文章编号:1672-6197(2005)05-0011-04

用改进的蒙特卡洛(MC)方法计算 VaR

汪飞星[1], 陈东峰[1], 单国莉[2], 杨 旭[2,3]

(1. 北京科技大学 应用科学学院,北京 100083;
2. 烟台教育学院 计算机系,山东 烟台 264003;
3. 天津工业大学 计算机与自动化学院,天津 300160)

摘 要: VaR 技术是风险管理中重要的方法;蒙特卡洛模拟法(MC)计算 VaR 已经得到广泛的实际应用,但是其在伪随机数的产生和联合分布的确定方面过多地信赖于假定好的分布和模型. 采用 copula 函数改进了传统的 MC 方法,很好地处理了以上的问题,并在汇率风险管理领域作了实证分析,得到了较好的结果.

关键词: VaR;Monte Carlo 方法;copula;相依结构;分布

中图分类号: F830 **文献标识码**: A

Computing VaR using improved monte carlo method

WANG Fei-xing[1]; CHEN Dong-feng[1]; SHAN Guo-li[2]; YANG Xu[2,3]

(1. School of Applied Science, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;
2. Yantai College of Education, Yantai 264003, China;
3. College of Computer Technology and Automation, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300160, China)

Abstract: The Value-at-Risk(VaR) is of central importance in modern financial risk management and Monte Carlo(MC) simulation is the most popular method to compute the VaR, but it is deficient in the generation of pseudo random numbers and the determination of dependence structure of the risk factors. This paper improves the traditional MC method using copula and applies to the foreign exchange rates fields and gets the satisfactory results.

Key words: VaR;Monte Carlo method;copula;dependence structure;distribution

风险价值(VaR)是现在代金融领域中重要的风险管理工具,自从 20 世纪 90 年代初期出现以来,VaR 技术得到了不断的发展和完善. 常用的计算 VaR 的方法有历史模拟法、分析方法和 Monte Carlo(MC)模拟法[1,2]三种. MC 方法是一种全值估计法,它较前两种方法更加精确和可靠,可以有效处理大幅度波动和厚尾等问题;但是,它过多的依赖于特定的随机过程和事先假设的分布,未能很好地处理市场风险因子间的相依结构问题,因此存在着一定的潜在风险.

收稿日期: 2005-04-27
作者简介: 汪飞星(1957-),男,教授,博士.

Copula(连接函数)建立了边际分布和联合分布的直接关系,即

$F(x_1,\cdots,x_n)=C(F_1(x_1),\cdots,F_n(x_n))$,其中 $F_i(x_i)$为边际分布,$i=1,2,\cdots,n$;

Sklar 证明了 C 的存在性. 这样以来,我们可以先决定各个个风险变量 X_I 的边际分布函数 $F(x_i)$,$i=1,2,\cdots,n$,并分别加以选定和参数估计;然后构造适合的 Copula 可求得联合分布.

常见的 Copula 函数[3]有:

二元正态 Copula:$C_R(u,v)=\int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(u)}\int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(v)}\frac{1}{2\pi(1-R_{12}^2)^{\frac{1}{2}}}\exp\{-\frac{s^2-2R_{12}st+t^2}{2(1-R_{12}^2)}\}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$,其中 R_{12} 是两个随机变量之间的线性相关系数;

Frank Copula:$C_F(u,v;\lambda)=-\frac{1}{\lambda}\log[1+\frac{\mathrm{e}^{-\lambda u}-1)(\mathrm{e}^{-\lambda v}-1)}{(\mathrm{e}^{-\lambda}-1)}$;

Gumbel copula:$C_G(u,v)=\exp\{-[-\ln u)^{\theta}+(\ln v)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}}\}$

本文采用 Copula 方法,对 VaR 计算的 MC 模拟法进行了改进,并应用于货币汇率风险分析,最后将两种方法作了比较.

