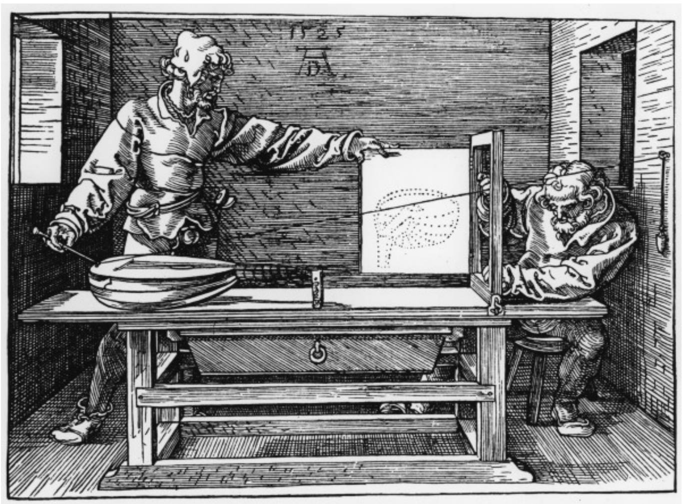
Számítógépes Grafika

Bán Róbert
robert.ban102+cg@gmail.com

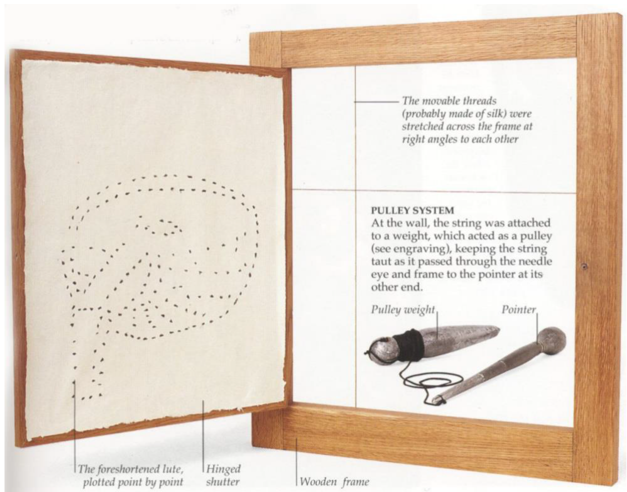
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

