nm\sigma} \quad (2.83)$$

因此，需要将入射波速度势中包含角度关系的表达式展开成乘积形式，这里引入勒让德多项式 $P_n(\cos \gamma)$ 的叠加定理^[154]

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') \cos m(\varphi - \varphi') \quad (2.84)$$

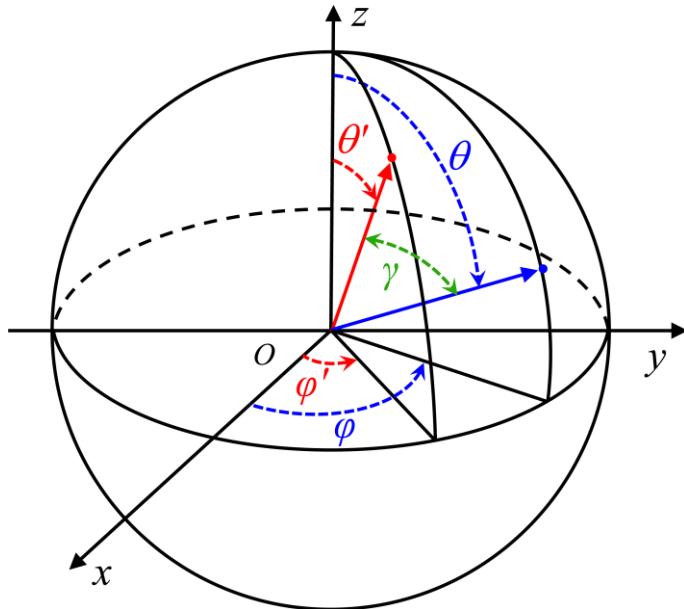


图 2.6 角度关系几何模型

其中， ε_m 表示 Neumann 系数。考虑普通 Bessel 波（拓扑荷数为 0）的情况下，有

$$\Phi_{B0} = \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(kr) P_n(\cos \gamma) P_n(\cos \beta) \quad (2.85)$$

将式 (2.84) 代入上式并与式 (2.82) 作比较，可推导得出此时零阶 Bessel 波的入射系数为

$$a_{nm\sigma} = 4\pi \xi_{nm} i^n \times P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \beta) \begin{cases} \cos(m\varphi), & \sigma = e \\ \sin(m\varphi), & \sigma = o \end{cases} \quad (2.86)$$

注意，该入射系数表达式可以用来求解零阶 Bessel 波轴线过散射体中心（坐标原点）的情况，包括正入射 $\theta=0^\circ$ 和其它方向入射。在 2.2 节中推导的理论方法中，因为球形目标具有任意对称性，入射波和散射体总有共同的旋转轴，故散射场与入射轴角无关。当考虑非球状目标的散射时，此时散射体和入射波的旋转轴可能不重合，因此散射场与入射波轴角有关，具体讨论将在后续章节具体计算和分析。

通过观察，若想用同样的思路将高阶漩涡 Bessel 波（拓扑荷数大于 0）的表达式基于基波函数 (2.82) 展开，需要将连带勒让德函数展开成乘积性质。遗憾的是，目前并没有发现合适的叠加定理来将高阶速度势分解成入射系数和基波函数的乘积形式。为了克服该思路求解高阶 Bessel 波散射的局限性，下面进一步基于多极展开求解

任意入射下任意阶 Bessel 波的入射系数。

2.4.3.2 基于多极展开法求解任意阶 Bessel 波入射系数

2.3 小节详尽推导了基于多极展开法求解入射系数的理论解过程，需要注意，推导过程中采用了和 2.4.3.1 节中相同的基波函数，但因需将 m 取值为 $[-n, n]$ ，因此式 (2.82) 中的归一化系数需用 ξ_{nm} 替换，即此时不需要额外增加 Neumann 系数 ε_m 。此时可直接得到基于 T 矩阵法任意入射的任意阶 Bessel 波入射系数表达式

$$a_{nm} = 4\pi \xi_{nm} i^{n-m+M} P_n^m(\cos \beta) \times e^{-ik_z z_0} J_{m-M}(\sigma_0) e^{-i(m-M)\phi_0} \quad (2.87)$$

其中， M 表示 Bessel 波的拓扑荷数。因上式采用严格的理论推导过程，在推导过程中并不存在任何局限性，故可适用于普通和高阶漩涡 Bessel 波的情况。此外，根据第三章关于声辐射力和力矩的推导，该表达式可以直接扩展到求解力和力矩，这对实际工程应用具有巨大作用和重要意义。

2.5 T 矩阵与分波系数的联系

上述 2.2-2.4 节分别给出了声散射和 T 矩阵法的理论公式推导，其核心都是围绕入射波和散射波的速度势波形系数表达式以及它们之间的线性联系。在分波序列法中联系球形目标散射场 (s_{nm}) 和入射场 (a_{nm}) 之间的关系，根据 2.2 和 2.3 节的推导，在任意入射时有 $s_{nm} = A_n a_{nm}$ 。其中，分波系数 A_n 与散射系数 s_n 的关系为

$$A_n = \frac{s_n - 1}{2} \quad (2.88)$$

注意，分波系数 A_n 只与散射体的性质相关，与入射波的入射方向无关。由于球形目标具有方位角对称性，故 A_n 与方位角指数 m 无关。当 Bessel 波正入射时，入射波关于球心（坐标原点）同样具有方位角对称性，此时入射波形系数 a_{nm} 和散射系数 s_{nm} 均与方位角指数 m 无关。但当 Bessel 波偏轴入射时，此时入射波关于球心（坐标原点）不再具有方位角对称性，此时入射和声散射系数与方位角指数 m 相关，故 a_{nm} 和 s_{nm} 的下标由分波和方位角指数共同决定。

T 矩阵法的提出，是为了弥补分波序列法局限于球形目标的散射计算的不足，理论上可以适用于任何形状的散射体。T 矩阵法中，元素之间的关系式为 $s_{nm\sigma} = T_{nm\sigma, n'm'\sigma'} a_{n'm'\sigma'}$ ，下标既包括分波指数 n ，也包括方位角指数 m ，因此 T 矩阵法可以用于求解任意入射波下任意形状的散射问题。常定义散射矩阵 \mathbf{S}_{TMM} ^[6,162]

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{S}_{TMM} - 1}{2} \quad (2.89)$$

根据互易原理和能量守恒定律^[6,162,163]，散射矩阵分别满足对称性 $\mathbf{S}_{TMM}' = \mathbf{S}_{TMM}$ 和酉矩阵的性质 $\mathbf{S}_{TMM}^* * \mathbf{S}_{TMM} = \mathbf{1}$ ，其中右上角逗号表示矩阵转置，星号表示矩阵的共轭。通过直观观察，式 (2.89) 与 (2.88) 有相同的形式，即分波序列法和 T 矩阵法联系入射波和散射波的线性关系是一致的。也就是说，分波序列法中的散射系数 s_n 和 T 矩阵法中散射矩阵 \mathbf{S}_{TMM} ，与联系入射和散射系数之间的线性关系 A_n 和 \mathbf{T} ，具有相同的数学关系。这并不是巧合，而是 T 矩阵与分波序列法的分波系数在物理上的统一，即联系入射波和散射波。此外，根据能量守恒定律，散射系数和散射矩阵的模值均为 1，即有 $|s_n| = 1$ 和 $|\mathbf{S}_{TMM}| = 1$ 。

为了进一步说明转换矩阵与分波系数的关系，以柔性球为例，文献[85]给出了此时的转换矩阵具体的表达方式

$$T_{nm\sigma, n'm'\sigma'} = - \left[j_n(ka) / h_n^{(1)}(ka) \right] \delta_{nn'} \delta_{mm'} \delta_{\sigma\sigma'} \quad (2.90)$$

其中， ka 为量纲频率， j_n 和 $h_n^{(1)}$ 分别表示球贝塞尔函数和第一类球汉克尔函数。根据 [64]，柔性球的散射系数为 $s_n = -h_n^{(2)}(ka) / h_n^{(1)}(ka)$ ，代入 (2.88) 可知

$$A_n = -j_n(ka) / h_n^{(1)}(ka) \quad (2.91)$$

通过比较式 (2.90) 和 (2.91)，可知：

$$T_{nm\sigma, n'm'\sigma'} = A_n \delta_{nn'} \delta_{mm'} \delta_{\sigma\sigma'} \quad (2.92)$$

可以看出，此时的 T 矩阵退化为分波序列法中的分波系数，只是在数值计算中是以矩阵的形式装配入射和散射系数以及转换矩阵的。同样，刚性球和液体球也可以根据文献[85]证明满足 (2.92)。对于球形目标，正入射时由于入射波与散射体关于方位角

旋转对称，则散射系数与方位角的系数指数 m 无关，只与分波序列的指数 n 有关，可以当成是一种特殊的T矩阵。在数值上，可以将入射和散射波形系数按照T矩阵法的装配规律，并将分波系数 A_n 以同样的方式装配成矩阵形式，也可以正确求解球形目标的散射问题。该思想将分波序列法（解析解）和T矩阵法（半解析版数值解）统一起来，为后文计算声散射和声辐射力，力矩等编写统一的计算程序提供了保证。

2.6 本章小结

本章主要推导了无限域理想流体中声学 Bessel 波入射下球形目标散射的理论方法和基于 T 矩阵法任意形状目标散射的数值方法。首先，简要推导了正入射时基于分波序列法的散射理论解。该方法的核心思想是将速度势中的柱波函数在球坐标系下展开，便于求解三维球形目标的散射问题。其次，首次从理论上推导了求解任意方向 Bessel 波入射下球形目标声散射问题的方法，克服了柱波函数展开法只能求解正入射的局限性。该方法是基于多极展开，并采用柱贝塞尔函数的平移叠加定理和 Neves 关于连带勒让德多项式、柱贝塞尔函数和指数函数混合乘积积分的理论公式，最终推导了任意方向任意阶 Bessel 波入射时的理论解。上述理论解适用于球形目标的散射，为了计算非球状目标的声散射，2.4 节分别推导了基于 T 矩阵法求解声不可透（Neumann 和 Dirichlet 边界条件）和可透（弹性边界条件）目标的散射问题。最后，详细讨论了两种方法在数学上的统一和物理上的内在联系。

3 一般声场下目标声辐射力和力矩理论研究

3.1 引言

声场与目标相互作用（散射与吸收）时，一般会有动量和角动量的转移与吸收，这在宏观上分别表现为声场对目标产生一个力和力矩，称为声辐射力和力矩。可调控的声辐射力在非接触操控，微引力环境，芯片技术，物理化学等领域有较大的潜在应用空间，因此对声辐射力的研究非常有必要。声辐射力可以通过近场理论对目标表面压强的变分^[117,118]进行积分得到，也可以运用高斯定理（散度定理），对处于远场（ $kr \rightarrow \infty$ ， r 为场点到坐标原点的距离）的任意表面进行积分得到^[119,120]。高斯定理表明，对任意矢量的散度在封闭体积内积分，可以转换为对矢量在封闭面积的法向分量积分，数学表达式为： $\int_V \nabla \cdot \mathbf{X} dV = \int_A \mathbf{X} d\mathbf{S}$ ，其中 \mathbf{X} 为任意矢量， V 表示计算体积域， S 表示包围体积域 V 的封闭表面积， $d\mathbf{S}$ 表示外向法向面积微元，有 $d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot dS$ ， \mathbf{n} 为外向单位法向量。本章基于入射和散射波形系数，独立推导了一般声场入射下的声辐射力和力矩公式，并对分波序列法和 T 矩阵法进行统一的数值编程，为后续 Bessel 波入射下的理论模型和数值计算打下基础。

3.2 线动量应力张量法

3.2.1 一般声场的声辐射力表达式

考虑均质理想流体中一个任意形状的散射体，其表面积定义为 S ，放置于坐标原点 O ，如图 3.1 所示。为了便于理论分析和数值编程计算，一般将远场表面选择为球面 S_0 。根据动量守恒定律，理想流体中的声辐射应力张量满足 $\nabla \cdot \langle \mathbf{S}_T \rangle = 0$ 。声辐射力是通过对声辐射动量应力张量 $\mathbf{S}_T = \langle L \rangle - \rho_0 \langle \mathbf{u} \mathbf{u} \rangle$ 在散射体表面 S 进行积分^[120]，

$$\mathbf{F} = - \iint_S \langle \mathbf{S}_T \rangle d\mathbf{S} = - \iint_S \langle L \rangle d\mathbf{S} + \rho_0 \iint_S d\mathbf{S} \cdot \langle \mathbf{u} \mathbf{u} \rangle \quad (3.1)$$

其中 ρ_0 描述流体介质的密度， $\langle L \rangle$ 是 Lagrangian 密度的时间平均 ($\langle L \rangle = 1/T \int_0^T L dt$)，

$\rho_0 \langle \mathbf{u} \mathbf{u} \rangle$ 表示动量密度张量流的时间平均。根据高斯定理，当目标表面 S 与远场球面 S_0 之间的体积域中不存在其它声源和散射体，满足

$$\iint_{S_0} \langle \mathbf{S}_T \rangle d\mathbf{S} + \iint_S \langle \mathbf{S}_T \rangle d\mathbf{S} = 0 \quad (3.2)$$

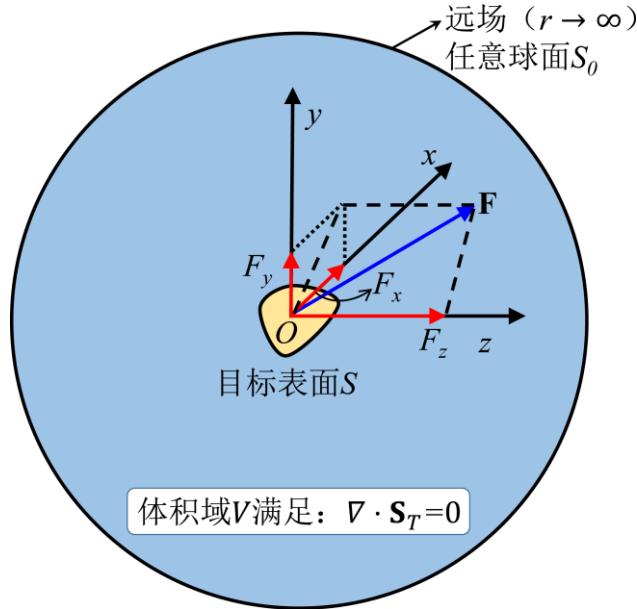


图 3.1 声辐射力计算示意图

根据上式，可将对目标表面 S （近场）上辐射应力张量的积分转移到远场球面 S_0 上的积分，则式 (3.1) 转变为远场积分表达式

$$\mathbf{F} = \iint_{S_0} \langle L \rangle d\mathbf{S} - \rho_0 \iint_{S_0} d\mathbf{S} \cdot \langle \mathbf{u} \mathbf{u} \rangle \quad (3.3)$$

该表达式可以将任意不规则形状的散射体的辐射应力张量积分转换到规则的球面积分，在理论和数值计算中均有重要作用。为了简化计算，将 Lagrangian 密度的时间平均分为三部分，分别是仅入射波项 $\langle L_{ii} \rangle$ ，仅散射波项 $\langle L_{ss} \rangle$ 和入射波与散射波耦合项 $\langle L_{is} \rangle$ 的贡献，有 $\langle L \rangle = \langle L_{ii} \rangle + \langle L_{ss} \rangle + \langle L_{is} \rangle$ ，其中

$$\begin{aligned} \langle L_{ii} \rangle &= \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i - \frac{p_i^2}{2\rho_0 c_0^2} \\ \langle L_{ss} \rangle &= \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s - \frac{p_s^2}{2\rho_0 c_0^2} \\ \langle L_{is} \rangle &= \rho_0 \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_s - \frac{p_i p_s}{\rho_0 c_0^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

上式中， c_0 是理想流体中的声速， $\mathbf{u}_{i,s}$ 分别是入射场和散射场的速度矢量，与速度标量 $u_{i,s}$ 满足关系式， $\mathbf{u}_{i,s} = \mathbf{n}u_{i,s}$ ， \mathbf{n} 是外向单位法向量； p_i 和 p_s 分别是入射场和散射场的一阶声压。动量密度张量流 $\rho_0 \langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle$ 的展开形式为

$$\rho_0 \langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle = \rho_0 \langle \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i \rangle + \rho_0 \langle \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s \rangle + \rho_0 \langle \mathbf{u}_{is} \mathbf{u}_s \rangle + \rho_0 \langle \mathbf{u}_s \mathbf{u}_i \rangle \quad (3.5)$$

通过分析可知，当理想均匀流体中不存在散射体时，整个声场只存在入射波不存在散射波，并不存在动量交换，故只包括入射场函数的积分部分为零，有

$$\iint_{S_0} \langle L_i \rangle d\mathbf{S} - \rho_0 \iint_{S_0} d\mathbf{S} \cdot \langle \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i \rangle = 0 \quad (3.6)$$

此外，根据远场声压与速度标量的关系 $p_{i,s} = \rho_0 c_0 u_{i,s}$ ，代入式(3.4)中 $\langle L_{ss} \rangle$ ，计算得 $L_{ss} = 0$ 。因此，在计算前消掉了一些恒为零的项，将式(3.4)，(3.5)代入到(3.3)，并运用速度的矢量与标量之间的关系式，简化整理得到包含声压与速度积分形式的声辐射力表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \iint_{S_0} \langle L_{is} \rangle d\mathbf{S} - \rho_0 \iint_{S_0} \langle \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s \rangle d\mathbf{S} - \rho_0 \iint_{S_0} \langle \mathbf{u}_i (\mathbf{dS} \mathbf{u}_s) \rangle - \rho_0 \iint_{S_0} \langle \mathbf{u}_s (\mathbf{dS} \mathbf{u}_i) \rangle \\ &= \iint_{S_0} \left\langle \rho_0 \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_s - \frac{p_i p_s}{\rho_0 c_0^2} \right\rangle d\mathbf{S} - \\ &\quad \rho_0 \iint_{S_0} \langle \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s \rangle d\mathbf{S} - \rho_0 \iint_{S_0} \langle \mathbf{u}_i (\mathbf{dS} \mathbf{u}_s) \rangle - \rho_0 \iint_{S_0} \langle \mathbf{u}_s (\mathbf{dS} \mathbf{u}_i) \rangle \\ &= - \iint_{S_0} \left\langle \frac{p_i p_s}{\rho_0 c_0^2} \right\rangle \mathbf{n} dS - \rho_0 \iint_{S_0} \langle u_s u_s \rangle \mathbf{n} dS - \rho_0 \iint_{S_0} \langle u_s u_i \rangle \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (3.7)$$

在声场中，一阶复速度与速度势的关系为 $\mathbf{u}_{i,s} = \nabla \Phi_{i,s}$ ，即速度矢量是速度势的梯度。其中， $\Phi_{i,s}$ 分别表示入射场和散射场的速度势的空间部分。一阶复声压与速度势的关系为 $p_{i,s} = i\omega \rho_0 \Phi_{i,s}$ ^[145]。在远场条件下，标量速度可表示为

$$u_{i,s} = \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{i,s} = \frac{\partial \Phi_{i,s}}{\partial r} \quad (3.8)$$

对处于远场的散射场速度势，有 $\partial \Phi_s / \partial r \approx ik \Phi_s$ ^[146]。

在声辐射力以及下文声辐射力矩公式推导过程中，为了便于理解，会根据需要将所有物理量的时谐因子 $e^{-i\omega t}$ 表示出来。根据前文计算得到的散射场速度势和已知的入射场速度势来描述声辐射力，需将式(3.7)中的所有声压和声速用速度势来表示。式

(3.7) 中, 对两个包含时谐因子 $e^{-i\omega t}$ 的复数函数的乘积取时间平均, 能够表述为第一个复数乘以第二个复数的共轭, 取乘积的实部的一半^[164], 用数学表达式描述为 $\langle w_1 e^{-i\omega t} w_2 e^{-i\omega t} \rangle = 1/2 \operatorname{Re}(w_1 w_2^*)$, 其中 w_1, w_2 为任意包含时谐因子 $e^{-i\omega t}$ 的复数函数, Re 表示英文单词 “Real” 的前两个字母, 表示对复数物理量取实部。观察可知, 当第二个复数函数取共轭时, 空间部分与时间部分均取共轭, 那么时间部分的乘积最终为 $e^{-i\omega t} (e^{-i\omega t})^* = 1$, 则对两个包含时谐因子的复数函数乘积的时间平均 (实质上对一个周期内积分) 不为零。若假设对第二个复数函数不取共轭, 时间部分的乘积最终为 $e^{-i\omega t} e^{-i\omega t} = e^{-i(2\omega t)}$, 在一个时间周期内的积分为零。采取该思路, 可以去掉式 (3.7) 中的时间平均算符, 便于进一步推导计算, 则式 (3.7) 具体进一步推导如下

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= - \iint_{S_0} \left\langle \frac{P_i P_s}{\rho_0 c_0^2} \right\rangle \mathbf{n} dS - \rho_0 \iint_{S_0} \langle u_s u_s \rangle \mathbf{n} dS - \rho_0 \iint_{S_0} \langle u_s u_i \rangle \mathbf{n} dS \\
 &= - \iint_{S_0} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{(i\omega \rho_0 \Phi_i)(i\omega \rho_0 \Phi_s^*)}{\rho_0 c_0^2} \right) \mathbf{n} dS - \rho_0 \iint_{S_0} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial r} \frac{\partial \Phi_s^*}{\partial r} \right) \mathbf{n} dS - \\
 &\quad \frac{1}{2} \rho_0 \iint_{S_0} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \frac{\partial \Phi_s^*}{\partial r} \right) \mathbf{n} dS \\
 &= - \frac{1}{2} \rho_0 \iint_{S_0} \operatorname{Re} \left(k^2 \Phi_i \Phi_s^* \right) \mathbf{n} dS - \frac{1}{2} \rho_0 \iint_{S_0} \operatorname{Re} \left(ik \Phi_s (ik \Phi_s^*)^* \right) \mathbf{n} dS - \tag{3.9} \\
 &\quad \rho_0 \iint_{S_0} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} (ik \Phi_s^*)^* \right) \mathbf{n} dS \\
 &= \frac{1}{2} \rho_0 \iint_{S_0} \operatorname{Re} \left(-k^2 \Phi_i \Phi_s^* - k^2 \Phi_s \Phi_s^* + ik \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \Phi_s^* \right) \mathbf{n} dS \\
 &= \frac{1}{2} \rho_0 k^2 \iint_{S_0} \operatorname{Re} \left(-\Phi_i \Phi_s^* - \Phi_s \Phi_s^* + \frac{i}{k} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \Phi_s^* \right) \mathbf{n} dS \\
 &= \frac{1}{2} \rho_0 k^2 \iint_{S_0} \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{i}{k} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} - \Phi_i \right) \Phi_s^* - \Phi_s \Phi_s^* \right\} \mathbf{n} dS
 \end{aligned}$$

上述推导运用了关系式 $\langle u_s u_i \rangle = \langle u_i u_s \rangle$, 可以由复数函数的性质证得:

$\operatorname{Re}(u_s u_i^*) = \operatorname{Re}(u_i u_s^*)$ 。式 (3.9) 得到了由入射场和散射场速度势表示声辐射力矢量的紧凑形式, 其给出了仅用入射场和散射场速度势描述声辐射力矢量合力的关系式。为了更进一步结合第二章推导的入射和散射波形系数来表述声辐射力, 下面将做进一步

的推导，以得到基于入射和散射系数的声辐射力计算公式。

3.2.2 基于入射和散射系数的声辐射力表达式

根据式（2.21），对于任意入射声场，入射场速度势可以表述为入射系数和基波函数 $\text{Re } \Phi_{nm}$ 的乘积形式

$$\Phi_i = \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} j_n(kr) Y_{nm}(\theta, \varphi) \quad (3.10)$$

正入射时入射波形系数 a_{nm} 根据式（2.4）容易得到。同时，散射速度势可以表示为散射波形系数和基波函数的乘积形式

$$\Phi_s = \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n s_{nm} h_n^{(1)}(kr) Y_{nm}(\theta, \varphi) \quad (3.11)$$

其中， s_{nm} 为散射系数。为了简化标识，下文简化求和符号的写法为 $\sum_{nm} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n$ 。根据

附录 II 中球贝塞尔函数的递推式，有

$$j_n(kr)' = \frac{n}{kr} j_n(kr) - j_{n+1}(kr) \quad (3.12)$$

定义式（3.9）中只包括入射波速度势的括号项为 $\Phi_i^{(\text{part})}$ ，将递推关系式（3.14）代入得

$$\begin{aligned} \Phi_i^{(\text{part})} &= \left(\frac{i}{k} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} - \Phi_i \right) \\ &= i \frac{\partial}{\partial kr} \Phi_0 \sum_{nm} a_{nm} j_n(kr) Y_{nm} - \Phi_0 \sum_{nm} a_{nm} j_n(kr) Y_{nm} \\ &= i \Phi_0 \sum_{nm} a_{nm} \left(\frac{n}{kr} j_n(kr) - j_{n+1}(kr) \right) Y_{nm} - \Phi_0 \sum_{nm} a_{nm} j_n(kr) Y_{nm} \\ &= \Phi_0 \sum_{nm} a_{nm} (-ij_{n+1}(kr) - j_n(kr)) Y_{nm} \end{aligned} \quad (3.13)$$

上式中，因 $kr \rightarrow \infty$ 而指数 n 在有限值 N_{\max} 处截断，故 $n/(kr) j_n(kr)$ 相对于 $j_{n+1}(kr)$ 无限小，在推导中忽略不计。根据附录 II 中，第一类贝塞尔函数的远场近似表达式，上式可进一步化简为

$$\begin{aligned}
 \Phi_i^{(\text{part})} &= \Phi_0 \sum_{nm} a_{nm} \left(-i \frac{i^{-(n+2)} e^{ikr} + i^{n+2} e^{-ikr}}{2kr} - \frac{i^{-(n+1)} e^{ikr} + i^{n+1} e^{-ikr}}{2kr} \right) Y_{nm} \\
 &= \Phi_0 \sum_{nm} a_{nm} \left(-\frac{i^{-(n+1)} e^{ikr} + i^{n+3} e^{-ikr}}{2kr} - \frac{i^{-(n+1)} e^{ikr} + i^{n+1} e^{-ikr}}{2kr} \right) Y_{nm} \\
 &= -\Phi_0 \sum_{nm} a_{nm} \left(\frac{i^{-(n+1)} e^{ikr} - i^{n+1} e^{-ikr}}{2kr} + \frac{i^{-(n+1)} e^{ikr} + i^{n+1} e^{-ikr}}{2kr} \right) Y_{nm} \\
 &= -\Phi_0 \sum_{nm} a_{nm} \frac{i^{-(n+1)} e^{ikr}}{kr} Y_{nm}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

至此，得到了仅包含入射波速度势括号项的最简表达式，该表达式经过了严格的理论推导和远场近似展开。为得到该项的最简表达式，另一种思路是根据贝塞尔与汉克尔函数的关系（附录 II： $j(kr) = h_n^{(1)}(kr)/2 + h_n^{(2)}(kr)/2$ ），将入射波 Φ_i 认为是内向波 Φ_{i1} 和外向波 Φ_{i2} 的叠加，即 $\Phi_i = \Phi_{i1} + \Phi_{i2}$ ，其中

$$\Phi_{i1} = \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} \frac{i^{-(n+1)} e^{ikr}}{2kr} Y_{nm}(\theta, \varphi) \quad (\text{外向波}) \tag{3.15}$$

$$\Phi_{i2} = \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} \frac{i^{n+1} e^{-ikr}}{2kr} Y_{nm}(\theta, \varphi) \quad (\text{内向波}) \tag{3.16}$$

根据文献[146]，在远场条件下，上述两式分别满足： $\partial\Phi_{i1}/\partial r \approx ik\Phi_{i1}$ ，

$\partial\Phi_{i2}/\partial r \approx -ik\Phi_{i2}$ ，将此两式代入到 $\Phi_i^{(\text{part})}$ ，式(3.13)可重新表述为

$$\begin{aligned}
 \Phi_i^{(\text{part})} &= \frac{i}{k} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} - \Phi_i \\
 &= \frac{i}{k} \frac{\partial (\Phi_{i1} + \Phi_{i2})}{\partial r} - (\Phi_{i1} + \Phi_{i2}) \\
 &= \frac{i}{k} (ik\Phi_{i1} - ik\Phi_{i2}) - (\Phi_{i1} + \Phi_{i2}) \\
 &= -2\Phi_{i1}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

将(3.15)代入上式，得到了和本文推导的一致结果（式3.14）。内向波和外向波叠加的思想很巧妙地运用了远场条件下的速度势导数与其自身的近似表达式，较大的节省了时间成本。需要注意的是，该方法需要保证指数 n 在有限值处截断，否则远场处两个分量在数学上发散。在实际物理问题中，如声散射和量子散射等，指数 n 都

在有限值处截断，故内向波和外向波均在远场处收敛，该方法在数学上和物理上均正确，且推导结果与采用球贝塞尔函数的递推关系式正确一致。在远场条件下，将附录 II 中 $h_n^{(1)}(kr)$ 远场近似展开式代入式 (3.11)，得到散射波的速度势

$$\Phi_s = \Phi_0 \sum_{nm} s_{nm} \frac{i^{-(n+1)} e^{ikr}}{kr} Y_{nm}(\theta, \varphi) \quad (3.18)$$

入射波速度势括号项 $\Phi_i^{(\text{part})}$ 与散射波速度势 Φ_s 分别用入射系数和散射系数的求和形式推导出最简表达式。为了根据理论方法和数值模型编程求解声辐射力，需最终用入射和散射系数来表示。首先我们定义积分内实数符号 Re 内的表达式 Φ_{is} 为

$$\Phi_{is} = \Phi_i^{(\text{part})} \Phi_s^* - \Phi_s \Phi_s^* \quad (3.19)$$

将式 (3.14)，(3.18) 代入上式，并用下标 nm 和 $n'm'$ 区别双重求和，整理化简得

$$\begin{aligned} \Phi_{is} &= \Phi_i^{(\text{part})} \Phi_s^* - \Phi_s \Phi_s^* \\ &= -\Phi_0 \sum_{nm} a_{nm} \frac{i^{-(n+1)} e^{ikr}}{kr} Y_{nm} \left(\Phi_0 \sum_{n'm'} s_{n'm'} \frac{i^{-(n'+1)} e^{ikr}}{kr} Y_{n'm'}(\theta, \varphi) \right)^* - \\ &\quad \Phi_0 \sum_{nm} s_{nm} \frac{i^{-(n+1)} e^{ikr}}{kr} Y_{nm}(\theta, \varphi) \left(\Phi_0 \sum_{n'm'} s_{n'm'} \frac{i^{-(n'+1)} e^{ikr}}{kr} Y_{n'm'}(\theta, \varphi) \right)^* \\ &= -\Phi_0^2 \sum_{nm} \sum_{n'm'} \frac{i^{n'-n}}{(kr)^2} a_{nm} s_{n'm'}^* Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{n'm'}^*(\theta, \varphi) - \\ &\quad \Phi_0^2 \sum_{nm} \sum_{n'm'} \frac{i^{n'-n}}{(kr)^2} s_{nm} s_{n'm'}^* Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{n'm'}^*(\theta, \varphi) \\ &= -\Phi_0^2 \sum_{nm} \sum_{n'm'} \frac{i^{n'-n}}{(kr)^2} (a_{nm} + s_{nm}) s_{n'm'}^* Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{n'm'}^*(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (3.20)$$

将式 (3.20) 代入声辐射力的矢量表达式 (3.9)

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{2} \rho_0 k^2 \iint_{S_0} \text{Re}(\Phi_{is}) \mathbf{n} dS \\ &= -\frac{1}{2} \rho_0 k^2 \Phi_0^2 \iint_{S_0} \text{Re} \left\{ \sum_{nm} \sum_{n'm'} \frac{i^{n'-n}}{(kr)^2} (a_{nm} + s_{nm}) s_{n'm'}^* Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{n'm'}^*(\theta, \varphi) \right\} \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (3.21)$$

上式是描述球坐标系下声场作用于散射体的声辐射合力矢量，其方向指向远场球

面的法向方向。在理论或数值计算中，该积分并无法直接求解，故需要将此表达式投影到笛卡尔坐标系的三个方向，下文致力于推导声辐射力在笛卡尔坐标系下分量的具体表达式。

3.2.3 声辐射力直角坐标系分量

在球坐标系下，面积微元 dS 可以用轴角微元 $d\theta$ 和方位角微元 $d\varphi$ 描述，有 $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ ，其中立体角微元 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ 。单位法向量 \mathbf{n} 可用笛卡尔坐标系下的三个单位法向量 $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ 表示为

$$\mathbf{n} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \quad (3.22)$$

将角度微元表示的面积微元和式 (3.22) 代入 (3.21)，

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (F_x \mathbf{e}_x, F_y \mathbf{e}_y, F_z \mathbf{e}_z) \\ &= -\frac{1}{2} \rho_0 k^2 \Phi_0^2 \iint_{S_0} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{nm} \sum_{n'm'} \frac{i^{n'-n}}{(kr)^2} (a_{nm} + s_{nm}) s_{n'm'}^* Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{n'm'}^*(\theta, \varphi) \right\} \\ &\quad \times (\sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (3.23)$$

实际计算中，常引入无量纲声辐射力函数 $\mathbf{Y} = Y_x \mathbf{e}_x + Y_y \mathbf{e}_y + Y_z \mathbf{e}_z$ 来表述，其与声辐射力的关系为

$$\mathbf{F} = \pi r_0^2 I_0 c_0^{-1} \mathbf{Y} \quad (3.24)$$

其中， πr_0^2 散射体的截面积， $I_0 = (\rho_0 c_0 / 2)(k \Phi_0)^2$ 表示入射波的强度。 r_0 表示散射体的无量纲长度，当散射体为球形目标时， $r_0 = a$ ，其中 a 表示实心球的半径或者球壳的外径。式 (3.23) 和 (3.24) 整理可得无量纲声辐射力函数 \mathbf{Y} 如下

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= -\frac{1}{\pi (kr_0)^2} \iint_{S_0} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{nm} \sum_{n'm'} \frac{i^{n'-n}}{(kr)^2} (a_{nm} + s_{nm}) s_{n'm'}^* Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{n'm'}^*(\theta, \varphi) \right\} \\ &\quad \times (\sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (3.25)$$

其在笛卡尔坐标系三个坐标轴方向的分量， \mathbf{e}_x 方向的无量纲辐射力分量 Y_x 为：

$$Y_x = -\frac{1}{\pi(kr_0)^2} \iint_{S_0} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{nm} \sum_{n'm'} \frac{i^{n'-n}}{(kr)^2} (a_{nm} + s_{nm}) s_{n'm'}^* Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{n'm'}^*(\theta, \varphi) \right\} \times \sin \theta \cos \varphi r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.26)$$

\mathbf{e}_y 方向的辐射力分量 Y_y 为:

$$Y_y = -\frac{1}{\pi(kr_0)^2} \iint_{S_0} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{nm} \sum_{n'm'} \frac{i^{n'-n}}{(kr)^2} (a_{nm} + s_{nm}) s_{n'm'}^* Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{n'm'}^*(\theta, \varphi) \right\} \times \sin \theta \sin \varphi r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.27)$$

\mathbf{e}_z 方向的辐射力分量 Y_z 为:

$$Y_z = -\frac{1}{\pi(kr_0)^2} \iint_{S_0} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{nm} \sum_{n'm'} \frac{i^{n'-n}}{(kr)^2} (a_{nm} + s_{nm}) s_{n'm'}^* Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{n'm'}^*(\theta, \varphi) \right\} \times \cos \theta r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.28)$$

上述声辐射力分量的表达式涉及到对球谐函数，球谐函数的共轭以及三角函数的乘积在整个立体角上进行积分，该部分的推导可根据球谐函数的正交关系以及递进关系式（参考附录 II 中推导），代入整理求得三个方向的具体表达式如下：

$$Y_x = \frac{1}{2\pi(kr_0)^2} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{nm} (a_{nm} + s_{nm}) \begin{pmatrix} -s_{n+1,m+1}^* b_{n+1,m} - s_{n-1,m+1}^* b_{n,-m-1} \\ +s_{n+1,m-1}^* b_{n+1,-m} + s_{n-1,m-1}^* b_{n,m-1} \end{pmatrix} \right\} \quad (3.29)$$

$$Y_y = \frac{1}{2\pi(kr_0)^2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{nm} (a_{nm} + s_{nm}) \begin{pmatrix} s_{n+1,m+1}^* b_{n+1,m} + s_{n-1,m+1}^* b_{n,-m-1} \\ +s_{n+1,m-1}^* b_{n+1,-m} + s_{n-1,m-1}^* b_{n,m-1} \end{pmatrix} \right\} \quad (3.30)$$

$$Y_z = \frac{1}{\pi(kr_0)^2} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{nm} (a_{nm} + s_{nm}) (s_{n+1,m}^* c_{n+1,m} - s_{n-1,m}^* c_{n,m}) \right\} \quad (3.31)$$

上式描述了无量纲声辐射力的通用表达式，只要已知入射声场和散射声场（可以在理论或者数值上用入射和散射波形系数表示），便可求解散射体在各个方向的声辐射力，这也是第二章中理论公式和数值模型的进一步实践应用。

3.2.4 正入射时声辐射力理论表达式

上小节推导了任意声场入射下声辐射力的通用表达式，本文的重心在于研究

Bessel 漩涡波的散射及其在粒子操控领域的应用。为了后续验证推导的公式的正确性，本节同时简要回顾任意阶 Bessel 波正入射时的轴向声辐射力。Marston 最早分别给出了零阶和一阶 Bessel 波正入射无量纲轴向声辐射力的表达式^[64,144]

$$Y_z = -\left(\frac{2}{ka}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) [\alpha_n + \alpha_{n+1} + 2(\alpha_n \alpha_{n+1} + \beta_n \beta_{n+1})] P_n(\cos \beta) P_{n+1}(\cos \beta) \quad (3.32)$$

$$Y_z = -\left(\frac{2}{ka}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} [\alpha_n + \alpha_{n+1} + 2(\alpha_n \alpha_{n+1} + \beta_n \beta_{n+1})] P_n^1(\cos \beta) P_{n+1}^1(\cos \beta) \quad (3.33)$$

Mitri 也推导了任意阶 Bessel 波正入射时的无量纲轴向辐射力表达式^[165]

$$Y_z = -\left(\frac{2}{ka}\right)^2 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n-m+1)!}{(n+m)!} [\alpha_n + \alpha_{n+1} + 2(\alpha_n \alpha_{n+1} + \beta_n \beta_{n+1})] P_n^m(\cos \beta) P_{n+1}^m(\cos \beta) \quad (3.34)$$

当 $m=0$ (普通 Bessel 波) 时, 该公式可得到 Marston 基于平面波叠加推导的式 (3.32), 当 $m=1$ (一阶 Bessel 漩涡波) 时, 可得到 Marston 基于平面波叠加推导的式 (3.33)。注意, 该公式只适合正入射的情形, 即散射体中心在入射 Bessel 波的波轴上, 且只适合球状目标。

3.3 角动量应力张量法

声场与目标相互作用时, 当存在线动量的传递或吸收时, 声场对目标产生一个声辐射力。类似地, 当声场与目标之间存在角动量的传递或吸收时, 声场对目标产生一个声辐射力矩。与辐射力推导过程类似, 本小节根据角动量守恒定律详细推导了任意声场入射下的声辐射力矩, 并建立了声辐射力矩与入射和散射波形系数的联系, 为数值计算和实际应用提供了基础。

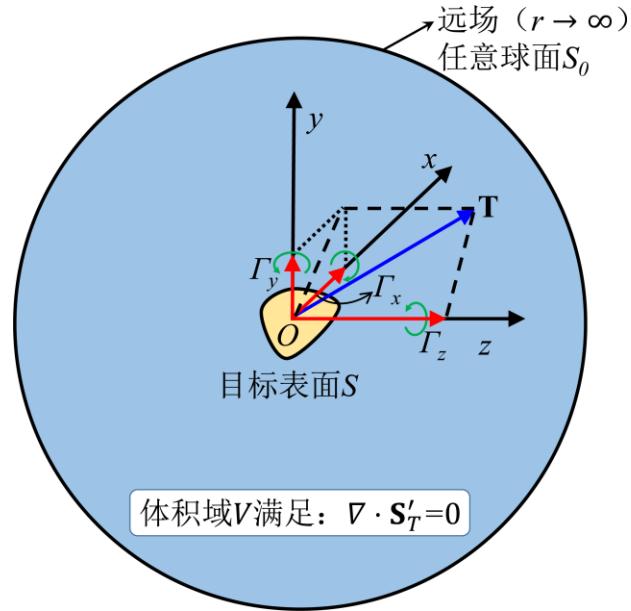


图 3.2 声辐射力矩计算示意图

3.3.1 一般声场声辐射力矩表达式

角动量应力张量 \mathbf{S}'_T 与线动量应力张量 \mathbf{S}_T 满足如下关系:

$$\mathbf{S}'_T = \mathbf{r} \times \mathbf{S}_T \quad (3.35)$$

其中 \mathbf{r} 为坐标原点（散射体中心）到场点的位置矢量，指向外表面法线方向。考虑散射体浸没在理想流体中，与 3.2 小节定义相同，散射体表面积定义为 S ，无限远场的任意表面定义为 S_0 ， S 与 S_0 之间的体积域中均为理想流体，不存在角动量的吸收。根据角动量守恒定理，理想流体中满足 $\nabla \cdot \mathbf{S}'_T = 0$ ，运用高斯定理，将散射体表面的角动量应力张量的积分转移到任意无限远场表面上的积分，可知声辐射力矩矢量为

$$\mathbf{T} = -\rho_0 \iint_{S_0} \langle L \rangle \mathbf{r} \times d\mathbf{S} - \rho_0 \iint_{S_0} \langle (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \mathbf{u} \rangle d\mathbf{S} \quad (3.36)$$

为了简化推导与计算，通常将远场表面选择一个球心在散射体中心（即坐标原点）的球面，这保证了后续理论或数值积分能够进行，同时还有一个优势：根据矢量叉乘计算公式的性质有 $\mathbf{r} \times \mathbf{n} = 0$ ，由 $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ 易知式 (3.36) 右边第一项为 0，简化得

$$\mathbf{T} = -\rho_0 \iint_{S_0} \langle (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \mathbf{u} \rangle d\mathbf{S} \quad (3.37)$$

上式中 $\mathbf{r} \times \mathbf{u}$ 的结果是一个复矢量。根据带时谐因子的复数函数乘积的时间平均关系式

$\langle w_1 e^{-i\omega t} w_2 e^{-i\omega t} \rangle = 1/2 \operatorname{Re}(w_1 w_2^*)$, 式 (3.37) 可写作

$$\mathbf{T} = -\rho_0 \iint_{S_0} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}^* \} \mathbf{n} dS \quad (3.38)$$

将速度矢量 \mathbf{u} 用速度势 Φ 表示并代入上式, 整理得

$$\mathbf{T} = -\frac{\rho_0}{2} \operatorname{Re} \iint_{S_0} \{ (\mathbf{r} \times \nabla \Phi) \cdot \mathbf{n} \nabla \Phi^* \} dS \quad (3.39)$$

上式中速度矢量和速度势均是入射场和散射场的叠加, 满足 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_s$, $\Phi = \Phi_i + \Phi_s$ 。

为了计算方便, 将量子力学领域中角动量算符 \mathbf{L} ^[166] 引入到声学领域, 定义 $\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$, 其中 i 表示虚数单位, 则 $\mathbf{r} \times \nabla = i\mathbf{L}$ 。同时, 利用复数函数的运算规则, 可知对任意复数 w 有 $\operatorname{Re}(iw) = -\operatorname{Im}(w)$, 其中 Im 取英文单词 “Imaginary” 前 2 个字母, 表示对复数取虚部操作。上式进一步整理得

$$\mathbf{T} = \frac{\rho_0}{2} \operatorname{Im} \iint_{S_0} \left\{ \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \mathbf{L} \Phi \right\} dS \quad (3.40)$$

为了结合第二章中推导的入射波速度势以及根据理论和数值方法推导求得的散射速度势计算声辐射力矩, 将声辐射力矩表示成 Φ_i 和 Φ_s 的形式

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\rho_0}{2} \operatorname{Im} \iint_{S_0} \left\{ \frac{\partial (\Phi_i + \Phi_s)^*}{\partial r} \mathbf{L} (\Phi_i + \Phi_s) \right\} dS \\ &= \frac{\rho_0}{2} \operatorname{Im} \iint_{S_0} \left\{ \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial r} \mathbf{L} \Phi_i + \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial r} \mathbf{L} \Phi_s + \frac{\partial \Phi_s^*}{\partial r} \mathbf{L} \Phi_i + \frac{\partial \Phi_s^*}{\partial r} \mathbf{L} \Phi_s \right\} dS \end{aligned} \quad (3.41)$$

在理想流体介质中, 当散射体不存在时, 入射声场保持原声场的传播特性, 不存在散射声场, 故不存在角动量的传递或吸收, 因此式 (3.41) 中只包含入射波速度势的项 (积分符号中的第一项) 为零, 这个思想与声辐射力推导中, 不存在线动量的传递或吸收, 则只包含入射波速度势的项为零的结果一致, 即

$$\frac{\rho_0}{2} \operatorname{Im} \iint_{S_0} \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial r} \mathbf{L} \Phi_i dS = 0 \quad (3.42)$$