1 Copula-MC 方法

1.1 传统的 MC 方法[4]

基于 Monte Carlo 模拟方法的 VaR 计算的基本思路是重复模拟金融变量的随机过程,使模拟值包括大部分可能情况,这样通过模拟就可以得到组合价值的整体分布情况,从而求出 VaR. 主要分为以下四步:

第一步, 选择 VaR 计算所需要的置信度 $1-\alpha$;

第二步,在适当的描述风险因子的联合分布下,产生伪 n 元伪随机序列,并计算出价格序列 $V_{t+1,1}$,$V_{t+1,2},\cdots,V_{t+1,m}$;

第三步,在该价格序列下计算模拟收益和损失 $\Delta V_I=V_{t+1,i}-V_t$,$(i=1,2,\cdots,m)$;

第四步,忽略在 α 分位数下最坏的 ΔV_i,所剩余的 ΔV_i 中值最小的即为时间 t 的 VaR,定义为 VaR$(\alpha,t,t+1)$;当时间由 t 到 $t+1$ 时,价格序列由 V_t 变为 V_{t+1},我们可以通过比较 ΔV 来返回测试 VaR$(\alpha,t,t+1)$,重复下去,一直到达到模拟要求为止.

显然 MC 方法主要有两步,其一是伪随机数的产生,另一个是联合分布的确定,传统的方法不能很好地处理这两方面的问题,以下的讨论通过 copula 手段围绕这两个问题展开.

1.2 Copula MC 方法

我们将先给出传统的产生伪随机数的算法,并用 Copula 方法对其中的步骤进行改进. 如果把外汇汇率作为风险因子来计算,传统的产生伪随机数的方法包括以下步骤:

第一步 收集 n 个汇率历史数据,时间序列跨度为 $N+1$ 天,记为

$x_{i,0},x_{i,1},\cdots,x_{i,N}(i=1,\cdots,n)$,当日为 $x_{i,N}$,一般选取 $N+1=250$ 或 500.

第二步 假设 $x_{i,j}\neq 0$,通过数据计算相关变化

$$r_{i,j}=\frac{x_{i,j}-x_{i,j-1}}{x_{i,j-1}},i=1,\cdots n;j=1,\cdots,N,r_{i,j}\in\{r\}$$

第三步 假定随机变量 $r_1,\cdots,r_n$ 的边际分布为 $f_1,\cdots,f_n$,计算出相应的参数. 汇率风险计算中,一般假设为正态分布 $N(\mu_i,\sigma_i^2)$,即

$$f_i(r_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}\exp\left\{-\frac{(r_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i{}^2}\right\},\text{求出 }\hat{\mu}_i=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}r_{i,j},\hat{\sigma}_i{}^2=\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(r_{i,j}-\hat{\mu}_i)^2$$

第四步,假定多元联合分布为

$$f(\boldsymbol{r}=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det C}}\exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}^{-1}C^{-1}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u})\}$$

其中

$$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix};\quad \boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{1,2} & \sigma_2^2 & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1,n} & c_{2,n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix};\quad c_{i,j}=E((r_i-\mu_i)(r_j-\mu_j))$$

第五步　计算协方差阵，$\hat{c}_{i,j}=\dfrac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(r_{i,k}-\hat{\mu}_i)(r_{j,k}-\hat{\mu}_j)$；

第六步　产生伪随机数. 首先对 C 进行 Cholesky 分解，$C^{-1}=A^TA$，A 为下三角阵，在[0,1]上产生独立随机变量 $s_1,s_2,\cdots,s_n$；然后根据 $\boldsymbol{r}=A^{-1}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\mu}$ 得到伪随机数序列 $r_1,r_2,\cdots,r_n$，重复下去，可得到 $\boldsymbol{r}^k=(r_1^k,\cdots,r_n^k)^T$，$k=1,\cdots,m$ 为 MC 模拟次数.

针对以上算法的不足，下面用 copula 方法进行改进. 前三步与原来的方法保持和原来一致，第四步、第五步、第六步引入 copula 方法.

