第 51 卷第 11 期 数学的实践与认识 Vol.51, No. 11
2021年 6 月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY June, 2021

古诺博弈的矩阵分析: 算法博弈论与博弈计量经济学视角

徐齐利

(江西财经大学 经济学院, 江西 南昌 330013)

摘 要: 为解决古诺博弈在商业实战中的应用需求和在经济实证中的应用需求, 构建出古诺博弈系统的矩阵分析框架. 在系统设置方面, 消费者对产品的需求和生产者对产品的供给皆不再要求同质. 在系统求解方面, 导出了博弈过程的策略矩阵和博弈结果的均衡矩阵. 在系统分析方面, 放松经典模型过多苛刻的假设之后, 本模型较经典模型更具解释力和一般性, 经典模型成为本模型的特例. 在系统应用方面, 从商业智能实战的算法博弈论出发, 为参与古诺博弈的企业提供策略选择的矩阵算法; 从实证产业组织理论的博弈计量经济学出发, 为定量分析古诺博弈的研究人员提供估计市场结构参数的矩阵模型.

关键词: 古诺博弈; 矩阵分析; 算法博弈论; 博弈计量经济学; 商业智能

1 引言

古诺博弈是现实经济生活中一类常见的博弈形态. 在博弈论的学科框架下, 对古诺博弈的研究已取得一系列代表性的模型成果: 完全信息静态的古诺博弈, 如经典的古诺模型; 完全信息动态的古诺博弈, 如无限次重复博弈的古诺模型; 不完全信息静态的古诺博弈, 如企业成本为私人信息的古诺模型; 不完全信息动态的古诺博弈, 如声誉机制的古诺模型 [1−2]. 在数理经济学的学科框架下, 对古诺博弈的研究也取得一系列基础性的理论成果: 古诺博弈之纳什均衡、精炼纳什均衡、贝叶斯纳什均衡、贝叶斯精炼纳什均衡的定义条件、构造性条件、存在性条件及证明、唯一性条件及证明、稳定性条件及证明 [3−4]. 学界为什么能取得如此成熟且近乎完美的成果, 这是因为当初研究古诺博弈的目的是为经济理论服务; 然而, 现今学界仍在研究古诺博弈, 但其目的则是要为商业实战和经济实证服务.

古诺博弈在商业实战中的应用需求: 算法博弈论. 商业实战, 其本质是博弈论; 商业智能实战, 其本质是算法博弈论. 算法博弈论是博弈论与计算机交叉而成的一门新兴学科, 其研究目标有二 [5−6]. 一是寻找策略反应: 一方面做决策, 给定对方策略空间中的任意策略, 我方可行的应对策略有哪些, 我方最优的应对策略是哪个; 另一方面做预测, 给定我方策略空间中的任意策略, 我方需要预期对方可行的应对策略有哪些, 对方最优的应对策略是哪个. 二是寻找策略均衡: 先做静态规划, 在目前的博弈局势下, 博弈各方将向哪个均衡点收敛; 再做动态规划, 在目前的博弈局势下, 向均衡点收敛的可行路径有哪些, 最优路径是哪条. 企业之间同打产量战, 其本质是古诺博弈. 如何打好商业智能化的产量战, 责任落在算法博弈论在古诺博弈

收稿日期: 2020-12-05
资助项目: 北京市社科基金项目 (18GLA003, 20JJC029); 北京市教科委科研项目 (SM201910038003); 北京市优秀人才青年拔尖团队项目 (2017000026833TD0)

中如何具体实现: 一是如何寻找古诺博弈的策略反应, 即如何做古诺博弈的反应决策和反应预测 [7]; 二是如何寻找古诺博弈的策略均衡, 即如何做古诺均衡的静态规划和动态规划 [8].

古诺博弈在经济实证中的应用需求: 博弈计量经济学. 过去, 博弈论与产业组织交叉, 形成产业组织理论 [9]; 计量经济学与产业组织交叉, 形成产业组织实证. 现今, 博弈论与计量经济学交叉, 形成博弈计量经济学 [10−12]; 博弈论、计量经济学、产业组织三者交叉, 形成实证产业组织理论. 过去需要利用博弈论去建构经济理论, 故古诺博弈成为产业组织理论的基石之一; 现今需要利用博弈计量经济学去检验经济理论, 故实证古诺博弈成为实证产业组织理论的重要课题之一. 过去的产业组织实证, 此类经济实证研究是从经验假设出发, 旨在检验影响因素的经验实证分析. 现今的实证产业组织理论, 这类经济实证是从理论模型出发, 旨在检验影响机制的理论实证分析. 博弈计量经济学的诞生标志着结构计量经济学从第一代进入第二代: 计量模型的结构式由来自决策模型升级为来自对策模型 [13]. 研发出可用于估计市场需求参数的计量模型和方法是博弈计量经济学在实证古诺博弈这一课题的主攻方向. 实证古诺博弈需要估计的市场参数主要有两类: 一是估计反需求函数中消费者对同类产品不同品牌的最高意愿买价, 这在本文将是一个列向量; 二是估计反需求函数中所有其他品牌对另一种品牌的替代程度, 这在本文将是一个矩阵.