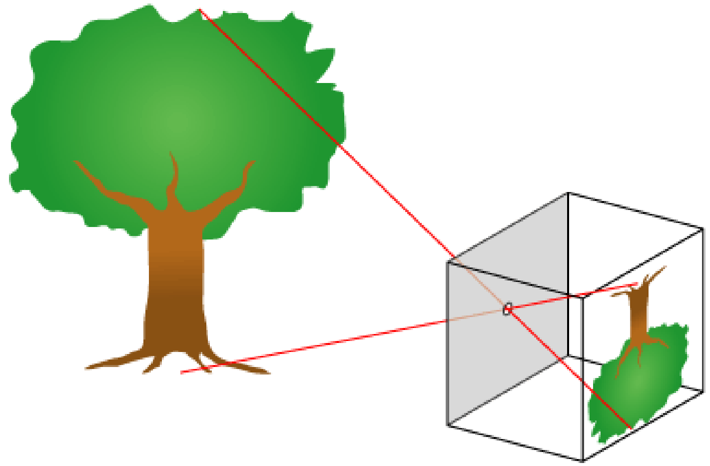
2022-2023. tavaszi félév

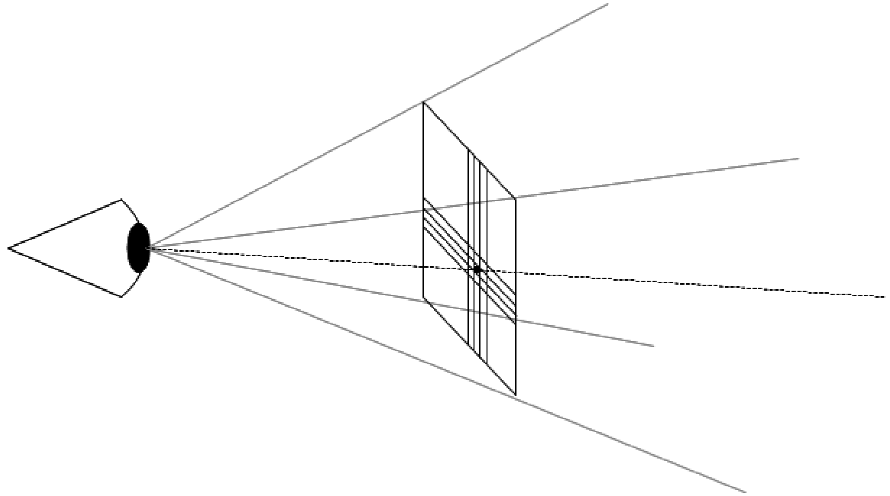
Tartalom



Albrecht Dürer, 1525







Motiváció

- Tekintsünk minden pixelre úgy, mint egy kis ablakra a világra
- Milyen színértéket vegyen fel ez a pixel? $\rightarrow$ Nézzük meg, mi látszik onnan a világból és az alapján rendeljünk hozzá a pixelhez egy színt!

Raycasting

```
Minden pixelre:
   Indítsunk egy sugarat a színtérbe

   Minden objektumra a színtérben:
      Nézzük meg, hogy metszi-e a sugár az objektumot

   A legközelebbi metszett objektum
   színével színezzük ki a pixelt
```

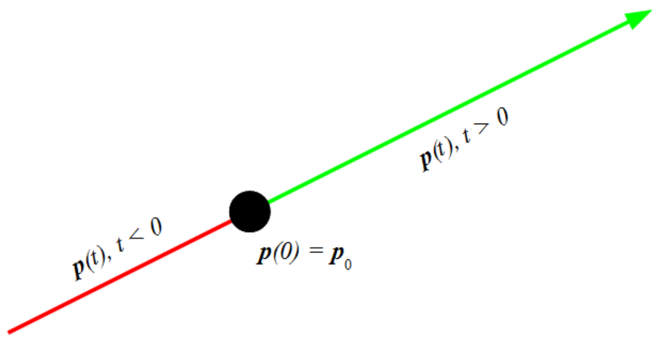
Sugár

- A sugárnak van
  - egy $\mathbf{p}_0$ kiindulási pontja
  - és egy $\mathbf{v}$ iránya
- A parametrikus sugár:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v},$$

  ahol $t > 0$ (félegyenes!).
- $t = 0$?, $t < 0$? sugár kezdőpontja, sugár mögötti részek

Sugár



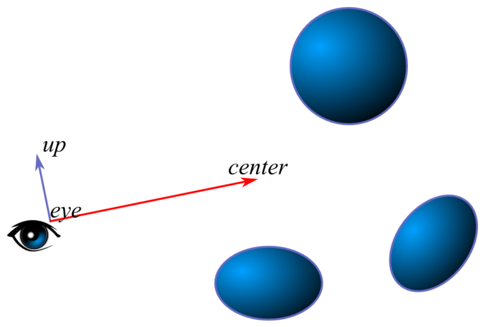
Kérdés

- Honnan indítsuk a sugarat?
- Milyen irányba küldjük a sugarat?
- Hogyan metsszük el a sugarat akármivel?

Sugarak indítása

- A szempozícióból indítunk sugarakat minden pixel középpontján keresztül
- Most: középpontosan szeretnénk vetíteni egy szembe, a vetítési sík egy négyszögletes részét megfeleltetve a képernyőnek
- Szem/kamera tulajdonságok:
  - szempozíció (**eye**),
  - egy pont amire néz (**center**),
  - felfele irányt megadó vektor a világban (**up**),
  - nyílásszög, amekkora szögtartományt lát (*fovx, fovy*).
  - (vetítővászon mérete. Most legyen adott: $2\tan\left(\frac{fovx}{2}\right) \times 2\tan\left(\frac{fovy}{2}\right)$ nagyságú)
- Ezek segítségével fogjuk megadni az (i, j) pixel világbeli koordinátáit

Kameratulajdonságok



Sugarak indítása

Keressük a kamera saját $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ (jobbkezes!) koordináta-rendszerét!

- Nézzen a kamera $-Z$ irányba!