则式 (3.41) 可重新整理为

$$\mathbf{T} = \frac{\rho_0}{2} \operatorname{Im} \iint_{S_0} \left\{ \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial r} \mathbf{L} \Phi_s - \frac{\partial \Phi_s^*}{\partial r} \mathbf{L} \Phi_i^* + \frac{\partial \Phi_s^*}{\partial r} \mathbf{L} \Phi_s \right\} dS \quad (3.43)$$

上式中运用了复数的性质 $\text{Im}(w_1 w_2^*) = -\text{Im}(w_1^* w_2)$ ，该操作便于简化下文的推导。式 (3.43) 给出了任意声场基于入射和散射速度势的声辐射力矩表达式，该表达式不局限于本文 Bessel 波入射的情况，能够直接扩展到计算其它类型的入射波下的声辐射力矩，如平面波，Gauss 波，Laguerre-Gauss 波，Airy 波等。为了进一步用理论方法或数值编程计算声辐射力矩，需要用入射波和散射波的系数来最终表示声辐射力，具体推导将在下一小节给出。

3.3.2 基于入射和散射系数的声辐射力矩表达式

根据式 (3.10) 和 (3.11)，可得到用波形系数表示的入射和散射声场速度势的表达式。为了便于推导，在此定义式 (3.43) 中积分符号内所有包含速度势的项为 Φ_{is} ，具体表达式为

$$\Phi_{is} = \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial r} \mathbf{L} \Phi_s - \frac{\partial \Phi_s}{\partial r} \mathbf{L} \Phi_i^* + \frac{\partial \Phi_s^*}{\partial r} \mathbf{L} \Phi_i \quad (3.44)$$

首先推导用入射系数 a_{nm} 和散射系数 s_{nm} 的表示 Φ_{is} 的简化形式。将 Φ_i 与 Φ_s 分别用包含 a_{nm} 和 s_{nm} 的表达式展开，即式 (3.10-11)，代入式 (3.44)，并进一步整理得

$$\begin{aligned} \Phi_{is} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\Phi_0 \sum_{nm} a_{nm} j_n(kr) Y_{nm}(\theta, \varphi) \right)^* \mathbf{L} \left(\Phi_0 \sum_{nm} s_{nm} h_n^{(1)}(kr) Y_{nm}(\theta, \varphi) \right) - \\ &\quad \left(\Phi_0 \sum_{nm} a_{nm} j_n(kr) Y_{nm}(\theta, \varphi) \right)^* \mathbf{L} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Phi_0 \sum_{nm} s_{nm} h_n^{(1)}(kr) Y_{nm}(\theta, \varphi) \right) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\Phi_0 \sum_{nm} s_{nm} h_n^{(1)}(kr) Y_{nm}(\theta, \varphi) \right)^* \mathbf{L} \left(\Phi_0 \sum_{nm} s_{nm} h_n^{(1)}(kr) Y_{nm}(\theta, \varphi) \right) \\ &= k \Phi_0^2 \sum_{nm} \sum_{n'm'} a_{nm}^* j_n(kr) s_{n'm'}^* h_{n'}^{(1)}(kr) (Y_{nm}^* \mathbf{L} Y_{n'm'}) - \\ &\quad k \Phi_0^2 \sum_{nm} \sum_{n'm'} a_{nm}^* j_n(kr) s_{n'm'} h_{n'}^{(1)}(kr) (Y_{nm}^* \mathbf{L} Y_{n'm'}) + \\ &\quad k \Phi_0^2 \sum_{nm} \sum_{n'm'} s_{nm}^* h_n^{(1)}(kr) s_{n'm'}^* h_{n'}^{(1)}(kr) (Y_{nm}^* \mathbf{L} Y_{n'm'}) \\ &= k \Phi_0^2 \sum_{nm} \sum_{n'm'} (Y_{nm}^* \mathbf{L} Y_{n'm'}) \left\{ \begin{array}{l} a_{nm}^* s_{n'm'} \left[j_n(kr) h_{n'}^{(1)}(kr) - j_n(kr) h_{n'}^{(1)}(kr) \right] + \\ s_{nm}^* h_n^{(1)}(kr) s_{n'm'}^* h_{n'}^{(1)}(kr) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

上式中，用 nm 和 $n'm'$ 区别双重求和符号。导数 $j_n(kr)$ 表示 $\partial j_n(kr)/\partial(kr)$ ，即导数符号是对无量纲频率 kr 求导，不是对场点半径 r 求导，该符号同时适用于汉克尔函数的导数 $h_n^{(1)}(kr)$ ，*表示共轭。将附录 II 中球贝塞尔函数和球汉克尔函数的一阶导数递推关系，以及远场近似表达式代入 (3.45)，经过数学运算并整理得

$$\Phi_{is} = -\frac{\Phi_0^2}{kr^2} \sum_{nm} \sum_{n'm'} i^{n-n'+1} (a_{nm}^* + s_{nm}^*) s_{n'm'} (Y_{nm}^* \mathbf{L} Y_{n'm'}) \quad (3.46)$$

将上式结合式 (3.44) 回代到 (3.43)，可推导用入射系数和散射系数表示的声辐射力矩的表达式

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\rho_0}{2} \operatorname{Im} \iint_{S_0} \Phi_{is} dS \\ &= \frac{\rho_0}{2} \operatorname{Im} \iint_{S_0} \left\{ -\frac{\Phi_0^2}{kr^2} \sum_{nm} \sum_{n'm'} i^{n-n'+1} (a_{nm}^* + s_{nm}^*) s_{n'm'} (Y_{nm}^* \mathbf{L} Y_{n'm'}) \right\} dS \\ &= -\frac{\rho_0 \Phi_0^2}{2kr^2} \operatorname{Im} \iint_{S_0} \left\{ \sum_{nm} \sum_{n'm'} i^{n-n'+1} (a_{nm}^* + s_{nm}^*) s_{n'm'} (Y_{nm}^* \mathbf{L} Y_{n'm'}) \right\} dS \\ &= -\frac{\rho_0 \Phi_0^2}{2kr^2} \operatorname{Re} \iint_{S_0} \left\{ \sum_{nm} \sum_{n'm'} i^{n-n'} (a_{nm}^* + s_{nm}^*) s_{n'm'} (Y_{nm}^* \mathbf{L} Y_{n'm'}) \right\} dS \end{aligned} \quad (3.47)$$

为了方便，上式将虚部符号 Im 通过复数关系 $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z)$ 转变为实部符号 Re ，使虚数单位 i 的指数更为紧凑。式 (3.47) 给出了用入射和散射波形系数来描述声辐射力矩的一般表达式，但此时还无法通过理论或数值编程直接计算声辐射力，因此需将该矢量表达式投影到笛卡尔坐标系。

3.3.3 声辐射力矩直角坐标系分量

在球坐标系下，将面积微元用轴角和方位角微元表示有， $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ 。在实际计算中，常引入无量纲声辐射力矩函数 Γ 来表征辐射力矩，其与声辐射力矩 \mathbf{T} 的关系为

$$\mathbf{T} = \pi r_0^3 I_0 c_0^{-1} \Gamma \quad (3.48)$$

其中， r_0 ， I_0 和 c_0 的物理定义和表达方式在 3.2 节中详细给出。结合式 (3.47) 和 (3.48)，整理可得无量纲声辐射力矩函数 Γ 如下

$$\Gamma = -\frac{1}{\pi(kr_0)^3} \operatorname{Re} \iint_{S_0} \left\{ \sum_{nm} \sum_{n'm'} i^{n-n'} \left(a_{nm}^* + s_{nm}^* \right) s_{n'm'} \left(Y_{nm}^* \mathbf{L} Y_{n'm'} \right) \right\} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.49)$$

注意式 (3.47) 中 $1/r^2$ 与面积微元中的 r^2 项消去。为了计算声辐射力矩在直角坐标系下各个方向的投影分量，首先需要将角动量算符的矢量形式表示为标量与单位法向量的乘积形式

$$\mathbf{L} = L_x \mathbf{e}_x + L_y \mathbf{e}_y + L_z \mathbf{e}_z \quad (3.50)$$

则无量纲声辐射力矩函数 Γ 在笛卡尔坐标系三个坐标轴方向的分量：

\mathbf{e}_x 方向的无量纲辐射力分量 Γ_x 为

$$\Gamma_x = -\frac{1}{\pi(kr_0)^3} \operatorname{Re} \iint_{S_0} \left\{ \sum_{nm} \sum_{n'm'} i^{n-n'} \left(a_{nm}^* + s_{nm}^* \right) s_{n'm'} \left(Y_{nm}^* L_x Y_{n'm'} \right) \right\} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.51)$$

\mathbf{e}_y 方向的无量纲辐射力分量 Γ_y 为

$$\Gamma_y = -\frac{1}{\pi(kr_0)^3} \operatorname{Re} \iint_{S_0} \left\{ \sum_{nm} \sum_{n'm'} i^{n-n'} \left(a_{nm}^* + s_{nm}^* \right) s_{n'm'} \left(Y_{nm}^* L_y Y_{n'm'} \right) \right\} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.52)$$

\mathbf{e}_z 方向的无量纲辐射力分量 Γ_z 为

$$\Gamma_z = -\frac{1}{\pi(kr_0)^3} \operatorname{Re} \iint_{S_0} \left\{ \sum_{nm} \sum_{n'm'} i^{n-n'} \left(a_{nm}^* + s_{nm}^* \right) s_{n'm'} \left(Y_{nm}^* L_z Y_{n'm'} \right) \right\} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.53)$$

根据文献[166]中式 (16.12) 和 (16.13)，角动量算符在笛卡尔坐标系中三个分量分别表示为

$$\begin{aligned} L_x &= i \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ L_y &= -i \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ L_z &= -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (3.54)$$

为了对角动量算符的各个分量与球谐函数及其共轭的乘积进行积分，需引入阶梯算符 L_+ , L_- ，分别与角动量算符的分量满足关系

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{L_+ + L_-}{2} \\ L_y &= \frac{L_+ - L_-}{2i} \end{aligned} \quad (3.55)$$

根据附录 II.E, 阶梯算符与球谐函数的乘积可以用另一个下标指数不同的球谐函数表示。再利用球谐函数的正交性, 最终可以化简求得无量纲辐射力分量分别为

$$\Gamma_x = -\frac{1}{2\pi(ka)^3} \operatorname{Re} \sum_{nm} (a_{nm}^* + s_{nm}^*) (b_{nm-} s_{nm-1} + b_{nm+} s_{nm+1}) \quad (3.56)$$

$$\Gamma_y = -\frac{1}{2\pi(ka)^3} \operatorname{Im} \sum_{nm} (a_{nm} + s_{nm}) (b_{nm+} s_{nm+1}^* - b_{nm-} s_{nm-1}^*) \quad (3.57)$$

$$\Gamma_z = -\frac{1}{\pi(ka)^3} \operatorname{Re} \sum_{nm} m (a_{nm}^* + s_{nm}^*) s_{n'm'} \quad (3.58)$$

具体推导过程和系数表达式见附录 II。

3.3.4 正入射时声辐射力矩理论表达式

上小节推导了任意声场声辐射力矩的通用表达式, 本文的重心在于研究 Bessel 漩涡波在粒子操控领域的应用, 如声扳手。为了后续验证推导的公式的正确性, 本节同时简要回顾正入射时任意阶 Bessel 波入射时的轴向声辐射力矩。Mitri 等给出了任意阶 Bessel 波正入射下轴向无量纲声辐射力矩函数的表达式^[167]

$$\Gamma_z = -\frac{4m}{(ka)^3} \sum_{n=m} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (\alpha_n + \alpha_n^2 + \beta_n^2) [P_n^m(\cos \beta)]^2 \quad (3.59)$$

3.4 Bessel 波声学镊子数值工具箱

目前, 国内外不少团队开展了关于声辐射力和力矩的实验研究, 主要是利用驻波声源, 而关于单波束波 (如 Bessel 波) 的研究还不足。本文除了理论推导外, 还通过数字编程验证了声辐射力和力矩的公式和计算程序的有效性。基于此, 设计了 Bessel 波声学镊子数值工具箱, 其核心运行框架包括如下示意图:

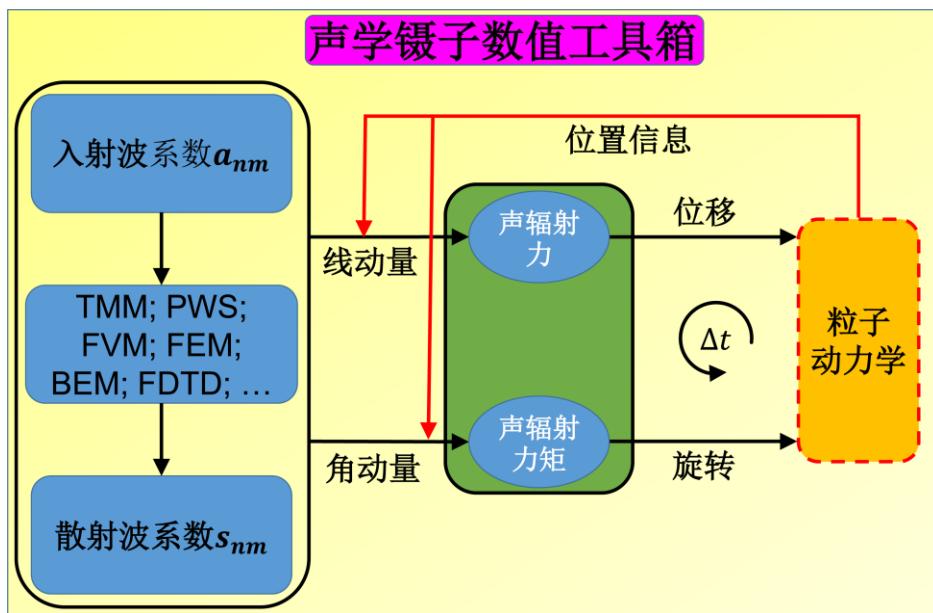


图 3.3 声学镊子数值工具箱结构原理示意图

以 Bessel 波声学镊子数值工具箱为例，目前已经完成了理论解和数值计算的核心程序，并调试运行正确，初步形成了声学镊子数值工具箱雏形，并通过设计图形用户界面（GUI），便于人机交互。使用者无须花费大量的精力去重复推导公式和编写程序，而可以直接通过工具箱设计的友好界面，输入关心模型和问题的核心参数，便可得到想要的结果。通过推导理论和工程领域中其他类型入射波的波形系数，该工具箱很容易扩展来适用于其它类型的声场计算研究。需要指出的是，目前的工具箱并不包含长时间作用下的粒子运动学分析，这将在本课题组接下来的工作中进一步发展完善。

3.5 本章小结

本章结合第二章利用理论方法和数值模型得到的声场入射和散射波形系数，独立推导得到了声辐射力和声辐射力矩的紧凑表达式。根据动量（矩）守恒定律，结合高斯定理，将任意形状表面的辐射应力（矩）张量在目标表面的积分，转移到无限远场规则球表面上积分，简化了理论和数值计算，为实际工程应用提供了理论支撑。注意，本章给出了基于理论和数值方法求解力和力矩的统一表达式。根据入射场系数求得散射系数，比如使用理论方法如分波序列法，或数值方法如 T 矩阵法，边界元法，有限

华 中 科 技 大 学 博 士 学 位 论 文

元法，有限体积法，有限时域差分法等，均可运用声辐射力和力矩的通用表达式计算目标在声场中的受力情况，这在微流控，芯片技术，生物技术，表面化学等领域有巨大的应用前景，并可指导实验科研人员以节省时间和经济成本。此外，其它声场，如高斯波，Laguerre-Gauss 波，Airy 波等和其它理论数值方法，均有可能封装进该声学镊子数值工具箱，为实验研究和理论验证提供指导和参考。通用表达式为任意声场的声辐射力和力矩的编程计算提供了理论基础和重要支撑。

4 Bessel 波入射下球形目标声散射研究

4.1 引言

Bessel 波作为一种无衍射波，其与普通平面波入射下的散射性质和物理机理有所不同。Marston 基于平面波叠加法推导计算了球形粒子在 Bessel 波正入射下的散射特性，并分析了相应的散射机理。本文基于第二章推导的多极展开法，首次得到了任意入射位置任意阶 Bessel 波入射波形系数的理论表达式。本章将基于推导的理论公式，一是简要回顾 Bessel 波入射下球形目标的散射特性，二是重点研究偏轴入射模型下的散射与共振特性。本章着重运用第二章推导的理论公式，探讨不同的边界条件下，Bessel 波入射下球形目标的散射特性，进一步分析其散射规律和物理机理。应注意，根据不同的边界条件，会生成不同的线性方程组。通过求解线性方程组，可得到不同边界条件下球形目标的散射系数。为了方便，本文将计算和分析中使用的不同边界条件下散射系数总结在附录 III。实际编程过程中，分波序列的项数均需要数值截断，即 $n=0, 1, 2, \dots, N_{\max}$ 。在考虑的计算频率范围内，高阶的分波对散射的贡献很小，在物理上可以忽略不计。本文针对分波序列法和 T 矩阵法采用统一的截断系数 $N_{\max} = 3 + kr_0 + 4.05(kr_0)^{1/3}$ 并对其取整^[168,34]，该截断系数对两种方法均证明收敛和有效。除非特别指出，否则本文在计算中采用上述统一的截断系数。

4.2 远场形态函数和共振散射理论

在实际工程的散射问题中，经常考虑声场的远场散射特性，并用远场形态函数（Form Function）表示。因入射场和散射场均包含相同的时谐因子，故文中均将其省略。远场散射速度势 Φ_s 用形态函数表述为^[90,91,169]

$$\Phi_s = \Phi_0 \frac{r_0}{2r} f(kr_0, \theta, \beta, \varphi) e^{ikr} \quad (4.1)$$

其中， Φ_0 表示入射波幅值大小， r 表示远场场点到目标中心的距离， θ 和 φ 分别表示

散射极角和方位角， β 表示 Bessel 波的波锥角，其描述波矢分量与波轴方向的夹角， r_0 表示目标的特征长度，如对球形目标，特征长度为球半径，有 $r_0 = a$ 。将式 (4.1) 代入式 (2.22)，则任意位置任意阶 Bessel 波入射下，球形目标远场形态函数的具体表达式为

$$f(ka, \theta, \beta, \varphi) = \frac{2}{ka} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(4\pi \xi_{nm} i^{M-m-1} A_n P_n^m(\cos \beta) e^{-ik_z z_0} J_{m-M}(\sigma_0) e^{-i(m-M)\varphi_0} Y_{nm} \right) \quad (4.2)$$

其与场点到目标中心的距离 r 无关。上式的推导利用了第一类球汉克尔函数的远场近似表达式 $h_n^{(1)}(kr) \approx i^{-(n+1)} e^{ikr} / (kr)$ 。

对弹性目标的声散射，弹性材料的固有属性对声散射的贡献在工程实践中具有重要意义。共振散射理论^[170,171]通过从总的散射场中减去合适的背景散射，得到纯弹性散射的贡献。对弹性目标，入射声波可以在目标外表面和内部传播。外表面波主要包括绕物体几何形状传播的 Franz 波和直接镜反射波，在实心弹性体内部传播的波则主要包括瑞利表面波和廊式回波，而在壳体内部则主要是 Lamb 波。共振散射理论已成功在平面波入射下的球和球壳上验证，其中对实心球^[171,172]和厚球壳^[173]，应减去刚性背景项；对足够薄的壳^[174]，应减去柔性背景项。注意当球壳厚度介于薄壳和厚壳之间时，可以从总散射中减去混合背景项^[175,176]来分离共振散射。因此，纯共振散射的形态函数 f^{res} 可以表述为

$$f^{res}(ka, \theta, \beta, \varphi) = f(ka, \theta, \beta, \varphi) - f^{r,s}(ka, \theta, \beta, \varphi) \quad (4.3)$$

其中， $f^{r,s}$ 分别描述刚性 (rigid) 和柔性 (soft) 散射背景的形态函数。刚性背景可认为是刚性球的散射场；同样，柔性背景可认为是柔性球的散射场。需要注意，习惯上常用形态函数的模值来描述声散射场，而实际计算得到的形态函数是复数。因此，在计算共振散射形态函数时，应该先在复数域上将总的形态函数减去背景项，再对相减后的复数求模值，最终计算得到形态函数。

4.3 Bessel 波一般入射下声散射理论模型验证

考虑 Bessel 波正入射时理想流体中的刚性球，Marston 根据 Bessel 波的物理构成，

采用平面波叠加法分别推导了零阶和一阶 Bessel 波正入射时的形态函数，但该方法有一个弊端：对不同阶的 Bessel 波，需要在数学上反复推导。为了克服这个问题，第二章 2.2 小节给出了基于柱波函数展开任意阶 Bessel 波正入射下球形目标声散射的统一理论表达式，与 Marston 推导的公式一致；此外，2.3 小节基于多极展开法首次在理论上推导了任意位置任意阶 Bessel 波入射下球形目标的统一表达式。为了验证程序的正确性，分别用基于以上两种理论方法的程序计算了零阶 Bessel 波入射下散射形态函数随散射极角的变化曲线，计算的无量纲频率 $ka=15$ ，波锥角 $\beta=30^\circ$ ，其计算结果见图 4.1。从图中可以看出，在散射角 $\theta=\beta$ 时，形态函数有一个峰值，这可以根据 Bessel 波的波形特性来解释：平面波分量与波轴成 $\beta=30^\circ$ （见图 2.1），局部前向散射和镜反射会使 $\theta=\beta$ 出现散射峰值。此外，正入射时基于多极展开法与基于 Marston 的理论方法计算的形态函数完全一致，该计算结果与参考文献^[78]中 Fig.7 的结果完全一致，验证了本文理论公式以及自制程序的有效性。根据推导的理论公式可知，只需更改拓扑荷数（阶数），程序便可直接扩展到任意阶 Bessel 波入射的情形。需要注意，理论公式和程序中只需改变散射系数便可求得不同材料和边界条件球形目标的声散射，常见的散射系数在附录 III 中给出。为了精炼，本小节不在赘述其它材料和边界条件下球形目标声散射，部分结果将会在后续章节给出。

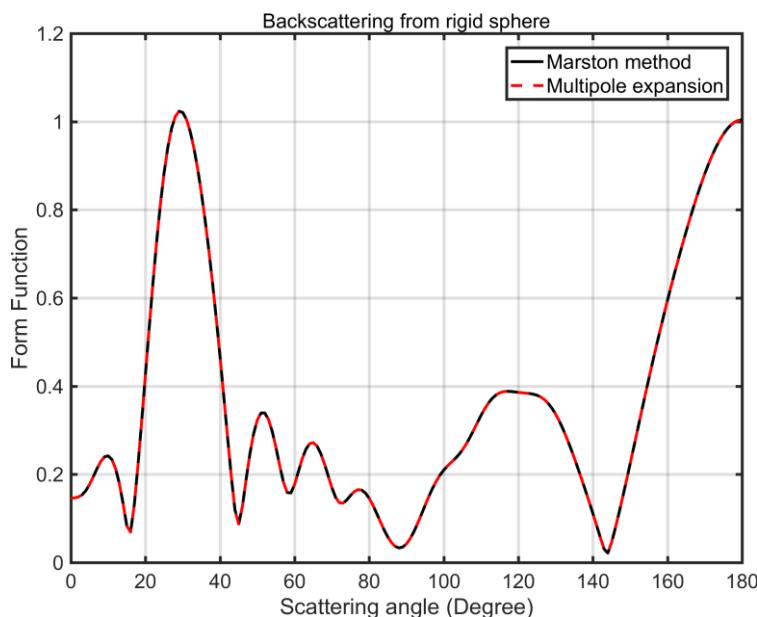


图 4.1 多极展开法计算刚性球随散射角变化的形态函数

4.4 Bessel 波一般入射下球形目标的散射特性研究

Marston 最先对正入射时球形目标的声散射特性及相关的物理机理做了大量原创性的贡献，本章主要是基于多极展开法探讨任意入射时的声散射特性，重点讨论偏轴入射时的散射特性和共振抑制的规律。

4.4.1 零阶 Bessel 波入射下实心球的共振散射

首先考虑正入射下不同波锥角的零阶 Bessel 入射时弹性球的反向散射形态函数。弹性材料为碳化钨，由于致密材料较弱的辐射阻尼，因此碳化钨球能够在较宽的频率范围内得到狭窄的瑞利共振^[79]。碳化钨的密度为 13.8 g/cm^3 ，纵向和横向波速分别为 6650 m/s 和 3981 m/s 。周围介质为水，其密度为 1 g/cm^3 ，水中声速为 1482.5 m/s 。根据共振散射理论，刚性球的散射场可以作为碳化钨实心球的背景场。为了研究 Bessel 波入射下的共振特性，波锥角 β 的选择满足 $P_n^m(\cos \beta) = 0$ ($m=0$)，具体的 β 见表 4.1。

表 4.1 波锥角 β 满足 $P_n^m(\cos \beta) = 0$

Bessel beams	$P_n^m(\cos \beta) = 0$		β
	n	m	
OBB	2	0	54.7346°
	3	0	39.2315°
	4	0	30.5556°
	5	0	25.0173°
FHBB	3	1	63.4349°
	4	1	49.1066°
	5	1	40.0881°
SHBB	4	2	67.7923°
	5	2	54.7356°
	6	2	75.4892°

图 4.2-4.4 分别给出了不同波锥角的 Bessel 波正入射时随无量纲频率变化的刚性背景，总散射场和纯共振的反向散射形态函数，其中当 $\beta=0^\circ$ 时零阶 Bessel 波退化为普通平面波。图 4.2 中，在几何频域区 ($ka > 10$)，平面波和 Bessel 波入射下的反向形态函数模值都在 $|f'| = 1$ 附近震荡，这是因为高频区镜反射波占主导地位，此时镜反射波幅值与散射角无关，称为几何光学限制 (geometric optics limit) [78]。因此不论是平面波，还是 Bessel 波，在高频区散射角为 $\theta=180^\circ$ 时，有 $|f'| \approx 1$ 。图 4.3 描绘了总声场随无量纲频率变化的反向形态函数，通过与图 4.2 对比，在 $ka < 6$ 区间内，总散射场与背景场十分相似，这是由于在此频域内，外表面的镜反射波和 Franz 绕射波对总声场起主要作用，而纯弹性贡献相对较小。形态函数的震荡主要是由于镜反射波和 Franz 波之间的增强和相消干涉；两图在第一个峰值处出现了明显差异，主要原因是在大约 $ka = 1.45$ 处是碳化钨球的偶极子共振模式，这可以通过图 4.4 进一步验证。图 4.4 的共振散射是通过从总散射减去刚性背景后求得，图中可以观察到非常明显的狭窄的共振峰，特别是第二阶到第五阶瑞利共振，其无量纲频率分别对应为 $ka = 7.06, 10.46, 13.38$ 和 16.10 。图中峰值幅值相对较小，频域相对较窄处（如 $ka = 9.02, 11.24, 12.83$ 等）表示廊式回波的贡献占主导地位，这不是本章的研究重点，本章主要研究弹性球的瑞利共振特性。通过进一步观察图 4.4 可知，当 $\beta_2 = 54.7346^\circ$ 时，第二阶瑞利共振 ($ka = 7.06$) 被抑制；同样，当 $\beta_3 = 39.2315^\circ$ 时，第三阶瑞利共振 ($ka = 10.46$) 被抑制；当 $\beta_4 = 30.5556^\circ$ 时，第四阶瑞利共振 ($ka = 13.38$) 被抑制；当 $\beta_5 = 25.073^\circ$ 时，第五阶瑞利共振 ($ka = 16.10$) 被抑制。Marston 根据正轴入射时的形态函数表达式给出了零阶 Bessel 波入射下共振抑制的物理机理，此时的形态函数为^[78]

$$f(ka, \theta, \beta) = \frac{-i}{ka} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(s_n - 1) P_n(\cos \theta) P_n(\cos \beta) \quad (4.4)$$

上式包括了含波锥角 β 的勒让德多项式 $P_n(\cos \beta)$ 。除了图 4.4 中给出的 $\beta=0^\circ$ 以外，根据表 4.1 可知，其余四个波锥角 β_n 分别是当 $n=2, 3, 4$ 和 5 时 $P_n(\cos \beta)=0$ 的根。此时相应的分波被抑制，分波形态函数满足 $f_n(ka, \theta, \beta)=0$ ，因此无法激发起对应的瑞利共振，故出现共振抑制的现象。然而，正入射时的共振抑制现象在偏轴入射时不一定

发生，下面将进一步探讨。如图 4.5 给出了偏轴入射时的几何示意图。

共振频率是目标的固有属性，与激励的类型和方向无关，即正入射和偏轴入射时，共振频率保持不变。注意式 (4.4) 只能解释正入射时的形态函数，但偏轴入射时，需要利用式 (4.2) 来计算形态函数。注意式 (4.2) 在正入射时退化为 (4.4)。不同于

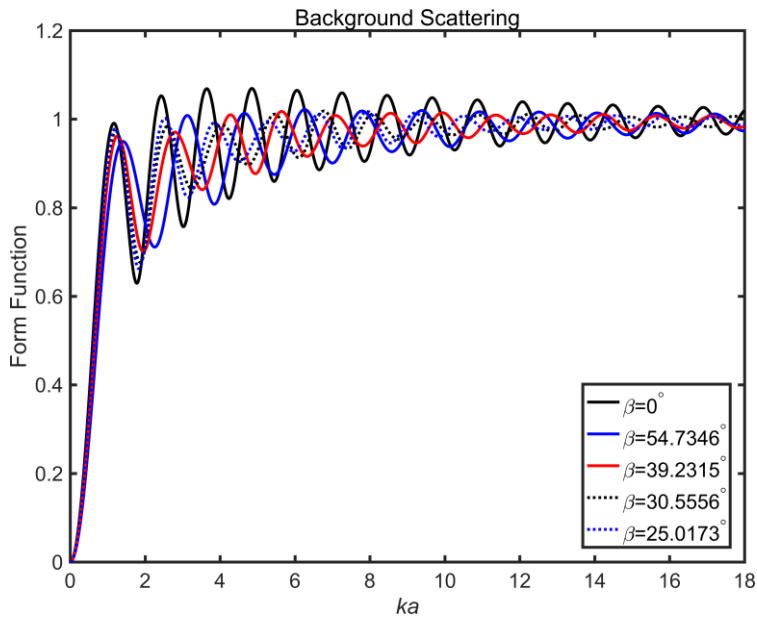


图 4.2 刚性背景反向散射形态函数

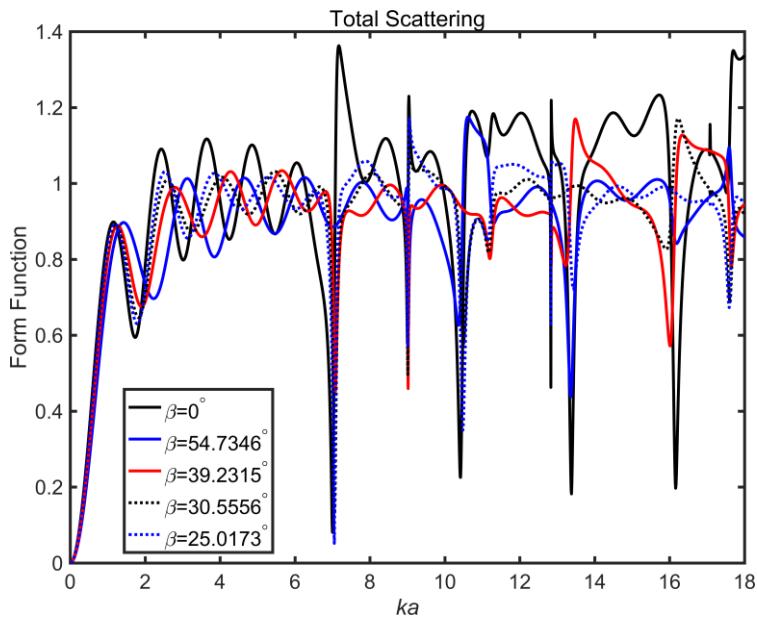


图 4.3 总声场反向散射形态函数

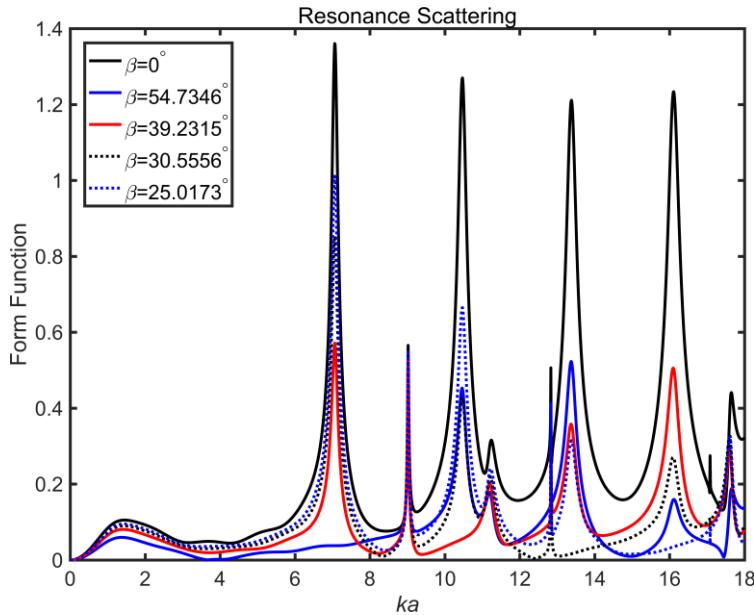


图 4.4 纯共振反向散射形态函数，第一到第五阶瑞利共振分别为 $ka = 1.45, 7.06, 10.46, 13.38$ 和 16.10

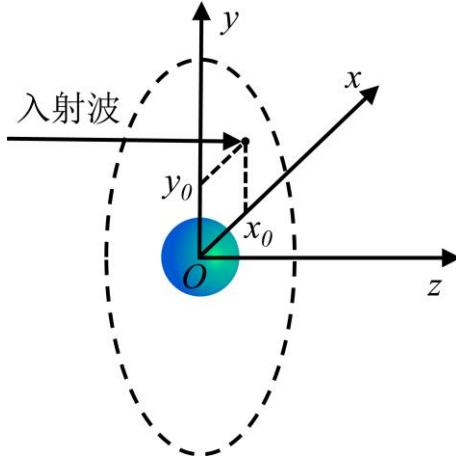


图 4.5 偏轴入射时几何示意图，偏轴量为 (x_0, y_0)

正入射，此时形态函数与方位角指数 m 有关。此外，不同于正入射只需对勒让德多项式 $P_n(\cos \beta)$ 关于分波指数 n 求和，偏轴入射时需对连带勒让德函数 $P_n^m(\cos \beta)$ 关于分波指数 n 和方位角指数 m 求和。在实际计算中，取 $n=[0, N_{\max}]$ ，其中 N_{\max} 是截断系数，在引言中给出。为了讨论偏轴入射时共振抑制与否，图 4.6 给出了第二阶瑞利共振频率 $ka = 7.06$ 处，零阶 Bessel 波偏轴入射时碳化钨实心球的纯共振散射三维指向性图，为了便于比较，正入射下的指向性图一并给出。Bessel 波的入射方向沿 z 轴正方向，见图 (a)。正轴入射时入射波坐标原点 $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ ，见图 4.6 第一行 (a)，

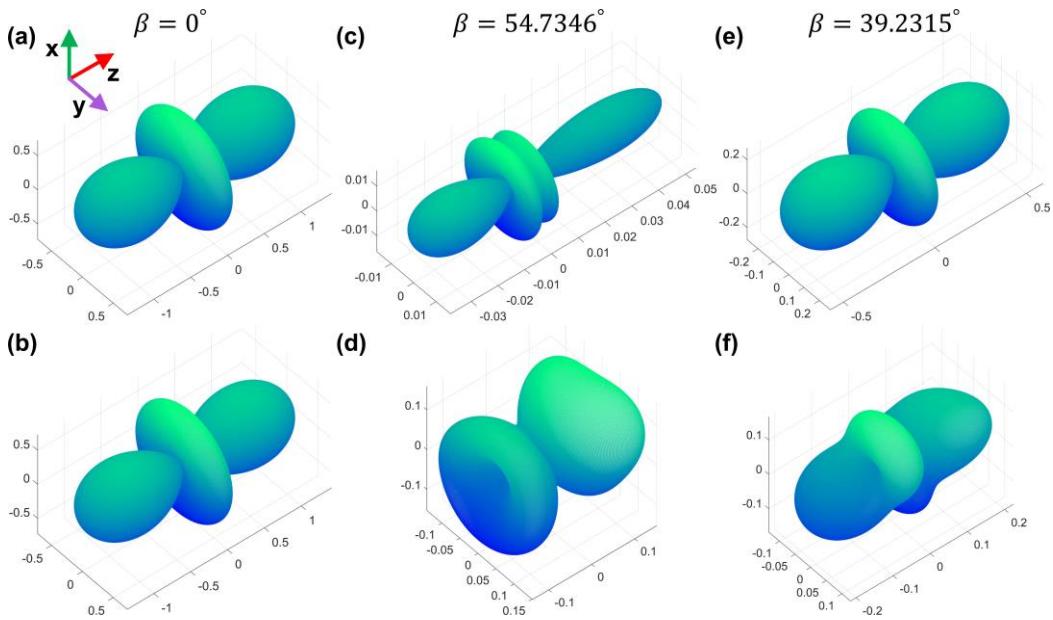


图 4.6 纯共振散射三维指向性图, 第一行: 正入射; 第二行: 偏轴入射

(c) 和 (e); 偏轴入射时偏轴量为 $(x_0, y_0) = (\pi/ka, 2\pi/ka)$, 见图 4.6 第二行 (b), (d) 和 (f)。在本章讨论中, 所有的偏轴量均相同。波锥角分别选择为: $\beta=0^\circ$ 表示平面波入射, $\beta_2=54.7346^\circ$ 表示 $P_2(\cos \beta_2)=0$ 的根, $\beta_2=39.2315^\circ$ 在 $ka=7.06$ 时作为对照。从图 (a) 和 (b) 可以看出, $\beta=0^\circ$ 时共振散射指向性图完全一样, 这是因为理想平面波与偏轴量无关。然而, Bessel 波入射下, 三维指向性图正入射和偏轴入射时不同。可以看出, 偏轴入射时, (d) 和 (f) 均不再具有回旋对称性, 而此时正入射时共振指向性图仍具有回旋对称性, 见图 (c) 和 (e)。尤其需要注意, 如图 (c) 所示, 纯共振散射在各个方向被显著抑制, 因此时波锥角满足 $P_2(\cos \beta_2)=0$, 第二阶分波的影响消失, 无法激起第二阶瑞利散射, 此时出现共振抑制。但通过对比 (d) 发现, 偏轴入射时共振并没有被抑制, 仍与其他波锥角下的散射具有相同数量级。这是因为偏轴入射时, 分波贡献既与分波系数 n 有关, 也与方位角系数 m 相关, 此时形态函数满足: $f^{res} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n P_n^m(\cos \beta)$ 。在 $ka=7.06$ 时, 波锥角满足 $P_2(\cos \beta_2)=0$ 但 $P_2^m(\cos \beta_2)$ 其它分量并不一定衰减到零, 因此可以解释偏轴入射下, 相应的共振并不能被抑制。此外, 二阶瑞利共振具有四极模式^[172], 可从图 (a) 和 (b) 平面波入射下的结果观察得到。

4.4.2 高阶 Bessel 漩涡波入射下实心球的共振散射

高阶 Bessel 漩涡波与普通 Bessel 波不同，具有中空的横向截面强度分布以及螺旋相位分布，此时入射波与方位角有关。一阶 Bessel 波正入射时球的形态函数可表述为 [80]

$$f(ka, \theta, \beta, \varphi) = \frac{-i}{ka} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} (s_n - 1) P_n^1(\cos \theta) P_n^1(\cos \beta) e^{i\varphi} \quad (4.5)$$

其中， P_n^1 表示连带勒让德函数。通过观察式 (4.5)，可进一步证明散射场与方位角 φ 相关。高阶 Bessel 螺旋波的波锥角并不存在 $\beta=0^\circ$ 的情况，此时 $k_r=k \sin \beta=0$ 使式 (2.10) 中 $J_M(k_r R')$ 项在 $M \geq 1$ 时为零。而对普通 Bessel 波 ($M=0$)， $\beta=0^\circ$ 描述普通平面波。对一阶 Bessel 波正入射时，其前向和反向散射消失。根据式 (4.5) 可知，当 $\theta=0^\circ$ 和 $\theta=180^\circ$ 时 $P_n^1(\cos \theta)=0$ ，因此形态函数 $|f|=0$ 。在计算高阶 Bessel 声散射随无量纲频率的二维曲线图中，散射角不再选择反向散射 $\theta=180^\circ$ ，而是选择 $\theta=149.444^\circ$ ，此时 $P_n^1(\cos \theta)=2.3978$ ^[80]。图 4.7 给出了一阶 Bessel 波正入射下碳化钨球的共振散射形态函数随 ka 变化的曲线图，可以看出，共振频率与零阶 Bessel 波入射时一致。图 4.7 中波锥角选择为 $P_n^1(\cos \beta)=0$ 的根，因此并没发生共振抑制现象；而图 4.8 中波锥角选择为 $P_n^1(\cos \beta)=0$ 的根，如表 4.1 所示。在 $\beta_3^1=63.4349^\circ$ 时第三阶瑞利共振 $ka=10.46$ 处出现共振抑制， $\beta_4^1=49.1066^\circ$ 时第四阶瑞利共振 $ka=13.38$ 处出现共振抑制，在 $\beta_5^1=40.0881^\circ$ 时第五阶瑞利共振 $ka=16.10$ 处出现共振抑制。根据式 (4.5) 可知，当波锥角选择使连带勒让德函数为零时，此时 n 阶分波对散射的贡献消失，因此无法激起相应的共振。为了进一步验证正入射时，任意阶 Bessel 波的共振抑制规律，二阶 Bessel 漩涡波正入射时，不同波锥角入射下散射角 $\theta=149.444^\circ$ 处的形态函数随 ka 变化的曲线如图 4.9 所示。相应的波锥角选择使 $P_n^2(\cos \beta)=0$ 的角度值，见表 4.1。可以看出，对应的共振被抑制： $\beta_4^2=67.7923^\circ$ 时第四阶瑞利共振 $ka=13.38$ 处出现共振抑制， $\beta_4^2=54.7356^\circ$ 时第五阶瑞利共振 $ka=16.10$ 处出现共振抑制。可以得出：正入射时当 m 阶 Bessel 波的波锥角满足 $P_n^m(\cos \beta)=0$ 时， n 阶瑞利共振会出现抑制现象。