为解决古诺博弈在商业实战中的应用需求和在经济实证中的应用需求, 本文基于算法博弈论的视角和博弈计量经济学的视角, 构建古诺博弈系统的矩阵分析框架. 在系统设置方面, 消费者对产品的需求和生产者对产品的供给皆不再要求同质: 每个生产者对其产品的最低意愿卖价不尽相同, 消费者对每个产品的最高意愿买价也不尽相同, 各品牌之间的替代程度亦不尽相同. 在系统求解方面, 导出博弈过程的策略选择和博弈结果的纳什均衡为: 博弈过程中系统反应的矩阵求解, 博弈结果里均衡产出系统的矩阵求解、均衡价格系统的矩阵求解、均衡利润系统的矩阵求解. 在系统分析方面, 放松经典模型过多苛刻的假设之后, 本模型较经典模型更具解释力和一般性, 经典模型成为本模型的特例: 经典的古诺模型是本模型在产品完全可替代时的特例, 经典的市场分割模型则是本模型在产品在完全不可替代时的特例. 在系统应用方面, 从商业智能实战的算法博弈论出发, 为参与古诺博弈的企业提供策略选择的矩阵算法; 从实证产业组织理论的博弈计量经济学出发, 为定量分析古诺博弈的研究人员提供估计市场结构参数的矩阵模型.

2 系统设置

2.1 一般系统

设行业由 n 家企业组成, 企业 $i=1,\cdots,n$ 生产品牌为 i 的产品, 其产量为 q_i, 成本为函数 $C_i(q_i)$. 该品牌的产品在市场上的价格为反需求函数 $P_i(q_i,\boldsymbol{q}_{-i})$, 其中 $n-1$ 维向量 $\boldsymbol{q}_{-i}=(q_1,\cdots,q_{i-1},q_{i+1},\cdots,q_n)$ 为竞品的产量, 即其他企业的产量. 如此, 则以产出向量 $\boldsymbol{q}\in R^n$ 表示行业的产出系统, 以反需求函数向量 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{q}):R^n\to R^n$ 表示行业的价格系统, 成本函数向量 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}):R^n\to R^n$ 表示行业的成本系统, 即

$$\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix} q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} P_1(\boldsymbol{q})\\ P_2(\boldsymbol{q})\\ \vdots\\ P_n(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} C_1(q_1)\\ C_2(q_2)\\ \vdots\\ C_n(q_n) \end{bmatrix} \tag{1}$$

由 (1) 式可构造出行业的收益系统, 即函数向量 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) = Diag(\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{q}) : R^n \to R^n$ 为

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} S_1(\boldsymbol{q}) \\ S_2(\boldsymbol{q}) \\ \vdots \\ S_n(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(\boldsymbol{q}) \\ P_2(\boldsymbol{q}) \\ \vdots \\ P_n(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} \tag{2}$$

其中, 元素 $S_i(\boldsymbol{q})$ 为企业 $i=1,\cdots,n$ 的收益. 由 (2) 式和 (1) 式可构造出行业的利润系统, 即函数向量 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}) : R^n \to R^n$ 为

$$\begin{bmatrix} \pi_1(\boldsymbol{q}) \\ \pi_2(\boldsymbol{q}) \\ \vdots \\ \pi_n(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1(\boldsymbol{q}) \\ S_2(\boldsymbol{q}) \\ \vdots \\ S_n(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1(q_1) \\ C_2(q_2) \\ \vdots \\ C_n(q_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(\boldsymbol{q}) \\ P_2(\boldsymbol{q}) \\ \vdots \\ P_n(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1(q_1) \\ C_2(q_2) \\ \vdots \\ C_n(q_n) \end{bmatrix} \tag{3}$$

其中, 元素 $\pi_i(\boldsymbol{q})$ 为企业 $i=1,\cdots,n$ 的利润.

2.2 一般线性系统

设 (1) 式的行业价格系统 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{q})$ 取如下的一般线性形式

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} P_1(\boldsymbol{q}) \\ P_2(\boldsymbol{q}) \\ \vdots \\ P_n(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & 1 & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, 0 \le \gamma_{ij} \le 1, i \ne j \tag{4}$$

其中, $a_i > 0$ 表示消费者对品牌产品 $i=1,\cdots,n$ 的最高意愿买价, $0 \le \gamma_{ij} \le 1$ 表示竞品 $j \ne i$ 对本品 $i=1,\cdots,n$ 的替代能力. 设 (1) 式的行业成本系统 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})$ 取如下的一般线性形式

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} C_1(q_1) \\ C_2(q_2) \\ \vdots \\ C_n(q_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

其中, $c_i > 0$ 表示产品 $i=1,\cdots,n$ 的单位成本, 即企业 i 对其产品的最低意愿卖价.

