Számítógépes Grafika

Bán Róbert
robert.ban102+cg@gmail.com

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2022-2023. tavaszi félév

Tartalom

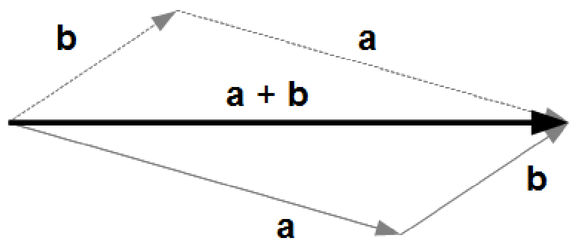
Modellezés feladata

- Hogyan írjuk le a virtuális világunkat?
  - A virtuális terünk egy-egy pontját miként adjuk meg, hogyan tároljuk a számítógépen?
    $\rightarrow$ Koordináta-rendszerek
  - Az egyszerű geometriai építőelemeket (egyenes, sík, háromszög stb.) hogyan adjuk meg?
    $\rightarrow$ Pontok halmaza
    $\rightarrow$ Leírás különböző koordináta-rendszerekben

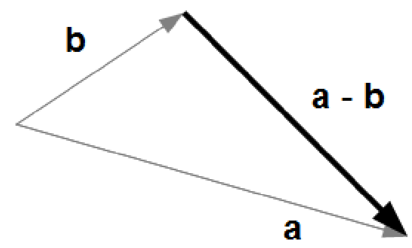
Pontok, vektorok

- Pont: az euklideszi sík/tér egy eleme, amelynek semmiféle kiterjedése sincs.
- Vektor:
  - algebrailag: egy vektortér eleme.
  - geometriailag: egy eltolás, aminek *iránya* és *hossza* van
  - értelmezve vannak rá további műveletek: összeadás, kivonás, skalárral szorzás, vektoriális szorzat (eredményük vektorok), skaláris szorzat (eredménye skalár)

Vektorok összeadása



Vektorok kivonása



Vektorok skaláris szorzata

Legyen adott két vektor, $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$ és $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$. Jelölje a skaláris szorzatukat $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, azaz legyen

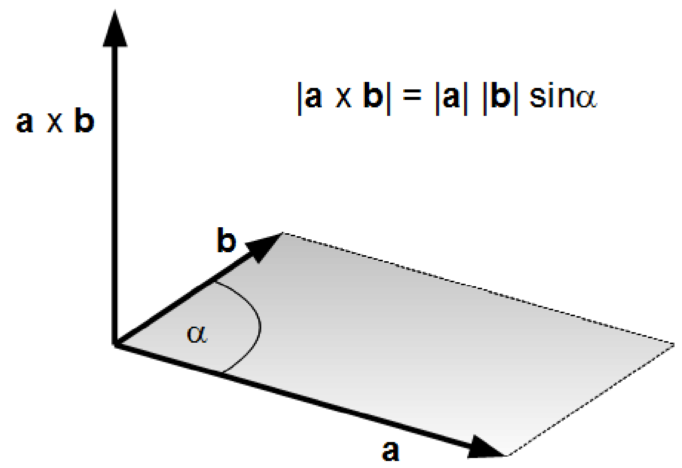
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Ez kifejezhető úgy is, hogy

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\alpha),$$

ahol α az **a** és **b** vektorok által bezárt szög.

Vektorok vektoriális szorzata



Vektorok vektoriális szorzata

A vektoriális szorzat determinánssal kifejezve:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

Pontok, vektorok

- Egy pont és egy vektor is a választott koordináta-rendszerbeli koordinátáinak megadásával definiálható. DE: figyeljünk az elvégezhető műveletekre!
- Műveletek pontok és vektorok között:
  - pont + vektor = pont   pont eltolása
  - pont − pont = vektor   különbségvektor
  - pont + pont   nincs értelmezve!

Pontok, vektorok

- A továbbiakban, ha két pontot veszünk, akkor feltesszük, hogy azok nem esnek egybe (tehát két *különböző* pontról beszélhetünk)
- Ugyanígy, három pontnál feltesszük, hogy nem esnek egy egyenesbe
- Ha egyeneseket, síkokat veszünk őket is különbözőnek tekintjük, illetve ha több síkot veszünk, azt is kizárjuk, hogy mind egyező állású legyen

Jelölés

- Pontok: $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^2, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3$, ...
- Vektorok: $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, \ldots$
  - spec.: $[\mathbf{v}]_0 \in \mathbb{R}^n$ olyan vektor, amely egység hosszú, azaz $|\,[\mathbf{v}]_0\,| = ||\,[\mathbf{v}]_0\,||_2 = 1$.
- Egyenesek: e, f, g, ...
- Síkok: S, ...
- Mátrixok: $M, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Koordináta-rendszer