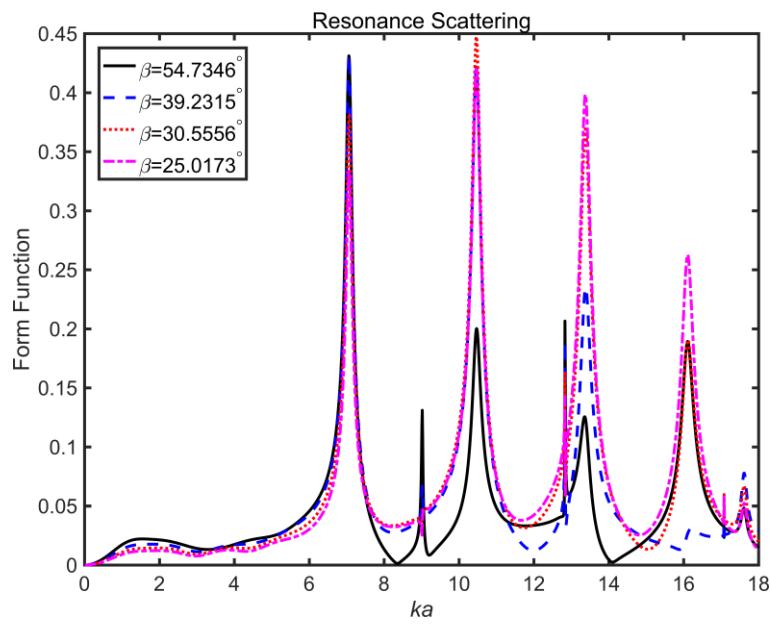


图 4.7 一阶 Bessel 漩涡波正入射下碳化钨实心球纯共振散射形态函数：无共振抑制

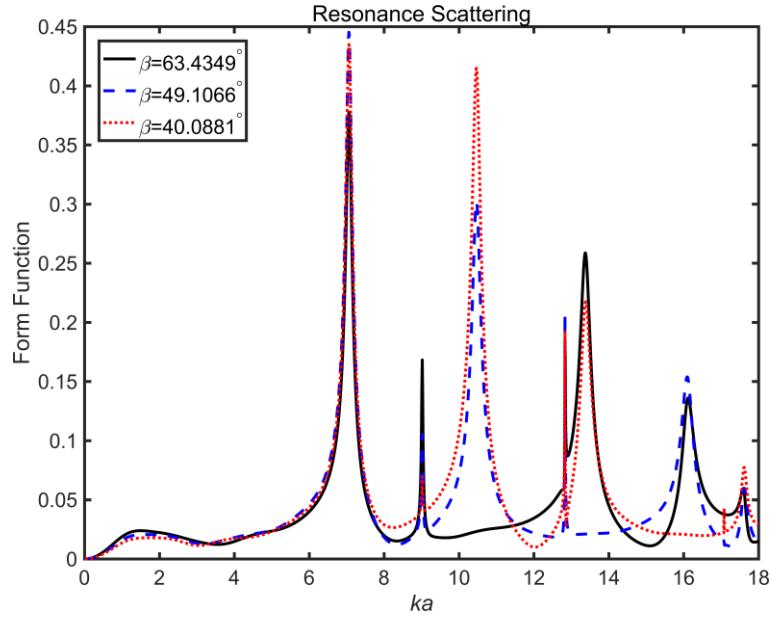


图 4.8 一阶 Bessel 漩涡波正入射下碳化钨实心球纯共振散射形态函数：存在共振抑制

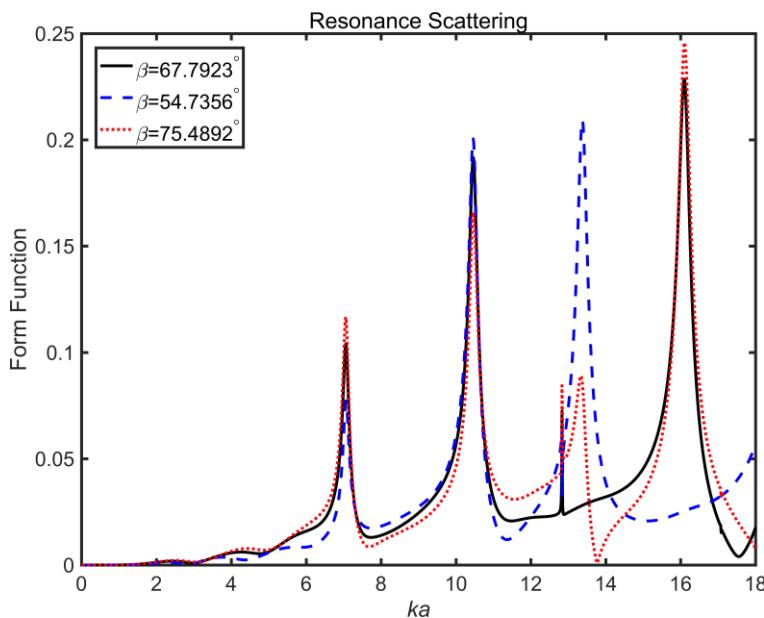


图 4.9 二阶 Bessel 漩涡波正入射下碳化钨实心球纯共振散射形态函数：存在共振抑制

为了进一步探讨高阶 Bessel 漩涡波的共振散射特性，图 4.10 和 4.11 分别给出了第三阶共振频率 $ka = 10.46$ 处不同波锥角时一阶 Bessel 波正入射和偏轴入射时声散射三维指向性图，包括刚性背景，总散射场和纯共振散射。图 4.10 中，波锥角 $\beta = 63.4349^\circ$ 满足 $P_3^1(\cos \beta) = 0$ ，图 4.11 中，波锥角 $\beta = 49.1066^\circ$ 有 $P_3^1(\cos \beta) \neq 0$ 。与图 4.6 类似，入射方向沿 z 轴正方向，第一行表示正入射，第二行表示斜入射，偏轴量为 $(x_0, y_0) = (\pi/ka, 2\pi/ka)$ 。需要注意，偏轴入射时散射场均不再具有回旋对称性，此时虽然 Bessel 波和球分别具有回旋对称性，但偏轴时入射波关于球心不再具有对称性，故散射场也不具有回旋对称性。由于波锥角的选择，图 4.10 (e) 中正入射时出现了明显的共振抑制，而斜入射时共振抑制不明显，如图 4.10 (f)，这与图 4.6 中 (c) 和 (d) 得出的结论一致。偏轴入射时，图 4.10 (d) 总散射场最大值小于 (b) 中刚性背景的最大值，这可能是弹性共振波与外部流体中的 Franz 波或镜反射波发生了相消干涉。注意图 4.11 中选择的波锥角不会抑制第三阶分波，因此没有抑制相应的共振，如图 (e) 所示，其共振共有 6 个花瓣，进一步验证 $ka = 10.46$ 处激起第三阶瑞利共振。注意，共振特性描述了物理的固有属性，在不同的声激励下，其共振频率是固定的，但共振振型与入射波类型有关，如图 4.11 (e) 中第三阶瑞利共振表现出八极模式，但其在前向和反向散射为零；而当 $ka = 10.46$ 零阶 Bessel 波入射时，共振振型仍是八

极模式，但其前向和反向散射出现峰值^[177]，与一阶 Bessel 波振型不同。在波锥角 $\beta=49.1066$ 时，在 $ka=10.46$ 处并不会出现共振抑制，根据图 4.11 (e) 和 (f) 可以观察：正入射的共振散射比偏轴入射的共振散射最大值强，这是因为正入射时更多能量作用在球体上，激起了更强的共振散射。

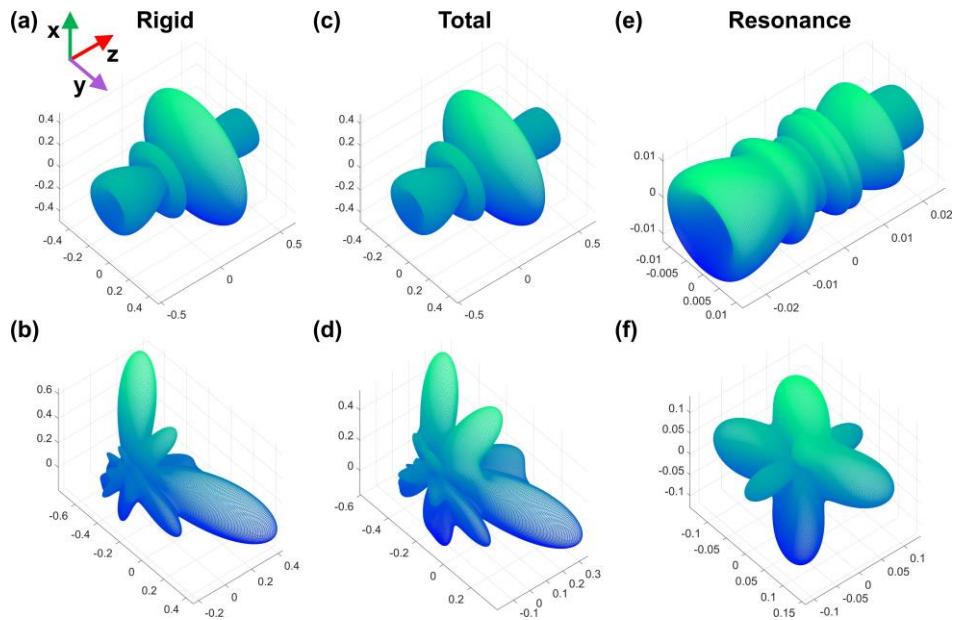


图 4.10 一阶 Bessel 波正轴和偏轴入射时声散射三维指向性图，波锥角 $\beta=63.4349^\circ$

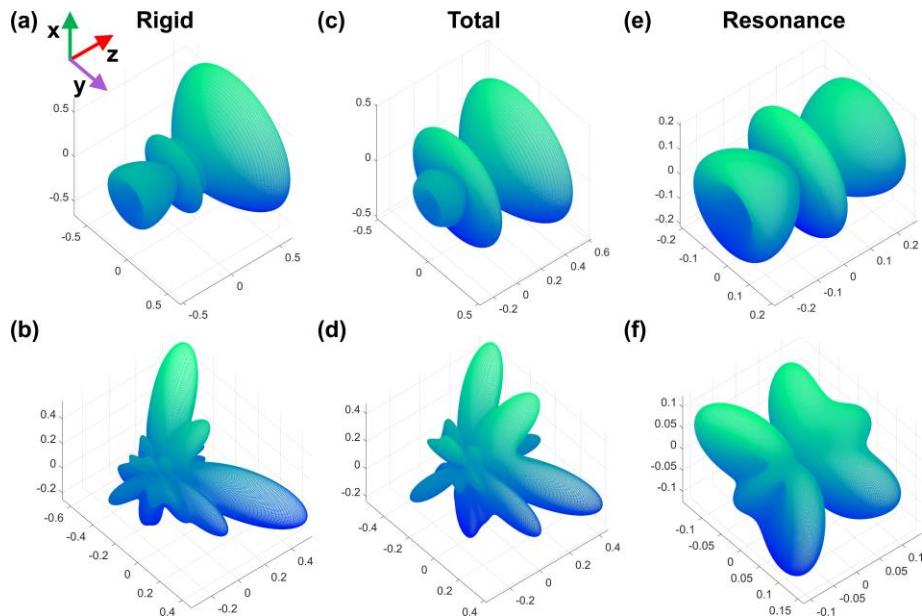


图 4.11 一阶 Bessel 波正轴和偏轴入射时声散射三维指向性图，波锥角 $\beta=49.1066^\circ$

4.4.3 高阶 Bessel 漩涡波入射下薄壳和厚壳的共振散射

在工程实践中，除了弹性实心球广泛存在并被研究外，球壳也受到了较大的关注和重视。本小节简要探讨薄壳和厚壳在一阶 Bessel 漩涡波下的共振散射特性，重点讨论不同厚度壳的背景散射的选择和壳体中弹性波的成分。根据共振散射理论，刚性背景可以用于从总散射场中分离出弹性实心球的纯共振散射，但对于分离球壳的共振散射，刚性背景并不完全适用。通常，对薄壳来说，需要采用柔性背景，而对厚壳来说，需要采用刚性背景^[173,174]。特别地，对同一个球壳，当考虑低频时需采用柔性背景，而考虑较高频率时需采用刚性背景^[165]。从薄壳到厚壳转换时其内外径尺度比大约为 $b/a = 0.975$ ^[170]；当球壳厚度介于薄壳和厚壳之间时，可以采用混合背景来更准确地分离出纯共振散射^[175,176]。在本小节的讨论中，只考虑较低频率的情况，因此可以分别用柔性和刚性背景分离出薄壳和厚壳的共振散射。

考虑理想流体中的钢质空心球壳在一阶 Bessel 波正入射时的共振散射特性。球壳的密度为 7.84 g/cm^3 ，横波和纵波的速度分别为 3150 m/s 和 5854 m/s 。流体介质为水，其材料特性与 4.4 节中相同。薄壳的内外径比选择为 $b/a = 0.999$ ，对应厚度为 0.1% ；厚壳内外径比为 $b/a = 0.95$ ，对应的厚度为 5% 。一阶 Bessel 波入射下，散射角为 $\theta=149.444^\circ$ 时，薄壳和厚壳随无量纲频率 ka 变化的二维共振形态函数曲线分别见图 4.12 和 4.13。其中，图 4.12 是薄壳总散射场减去柔性背景所得，图 4.13 是厚壳总散射场减去刚性背景后所得。Bessel 波锥角的选择见表 4.1，满足 $P_n^1(\cos \beta) = 0$ 。与实心球类似，选择特定的波锥角使相应的共振被抑制。薄壳情况下，第三阶共振在波锥角 $\beta_3^1 = 63.4349^\circ$ 满足 $P_3^1(\cos \beta) = 0$ 时出现抑制 ($ka = 12.04$)；第四阶共振在波锥角 $\beta_4^1 = 49.106^\circ$ 满足 $P_4^1(\cos \beta) = 0$ 时出现抑制 ($ka = 15.75$)；第五阶共振在波锥角 $\beta_5^1 = 40.088^\circ$ 满足 $P_5^1(\cos \beta) = 0$ 时出现抑制 ($ka = 19.44$)。同样，厚壳情况下，选择合适的波锥角可以抑制相应的共振。三维共振散射指向性图的规律与实心球一致，在此不再赘述。

通过对比薄壳和厚壳的共振散射曲线可知，在计算的无量纲频域内，薄壳的共振峰与厚壳的相比更尖削和稀疏，这可以用平面波入射下壳体的散射机理解释^[178]：薄

壳中只有零阶对称和反对称 Lamb 波对弹性散射起主导作用,而厚壳中除了零阶 Lamb 波贡献外,还有其它多种成分起主要作用,包括壳体内表面的散射波以及其他高阶类型的 Lamb 波。注意,零阶 Lamb 波在薄壳中传播过程中几乎不会发生频散,这可以解释 Bessel 波入射下薄壳相对简单的共振峰分布结构,以及共振峰在频域内大致等间距分布等特性,如图 4.12 所示。

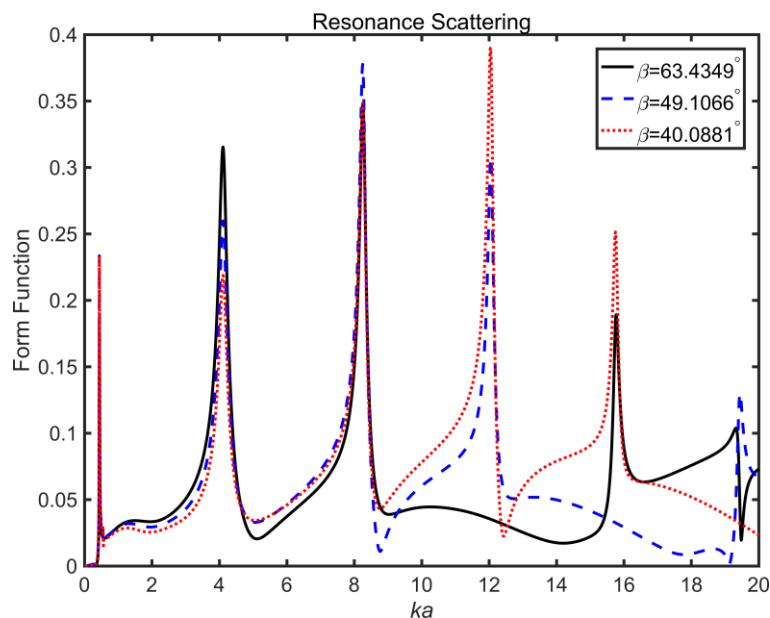


图 4.12 薄壳二维纯共振散射曲线图

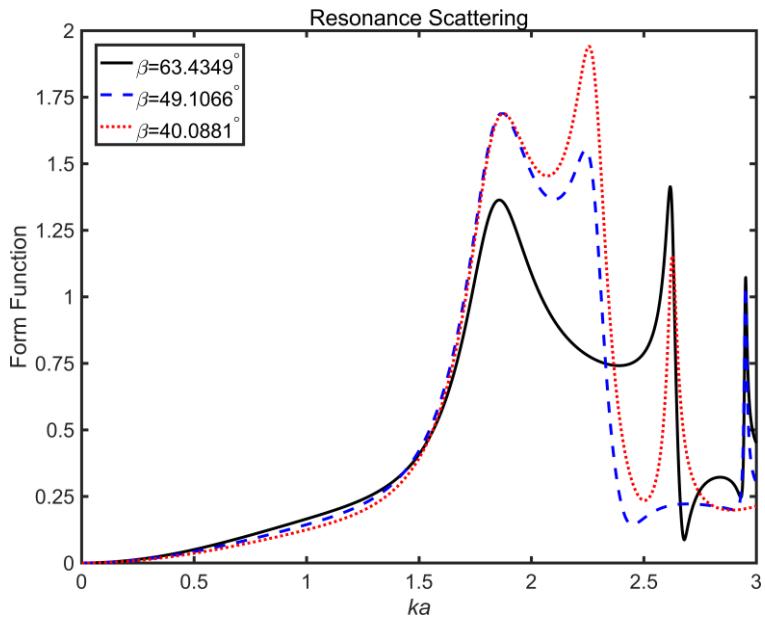


图 4.13 厚壳二维纯共振散射曲线图

4.5 本章小结

本章利用基于多极展开法推导的任意位置任意阶 Bessel 波入射下的球形粒子散射的理论模型公式，研究了任意 Bessel 波入射下球形粒子的散射特性。当入射波相对于球形目标不存在偏轴时，多极展开的理论表达式退化为 Marston 基于平面波叠加法推导的正入射时的理论表达式，并通过数值计算验证正确。本章工作主要是简要回顾 Bessel 波正入射的散射特性，重点研究任意入射时弹性实心球和球壳的散射特性。根据共振散射理论，正入射时选择合适的波锥角，Bessel 波正入射时可以抑制特定阶的共振，但相同参数条件下偏轴入射时，共振抑制不明显，并根据正轴入射和任意入射下形态函数的理论表达式对物理规律加以解释。此外，探讨和分析了薄壳和厚壳背景散射的选取以及不同厚度球壳中弹性散射的主要成分。

5 Bessel 波入射下复杂目标声散射研究

5.1 引言

非球形目标的声散射特性研究在工程实践中具有重要意义，如空气中的液滴，生物组织中的细胞等，需要用椭球或有限圆柱等形状来建立数学物理模型。Bessel 波的散射特性分析，对其在声辐射力和力矩的物理机理研究中有重要地位，可以进一步推动 Bessel 波在粒子操控领域的潜在应用。上一章利用球坐标系下任意 Bessel 波入射下的理论解，对球和球壳的散射规律进行了探讨，但该理论方法无法直接适用于非球形粒子的声散射研究。因此，本章将 T 矩阵法引入到 Bessel 波声散射计算的领域中，重点研究非球形粒子的散射特性，进一步认识 Bessel 波的物理结构特性和非球形粒子的散射规律。

5.2 基于 T 矩阵法刚性复杂目标散射特性研究

5.2.1 Q 矩阵结构和性质

根据 2.4.1 的推导，对刚性边界条件的目标，求解 Q 矩阵便可求得联系入射和散射系数的 T 矩阵。将基波函数和边界条件的表达式代入式（2.37），可得任意回旋形状的刚性目标 Q 矩阵元素的具体表达式：

$$Q_{nm,n'm'}^{\sigma\sigma'} = \int_0^\pi \xi_{n'm'} j_{n'}(kr) P_n^{m'}(\cos\theta) \xi_{nm} \left[\frac{\partial h_n^{(1)}(kr)}{\partial r} P_n^m(\cos\theta) - \frac{r_0}{r^2} h_n^{(1)}(kr) \frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial \theta} \right] (5.1)$$

$$\times r^2 \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos m'\varphi \\ \sin m'\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} d\varphi$$

理论上，根据式（2.37）通过对任意形状表面进行积分来求解 Q 矩阵；但实际数值计算时，任意形状的积分计算量非常大，并且容易出现数值计算不稳定，造成结果不准确。但当目标形状具有回旋对称性时， Q 矩阵能够根据回旋性极大简化，并能够正确有效求解转换矩阵，这也是 T 矩阵法求解回旋粒子声散射相对于其他数值算

法有优势的原因。

根据回旋对称性，下面进一步讨论 Q 矩阵的结构和简化方法。式(5.1)给出矩阵单元的具体元素表达式 $Q_{nm\sigma,n'm'\sigma'}$ ，根据方位角奇偶性可将 Q 矩阵分为四个子矩阵，装配如下

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{nm,n'm'}^{ee} & Q_{nm,n'm'}^{eo} \\ Q_{nm,n'm'}^{oe} & Q_{nm,n'm'}^{oo} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

其中，对含有偶对称的子矩阵， n 取 $0,1,\dots,\infty$ ， m 取 $0,1,\dots,n$ ；对含有奇对称的子矩阵， n 取 $0,1,\dots,\infty$ ， m 取 $1,2,\dots,n$ ，实际编程计算时在 $n=N_{\max}$ 处截断。以子矩阵 $Q_{nm,n'm'}^{ee}$ 为例，当 $n=n'=2$ 时，此时子矩阵尺寸为 6×6 ，具体排列为

$$Q^{ee} = \begin{bmatrix} Q_{00,00}^{ee} & Q_{00,10}^{ee} & Q_{00,11}^{ee} & Q_{00,20}^{ee} & Q_{00,21}^{ee} & Q_{00,22}^{ee} \\ Q_{10,00}^{ee} & Q_{10,10}^{ee} & Q_{10,11}^{ee} & Q_{10,20}^{ee} & Q_{10,21}^{ee} & Q_{10,22}^{ee} \\ Q_{11,00}^{ee} & Q_{11,10}^{ee} & Q_{11,11}^{ee} & Q_{11,20}^{ee} & Q_{11,21}^{ee} & Q_{11,22}^{ee} \\ Q_{20,00}^{ee} & Q_{20,10}^{ee} & Q_{20,11}^{ee} & Q_{20,20}^{ee} & Q_{20,21}^{ee} & Q_{20,22}^{ee} \\ Q_{21,00}^{ee} & Q_{21,10}^{ee} & Q_{21,11}^{ee} & Q_{21,20}^{ee} & Q_{21,21}^{ee} & Q_{21,22}^{ee} \\ Q_{22,00}^{ee} & Q_{22,10}^{ee} & Q_{22,11}^{ee} & Q_{22,20}^{ee} & Q_{22,21}^{ee} & Q_{22,22}^{ee} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

当 n 和 n' 取不同奇偶性时，以 Q^{eo} 为例，当 $n=n'=2$ ，有 $m=0,1,2$ ， $m'=1,2$ ，此时子矩阵尺寸为 6×3 ，具体排列为

$$Q^{eo} = \begin{bmatrix} Q_{00,11}^{eo} & Q_{00,21}^{eo} & Q_{00,22}^{eo} \\ Q_{10,11}^{eo} & Q_{10,21}^{eo} & Q_{10,22}^{eo} \\ Q_{11,11}^{eo} & Q_{11,21}^{eo} & Q_{11,22}^{eo} \\ Q_{20,11}^{eo} & Q_{20,21}^{eo} & Q_{20,22}^{eo} \\ Q_{21,11}^{eo} & Q_{21,21}^{eo} & Q_{21,22}^{eo} \\ Q_{22,11}^{eo} & Q_{22,21}^{eo} & Q_{22,22}^{eo} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

同样，在相同的截断项时 Q^{oe} 和 Q^{oo} 的尺寸分别为 3×6 和 3×3 ，可以求得装配后的总的 Q 矩阵尺寸为 9×9 。实际上， Q 矩阵的尺寸装配后的尺寸为 $(N_{\max}+1)^2 \times (N_{\max}+1)^2$ ， N_{\max} 为截断系数，对 $N_{\max} = 3 + kr_0 + 4.05(kr_0)^{1/3}$ 取整数。根据几何形状的回旋对称性，以及式(5.1)， Q 矩阵中部分元素可进行如下简化：

(a) 根据三角函数的正交性 $\int_0^{2\pi} \cos m'\varphi \sin m\varphi d\varphi = 0$ ，可知： $Q_{nm,n'm'}^{eo} = Q_{nm,n'm'}^{oe} = 0$ ；

(b) 同样根据三角函数的正交性, 当 $m \neq m'$ 时 $\int_0^{2\pi} \sin m' \varphi \sin m \varphi d\varphi = 0$ 和

$$\int_0^{2\pi} \cos m' \varphi \cos m \varphi d\varphi = 0, \text{ 可知: } Q_{nm,n'm'}^{ee} = Q_{nm,n'm'}^{oo} = 0;$$

(c) 根据 $\int_0^{2\pi} \cos m' \varphi \cos m' \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin m' \varphi \sin m' \varphi d\varphi$, 可知: 除了 $m=0$ 或 $m'=0$,

有 $Q_{nm,n'm'}^{ee} = Q_{nm,n'm'}^{oo}$ 。注意, 奇对称时不存在 $m=0$ 或 $m'=0$ 。

几何形状的回旋对称性和三角函数的正交性可以大量简化矩阵元素的计算。进一步观察式 (5.1) 可知, 将回旋体表面的二次曲面积分简化为对极角 θ 上的线积分。此外, 镜面对称性能够使积分表达式进一步化简, 包括只需计算 $(n+n')$ 为偶数时的元素, 对极角的积分区间可减小到 $[0^\circ, 90^\circ]$ 。根据以上简化, 只需要求解矩阵元素 $Q_{nm,n'm'}^{ee}$,

$$Q_{nm,n'm'}^{ee} = \alpha_m \xi_{n'm'} \xi_{nm} \int_0^\pi j_{n'}(kr) P_n^{m'}(\cos \theta) \left[\frac{\partial h_n^{(1)}(kr)}{\partial r} P_n^m(\cos \theta) - \frac{r_0}{r^2} h_n^{(1)}(kr) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right] (5.5)$$

$$\times r^2 \sin \theta d\theta$$

其中, $m \neq 0$ 时 $\alpha_m = \pi$, 其他情况 $\alpha_m = 2\pi$ 。

当考虑柔性边界条件时, 对比式 (2.42) 与 (2.37) 可知, 只需要将刚性边界条件下矩阵表达式 (5.1) 中汉克尔函数 (导数) 与 Bessel 函数 (导数) 互换, 可得

$$Q_{nm,n'm'}^{oo} = \int_0^\pi \xi_{n'm'} h_n^{(1)}(kr) P_n^{m'}(\cos \theta) \xi_{nm} \left[\frac{\partial j_n(kr)}{\partial r} P_n^m(\cos \theta) - \frac{r_0}{r^2} j_n(kr) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right] (5.6)$$

$$\times r^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos m' \varphi \\ \sin m' \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos m \varphi \\ \sin m \varphi \end{pmatrix} d\varphi$$

因此, 只需要在程序中更改 Q 矩阵中相应的函数, 便可将计算刚性目标的 T 矩阵程序扩展到计算柔性目标, 但本章讨论的重点在刚性和弹性边界条件的声散射问题, 声学软边界条件的情况不在考虑范围。

5.2.2 Bessel 波入射下刚性椭球目标散射研究

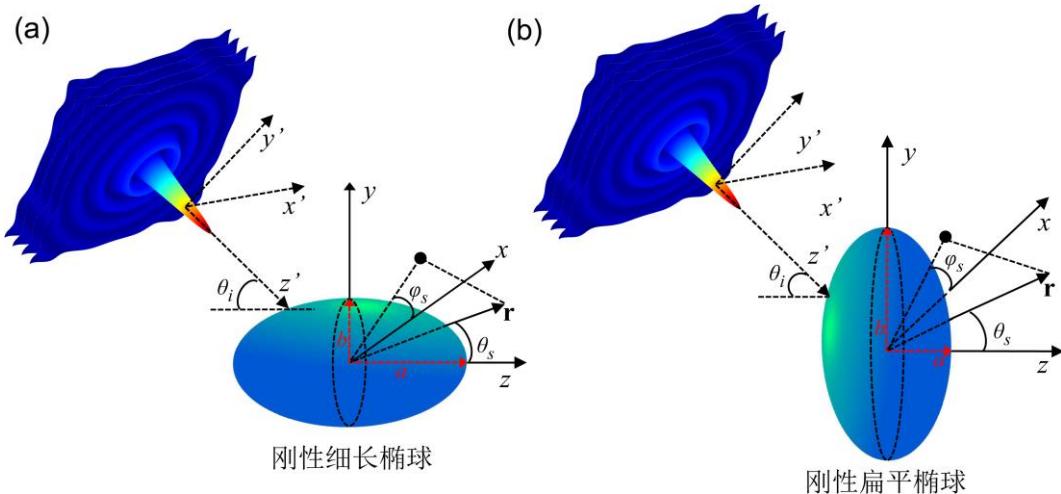


图 5.1 刚性椭球在零阶 Bessel 波任意方位入射下的示意图

(a) 细长椭球; (b) 扁平椭球

考考虑理想流体中零阶 Bessel 波入射下刚性椭球的声散射模型, 如图 5.1 所示。刚性椭球具有回旋对称形状, 其几何形状只与极角 θ 有关, 与方位角 φ 无关, 表面上场点的具体的表达式为

$$r(\theta) = \left(\cos^2 \theta / a^2 + \sin^2 \theta / b^2 \right)^{-1/2} \quad (5.7)$$

其中, a 表示极半径, 表示沿回旋对称轴上中心到端点之间的距离, b 表示赤道半径。注意, 当 $a > b$ 时, 此时为细长椭球, 如图 5.1 (a) 所示; 当 $a < b$ 时, 此时为扁平椭球, 如图 5.1 (b) 所示; 当 $a=b$ 时, 椭球退化成球, 此时几何形状与极角和方位角均无关。基于分波序列法求解 Bessel 波入射下球形目标的声散射已在第四章详细讨论, 但球坐标系下该方法无法直接计算椭球目标的声散射。以分波序列理论为基础, Mitri 通过引入数值算法来计算小尺度比刚性椭球的散射, 但其方法由于在矩阵求逆过程中产生了病态条件, 只能求解尺度比不大于 3:1 的刚性椭球, 且计算频率也受到较大的限制^[179,180]。因此, 本章将 T 矩阵法引入计算大尺度比刚性椭球的散射, 对其有效性和散射特性机理进行探讨。

5.2.2.1 T 矩阵法计算刚性椭球有效性研究

首先对 T 矩阵法计算刚性椭球形状目标的声散射进行验证, 包括精确性和收敛

性。零阶 Bessel 波入射下，入射波形系数采用式 (2.86) 来计算，为了方便，定义入射极角为 θ_i ，散射极角为 θ_s 。图 5.2 中圆圈表示参考解，分别利用商业软件 GetData 从公开发表的结果中提取。图 5.2 (a) 中计算了平面波正入射下 ($\beta=0^\circ$, $\theta_i=0^\circ$) 尺度比为 $a/b=10$ 时刚性细长椭球的反向散射形态函数，无量纲频率间隔取 $\Delta(ka)=0.02$ 。黑色实线是基于 T 矩阵公式通过自编的 Matlab 程序计算所得，由图可知，基于 T 矩阵法的数值计算能够与 1993 年 Hackman^[181] 的 FIG.37 (A) 中反向散射的结果非常好地吻合。图 5.2 中其余计算均是采用相同的数值程序。(b) 验证了平面波斜入射下 ($\beta=0^\circ$, $\theta_i=45^\circ$) 尺度比为 $a/b=2$ 的刚性椭球的反向散射形态函数，参考解提取自 1982 年 Varadan et al.^[182] 的 FIG.(4) 中的结果，验证了程序计算任意入射下的正确性。当 $\beta \neq 0^\circ$ 时，此时入射波为带波锥角的零阶 Bessel 波。图 (c) 和 (d) 分别给出了零阶 Bessel 波正入射时刚性球和椭球目标的声散射。(c) 计算了波锥角为 $\beta=30^\circ$ 时球形目标多向散射的形态函数，与分波序列计算的理论参考解 (Fig.7 in [78]) 非常好的吻合；此外 (d) 给出了波锥角为 $\beta=60^\circ$ 时椭球目标反向散射的形态函数，并与参考解 (Fig.4. in [180]) 一致。

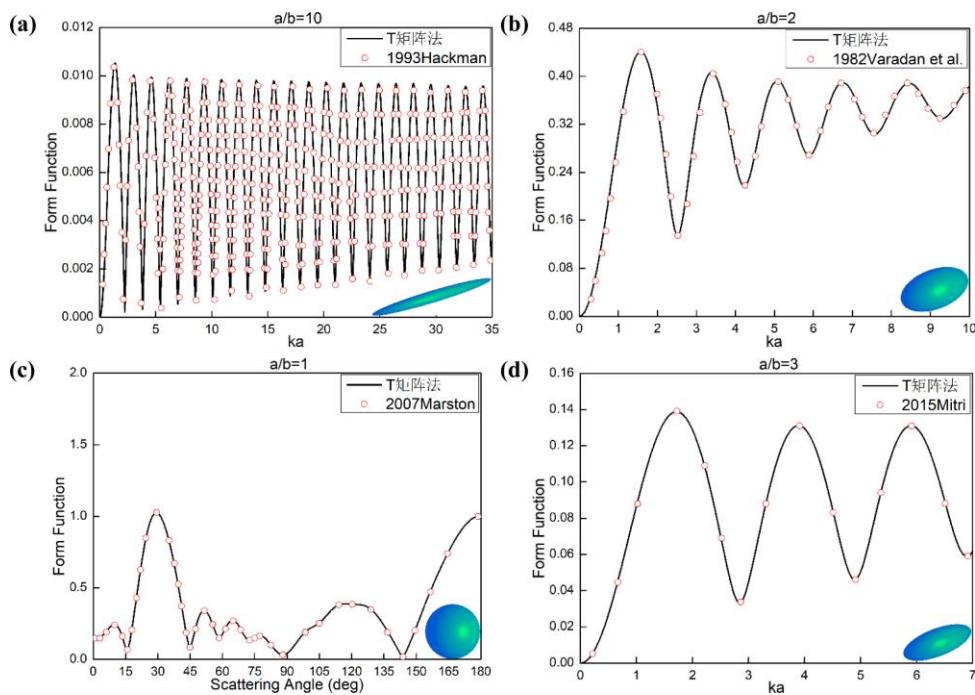


图 5.2 精确性验证

图 5.2 的结果验证了 T 矩阵法计算 Bessel 波入射下刚性椭球声散射的精确性，下面简要探讨 T 矩阵法的收敛性问题。考虑不同波锥角的 Bessel 波正入射下，尺度比为 $a/b=10$ ，无量纲频率 $kr_0 = ka = 10$ 时反向散射形态函数对截断系数 N_{\max} 的变化情况，如图 5.3 所示。由图可知，T 矩阵法即使在计算大尺度比和相对较高频率内仍有较好的收敛性，进一步验证了数值方法和程序的正确性和可靠性。注意当 $kr_0 = 10$ 时，对截断系数 $N_{\max} = 3 + kr_0 + 4.05(kr_0)^{1/3}$ 取整数后为 21，大于此时开始收敛的系数 $N_{\max} = 14$ ，因此该截断系数表达式验证正确可行。

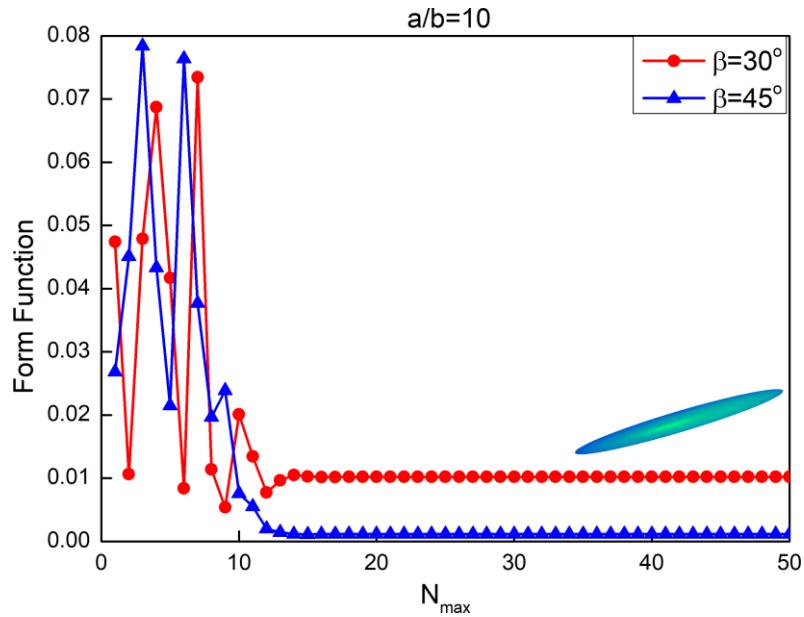


图 5.3 收敛性验证

需要注意，球坐标系下分波序列求解大尺度比椭球时因矩阵病态条件导致求解不准确。同样，球坐标系下的 T 矩阵法在求解大尺度比椭球时也并不总是稳定可靠。这是因为当 $n > n'$ 时，根据式 (5.1) 对表面积分求解 Q 矩阵时存在数值误差，导致计算结果不稳定。为了克服不稳定性，由于刚性目标具有回旋对称性，因此 Q 矩阵具有对角对称性，在实际编程中，通过计算 $n < n'$ 时的 Q 矩阵元素，然后根据对称性映射得到当 $n > n'$ 时正确的 Q 矩阵元素，便可以正确计算整个 Q 矩阵^[90]。此外，当刚性目标不再具有回旋对称性时可以采用 Sarkissian 的方法^[92]或 Doicu et al. 的方法^[33]。上述证明了大尺度 $a/b=10$, $kr_0=10$ 时程序的精确性和收敛性，下面的数值算例的参数选择

均在收敛性验证范围之内。

5.2.2 零阶 Bessel 波正入射下反向散射形态函数

考虑零阶 Bessel 波正入射下，计算不同尺度比的刚性椭球形态函数随无量纲频率 kr_0 的变化曲线。椭球尺度比分别为 $a/b = 1/5, 1/2, 1, 2, 5$ 和 10 ，入射波波锥角分别为 $\beta=0^\circ$ （平面波）， 30° 和 60° ，具体参数均在图 5.4 明确标出。需要注意，对扁平椭球，有 $kr_0 = kb$ ，如图（a）和（b）所示；对细长椭球和球，有 $kr_0 = ka$ ，如图（c）到（f）所示。从图 5.4 中可知，对扁平椭球（a）和（b），反向散射形态函数幅值随着波锥角增大而减小，而细长椭球的反向散射形态函数随着波锥角增大而增大，如图（d）-（f）所示，这可以用亮点模型^[183]来解释：散射体可以被当成各阶分波次级声源的散射亮点组合，对刚性目标而言，主要是几何亮点对反向散射起主导作用，而几何亮点与几何表面点处的曲率半径有关，曲率半径越大，几何亮点的散射强度越强。对扁平椭球，平面波入射时 ($\beta=0^\circ$)，远场散射主要来源于具有较大曲率半径的端点处，通过比较图 5.4 中的扁平椭球（a）和（b）与细长椭球（d）-（f）的反向形态函数，可发现扁平椭球的形态函数比细长椭球大，因细长椭球端点处具有相对较小的曲率半径。此外，随着波锥角的增大，根据 Bessel 波结构的特点，波矢分量入射方向移向赤道半径的端点 ($\theta_s = 90^\circ$ 处)。对扁平椭球来说，随着波锥角增大，表面亮点处的曲率半径逐渐减小，解释了（a）与（b）中形态函数随波锥角增大而减小的现象。同理，对细长椭球，随着波锥角的增大，表面亮点处的曲率半径逐渐增大，解释了（d）-（f）中形态函数随波锥角增大而增大的现象。注意图 5.4（c）中因球表面亮点曲率半径不变，故不同波锥角的 Bessel 入射时形态函数幅值大致保持稳定，并无明显的增大或减小。

为了进一步研究零阶 Bessel 波正入射下的散射特性，图 5.5 绘制了在给定无量纲频率 $kr_0 = 5$ 时不同尺度比刚性椭球的二维散射指向性图，具体的波锥角参数和尺度比在图中详细标出。通过观察可以得出，所有的二维指向性图均关于波轴具有对称性，这可以根据入射波和散射体的对称性来解释。不同波锥角下的入射波对散射场分布有明显的影响，与第四章刚性球的散射规律类似，在散射角局部波矢前进方向附近，会

出现明显的峰值。同一波锥角下，扁平椭球的声场分布与细长椭球明显不同，如扁平椭球的散射最大值出现在正前 ($\theta_i = 0^\circ$) 或正后方 ($\theta_i = 180^\circ$)，而细长椭球最大值分布则不然。此外，不同尺度比的扁平（或细长）椭球的二维指向性图分布相似。

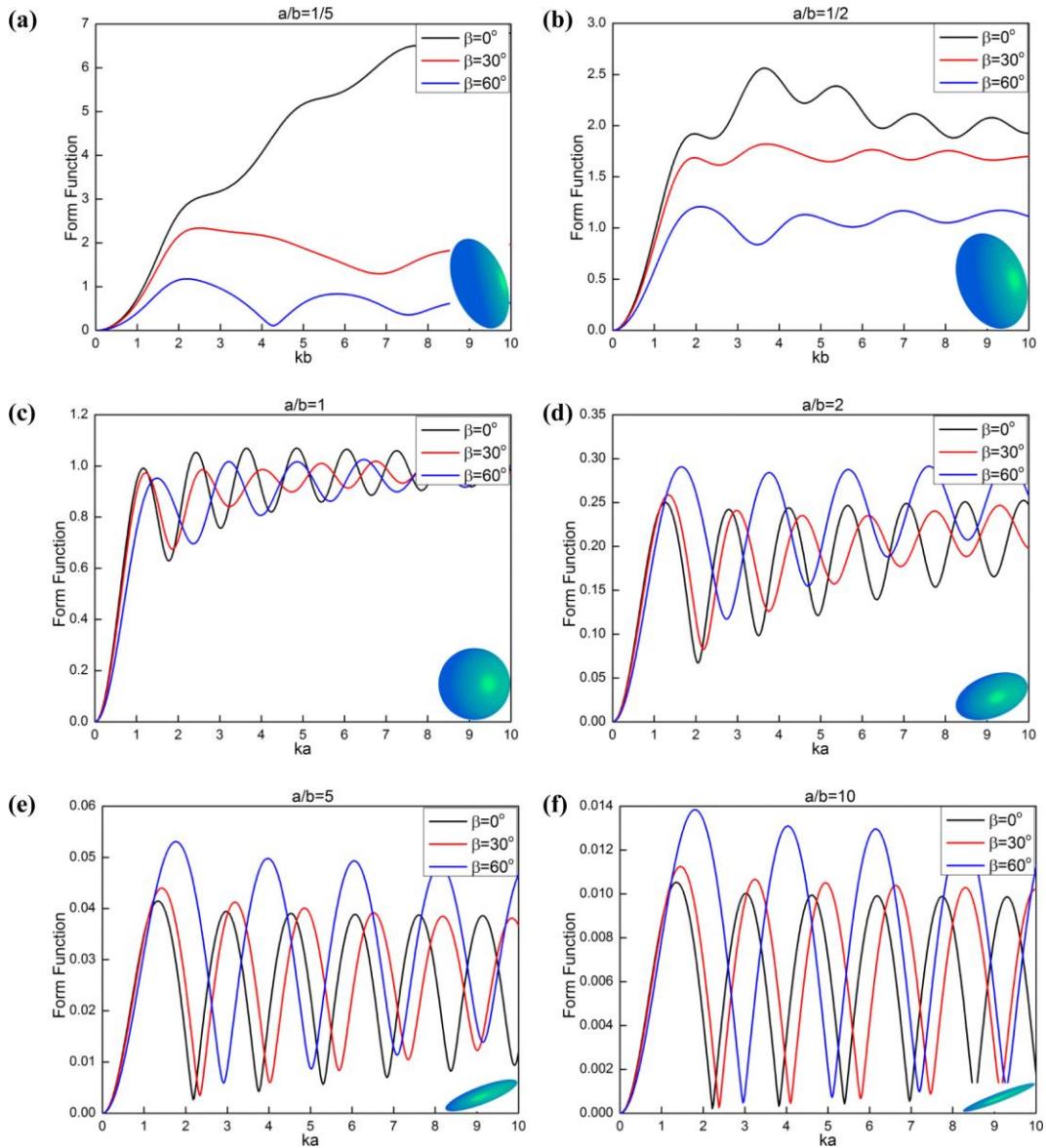


图 5.4 反向散射形态函数

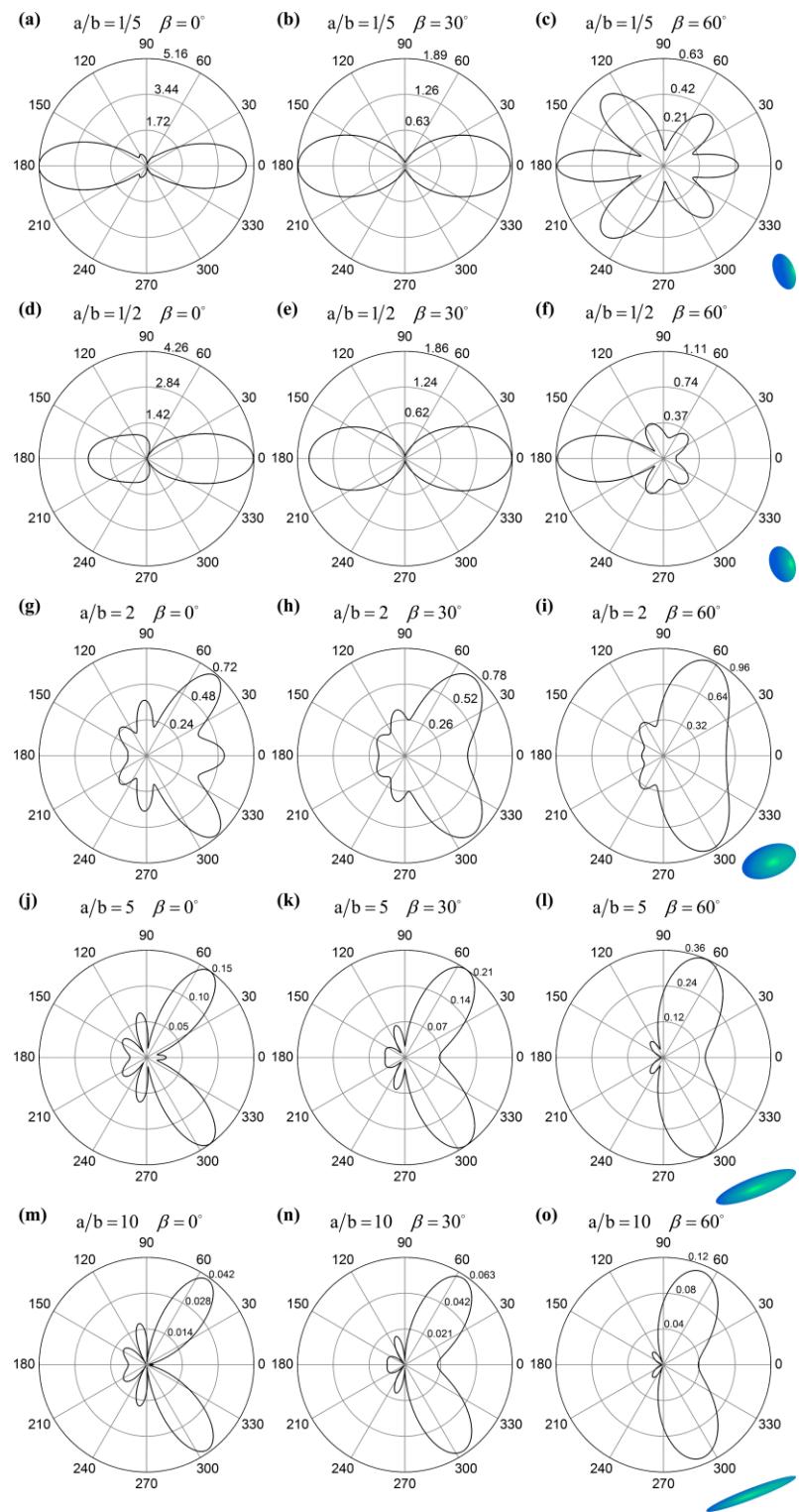


图 5.5 正入射下声散射二维指向性图

5.2.2.3 几何模型

图 5.4 中反向散射形态函数随无量纲频率曲线呈现准周期性震荡，尤其是细长椭球的情况，这主要是由于椭球体表面沿几何形状传播的 Franz 波和在散射体表面的镜反射波的干涉而产生，其几何模型由图 5.6 形象给出。如图 5.6 所示，Bessel 波波矢分量入射到椭球体表面在 A 点产生与传播方向相反的镜反射波，同时波矢分量在 C 点切入开始产生 Franz 波，其绕着椭球体表面传播，从 D 点与几何表面相切地离开并反向传入外部介质中，此时的 Franz 波与镜反射波平行。其中 A 点与 B 点是一对等相点。观察可知，Franz 波比镜反射波多传播一定的距离，其波程差为 $\Delta d = \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE}$ 。假设 Franz 波传播速度与水中声速相同，则与镜反射波产生增强干涉的条件是波程差是波长 λ 的整数倍 N ，有 $\Delta d = N\lambda$ ，则可以得到几何模型预报的反向散射形态函数的峰峰值频率间隔为

$$\Delta(ka) = \frac{2\pi a}{\Delta d} = \frac{2\pi a}{(\overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE})} \quad (5.8)$$