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{eye} - \mathbf{center}}{|\mathbf{eye} - \mathbf{center}|}$$

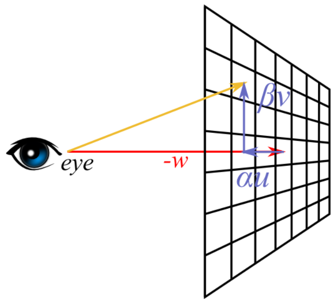
- Az X tengely legyen merőleges mind $\mathbf{w}$-re, mind az $\mathbf{up}$ irányra!

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{up} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{up} \times \mathbf{w}|}$$

- Az Y tengely merőleges $\mathbf{u}$-ra és $\mathbf{w}$-re is:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$$

(i, j) pixel koordinátái



- Legyen $\mathbf{p}$ az i, j pixel középpontja, a vetítősík egységnyi távolságra a nézőponttól! Ekkor

$$\mathbf{p}(i, j) = \mathbf{eye} + (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} - \mathbf{w}).$$

- Ahol

$$\alpha = \tan\left(\frac{fovx}{2}\right) \cdot \frac{i - width/2}{width/2},$$

$$\beta = \tan\left(\frac{fovy}{2}\right) \cdot \frac{height/2 - j}{height/2}.$$

A sugár egyenlete

- A sugár egy félegyenes, amit kezdőpontjával és irányvektorával adhatunk meg.
- Legyen $\mathbf{p}_0$ a sugár kezdőpontja, $\mathbf{v}$ pedig az irányvektora, ekkor

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \geq 0$$

megadja a sugár összes pontját.
- Most a sugarak kezdőpontját az előbbieknek megfelelően számoljuk, azaz $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(i, j)$
- A sugár irányvektora pedig $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}(i,j) - \mathbf{eye}}{|\mathbf{p}(i,j) - \mathbf{eye}|}$

Metszések

- A sugárkövető programok futásidejük döntő részében metszéseket fognak végezni
- Nézzük meg néhány egyszerű geometriai elemmel vett metszetét a sugárnak
- A sugarunk mindig a korábban is látott $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú, ahol feltesszük a továbbiakban, hogy $|\mathbf{v}| = 1$
- Ekkor a t sugárparaméter éppen a $\mathbf{p}(t)$ pont távolsága $\mathbf{p}_0$-tól!

Metszések: parametrikus sugár – implicit felület

- Legyen adva egy $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = 0$ implicit egyenlet, ami meghatározza a metszeni kívánt felületünket ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$)
- A sugarunk egyenlete $\forall t \in [0, \infty)$-re meghatároz egy pontot a térben $\rightarrow$ helyettesítsük be ezt a képletet az implicit egyenletbe!
- Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk t-re:

$$f(\mathbf{p}(t)) = 0$$

- A kapott t-től függően a következő esetek állhatnak fenn:
  - Ha $t > 0$, akkor a sugarunk előtt van a felület és metszi
  - Ha $t = 0$ a sugár kezdőpontja a felületen van
  - Ha $t < 0$, akkor a sugár „mögött" van a felület és metszi a sugár egyenese a felületet (de nekünk $t > 0$ kell!)

Metszések: parametrikus sugár – parametrikus felület

- Legyen adva egy $\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]^T$ parametrikus felület
- Kell: találni egy olyan t sugárparamétert, amihez létezik (u, v), hogy

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(u, v)$$

- Ez három ismeretlenes (t, u, v), három egyenletes $(x, y, z$ koordinátánként egy) egyenletrendszer
- A t ugyanúgy ellenőrizendő, mint előbb, de most az (u, v)-re is figyeljünk, hogy a felületünk paramétertartományának megengedett részén van-e (általában $(u, v) \in [0, 1]^2$ kell)!

Sugár és implicit sík metszéspontja

- Síkot megadhatunk implicit alakban: $Ax + By + Cz + D = 0$
- A

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

sugár egyenese metszi a síkot, ha

$$A(x_0 + tx) + B(y_0 + ty) + C(z_0 + tz) + D = 0$$

Sugár és implicit sík metszéspontja

- Ezt t-re átrendezve adódik

$$t(Ax + By + Cz) + x_0 + y_0 + z_0 + D = 0$$
$$t = -\frac{x_0 + y_0 + z_0 + D}{Ax + By + Cz}$$

- Látható a sík a nézőpontunkból, ha $t > 0$

Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Legyen $\mathbf{q}_0$ a sík egy pontja, $\mathbf{n}$ a normálvektora,
- Legyen $\mathbf{p}_0$ ez egyenes egy pontja, $\mathbf{v}$ az irányvektora.
- Az egyenes egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

- A sík egyenlete:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0$$

  – minden $\mathbf{q}$ pontja a síknak kielégíti ezt az egyenletet.