- A tér pontjainak egyértelmű leírására szám n-esek segítségével
  pl.: $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{E}^3$
- Lehetővé teszi a pontok számítógépen való tárolását
- Lehetővé teszi az algebrai és analitikus eszköztár felhasználását geometriai problémák megoldására
- Egy, a problémához jól illeszkedő koordináta-rendszerben a probléma leírása egyszerűbb lehet

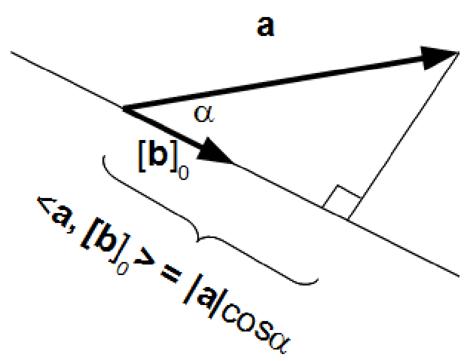
Descartes-féle, derékszögű koordináta-rendszer

- Descartes, 1637.: *értekezés a módszerről* (Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences)
- Legtöbbször ezzel találkozunk, ez a legegyszerűbb és legelterjedtebb megadási mód

Descartes koordináta-rendszer

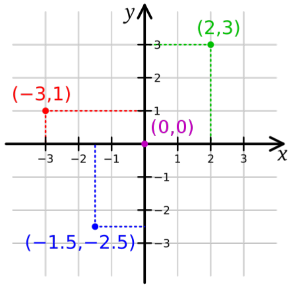
- Az euklidészi tér [sík] minden véges pontjához egyértelműen hozzárendel egy rendezett, valós (x, y, z) számhármast $[(x, y)$ számpárt].
- A térben derékszögű koordináta-rendszert határoz meg egy kezdőpont (origó, $\mathbf{o}$), és egy ortonormált bázis: három egymásra páronként merőleges egységvektor: $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ (utóbbiak az x, y, z tengelyek irányát adják meg).
- Ekkor egy $\mathbf{p}$ pont x, y, z koordinátái sorban az origóból a $\mathbf{p}$-be mutató vektor $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisvektorokra vett előjeles merőleges vetületével egyezik meg.
- *Emlékeztető*: az $\mathbf{a}$ vektor előjeles merőleges vetülete a $[\mathbf{b}]_0$ egységvektorra $\langle \mathbf{a}, [\mathbf{b}]_0 \rangle = |\mathbf{a}| \cos \angle(\mathbf{a}, [\mathbf{b}]_0)$

Előjeles merőleges vetület



Geometriai értelmezés

- *Szemléletesebben*: A $\mathbf{p}(a, b, c)$ az a pont, amit az origóból az x tengely mentén a egységet lépve, majd az y tengely mentén b egységet lépve, végül a z tengely mentén c egységet lépve kapunk.



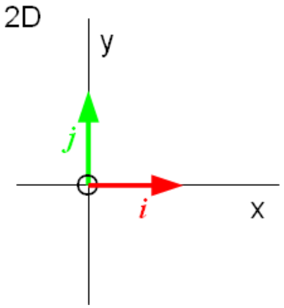
Geometriai értelmezés

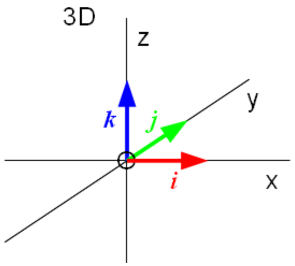
- Vagyis a fenti értelmezés szerint, felhasználva az egységnyi hosszú, koordinátatengelyek irányába mutató $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisvektorokat, az $[a, b, c]^T$ koordináták a következő pontot azonosítják:

$$\mathbf{p} = \mathbf{o} + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

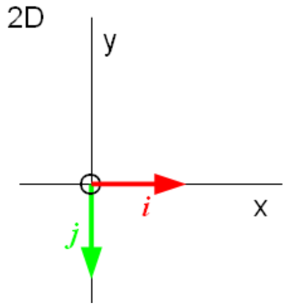
$$= \mathbf{o} + a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