因波锥角的影响，椭球表面的波程差无法给出具体的表达式，故采用数值算法编程求解波程差，来预报峰峰值的频率间隔。对不同尺度比的细长椭球，在不同波锥角的 Bessel 波入射下，根据几何模型预报的频率间隔以及从图 5.4 中直接获取的平均间隔在表 5.1 中列出。可以看出，两种方式得出的峰峰值频率间隔非常吻合，一是验证了提出的几何预报模型的正确性，二是进一步对 Bessel 波的声散射机理进行了诠释。

5.2.2.4 零阶 Bessel 波斜入射时刚性椭球散射特性研究

为了进一步研究斜入射时，椭球的散射特性，图 5.7 绘制了尺度比为 $a/b=2$ 的细长椭球在不同入射角和波锥角时的形态函数二维指向性图。通过观察，可以发现斜入射时 ($\theta_i = 45^\circ$) 指向性图不再具有对称性，因入射波不再关于散射体对称。但当入射角 $\theta_i = 90^\circ$ 时，第三列中指向性图关于入射波轴方向的轴对称，此时入射波和椭球均根据此轴对称，故对不同波锥角入射下，均出现了对称特性。通过观察图 5.7 可知，散射二维指向性图既与入射波的结构有关（不同波锥角），也与入射方向有关。

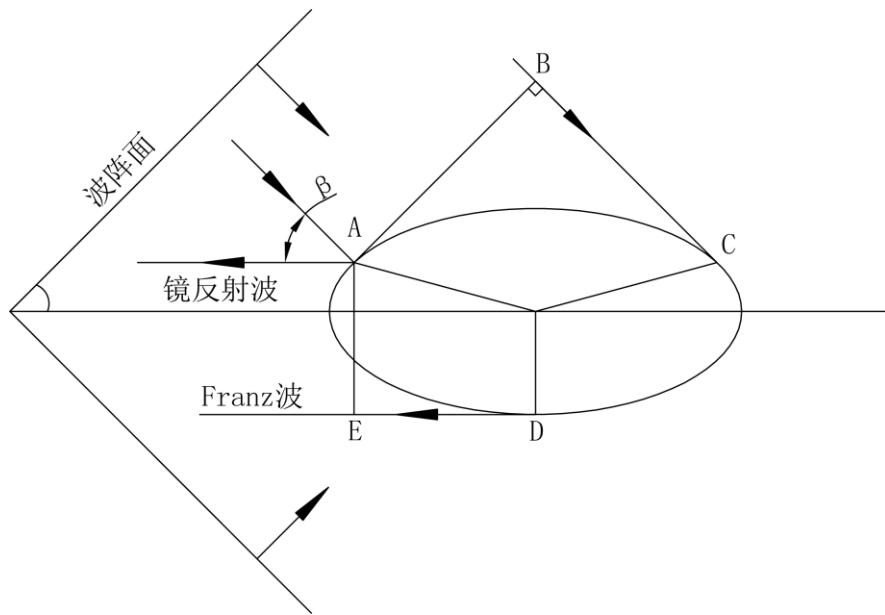


图 5.6 Bessel 波正入射下刚性椭球几何模型

表 5.1 峰峰值频率间隔

尺度比 a/b	波锥角 β	几何模型预报结果	T 矩阵法计算结果
2	0°	1.42	1.42
	30°	1.56	1.57
	60°	2.01	1.96
5	0°	1.51	1.54
	30°	1.62	1.67
	60°	2.14	2.12
10	0°	1.54	1.57
	30°	1.64	1.69
	60°	2.19	2.15

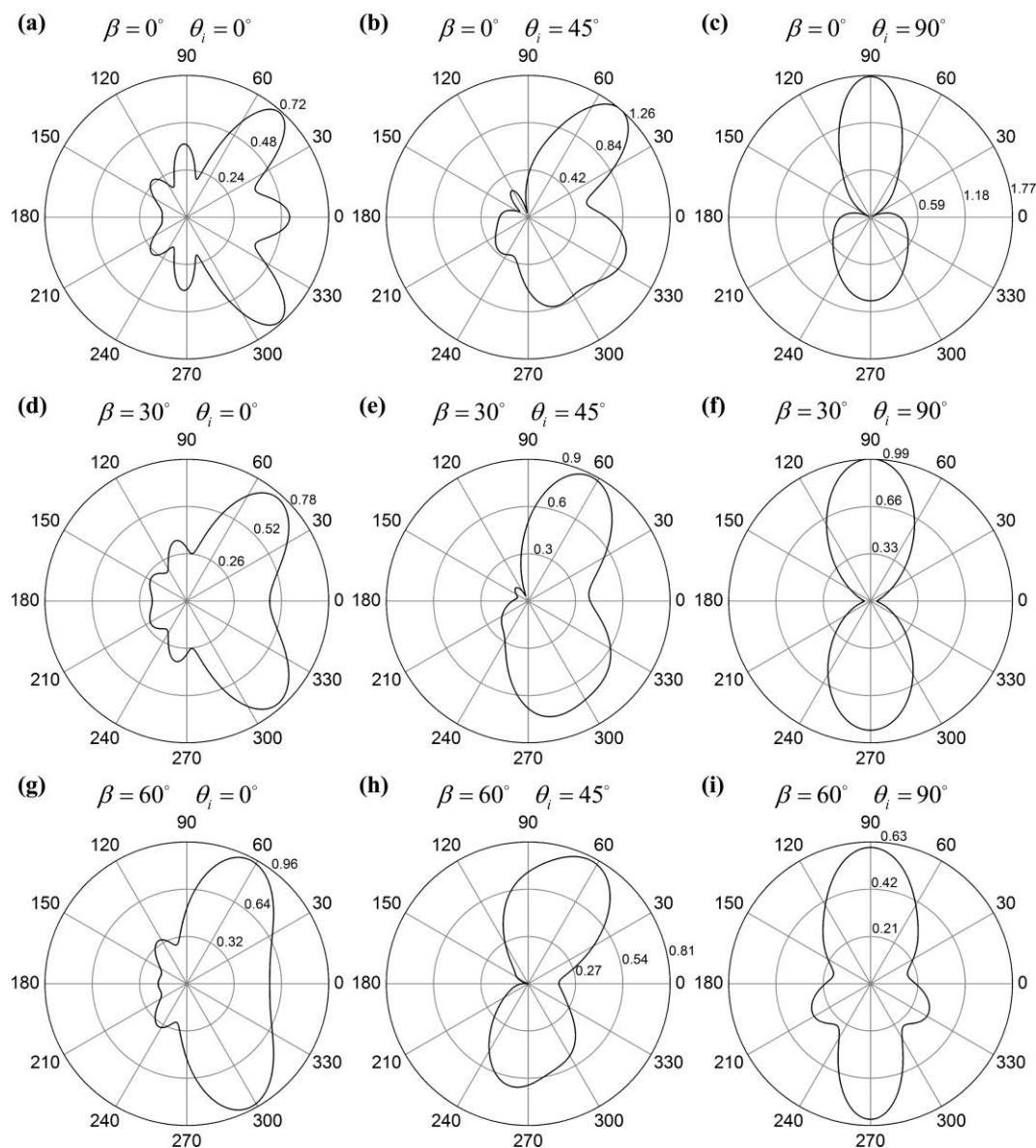


图 5.7 任意方位入射下声散射二维指向性图

5.2.3 Bessel 波入射下刚性柱球组合体散射研究

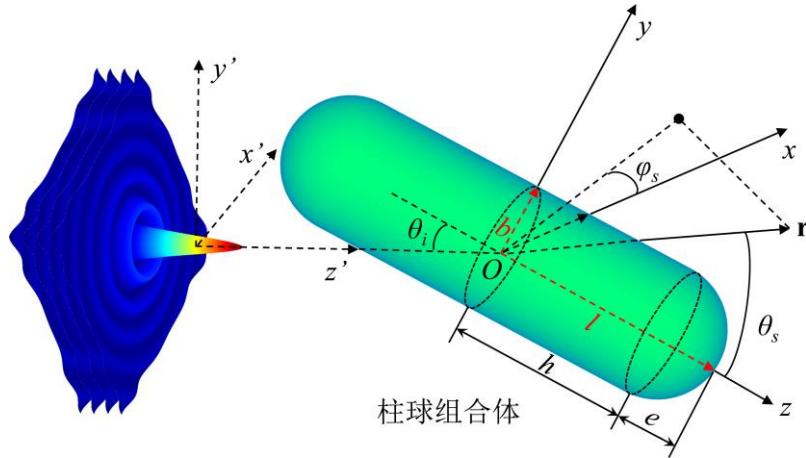


图 5.8 刚性柱球组合体在零阶 Bessel 波任意方位入射下的框架图

考虑理想流体中的刚性带封头的有限长圆柱，入射波为零阶 Bessel 波，波轴过目标的中心。圆柱的几何参数包括半长 l ，水平段半长 h 和球形封头深度 e ，满足 $l = h + e$ ；圆柱半径定义为 b ，当 $e = b$ 时封头为半球形。入射轴角定义为 θ_i ，散射轴角定义为 θ_s 。因 T 矩阵与散射体的几何形状有关，对不同的散射体，只需要修改程序中的几何形状函数，便可将计算椭球的程序扩展到计算有限圆柱。带封头的有限长圆柱的几何形状函数为

$$r(\theta) = \begin{cases} h\cos\theta + \sqrt{e^2 - h^2 \sin^2\theta}, & 0 < \theta < \theta_0, \\ h/\cos\theta, & \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0, \\ -h\cos\theta + \sqrt{e^2 - h^2 \sin^2\theta} & \pi - \theta_0 < \theta < \pi, \end{cases} \quad (5.9)$$

其中， $\theta_0 = \cos^{-1}(h/\sqrt{h^2 + b^2})$ 表示圆柱上的点从封头转移到平行段上的临界角。

上小节主要研究了零阶 Bessel 波入射下刚性椭球的反向散射形态函数，本小节主要研究柱球组合体在前半散射面内的特性。在水声工程领域，计算前向散射时常引入目标强度 TS ，其描述水下目标散射或反射声场的能力，实质上与散射形态函数一致。根据文献[184,185]，引入目标强度与形态函数的关系式

$$TS(kr_0, \theta, \beta, \varphi) = 20 \log_{10} |f(kr_0, \theta, \beta, \varphi)| \quad (5.10)$$

下面将主要探讨 Bessel 波入射下刚性柱球组合体的散射机理，并用几何模型分析散射特性和规律。

5.2.3.1 T矩阵法计算刚性柱球组合体有效性研究

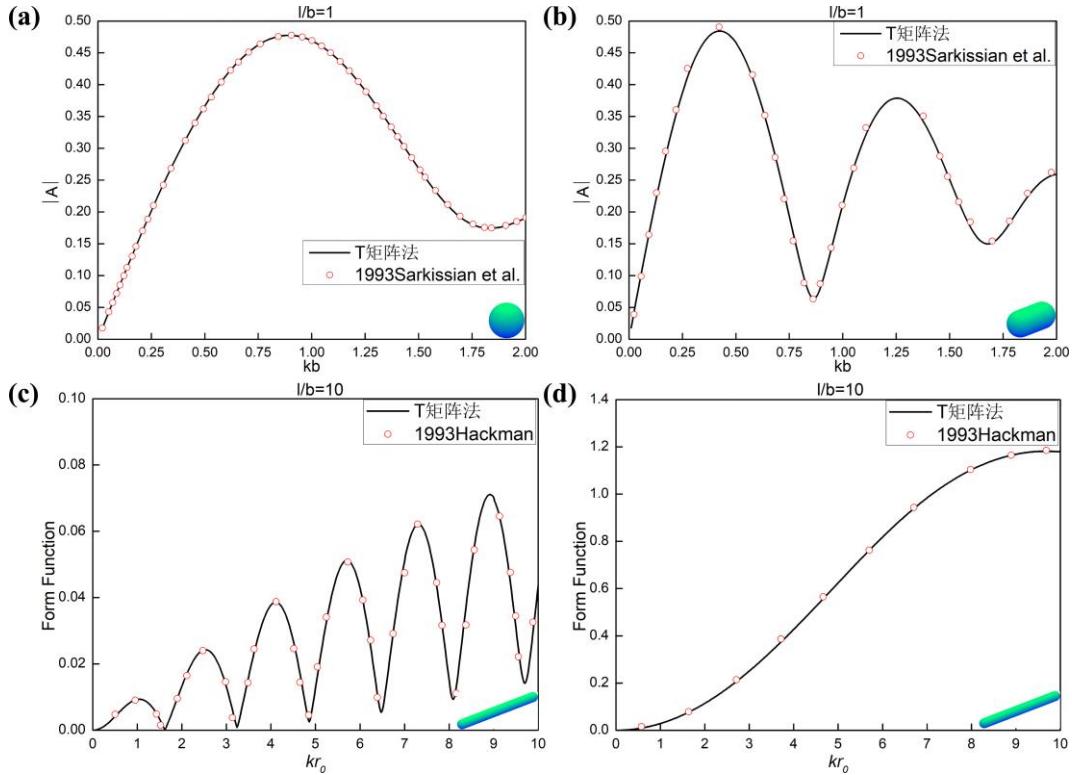


图 5.9 精确性验证

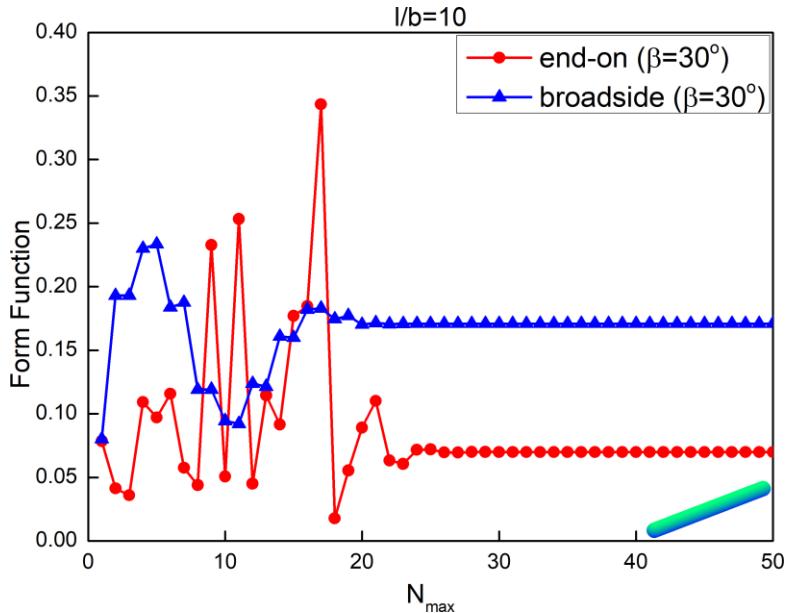


图 5.10 大尺度比的刚性柱球组合体的收敛性验证

首先，通过与已发表的文献比较，验证计算柱球椭球体散射程序的精确性，并同时对收敛性进行了分析。本小节只考虑 $e=b$ ，即封头为标准半球的情况，程序可以直

接扩展计算半椭球封头有限长圆柱，本文不作进一步探究。

图 5.9 给出了平面波（波锥角 $\beta=0^\circ$ ）入射下刚性柱球组合体反向散射幅值 $|A|$ 如图 5.9 (a, b) 所示，和形态函数幅值如图 (c, d) 所示，其几何形状尺度比在图中分别明确给出。其中 (a) - (c) 考虑平面波正入射 $\theta_i = 0^\circ$ ，(d) 考虑平面波 $\theta_i = 90^\circ$ 入射。当 $h=0$ 时有 l/b ，此时柱球组合体退化为球。幅值 $|A|$ 与形态函数幅值的关系为：
 $|f|=|A|\cdot(kb)$ 。图 5.9 (a) 和 (b) 中的参考解提取自文献[92]中 FIG. 4，(c) 和 (d) 中的参考解提取自文献[181]中 FIG. 18(A)，参考解均是采用 T 矩阵计算得到。通过对比可知，T 矩阵程序与参考解非常吻合，验证了程序的精确性。此外，对程序计算柱球组合体的收敛性进行了测试，结果如图 5.10 所示。此时入射零阶 Bessel 波的波锥角为 $\beta=30^\circ$ ，入射角分别为 $\theta_i = 0^\circ$ 和 $\theta_i = 90^\circ$ ，柱球组合体的几何尺度比为 $l/b=10$ ，无量纲频率 $kr_0=10$ 。通过观察可知，当截断系数 $N_{\max}=26$ 时程序可以收敛，本小节采用的截断系数为 $N_{\max}=25+\text{Int}(kr_0)$ ，其中 Int 表示对括号内变量取整，可以满足收敛性条件。

5.2.3.2 散射角与波锥角交换对称性研究

当 Bessel 波正入射时，根据式 (2.9) 可知，当目标具有回旋对称性时，散射场关于波锥角 β 和散射极角 θ_s 具有交换对称性，用公式可以表述为

$$TS(kr_0, \theta, \beta, \varphi) = TS(kr_0, \beta, \theta, \varphi) \quad (5.11)$$

这是因为式 (2.9) 中关于波锥角和散射角的项 $P_n^m(\cos \beta)$ 和 $P_n^m(\cos \theta_s)$ 可以相互交换位置，而回旋对称目标下分波系数 A_n 和 T 矩阵均具有对称性，则散射场也具有对称性，且 β 和 θ_s 具有交换性。为了验证这个结论，图 5.11 采用 T 矩阵法计算了刚性球（见图 a），椭球（见图 b）和带半球封头的柱球（见图 c, d）的前向上半平面的目标强度。其中，入射波为零阶 Bessel 波，计算的无量纲频率统一为 $kr_0=15$ ，几何尺寸在每个子图上方具体标出。观察图 5.11 可知，在二维域 (β, θ_s) 中，目标强度关于 $\beta=\theta_s$ 对称，对球形，椭球和柱球等回旋粒子均成立，结果验证了式 (5.11) 的正确性，

也展现了 Bessel 波入射下回旋体散射的一个特殊性质。注意，根据式 (2.9)，可以推出高阶 Bessel 漩涡波关于波锥角 β 和散射极角 θ_s 也具有交换对称性，在此不再赘述。

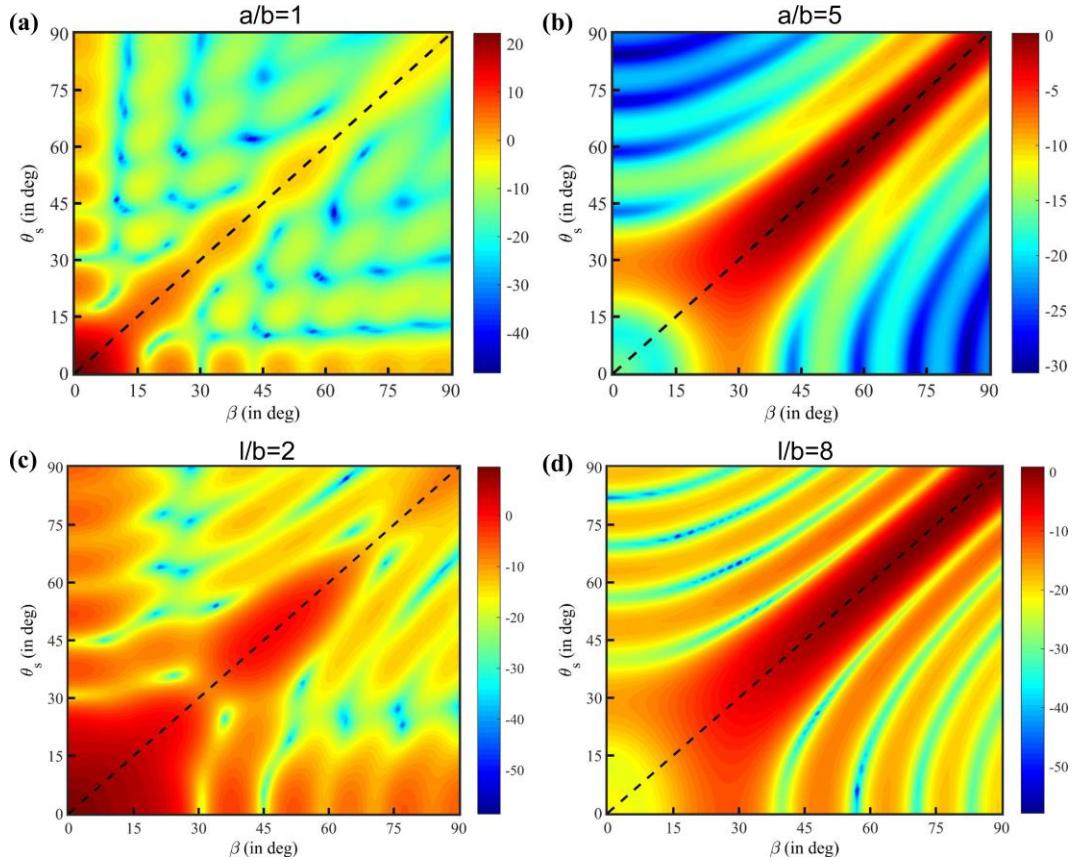


图 5.11 散射角与波锥角交换对称性

5.2.3.3 刚性柱球组合体几何模型研究

上面 5.2.2 小节对零阶 Bessel 波入射下的刚性椭球的反向散射用几何模型进行了定性和定量的研究。与椭球表面不同，柱球组合体有一段平行段，非常适合研究和验证 Bessel 波的散射机理和规律，本小节致力于利用几何模型来定性分析散射场分布规律。考虑无量纲频率 $kr_0 = 20$ 的零阶 Bessel 波入射下，尺度比为 $l/b = 6$ 的刚性柱球组合体在二维域 (β, θ_s) 中的目标强度分布情况，其中波锥角选择为 $\beta = [0^\circ, 90^\circ]$ ，散射场包括整个前向半平面，包括 $\theta_s = [0^\circ, 90^\circ]$ 和 $\theta_s = [270^\circ, 360^\circ]$ （图中由 $[-90^\circ, 0^\circ]$ 代替）。图 5.12 给出了入射角 $\theta_i = 0^\circ$ 正入射时目标强度的二维分布图。观察可知，前半平面散射

场关于 z 轴 ($\theta_s = 0^\circ$) 具有对称性，这可以根据入射波关于目标具有对称性，且目标自身具有对称性来解释。应该注意，目标强度函数中，关于散射角 θ_s 的项 $P_n^m(\cos \theta_s)$ 具有偶函数的性质，故关于 $\theta_s = 0^\circ$ 对称。进一步观察图 5.12 可知，上半平面中目标强度峰值开始于 $(\beta, \theta_s) = (0^\circ, 0^\circ)$ ，大致沿 $\theta_s = \beta$ 线性变化至 $(\beta, \theta_s) = (90^\circ, 90^\circ)$ 结束，下半平面与上半平面对称。 $\theta_s = \beta$ 在图中上半平面用黑色虚线标出，其对称线在下半平面也相应标出。 $(\beta, \theta_s) = (0^\circ, 0^\circ)$ 对应普通平面波正入射下的前向散射； $(\beta, \theta_s) = (90^\circ, 90^\circ)$ 对应横向驻波入射下横向的散射强度。通过图 5.14 (a) 中几何射线图分析可知， $kr_0 = 0$ 镜反射波对目标强度的贡献占主要作用，由于有限圆柱带有平行段，可以作为很好的镜反射次级声源。此外，根据 Bessel 波的结构，波矢分量与波轴之间有一个波锥角 β ，因此可以用来解释 $\theta_s = \beta$ 方位目标强度比较大；而对上半平面散射有贡献的镜反射波次级声源，可以认为是从图中 A 点开始，一直到 B 点结束，这很好地解释了图 5.12 中沿 $\theta_s = \beta$ 方向的目标强度峰值具有一定“带宽”的现象。图 5.12 中目标强度波峰和波谷的相互交替，是由于镜反射波和绕柱球组合体传播的 Franz 波之间的增强和相消干涉形成。

为了探讨斜入射下的散射场分布特性，图 5.13 计算了 Bessel 波斜入射下柱球组合体的目标强度分布特性，其计算参数与图 5.12 中一致，除了入射极角为 $\theta_i = 20^\circ$ 。通过与图 5.12 对比，图 5.13 中目标强度分布不再关于 $\theta_s = 0^\circ$ 具有对称性，这是因为斜入射时 Bessel 波根据目标中心不再具有对称性。斜入射时的几何射线图由图 5.14 (b) 形象地给出，主要包含直接的镜反射波和局部前向散射波。观察图 5.13 可知，上半平面中目标强度峰值开始于 $(\beta, \theta_s) = (0^\circ, 20^\circ)$ ，大致沿 $\theta_s = \beta + \theta_i$ 线性变化至 $(\beta, \theta_s) = (70^\circ, 90^\circ)$ 结束，这对应于图 5.14 (b) 中过 B 点的射线，与 z 轴夹角为 $\beta + \theta_i$ ，其描述局部前向散射波对散射场的主要贡献。根据 Bessel 波的物理结构特性，其波轴左侧的波矢会在 A 点处产生直接的镜反射波，此时射线与 z 轴夹角为 $\beta - \theta_i$ ，该散射分量对应于图 5.13 中起始于 $(\beta, \theta_s) = (0^\circ, -20^\circ)$ ，大致沿 $\theta_s = \beta - \theta_i$ 线性变化至

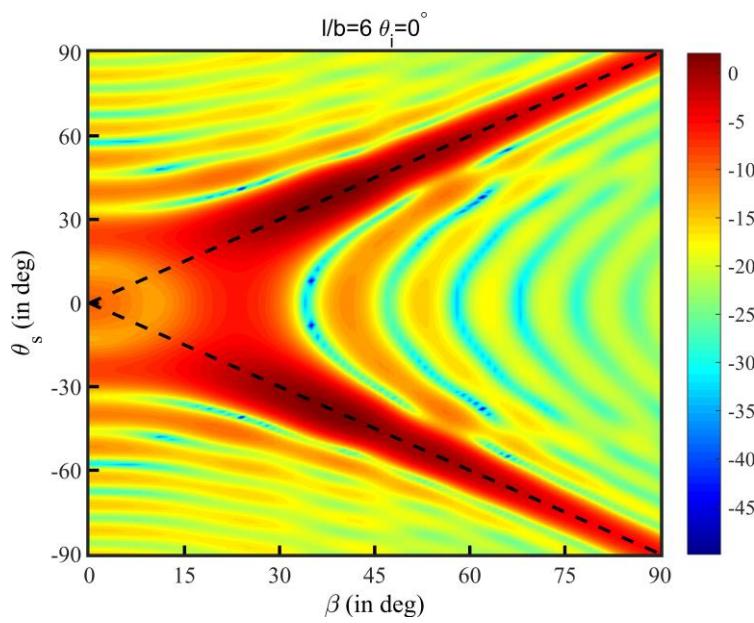


图 5.12 正入射下前向半平面在不同波锥角下的声强分布

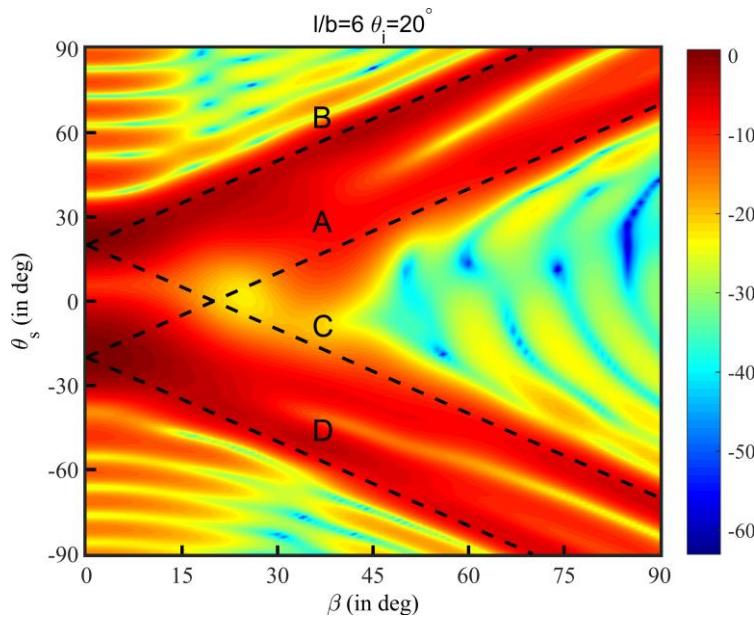


图 5.13 斜入射下前向半平面在不同波锥角下的声强分布

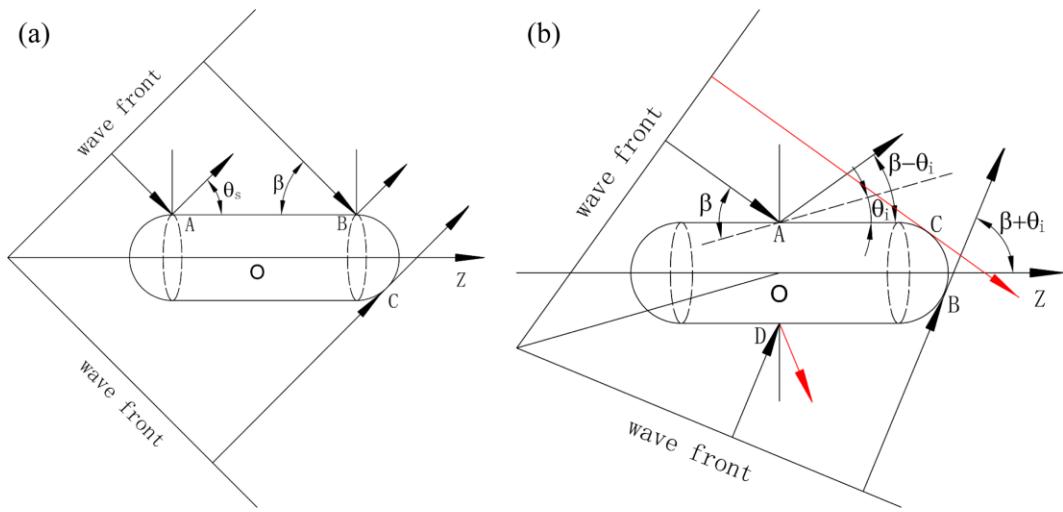


图 5.14 几何射线图

$(\beta, \theta_s) = (90^\circ, 70^\circ)$ 的目标强度峰值。同理, 图 5.14 (b) 中过 C 点的局部前向散射波和过 D 点的镜反射波 (红色射线) 分别对应着图 5.13 下半平面中的起始于 $(\beta, \theta_s) = (0^\circ, 20^\circ)$, 大致沿 $\theta_s = -\beta + \theta_i$ 线性变化至 $(\beta, \theta_s) = (90^\circ, -70^\circ)$ 结束的目标强度峰值, 和起始于 $(\beta, \theta_s) = (0^\circ, -20^\circ)$, 大致沿 $\theta_s = -\beta - \theta_i$ 线性变化至 $(\beta, \theta_s) = (70^\circ, -90^\circ)$ 结束的峰值。需要注意, 当 Bessel 波倾斜照射到非球形粒子时, 此时入射波相对于目标中心不再具有整体对称性, 因此波锥角与散射角不再具有交换对称性; 但当目标是球时且入射波斜入射时过球心, 声场关于目标仍具有对称性, 因此波锥角和散射角具有交换对称性, 此时目标强度的二维 (β, θ_s) 分布将关于 $\theta_s = \theta_i$ 对称。

5.3 基于 T 矩阵法弹性复杂目标散射特性研究

根据第二章推导的弹性边界下 T 矩阵计算公式 (2.74) - (2.80), 编写相应的计算程序。其中, 对目标表面场的积分采用高斯—勒让德积分公式来实现。具体的矩阵表达式需根据相应的基波函数展开分别进行积分求解, 再装配到整体矩阵中, 在对子矩阵积分表达式的展开过程中, 球坐标系下部分表达式在附录 IV 中简要给出。第四章重点探讨了弹性球和球壳的散射特性, 本小节主要采用 T 矩阵法简要讨论球壳的散射和共振抑制特性, 以及给出了小尺度比弹性椭球的散射特性, 并分析目前编写的程序在计算大尺寸弹性椭球中的问题及可能的解决方案。注意, 程序是基于一般的椭球

形状统一编写，当椭球长短轴相等时，椭球退化为标准球，此时 T 矩阵中耦合项元素与分波指数 n 和方位角指数 m 无关，整体矩阵关于对角线对称，且非对角线上的元素均为零。当长短轴不相等时，T 矩阵中元素关于指数 m 成块对角对称。整体矩阵除了对角线上有非零元素外，非对角线上也存在非零元素。

5.3.1 Bessel 波入射下基于 T 矩阵法球壳散射模型研究

本小节利用 T 矩阵计算弹性厚壳的声散射，一是验证自编的 T 矩阵程序计算弹性目标声散射的有效性，二是进一步简要讨论厚壳的共振抑制问题。厚壳的材料参数与 4.4.3 节中相同，内外径比为 $b/a=0.95$ ，与 4.4.3 节中一致。图 5.15 给出了不同锥角的零阶 Bessel 波入射下球壳的纯共振反向散射形态函数，其中，共振散射根据共振散射理论从总散射场中减去刚性背景求得。波锥角 β 的选择满足 $P_n(\cos \beta)=0$ ，其中对应的波锥角在图中给出，与表 4.1 中列出的一致。通过与图 4.12 高阶 Bessel 波入射下特定散射角度的共振形态函数相比，其前第二至第五阶共振峰频率完全一致，分别为第二阶： $ka=1.836$ ；第三阶： $ka=2.240$ ；第四阶： $ka=2.597$ 和第五阶： $ka=2.915$ 。可以看出，选择特定的波锥角 β_n ，使得相应的共振被抑制，这与第五章通过分波序列法计算讨论的规律一致。为了进一步验证共振抑制机理，图 5.15 分别给出了第二至第五阶共振频率处不同波锥角的散射形态函数二维指向性图。通过观察可知，不同共振频率处，其二维指向性图的“花瓣”数量满足 $2n$ 个（ n 为共振阶数），则进一步验证了不同频率处对应的共振阶数。此外，在共振频率处，使勒让德多项式为零的特定波锥角的 Bessel 波入射下，其各个方向的共振散射均受到了抑制作用。本小节简要回顾和讨论了球壳的共振抑制特性，当球壳内径为零时，计算程序可以正确扩展计算实心球的声散射，为了简洁，此小节不再赘述，下面将探讨实心球和小尺度比弹性椭球的散射问题。

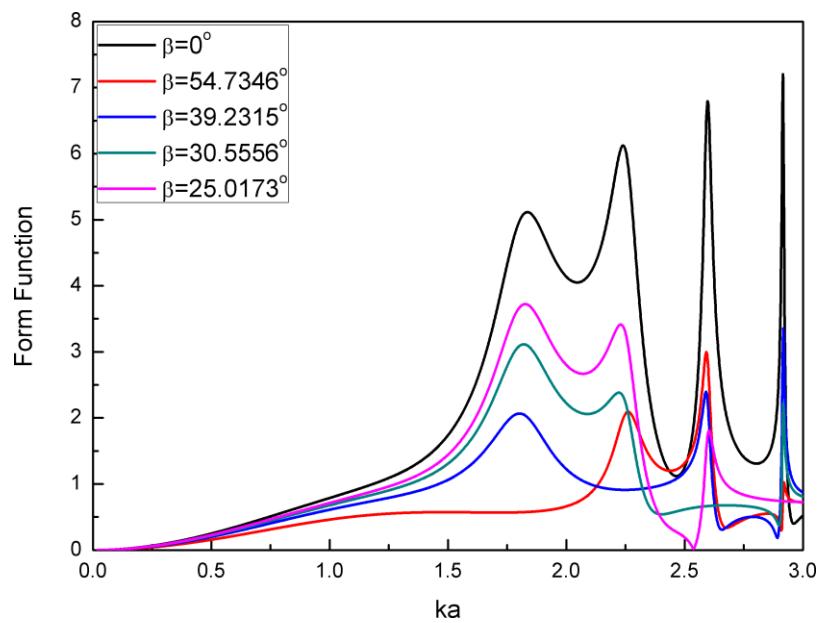


图 5.15 厚球壳的共振反向散射形态函数

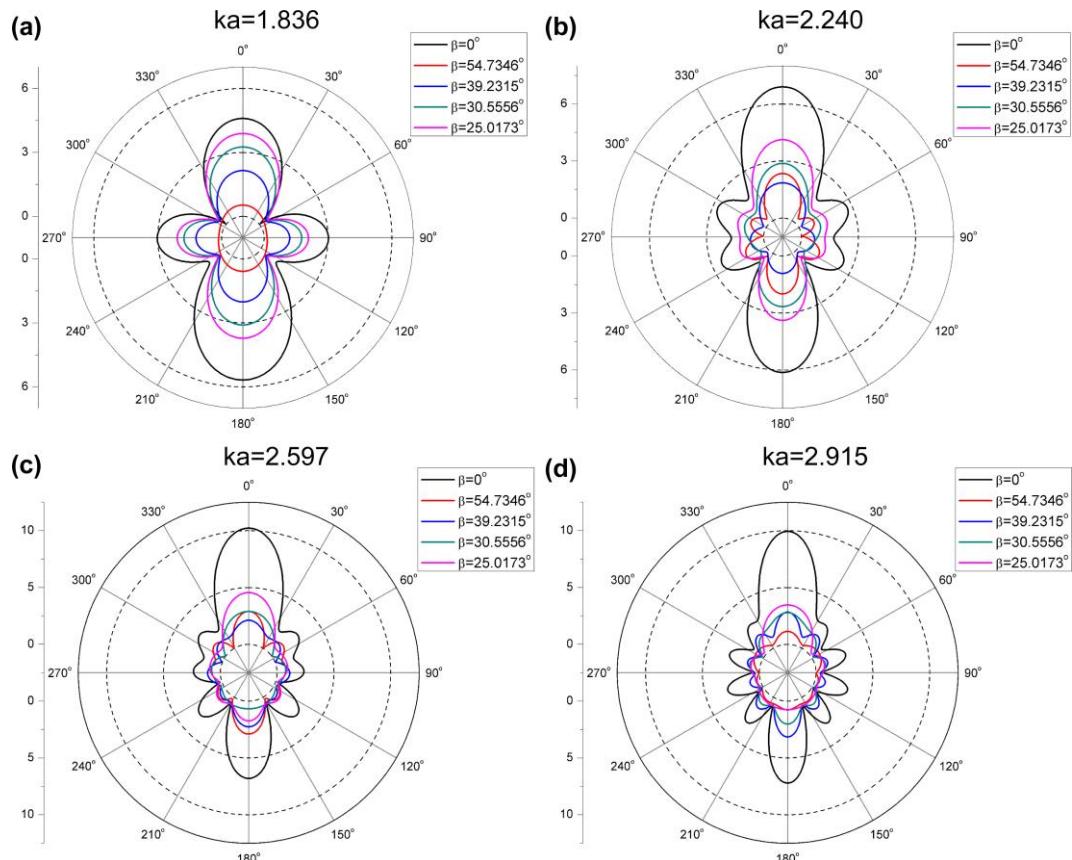


图 5.16 厚球壳的共振反向散射形态函数二维指向性图

5.3.2 Bessel 波入射下基于 T 矩阵法弹性椭球散射模型研究

利用 T 矩阵分别计算零阶 Bessel 入射下浸没在水中有机玻璃(PMMA)球($b/a=1$)和小尺度比椭球($b/a=0.95$)的纯共振, 如图 5.17 和 5.18 所示。其中, a 表示椭球的极半径, 即此时椭球的长半轴; b 表示椭球的赤道半径, 表示短半轴。有机玻璃材料的密度为 $1.19 \times 10^{-3} \text{ g/m}^3$, 纵向波速为 2690 m/s , 横向波速为 1340 m/s 。Bessel 波的半锥角选择与 5.3.2 节相同, 并在图中分别明确给出。 $\beta=0^\circ$ 时 Bessel 波退化为普通平面波, 在图中给出作为参考; 其余波锥角选择为 $P_n(\cos \beta)=0$ 的根。根据上小节分析, 特定波锥角的 Bessel 波会在相应的共振频率处出现共振抑制, 如图 5.17 和 5.18 所示。通过对图 5.18 和 5.17, 小尺度比的椭球的散射形态函数与球的形态函数有轻微差别, 包括共振频率和共振幅值, 这证明了几何尺寸的改变, 对弹性体的共振和散射特性均会造成影响。

但需要指出, 弹性目标的 T 矩阵求解是基于球谐函数来展开非球形目标表面的声场求解子矩阵, 并对部分子矩阵进行数值求逆而得到, 见式(2.79)。因此当用球坐标系下的基波函数来展开大尺度比椭球的表面场时, 矩阵求解过程中会出现病态条件, 导致计算结果不收敛而造成较大计算误差。本章重点讨论 T 矩阵法计算弹性椭球散射特性的可行性, 因小尺度比椭球与大尺度比椭球相比, 在球坐标系下更容易收敛, 因此本文程序的计算结果可靠。但测试程序发现, 当弹性椭球尺度比增加时, 程序计算的结果可靠性出现了问题。为了解决这个问题, 我们采用了增加椭球目标表面的积分点数量, 发现程序中取得的积分点数量足够, 额外增加积分点, 并不能克服数值程序计算大尺度比椭球声散射的不足; 此外, 计算发现 8 点高斯—勒让德积分已经满足收敛性条件, 通过增加高斯—勒让德积分点数到 16 点, 发现对相同的目标其计算结果相同, 故本章计算采用 8 点高斯—勒让德积分公式足够, 增加积分点无法解决程序的不足。一些学者通过提出不同的解决方法, 来克服 T 矩阵法在数值上求解大尺度比弹性椭球的不足。Werby 和 Chin-Bing 提出一些数值方法及改变矩阵的装配方式来提高数值程序计算大尺度比弹性椭球的稳定性和可靠性, 如采用耦合高阶 T 矩阵法等^[186]。Hackman 及合作者采用椭球坐标系下的 T 矩阵法求解弹性椭球体的声散射

[^{187,188}]，但椭球坐标系公式和程序均较为复杂，且其使用的目标形状有较大限制，这也是椭球坐标系应用不如球坐标系广泛的主要原因。此外，Lim^[34,35]根据 Waterman^[89]提出的方法，结合离散声源法^[33]将球坐标系下的 T 矩阵公式中的高阶外向基波函数转换成沿椭球旋转轴分布的低阶函数，以此来正确稳定地求解大尺度比的椭球和超椭球的声散射问题。本章重点在于对 T 矩阵法求解 Bessel 波入射下弹性椭球声散射的可行性分析和简要验证，程序的适用性和稳定性将在后续的工作中继续发展和完善。