由行业产出系统 $\boldsymbol{q}$ 和 (4) 式的行业价格系统 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{q})$ 知, (2) 式的行业收益系统 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) = Diag(\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{q})$ 其具体形式为

$$\begin{bmatrix} S_1(\boldsymbol{q}) \\ S_2(\boldsymbol{q}) \\ \vdots \\ S_n(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & 1 & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \right) \tag{6}$$

由 (5) 式行业成本系统 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})$ 和 (6) 式行业收益系统 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q})$ 知, (3) 式行业利润系统 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})$ 具体形式为

$$\begin{bmatrix} \pi_1(\boldsymbol{q}) \\ \pi_2(\boldsymbol{q}) \\ \vdots \\ \pi_n(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_1 - c_1 \\ a_2 - c_2 \\ \vdots \\ a_n - c_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & 1 & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \right) \tag{7}$$

3 系统求解

3.1 系统反应

为书写方便, 一阶偏导数的符号简记为

$$P_{ij}=\frac{\partial P_i}{\partial q_j}, S_{ij}=\frac{\partial S_i}{\partial q_j},\ C_{ij}=\frac{\partial C_i}{\partial q_j},\ \pi_{ij}=\frac{\partial \pi_i}{\partial q_j},\ i,j=1,\cdots,n$$

古诺博弈的各企业为使 (3) 式自身利润最大化, 由一阶条件 $(\pi_{11}(\boldsymbol{q}),\pi_{22}(\boldsymbol{q}),\cdots,\pi_{nn}(\boldsymbol{q}))^T=(0,0,\cdots,0)^T$ 得系统的反应方程为

$$2\begin{bmatrix}P_1(\boldsymbol{q})\\P_2(\boldsymbol{q})\\\vdots\\P_n(\boldsymbol{q})\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}q_1&0&\cdots&0\\0&q_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&q_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11}(\boldsymbol{q})\\P_{22}(\boldsymbol{q})\\\vdots\\P_{nn}(\boldsymbol{q})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}(q_1)\\C_{22}(q_2)\\\vdots\\C_{nn}(q_n)\end{bmatrix}\tag{8}$$

方程左边为行业的边际收益系统, 方程右边为行业的边际成本系统.

由 (8) 式的系统反应方程可得系统的反应函数 $\boldsymbol{q}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}):R^n\to R^n$, 其中 $q_i=f_i(\boldsymbol{q}_{-i}):R^{n-1}\to R^{n-1},i=1,\cdots,n$. 对于 (4)(5)(6)(7) 式构造的一般线性系统, 由 (8) 式的系统反应方程得系统反应函数 $\boldsymbol{q}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$ 为

$$\begin{bmatrix}q_1^*\\q_2^*\\\vdots\\q_n^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(\boldsymbol{q}_{-1})\\f_2(\boldsymbol{q}_{-2})\\\vdots\\f_n(\boldsymbol{q}_{-n})\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}a_1-c_1\\a_2-c_2\\\vdots\\a_n-c_n\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&\gamma_{12}&\cdots&\gamma_{1n}\\\gamma_{21}&0&\cdots&\gamma_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\gamma_{n1}&\gamma_{n2}&\cdots&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{bmatrix}\right)\tag{9}$$

3.2 系统均衡

求解 (8) 式的系统反应方程得产出系统 $\boldsymbol{q}^*$ 即为古诺博弈的纳什均衡. 对于均衡的产出系统 $\boldsymbol{q}^*$, 需满足系统反应函数: $\boldsymbol{q}^*=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}^*)$, 其中 $q_i^*=f_i(\boldsymbol{q}_{-i}^*),i,\cdots,n$, 此即纳什均衡的定义. 对于 (4)(5)(6)(7) 式构造的一般线性系统, 由 (8) 式的系统反应方程和由 (9) 式的系统反应函数得, 行业的均衡产出系统 $\boldsymbol{q}^*$ 满足如下方程组

$$\begin{bmatrix}2&\gamma_{12}&\cdots&\gamma_{1n}\\\gamma_{21}&2&\cdots&\gamma_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\gamma_{n1}&\gamma_{n2}&\cdots&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1^*\\q_2^*\\\vdots\\q_n^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1-c_1\\a_2-c_2\\\vdots\\a_n-c_n\end{bmatrix}\tag{10}$$

线性方程组 (10) 式肯定有解, 原因是系数矩阵非主对角线的元素取值皆在 0,1 之间, 即 $0\le\gamma_{ij}\le 1,i\ne j=1,\cdots,n$, 而主对角线的元素皆为 2, 如此矩阵则为满秩矩阵, 故方程组有解.

解线性方程组 (10) 式得行业的均衡产出系统 $\boldsymbol{q}^*$ 为

$$\begin{bmatrix}q_1^*\\q_2^*\\\vdots\\q_n^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&\gamma_{12}&\cdots&\gamma_{1n}\\\gamma_{21}&2&\cdots&\gamma_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\gamma_{n1}&\gamma_{n2}&\cdots&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a_1-c_1\\a_2-c_2\\\vdots\\a_n-c_n\end{bmatrix}\tag{11}$$

将 (11) 式行业的均衡产出系统 $\boldsymbol{q}^*$ 代入 (4) 式得行业的均衡价格系统 $\boldsymbol{P}^*=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{q}^*)$ 为

$$\begin{bmatrix}P_1^*\\P_2^*\\\vdots\\P_n^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&\gamma_{12}&\cdots&\gamma_{1n}\\\gamma_{21}&1&\cdots&\gamma_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\gamma_{n1}&\gamma_{n2}&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&\gamma_{12}&\cdots&\gamma_{1n}\\\gamma_{21}&2&\cdots&\gamma_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\gamma_{n1}&\gamma_{n2}&\cdots&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a_1-c_1\\a_2-c_2\\\vdots\\a_n-c_n\end{bmatrix}\tag{12}$$

同理, 由 (5) 式得行业的均衡成本系统 $\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}^*)$, 由 (6) 式得行业的均衡收益系统为 $\boldsymbol{S}^*=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}^*)$, 由 (7) 式得行业的均衡利润系统 $\boldsymbol{\pi}^*=\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{q}^*)$.