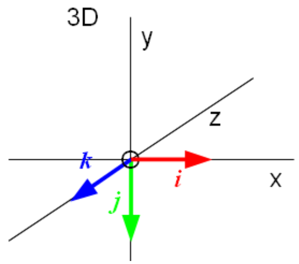
Sodrásirány – jobbsodrású rendszer



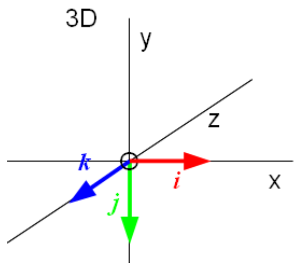


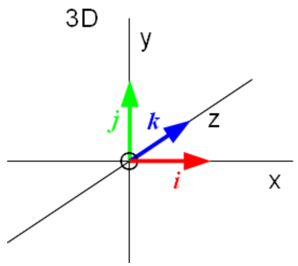
Sodrásirány – balsodrású rendszer





Sodrásirány – balsodrású rendszer



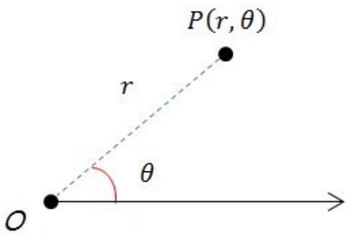


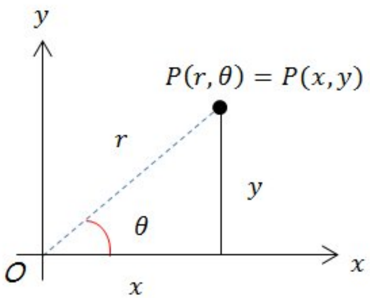
Koordináta-rendszer

- Két pont távolsága számítható: $d^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$
- Egyrészt ez: lemérendő távolság – a fenti pedig a háromszög oldalaira emelt négyzetek lemért területe
- Descartes-koordinátákkal: algebrai egyenlet, ami $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ismeretében kiszámítható
- $\rightarrow$ új alakzatok leírására is megnyílt a lehetőség
- Általánosan:
  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n : d = \sqrt{\langle \mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}$
- V.ö.: vektor hossza: $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{v}||_2 = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$

Síkbeli polárkoordináta-rendszer

- Egy **o** kezdőpont (referenciapont) és egy abból induló félegyenes (polártengely) határozza meg.
- Egy **p** pont helyét két adat azonosítja: (r, θ)
  - $r \geq 0$: a **p** pont **o**-tól vett távolsága
  - $\theta \in [0, 2\pi)$: az **o**-ból induló **p**-n átmenő félegyenes polártengellyel bezárt szöge





Konverziók

- Polár $\rightarrow$ Descartes: $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$
  - $x = r \cos \theta$
  - $y = r \sin \theta$
- Descartes $\rightarrow$ polár: $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$
  - $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
  -

$$\theta = \begin{cases} arctg(\frac{y}{x}), & x > 0 \wedge y \geq 0 \\ arctg(\frac{y}{x}) + 2\pi, & x > 0 \wedge y < 0 \\ arctg(\frac{y}{x}) + \pi, & x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0 \wedge y < 0 \end{cases}$$
$$= atan2(y, x)$$

Konverziók

- A fentiek teljesülnek, amennyiben a Descartes origó és a polár referenciapont, illetve a Descartes x-tengely és a polártengely megegyezik.
- De mi van, ha $x = 0, y = 0$? Ilyenkor $r = 0$ mellett tetszőleges szöggel visszakapjuk az origót! Nem egyértelmű a polár szög, az $r = 0$-át még azelőtt ellenőrizzük, hogy a fenti konverziós képleteket próbálnánk használni

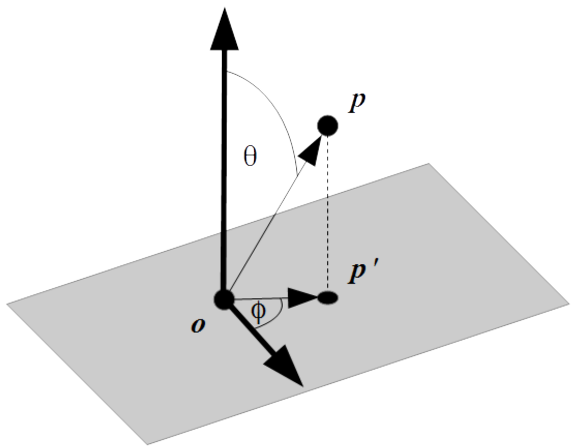
Megjegyzések

- Általában akkor használjuk, hogy az ábrázolni kívánt dolgokhoz jól illeszkedik, pl. körmozgás
- Hátrányai: egyik PKR-ből a másikba áttérni költséges, deriváltak számítása költséges, ...

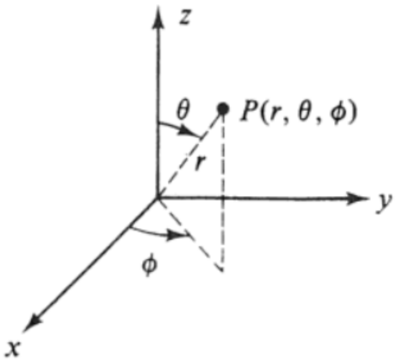
Gömbi koordináták

- Térbeli polár-koordináták; meghatározza egy alapsík (és annak PKR-e) illetve egy arra merőleges „Z tengely”
- Egy térbeli **p** pontot három adat reprezentál: (r, θ, ϕ)
  - (ϱ, ϕ): a **p** pont alapsíkra vett vetületének polárkoordinátái
  - $\theta \in [0, \pi]$: az **o**-ból kiinduló és **p**-n áthaladó félegyenes Z tengellyel bezárt szöge
  - r: a **p** pont és az origó távolsága (ha $r = 0$ akkor ismét bármi lehet a két polárszög! Konverziók előtt ezt ellenőrizni kell)