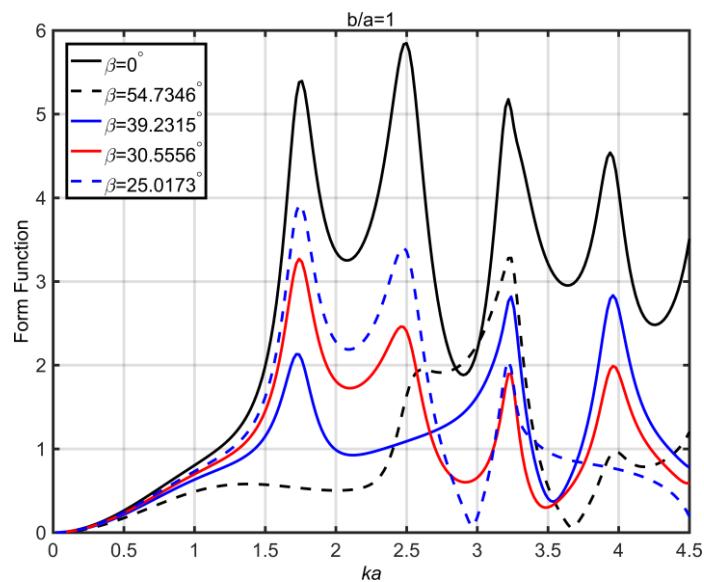


图 5.17 PMMA 实心球共振反向散射形态函数

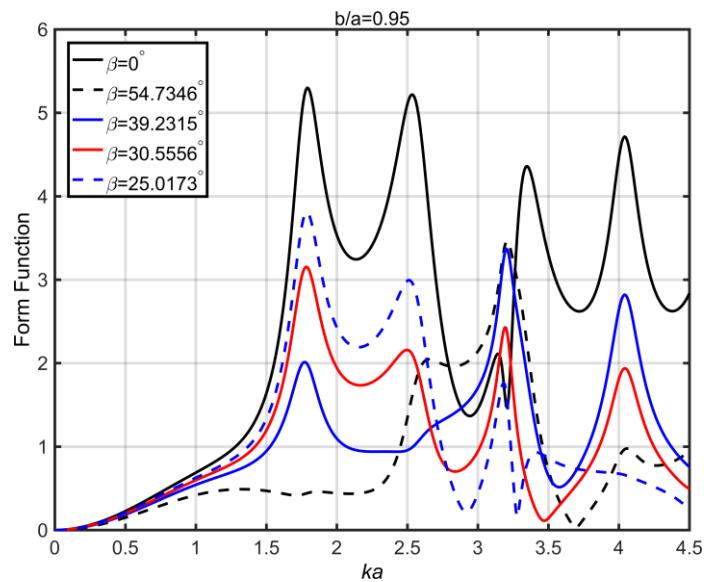


图 5.18 PMMA 实心椭球共振反向散射形态函数

5.4 本章小结

本章根据第三章推导的 T 矩阵法计算 Bessel 波入射下声散射的数值模型，重点对非球形目标的声散射进行研究。该部分是延续第四章 Bessel 波入射下球形目标的声散射的工作，主要对非球形目标的散射特性和物理机理进行探讨。通过引入亮点模型和提出 Bessel 声散射射线几何模型，成功解释了刚性椭球的反向散射形态函数随波锥角和椭球几何尺度比的变化规律。根据正入射时的目标强度公式，发现了 Bessel 波入射下回旋对称目标的散射场关于散射角与波锥角具有交换对称性，并通过数值计算进行了验证。此外，提出了 Bessel 波任意方向入射下有限长圆柱的几何射线模型，定性地分析了正入射和斜入射是前向散射的分布规律并进行了解释。最后，对 T 矩阵法计算弹性目标，包括球形和椭球形目标的声散射特性进行了验证和讨论。本章主要基于球谐函数叠加理论的入射展开系数来求解散射场，基于多极展开法的入射系数将在接下来两章讨论辐射力和力矩时重点应用和讨论。

6 Bessel 波入射下三维声辐射力特性和机理

6.1 引言

理想流体中，声场与目标之间通过声散射发生能量交换，具体体现为动量和角动量传递或吸收。动量交换在宏观上表现为声场对目标施加一个辐射力，而角动量交换则为声场对目标施加一个辐射力矩。直观上，平面波入射下声场会推着目标远离声源，而一定参数下的单束 Bessel 波可以将目标拉向声源。平面驻波场的声辐射力研究历史相对较长，而单波束下声辐射力研究近年来才开始吸引越来越多国内外学者投身研究。单波束可以不需要改变声场对粒子施加一个持续的作用力，而驻波因存在平衡点，声场不变的情况下无法持续操控目标。本章主要研究任意位置任意阶 Bessel 波入射下目标的声辐射力特性，重点探讨辐射力反转时的参数条件以及物理机理，为其在声学镊子设计中提供支撑。下一章将具体探讨辐射力矩反转以及相应的物理机理。根据第三章推导的任意声场下的辐射力公式，将入射系数和散射系数按相同的规律装配，则基于分波序列法和 T 矩阵法求解声辐射力的程序一致，便于计算程序的统一封装和制作数值工具箱。

6.2 Bessel 波入射下声辐射力计算有效性验证

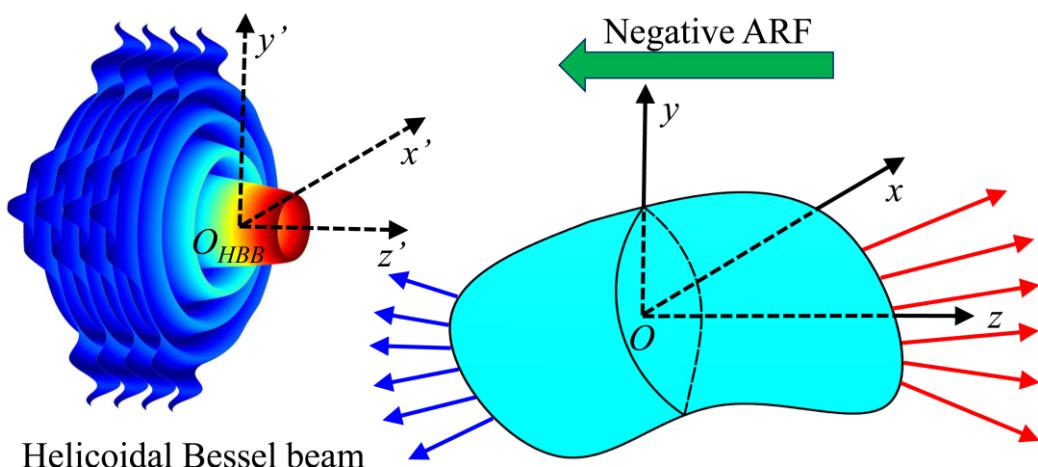


图 6.1 任意 Bessel 波入射下任意形状目标的散射和轴向声辐射力示意图

本章基于多极展开推导的入射波波形系数，利用 T 矩阵法和分波序列法根据第三章推导的声辐射力表达式，编写相应的程序计算不同形状目标的声辐射力。已知的入射波形系数 a_{nm} 和计算得到的散射波形系数 s_{nm} 均按照 (n,m) 的顺序装配成一个列向量。当 $n=[0,N_{\max}]$, $m=[-n,n]$ 时，每个元素在列向量中对应的行数为： $n(n+1)+1+m$ 。根据式 (3.29) - (3.31) 任意波入射下基于入射和散射波形系数的笛卡尔坐标系下三个方向的声辐射力表达式，可分别将 a_{nm} 和 s_{nm} 中中对应的元素提取并用于计算辐射力。以横向声辐射力 (Y_x, Y_y) 为例，辐射力表达式中的元素可能在公式中不存在，但因为装配成列向量，其在程序中可能存在，需要剔除，如考虑当 $n=5$, $m=[-5,5]$ 时的散射波形系数 s_{nm} ， $s_{n+1,m+1}$ 在 $[s_{6,-4}, s_{6,6}]$ 范围内都能取到实际有意义的值， $s_{n+1,m-1}$ 在 $[s_{6,-6}, s_{6,4}]$ 范围内能取到有效值，但 $s_{n-1,m+1}$ 在 $[s_{4,-4}, s_{4,6}]$ 范围内， $s_{4,5}, s_{4,6}$ 实际上不存在而程序中可取到值，应该在程序中进行剔除；同样 $s_{n-1,m-1}$ 在 $[s_{4,-6}, s_{4,4}]$ 范围内， $s_{4,-6}, s_{4,-5}$ 实际上不存在而在程序中可取到值，也应该在程序中进行剔除。

本部分主要验证计算 z 轴方向的声辐射力，通过与已知理论或数值结果的对比来验证本文推导的理论公式和编写的计算程序的有效性。首先验证正入射时不同 Bessel 波下刚性球和椭球的轴向声辐射力。图 6.2 (a) 分别给出了刚性球在波锥角 $\beta=60^\circ$ 零阶 (OBB) 和 $\beta=66.42^\circ$ 一阶 (FHBB) Bessel 波入射下的声辐射力，其中参考解是基于式 (3.32) 和 (3.33) 计算并从文献[64]中 Fig.2 和[145]中 Fig.1 中分别提取得到；图 6.2 (b) 分别计算了尺度比为 $a/b=1/2$ 的刚性椭球，在波锥角 $\beta=60^\circ$ 零阶 (OBB)， $\beta=75^\circ$ 一阶 (FHBB) 和 $\beta=75^\circ$ 二阶 (SHBB) Bessel 波正入射下的轴向声辐射力，其中参考解是基于式 (3.34) 正入射时推导的统一表达式计算并从文献[152]中 FIG. 2(c), 文献[189]中 FIG. 3(c) 和 FIG. 6(c) 中分别提取得到。本部分的计算结果均是采用基于多极展开的 T 矩阵法计算求得，根据图 6.2 (a) 和 (b) 可知：T 矩阵法的计算结果与 Marston 基于平面波叠加法的计算结果都非常好的吻合，也与 Mitri 基于柱波函数展开计算的小尺度比刚性椭球的计算结果非常好的一致。根据声辐射力基于入射和散射波形系数的表达式，只要正确的计算散射场以及装配进声辐射力的计算公式，便可正确

求解任意方向的声辐射力。

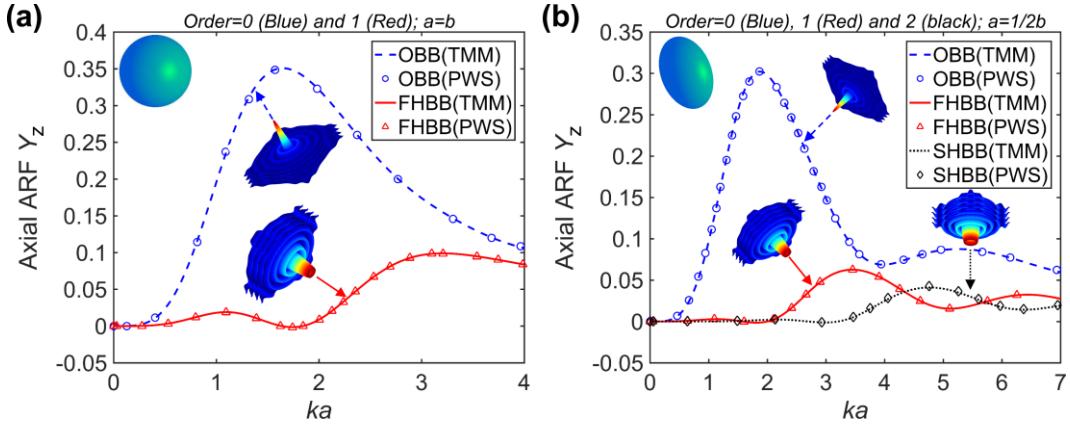


图 6.2 任意 Bessel 波正入射验证

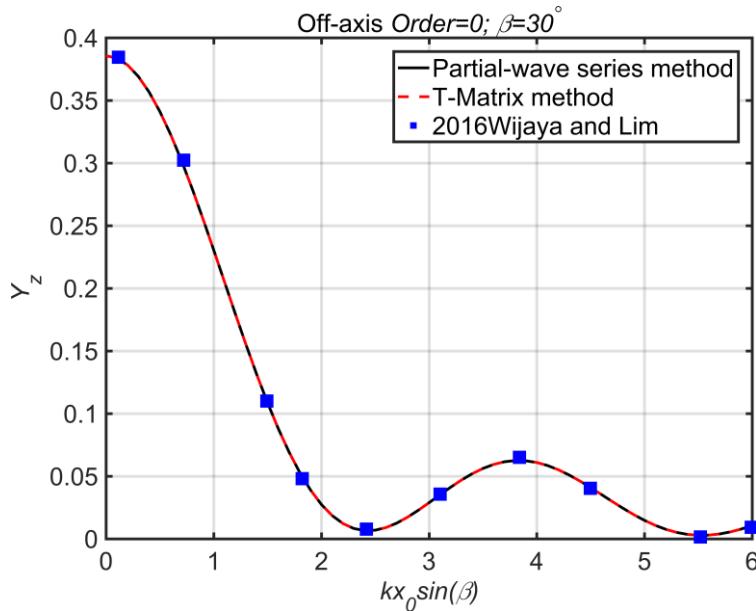


图 6.3 零阶 Bessel 波偏轴入射时轴向无量纲声辐射力

基于多极展开的分波序列法在第五章已验证正确，故可以直接扩展到计算声辐射力的计算。下面将重点验证 Bessel 波偏轴入射时分波序列法和 T 矩阵法计算声辐射力的有效性。考虑零阶 Bessel 波的波锥角 $\beta=30^\circ$ ，无量纲频率 $ka=1.0$ ，分别用分波序列法和 T 矩阵法计算刚性球的轴向声辐射力随偏轴距离函数 $kx_0 \sin(\beta)$ 变化的曲线，其中 x_0 为水平方向的偏轴距离；同时从文献[151]中提取的相同参数下基于边界元法计算的声辐射力也在图 6.3 中给出。观察计算和参考结果可知，基于分波序列法和 T 矩阵法计算偏轴入射时声辐射力的结果完全一致，并与参考解正确吻合。因此，上述结

果验证了第三章推导的公式以及编写的基于分波序列法和 T 矩阵法计算声辐射力的程序的正确性，这将为下面进一步探讨声辐射力的规律和物理机理打下基础。

6.3 轴向声辐射力反转及物理机理研究

6.3.1 声辐射力反转及物理机理

考虑不同波锥角的一阶 Bessel 漩涡波正入射下扁平和细长椭球的轴向声辐射力。图 6.4（a）和（b）分别给出了轴向无量纲声辐射力随无量纲频率 kr_0 的曲线变化图，扁平和细长椭球的尺度比分别为 $a/b=1/2$ 和 $a/b=2$ ，在图中分别给出。图（c）和（d）分别给出了（a）和（b）中包含负声辐射力的局部放大图。从图中可以看出，较大的波锥角更容易导致声场作用于目标的轴向辐射力发生反转，如图（c）和（d）中，波锥角 $\beta=80^\circ$ 时均包含辐射力反转，而 $\beta=66.42^\circ$ 只在扁平椭球时发生反转， $\beta=30^\circ$ 对两种工况均无反转发生。需要注意，平面波入射下的被动散射球体不可能发生轴向声辐射力反转^[59,146,190]。文献[146]推导了用声场散射能量 P_{sca} 和吸收能量 P_{abs} 表示的轴向声辐射力 F_z 的公式

$$F_z = P_{\text{sca}} c^{-1} (\cos \beta - \langle \cos \theta_s \rangle) + P_{\text{abs}} c^{-1} \cos \beta \quad (6.1)$$

其中， c 表示目标所处介质中的声速， θ_s 表示散射极角，符号 $\langle \cos \theta_s \rangle$ 表示 $\cos \theta_s$ 对整个散射场角度取平均。但目标不考虑吸收时，吸收能量 $P_{\text{abs}}=0$ ，则轴向声辐射力只与上式右边第一项有关，即此时有

$$F_z = P_{\text{sca}} c^{-1} \cos \beta - P_{\text{sca}} c^{-1} \langle \cos \theta_s \rangle \quad (6.2)$$

上式中，包含 $\cos \beta$ 的项在物理上表示从入射 Bessel 波中移除的动量，其会对目标产生一个正声辐射力；而包含 $-\langle \cos \theta_s \rangle$ 的项在物理上表示从散射场传递到目标上的动量在轴向方向的投影，其会对目标既可能产生正辐射力，也可能产生辐射力。图 6.1 中的示意图形象地给出了声场作用于目标时如何产生负辐射力（Negative ARF）：红色箭头表示具有 z 轴正向分量的声散射场，而蓝色箭头表示具有 z 轴负向分量的声散射场。当前向散射分量在轴向投影的合力比反向散射分量在轴向投影的合力大时，根

据牛顿第三定律，此时声场作用于目标产生靠近声源的负声辐射力。上述给出了辐射力反转的定性描述，为了进一步解释辐射力反转的物理机理，下面将详细探讨。

根据图 6.4 (c) 中的局部放大图可知，在波锥角 $\beta=80^\circ$ 时，一阶 Bessel 漩涡波作用于扁平刚性椭球在 $kr_0 = 1.8$ 时产生负向声辐射力(见红色五角星)，而在 $kr_0 = 2.1$ 时产生正向声辐射力(见蓝色五角星)。为了探讨此时声散射分布随散射角的变化关系，图 6.5 分别给出了对应不同频率时随散射极角变化的二维散射指向性图，如图中红色实线和蓝色虚线所示。同时，为了给出入射波转移到目标上的动量，入射波波矢分量方向在图中用黑虚线给出，即图中 $\theta_s = \beta=80^\circ$ 。从图 6.5 中观察可知，当 $kr_0 = 1.8$ 时，在 $\theta_s < \beta$ 的前向散射占主导地位，根据作用力和反作用力定律，此时声场给目标一个反向向后的作用力，即负声辐射力；当 $kr_0 = 2.1$ 时，向后半平面的散射占主要作用，因此声场对目标产生了向前的作用力，即正辐射力。

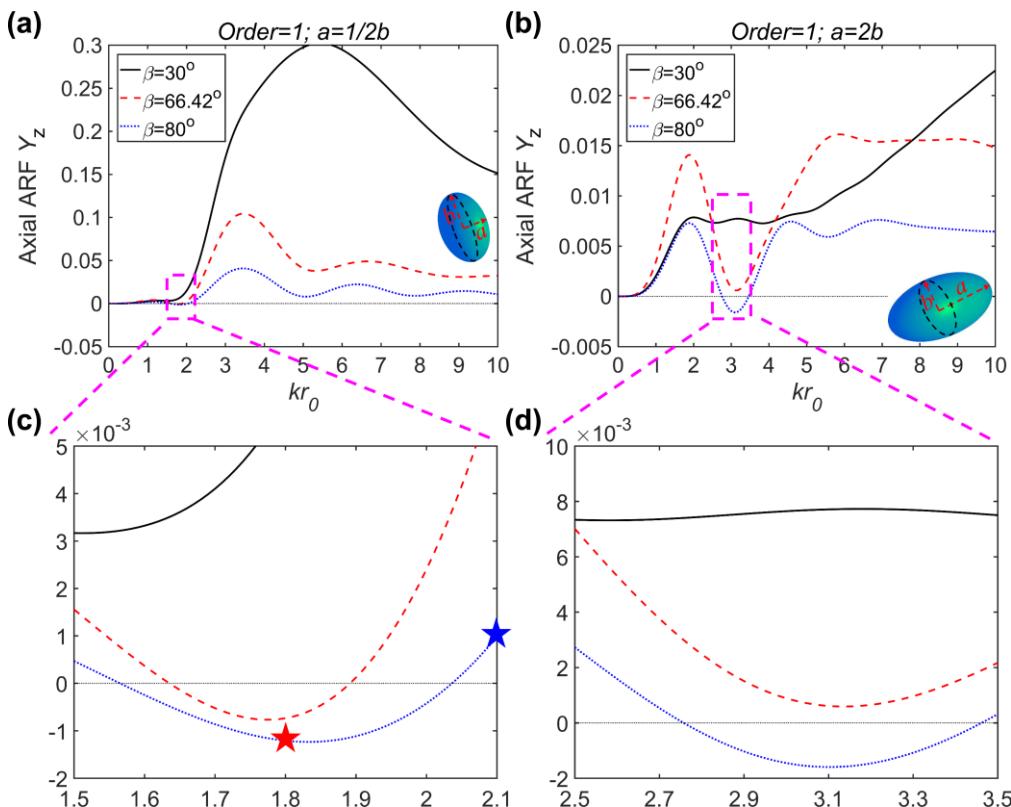


图 6.4 一阶 Bessel 波正入射时刚性椭球轴向声辐射力随无量纲频率曲线 (a) 扁平椭球尺度比 $a/b = 1/2$ ；(b) 细长椭球的尺度比 $a/b = 2$ ；(c) 和 (d) 分别是 (a) 和 (b) 中包含负声辐射力的局部放大图

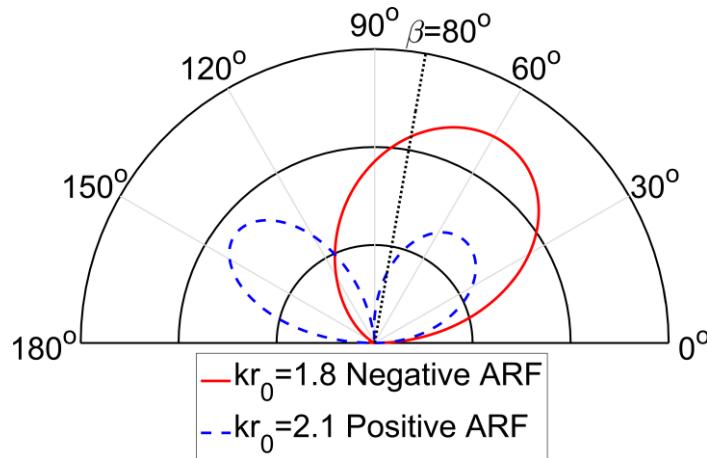


图 6.5 扁平椭球在不同无量纲频率的 Bessel 波入射下的二维散射指向性图。波矢分量的方向见黑虚线。

6.3.2 复杂形状声辐射力反转参数化研究

根据 T 矩阵法中 Q 矩阵元素的表达式 (5.1)，对具有回旋对称性的目标，只需改变目标表面函数 $r(\theta)$ 及其相对应极角的导数 $dr(\theta)/d\theta$ ，计算程序便可以拓展到计算其他几何形状的声散射和声辐射力。本节重点考虑具有凹表面的“花生”型和凸表面的柱球组合体的轴向声辐射反转时的参数条件。柱球组合体的表达式在 (5.9) 中给出，“花生”型超椭球的几何表面形状函数表达式为

$$r(\theta) = (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \quad (6.3)$$

其中，与椭球几何尺寸的定义类似， a 和 b 分别表示极半径和赤道半径，如图 6.6 所示。根据式 (6.3) 编写相应的计算程序，为了验证此时程序的正确性，下面对 Bessel 波正入射和偏轴入射时“花生”型超椭球的收敛性进行验证；同时刚性柱球组合体的收敛性也进行了简要的验证，如图 6.7 所示。图 (a) 给出了尺度比为 $a/b = 4$ 的超椭球在波锥角 $\beta = 66.42^\circ$ ，无量纲频率 $kr_0 = 8$ 时一阶 Bessel 漩涡波正入射和偏轴入射时无量纲声辐射力随截断系数 N_{\max} 变化的曲线，入射波的偏轴量为 $(x_0, y_0) = (0.1\pi/kr_0, 0.1\pi/kr_0)$ 。从图 (a) 中可以看出，T 矩阵程序计算“花生”型超椭球时能够较快收敛，如在 $N_{\max} = 11$ 开始收敛，下面程序中计算的截断系数选择为

$N_{\max} = 3 + kr_0 + 4.05(kr_0)^{1/3}$, 当 $kr_0 = 8$ 时 $N_{\max} = 19 > 11$, 满足收敛性条件, 验证程序的正确性。图 (b) 中给出了相同入射波参数下的柱球组合体收敛性曲线, 计算程序表现出较好的收敛性, 进一步验证了 T 矩阵计算柱球组合体声辐射力的正确性。

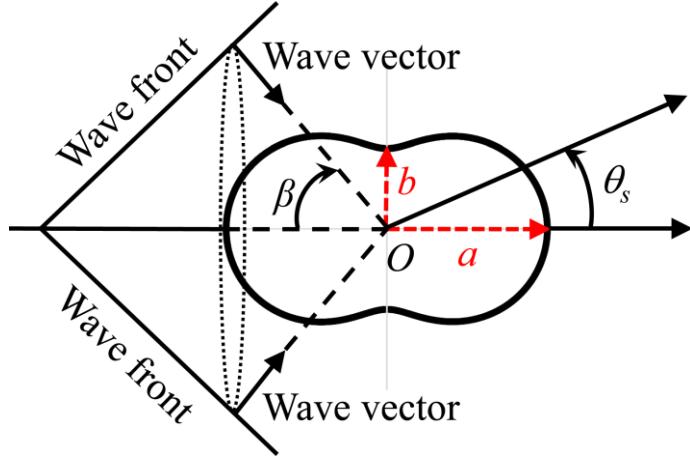


图 6.6 Bessel 波入射下“花生”型超椭球的示意图

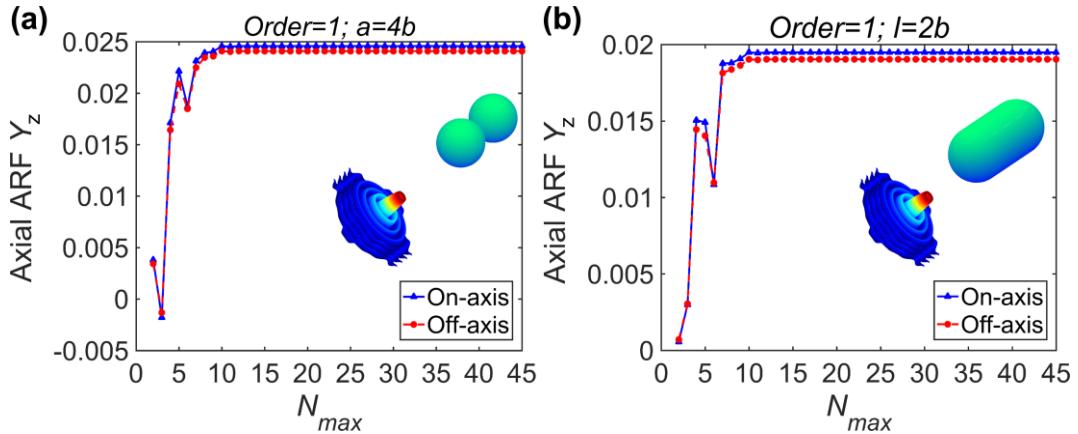


图 6.7 收敛性验证

验证了程序的正确性之后, 下面将讨论不同入射 Bessel 波参数下, “花生”型超椭球体和柱球组合体产生轴向声辐射力反转时的参数条件, 具体的参数在图 6.8 中关于二维域 (kr_0, β) 轴向声辐射力的分布图中给出。图中只给出了负声辐射力区间, 白色区间表示正辐射力或轴向受力平衡点。需要注意, 实验研究主要集中在长波长瑞利区, 即 $ka < 1$, 因容易用声场的速度势梯度来产生作用于目标上的力, 即主要由声压差产生的梯度力, 而数值实验可以研究相对较大的频率范围的声辐射力分布情况。图 (a) - (d) 研究了入射波拓扑荷数对负辐射力分布区间的影响, 此时 Bessel 波均为正入射,

目标为尺度比为 $a/b=2$ 的超椭球。通过对比可以看出，在计算矩形区间内，零阶 Bessel 波入射下有两个子区间发生了轴向辐射力反转，见图 (a)，而高阶 Bessel 波入射下只有一个子区间发生了反转，见图 (b-d)。对高阶 Bessel 入射的情况，负辐射力区间随着阶数的增加，向更高频率处转移。为了研究几何形状对负辐射力参数分布区间的影响，图 (e) 和 (f) 研究了一阶 Bessel 波正入射下，尺度比分别为 $a/b=3$ 和 $a/b=4$ 时的声辐射力二维区间分布图。通过对比 (b), (e) 和 (f) 可知，随着尺度比增大，负辐射力区间减小，但辐射力发生反转参数分布区间的中心频率变化不大。由上述分析可知，辐射力反转既与入射波参数相关，也和几何形状有关。扁平“花生”型超椭球在二阶 Bessel 波入射下的负辐射力参数分布见图 (g)，此时的尺度比为 $a/b=1/2$ ，该形状可以用于模拟一些生物细胞，如中间有一个内陷的红血细胞。此外，在生物医学和弱引力环境中，柱球组合体可能用于模拟一些细菌或太空飞船的几何形状，因此下面进行进一步探讨。图 (h) 表示一阶 Bessel 波正入射时负辐射力的二维参数分布，(i) - (l) 表示偏轴入射时的负辐射力分布，所有情况的尺度比均为 $l/b=2$ ，其几何参数可参考图 5.8。图 (h) - (j) 表示一阶 Bessel 波入射，而 (k) 和 (h) 表示二阶 Bessel 波入射。对偏轴入射，图 (i) 和 (k) 的偏轴量为 $(x_0, y_0)=(0.1\pi/kr_0, 0.1\pi/kr_0)$ ，图 (j) 和 (l) 的偏轴量为 $(x_0, y_0)=(0.5\pi/kr_0, 0.5\pi/kr_0)$ 。注意，根据式 (2.87)，偏轴与正入射相比，程序不需要增加额外的计算消耗。观察图 (i) - (l) 可知，对一阶和二阶 Bessel 波入射情况下，负辐射力区间均随着偏轴量的增加而减小。

观察图 (b) 和 (h) 可知，在一阶 Bessel 波正入射时，此时超椭球和柱球组合体产生轴向辐射力反转的波锥角最小为大约 $\beta=54^\circ$ 。相同入射波条件下，刚性球上作用的负辐射力研究可参考文献[145,165]，其中一阶 Bessel 波正入射刚性球上产生辐射力反转时最小的波锥角大约为 $\beta=63^\circ$ ^[165]。因此，根据上述结果可知，适当细长的超椭球（图 b）和太空舱形状（图 h）产生辐射力反转时波锥角最小可以为 $\beta=54^\circ$ 和 $\beta=55^\circ$ ，这说明细长目标在一阶 Bessel 波声场下更容易产生轴向辐射力反转。

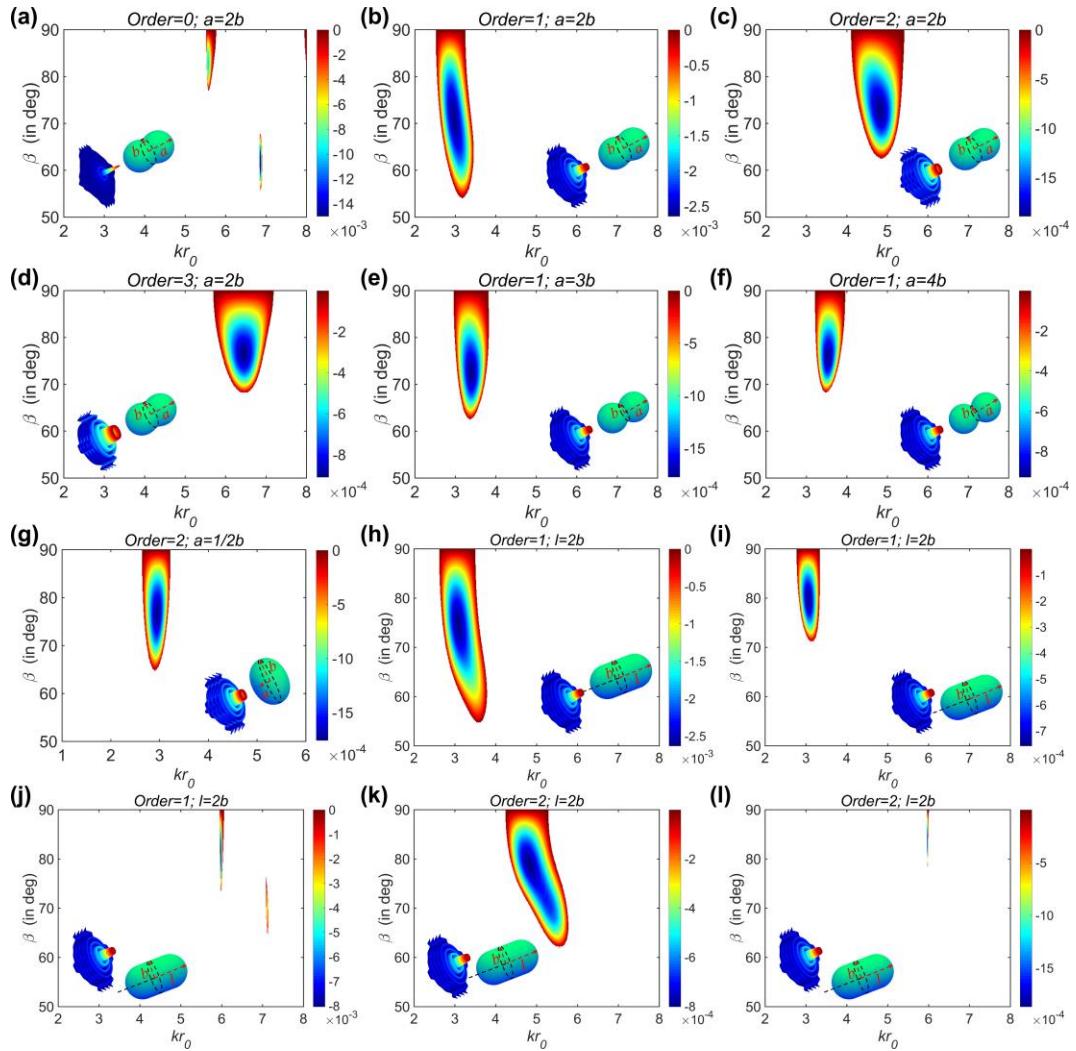


图 6.8 轴向辐射力反转参数化研究

6.4 三维声辐射力特性研究

上小节主要探讨了轴向声辐射力的物理机理及反转特性，在实际声场中，粒子可能会受到横向作用力而发生偏离或靠近轴线的运动，进而会对轴向声辐射力和横向稳定性造成影响。本小节主要讨论 Bessel 波入射下声辐射力在笛卡尔坐标系三个方向的分布图。根据式 (3.29) - (3.31) 可根据装配好的入射和散射波形系数计算 x, y, z 三个方向的声辐射力。下面主要研究入射波参数对辐射力分布的影响，以及偏轴量对目标横向稳定性的讨论。

6.4.1 三维声辐射力特性 Bessel 波参数化研究

“花生”型超椭球是一类典型的凹面体，而椭球是典型的凸面体，本小节主要探讨一阶 Bessel 旋涡波正入射和偏轴入射时，其空间三维声辐射力的分布及特性。图 6.9 中绘制了无量纲辐射力在笛卡尔坐标系中的三个分量在二维域(kr_0, β)中的分布，其中 kr_0 表示无量纲频率， β 表示入射波锥角。第一行和第二行分别对应着 Bessel 波正入射和偏轴入射时尺度比为 $a/b=2$ 的刚性“花生”型超椭球的三个方向辐射力分布。偏轴入射时偏轴量为 $(x_0, y_0) = (0.5\pi/kr_0, 0.5\pi/kr_0)$ 。图 (a) 和 (b) 表示正入射时，在整个 (kr_0, β) 二维域内，横向声辐射力均消失，即 $Y_x = 0$ 和 $Y_y = 0$ 。但当偏轴入射时，入射波对超椭球存在着横向声辐射力的作用，如图 (d) 和 (e) 所示。这是因为正入射时，由于入射波和超椭球的回旋对称性，横向平面内不存在作用力；而当入射方向偏轴时，入射波关于散射体的回旋对称性被打破，因此会存在横向作用力。此外，观察图 (c) 和 (f) 可知，正入射和偏轴入射时，均存在声场作用于目标上的轴向力。

为了对比凹表面和凸表面的声辐射力分布特性，图 6.9 中第三行给出了与第二行相同入射波参数下尺度比为 $a/b=2$ 的刚性椭球的三个方向辐射力分布，如图 (g) - (i)。此时因存在偏轴量 $(x_0, y_0) = (0.5\pi/kr_0, 0.5\pi/kr_0)$ ，故横向平面内存在作用力。注意，选择的椭球尺度比与超椭球的一致。通过对比偏轴入射下横向平面的声辐射力可知，椭球和超椭球的横向辐射力的峰值分布轮廓近似一致，但超椭球存在一些“跳变”。这是因为相同参数的入射波下，相同尺度比的刚性椭球和超椭球由几何形状影响的散射场近似，故辐射力分布近似；但在一些较窄的频域范围，超椭球凹表面对声场的影响较大，故其声辐射力在部分狭窄频域内出现突变，如图 (d) 和 (e)。观察第二行可知，三个方向声辐射力的突变几乎在相同的几个狭窄频率范围内。此外，通过对比 (f) 和 (i) 可知，“花生”型超椭球更容易产生较大的轴向声辐射拉力。

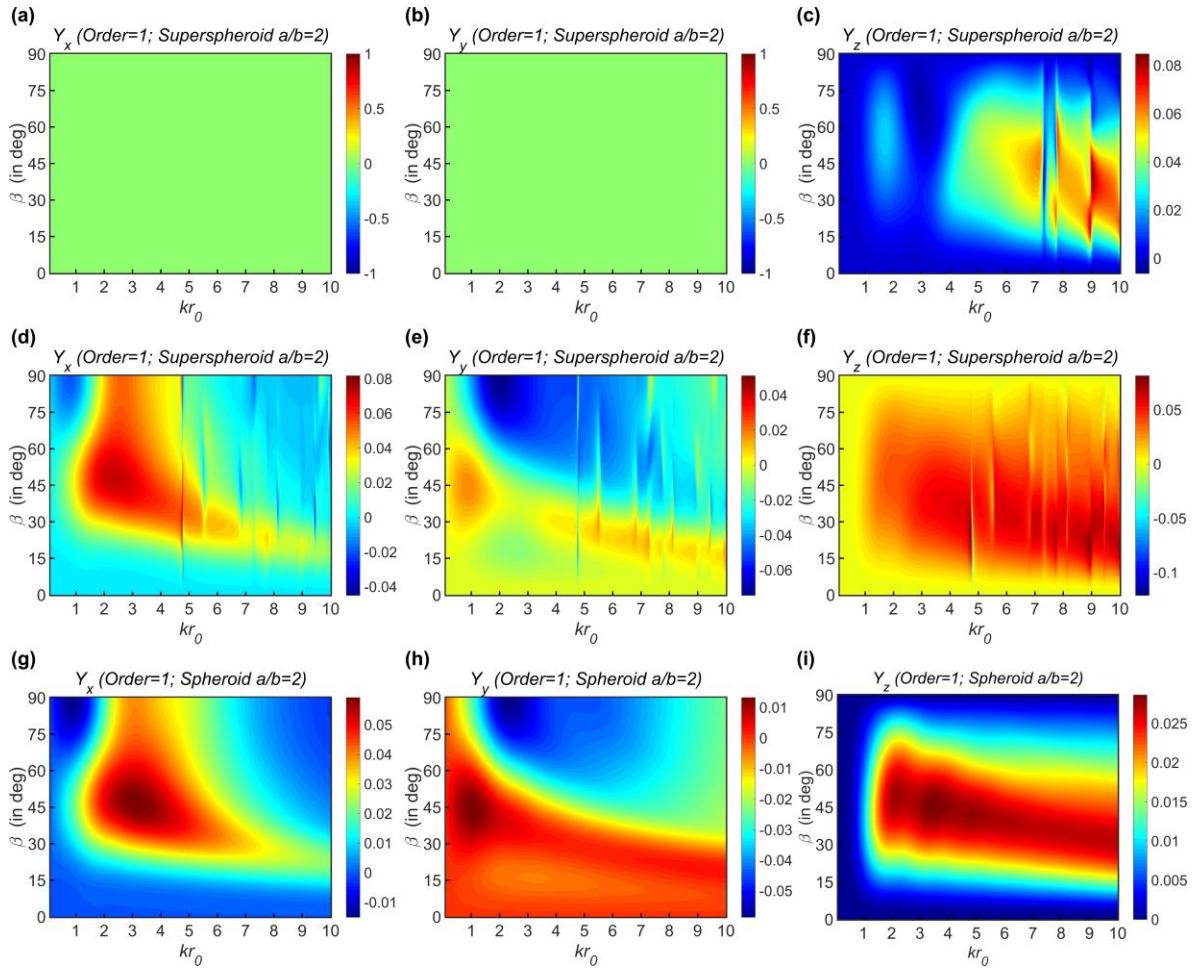


图 6.9 三维声辐射力随入射波参数变化的分布

6.4.2 Bessel 波偏轴入射下三维声辐射力特性研究

上小节研究了一阶 Bessel 波不同参数入射下的三维声辐射力分布特性，本小节重点讨论不同阶 Bessel 波在不同偏轴量入射下的三维声辐射力分布特性。偏轴量 (x_0, y_0) 的取值范围均为 $[-1, 1]$ ，程序中取值间隔 Δx_0 和 Δy_0 为 0.02。图 6.10 给出了不同阶 Bessel 波入射下三个方向的声辐射力随偏移量 (x_0, y_0) 变化的分布。入射波无量纲频率为 $kr_0 = 10$ ，波锥角为 $\beta = 30^\circ$ ，作用目标为尺度比为 $a/b = 2$ 的刚性“花生”型超椭球。第一至第三行分别表示零阶、一阶和二阶 Bessel 波入射的情况；第一列至第三列分别表示 x 、 y 和 z 方向的无量纲辐射力 Y_x 、 Y_y 和 Y_z 。从图中可以看出，不同阶 Bessel 波入射下，轴向声辐射力随横向偏移量 (x_0, y_0) 分布具有径向对称性，见图 6.10 第三

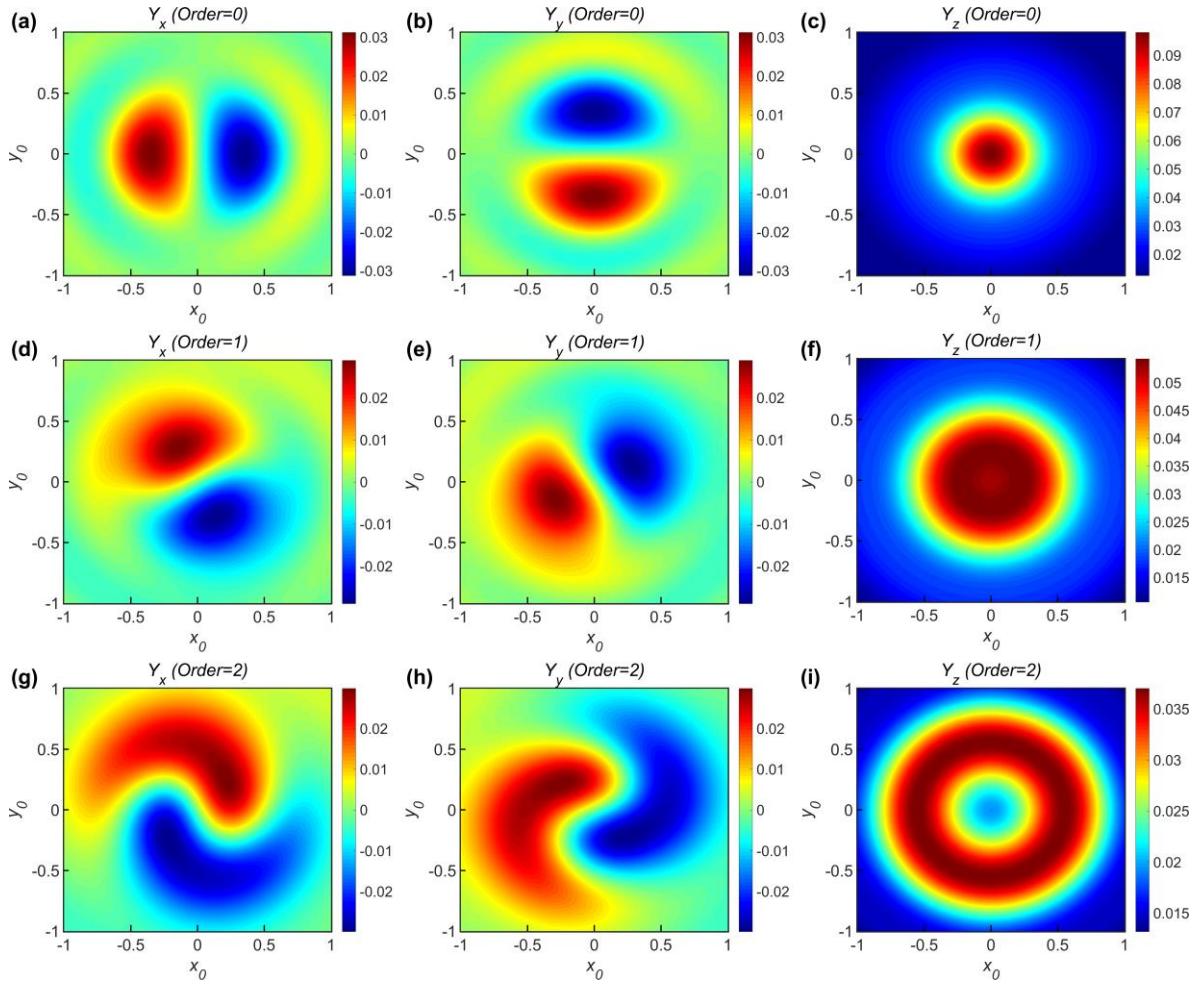


图 6.10 三维声辐射力随偏轴量变化的分布

列；但零阶 Bessel 波 Y_z 的最大值在无偏移的情况下，而高阶 Bessel 波 Y_z 的最大值在偏离中心的同心圆上。这与 Bessel 波结构有关：零阶 Bessel 波横向强度分布中心最大，而高阶 Bessel 波最大值在偏离中心的同心圆上。此外，横向声辐射力分布中， x 和 y 方向的无量纲声辐射力分布在二维域 (x_0, y_0) 中不存在径向对称性，但 Y_x 和 Y_y 彼此之间存在角对称形，这与 Bessel 波结构具有径向对称性以及超椭球具有回旋对称性有关。实际工程应用中，目标相对于波轴可能存在一个偏移，根据图 6.10 中第一列和第二列，可以判断给定阶数和偏移量等参数情况下，带有较小初始偏移的目标是靠近还是远离波轴。以图 (a) 零阶 Bessel 波入射入射为例，当入射波相对于目标中心有一个正方向的偏移 $x_0 > 0$ ，此时横向辐射力 $Y_x < 0$ ，则目标远离波轴运动；当入射波为二阶高阶漩涡波时，如图 (g) 所示，当 $x_0 > 0$ 时 $Y_x > 0$ ，此时目标靠近波轴运动，因此