4 系统分析

4.1 对经典模型的推广

若参与古诺博弈的企业数量 $n=2$, 则 (10) 式的系统均衡条件变为

$$\begin{bmatrix} 2 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1-c_1 \\ a_2-c_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

解之得两企业古诺博弈时均衡产出 (11) 式的解析表达式为

$$\begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{bmatrix}=\frac{1}{4-\gamma_{12}\gamma_{21}}\begin{bmatrix} 2 & -\gamma_{12} \\ -\gamma_{21} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1-c_1 \\ a_2-c_2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

继续得两企业古诺博弈时均衡价格 (12) 式的解析表达式为

$$\begin{bmatrix} P_1^* \\ P_2^* \end{bmatrix}=\frac{1}{4-\gamma_{12}\gamma_{21}}\left(\begin{bmatrix} 2 & -\gamma_{12} \\ -\gamma_{21} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2-\gamma_{12}\gamma_{21} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & 2-\gamma_{12}\gamma_{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}\right) \tag{15}$$

进而得两企业古诺博弈时行业均衡产量 $Q^*=q_1^*+q_2^*$ 的解析表达式为

$$Q^*=\frac{2-\gamma_{21}}{4-\gamma_{12}\gamma_{21}}(a_1-c_1)+\frac{2-\gamma_{12}}{4-\gamma_{12}\gamma_{21}}(a_2-c_2)$$

由此可见, 经典的两企业古诺博弈时纳什均衡的企业产量 $q_1^*=q_2^*=(a-c)/3$ 和行业产量 $Q^*=2(a-c)/3$ 是本文一般线性模型在 $\gamma_{12}=\gamma_{21}=1, a_1=a_2=a, c_1=c_2=c$ 时的特例.

若参与古诺博弈的企业数量 $n=3$, 则 (10) 式的系统均衡条件变为

$$\begin{bmatrix} 2 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & 2 & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1-c_1 \\ a_2-c_2 \\ a_3-c_3 \end{bmatrix} \tag{16}$$

解之得三企业古诺博弈时均衡产出 (11) 式的解析表达式为

$$\begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \end{bmatrix}=\frac{1}{w_0}\begin{bmatrix} 4-\gamma_{23}\gamma_{32} & \gamma_{13}\gamma_{32}-2\gamma_{12} & \gamma_{12}\gamma_{23}-2\gamma_{13} \\ \gamma_{23}\gamma_{31}-2\gamma_{21} & 4-\gamma_{13}\gamma_{31} & \gamma_{21}\gamma_{13}-2\gamma_{23} \\ \gamma_{32}\gamma_{21}-2\gamma_{31} & \gamma_{31}\gamma_{12}-2\gamma_{32} & 4-\gamma_{12}\gamma_{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1-c_1 \\ a_2-c_2 \\ a_3-c_3 \end{bmatrix} \tag{17}$$

其中 $w_0=8-2\gamma_{12}\gamma_{21}-2\gamma_{13}\gamma_{31}-2\gamma_{23}\gamma_{32}+\gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{31}+\gamma_{13}\gamma_{21}\gamma_{32}$. 进而得三企业古诺博弈时行业均衡产量 $Q^*=q_1^*+q_2^*+q_3^*$ 的解析表达式为

$$Q^*=\frac{w_1}{w_0}(a_1-c_1)+\frac{w_2}{w_0}(a_2-c_2)+\frac{w_3}{w_0}(a_3-c_3)$$

其中, $w_1=4-2\gamma_{21}-2\gamma_{31}-\gamma_{23}\gamma_{32}+\gamma_{23}\gamma_{31}+\gamma_{32}\gamma_{21}$, $w_2=4-2\gamma_{12}-2\gamma_{32}-\gamma_{13}\gamma_{31}+\gamma_{13}\gamma_{32}+\gamma_{31}\gamma_{12}$, $w_3=4-2\gamma_{13}-2\gamma_{23}-\gamma_{12}\gamma_{21}+\gamma_{12}\gamma_{23}+\gamma_{21}\gamma_{13}$. 由此可见, 经典的三企业古诺博弈时纳什均衡的企业产量 $q_1^*=q_2^*=q_3^*=(a-c)/4$ 和行业产量 $Q^*=3(a-c)/4$ 是本文一般线性模型在 $\gamma_{12}=\gamma_{13}=\gamma_{21}=\gamma_{23}=\gamma_{31}=\gamma_{32}=1, a_1=a_2=a_3=a, c_1=c_2=c_3=c$ 时的特例.