Gömbi koordináták



Gömbi koordináták



Konverziók

- A síkban látott esethez hasonló feltételek mellett:
- Gömbi → Descartes: $(r, \theta, \phi) \to (x, y, z)$

$$x = r \sin\theta \cos\phi,$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi,$$
$$z = r \cos\theta$$

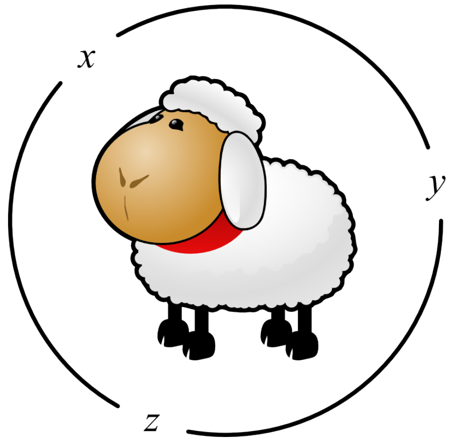
- Descartes → gömbi: $(x, y, z) \to (r, \theta, \phi)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\phi = atan2(y, x), \qquad r \neq 0$$
$$\theta = \arccos \frac{z}{r}, \qquad r \neq 0$$

Megjegyzés

- Hasznos például a földfelszín pontjainak azonosítására (de ott $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$).

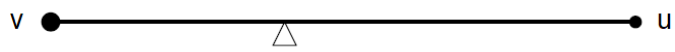
Baricentrikus koordináták – intuitív kép



Baricentrikus koordináták

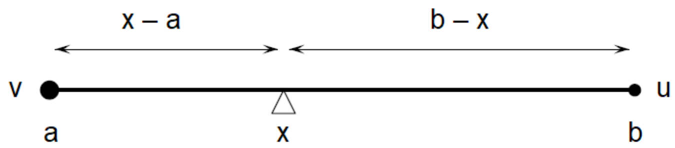
- August Ferdinand Möbius [1827]
- Motiváció: sokszor egy konkrét, véges része érdekes csak számunkra a térnek. Ennek a Descartes-félénél egy „kiegyensúlyozottabb” reprezentációját keressük.
- A baricentrikus koordináták nem függnek egy pont önkényes origónak választásától

Motiváció: intervallumok



Milyen u, v súlyokat helyezzünk a rúd végére, hogy kiegyensúlyozott legyen ha a háromszöggel jelzett pontnál emeljük fel?

Motiváció: intervallumok



- Akkor nem billen el, ha $(x-a)v = (b-x)u$, ahol x a háromszög pozíciója
- Az u, v-nek csak az arányát köti meg a fenti, tegyük fel a továbbiakban, hogy $u + v = 1$
- Ekkor a súlyok a következők kell, hogy legyenek:

$$u = \frac{x-a}{b-a}, v = \frac{b-x}{b-a}$$

Tömegközéppont

- Mechanikai analógia: pontrendszer tömegközéppontja
- Legyen a síkban 3 pontunk és helyezzünk minden $\mathbf{p}_i$ pontba $m_i \in \mathbb{R}$ súlyt. Ekkor a tömegközéppont:

$$\mathbf{m} = \sum_{i=0}^{2} \frac{m_i}{\sum_{i=0}^{n} m_i} \mathbf{p}_i$$

- *Homogén jellegű* megadás: egy $h \neq 0$ számmal megszorozva a súlyokat is ugyanazt a pontot kapjuk.

Baricentrikus koordináták

- Ha $\mathbb{E}^n$ -ben az $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$ pontok kifeszítik a teret (azaz nem esnek egy $n-1$ dimenziós altérbe), akkor a tér bármely $\mathbf{x}$ pontjához egyértelműen találhatóak $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ valós számok úgy, hogy

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i,$$

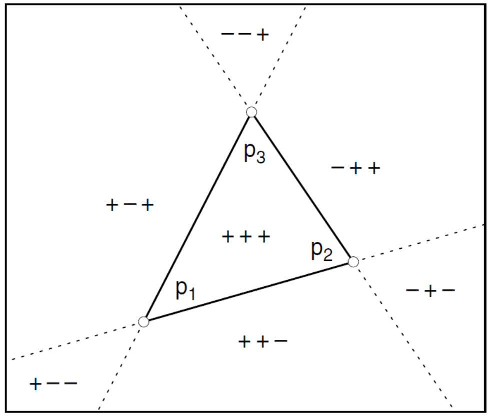
ahol a λ_i baricentrikus koordinátákra teljesül, hogy

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1.$$

Megjegyzés

- Síkban tehát 3 általános állású pont kell (olyanok, amelyek nem esnek sem egy egyenesbe, sem egy pontba), a térben 4 általános állású pont
- Ha $\forall i$-re $\lambda_i \geq 0$, akkor konvex kombinációról beszélünk és a pontok konvex burkába esnek a kombináció eredményei.
- Az affin transzformációk nem változtatják meg a baricentrikus koordinátákat (lásd később)