可以通过横向稳定性对实验和实际工程中的波束和目标进行校准和操控。此外，不同的入射频率和波锥角会影响三个方向的无量纲声辐射力在二维区间 (x_0, y_0) 上的分布，并与上述描述的规律一致，因此不再额外给出和赘述。

6.5 Bessel 驻波入射下声辐射力特性研究

第二章中 2.3 小节推导了任意 Bessel 行波入射下的波形系数，其推导过程可以扩展到推导相向传播的 Bessel 驻波的波形系数。Bessel 驻波的声场表达式为

$$\Phi_{BS} = \Phi_0 i^M \left[A e^{ik_z(z-z_0+h)} + B e^{-ik_z(z-z_0+h)} \right] \times J_M(k_r R') e^{iM\varphi'} \quad (6.4)$$

其中， h 为目标中心到最近的波腹处的轴向距离； A 和 B 分别是两束相向传播波的幅值，为了保证与 Bessel 行波的能量一致，即 $A^2 + B^2 = 1$ 。定义参数 α ，满足 $B = \alpha A$ ，则有 $A = 1/\sqrt{1+\alpha^2}$ 。采用相同的推导过程，反向传播时式 (2.19) 右边的 i^{n-m} 用 $(-i)^{n-m}$ 替换，则推导出的驻波公式入射波形系数为

$$a_{nm} = 4\pi\xi_{nm} \left[A e^{ik_z(-z_0+h)} + B e^{-ik_z(-z_0+h)} (-1)^{n-m} \right] i^{n-m+M} P_n^m(\cos\beta) J_{m-M}(\sigma_0) e^{-i(m-M)\varphi_0} \quad (6.5)$$

因此，上述基于分波序列法和 T 矩阵法的计算程序，只需要更改入射波形系数，便可直接扩展到求解 Bessel 驻波的声辐射力计算。图 6.10 和 6.11 分别采用分波序列法和 T 矩阵法计算了不同阶数的 Bessel 驻波 ($\alpha=1$) 入射下刚性球的轴向无量纲声辐射力。入射方向为正入射，不存在偏轴量，波锥角为 $\beta=60^\circ$ ，具体的阶数在图中给出。通过对图 10 中理论解和图 11 数值解可知，两种方法计算的声辐射力在不同阶数 Bessel 驻波入射下的结果均完全吻合。通过与图 6.2 中的刚性球 Bessel 行波入射下的声辐射力相比，可知 Bessel 驻波入射时发生轴向辐射力反转的频域范围更大，且辐射拉力的幅值也更大，说明 Bessel 驻波比行波入射更容易产生作用于目标的辐射拉力。本小节主要推导给出驻波的入射波形系数表达式，并用两种方法相互验证，但 Bessel 驻波入射下的研究不是全文的研究重点，在此不再给出额外的计算结果和讨论。

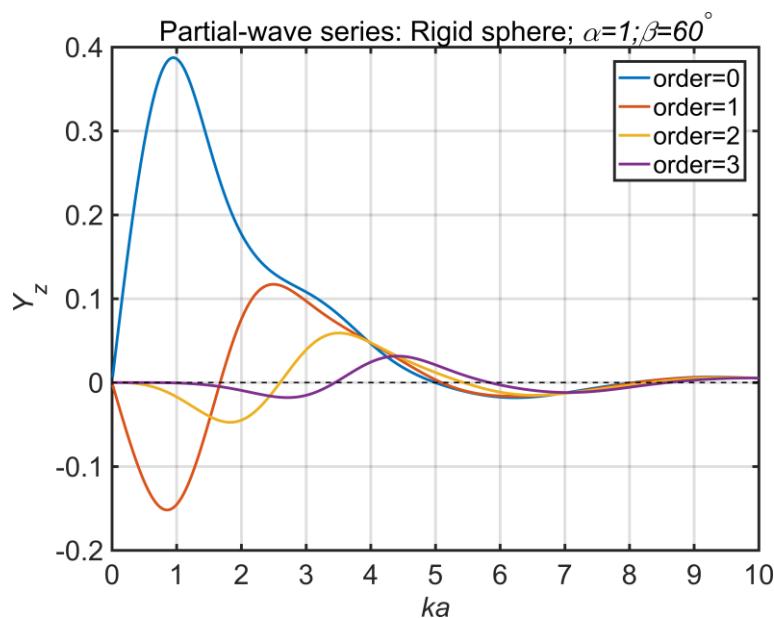


图 6.11 Bessel 驻波入射下基于分波序列法计算的刚性球轴向辐射力

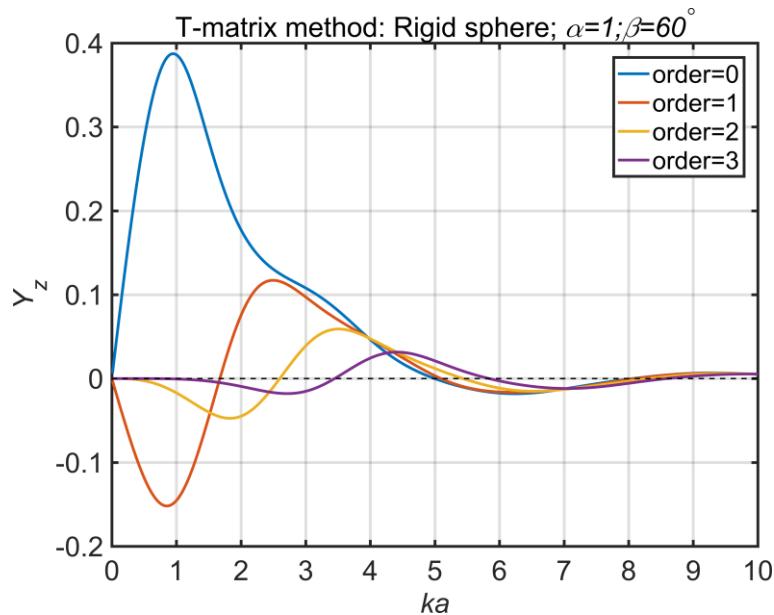


图 6.12 Bessel 驻波入射下基于 T 矩阵法计算的刚性球轴向辐射力

6.6 本章小结

本章主要基于第三章建立的任意声场入射下的声辐射力模型，根据推导的无量纲声辐射力公式编写相应的程序，并验证了方法和计算程序的正确性。重点研究了声辐射力反转及其相应的物理机理：不考虑吸收的情况下，前向散射比反向散射相对更强，

华 中 科 技 大 学 博 士 学 位 论 文

便产生辐射拉力，这在粒子操控领域具有重要意义。此外，基于 T 矩阵法探讨非球形目标在 Bessel 波入射下产生轴向辐射力反转的参数条件，并发现适当细长的几何形状在 Bessel 波入射下更利于产生辐射力反转，如超椭球和柱球组合体可以在更小的波锥角下产生辐射力反转。对三维空间任意方向的声辐射力也进行了简要的讨论，这为粒子动力学研究打下了基础。同时。本章推导了 Bessel 驻波的波形系数，并在理论上和数值上进行了简要的验证和探讨。本章的工作为设计声学镊子数值工具箱打下了初步基础。另外，其他理论或数值方法根据已知的入射波形系数求解散射场，也具有封装到声学镊子数值工具箱的潜力。

7 Bessel 波入射下三维声辐射力矩特性和机理

7.1 引言

当声波携带轨道角动量时，粒子可能会受到力矩的作用而旋转。Bessel 波是一种理想的涡旋场，具有在粒子操纵领域的潜在应用。Zhang 和 Marston 推导了回旋物体在涡旋场中轴向辐射力矩与拓扑荷数，角频率和吸收能量之间的理论表达式^[147]。然而，该表达式有一定的局限性：无法适用于偏轴入射或目标相对于入射方向不存在旋转对称性的情况，以及无法通用于预报非球形粒子斜入射的力矩。本章主要研究 Bessel 波声场下力矩反转的参数条件及物理机理，对上一章声辐射力对粒子位移运动研究的补充。研究 Bessel 声场中的旋转运动在粒子动力学领域具有指导意义。

7.2 Bessel 入射下吸收球形目标声辐射力矩特性研究

7.2.1 Bessel 正入射时轴向声辐射力矩特性研究

Zhang 和 Marston 推导了回旋物体在涡旋场中轴向辐射力矩 T_z 与拓扑荷数(阶数) M ，角频率 ω 和吸收能量 P_{abs} 之间的理论表达式，具体为^[147]

$$T_z = \frac{M}{\omega} P_{\text{abs}} \quad (7.1)$$

其中，上式适用于回旋对称目标的中心在漩涡波入射轴上，但对目标中心偏离波轴时式 (7.1) 失效。理想 Bessel 波是一种无衍射漩涡波，其可以采用理论，数值和实验方式加以研究，因此在漩涡波的研究中吸引了广泛兴趣。本小节采用基于多极展开的分波序列法来研究正入射时吸收球和球壳的轴向声辐射力矩分布特性。实心球和球壳的材料为聚乙烯，是一种粘弹性材料^[167]，其密度为 0.957 g/cm^3 ，纵向和横向速度分别为 2430 m/s 和 950 m/s ，对应的归一化吸收系数为 0.0074 和 0.022 。外部流体为均质无粘性的水（密度为 1 g/cm^3 ，声速为 1500 m/s ）。球壳的内径定义为 b ，外径定义为 a ，内部填充有空气，其密度和声速分别为 0.00123 g/cm^3 和 340 m/s 。当 $b=0$ 时球

壳退化为实心球。具有吸收作用的粘弹性球壳的散射系数在附录 III.F 中详细给出，当球壳退化为实心球时，只需要取矩阵中与外表面和介质边界相关的部分元素即可正确计算实心球的声散射。

图 7.1 给出了不同阶 Bessel 波正入射时轴向声辐射力矩随无量纲频率 ka 和波锥角 β 变化的二维分布。第一列表示粘弹性实心球 ($b=0$) 的声辐射力矩，第二列表示内部包含空气的粘弹性球壳 ($b/a=0.99$) 的辐射力矩分布。第一行图 (a) 和 (b) 表示零阶 ($M=0$) 普通 Bessel 波入射，在整个 (ka, β) 二维域内，轴向声辐射力矩均为零。这是因为零阶 Bessel 波的拓扑荷数为零，根据式 (7.1) 可知，即使当角频率 $\omega > 0$ 和吸收的能量 $P_{\text{abs}} > 0$ ，但由于 $M=0$ ，在正入射时轴向辐射力矩 T_z 始终为零，图中的结果验证了理论推导式 (7.1) 的正确性。但当高阶 Bessel 漩涡波入射时，有 $M \geq 1$ ，则此时轴向声辐射力矩不为零，如图 (b) - (f) 所示。从图中可以看出，具有吸收作用的粘弹性球 (b,c) 和球壳 (e,f) 的轴向声辐射力均大于零，因为此时角频率，拓扑荷数和吸收能量均大于零，根据式 (7.1)，此时的轴向辐射力矩均大于零。本小节采用多极展开法推导的声辐射力矩公式来计算，其结果与 Mitri 推导的正入射时轴向声辐射力矩的计算结果完全一致（文献[167]中图 FIG1. (a,d); 图 FIG3. (a,d)），进一步证明的理论推导和程序的正确性。图 7.1 中高阶 Bessel 波入射下，在某些频域范围内出现了声辐射力矩的峰值，为了解释该现象，图 7.2 给出了粘弹性实心球在平面波入射下的共振反向散射形态函数幅值曲线，与图 7.1 (b) 轴向声辐射力矩二维分布同时绘制，且形态函数幅值放大了 20 倍。由于共振频率分布是目标的固有属性，与入射声源无关，故平面波入射下的共振频率与 Bessel 波入射下的共振频率分布一致。从图 7.2 中可以看出，最大轴向声辐射力矩出现在共振频率处，这是因为此时目标在声源激励下产生共振，需要吸收更多的能量，根据式 (7.1) 可知，此时产生更大的辐射力矩。需要注意，Mitri 推导的辐射力矩公式无法直接用于偏轴入射时的计算，但本文推导的理论公式可以直接用于任意方位入射下声辐射力矩的计算，下面将进一步讨论。

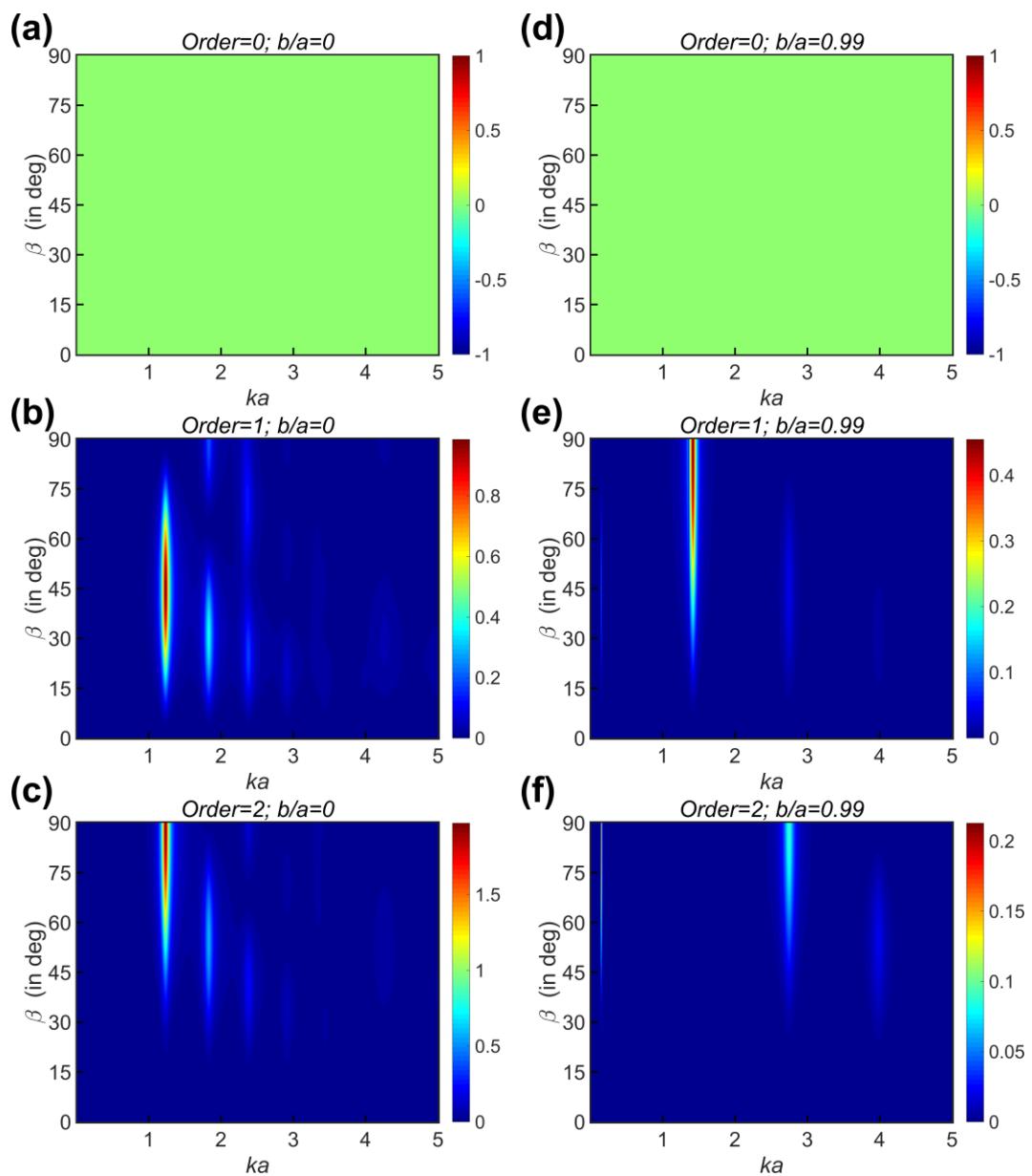


图 7.1 不同阶 Bessel 波正入射时粘弹性球和球壳的轴向辐射力矩二维分布图

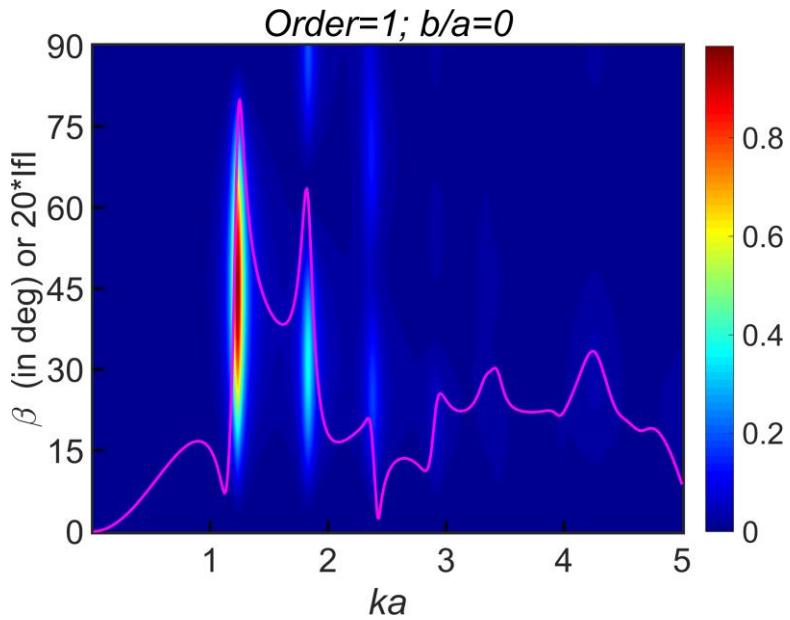


图 7.2 平面波入射粘性球的共振反向散射形态函数（放大 20 倍）与轴向辐射力矩二维分布

7.2.2 Bessel 波偏轴入射下轴向辐射力矩反转及机理研究

任意方向入射时，式 (7.1) 不再适用于偏轴入射的情形，此时可能会出现声辐射力矩反转，这在单波束声学操控领域具有重要意义。根据第二章推导的任意入射下的入射波形系数（式 2.20）可知，偏轴入射时不需要增加额外的计算量，只需加一个偏轴量(x_0, y_0)。图 7.3 第一行给出了一阶 Bessel 波在不同偏轴量入射时粘弹性球壳 ($b/a = 0.99$) 的轴向声辐射力矩(ka, β)二维分布，球壳内部为空气。第二行和第三行分别给出了粘弹性实心球 ($b = 0$) 在一阶和二阶 Bessel 波入射下的辐射力矩分布。第一至第三列的偏轴量(x_0, y_0)分别为 $(\pi/ka, \pi/ka)$, $(2\pi/ka, 2\pi/ka)$ 和 $(3\pi/ka, 3\pi/ka)$ 。观察图 7.3 可知，在适当的无量纲频率 ka 和波锥角 β 时，轴向声辐射力矩为负，即出现了声辐射力矩反转。分别观察第一行球壳和第二、三行实心球情况可知，声辐射力矩在相同的几个狭窄频率范围内发生反转，且随着偏轴量增加，在 $\beta=[0^\circ, 90^\circ]$ 范围内正负交替次数越多，这可以根据式 (2.10) 来分析：使柱 Bessel 函数 $J_M(k_r R')$ 为零的 $(k_r R')$ 是确定的，当偏轴量越大（导致 R' 越大），则径向波数分量变化 $k_r = k \sin \beta$ 变化越频繁，因此图中偏轴量大时 β 交替次数更多。

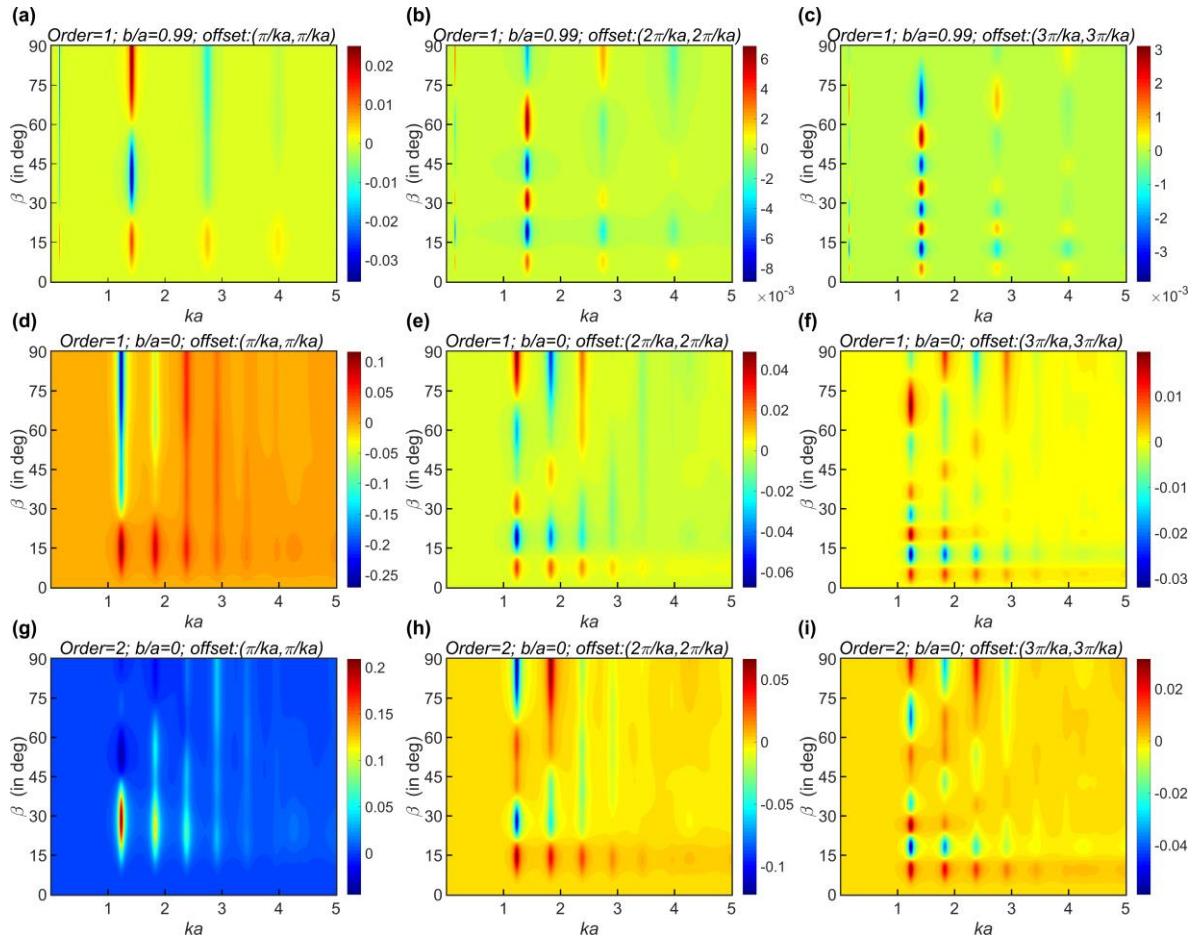


图 7.3 不同阶 Bessel 波偏轴入射时粘弹性球和球壳的轴向辐射力矩二维分布图

为了解释轴向声辐射力矩发生反转的物理机理, 根据式 (2.10) 知, 辐射力矩的分布与柱贝塞尔函数 $J_M(k_r R')$ 有关, 其中 $k_r = k \sin \beta$, $R' = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ 表示任意场点的横向距离。为了讨论方便, 此处用已知的偏轴处横向距离 $R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ 代替 R' 。图 7.4 给出了一阶第一类柱贝塞尔函数随变量 X 变化的曲线图, 具体给出了函数取峰谷值和零值的 X 的根。为了便于讨论, 图 7.5 绘制了偏移量为定值的粘弹性球在一阶 Bessel 波入射下的轴向声辐射力矩, 偏轴量恒为 $(x_0, y_0) = (5, 5)$; 同时绘制了当 $k_r R_0 = X$ 时对应着 $ka - \beta$ 曲线, 此时 X 的值即图 7.4 中标出的使贝塞尔函数为峰谷值和零值的根, 每条曲线对应的 X 值在图中具体标出。从图 7.5 中可以看出, 每条曲线穿过辐射力矩 (ka, β) 二维分布的正负反转点, 即偏轴量和入射波参数的选择会影响到入射波中 $J_M(k_r R_0)$ 函数, 该函数除了取零值时力矩在 (ka, β) 二维分布部分区域发生

反转，同时取峰谷值也会使力矩正负值出现反转，这可以推测在 $J_M(k_r R_0) J_M'(k_r R_0) = 0$ 时，即 $J_M(k_r R_0) = 0$ 或 $J_M'(k_r R_0) = 0$ 造成辐射力矩发生反转。

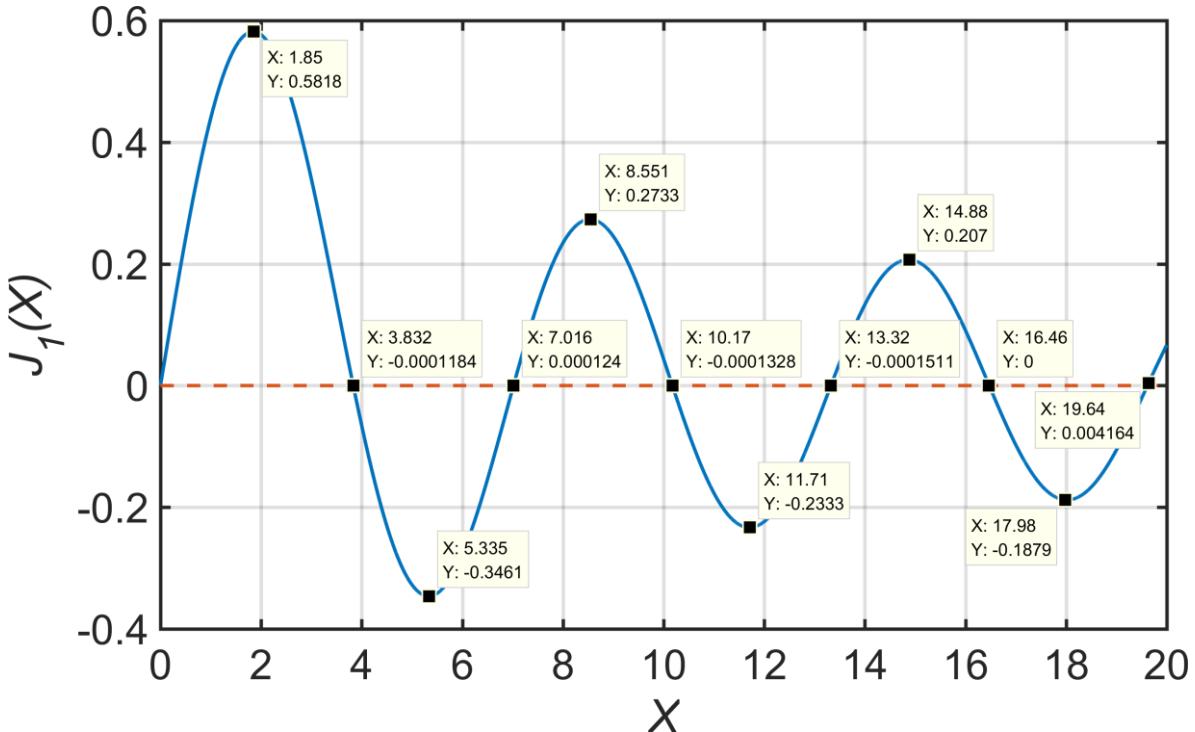


图 7.4 一阶第一类柱贝塞尔函数 $J_1(X)$ 取峰谷值和零值的根分布

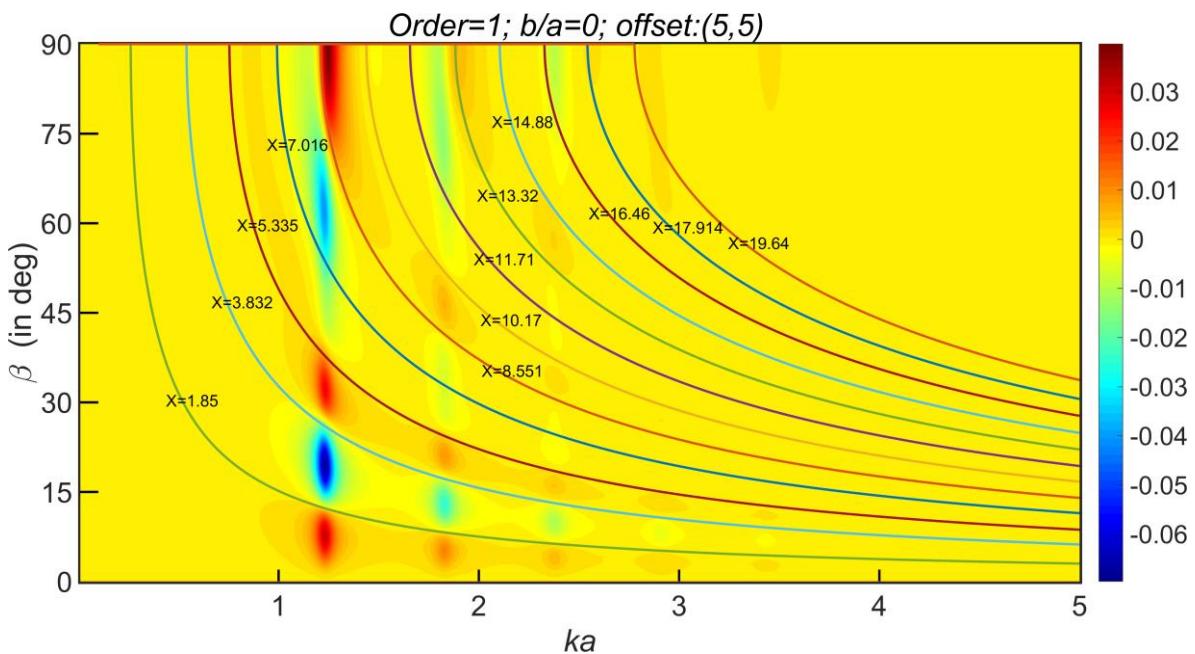


图 7.5 一阶第一类柱贝塞尔函数取峰值，零值和谷值时对应的 $ka-\beta$ 曲线

7.3 Bessel 入射下刚性复杂目标声辐射力矩特性研究

7.3.1 零阶 Bessel 任意入射下椭球声辐射力特性研究

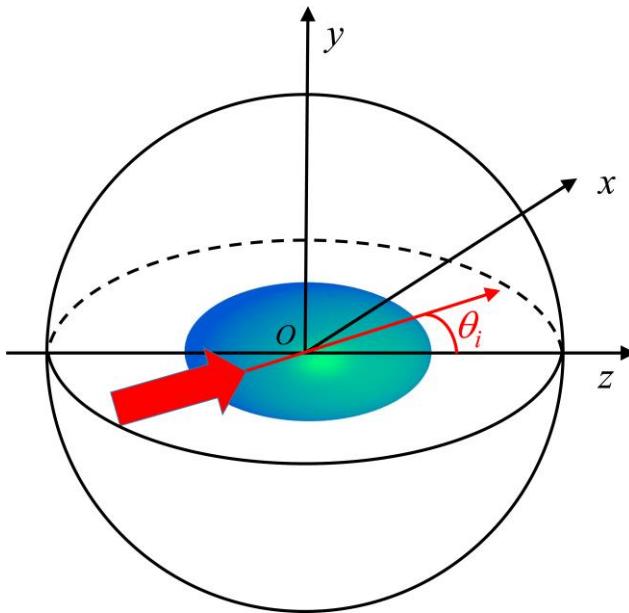


图 7.6 Bessel 过椭球中心任意方向入射的示意图

考虑椭球中心在零阶 Bessel 波波轴上，采用 2.4.3.1 小节中基于球谐函数叠加理论计算入射波形系数的 T 矩阵法，研究不同角度入射时目标受声场绕 y 轴旋转的辐射力矩，如图 7.6 所示。由于声场和目标均关于 xOz 平面对称，因此绕 z 轴的辐射力矩为零，即 $\Gamma_z = 0$ 。声场关于 xOy 平面不对称，因此存在绕 x 轴的辐射力矩，同理，绕 y 轴的辐射力矩也存在，本小节主要讨论绕 y 轴旋转的辐射力矩 Γ_y ，其示意图如图 7.6 所示。刚性椭球的中心在 Bessel 波轴线上，入射波轴线与 z 轴正方向夹角为 θ_i 。利用斜入射时零阶 Bessel 波的入射系数，根据式 (3.57) 可以计算任意角度入射时椭球绕 y 轴的声辐射力矩。

图 7.7 给出了细长椭球在瑞利区的无量纲声辐射力矩 Γ_y 随入射角度变化的曲线，辐射力矩的方向判定遵从右手定则。此时椭球尺度比为 $b/a = 0.5$ ， a 为极半径， b 为赤道半径。入射波无量纲频率 $ka = 0.0628$ ，远小于 1，故在瑞利长波长区，即波长相对于粒子特征长度较大；波锥角分别为 $\beta=0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 和 80° ，其中 $\beta=0^\circ$ 表示平面

波入射。为了方便，图中给出了 $\theta_i = 45^\circ$ 的位置，用黑虚线表示。从图 7.7 可以看出，当入射方向沿 z 轴正方向($\theta_i = 0^\circ$)或沿 x 轴正方向($\theta_i = 90^\circ$)入射时，平面波和 Bessel 波入射时绕 y 轴的辐射力矩消失，即 $\Gamma_y = 0$ ，这是因为此时入射波和椭球均关于 yOz 或 xOy 平面对称，因此不存在绕 y 轴的转动。此外，在其他入射角时，无量纲声辐射力矩均小于零，且最小值均在 $\theta_i = 45^\circ$ 。这可以用 King^[191]推导的刚性瑞利盘的平面波近似公式(59)来解释：绕 y 轴的辐射力矩满足 $\Gamma_y \propto -\sin(2\theta_i)$ ，因此图中的辐射力矩均为负值，且在 $\theta_i = 45^\circ$ 幅值最大，存在 $\sin(2\theta_i) = 1$ 。根据图 7.7 中可知，Bessel 波入射时在瑞利长波长近似区与平面波的辐射力矩关于入射角的变化规律一致，但波锥角越大，产生的最大辐射力矩越大。此外，Fan 等^[192]在理论上推导了驻波入射下长波长近似区的最大力矩也出现在 $\theta_i = 45^\circ$ 处。

上述讨论了瑞利长波长近似区平面波和 Bessel 波入射下 Γ_y 随入射轴角变化的曲线，下面将探讨几何区的声辐射力特性。图 7.8 中的计算参数与 7.7 一致，除了入射无量纲频率为 $ka = 10$ ，此时入射波长相对于目标尺寸很小。同样，根据对称性，如图所示在 $\theta_i = 0^\circ$ 和 $\theta_i = 90^\circ$ 处， $\Gamma_y = 0$ 。但此时不同角度入射下，平面波和 Bessel 波的辐射力矩分布不再关于 $\theta_i = 45^\circ$ 对称。以平面波为例，此时的椭球尺寸相对于波长较大，因垂直于声传播方向的椭球截面的变化会造成绕 y 轴力矩变化，但由于小尺度比椭球的截面积变化不大，对称性仅被轻微地打破。在 Bessel 波入射下，声辐射力矩随入射角分布的对称性完全被打破，并在波锥角足够大时出现反转，如 $\beta = 80^\circ$ 时 Γ_y 在 $\theta_i = 25^\circ$ 时出现了力矩反转。图 7.9 给出了刚性椭球绕 y 轴力矩的几何模型，可以认为声场包含无数束声线，当如图 7.9 中红色声线产生的合力矩占优时，此时便产生绕 y 轴正向的力矩 Γ_y 。

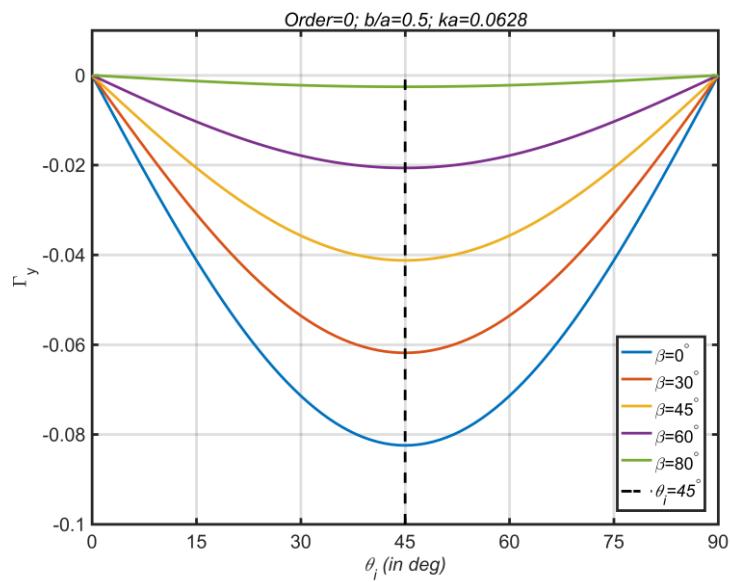


图 7.7 瑞利区不同波锥角 Bessel 波入射下横向辐射力矩 Γ_y 随入射轴角的变化曲线

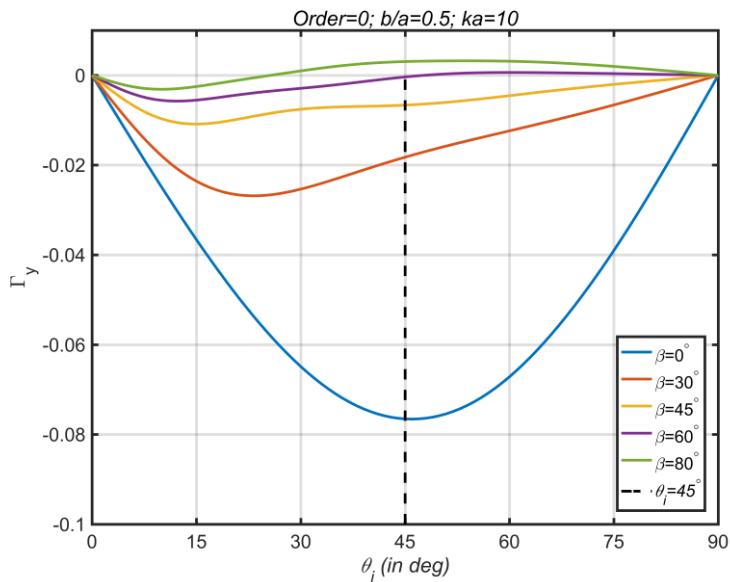


图 7.8 几何区不同波锥角 Bessel 波入射下横向辐射力矩 Γ_y 随入射轴角的变化曲线

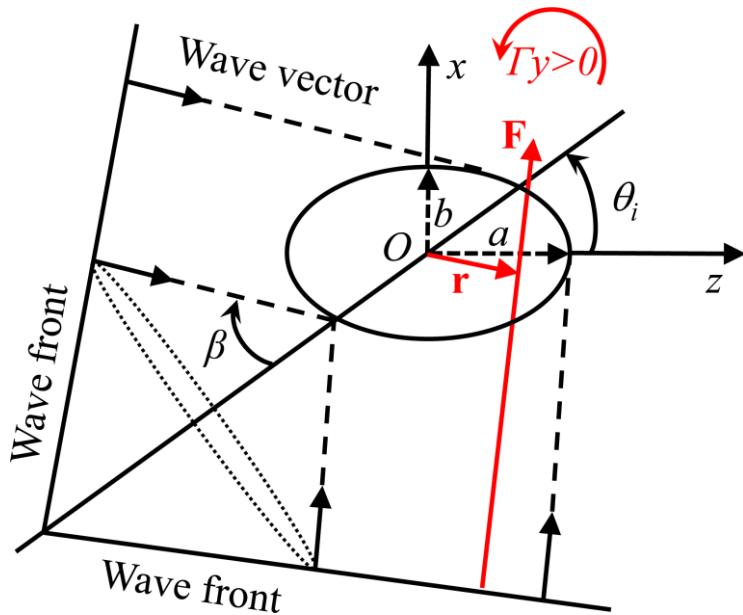


图 7.9 Bessel 波入射下声辐射力矩反转几何模型

7.3.2 三维声辐射力矩特性 Bessel 波参数化研究

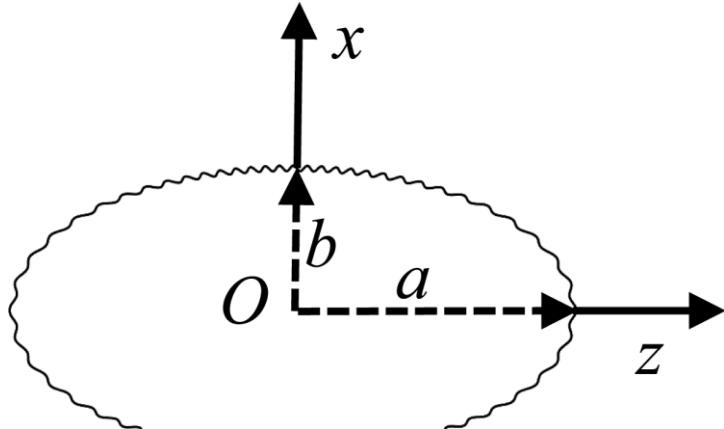


图 7.10 粗糙椭球示意图

本小节基于多极展开的入射波系数，根据式 (3.56) - (3.58) 计算笛卡尔坐标系下三个方向的无量纲声辐射力矩，包括 Bessel 波正入射和偏轴入射的情况。实际工程中物体表面可能带有一定的凹凸不平，因此本小节除了讨论光滑刚性椭球的三维声辐射力矩分布外，同时也简要研究粗糙表面的刚性椭球的辐射力矩分布情况。带周期型粗糙表面的刚性椭球的几何形状函数的表达式为^[84]

$$r(\theta) = \left(\cos^2 \theta / a^2 + \sin^2 \theta / b^2 \right)^{-1/2} + \delta \cos(l\theta) \quad (7.2)$$

其中， δ 为几何表面粗糙度的幅值， l 表示整个椭圆截面粗糙变化的周期数，对具有回旋对称和镜面对称的目标， l 常取 4 的整数倍。本节粗糙度幅值取 $\delta=0.01a$ ，变化周期数为 $l=64$ ，其二维几何形状如图 7.10 所示。

图 7.11 分别给出了一阶 Bessel 波入射下，刚性光滑椭球（a, b, d, e）和粗糙椭球（c, f）在一阶 Bessel 波入射下无量纲横向声辐射力矩随频率 kr_0 和波锥角 β 变化的分布情况。第一行表示正入射情况， $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ，第二和第三行表示偏轴入射的情况，偏轴量为 $(x_0, y_0) = (0.5\pi/kr_0, 0.5\pi/kr_0)$ ；其中第二行表示目标为尺度比为 $a/b = 2$ 刚性光滑椭球，第三行表示目标为尺度比为 $a/b = 2$ 刚性粗糙椭球。第一列表示绕 x 轴的无量纲辐射力矩 Γ_x ，第二列表示绕 y 轴的无量纲辐射力矩 Γ_y 。根据图中结果观察可知，正入射时由于入射波关于目标存在对称性，因此横向声辐射力矩均为零，需要注意，此结论对零阶和高阶 Bessel 波均成立。通过对比相同的参数分布和尺度比下的光滑和粗糙椭球分布（第二和三行），可知：粗糙度对相对较低频率的辐射力矩分布影响较小，如 $kr_0 < 3$ ，而对较高频率影响较大，这主要是高频域内椭球表面凹凸不平较大影响了镜面反射的分布，因此对散射场分布产生较大的影响，进而影响辐射力矩的分布。此外，跟“花生”型超椭球的声辐射力分布类似（图 6.9 第二行），凹凸不平的粗糙椭球在一些较狭窄的频域范围内存在“跳变”，这可能与凹面体的几何形状相关。为了进一步研究偏轴入射时对力矩分布的影响，下面将进行进一步探讨。

图 7.12 绘制了三个方向无量纲声辐射力随偏轴量 (x_0, y_0) 变化的二维分布图，其中第一至第三行分别表示零阶，一阶和二阶 Bessel 波入射，第一至第三列分别表示三个方向的无量纲声辐射分布。刚性椭球的尺度比为 $a/b = 2$ ，入射波的无量纲频率为 $kr_0 = 10$ 以及波锥角为 $\beta = 30^\circ$ 。观察可知，横向声辐射力矩最大值的数量级比轴向声辐射力矩大得多。特别，由于零阶 Bessel 波相位分布不具有方位角梯度，严格来讲不属于“漩涡波”，因此其产生的绕 z 轴旋转的辐射力矩 Γ_z 比高阶小，如图通过对比第三列分布图可知，零阶比高阶 Bessel 波产生的 Γ_z 要小 6~7 个数量级。此外，轴向辐射力矩分布具有径向对称性，图（c）出现“花斑”很可能是由于力矩数值太小，导致非技术