4.2 对一般模型的退化

若 $\gamma_{ij}=\gamma, i\neq j$, 即 n 个品牌之间的替代程度相等, 则 (10) 式的系统均衡条件变为

$$\begin{bmatrix} 2 & \gamma & \cdots & \gamma \\ \gamma & 2 & \cdots & \gamma \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma & \gamma & \cdots & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1-c_1 \\ a_2-c_2 \\ \vdots \\ a_n-c_n \end{bmatrix} \tag{18}$$

通过行初等变换, 解之得相等替代程度下古诺博弈 (11) 式均衡产出的解析表达式为

$$\begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ \vdots \\ q_n^* \end{bmatrix} = \frac{1}{v_0} \begin{bmatrix} 2+(n-2)\gamma & -\gamma & \cdots & -\gamma \\ -\gamma & 2+(n-2) & \cdots & -\gamma \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\gamma & -\gamma & \cdots & 2+(n-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1-c_1 \\ a_2-c_2 \\ \vdots \\ a_n-c_n \end{bmatrix} \tag{19}$$

其中 $v_0=(2-\gamma)[2+(n-1)\gamma]$. 继续得相等替代程度下古诺博弈 (12) 式均衡价格的解析式为

$$\begin{bmatrix} P_1^* \\ P_2^* \\ \vdots \\ P_n^* \end{bmatrix} = \frac{1}{v_0} \left(\begin{bmatrix} v_1 & -\gamma & \cdots & -\gamma \\ -\gamma & v_1 & \cdots & -\gamma \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\gamma & -\gamma & \cdots & v_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_2 & \gamma & \cdots & \gamma \\ \gamma & v_2 & \cdots & \gamma \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma & \gamma & \cdots & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \right)$$

其中, $v_1=2+(n-2)\gamma-\gamma^2$, $v_2=2+(n-2)\gamma-(n-2)\gamma^2$. 进而得相等替代程度下古诺博弈在均衡时行业产出 $Q^*=\sum_{i=1}^n q_i^*$ 的解析表达式为

$$Q^*=\frac{1}{2+(n-)\gamma}\sum_{i=1}^n (a_i-c_i)$$

进一步退化分析, 如果参数 $a_1=\cdots=a_n=a, c_1=\cdots=c_n=c$, 则相等替代程度下古诺博弈均衡时各企业的均衡产出由 (19) 式进一步退化为

$$q_1^*=\cdots=q_n^*=\frac{1}{2+(n-)\gamma}(a-c),\ Q^*=\frac{n}{2+(n-)\gamma}(a-c)$$

再进一步退化分析, 如果参数 $\gamma=1$, 即各品牌之间具有完全的替代性, 则各企业及行业的均衡产出再进一步退化为

$$q_1^*=\cdots=q_n^*=\frac{1}{n+1}(a-c),\ Q^*=\frac{n}{n+1}(a-c)$$

该式实为经典古诺模型的均衡结果. 可见, 经典古诺模型是本文一般线性模型的特例. 如果参数 $\gamma=0$, 即各品牌之间完全不具备替代性, 则各企业及行业的均衡产出再进一步退化为

$$q_1^*=\cdots=q_n^*=\frac{1}{2}(a-c),\ Q^*=\frac{n}{2}(a-c)$$

该式实为市场分割下各企业垄断供给的结果. 回到 (19) 式知, 市场分割的企业产出 $q_i^*=(a_i-c)/2, i=1,\cdots,n$ 和行业产出 $Q^*=\sum_{i=1}^n(a_i-c)/2$ 是本文一般线性模型在 $\gamma_{ij}=0, i\neq j, c_1=\cdots=c_n=c$ 时的特例.

5 系统应用

5.1 算法博弈论

在商业智能实战中, 参与古诺博弈的每个企业都遵循 “知己知彼” 的原则做预期, 遵循 “百战不殆” 的原则做决策, 即在古诺博弈的每个回合, 各企业都需要构造系统的预期 - 决策矩阵. 设第 t 期系统的预期 - 决策矩阵 $\boldsymbol{ED}(\boldsymbol{q}_t)$ 为

$$\boldsymbol{ED}(\boldsymbol{q}_t) = \begin{bmatrix} q_{1,t}^* & E_1(q_{2,t}) & \cdots & E_1(q_{n,t}) \\ E_2(q_{1,t}) & q_{2,t}^* & \cdots & E_2(q_{n,t}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E_n(q_{1,t}) & E_n(q_{2,t}) & \cdots & q_{n,t}^* \end{bmatrix}$$

其中, 非主对角线元素 $E_i(q_{j,t})$ 表示在第 t 期企业 i 对企业 j 的产出预期, 主对角线元素 $q_{i,t}^*$ 表示在第 t 期企业 i 对其产量的决策, 决策的机制为 (9) 式反应函数的算法实现, 即

$$q_{i,t}^* = f_i\left(E_i(\boldsymbol{q}_{-i,t})\right) = \frac{1}{2}(\hat{a}_i - c_i) - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\hat{\gamma}_{ij}E_i(q_{j,t}) \tag{20}$$

对于任意企业 i, 其在第 t 期做决策的博弈算法为: 步骤 1, 利用博弈计量经济学, 估计出 (4) 式需求函数的参数 $\hat{a}_i, \hat{\gamma}_{ij}, j \neq i = 1, \cdots, n$; 步骤 2, 企业 i 对其他企业在本期的产量做出预测 $E_i(q_{j,t}), j \neq i = 1, \cdots, n$; 步骤 3, 企业 i 根据 (20) 式的反应函数来设定自己在本期的产量.