第四步，对于两个风险因子的联合分布函数，用 Gumbel copula 描述(见图 1)，

$$C_\theta(\varphi_1(r_1),\varphi_2(r_2))=P(R_1\leqslant r_1,R_2\leqslant r_2)$$

其中 $\varphi_i(r_i)=\int_{-\infty}^{r_j}dr_i'f_i(r_i'$ 为累积密度函数；

第五步，对 θ 进行估计，用极大似然方法. 设 $f_\theta(r_1,r_2)=\dfrac{\partial^2}{\partial r_1\partial r_2}C_\theta(\varphi_1(r_1),\varphi_2(r_2))$，似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{j=1}^{N}f_\theta(r_{1,j},r_{2,j})$$

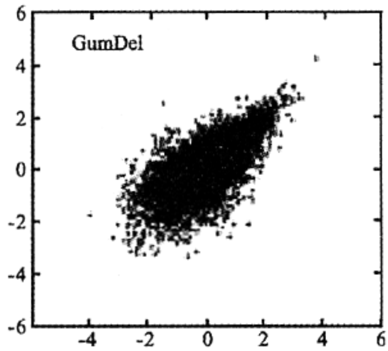

图 1　正态过际分布下的 *Gumbel copula*

可得到 $l(\theta)=\ln L(\theta)$ 的估计为 $\hat{l}(\theta)\sum_{j=1}^{N}\ln\left(\dfrac{\partial^2}{\partial u\partial v}C_\theta(u,v)\Big|_{u=\varphi_1(r_{1,j}),v=\varphi_2(r_{2,j})}\right)$，进而可以求出 $\hat{\theta}$.

第六步，在[0,1]上产生两个独立正态分布的伪随机数 u,w，计算 $v=C_{\hat{\theta},u}^{-1}(w)$，其中 $C_{\hat{\theta},u}=\dfrac{\partial}{\partial u}C_{\hat{\theta}}(u,v)$，令 $r_1=\varphi_1^{-1}(u)$，$r_2=\varphi_2^{-1}(v)$ 这样就得到了伪随机数对 (r_1,r_2).

2　实证分析

为了对比两种方法的优劣，我们选取 1994～2004 年 1 月份的数据，把美元/加元、美元/英镑汇率作为风险因子. 取 $N+1=250$，分别计算出分位数为 $\alpha_1=1\%$，$\alpha_2=5\%$，$\alpha_3=10\%$ 时的三个 VaR 值；每一个 $\mathrm{VaR}(\alpha_i,t,t+1)$ 都通过计算 $\Delta V=V_{t+1}-V_t$ 来比较其变化. 同时，MC 模拟 100～1 500 步，大约第 900 步以后，数值变化幅度不显著了.

为检验改进后方法的优劣，我们采用 Kupiec 提出的失改频率检验方法[5]，在 n 步模拟后相当于得到 n 个观测数据，在置倍水平 $a\%$ 下应有失败个数为 $n\times a\%$ 个，将落入 Kupiec 区间的个数应有的挫败个数相比便可得到失败频率百分比损失 P 百分比。

图 2 表示在传统的方法和 Copula 方法下产生的 1 500 对随机数的散点图，左图是在正态边际分布下，可以看出其图形趋于椭圆，这是符合实际的. 右图是在二元 Gumbel copula 条件下，图形比前者更加集中，尾部相对较细，由于 VaR 的计算与伪机数的产生有着直接的关系，这说明 Copula 方法能更好地描述风险因子的相关性.

按照两种方法分别计算出在 $\alpha=1\%$,5%,10%时的 VaR 值,并求出相应的低估损益率,见图3. 可以看出,Copula 方法比传统的 MC 方法偏离度要小的多;在 $\alpha=5\%$且 MC 步数很大时,几乎和原值线重合. 这充分说明了 Copula 方法计算出的 VaR 值更接近实际,其计算风险是相对较小的.