Sugár és normálvektoros sík metszéspontja

- Behelyettesítve $\mathbf{p}(t)$-t a $\mathbf{q}$ helyére:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle + t\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle = 0,$$

$$t = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle},$$

  ha $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$.
- A sugár metszi a síkot, ha: $t > 0$.
- Ha $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0$, akkor az egyenes párhuzamos a síkkal, és így vagy nincs metszéspontjuk, vagy az egyenes a síkon fut

Sugár és parametrikus sík metszéspontja

- Síkot megadhatunk egy $\mathbf{q}$ pontjával és $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ kifeszítő vektorokkal is: $\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{q} + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$
- Metszéspont a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ sugár egyenesével: keressük t és u, v-t úgy, hogy

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}(u, v)$$

- Beírva a képleteket adódik

$$\mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} = \mathbf{q} + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

- Átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{p}_0 - \mathbf{q} = -t\mathbf{v} + u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

Sugár és parametrikus sík metszéspontja

- Ez három ismeretlenes, három lineáris egyenletből álló egyenletrendszer, ami megoldható, ha $\mathbf{v}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ lineárisan nem összefüggő
- Mátrix alakban:

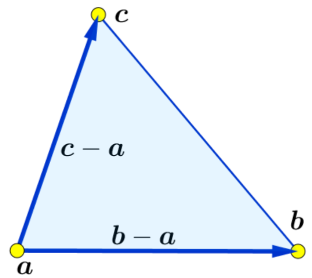
$$\begin{bmatrix} p_{0x} - q_x \\ p_{0y} - q_y \\ p_{0z} - q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_x & i_x & j_x \\ -v_y & i_y & j_y \\ -v_z & i_z & j_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

- Látjuk a síkot, ha $t > 0$ (most $u, v \in \mathbb{R}$ a felület paramétertartománya, ez teljesülni fog)

Sugár és háromszög metszéspontja I.

- A háromszög egyértelműen megadható három csúcsával.
- Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ a háromszög csúcsai, akkor a hozzátartozó sík egy parametrikus megadása

$$\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{a} + u(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + v(\mathbf{c} - \mathbf{a})$$



- A korábbi jelölésekkel: $\mathbf{q} = \mathbf{a}$, $\mathbf{i} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ és $\mathbf{j} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$.

Sugár és háromszög metszéspontja I.

- Ez egyben egy baricentrikus megadás is, hiszen átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{s}(u, v) = (1 - u - v)\mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c},$$

  ahol az együtthatók 1-re összegződnek.
- Elvégezve tehát a parametrikus síkkal a metszést, megkapjuk a baricentrikus koordinátáit a sugár síkkal való metszéspontjának. A sugárparamétert ne felejtsük el ellenőrizni!
- Utolsó lépésként ellenőriznünk kell, hogy a metszéspont a háromszögön belül van-e. Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$0 \le u, \;\; 0 \le v \;\text{ és }\; 0 \le 1 - u - v.$$

Sugár és háromszög metszéspontja II.

- A háromszög egyértelműen megadható három csúcsával.
- Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ a háromszög csúcsai, akkor a hozzátartozó sík pont-normálvektoros implicit megadásához a sík
  - egy pontja $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ bármelyike
  - normálvektora

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})}{\|(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})\|},$$

  ahol $\times$ a vektoriális szorzást jelöli, és ekkor $\mathbf{n}$ egységnyi hosszúságú.

Sugár és háromszög metszéspontja II.