在步骤 2 中, 通常设定各企业具有一致性预期, 即对于任意的 $i \neq j$, 其对 $k \neq i, k \neq j$ 的产量预期都有 $E_i(q_{k,t}) = E_j(q_{k,t}) = E(q_{k,t})$, 则 (20) 式企业决策的博弈系统为

$$\begin{bmatrix} q_{1,t}^* \\ q_{2,t}^* \\ \vdots \\ q_{n,t}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(E\boldsymbol{q}_{-1,t}) \\ f_2(E\boldsymbol{q}_{-2,t}) \\ \vdots \\ f_n(E\boldsymbol{q}_{-n,t}) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \hat{a}_1 - c_1 \\ \hat{a}_2 - c_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_n - c_n \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \hat{\gamma}_{12} & \cdots & \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{21} & 0 & \cdots & \hat{\gamma}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\gamma}_{n1} & \hat{\gamma}_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E(q_{1,t}) \\ E(q_{2,t}) \\ \vdots \\ E(q_{n,t}) \end{bmatrix} \tag{21}$$

在操作上, 可进一步设定各企业具有一致适应性预期, 即对于任意 $i \neq j$, 其对 $k \neq i, k \neq j$ 的产量预期都有 $E_i(q_{k,t}) = E_j(q_{k,t}) = q_{k,t-1}$, 则 (21) 式企业决策的博弈系统为

$$\begin{bmatrix} q_{1,t} \\ q_{2,t} \\ \vdots \\ q_{n,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{q}_{-1,t-1}) \\ f_2(\boldsymbol{q}_{-2,t-1}) \\ \vdots \\ f_n(\boldsymbol{q}_{-n,t-1}) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \hat{a}_1 - c_1 \\ \hat{a}_2 - c_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_n - c_n \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \hat{\gamma}_{12} & \cdots & \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{21} & 0 & \cdots & \hat{\gamma}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\gamma}_{n1} & \hat{\gamma}_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{1,t-1} \\ q_{2,t-1} \\ \vdots \\ q_{n,t-1} \end{bmatrix} \tag{22}$$

一致适应性预期是一个非常合理且简单实用的预期方法. 根据反应函数的性质知, (22) 式所得的系统产出序列 $\{q_t\}_{t=1}^{\infty}$ 会收敛到古诺博弈的纳什均衡. 接下来讨论, 在利用 (22) 式之前, 如何应用博弈计量经济学估计出系统的需求参数 $\hat{a}_i, \hat{\gamma}_{ij}, j \neq i = 1, \cdots, n$.

5.2 博弈计量经济学

为了叙述的简洁性, 此处以两企业古诺博弈为例: 已知企业的产出序列, 产品的市场价格序列, 企业的单位成本序列, 即 $\{q_{1,t}, q_{2,t}, P_{1,t}, P_{2,t}, c_{1,t}, c_{2,t}\}_{t=1}^T$, 要估计市场需求参数 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{\gamma}_{12}, \hat{\gamma}_{21}$, 可建立如下四个恰好识别的结构计量模型.

模型 1: 利用序列 $\{q_{1,t}, q_{2,t}, c_{1,t}, c_{2,t}\}_{t=1}^T$ 来估计市场需求参数 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{\gamma}_{12}, \hat{\gamma}_{21}$. 由 (14) 式构造计量模型的结构式为

$$\begin{bmatrix} q_{1,t} \\ q_{2,t} \end{bmatrix} = \frac{1}{4 - \gamma_{12}\gamma_{21}}\left(\begin{bmatrix} 2a_1 - \gamma_{12}a_2 \\ 2a_2 - \gamma_{21}a_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -\gamma_{12} \\ -\gamma_{21} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{1,t} \\ c_{2,t} \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix} \tag{23}$$

由该结构式构造计量模型的简化式为

$$\begin{bmatrix} q_{1,t} \\ q_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{1,t} \\ c_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix} \tag{24}$$

由简化式参数 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_{12}, \beta_{21}$ 到结构式参数 $a_1, a_2, \gamma_{12}, \gamma_{21}$ 的识别关系为

$$\gamma_{12} = -\frac{2\beta_{12}}{\beta_0},\ \gamma_{21} = -\frac{2\beta_{21}}{\beta_0},\ a_1 = \frac{\beta_2\beta_{12} - \beta_0\beta_1}{\beta_0^2 - \beta_{12}\beta_{21}},\ a_2 = \frac{\beta_1\beta_{21} - \beta_0\beta_2}{\beta_0^2 - \beta_{12}\beta_{21}} \tag{25}$$

如此建模, 则先由 (24) 式估计出 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_{12}, \hat{\beta}_{21}$, 再由 (25) 式估计出 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{\gamma}_{12}, \hat{\gamma}_{21}$.