Síkbeli baricentrikus koordináta-rendszer



Baricentrikus → Descartes konverzió

- Legyenek (u, v, w) egy pont baricentrikus koordinátái a $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{p}_2 = (x_2, y_2), \mathbf{p}_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{E}^2$ általános állású pontokra vonatkoztatva.
- Ekkor az (u, v, w)-vel azonosított $\mathbf{x}(x, y)$ pont Descartes koordinátái $\mathbf{x} = u\mathbf{p}_1 + v\mathbf{p}_2 + w\mathbf{p}_3$, azaz

$$x = ux_1 + vx_2 + wx_3$$
$$y = uy_1 + vy_2 + wy_3$$

Síkbeli baricentrikus koordináta-rendszer

- Legyen $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \end{vmatrix}$, $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$
- A $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ mennyiség az $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ pontok által meghatározott háromszög előjeles területének duplája (pozitív, ha óra járásával ellentétes irányban adottak a csúcspontok, különben negatív)
- Ha $\mathbb{E}^3$-ban vagyunk: $\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \langle(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a}), \mathbf{n}\rangle$, ahol $\mathbf{n}$ a három pont síkjának egység hosszú normálisa.

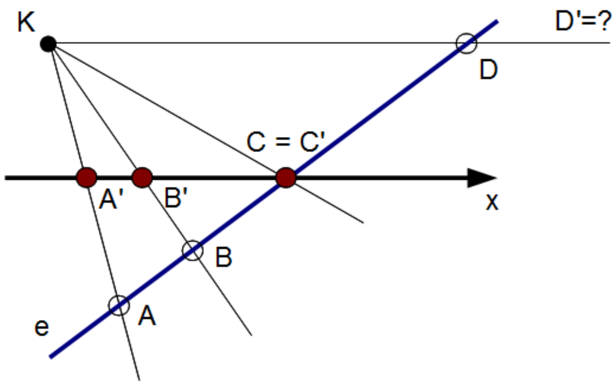
Descartes → baricentrikus konverzió

- Egy $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^2$ pont baricentrikus koordinátái a következők lesznek a $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{p}_2 = (x_2, y_2), \mathbf{p}_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{E}^2$ általános állású pontokra vonatkoztatva:

$$u = \frac{\Delta(\mathbf{x},\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3)}{\Delta(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3)}$$
$$v = \frac{\Delta(\mathbf{p}_1,\mathbf{x},\mathbf{p}_3)}{\Delta(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3)}$$
$$w = \frac{\Delta(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{x})}{\Delta(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3)}$$

Motiváció

- Vetítsük egy e egyenes pontjait az x tengelyre egy $\mathbf{k}$ pontból!



Motiváció

- A $\mathbf{d}'$ pont nincs az euklideszi síkon ($\mathbb{E}^2$), mivel a $\mathbf{k}$-n és $\mathbf{d}$-n áthaladó vetítősugár párhuzamos az x tengellyel
- Ötlet: bővítsük ki $\mathbb{E}^2$-t!
- → tekintsük „pontnak” az egyenesek egyező állását (irányát) is, azaz minden egyenesnek legyen még egy „pontja”
- Ez a pont az egyenes *ideális pontja*.

Definíció – ideális pont

- Egyenes = egyenes + 1 ideális pont úgy, hogy:
  - Párhuzamos egyenesek ideális pontja megegyezik („találkoznak a végtelenben")
  - Egy sík ideális pontjai egy egyenesen vannak, ez a *sík ideális egyenese*
  - Párhuzamos síkok ideális egyenese megegyezik
  - A tér ideális elemei (pontok, egyenesek) egy síkban vannak, ez a *tér ideális síkja*

Definíció és tulajdonságok – homogén tér

- Homogén sík: az $\mathbb{E}^2$ projektív lezárása, azaz $\mathbb{E}^2$ egy kitüntetett ideális egyenessel
  - Projektív síkban két pont meghatároz egy egyenest
  - Két egyenes meghatároz egy pontot (!)
  - ...
- Homogén tér: az $\mathbb{E}^3$ projektív lezárása, azaz $\mathbb{E}^3$ egy kitüntetett ideális síkkal
  - Három pont meghatároz egy síkot
  - Három sík meghatároz egy pontot (!)
  - (HF: igaz az, hogy *bármely* (tetszőleges) három sík meghatároz egy pontot a projektív térben, ami mind a három síkon rajta van? Milyen esetekben nem?)
  - ...