- Először számítsuk ki az egyenes és a háromszög síkjának metszéspontját, ez legyen $\mathbf{p}$ (már ha létezik).
- Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a $\mathbf{p}$ pont $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$-re vonatkoztatott baricentrikus koordinátái, úgy hogy

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$$

- $\mathbf{p}$ Akkor, és csak akkor van a $\triangle$-ön belül, ha

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1.$$

Pont a háromszögön vizsgálat

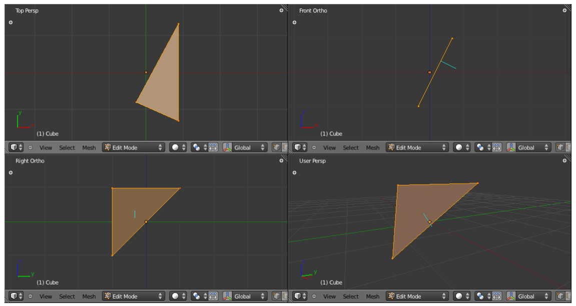
- Tudjuk, hogy $\mathbf{p} = [x, y, z]^T = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$. Ekkor

$$\begin{aligned} x =& \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x \\ y =& \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y \\ z =& \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z, \end{aligned}$$

  ill. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$
- A gyorsabb számolásért vegyük a fentinek egy síkra vett vetületét
- A koordinátasíkok közül (XY, XZ vagy YZ) arra vegyük a háromszög 2D vetületét, amelyre a háromszög vetületének területe a legnagyobb! $\rightarrow$ a háromszög és a sík normálisa leginkább „egyállású”
- A vetülethez egyszerűen elhagyjuk z, y vagy x egyenletét, megfelelően.

Pont a háromszögön vizsgálat

Azt tengely kell választani, amelyik mentén a legnagyobb a háromszög normálvektorának abszolút értéke.
(Így biztos nem fordulhat elő, hogy a háromszög merőleges a síkra, és csak egy szakasz marad belőle!)



Pont a háromszögön vizsgálat

- Pl. legyen a z a választott tengely. Ekkor

$$\begin{aligned} x =& \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x \\ y =& \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y \end{aligned}$$

- Behelyettesítve $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$-t, és rendezve:

$$\begin{aligned} x =& \lambda_1 (a_x - c_x) + \lambda_2 (b_x - c_x) + c_x \\ y =& \lambda_1 (a_y - c_y) + \lambda_2 (b_y - c_y) + c_y \end{aligned}$$

Pont a háromszögön vizsgálat

- Rendezve λ_1, λ_2-re kapjuk:

$$\lambda_1 = \frac{(b_y - c_y)(x - c_x) - (b_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$
$$\lambda_2 = \frac{-(a_y - c_y)(x - c_x) - (a_x - c_x)(y - c_y)}{(a_x - c_x)(b_y - c_y) - (b_x - c_x)(a_y - c_y)}$$

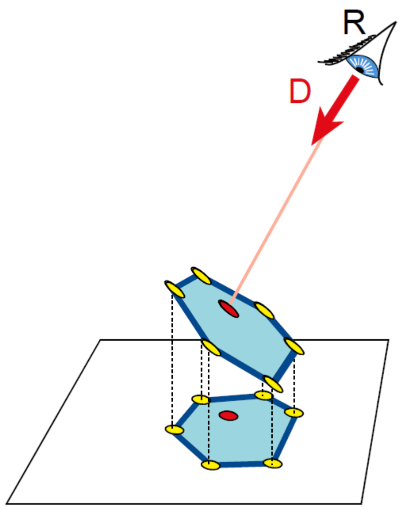
- A nevező csak degenerált háromszög esetén lehet nulla.
- **p** akkor és csak akkor van a háromszögön belül, ha

$$0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1.$$

Sugár metszése poligonnal

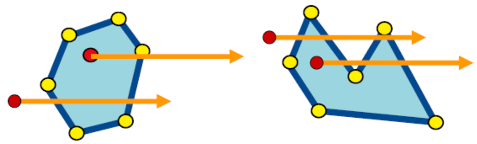
- Tegyük fel, hogy a poligonunk csúcsai egy síkban vannak, ekkor a metszés két lépésben
  - A sugarunkat metsszük el a poligon síkjával
  - Döntsük el, hogy a metszéspont a poligonon belül van-e
- A másodikat egy síkban érdemes csinálni (vagy a poligon síkjában, vagy a poligon valamely koordinátatengelyre vett vetületének síkjában)