模型 2: 利用序列 $\{P_{1,t}, P_{2,t}, c_{1,t}, c_{2,t}\}_{t=1}^T$ 来估计市场需求参数 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{\gamma}_{12}, \hat{\gamma}_{21}$. 由 (15) 式构造计量模型的结构式为

$$\begin{bmatrix} P_{1,t} \\ P_{2,t} \end{bmatrix} = \frac{1}{w}\left(\begin{bmatrix} 2a_1 - \gamma_{12}a_2 \\ 2a_2 - \gamma_{21}a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 - \gamma_{12}\gamma_{21} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & 2 - \gamma_{12}\gamma_{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{1,t} \\ c_{2,t} \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix} \tag{26}$$

其中 $w=4-\gamma_{12}\gamma_{21}$. 由该结构式构造计量模型的简化式为

$$\begin{bmatrix} P_{1,t} \\ P_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_0 & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,t} \\ c_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix} \tag{27}$$

由简化式参数 $\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_{12},\theta_{21}$ 到结构式参数 $a_1,a_2,\gamma_{12},\gamma_{21}$ 的识别关系为

$$\gamma_{12}=-\frac{2\theta_{12}}{1-\theta_0},\ \gamma_{21}=-\frac{2\theta_{21}}{1-\theta_0},\ a_1=\frac{\theta_1(1-\theta_0)+\theta_2\theta_{12}}{(1-\theta_0)^2-\theta_{12}\theta_{21}},\ a_2=\frac{\theta_2(1-\theta_0)+\theta_1\theta_{21}}{(1-\theta_0)^2-\theta_{12}\theta_{21}} \tag{28}$$

如此建模, 则先由 (27) 式估计出 $\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_{12},\hat{\theta}_{21}$, 再由 (28) 式估计出 $\hat{a}_1,\hat{a}_2,\hat{\gamma}_{12},\hat{\gamma}_{21}$.

模型 3: 利用序列 $\{q_{1,t},P_{2,t},c_{1,t},c_{2,t}\}_{t=1}^{T}$ 来估计市场需求参数 $\hat{a}_1,\hat{a}_2,\hat{\gamma}_{12},\hat{\gamma}_{21}$. 由 (14) 式的第一个方程和 (15) 式的第二个方程构造计量模型的结构式为

$$\begin{bmatrix} q_{1,t} \\ P_{2,t} \end{bmatrix} = \frac{1}{4-\gamma_{12}\gamma_{21}}\left(\begin{bmatrix} 2a_1-\gamma_{12}a_2 \\ 2a_2-\gamma_{21}a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & 2-\gamma_{12}\gamma_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,t} \\ c_{2,t} \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix} \tag{29}$$

由该结构式构造计量模型的简化式为

$$\begin{bmatrix} q_{1,t} \\ P_{2,t}-c_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,t} \\ c_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix} \tag{30}$$

如此建模, 则先由 (30) 式估计出 $\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_{12},\hat{\beta}_{21}$, 再由 (25) 式估计出 $\hat{a}_1,\hat{a}_2,\hat{\gamma}_{12},\hat{\gamma}_{21}$. 针对 (29) 式的结构式, 亦可构造计量模型的另一种简化式为

$$\begin{bmatrix} q_{1,t}+c_{1,t} \\ P_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_0 & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,t} \\ c_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix} \tag{31}$$

如此建模, 则先由 (31) 式估计出 $\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_{12},\hat{\theta}_{21}$, 再由 (28) 式估计出 $\hat{a}_1,\hat{a}_2,\hat{\gamma}_{12},\hat{\gamma}_{21}$.

模型 4: 利用序列 $\{P_{1,t},q_{2,t},c_{1,t},c_{2,t}\}_{t=1}^{T}$ 来估计市场需求参数 $\hat{a}_1,\hat{a}_2,\hat{\gamma}_{12},\hat{\gamma}_{21}$. 由 (14) 式的第二个方程和 (15) 式的第一个方程构造计量模型的结构式为

$$\begin{bmatrix} P_{1,t} \\ q_{2,t} \end{bmatrix} = \frac{1}{4-\gamma_{12}\gamma_{21}}\left(\begin{bmatrix} 2a_1-\gamma_{12}a_2 \\ 2a_2-\gamma_{21}a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2-\gamma_{12}\gamma_{21} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,t} \\ c_{2,t} \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix} \tag{32}$$

由该结构式构造计量模型的简化式为

$$\begin{bmatrix} P_{1,t}-c_{1,t} \\ q_{1,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,t} \\ c_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix} \tag{33}$$

如此建模, 则先由 (33) 式估计出 $\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_{12},\hat{\beta}_{21}$, 再由 (25) 式估计出 $\hat{a}_1,\hat{a}_2,\hat{\gamma}_{12},\hat{\gamma}_{21}$. 针对 (32) 式的结构式, 亦可构造计量模型的另一种简化式为

$$\begin{bmatrix} P_{1,t} \\ q_{2,t}+c_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_0 & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,t} \\ c_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix} \tag{34}$$

如此建模, 则先由 (34) 式估计出 $\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_{12},\hat{\theta}_{21}$, 再由 (28) 式估计出 $\hat{a}_1,\hat{a}_2,\hat{\gamma}_{12},\hat{\gamma}_{21}$. 两个以上企业古诺博弈的结构计量经济学建模与之同理, 只是模型更为繁琐, 约束条件更为繁多.