Homogén koordináták

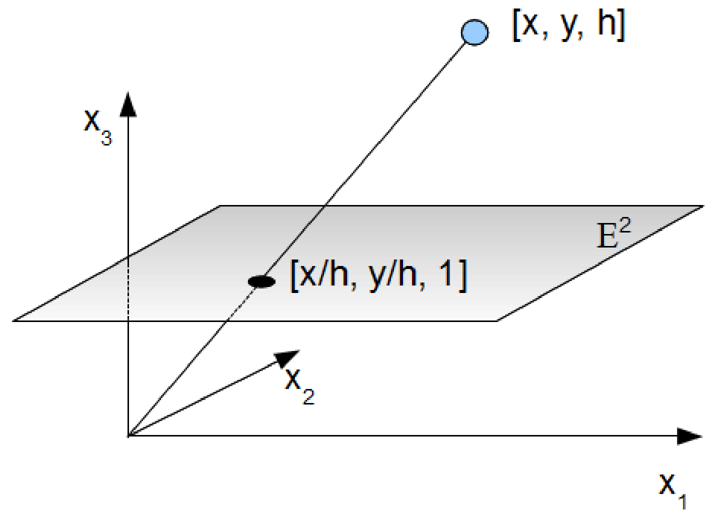
- Az euklideszi tér minden pontjához hozzárendelünk egy számnégyest, *homogén koordinátákat*:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(x,y,z) &\to [x,y,z,1]\\ &\approx h[x,y,z,1]\\ &= [hx,hy,hz,h],\ \ h\neq 0\end{aligned}$$

- az összes $\mathbf{v} = [x,y,z]^T$ vektorhoz pedig:

$$\begin{aligned}[x,y,z] &\to [x,y,z,0]\\ &\approx h[x,y,z,0]\\ &= [hx,hy,hz,0],\ \ h\neq 0\end{aligned}$$

$\mathbb{E}^2$ beágyazása $\mathbb{R}^3$-ba



Visszatérés Descartes koordináta-rendszerbe

- Mit ábrázol az $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ projektív térbeli elem?
  - Ha $x_4 \neq 0$, akkor egy közönséges pontról van szó, aminek koordinátái homogén (vagy projektív) osztás után

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] \approx \left[\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}, 1\right] = \mathbf{p}\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right)$$

  - Ha $x_4 = 0$, de $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$ (=nem mind nulla), akkor egy ideális pontról van szó, az $[x_1, x_2, x_3]$ vektorral egyező állású egyenesekhez rendeltről.
  - Ha $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, akkor nincs értelmezve.

Nevezetes homogén alakok

- Legyen $c \neq 0$ tetszőleges, nem nulla valós szám. Ekkor a következő néhány példa nevezetes pontokra:
  - $[0, 0, 0, c]$ az origó
  - $[c, 0, 0, 0]$ az x tengely ideális pontja
  - $[0, c, 0, 0]$ az y tengely ideális pontja
  - $[0, 0, c, 0]$ az z tengely ideális pontja

Tulajdonságok

- A projektív síkon a pont és az egyenes, a projektív térben a pont és a sík duális fogalmak
- Figyeljünk, hogy egyes tulajdonságok az euklideszi térből nem jönnek át:
  - Egy egyenes egy pontja nem osztja két részre az egyenest! De: két különböző pontja már két részre osztja
  - Egy síkot egy egyenese nem osztja két részre! De: két különböző állású egyenese már két részre osztja
  - Két pontot összekötő egyenes szakasz sem egyértelmű! (Az egyenes ideális pontja „összeragasztja” az egyenes két végét)

Motiváció

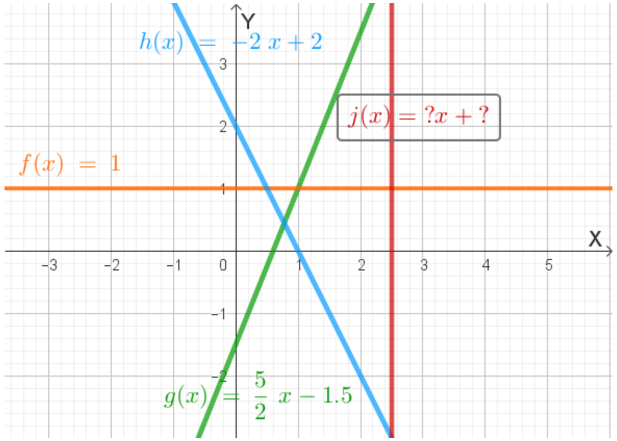
- Most már tudjuk a terünk pontjait több koordináta-rendszerben is reprezentálni
- Hogyan tudjuk az egyszerűbb dolgokat leírni, mint például az egyenes vagy a sík?
- Elsődlegesen a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben vizsgáljuk a fenti kérdést

Görbék, felületek

- Az görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
  - explicit: $y = f(x), x \in \mathbb{R} \rightarrow$ mi van ha vissza akarjuk „fordítani”?
  - parametrikus: $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$
  - implicit: $f(x, y) = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Egyenes megadása

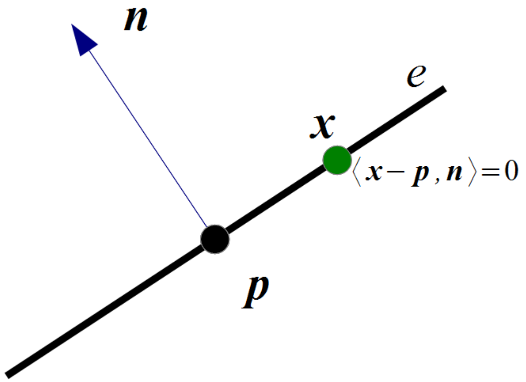
- Középiskolában: $y = mx + b$
- Probléma: mi legyen a függőleges egyenesekkel?