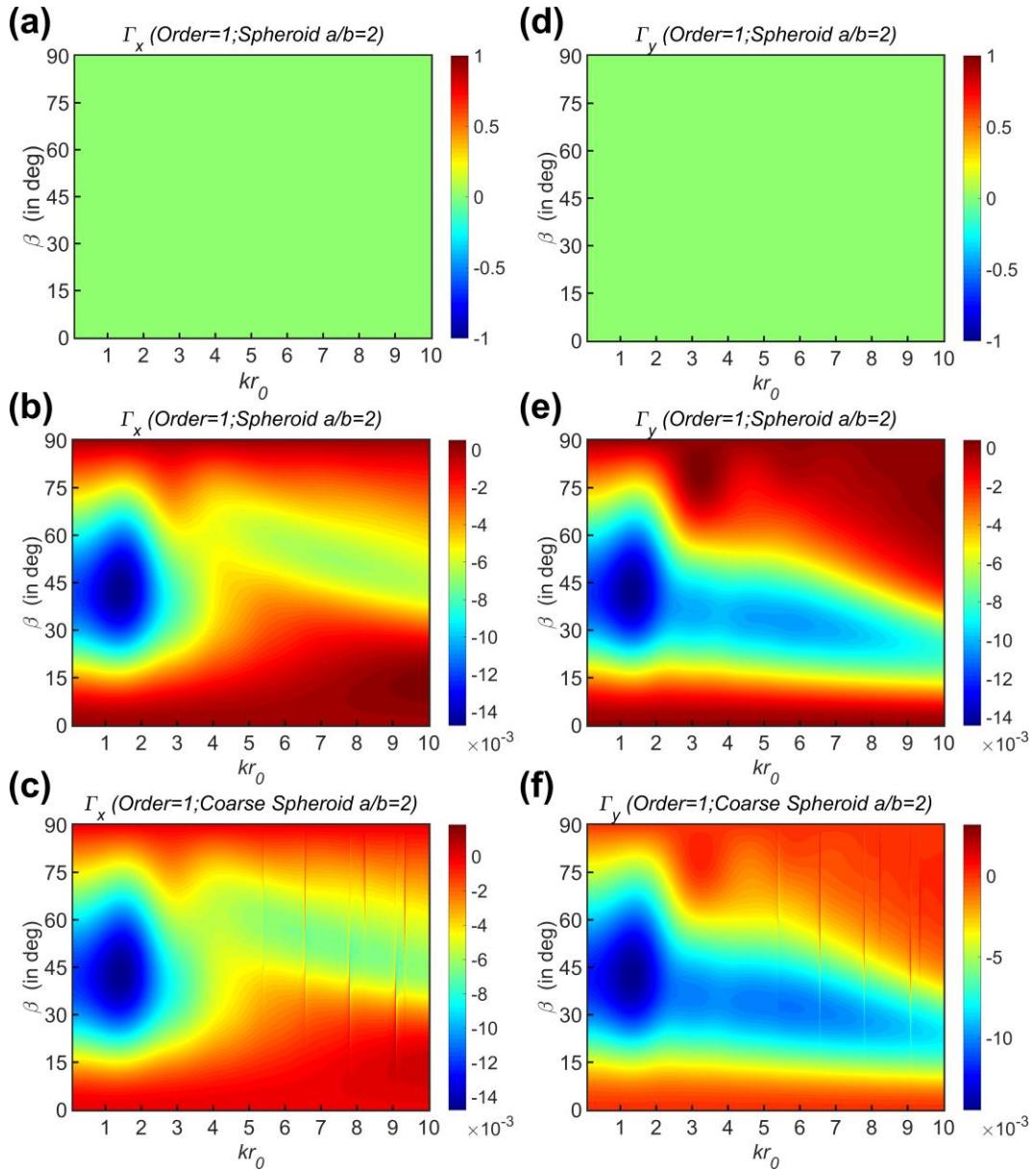


图 7.11 第一和第二行：刚性椭球正入射和偏轴入射；第三行：粗糙椭球偏轴入射

性数值误差。绕 x 和 y 轴旋转的横向声辐射力矩分布 Γ_x 和 Γ_y 具有相互旋转角对称性，且各自的辐射力矩正负值分布也具有关于 $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 的中心对称分布，这比较容易根据 Bessel 波的旋转对称性来解释。此外，与图 7.12 参数相同，粗糙椭球的三维声辐射力矩随 (kr_0, β) 的二维分布如图 7.13 所示。因为粗糙椭球与光滑椭球相似，也存在着旋转对称性，因此光滑椭球的分析与规律均适用于粗糙椭球。但通过对比粗糙和

光滑椭球偏轴入射下的声辐射力矩分布可知：沿椭球几何极角方向分布的粗糙度较大程度的影响了绕 z 轴方向的声辐射力矩，其数值与光滑椭球相比，一阶 Bessel 入射下 Γ_z 增加了约 5 个量级，二阶 Bessel 波增加了约 4 个数量级；但对横向方向的力矩影响较小。

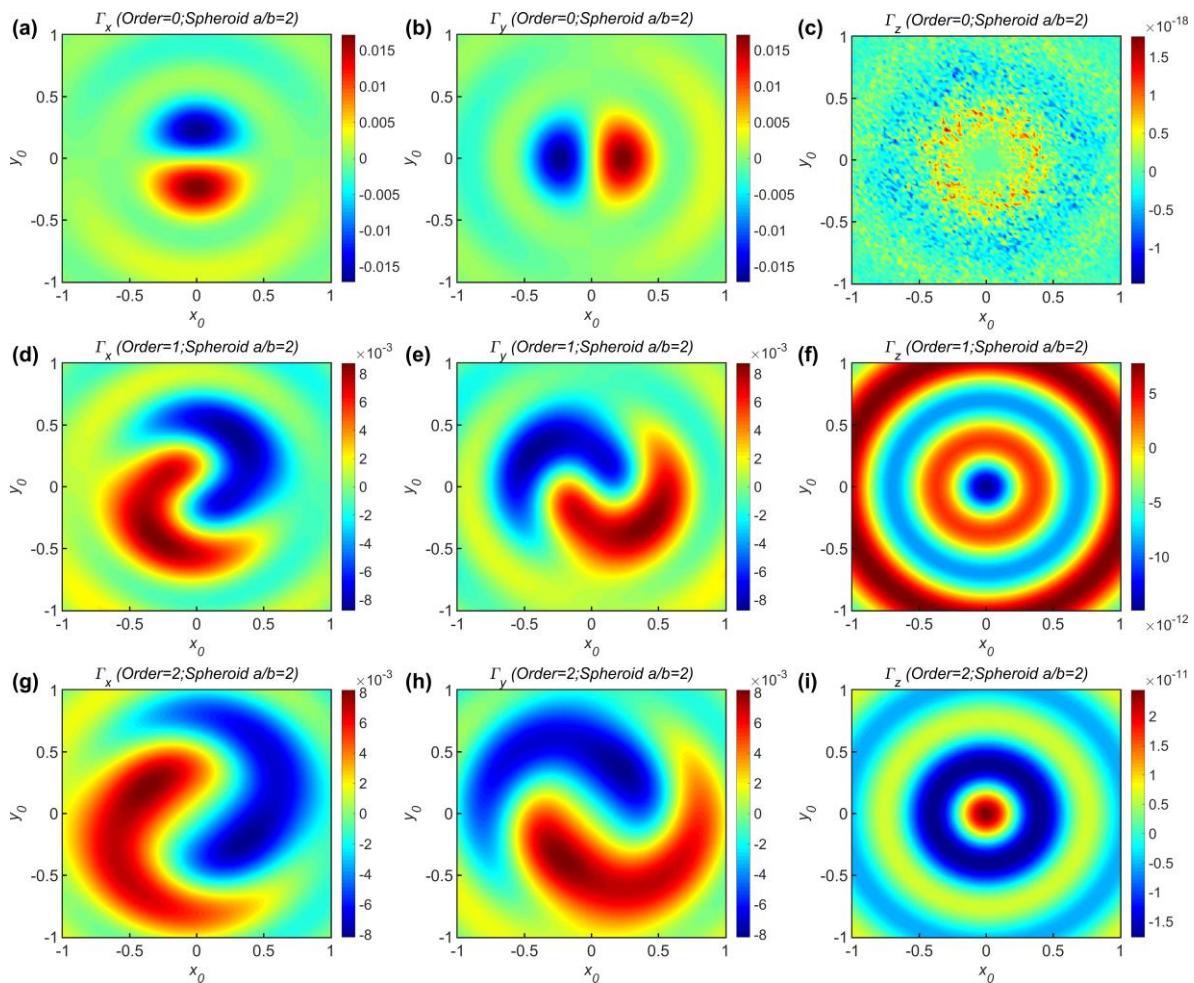


图 7.12 光滑椭球三维辐射力矩随偏轴量 (x_0, y_0) 二维分布

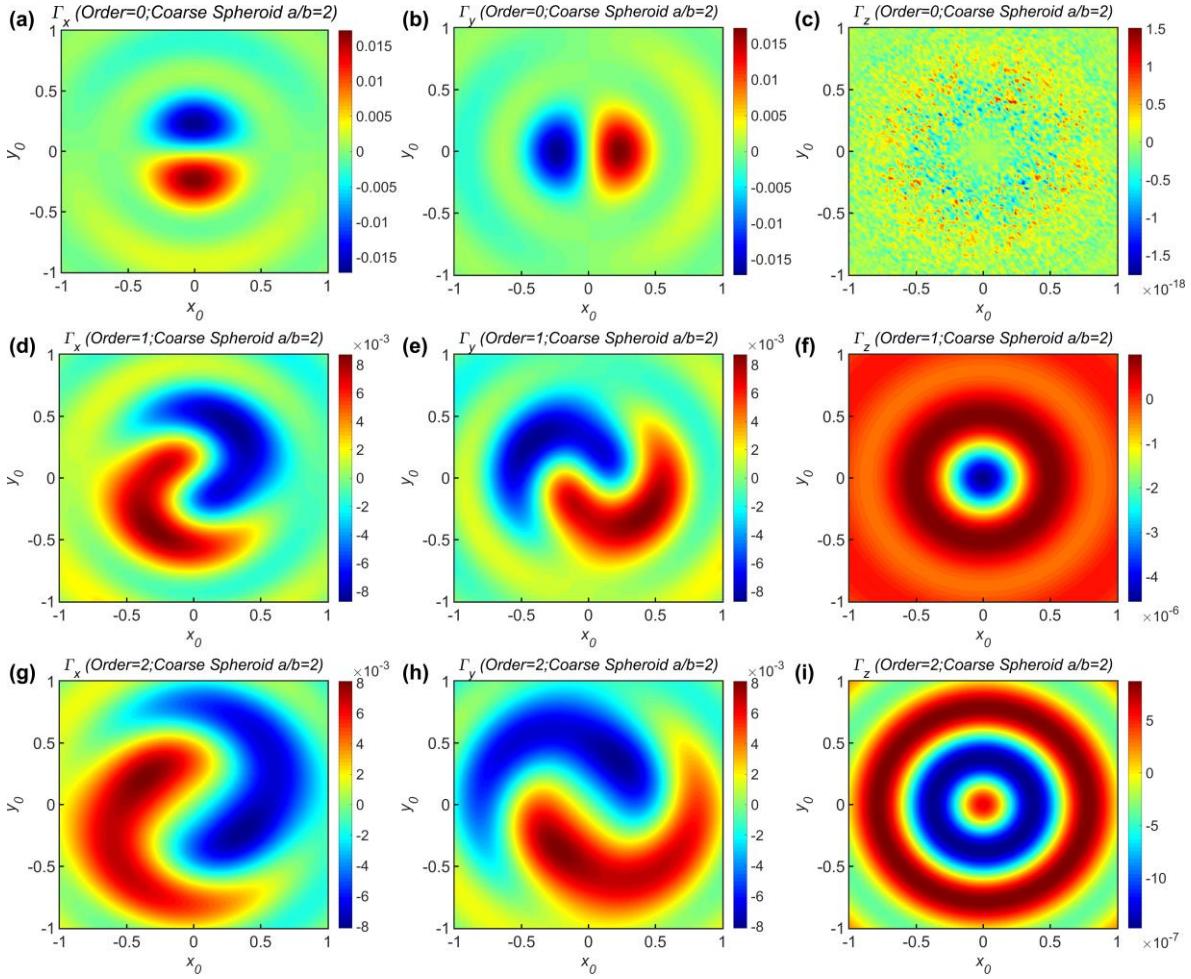


图 7.13 粗糙椭球三维辐射力矩随偏轴量 (x_0, y_0) 二维分布

7.4 本章小结

本章首先讨论了吸收实心球和球壳在正入射和偏轴入射的声辐射力矩随无量纲频率和波锥角的分布图，并引入 Zhang 和 Marston 的理论公式对正入射时的辐射力矩分布进行了解释；此外，本节采用基于多极展开的分波序列法根据第三章推导的辐射力矩公式编程计算的数值结果与 Mitri 推导的正入射时的理论解结果一致，验证了公式和程序的正确性。本节方法的优势在于克服理论分析和正入射理论解的不足，可以计算任意 Bessel 波入射下的三维声辐射力矩。通过对比粘弹性球的共振反向散射曲线与粘弹性实心球的轴向辐射力矩分布，指出辐射力矩峰值出现在共振频率处的规律。重点研究了粘弹性球形目标和刚性非球形目标在 Bessel 波入射下发生了辐射力反转

华 中 科 技 大 学 博 士 学 位 论 文

以及其相应的物理机理。最后探讨了刚性和光滑粗糙椭球的三维声辐射力矩分布，并讨论了其规律和现象，这在工程实践中具有潜在的应用。

8 全文总结与工作展望

8.1 全文总结

无衍射 Bessel 波与目标相互作用产生了不同于普通平面波的特殊散射特性，以及在非接触操控领域表现出的新异性能，使其在无衍射波成像，粒子捕捉，生物医疗，芯片实验室技术，表面化学以及弱引力环境等领域，具有重要的学术研究价值和工程应用潜力。本文建立了 Bessel 波入射下的目标的声散射模型，推导了基于理论和数值方法的声散射，以及声辐射力和力矩的计算公式，并通过编程进行数值实验，来研究 Bessel 波声场中目标的散射机理及在粒子操控领域的潜在应用。本文的主要研究结论和成果如下：

(1) 首次推导了任意阶 Bessel 波一般位置入射时入射波形系数的理论表达式，该表达式可以结合分波序列法用于计算球形目标散射场的理论解；同时可以结合 T 矩阵法用于计算任意形状目标散射场的数值解。因声场作用于目标时会发生能量的交换或转移，在宏观上表现出声场对目标产生辐射力和力矩。因此，基于推导的入射和散射波形系数表达式，进一步根据线动量和角动量应力张量法推导了声辐射力和力矩的表达式，并给出笛卡尔坐标系中三个方向的分量和进行了编程计算，为研究 Bessel 声场中目标操控提供了理论和数值支撑。

(2) 采用平面波领域的共振散射理论，对弹性球状目标的散射特性进行了理论分析，并用数值结果验证了特殊波锥角的 Bessel 波正入射时出现了共振抑制，并结合理论公式对 Bessel 波入射下共振抑制的物理机理进行了解释。Bessel 波与平面波入射时，弹性目标的固有共振频率分布一致，平面波时不会发生共振抑制，但特定波锥角的 Bessel 波会使某一阶分波被抑制，此时对应的弹性共振无法被激起，因此出现了共振抑制。但当特定波锥角的 Bessel 波偏离目标中心入射时，正入射时出现的共振抑制现象消失，并结合基于多极展开法推导的入射波形系数对偏轴入射时不再出现共振抑制的特性在物理机理上进行了解释。此外，简要回顾了提取纯共振散射贡献时不同厚

度的球壳的背景散射项的选取原则,以及对薄厚壳中起主要作用的弹性波成分进行了探讨。

(3) 提出 Bessel 波入射下典型刚性目标的反向散射几何模型,并与直接数值计算的结果对比能够正确吻合,进一步对 Bessel 波的波矢与波轴之间具有一个锥角的结构进行了验证与理解,同时对刚性目标反向散射成分进行了非常具体的探讨。反向散射形态函数随无量纲频率震荡的机理是镜反射波和 Franz 波出现了增强和相消的干涉,相邻的峰峰值间隔在空间上对应一个波长的波程差。通过引入亮点模型,解释了不同锥角的 Bessel 波和不同尺度比的刚性椭球反向散射形态函数的变化规律。提出了 Bessel 波正入射下任意回旋目标的散射角和波锥角具有交换对称性,并根据理论公式进行了分析和讨论。此外,对具有一定平行长度的典型的柱球组合体的前向散射特性进行了研究,指出了 Bessel 波正入射时回旋对称目标的散射场关于波锥角和散射角的交换对称性,并根据理论公式进行机理解释;同时提出几何模型定性地分析了正入射和斜入射时前向半平面目标强度的分布规律,解释了散射特性分布的物理规律和机理。

(4) 针对 Bessel 波入射下一般目标的散射模型,分析了声场作用于目标的声辐射力特性,并对声辐射力反转的物理机理进行了解释。平面波入射下无吸收被动目标的声辐射力始终非负,但在实际工程和理论研究中,负辐射力在粒子操控领域有具大的潜在应用。当目标的前向散射相对于反向散射较强时,根据作用力和反作用力定律,目标受到声场靠近声源的力大于远离声源的力,因此目标受到的合力表现为辐射拉力。通过编程计算进一步对 Bessel 波入射下典型凹面和凸面形状产生辐射拉力的参数分布进行了研究;此外研究了不同参数下目标的三维声辐射力分布和小扰动下的稳定性分析,并形成了适用于理论方法和数值方法的统一程序软件包。简要在理论上推导了 Bessel 驻波的入射波系数,为一般位置入射下任意阶 Bessel 驻波在声辐射力和力矩领域的研究打下了基础。

(5) 根据角动量应力张量法建立了任意 Bessel 波入射下任意目标形状的声辐射力矩模型,研究了粒子在声场中的旋转运动。通过引入漩涡波入射下回旋体的轴向声辐射力矩的理论表达式 $T_z = (M/\omega) P_{abs}$, 验证和分析了 Bessel 漩涡波入射下具有吸收

作用的粘弹性球壳声辐射力特性。但理论公式只适用于正入射时的情形，并局限于轴向声辐射力矩；此外，该公式无法预报辐射力矩反转的现象，即负声辐射力矩。本文采用分波序列法，通过对粘弹性球的反向共振散射形态函数分析，指出辐射力矩的峰值出现在粘弹性球的共振频率处。研究了 Bessel 偏轴入射时，粘弹性球和球壳在部分参数下出现了轴向辐射力反转，并结合推导的基于多极展开法的入射波形系数对反转的机理进行了研究，发现力矩反转发生在使与波锥角，波数和偏轴量相关的柱贝塞尔函数或其导数为零处，并用数值算例进行了验证。基于推导的球谐函数叠加理论的入射波形系数，结合 T 矩阵法研究了横向辐射力矩在瑞利长波长近似区和几何区的分布情况，指出瑞利区平面波，Bessel 波和平面驻波入射时横向力矩均关于入射轴角 $\theta_i = 45^\circ$ 对称，并引入 King 推导的理论近似公式进行了解释；在几何区平面波入射下刚性椭球的横向力矩不发生反转现象，但较大波锥角的 Bessel 波入射时力矩出现了反转，并用几何模型对反转的物理机理进行了定性地分析。

(6) 初步建立了包含理论和数值程序统一的声辐射力和力矩数值工具箱，该工具箱可以计算空间三维声辐射力和力矩，因此属于粒子操控的六自由度工具箱。该工具箱具有优良的兼容性，一方面可以通过推导不同的入射波形系数将其它在工程和学术上具有发展潜力的波束（如有限波束，高斯波等）封装进数值工具箱，只需修改程序包中入射系数部分即可；另一方面，可以通过引入其它理论、数值甚至实验方法，将计算得到的入射和散射波形系程序化，可直接封装进数值工具箱，计算其空间的三维辐射力和力矩。

8.2 本文的主要创新点

(1) 建立了球形目标在任意阶 Bessel 波一般位置入射下的声散射模型，基于多极展开法首次推导了正入射和偏轴入射下球形目标声散射的统一理论解。该理论方法是对 P.L. Marston 提出的只适用于正轴入射平面波叠加法的扩展和改进，在工程实践中更具有应用价值。

(2) 基于 T 矩阵法建立了 Bessel 波入射下一般形状目标的声散射计算模型，首次推导了 Bessel 结构波入射下的波形系数，克服了球坐标系下分波序列法局限于球状

目标的不足，对工程领域中广泛存在的非球形目标的声散射计算和研究提供了有效的求解手段。

(3) 提出 Bessel 波入射下复杂刚性目标的反向散射几何模型，正确解释了声散射特性和物理机理。通过引入亮点模型，正确解释了不同波锥角 Bessel 波入射下不同尺度比的刚性椭球反向散射形态函数的变化规律。基于推导的散射理论公式，验证并解释了 Bessel 波正入射下回旋体散射场关于波锥角和散射角的交换对称性。通过建立的几何射线模型定性地分析了带平行段柱球组合体的前向散射目标强度的分布规律和特性，进一步对 Bessel 波的物理结构和散射机理进行了研究和理解。

(4) 揭示了 Bessel 波入射下目标声辐射力（矩）反转的物理现象和相应机理。基于辐射应力张量法，独立推导了基于入射和散射波形系数的理想流体中目标三维声辐射力（矩）的理论公式。首次将 T 矩阵法引入到声辐射力（矩）计算领域，系统研究了复杂形状目标三维空间的位移和旋转运动，为粒子的实时操控应用打下了基础。

8.3 下一步工作展望

本文所提出的声散射和粒子操控的理论模型和数值计算方法，是基于理想流体假设，并不考虑流体介质中的粘性；且只考虑自由空间下的声散射。推导的声辐射力和力矩公式，局限在计算声场作用于目标的瞬时载荷，并无法完整预报目标的整个运动轨迹。基于以上描述，个人觉得下一步工作可以从以下几个方面进行尝试和开展：

(1) 引入工程和医学领域中的实际模型和边界条件：如模拟复杂细胞的大尺度比粘弹性椭球及其他典型复杂形状，可以更准确预报细胞或细菌在声场中的运动，便于未来精细医疗领域对细胞和细菌进行靶向操控。此外，应考虑声场在波导中的传播问题，如血管等载体的管壁边界条件对声场和对应的粒子操控具有较大的影响。通过进一步考虑复杂的边界条件，使数值实验能够更准确的预报实际中目标的受力情况，有利于发展精细生物医疗和芯片实验室等高端领域的技术。

(2) 探讨非理想流体中目标的声辐射力和力矩：如粘性流体中动量守恒和动量矩守恒条件失效，远场积分条件不再满足，因此无法将目标近场表面的声场积分等效到远场球面上积分，这为理论和数值积分带来了困扰和麻烦。因此探讨流体的粘性对

华 中 科 技 大 学 博 士 学 位 论 文

声场的影响十分有必要，并探讨声辐射力和声流产生的 Stokes 拖曳力在不同参数条件下占主导作用的物理规律和机理。

(3) 实验平台搭建：利用计算机编程和 3D 打印技术在空气中产生近似的 Bessel 声场，来研究小密度目标在声场中的运动和相应的物理机理。水下传感器阵列花费高昂，且实验难度比空气中更大，从经济性和可行性上来看，初步可以搭建空气中的声学镊子操控平台，并结合已有的理论和数值方法进行验证，以进一步揭示相关的物理机理。

(4) 声学镊子数字工具箱开发与共享：整合已编写的 Matlab 程序，设计计算机图形用户界面（GUI），将封装好的声学镊子计算软件包分享在互联网上，并撰写与分享相应的软件操作手册，促进国内外学术和工程领域的成果互享和竞争合作。此外，通过计算小扰动或 Bessel 偏轴入射下目标受到声场的辐射力和力矩，研究目标微小时间步长下的运动特性，通过反复迭代计算，可以预报粒子在声场中的整个运动轨迹，这可以较大增加数值工具箱的工程应用价值。

致 谢

五年时光，在最好的青春，做自认为最有意义的事，但愿未辜负。博士学位论文是一个系统且庞杂的工程，特此感谢我的恩师李威教授、赵耀教授和美国华盛顿州立大学的 Philip L. Marston 教授的指导和栽培。

首先，感谢李威老师的言传身教，在学术和科研上始终保持兢兢业业的专业态度，以身作则，耐心指导学生，同时鼓励学生多思多试多交流，给学生足够的自由度。李老师敏锐的学术洞察力和国际化视野，对我在科研入门时进行了非常好的启蒙，并毫无保留地分享他对科学的研究的理解，以及他本人在国外读博时的经历和经验，使我受益匪浅。另外，李老师十分鼓励并大力支持学生参加国际学术会议和访问交流，使我有机会开阔眼界，见识国内外学术大牛和前沿研究，时刻激励和鼓舞着我前进。此外，李老师在生活上对我无微不至的关心，是一个非常好的倾听者和引路人。其次，感谢联合指导老师赵耀老师对我的指导和有求必应的照顾。赵老师实事求是的学术作风，深厚扎实的工程背景，让我耳濡目染，受益良多；同时感谢赵老师对我的博士论文的选题和框架提出了很多宝贵的建议。

此外，感谢博士期间联合培养的导师美国华盛顿州立大学物理系的 Philip L. Marston 教授。Marston 教授渊博的知识，睿智的学术敏感性，发自肺腑的科研学术热情，感动了我，也一直影响着我。除了在学术上的耐心指导和真切关心外，Marston 教授也鼓励我旁听他讲授的经典电动力学课程，使我对电磁场和声场的区别和联系有了更深的理解，对我推导声场公式也有较大的帮助；其中印象最深的便是他一直强调学术研究应该“*To understand*”，使我铭记于心，受用良多。另外，非常感谢 Marston 夫妇在我访问交流期间对我生活上的关心与照顾，使我能够安心踏实学习，让我学习工作无后顾之忧。再者，感谢短期交流访学的合作导师美国密西西比大学物理声学国家中心的张黎坤教授，张教授扎实的理论功底，明确高效的科研习惯，“硬实力”与“软实力”并重的生活态度，使我受益匪浅。

此外，感谢科研路上一路走来的挚友和战友：感谢并肩作战的师兄柴应彬博士，

华中科技大学博士学位论文

从硕士阶段开始，柴博给师弟师妹们做了非常好的学术表率，工作认真，勤奋踏实，非常荣幸与他同时攻博，并肩作战，一路我们在学术上一起跋山涉水，互相鼓励与前进；在生活中交流互助，排忧解难；感谢大学同窗研究生同门的张启凡博士，我们合作一起做实验测试，一起参加博士杯篮球赛，一起走过了近九年岁月；感谢一起并肩作战做工程测试的雷明，李骏和黄南辉师兄，以及张阳，宋沨，邹志鸿，王明升，孙杨滨，刘依明，赵兰兰，游翔宇，纪仁超，孙乐和黄婷，还感谢实验室注入的新鲜血液余伟平，桂强，李嘉旺，崔赫，让我感受到实验室大家庭的朝气蓬勃和学术热情；感谢隔壁家的张咏欧师兄的经验分享和学术交流；感谢华盛顿州立大学的 Timothy Daniel, Viktor Bollen, 和 Aaron Gunderson，他们在生活和学术上都给了我巨大的帮助。此外，感谢西安电子科技大学的汪加洁和李仁先教授的鼓励与讨论，并邀请我参加 LIP2016 学术会议，使我有幸向法国巴黎第六大学 Jean-Louis Thomas 教授和法国里昂大学退休教授 Gouesbet 博士当面请教 Bessel 波的理论和实验问题。

最后，感恩无条件支持和理解我的父母及家人，没有你们，我无法勇往直前，无惧无畏。

非常感谢国家自然科学基金，国家留学基金委，华中科技大学短期交流基金对我的出国交流进行慷慨资助。

路漫漫其修远兮，吾将上下而求索。与诸君共勉。

龚志雄

于 NCPA, Mississippi, USA

2018 年 4 月 8 日

参考文献

- [1] Williams K L, Marston P L. Backscattering from an elastic sphere: Sommerfeld-Watson transformation and experimental confirmation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1985, 78(3): 1093-1102.
- [2] Faran J J. Sound scattering by solid cylinders and spheres. *The Journal of the Acoustical Society of America* 1951, 23(4): 405-418.
- [3] 汤渭霖, 范军. 水中双层弹性球壳的回声特性. *声学学报*, 1999, 24(2): 174-182.
- [4] 汤渭霖. 用物理声学方法计算非硬表面的声散射. *声学学报*, 1993, 18(1):45-53.
- [5] Gunderson A M, Marston P L. Kirchhoff approximation for backscattering from a partially exposed rigid sphere at a flat interface. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2016, 140(5): 3582-3592.
- [6] Waterman P C. New Formulation of Acoustic Scattering. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1969, 45(6): 1417-1429.
- [7] 高华, 徐海亭. 边界积分方程法求解目标的声散射 T 矩阵. *声学学报*, 2008, 33(5): 396-401.
- [8] Nash S G. A history of scientific computing. New York: ACM Press, 1990. Methods, pp. 152-166.
- [9] 胡珍, 范军, 张培珍, 吴玉双. 水下掩埋目标的散射声场计算与实验. *物理学报* 2016, 65(6): 064301.
- [10] Chai Y, Gong Z, Li W, Li T, Zhang Q. A smoothed finite element method for exterior Helmholtz equation in two dimensions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2017, 84: 237-252.
- [11] Cheng A H D, Cheng D T. Heritage and early history of the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2005, 29(3): 268-302.
- [12] 杨志刚, 王同庆. 边界元计算内外声场耦合及流体目标声散射. *哈尔滨工程大学学报*, 2007, 28(2): 161-164.
- [13] Wang S. Finite-difference time-domain approach to underwater acoustic scattering

- problems. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1996, 99(4): 1924-1931.
- [14] Feng Y T, Wang S Z. Parallel computation of unified finite-difference time-domain for underwater sound scattering. *Journal of Shanghai University*, 2008, 12(2): 120-125.
- [15] 李太宝. 计算声学: 声场的方程和计算方法. 北京: 科学出版社, 2005.
- [16] 朱韬. 水下目标低频声散射特性研究: [硕士学位论文]. 上海: 上海交通大学图书馆, 2008. 第 1.2 节, pp. 3-7.
- [17] Roman P. Advanced Quantum Theory: an outline of the fundamental ideas. Addison Wesley Publishing Company, Reading Massachusetts, 1965. Sec. 3.3, pp. 159-200.
- [18] Waterman P C. Matrix formulation of electromagnetic scattering. *Proceedings of the IEEE* 1965, 53(8): 805-812.
- [19] Varatharajulu V, Pao Y H. Scattering matrix for elastic waves. I. Theory. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1976, 60(3): 556-566.
- [20] Varadan V V. Scattering matrix for elastic waves II. Application to elliptic cylinders. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1978, 63(4): 1014-1024.
- [21] Varadan V V, Varadan V K. Scattering matrix for elastic waves. III. Application to spheroids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1979, 65(4): 896-905.
- [22] Peterson B, Ström S. Matrix formulation of acoustic scattering from multilayered scatterers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1975, 57(1): 2-13.
- [23] Peterson B, Varadan V V, Varadan V K. Scattering of acoustic waves by layered elastic and viscoelastic obstacles in water. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1980, 68(2): 673-685.
- [24] Boström A. Scattering of acoustic waves by a layered elastic obstacle in a fluid—An improved null field approach. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1984, 76(2): 588-593.
- [25] Peterson B, Ström S. Matrix formulation of acoustic scattering from an arbitrary number of scatterers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1974, 56(3): 771-780.
- [26] Boström A. Multiple scattering of elastic waves by bounded obstacles. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1980, 67(2): 399-413.

- [27] Lim R, Hackman R H. A formulation of multiple scattering by many bounded obstacles using a multicentered, T supermatrix. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1992, 91(2): 613-638.
- [28] Boström A. Transmission and reflection of acoustic waves by an obstacle in a waveguide. *Wave motion* 1980, 2(2): 167-184.
- [29] Hackman R H, Sammelmann G S. Multiple-scattering analysis for a target in an oceanic waveguide. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1988, 84(5): 1813-1825.
- [30] Lim R. Multiple scattering by many bounded obstacles in a multilayered acoustic medium. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1992, 92(3): 1593-1612.
- [31] Kristensson G, Ström S. Scattering from buried inhomogeneities—a general three-dimensional formalism. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1978, 64(3): 917-936.
- [32] Lim R. Acoustic scattering by a partially buried three-dimensional elastic obstacle. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1998, 104(2): 769-782.
- [33] Doicu A, Eremin Y, Wriedt T. *Acoustic and Electromagnetic Scattering Analysis Using Discrete Sources*. London: Academic, 2000.
- [34] Lim R. A more stable transition matrix for acoustic target scattering by elongated objects. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2015, 138(4): 2266-2278.
- [35] Lim R. A more stable transition matrix for acoustic target scattering by highly oblate elastic objects. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2017, 142(3): 1362-1375.
- [36] Hernández-Figueroa H E, Recami E, Zamboni-Rached M. *Non-Diffracting Waves*. Wiley-VCH, 2014. Secs. 1.8-1.10, pp. 42-59.
- [37] Lu J Y, Greenleaf J F. Producing deep depth of field and depth independent resolution in NDE with limited diffraction beams. *Ultrasonic Imaging*, 1993, 15(2): 134–149.
- [38] Lu J Y, Zou H, Greenleaf J F. Biomedical ultrasound beam forming. *Ultrasound in Medicine & Biology*, 1994, 20(5): 403-428.
- [39] 杜鑫. 无衍射波束在声学领域的可行性研究: [硕士学位论文]. 长沙: 国防科学技术大学图书馆, 2006.

华中科技大学博士学位论文

- [40] Lin Z, Guo X, Tu J, Ma Q, Wu J, Zhang D. Acoustic non-diffracting Airy beam. *Journal of Applied Physics*, 2015, 117(10): 104503.
- [41] Belafhal A, Ez-Zariy L, Hricha Z. A study of nondiffracting Lommel beams propagating in a medium containing spherical scatterers. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2016, 184: 1-7.
- [42] Gutiérrez-Vega J C, Iturbe-Castillo M D, Chávez-Cerda S. Alternative formulation for invariant optical fields Mathieu beams. *Optics letters*, 2000, 25(20):1493-1495.
- [43] Gutiérrez-Vega J C, Iturbe-Castillo M D, Ramírez G A, Tepichin E, Rodríguez-Dagnino R M, Chávez-Cerda S, New G H C. Experimental demonstration of optical Mathieu beams. *Optics Communications*, 2001, 195: 35-40.
- [44] Lu J Y, Xu X L, Zou H, Greenleaf J F. Application of Bessel beam for Doppler velocity estimation. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 1995, 42(4): 649-662.
- [45] Baresch D, Marchiano R G, Thomas J L. Three-dimensional analysis of the acoustic radiation pressure: Application to single-beam acoustical tweezers. In: *Proceedings of Meetings on Acoustics*. Montreal, Canada, Acoustical Society of America, 2013. 19: 045007.
- [46] Shi C, Dubois M, Wang Y, Zhang X. High-speed acoustic communication by multiplexing orbital angular momentum. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2017, 114(28): 7250-7253.
- [47] Durnin J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory. *Journal of the Optical Society of America A*, 1987, 4: 651–654.
- [48] Durnin J, Miceli J, Eberly J H. Diffraction-free beams. *Physical Review Letters*, 1987, 58(15): 1499–1501.
- [49] Hsu D K, Margan F J, Thompson D O. Bessel beam ultrasonic transducer: Fabrication method and experimental results. *Applied Physics Letters*, 1989, 55(20): 2066–2068
- [50] Piestun R, Shamir J. Generalized propagation-invariant wave fields. *Journal of the Optical Society of America A*. 1998, 15(12): 3039–3044.
- [51] Bouchal Z. Nondiffracting optical beams: physical properties, experiments, and applications. *Czechoslovak Journal of Physics*, 2003, 53(7): 537–578.

- [52] López-Mariscal C, Gutiérrez-Vega J C. The generation of nondiffracting beams using inexpensive computer-generated holograms. *American Journal of Physics*, 2007, 75(1): 36–42.
- [53] Bouchal Z, Wagner J, Chlup M. Self-reconstruction of a distorted nondiffracting beam. *Optics Communications*, 1998, 151: 207–211.
- [54] Garces-Chavez V, McGloin D, Melville H, Sibbett W, Dholakia K. Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam. *Nature*, 2002, 419(6903): 145–147.
- [55] Fahrbach F O, Simon P, Rohrbach A. Microscopy with self-reconstructing beams. *Nature Photonics*, 2010, 4(11): 780–785.
- [56] McLeod E. Bessel beams in tunable acoustic gradient index lenses and optical trap assisted nanolithography: [Doctoral dissertation]. Princeton: Princeton University, 2009.
- [57] Lin Y, Seka W, Eberly J H, Huang H, Brown D L. Experimental investigation of Bessel beam characteristics. *Applied Optics*, 1992, 31(15): 2708–2713.
- [58] Arlt J, Dholakia K. Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon. *Optics Communications*, 2000, 177: 297–301.
- [59] Chen J, Ng J, Lin Z, Chan C T. Optical pulling force. *Nature Photonics*, 2011, 5(9): 531–534.
- [60] Li R, Ren K F, Han X, Wu Z, Guo L, Gong S. Analysis of radiation pressure force exerted on a biological cell induced by high-order Bessel beams using Debye series. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2013, 126: 69–77.
- [61] Chen Z, Han Y, Cui Z, Shi X. Scattering of Bessel beam by a conducting spheroidal particle with dielectric coating. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2014, 148: 197–202.
- [62] Cui Z, Han Y, Chen Z, Han L. Scattering of Bessel beam by arbitrarily shaped composite particles with core–shell structure. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2014, 144: 108–116.
- [63] Mitri F G, Li R X, Guo L X, Ding C Y. Resonance scattering of a dielectric sphere illuminated by electromagnetic Bessel non-diffracting (vortex) beams with arbitrary incidence and selective polarizations. *Annals of Physics*, 2015, 361: 120–147.

- [64] Marston P L. Axial radiation force of a Bessel beam on a sphere and direction reversal of the force. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2006, 120(6): 3518–3524.
- [65] Mitri F G. Acoustic scattering of a high-order Bessel beam by an elastic sphere. *Annals of Physics*, 2008, 323(11): 2840–2850.
- [66] Li W, Li J. Underwater acoustic scattering of a Bessel beam by rigid objects with arbitrary shapes using the T-matrix method. In: *Proceedings of the OCEANS'12 MTS/IEEE*. Hampton Roads, Virginia, 2012. pp. 1–5.
- [67] Gong Z, Li W, Chai Y. Acoustic resonance scattering of Bessel beam by elastic spheroids in water. In: *Proceedings of the 6th International Conference on Computational Methods*. Auckland, New Zealand, 2015. pp. 1-9.
- [68] Qiu C W, Yang Y. Vortex generation reaches a new plateau. *Science*, 2017, 357(6352): 645.
- [69] Thomas J L, Brunet T, Coulouvrat F. Generalization of helicoidal beams for short pulses. *Physical Review E*, 2010, 81(1): 016601.
- [70] Choe Y, Kim J W, Shung K K, Kim E S. Microparticle trapping in an ultrasonic bessel beam. *Applied physics letters*, 2011, 99(23): 233704.
- [71] Jimenez N, Romero-García V, Picó R, Cebrecos A, Sánchez-Morcillo V J, Garcia-Raffi L M, Sánchez-Pérez J V, Staliunas K. Acoustic Bessel-like beam formation by an axisymmetric grating. *EPL (Europhysics Letters)*, 2014, 106(2): 24005.
- [72] Jiménez N, Picó R, Sánchez-Morcillo V, Romero-García V, García-Raffi L M, Staliunas K. Formation of high-order acoustic Bessel beams by spiral diffraction gratings. *Physical Review E*, 2016, 94(5): 053004.
- [73] Hong Z, Zhang J, Drinkwater B W. Acoustic Virtual Vortices with Tunable from Bessel-Shaped Acoustic Vortices to Diphasic Liquid-Microparticle Mixtures. *Physical Review Letters*, 2015, 114(21): 214301.
- [74] Tang K, Hong Y, Qiu C, Peng S, Ke M, Liu Z. Making acoustic half-Bessel beams with metasurfaces. *Japanese Journal of Applied Physics*, 2016, 55(11): 110302.
- [75] Chillara V K, Pantea C, Sinha D N. Low-frequency ultrasonic Bessel-like collimated beam generation from radial modes of piezoelectric transducers. *Applied Physics*
-

- Letters, 2017, 110(6): 064101.
- [76] Xu Z, Xu W, Qian M, Cheng Q, Liu X. A flat acoustic lens to generate a Bessel-like beam. *Ultrasonics*, 2017, 80: 66-71.
- [77] Muelas-Hurtado R D, Ealo J L, Pazos-Ospina J F, Volke-Sepúlveda K. Generation of multiple vortex beam by means of active diffraction gratings. *Applied Physics Letters*, 2018, 112(8): 084101.
- [78] Marston P L. Scattering of a Bessel beam by a sphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2007, 121(2): 753-758.
- [79] Marston P L. Acoustic beam scattering and excitation of sphere resonance: Bessel beam example. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2007, 122(1): 247-252; Erratum: 2009, 125(6): 4092.
- [80] Marston P L. Scattering of a Bessel beam by a sphere: II. Helicoidal case and spherical shell example. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2008, 124(5): 2905-2910.
- [81] Silva G T. Off-axis scattering of an ultrasound Bessel beam by a sphere. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2011, 58(2): 298-304.
- [82] Gong Z, Marston P L, Li W, Chai Y. Multipole expansion of acoustical Bessel beams with arbitrary order and location. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2017, 141(6): EL574-578.
- [83] Courtney C R, Demore C E, Wu H, Grinenko A, Wilcox P D, Cochran S, Drinkwater B W. Independent trapping and manipulation of microparticles using dexterous acoustic tweezers. *Applied Physics Letters*, 2014, 104(15): 154103.
- [84] Varadan V V, Varadan V V. *Acoustic, Electromagnetic and Elastic Wave Scattering —Focus on the T-matrix Approach*. New York: Pergamon Press, 1980. Introduction, pp.3-18; Part I, pp. 33-59.
- [85] Varadan V V, Lakhtakia A, Varadan V K. Field representations and introduction to scattering. North-Holland: Elsevier Science Publishers, 1991. Sec. 2.1, pp. 170-173; Sec. 5.1, pp. 238-239.
- [86] Martin P A. *Multiple Scattering: Interaction of Time-Harmonic Waves with N*
-

- Obstacles. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. Chapter 7, pp. 242-283.
- [87] Mishchenko M I, Travis L D, Lacis A A. Scattering, absorption, and emission of light by small particles. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. Chapter 5, pp. 115-190.
- [88] Varadan V V, Lakhtakia A, Varadan V K. Comments on recent criticism of the T-matrix method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1988, 84(6): 2280-2284.
- [89] Waterman P C. T-matrix methods in acoustic scattering. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2009, 125(1): 42-51.
- [90] Gong Z, Li W, Mitri F G, Chai Y, Zhao Y. Arbitrary scattering of an acoustical Bessel beam by a rigid spheroid with large aspect-ratio. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 383: 233-247.
- [91] Li W, Chai Y, Gong Z, Marston P L. Analysis of forward scattering of an acoustical zeroth-order Bessel beam from rigid complicated (aspherical) structures. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2017, 200: 146-162.
- [92] Sarkissian A, Gaumond C F, Dragonette L R. T-matrix implementation of forward scattering from rigid structures. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1993, 94(6): 3448-3453.
- [93] Gong Z, Li W, Chai Y, Zhao Y, Mitri F G. T-matrix method for acoustical Bessel beam scattering from a rigid finite cylinder with spheroidal endcaps. *Ocean Engineering*, 2017, 129: 507-519.
- [94] Briard P, Han Y P, Chen Z, Cai X, Wang J. Scattering of aggregated particles illuminated by a zeroth-order Bessel beam. *Optics Communications*, 2017, 391: 42-47.
- [95] Yang R, Li R. Optical force exerted on a Rayleigh particle by a vector arbitrary-order Bessel beam. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2016, 178: 230-243.
- [96] Wang J J, Wriedt T, Lock J A, Mädler L. General description of circularly symmetric Bessel beams of arbitrary order. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2016, 184: 218-232.