6 结论

为解决古诺博弈在商业实战中的应用需求和在经济实证中的应用需求, 本文构建出古诺博弈系统的矩阵分析框架. 在系统设置方面, 消费者对产品的需求和生产者对产品的供给皆不再要求同质, 具体体现为: 每个生产者对其产品的最低意愿卖价不尽相同, 消费者对每个产品的最高意愿买价也不尽相同, 各品牌之间的替代程度亦不尽相同. 在系统求解方面, 导出了博弈过程的策略矩阵和博弈结果的均衡矩阵, 具体体现为: 博弈过程中系统反应的矩阵求解;

博弈结果里均衡产出系统的矩阵求解, 均衡价格系统的矩阵求解, 均衡利润系统的矩阵求解. 在系统分析方面, 放松经典模型过多苛刻的假设之后, 本模型较经典模型更具解释力和一般性, 经典模型成为本模型的特例, 具体体现为: 经典的古诺模型是本模型在产品完全可替代时的特例, 经典的市场分割模型则是本模型在产品完全不可替代时的特例. 在系统应用方面, 从商业智能实战的算法博弈论出发, 为参与古诺博弈的企业提供策略选择的矩阵算法; 从实证产业组织理论的博弈计量经济学出发, 为定量分析古诺博弈的研究人员提供估计市场结构参数的矩阵模型.

为切实做到解决古诺博弈在商业实战中的应用需求和在经济实证中的应用需求, 在此基础上的后续研究计划如下. 首先, 将本文古诺博弈矩阵分析框架转化为计算机软件: 企业古诺博弈决策支持系统. 随后, 设计古诺博弈的实验室实验 (Laboratory Experiment), 进行商业智能的沙盘演习, 用于优化本文的古诺博弈矩阵分析框架和据此研发的应用软件企业古诺博弈决策支持系统; 然后, 设计古诺博弈的实地实验 (Field Experiment), 进行商业智能的沙场演习, 用于调试本文的古诺博弈矩阵分析框架和据此研发的应用软件企业古诺博弈决策支持系统; 最后, 将软件系统部署到有古诺博弈需求企业的业务运营部, 供企业进行商业智能的实战应用.

参考文献

[1] Cournot A. Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses, 1838. English Edition: Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth, Edited by Bacon [M]. New York: Macmillan, 1897: 1-6.

[2] Fudenberg D, Tirole J. Game Theory [M]. Cambridge: MIT Press, 1991: 89-91.

[3] Mas-Colell, Whinston, Green. Microeconomic Theory [M]. Oxford: Oxford University Press, 1995: 212-214.

[4] Einy E, Haimanko O, Moreno D, et al. On the Existence of Bayesian Cournot Equilibrium [J]. Games and Economic Behavior, 2010, 68(1): 77-94.

[5] Nisan N, Roughgarden T. Algorithmic Game Theory [J]. Communications of the ACM, 2010, 53(7): 78-86.

[6] 徐齐利. 讨价还价博弈均衡出价策略的算法设计 [J]. 计算机工程与应用, 2020, 56(21): 170-175.

[7] Fiat A, Koutsoupias Elias, Ligett Katrina, et al. Beyond Myopic Best Response in Cournot Competition [J]. Games and Economic Behavior, 2019, 113(1): 38-57.

[8] Roy J, Silvers R, Sun C J. Majoritarian Preference, Utilitarian Welfare and Public Information in Cournot Oligopoly[J]. Games and Economic Behavior, 2019, 116(1): 269-288.

[9] Tirole J. The Theory of Industrial Organization [M]. Cambridge: MIT Press, 1991: 305-307.

[10] Bajari P, Hong H,. Identification and Estimation of a Discrete Game of Complete Information [J]. Economatrica, 2010, 78(5): 1529-1568.

[11] Bajari, 洪瀚, Denis, Nekipelov. 博弈计量经济学：基于近期研究的回顾 [J]. 南大商学评论, 2015(1): 73-111.

[12] 王文举, 王方军. 博弈计量经济模型研究 [J]. 首都经济贸易大学学报, 2014, 16(3): 108-113.

[13] 缪言, 韩猛, 白仲林. 结构计量经济学模型识别研究综述 [J]. 数量经济研究, 2017, 8(1): 43-58.

Matrix Analysis of Cournot Game: Perspective of Algorithmic Game Theory and Game Econometrics

XU Qi-li

(School of Economics, Jiangxi University of Finance and Economics, Nanchang 330013, China)

Abstract: For solving the application needs of Cournot game in business practice and economic empirical analysis, this paper constructs the matrix analysis framework of Cournot game system. In the aspect of system setup, the demand of consumers for products and the supply of products by producers are no longer required to be homogeneous. In the aspect of system solution, the strategy matrix of the game process and the equilibrium matrix of the game result are derived. In the aspect of system analysis, after relaxing the excessive and harsh assumptions of the classical model, this model is more explanatory and general than the classical model, and the classical model becomes a special case of this model. In the aspect of system application, this paper provides matrix algorithm of strategy selection for firms participating in Cournot game from the perspective of algorithm game theory of business intelligence; it provides matrix model to estimate market structure parameters for researchers of quantitative analysis of Cournot game from game econometrics of empirical industrial organization theory.

Keywords: cournot game; matrix analysis; algorithmic game theory; game econometrics; business intelligence