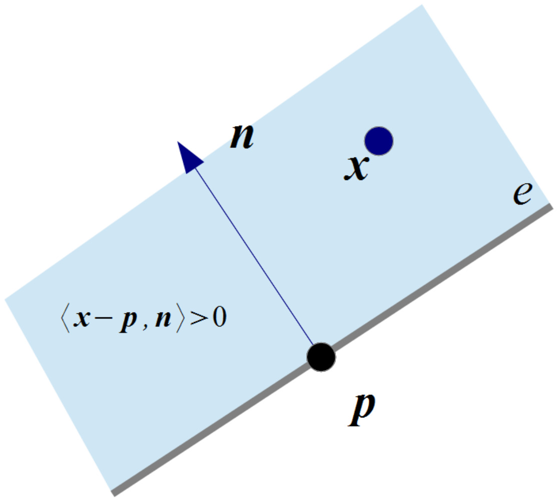
Az egyenes normálvektoros egyenlete a síkban

- Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y)$ pontjával és egy, az egyenes irányára merőleges $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T \neq \mathbf{0}$ normálvektorral:
- Az egyenes pontjai azon $\mathbf{x}(x, y)$ pontok, amelyek kielégítik a
$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$
$$(x - p_x)n_x + (y - p_y)n_y = 0$$
egyenletet.
- Az $\langle \mathbf{x}' - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle < 0$ és $\langle \mathbf{x}' - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle > 0$ az egyenesünk által meghatározott két félsík pontjainak jellemzése.

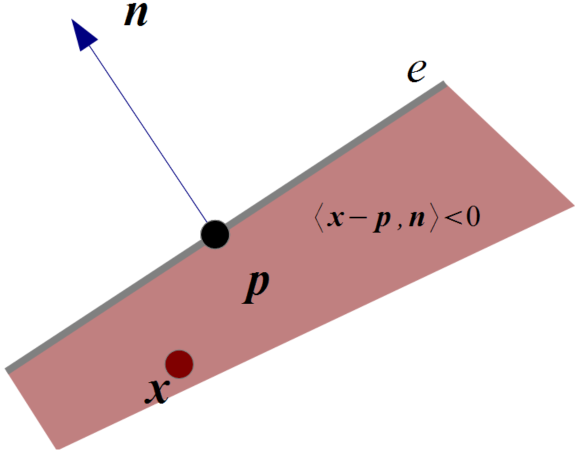
Az egyenes által meghatározott két félsík



Az egyenes által meghatározott két félsík



Az egyenes által meghatározott két félsík



Az egyenes homogén, implicit egyenlete a síkban

- Az $ax + by + c = 0$ alakot hívjuk az egyenes implicit egyenletének.
- A fentiek alapján $a = n_x$, $b = n_y$ és $c = -(p_x n_x + p_y n_y)$, $a^2 + b^2 \neq 0$ választással a $\mathbf{p}$ ponton átmenő, $\mathbf{n}$ normálisú egyenes implicit egyenletét kapjuk.
- Ha $a^2 + b^2 = 1$, akkor *Hesse-féle normalizált alakról* beszélünk – ekkor a korábbi normálvektor egység hosszúságú

A homogén egyenlet determináns alakja

- Ha az egyenesünket két, $\mathbf{p}(p_x, p_y)$, $\mathbf{q}(q_x, q_y)$ pontjával adjuk meg, akkor azon $\mathbf{x}(x, y)$ pontok fekszenek az egyenesen, amelyekre
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p_x & p_y & 1 \\ q_x & q_y & 1 \end{vmatrix} = 0$$
- Megjegyzés: a fenti determináns az $\mathbf{x}(x, y)$, $\mathbf{p}(p_x, p_y)$, $\mathbf{q}(q_x, q_y)$ pontok által meghatározott háromszög előjeles területe (pontosabban a duplája), ami $=0 \equiv$ a három pont egy egyenesbe esik

Egyenes parametrikus egyenlete – irányvektorral (2D, 3D)

- Az egyenes megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ pontjával és egy, az egyenes irányával megegyező irány $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T \neq \mathbf{0}$ irányvektorral:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \mathbf{p} + t\mathbf{v} = \begin{bmatrix} p_x + tv_x \\ p_y + tv_y \\ p_z + tv_z \end{bmatrix} \rightarrow \\
x(t) &= p_x + tv_x \\
y(t) &= p_y + tv_y \\
z(t) &= p_z + tv_z
\end{aligned}$$