华中科技大学博士学位论文

- [97] 杜宏伟, 彭虎, 江朝晖, 冯焕清. 基于 Fourier_Bessel 级数的 Bessel 型超声场二次谐波近场特性研究. 物理学报, 2007, 56(11): 6496-6502.
- [98] 赖雪晓, 韩志会, 彭虎. 一种脉冲贝塞尔波的构造及其非线性声场的仿真. 中国科学技术大学学报, 2013, 43(4): 313-318.
- [99] 戴玉蓉, 丁德胜. 小瓣数贝塞尔声束的二次谐波. 物理学报, 2011, 60(12): 124302.
- [100] Brandt EH. Levitation in physics. Science, 1989, 243(4889): 349-355.
- [101] 范宗尉. 基于超声辐射力场的微构件非接触操纵关键技术的研究: [博士学位论文]. 杭州: 浙江大学图书馆, 2011.
- [102] Ashkin A. Acceleration and trapping of particles by radiation pressure. Physical Review Letters, 1970, 24(4): 156-159.
- [103] Ashkin A, Dziedzic J M, Bjorkholm J E, Chu S. Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles. Optics Letters, 1986, 11(5): 288-290.
- [104] Ashkin A. History of optical trapping and manipulation of small-neutral particle, atoms, and molecules. IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, 2000, 6(6): 841-856.
- [105] Grier D G. A revolution in optical manipulation. Nature. 2003, 424(6950): 810-816.
- [106] Neuman K C, Block S M. Optical trapping. Review of scientific instruments. 2004, 75(9): 2787-2809.
- [107] Nieminen T A, Loke V L, Stilgoe A B, Knöner G, Brańczyk A M, Heckenberg N R, Rubinsztein-Dunlop H. Optical tweezers computational toolbox. Journal of Optics A: Pure and Applied Optics, 2007, 9(8): S196-S203.
- [108] Neuman K C, Nagy A. Single-molecule force spectroscopy: optical tweezers, magnetic tweezers and atomic force microscopy. Nature methods, 2008, 5(6): 491–505.
- [109] Baresch D, Thomas JL, Marchiano R. Observation of a Single-Beam Gradient Force Acoustical Trap for Elastic Particles: Acoustical Tweezers. Physical Review Letters, 2016, 116(2): 024301.
- [110] Wu J. Acoustical tweezers. The Journal of the Acoustical Society of America,

- 1991, 89(5): 2140-2143.
- [111] Xie W J, Wei B. Parametric study of single-axis acoustic levitation. *Applied Physics Letters*. 2001, 79(6): 881-883.
- [112] Xie W J, Cao C D, Lü Y J, Wei B. Levitation of iridium and liquid mercury by ultrasound. *Physical Review Letters*, 2002, 89(10): 104304.
- [113] Thomas J L, Baresch D, Marchiano R. Single-beam acoustic tweezers. in: David L. Andrews, Enrique J. Galvez, Jesper Glückstad. *Proceedings of Complex Light and Optical Forces XI*. SPIE, 2017. Vol. 10120, 101200Y.
- [114] Guo F, Li P, French J B, Mao Z, Zhao H, Li S, Nama N, Fick J R, Benkovic S J, Huang T J. Controlling cell-cell interactions using surface acoustic waves. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2015, 112(1): 43-48.
- [115] Wiklund M, Green R, Ohlin M. Acoustofluidics 14: Applications of acoustic streaming in microfluidic devices. *Lab on a Chip*, 2012, 12(14): 2438-2451.
- [116] Muller P B, Barnkob R, Jensen M J, Bruus H. A numerical study of microparticle acoustophoresis driven by acoustic radiation forces and streaming-induced drag forces. *Lab on a Chip*, 2012, 12(22): 4617-4627.
- [117] King LV. On the acoustic radiation pressure on spheres. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1934, 147(861): 212-240.
- [118] Yosioka K, Kawasima Y. Acoustic radiation pressure on a compressible sphere. *Acta Acustica united with Acustica*, 1955, 5(3):167-173.
- [119] Westervelt P J. The Theory of Steady Forces Caused by Sound Waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1951, 23(3): 312-315.
- [120] Westervelt P J. Acoustic Radiation Pressure. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1957, 29(1): 26-29.
- [121] Gor'kov L P. On the forces acting on a small particle in an acoustical field in an ideal fluid. *Soviet Physics Doklady*, 1962, 6(9): 773-775.
- [122] Hasegawa T, Yosioka K. Acoustic-radiation force on a solid elastic sphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1969, 46(5B): 1139-1143.
- [123] Hasegawa T, Watanabe Y. Acoustic radiation pressure on an absorbing sphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1978, 63(6): 1733-1737.

华中科技大学博士学位论文

- [124] Beyer R T. Radiation pressure—the history of a mislabeled tensor. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1978, 63(4): 1025-1030.
- [125] Hasegawa T, Kido T, Iizuka T, Matsuoka C. A general theory of Rayleigh and Langevin radiation pressures. *Journal of the Acoustical Society of Japan*, 2000, 21(3): 145-152.
- [126] Antfolk M, Laurell T. Continuous flow microfluidic separation and processing of rare cells and bioparticles found in blood—A review. *Analytica Chimica Acta*. 2017, 965: 9-35.
- [127] Hamilton M F, Blackstock D T. Nonlinear Acoustics. New York: Acoustical Society of America, 2008. Chapter 6, pp. 177-205.
- [128] Bruus H. Acoustofluidics 7: The acoustic radiation force on small particles. *Lab on a Chip*, 2012, 12(6): 1014-1021.
- [129] Baasch T, Dual J. Acoustofluidic particle dynamics: Beyond the Rayleigh limit. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2018, 143(1): 509-519.
- [130] Marzo A, Caleap M, Drinkwater B W. Acoustic Virtual Vortices with Tunable Orbital Angular Momentum for Trapping of Mie Particles. *Physical Review Letters*, 2018, 120(4): 044301.
- [131] Riaud A, Baudoin M, Matar O B, Becerra L, Thomas J L. Selective manipulation of microscopic particles with precursor swirling Rayleigh waves. *Physical Review Applied*, 2017, 7(2): 024007.
- [132] Urbansky A, Ohlsson P, Lenshof A, Garofalo F, Scheding S, Laurell T. Rapid and effective enrichment of mononuclear cells from blood using acoustophoresis. *Scientific Reports*, 2017, 7(1):17161.
- [133] Mao Z, Li P, Wu M, Bachman H, Mesyngier N, Guo X, Liu S, Costanzo F, Huang T J. Enriching nanoparticles via acoustofluidics. *ACS nano*, 2017, 11(1): 603-612.
- [134] Miansari M, Friend J R. Acoustic Nanofluidics via Room - Temperature Lithium Niobate Bonding: A Platform for Actuation and Manipulation of Nanoconfined Fluids and Particles. *Advanced Functional Materials*, 2016, 26(43): 7861-7872.
- [135] Devendran C, Collins D J, Ai Y, Neild A. Huygens-Fresnel acoustic interference and the development of robust time-averaged patterns from traveling surface acoustic

- waves. Physical Review Letters, 2017, 118(15): 154501.
- [136] Hong Z Y, Yin J F, Zhai W, Yan N, Wang W L, Zhang J, Drinkwater B W. Dynamics of levitated objects in acoustic vortex fields. Scientific Reports, 2017, 7(1): 7093.
- [137] Xu S, Qiu C, Liu Z. Transversally stable acoustic pulling force produced by two crossed plane waves. EPL (Europhysics Letters), 2012, 99(4): 44003.
- [138] Deng S, Jia K, Wu E, Hu X, Fan Z, Yang K. Controllable Micro-Particle Rotation and Transportation Using Sound Field Synthesis Technique. Applied Sciences, 2018, 8(1): 73.
- [139] 吴融融. 声波对球形粒子的声辐射力研究: [博士学位论文]. 南京: 南京大学图书馆, 2016.
- [140] Liu S, Yang Y, Ni Z, Guo X, Luo L, Tu J, Zhang D. Investigation into the Effect of Acoustic Radiation Force and Acoustic Streaming on Particle Patterning in Acoustic Standing Wave Fields. Sensors, 2017, 17(7): 1664.
- [141] Qiao Y, Zhang X, Zhang G. Acoustic radiation force on a fluid cylindrical particle immersed in water near an impedance boundary. The Journal of the Acoustical Society of America. 2017, 141(6): 4633-4641.
- [142] Shen L, Wang C. Revised model for the radiation force exerted by standing surface acoustic waves on a rigid cylinder. Physical Review E, 2018, 97(3): 033103.
- [143] Shen L, Wang C. Acoustic radiation force on a compressible cylinder in the standing surface acoustic wave (SSAW). Journal of Applied Physics, 2018, 123(4): 044504.
- [144] Marston P L. Negative axial radiation forces on solid spheres and shells in a Bessel beam. The Journal of the Acoustical Society of America, 2007, 122(6): 3162-3165.
- [145] Marston P L. Radiation force of a helicoidal Bessel beam on a sphere. The Journal of the Acoustical Society of America, 2009, 125(6): 3539-3547.
- [146] Zhang L, Marston P L. Geometrical interpretation of negative radiation forces of acoustical Bessel beams on spheres. Physical Review E, 2011, 84(3): 035601.
- [147] Zhang L, Marston P L. Angular momentum flux of nonparaxial acoustic vortex beams and torques on axisymmetric objects. Physical Review E, 84(6): 065601.

- [148] Courtney C R, Drinkwater B W, Demore C E, Cochran S, Grinenko A, Wilcox P D. Dexterous manipulation of microparticles using Bessel-function acoustic pressure fields. *Applied Physics Letters*, 2013, 102(12): 123508.
- [149] Thiessen D B, Marston P L. Negative radiation forces on spheres illuminated by Bessel beams: Modeling using finite elements. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2007, 122(5): 3025.
- [150] Thiessen D B, Zhang L, Marston P L. Radiation force on spheres in helicoidal Bessel beams modeled using finite elements. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2009, 125(4): 2552.
- [151] Wijaya F B, Lim K M. Numerical calculation of acoustic radiation force and torque on non-spherical particles in Bessel beams. In: *Proceedings of Meetings on Acoustics*. 171st Meeting of the Acoustical Society of America, Utah, USA, 2016. Vol. 26, No. 1, pp. 045002.
- [152] Mitri F G. Acoustic radiation force on oblate and prolate spheroids in Bessel beams. *Wave Motion*, 2015, 57: 231-238.
- [153] Mitri F G. Acoustical pulling force on rigid spheroids in single Bessel vortex tractor beams. *EPL (Europhysics Letters)*, 2015, 112(3): 34002.
- [154] Stratton J A. *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1941. Secs. 7.5–7.9, pp. 406–413.
- [155] Jackson J D. *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. New York: Wiley , 1999. Secs. 3.5–3.6, pp. 107–111; Sec. 9.6, pp. 425-429.
- [156] Sage K A, George J, Überall H. Multipole resonances in sound scattering from gas bubbles in a liquid. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1979, 65(6): 1413-1422.
- [157] Watson G N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*,1st ed. London: Cambridge University Press, 1922. Secs. 11.1–11.3, pp. 358–361.
- [158] Neves A A, Padilha L A, Fontes A, Rodriguez E, Cruz C D, Barbosa L C, Cesar C L. Analytical results for a Bessel function times Legendre polynomials class integrals. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2006, 39(18): L293-L296.
- [159] Guan A, Hoop A D, Guicking D, Mainardi F. Acoustic Interactions with

华中科技大学博士学位论文

- Submerged Elastic Structures — Part III: Acoustic Propagation and Scattering, Wavelets and Time Frequency Analysis. Singapore: World Scientific Publishing, 2001. Chapter 10, pp. 256-358.
- [160] Morse P M, Feshbach H. Method of Theoretical Physics. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953. Part I, Chapter 1, pp. 117; Part II, Chapter 13, pp. 1759-1891.
- [161] Crocker M J. Handbook of acoustics. New York: John Wiley & Sons, 1998. Chapter 4, pp. 47-59.
- [162] Waterman P C. Symmetry, unitarity, and geometry in electromagnetic scattering. Physical review D, 1971, 3(4): 825-838.
- [163] Gerjuoy E, Saxon D S. Variational principles for the acoustic field. Physical Review, 1954, 94(6):1445-1458.
- [164] Wei W, Thiessen D B, Marston P L. Acoustic radiation force on a compressible cylinder in a standing wave. The Journal of the Acoustical Society of America, 2004, 116(1): 201-208.
- [165] Mitri F G. Langevin acoustic radiation force of a high-order Bessel beam on a rigid sphere. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 2009, 56(5): 1059-1064.
- [166] Arfken G B, Weber H J, Harris F E. Mathematical Methods for Physicists, 7th Ed. New York: Academic Press, 2013. Sec. 15.5, pp. 756-765; Sec. 16.1, pp.776-784.
- [167] Mitri F G, Lobo T P, Silva G T. Axial acoustic radiation torque of a Bessel vortex beam on spherical shells. Physical Review E, 2012, 85(2): 026602. Erratum: Physical Review E, 2012, 86(5): 059902.
- [168] Kargl S G, Marston P L. Ray synthesis of Lamb wave contributions to the total scattering cross section for an elastic spherical shell. The Journal of the Acoustical Society of America, 1990, 88(2): 1103-1113.
- [169] Neubauer W G, Vogt R H, Dragonette L R. Acoustic reflection from elastic spheres. I. Steady-state signals. The Journal of the Acoustical Society of America, 1974, 55(6): 1123-1129.
- [170] Flax L, Gaunaurd G C, Überall H. Theory of resonance scattering. Physical Acoustics, Vol. XV. New York: Academic Press, 1981. Chapter 3, pp. 191–294.

华中科技大学博士学位论文

- [171] Flax L, Dragonette L R, Überall H. Theory of elastic resonance excitation by sound scattering. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1978, 63(3): 723-731.
- [172] Werby M F, Überall H, Nagl A, Brown S H, Dickey J W. Bistatic scattering and identification of the resonances of elastic spheroids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1988, 84(4): 1425-1436.
- [173] Murphy J D, George J, Nagl A, Überall H. Isolation of the resonant component in acoustic scattering from fluid - loaded elastic spherical shells, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1979, 65(2): 368-373.
- [174] Werby M F, Green L H. A comparison of acoustical scattering from fluid-loaded elastic shells and sound soft objects. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1984, 76(4): 1227-1230.
- [175] Gaunaud G C, Werby M F. Sound scattering by resonantly excited, fluid-loaded, elastic spherical shells. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1991, 90(5): 2536-2550.
- [176] Werby M F. The acoustical background for a submerged elastic shell. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1991, 90(6): 3279-3287.
- [177] Liu S, Gong Z, Chai Y, Li W. Underwater acoustic scattering of Bessel beam by spherical shell using T-matrix method. In: Ocean Acoustics (COA), 2016 IEEE/OES China, Harbin, China: IEEE. pp. 1-6.
- [178] Gaunaud G C, Werby M F. Lamb and creeping waves around submerged spherical shells resonantly excited by sound scattering. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1987, 82(6): 2021-2033.
- [179] Mitri F G. Acoustic scattering of a Bessel vortex beam by a rigid fixed spheroid. *Annals of Physics*, 2015, 363: 262-274.
- [180] Mitri F G. Axisymmetric scattering of an acoustical Bessel beam by a rigid fixed spheroid. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 62(10): 1809-1818.
- [181] Hackman R G. Acoustic scattering from elastic solids. *Physical Acoustics*, Vol. XXII. New York: Academic Press, 1993. Chapter 1, pp. 1–194.

华中科技大学博士学位论文

- [182] Varadan V K, Varadan V V, Dragonette L R, Flax L. Computation of rigid body scattering by prolate spheroids using the T-matrix approach. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1982, 71(1): 22-25.
- [183] Tang W L. Highlight model of echoes from sonar targets. *Chinese Journal of Acoustics*, 1994 13 (2): 131–140.
- [184] Ye Z, Furusawa M. Modeling of target strength of swimbladder fish at high frequencies. *Journal of the Acoustical Society of Japan*, 1995, 16(6): 371-379.
- [185] Furusawa M. Prolate spheroidal models for predicting general trends of fish target strength. *Journal of the Acoustical Society of Japan*, 1988, 9(1): 13-24.
- [186] Werby M F, Chin-Bing S A. Some numerical techniques and their use in the extension of T-matrix and null-field approaches to scattering. *Computers & Mathematics with Applications*, 1985, 11(7-8): 717-731.
- [187] Hackman R H. The transition matrix for acoustic and elastic wave scattering in prolate spheroidal coordinates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1984, 75(1): 35-45.
- [188] Hackman R H, Todoroff D G. An application of the spheroidal-coordinate-based transition matrix: The acoustic scattering from high aspect ratio solids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1985, 78(3): 1058-1071.
- [189] Mitri F G. Axial acoustic radiation force on rigid oblate and prolate spheroids in Bessel vortex beams of progressive, standing and quasi-standing waves. *Ultrasonics*, 2017, 74: 62-71.
- [190] Marston P L, Zhang L. Unphysical consequences of negative absorbed power in linear passive scattering: Implications for radiation force and torque. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2016, 139(6): 3139-3144.
- [191] King L V. On the theory of the inertia and diffraction corrections for the Rayleigh disc. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1935, 153(878): 17-40.
- [192] Fan Z, Mei D, Yang K, Chen Z. Acoustic radiation torque on an irregularly shaped scatterer in an arbitrary sound field. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2008, 124(5): 2727-2731.
- [193] Skudrzyk E. *The Foundations of Acoustics: Basic Mathematics and Basic*
-

华中科技大学博士学位论文

- Acoustics, 1st Ed. Wien. New York, Springer-Verlag, 1971. pp. 693.
- [194] Mishchenko M I, Hovenier J W, Travis L D. Light Scattering by Nonspherical Particles: Theory, Measurements, and Application. New York: Academic Press, 2000. Chapter 6, pp. 151.
- [195] Gaunaurd G C, Überall H. RST analysis of monostatic and bistatic acoustic echoes from an elastic sphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1983, 73(1): 1-12.
- [196] Kargl S G, Marston P L. Observations and modeling of the backscattering of short tone bursts from a spherical shell: Lamb wave echoes, glory, and axial reverberations. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1989, 85(3): 1014-1028.
- [197] Hasegawa T, Hino Y, Annou A, Noda H, Kato M, Inoue N. Acoustic radiation pressure acting on spherical and cylindrical shells. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1993, 93(1): 154-161.
- [198] Press W H, Teukolsky S A, Vetterling W T, Flannery B P. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing, 3rd Ed. New York: Cambridge University Press, 2007. Chapter 2, pp.37-109.
- [199] Goodman R R, Stern R. Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1962, 34(3): 338-344.
- [200] Hickling R. Analysis of echoes from a hollow metallic sphere in water. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1964, 36(6): 1124-1137.

附录 I 攻读博士学位期间的主要学术成果及参与基金

期刊论文

- [1] **Zhixiong Gong**, Philip L. Marston, Wei Li*, and Yingbin Chai, Multipole expansion of acoustical Bessel beams with arbitrary order and location, *Journal of the Acoustical Society of America* 141 (2017) EL574-578. (SCI 收录; 第一作者)
- [2] **Zhixiong Gong**, Wei Li*, Yingbin Chai, Yao Zhao, and Farid G. Mitri, T-matrix method for acoustical Bessel beam scattering from a rigid finite cylinder with spheroidal endcaps, *Ocean Engineering* 129 (2017) 507-519. (SCI 收录; 第一作者)
- [3] **Zhixiong Gong**, Wei Li*, Farid G. Mitri, Yingbin Chai, and Yao Zhao, Arbitrary scattering of an acoustical Bessel beam by a rigid spheroid with large aspect-ratio, *Journal of Sound and Vibration* 383 (2016) 233-247. (SCI 收录; 第一作者)
- [4] Wei Li, Yingbin Chai, **Zhixiong Gong***, and Philip L. Marston, Analysis of forward scattering of an acoustical zeroth-order Bessel beam from rigid complicated (nonspherical) structures, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer* 200 (2017) 146-162. (SCI 收录; 通讯作者)
- [5] Wei Li, Jun Li, and **Zhixiong Gong***, Study on underwater acoustic scattering of a Bessel beam by rigid objects with arbitrary shapes, *Acta Physica Sinica* 64 (2015) 154305. (SCI 收录; 通讯作者)
- [6] **Zhixiong Gong**, Yingbin Chai, and Wei Li*, Coupled analysis of structural-acoustic problems using the cell-Based smoothed three-node Mindlin plate element, *International Journal of Computational Methods* 13 (2016) 1640007. (SCI 收录; 第一作者)
- [7] **Zhixiong Gong**, Philip L. Marston, and Wei Li*, T-matrix evaluation of acoustic radiation forces on nonspherical objects in Bessel beams with arbitrary order and location, (2018). (Under review)

会议

- [1] **Zhixiong Gong**, Yingbin Chai, and Wei Li, Reversals of acoustic radiation force and

华中科技大学博士学位论文

torque in a single Bessel beam: Acoustic Tweezers Numerical Toolbox, Proceedings of Acoustofluidics 2018, Lille, France, August (2018). (国际会议; 海报展示)

- [2] **(Invited) Zhixiong Gong**, Wei Li, and Philip L. Marston, Potential of theoretical approach and T-matrix method for designing numerical acoustical tweezers toolbox, Proceedings of 175th Meeting of the Acoustical Society of America, Minneapolis, Minnesota, USA, May (2018). (国际会议; 口头报告)
 - [3] **Zhixiong Gong**, Yingbin Chai, Wei Li, and Philip L. Marston, T-matrix method implementation for acoustic Bessel beam scattering from elastic solids and shells, Proceedings of 3rd Joint Meeting: Acoustical Society of America and European Acoustics Association, Boston, Massachusetts, USA, June (2017). (国际会议; 口头报告)
 - [4] **(Invited) Zhixiong Gong**, Wei Li, Yingbin Chai, and Yao Zhao, Forward scattering of an acoustical Bessel beam by rigid structures using T-matrix method, Proceedings of the International Conference on Computational Methods, California, USA, August (2016) (国际会议; 口头报告)
 - [5] **Zhixiong Gong**, Wei Li, Yao Zhao, Yingbin Chai, and Qifan Zhang, T-matrix approach for underwater acoustic scattering by rigid spheroid under obliquely incident Bessel beam illumination, Proceedings of the 11th International Conference on Laser-light and Interactions with Particles (LIP2016), Xi'an, China, April (2016) (国际会议; 口头报告)
 - [6] Shuigen Liu, **Zhixiong Gong***, Yingbin Chai, and Wei Li, Underwater acoustic scattering of Bessel beam by spherical shell using T-matrix method, Proceedings of the IEEE/OES China Ocean Acoustics Symposium, Harbin, China, January (2016) (国际会议; 口头报告; EI 检索)
 - [7] **Zhixiong Gong**, Wei Li, and Yingbin Chai, Acoustic resonance scattering of Bessel beam by elastic spheroids in water, Proceedings of the International Conference on Computational Methods, Auckland, New Zealand, July (2015) (国际会议; 口头报告)
 - [8] Wei Li, **Zhixiong Gong**, and Yingbin Chai, A Couple Cell-/Face-based Smoothed Finite Element Method for Fluid-structure Problems. Proceedings of the International Conference on Computational Methods, Cambridge, UK, July (2014) (国际会议; 口头报告)
-

华 中 科 技 大 学 博 士 学 位 论 文

注：*表示通讯作者。

参与基金

- [1] 国家自然科学基金面上项目（51579112）：水下复杂弹性体声散射场计算方法及其三维形状反演研究（学生参与者）；
- [2] 华中科技大学自主创新研究基金：水下弹性体 Bessel 波照射下声散射场特性研究（学生参与者）。

附录 II 贝塞尔函数和球谐函数

II.A 球贝塞尔函数递推关系式

根据文献[193]，可知球贝塞尔函数的部分递推关系式。其中，不含导数的三项递推式为

$$j_{n-1}(x) + j_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} j_n(x) \quad (\text{II.1})$$

含一阶导数的三项递推关系：

$$j_n(x)' = \frac{1}{2n+1} [nj_{n-1}(x) - (n+1)j_{n+1}(x)] \quad (\text{II.2})$$

在编程应用中更实用的二项递推关系，分别为向前递推（ n 和 $n-1$ 阶）和向后递推（ n 和 $n+1$ 阶）：

$$\frac{n+1}{x} j_n(x) + j_n(x)' = j_{n-1}(x) \quad (\text{II.3})$$

$$\frac{n}{x} j_n(x) - j_n(x)' = j_{n+1}(x) \quad (\text{II.4})$$

二阶导数可根据一阶导数的向前和向后递推关系式（II.3）和（II.4）推导得到：

$$j_n(x)'' = \left(\frac{n^2 - n}{x^2} - 1 \right) j_n(x) + \frac{2}{x} j_{n+1}(x) \quad (\text{II.5})$$

说明，上述递推关系式对第一类，第二类球贝塞尔函数（ $j_n(x)$ ， $y_n(x)$ ）和汉克尔函数（ $h_n^{(1)}(x)$ ， $h_n^{(2)}(x)$ ）均成立。注意 $h_n^{(1,2)}(x) = j_n(x) \pm iy_n(x)$ 。

II.B 球贝塞尔函数远场近似表达式

当变量为 $x = kr$ ，且 $kr \rightarrow \infty$ 时，根据文献[194]可知，有如下近似表达式：

$$h_n^{(1)}(kr) = \frac{i^{-(n+1)} e^{ikr}}{kr} \quad (\text{II.6})$$

$$h_n^{(2)}(kr) = \frac{i^{(n+1)} e^{-ikr}}{kr} \quad (\text{II.7})$$

$$j_n(kr) = \frac{h_n^{(1)}(kr) + h_n^{(2)}(kr)}{2} = \frac{i^{-(n+1)}e^{ikr} + i^{-(n+1)}e^{ikr}}{2kr} \quad (\text{II.8})$$

II.C 球贝塞尔函数的共轭

球贝塞尔函数 $j_n(kr)$ 是实数，故其共轭等于其本身，

$$[j_n(kr)]^* = j_n(kr) \quad (\text{II.9})$$

球汉克尔函数是复数，第一类和第二类汉克尔函数互为共轭，满足：

$$[h_n^{(1,2)}(kr)]^* = h_n^{(2,1)}(kr) \quad (\text{II.10})$$

II.D 球谐函数的正交公式和递推公式

球谐函数可由连带勒让德函数和指数函数的乘积表示，见式 (2.13)。根据文献 [166] 中式 (15.138) 可知，球谐函数包含 $\sin\theta$ 项的正交关系式为

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{n'm'}^*(\theta, \varphi) = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (\text{II.11})$$

以及根据公式 (15.152)，球谐函数包含 $\cos\theta \sin\theta$ 项的正交关系式为

$$\begin{aligned} & \int_\Omega Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{n'm'}^*(\theta, \varphi) \cos\theta d\Omega \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{n'm'}^*(\theta, \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \left[\frac{(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)} \right]^{1/2} \delta_{m'm} \delta_{n'n+1} + \left[\frac{(n-m)(n+m)}{(2n-1)(2n+1)} \right]^{1/2} \delta_{m'm} \delta_{n'n-1} \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

上式代入式 (3.28) 可用推导 z 方向的无量纲声辐射力 Y_z ，见式 (3.31)。根据文献 [166] 中式 (15.151) 可知，包含三角函数 $\sin\theta$ ，指数函数 $e^{\pm i\varphi}$ 乘积项的球谐函数递推关系式为

$$\begin{aligned} & e^{\pm i\varphi} \sin\theta Y_{nm}(\theta, \varphi) \\ &= \mp \left[\frac{(n \pm m + 1)(n \pm m + 2)}{(2n+1)(2n+3)} \right]^{1/2} Y_{n+1,m\pm 1}(\theta, \varphi) \pm \left[\frac{(n \mp m)(n \mp m - 1)}{(2n-1)(2n+1)} \right]^{1/2} Y_{n-1,m\pm 1}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

利用欧拉公式 $e^{\pm i\varphi} = \cos \pm i \sin \varphi$ ，可将上式 (II.13) 整理得到关于

$\cos \varphi \sin \theta Y_{nm}(\theta, \varphi)$ 和 $\sin \varphi \sin \theta Y_{nm}(\theta, \varphi)$ 的球谐函数的递推关系式，并结合式（II.11）代入到积分表达式 (3.26) 和 (3.27)，可分别推导 x 和 y 方向的无量纲声辐射力 Y_x (式 3.29) 和 Y_y (式 3.30)。其中，推导过程中需要的积分表达式整理如下：

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{n'm'}^*(\theta, \varphi) \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi \\ &= -\frac{1}{2} \left(b_{n+1,m} \delta_{m',m+1} \delta_{n',n+1} - b_{n,-m-1} \delta_{m',m+1} \delta_{n',n-1} - b_{n+1,-m} \delta_{m',m-1} \delta_{n',n+1} + b_{n,m-1} \delta_{m',m-1} \delta_{n',n-1} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{n'm'}^*(\theta, \varphi) \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi \\ &= \frac{i}{2} \left(b_{n+1,m} \delta_{m',m+1} \delta_{n',n+1} - b_{n,-m-1} \delta_{m',m+1} \delta_{n',n-1} + b_{n+1,-m} \delta_{m',m-1} \delta_{n',n+1} - b_{n,m-1} \delta_{m',m-1} \delta_{n',n-1} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{nm}(\theta, \varphi) Y_{n'm'}^*(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi = (c_{n+1,m} \delta_{m',m} \delta_{n',n+1} + c_{n,m} \delta_{m',m} \delta_{n',n-1}) \quad (\text{II.16})$$

其中，系数的具体表达式定义为： $b_{nm} = \sqrt{\frac{(n+m)(n+m+1)}{(2n-1)(2n+1)}}$ ， $c_{nm} = \sqrt{\frac{(n+m)(n-m)}{(2n-1)(2n+1)}}$ 。

II.E 阶梯算符与球谐函数的正交关系

根据文献[155] 中式 (9.102) 可知，阶梯算符与角动量算符的关系为

$$\begin{aligned} L_+ &= L_x + iL_y = e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right); \\ L_- &= L_x - iL_y = e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right); \\ L_z &= -i \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

根据文献[155] 中式 (9.104)，上式算符与球谐函数的递推关系式为

$$\begin{aligned} L_+ Y_{nm} &= \sqrt{(n-m)(n+m+1)} Y_{n,m+1} \\ L_- Y_{nm} &= \sqrt{(n+m)(n-m+1)} Y_{n,m-1} \\ L_z Y_{nm} &= m Y_{nm} \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

方便起见，定义系数 $b_{nm-} = \sqrt{(n-m+1)(n+m)}$ ， $b_{nm+} = \sqrt{(n+m+1)(n-m)}$ 。根据 3.3.3 小节中式 (3.55)，可将角动量算符 L_x 和 L_y 分别表示为角动量阶梯算符的形式，并把

阶梯算符与球谐函数的递推关系式代入到式(3.51) - (3.53), 便可推导出用入射和散射波形系数表示的无量纲声辐射力矩的笛卡尔坐标系中的分量, 见式(3.56)-(3.58)。以 x 方向为例, 具体的推导过程如下:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_x &= -\frac{1}{\pi(ka)^3} \operatorname{Re} \iint_{S_0} \left\{ \sum_{nm} \sum_{n'm'} i^{n-n'} \left(a_{nm}^* + s_{nm}^* \right) s_{n'm'} \left(Y_{nm}^* L_x Y_{n'm'} \right) \right\} \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= -\frac{1}{\pi(ka)^3} \operatorname{Re} \sum_{nm} \sum_{n'm'} i^{n-n'} \left(a_{nm}^* + s_{nm}^* \right) s_{n'm'} \iint_{S_0} Y_{nm}^* L_x Y_{n'm'} \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= -\frac{1}{\pi(ka)^3} \operatorname{Re} \sum_{nm} \sum_{n'm'} i^{n-n'} \left(a_{nm}^* + s_{nm}^* \right) s_{n'm'} \iint_{S_0} Y_{nm}^* \frac{L_+ + L_-}{2} Y_{n'm'} \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= -\frac{1}{2\pi(ka)^3} \operatorname{Re} \sum_{nm} \sum_{n'm'} i^{n-n'} \left(a_{nm}^* + s_{nm}^* \right) s_{n'm'} \iint_{S_0} Y_{nm}^* (L_+ + L_-) Y_{n'm'} \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= -\frac{1}{2\pi(ka)^3} \operatorname{Re} \sum_{nm} \sum_{n'm'} \left(a_{nm}^* + s_{nm}^* \right) s_{n'm'} \left(\begin{array}{l} \sqrt{(n'-m')(n'+m'+1)} \delta_{nn} \delta_{m,m'+1} + \\ \sqrt{(n+m')(n-m'+1)} \delta_{nn} \delta_{m,m'-1} \end{array} \right) \\
 &= -\frac{1}{2\pi(ka)^3} \operatorname{Re} \sum_{nm} \left(a_{nm}^* + s_{nm}^* \right) \left(\begin{array}{l} \sqrt{(n-m+1)(n+m)} s_{nm-1} + \\ \sqrt{(n+m+1)(n-m)} s_{nm+1} \end{array} \right) \\
 &= -\frac{1}{2\pi(ka)^3} \operatorname{Re} \sum_{nm} \left(a_{nm}^* + s_{nm}^* \right) (b_{nm-} s_{nm-1} + b_{nm+} s_{nm+1})
 \end{aligned} \tag{II.19}$$

II.F 连带勒让德函数的性质及递推式

正交关系式

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'} \tag{II.20}$$

负数阶与正数阶连带勒让德函数关系式:

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \tag{II.21}$$

一阶导数向前和向后的递推关系式为

$$\frac{dP_n^m(x)}{dx} = \frac{1}{1-x^2} \left[(n+m) P_{n-1}^m(x) - nx P_n^m(x) \right] \tag{II.22}$$

$$\frac{dP_n^m(x)}{dx} = \frac{1}{1-x^2} [(n+1)xP_n^m(x) - (n-m+1)P_{n+1}^m(x)] \quad (\text{II.23})$$

根据连带勒让德函数的向前和向后的递推关系式，可以推导用连带勒让德函数及其一阶导数表示的二阶导数关系式：

$$(x^2-1) \frac{d^2 P_n^m(x)}{dx^2} = (n-m+1) \frac{dP_{n+1}^m(x)}{dx} - (n+3)x \frac{dP_n^m(x)}{dx} - (n+1)P_n^m(x) \quad (\text{II.24})$$

在实际编程时常采用球坐标系计算，定义 $x = \cos \theta$ ， θ 为目标几何形状表面点的极角。需求解连带勒让德函数对几何表面的极角 θ 的导数关系式，代入式 (II.24) 整理得

$$\frac{d^2 P_n^m}{d\theta^2} = \frac{n-m+1}{\sin \theta} \frac{dP_{n+1}^m}{d\theta} - (n+2) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dP_n^m}{d\theta} + (n+1)P_n^m \quad (\text{II.25})$$

上式中，连带勒让德函数及其导数的变量 $\cos \theta$ 均省略。

附录 III 基于分波序列法球形目标的散射系数

根据球形目标与理想流体接触的边界条件，可得到相应的线性条件，求解线性方程组，便可求得散射系数。无量纲频率定义为 ka ， k 为流体介质中的波数， a 为球形目标的特征几何尺寸。流体介质的密度和声速分别定义为 ρ 和 c 。

III.A 刚性球的散射系数

$$s_n = -h_n^{(2)'}(ka)/h_n^{(1)'}(ka) \quad (\text{III.1})$$

其中， $h_n^{(1)}(ka)$ 和 $h_n^{(2)}(ka)$ 分别表示第一类和第二类球球汉克尔函数，右上角逗号表示对整体变量求导，即 $d/d(ka)$ 。

III.B 柔性球的散射系数

$$s_n = -h_n^{(2)}(ka)/h_n^{(1)}(ka) \quad (\text{III.2})$$

III.C 液（气）态球的散射系数

气体可看做一种特殊状态下的液体，这两种介质中均只有纵波传播，不存在横波，因此两者之间的散射系数可以统一表示。引进矩阵参数 D_n ，有 $s_n = -D_n^*/D_n$ ^[64,156]

$$D_n = \rho_i k a j_n(ka/\gamma_c) h_n^{(1)'}(ka) - \rho(ka/\gamma_c) j_n'(ka/\gamma_c) h_n^{(1)}(ka) \quad (\text{III.3})$$

其中， ρ_i 为液体球的密度， c_i 为液体球中的声速， j_n 表示第一类球贝塞尔函数。定义液体球和周围介质的声速比为 $\gamma_c = c_i/c$ 。

III.D 弹性球的散射系数

弹性材料中的纵向和横向波速为 c_p 和 c_s ，则波数分别为 $k_p = (c/c_p)k$ 和 $k_s = (c/c_s)k$ ， c 和 k 分别为所处流体介质中的波速和波数，密度定义为 ρ_e 。为了表述

方便，分别定义流体介质中无量纲频率 $x = ka$ ，弹性介质中纵波无量纲频率 $x_p = k_p a$ ，横波无量纲频率 $x_s = k_s a$ 以及系数 $N = n(n+1)$ 。 D_n 矩阵中的包含 3×3 个元素，分别为^[79,195]

$$\begin{aligned}
d_{11} &= (\rho/\rho_e) x_s^2 h_n^{(1)}(x); \\
d_{12} &= (2N - x_s^2) j_n(x_p) - 4x_p j_n'(x_p); \\
d_{13} &= 2N [x_s j_n'(x_s) - j_n(x_s)]; \\
d_{21} &= -x h_n^{(1)}(x); \\
d_{22} &= x_p j_n'(x_p); \\
d_{23} &= N j_n(x_s); \\
d_{31} &= 0; \\
d_{32} &= 2 [j_n(x_p) - x_p j_n'(x_p)]; \\
d_{33} &= 2x_s j_n'(x_s) + (x_s^2 - 2N + 2) j_n(x_s).
\end{aligned} \tag{III.4}$$

III.E 弹性球壳的散射系数

空心球壳的外径和内径分别定义为 a 与 b ，为了方便， x ， x_p 和 x_s 的定义同附录 III.D 中的实心球。此外定义 $z_p = k_p b$ 和 $z_s = k_s b$ 。空心球壳的 D_n 矩阵中的包含 5×5 个元素，其中前 3×3 个元素与实心球相同，剩余的元素分别为^[79,196]

$$\begin{aligned}
d_{14} &= (2N - x_s^2) y_n(x_p) - 4x_p y_n'(x_p) \\
d_{15} &= 2N [x_s y_n'(x_s) - y_n(x_s)] \\
d_{24} &= x_p y_n'(x_p) \\
d_{25} &= N y_n(x_s) \\
d_{34} &= 2 [y_n(x_p) - x_p y_n'(x_p)] \\
d_{35} &= 2x_s y_n'(x_s) + (x_s^2 - 2N + 2) y_n(x_s) \\
d_{41} &= 0 \\
d_{42} &= (2N - z_s^2) j_n(z_p) - 4z_p j_n'(z_p) \\
d_{43} &= 2N [z_s j_n'(z_s) - j_n(z_s)] \\
d_{44} &= (2N - z_s^2) y_n(z_p) - 4z_p y_n'(z_p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{45} &= 2N \left[z_s y_n'(z_s) - y_n(z_s) \right] \\
 d_{51} &= 0 \\
 d_{52} &= 2 \left[j_n(z_p) - z_p j_n'(z_p) \right] \\
 d_{53} &= 2z_s j_n'(z_s) + (z_s^2 - 2N + 2) j_n(z_s) \\
 d_{54} &= 2 \left[y_n(z_p) - z_p y_n'(z_p) \right] \\
 d_{55} &= 2z_s y_n'(z_s) + (z_s^2 - 2N + 2) y_n(z_s)
 \end{aligned} \tag{III.5}$$

其中， y_n 表示第二类球贝塞尔函数。

III.F 充液粘弹性球壳

考虑球壳内有其他液体填充时，外径和内径分别定义为 a 与 b ，外部流体介质的密度为 ρ ，波速为 c ，波数为 k 。弹性壳材料密度为 ρ_e ，纵波和横波波数分别为 c_p 和 c_s ，波数分别为 k_p 和 k_s 。内层液体密度为 ρ_i ，声传播速度为 c_i ，波数为 k_i 。为了方便，定义无量纲频率 $x = ka$ ， $x_p = k_p a$ 和 $x_s = k_s a$ 。此外，定义 $z_p = k_p b$ ， $z_s = k_s b$ 和 $z_i = k_i b$ 。

为求解弹性壳的散射系数，首先求解弹性充液壳的散射系数。不同于上述推导求解线性方程的系数采用 Cramer 法则，Hasegawa 等^[197]采用一种更精确的分解法^[198]求解分波系数 A_n ，有

$$A_n = -\frac{F_n j_n(x) - x j_n'(x)}{F_n h_n^{(2)}(x) - x h_n^{(2)'}(x)} \tag{III.6}$$

其中 F_n 满足

$$F_n = -\rho \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & 0 \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & 0 \\ \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} \\ \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{62} & \alpha_{63} & \alpha_{64} & \alpha_{65} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & 0 \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & 0 \\ \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} \\ \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{62} & \alpha_{63} & \alpha_{64} & \alpha_{65} & 0 \end{vmatrix} \tag{III.7}$$

行列式中元素的具体表达式为

$$\begin{aligned}
 \alpha_{12} &= \left(2\rho_e/x_s^2\right) \left[\left(x_p^2 - 1/2x_s^2\right) j_n(x_p) + x_p^2 j_n''(x_p) \right]; \\
 \alpha_{13} &= \left(2\rho_e/x_s^2\right) \left[\left(x_p^2 - 1/2x_s^2\right) y_n(x_p) + x_p^2 y_n''(x_p) \right]; \\
 \alpha_{14} &= \left(2\rho_e/x_s^2\right) n(n+1) \left[x_s j_n'(x_s) - j_n(x_s) \right]; \\
 \alpha_{15} &= \left(2\rho_e/x_s^2\right) n(n+1) \left[x_s y_n'(x_s) - y_n(x_s) \right]; \\
 \alpha_{22} &= x_p j_n'(x_p); \\
 \alpha_{23} &= x_p y_n'(x_p); \\
 \alpha_{24} &= n(n+1) j_n(x_s); \\
 \alpha_{25} &= n(n+1) y_n(x_s); \\
 \alpha_{32} &= 2 \left[x_p j_n'(x_p) - j_n(x_p) \right]; \\
 \alpha_{33} &= 2 \left[x_p y_n'(x_p) - y_n(x_p) \right]; \\
 \alpha_{34} &= \left(n^2 + n - 2\right) y_n(x_s) + x_s^2 j_n''(x_s); \\
 \alpha_{35} &= \left(n^2 + n - 2\right) y_n(x_s) + x_s^2 y_n''(x_s); \\
 \alpha_{42} &= \left(2\rho_e/z_s^2\right) \left[\left(z_p^2 - 1/2z_s^2\right) j_n(z_p) + z_p^2 j_n''(z_p) \right]; \\
 \alpha_{43} &= \left(2\rho_e/z_s^2\right) \left[\left(z_p^2 - 1/2z_s^2\right) y_n(z_p) + z_p^2 y_n''(z_p) \right]; \\
 \alpha_{44} &= \left(2\rho_e/z_s^2\right) n(n+1) \left[z_s j_n'(z_s) - j_n(z_s) \right]; \\
 \alpha_{45} &= \left(2\rho_e/z_s^2\right) n(n+1) \left[z_s y_n'(z_s) - y_n(z_s) \right]; \\
 \alpha_{46} &= \rho_i j_n(z_i); \\
 \alpha_{52} &= z_p j_n'(z_p); \\
 \alpha_{53} &= z_p y_n'(z_p); \\
 \alpha_{54} &= n(n+1) j_n(z_s); \\
 \alpha_{55} &= n(n+1) y_n(z_s); \\
 \alpha_{56} &= -z_i j_n'(z_i); \\
 \alpha_{62} &= 2 \left[z_p j_n'(z_p) - j_n(z_p) \right]; \\
 \alpha_{63} &= 2 \left[z_p y_n'(z_p) - y_n(z_p) \right]; \\
 \alpha_{64} &= \left(n^2 + n - 2\right) j_n(z_s) + z_s^2 j_n''(z_s); \\
 \alpha_{65} &= \left(n^2 + n - 2\right) y_n(z_s) + z_s^2 y_n''(z_s);
 \end{aligned} \tag{III.8}$$

上述分波系数与 Goodman^[199]和 Hickling^[200]吻合，并编程验证正确。粘弹性材料

只需要引入复波数，有 $k_p = k_p(1 - i\gamma_p)$ 和 $k_s = k_s(1 - i\gamma_s)$ ，其中 γ_p 和 γ_s 分别为归一化纵向和横向吸收系数。将上述公式中 x_p 和 x_s 分别用 x_p 和 x_s 替换， z_p 和 z_s 分别用 \tilde{z}_p 和 \tilde{z}_s 替换。注意，当粘弹性壳体内不包含液体时，此时球壳退化成粘弹性实心球。为计算粘弹性实心球的分波系数，只需要将式 (III.6) 中的 F_n ，根据边界条件取式 (III.7) 中的部分元素即可。此时 F_n 为

$$F_n = -\rho \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{24} \\ \alpha_{32} & \alpha_{34} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{14} \\ \alpha_{32} & \alpha_{34} \end{vmatrix}} \quad (\text{III.9})$$

附录 IV 球坐标系下推导弹性转换子矩阵部分表达式

为了将 2.4.2.4 小节中子矩阵的表达式在球坐标系下具体展开, 方便通过数值编程实现, 下面具体给出部分推导过程需要的表达式。球坐标系下, 回旋体表面单位法向量与面积微元的乘积

$$\mathbf{n} \cdot dS = \left(\mathbf{e}_r - \frac{dr}{rd\theta} \mathbf{e}_\theta \right) r^2 \sin \theta d\theta \quad (\text{IV.1})$$

向量球谐函数在球坐标系下的具体表达式分别为

$$\mathbf{A}_{1nm\sigma}(\theta, \varphi) = [n(n+1)]^{-1/2} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial Y_{nm\sigma}}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\theta - \sin \theta \frac{\partial Y_{nm\sigma}}{\partial \theta} \mathbf{e}_\varphi \right) \quad (\text{IV.2})$$

$$\mathbf{A}_{2nm\sigma}(\theta, \varphi) = [n(n+1)]^{-1/2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} Y_{nm\sigma} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial}{\sin \theta \partial \varphi} Y_{nm\sigma} \mathbf{e}_\varphi \right) \quad (\text{IV.3})$$

$$\mathbf{A}_{3nm\sigma}(\theta, \varphi) = Y_{nm\sigma} \mathbf{e}_r \quad (\text{IV.4})$$

球坐标系下, 对称张量算子^[160]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{A} + \mathbf{A} \nabla) = \\ & e_r \frac{\partial A_r}{\partial r} e_r + e_\theta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_r}{r} \right] e_\theta + e_\varphi \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{A_r}{r} + A_\theta \cot \theta \right] e_\varphi \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A_\theta}{r} \right) \right] (e_r e_\theta + e_\theta e_r) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A_\varphi}{r} \right) \right] [e_r e_\varphi + e_\varphi e_r] + \\ & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{A_\varphi}{\sin \theta} \right) \right] [e_\theta e_\varphi + e_\varphi e_\theta] \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$