Sugár metszése poligonnal



Pont-poligon tartalmazás teszt síkban

- A pont a poligonon belül van, ha tetszőleges irányú, belőle indított sugárnak páratlan számú metszéspontja van a poligon oldalaival (azaz a sugarat a poligon összes oldalszakaszával el kell metszeni)
- Konkáv és csillag alakú poligonra is működik



Sugár metszése szakasszal

- A poligon $\mathbf{d}_i = [x_i, y_i]^T, \mathbf{d}_{i+1} = [x_{i+1}, y_{i+1}]^T$ csúcspontjai közötti szakasz parametrikus alakja: $\mathbf{d}_{i,i+1}(s) = (1-s)\mathbf{d}_i + s\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + s(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i), s \in [0,1]$
- Ezt kell metszeni a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú sugárral
- Most: a $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$ pont az a pont, amiről el akarjuk dönteni, hogy a poligonon belül van-e, $\mathbf{v}$ tetszőleges
- Legyen $\mathbf{v} = (1,0)$!
- Így a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ egyenletet csak y koordinátára kell megoldani

Sugár metszése szakasszal

- Keressük meg, hogy hol metszi a $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$ oldal egyenese a sugarat (=melyik s-re lesz $d_{i,i+1}(s)_y = y_0$?)
- Azaz $y_0 = y_i + s(y_{i+1} - y_i)$
- s-t kifejezve: $s = \frac{y_0 - y_i}{y_{i+1} - y_i}$
- Innen megkapjuk azt az x koordinátát $\mathbf{d}_{i,i+1}(s)$-be behelyettesítve, ahol a sugár metszi a szakaszt
- Ha $s \notin [0,1]$: a sugár nem metszi a szakaszt (csak az egyenesét)
- Ha $t \leq 0$: a sugár egybeesik a szakasszal, vagy mögötte van a metszéspont

Sugár és gömb metszéspontja

- Az r sugarú, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ középpontú gömb implicit egyenlete:

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 - r^2 = 0$$

- Ugyanez skalárszorzattal felírva:

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{c}, \mathbf{p} - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0,$$

  ahol $\mathbf{p} = [x, y, z]^T$.

Sugár és gömb metszéspontja

- Legyen $\mathbf{p}_0$ ez egyenes egy pontja, $\mathbf{v}$ az irányvektora.
- Ekkor az egyenes egyenlete:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

- Behelyettesítve a gömb egyenletébe, kapjuk:

$$\langle \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

- Kifejtve:

$$t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2t \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c} \rangle - r^2 = 0$$

Sugár és gömb metszéspontja

$$t^2\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle + 2t\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle + \langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle - r^2 = 0$$

- Ez másodfokú egyenlet t-re (minden más ismert).
- Legyen $D = (2\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle)^2 - 4\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle(\langle \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}, \mathbf{p}_0 - \mathbf{c}\rangle - r^2)$
- Ha $D > 0$: két megoldás van, az egyenes metszi a gömböt.
- Ha $D = 0$: egy megoldás van, az egyenes érinti a gömböt.
- Ha $D < 0$: nincs valós megoldás, az egyenes nem metszi a gömböt.
- Sugárparamétert ezután ellenőrizni kell ($t > 0$).

Másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása

- Elméletileg a megoldás megkapható $a \neq 0$ esetben:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Gyakorlatilag baj van, ha $a \approx 0$
  - Átalakítással kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

formában felírható a két gyök (Citardauq Formula)

Másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása

- Elméletileg a megoldás megkapható $a \neq 0$ esetben:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Gyakorlatilag baj van, ha $b >> 4ac$
  - Ekkor $b^2 - 4ac \approx b^2$ (sőt!), vagyis b előjelétől függően vagy $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ vagy pedig $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$ elveszti az értékes tizedesjegyeket
  - Számítsuk ki az egyik gyököt azon az ágon, amelyiken nem vonunk ki egymásból két közel azonos pozitív számot, a másik gyököt pedig a Viète-formulákból
  - Azaz például ha $b > 0$, akkor $x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ és $x_2 = \frac{c}{ax_1}$

Sugár és transzformált objektumok metszése

- Legyen $\mathbf{M}$ egy adott objektum transzformációs mátrixa.
- Feladat: Keressük $\mathbf{r}$ sugár és az $\mathbf{M}$-mel transzformált objektum metszéspontját!
- Probléma: Hogyan transzformálunk egy gömböt? Pontonként? Képletet írjuk át? ...
- Megoldás: Transzformáljuk inkább a sugarat!