Egyenes parametrikus egyenlete – két ponttal (2D, 3D)

- Ekkor $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ pontjait ismerjük az egyenesnek. Az előbbi esethez jutunk, ha $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ választással élünk:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \mathbf{p} + t\mathbf{v} \rightarrow \\
\mathbf{x}(t) &= (1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q} \rightarrow \\
x(t) &= (1-t)p_x + tq_x \\
y(t) &= (1-t)p_y + tq_y \\
z(t) &= (1-t)p_z + tq_z
\end{aligned}$$

Homogén koordinátás alak

- A kibővített (projektív) sík egy egyenese megadható az $\mathbf{e} = [e1, e2, e3]$ valós számhármassal, úgynevezett *vonalkoordinátákkal*, amelyek felhasználásával az egyenes minden $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ pontjára

$$\mathbf{ex} = e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 = 0$$

- Az sík minden $[x_1, x_2, 0]$ ideális pontjára illeszkedő ideális egyenes vonalkoordinátái $[0, 0, 1]$.

Az egyenes polár koordinátás alakja

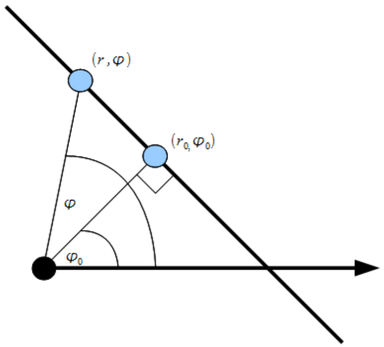
- Az origón áthaladó, a polártengellyel θ szöget bezáró irányú egyenesek polárkoordinátás (implicit) egyenlete:

$$\phi = \theta$$

- Ha az egyenesünk nem halad át az origón, akkor legyen (r_0, ϕ_0) a metszéspontja az egyenesünknek és egy arra merőleges, origón áthaladó egyenesnek. Ekkor az egyenesünk polárkoordinátái közül a sugár a polárszög függvényeként felírható a következő alakban:

$$r(\phi) = \frac{r_0}{\cos(\phi - \phi_0)}$$

Az egyenes polár koordinátás alakja



A sík normálvektoros egyenlete

- A sík megadható egy $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ pontjával és a síkra merőleges $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$ normálvektorával. Ekkor a sík minden $\mathbf{x}$ pontjára:

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

- Félterek: $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle < 0$, $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle > 0$

Az sík homogén, implicit egyenlete

- A sík implicit egyenletének alakja $ax + by + cz + d = 0$
- Előbbiből $a = n_x$, $b = n_y$, $c = n_z$ és $d = -n_x p_x - n_y p_y - n_z p_z$ választással a $\mathbf{p}$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}$ normálvektorú sík egyenletét kapjuk
- Hesse normál-alak itt is, ha $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

A homogén egyenlet determináns alakja

- Determináns segítségével is megadhatjuk a sík egyenletét, a következő determináns csak $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$, $\mathbf{q}(q_x, q_y, q_z)$, $\mathbf{r}(r_x, r_y, r_z)$ pontok által kifeszített sík X pontjaira lesz nulla:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ p_x & p_y & p_z & 1 \\ q_x & q_y & q_z & 1 \\ r_x & r_y & r_z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A sík parametrikus egyenlete – kifeszítő vektorokkal

- A sík jellemezhető egy pontjával és két kifeszítő vektorával (bázisvektorával):
$$\mathbf{x}(s,t) = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$
ahol $s, t \in \mathbb{R}$.

A sík parametrikus egyenlete – három pontból

- A síkot meghatározza három, nem egy egyenesbe eső pontja, $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$. Ekkor a sík minden véges $\mathbf{x}$ pontja megkapható
$$\mathbf{x}(s,t) = \mathbf{p} + s(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + t(\mathbf{r} - \mathbf{p})$$
alakban, ahol $s, t \in \mathbb{R}$.
- Az előbbiből is kaphatjuk ezt $\mathbf{u} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$, $\mathbf{v} = \mathbf{r} - \mathbf{p}$
- Ez egy baricentrikus megadás:
$$\mathbf{x}(s,t) = (1 - s - t)\mathbf{p} + s\mathbf{q} + t\mathbf{r}$$
hiszen $(1 - s - t) + s + t = 1$

Homogén koordinátás alak

- A kibővített tér egy síkja is megadható „síkkoordinátákkal”, egy olyan $\mathbf{s} = [s_1, s_2, s_3, s_4]$ négyessel, amely a sík minden $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ pontjára
$$\mathbf{s}\mathbf{x} = s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 + s_4x_4 = 0$$

Nevezetes homogén alakú síkok

- $[0, 0, 0, c]$ az ideális sík
- $[c, 0, 0, 0]$ az YZ koordinátasík
- $[0, c, 0, 0]$ az XZ koordinátasík
- $[0, 0, c, 0]$ az XY koordinátasík