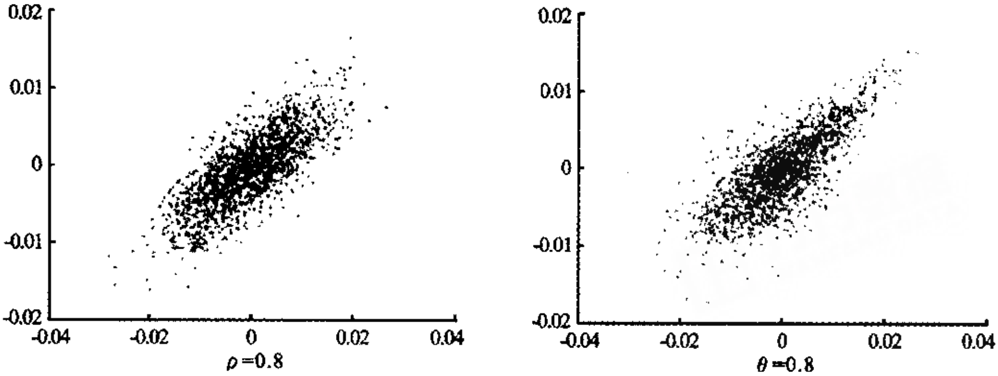

图2 正态分布和 Gumbel copula 下的 1 500 对伪随机数

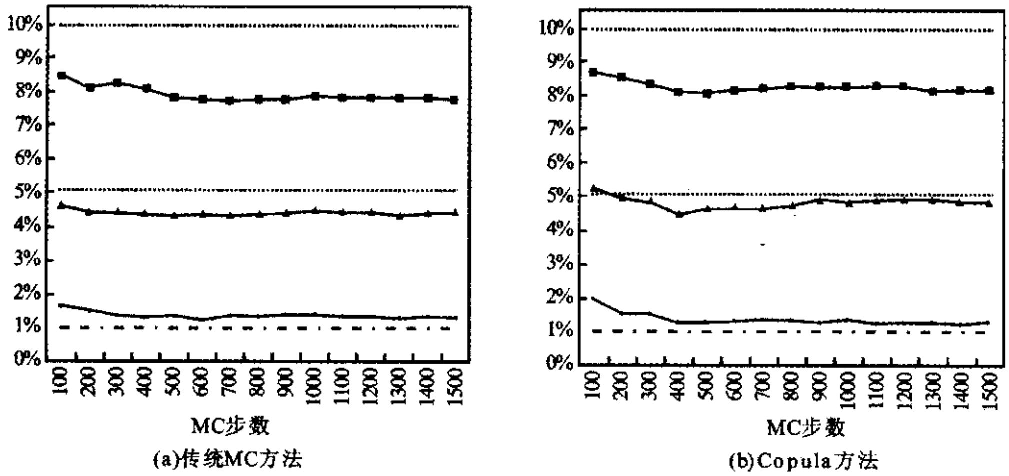

图3 两种方法的低估损益率的比较

3 结 论

本文用 Copula 函数改进了传统 MC 计算 VaR 的方法,对于伪随机数的产生和相依结构的选取作了较好的处理;并应用于外汇汇率风险管理作了实证分析,计算结果表明 Copula MC 方法更能精确有效地接近实际的 VaR. 当然,在数据选取中边际分布的确定以及具体 Copula 的选取方面有待于改进;本文只选取了 Gumbel Copula 作为例子,而在 Copula 的模型建立和参数估计方面有较多的方法和模式,这是 Copula MC 方法有力的支持.

参考文献

[1] Crouhy,Michel,Dan Galai, Robert Mark[M]. Risk Management,New York:McGraw Hill. 2001.

[2] Nelsen,Roger B. An Introduction to Copulas[M]. New York:Springer-Verlag. 1999.

[3] Gasserman P,Heidelberger P,Shahabonddin P. Portfolio Value-at-Risk with heavytailed risk factors[J]. Mathematical Finance,2002,12(3).

[4] 王春峰. 金融市场风险管理[M]. 天津大学出版社,2001.