Sugár és transzformált objektumok metszése

Tétel

Az $\mathbf{r}$ sugár és az $\mathbf{M}$-mel transzformált objektum metszéspontja $\equiv$ az $\mathbf{M}^{-1}$-zel transzformált $\mathbf{r}$ sugár és az objektum metszéspontja.

- $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, homogén transzformáció
- Sugár kezdőpontja: $\mathbf{p}_0 = (p_x, p_y, p_z) \to [p_x, p_y, p_z, 1]^T$
- Sugár iránya: $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \to [v_x, v_y, v_z, 0]^T$. Így nem hat rá az eltolás.
- Transzformált sugár: $\widehat{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}_0 + t \cdot \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}$

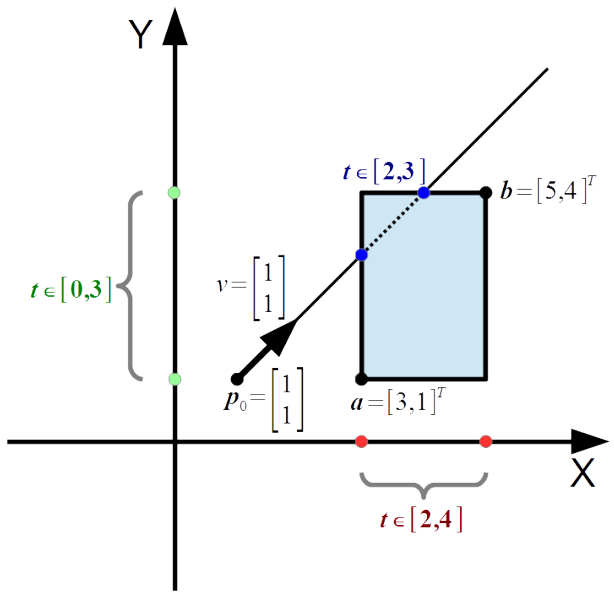
Sugár és transzformált objektumok metszése

- Metszésvizsgálat: használjuk $\widehat{\mathbf{r}}(t)$-t!
- Metszéspont: $\mathbf{q}$, akkor az eredeti térben $\mathbf{M} \cdot \mathbf{q}$.
- Távolságokat újra kell számolni az eredeti térben!
- Normálvektorok: $\mathbf{n}$ helyett $\mathbf{M}^{-T} \cdot \mathbf{n}$ (inverz-transzponált).

Sugár metszése AAB-vel

- AAB = axis aligned box, olyan téglatest, aminek az oldallapjai a koordinátasíkjainkkal párhuzamosak
- Legyen a sugarunk $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ alakú, ahol $\mathbf{p}_0 = [x_0, y_0, z_0]^T, \mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$a téglatestet pedig adjuk meg átlójának két pontjával, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ segítségével ($\mathbf{a} < \mathbf{b}$)!
- Tegyük fel, hogy a sugár kiindulópontja a doboztól balra helyezkedik el

Sugár metszése AAB-vel



Sugár metszése AAB-vel

- Legyen $t_{near} := -\infty, t_{far} := +\infty$
- Ha $v_x = 0$: merőleges az x-tengelyre (pl. 2D-ben függőleges). Ekkor nincs metszéspont, ha $x_0 \notin [a_x, b_x]$, különben az x-koordinátás számításokat kihagyhatjuk
- Ha $v_x \neq 0$, akkor legyen $t_1 := \frac{a_x - x_0}{v_x}, t_2 := \frac{b_x - x_0}{v_x}$
- Ha $t_1 > t_2$: cseréljük meg t_1, t_2-t!
- Ha $t_{near} < t_1$: $t_{near} := t_1$
- Ha $t_{far} > t_2$: $t_{far} := t_2$
- A fentit végezzük el az y és z koordinátákra is

Sugár metszése AAB-vel

- Ha $t_{near} > t_{far}$: nem találtuk el a dobozt
- Ha $t_{far} < 0$: a doboz mögöttünk van
- Minden más esetben a sugarunk metszéspontjai a dobozzal t_{near} és t_{far}-ban lesznek (sorban a közelebbi és távolabbi metszéspontok)