Számítógépes Grafika

Bán Róbert
robert.ban102+cg@gmail.com

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2022-2023. tavaszi félév

Tartalom

Görbék, felületek leírása

- Az görbéket, felületeket (amik közé az egyenes és a sík is tartozik) egy-egy ponthalmaznak tekintjük.
- Hogyan adjuk meg ezeket a halmazokat?
  - explicit: $y = f(x) \quad \to \quad \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f\}$
  - parametrikus: $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \quad \to \quad \{\mathbf{p}(t) \mid t \in \mathcal{D}_\mathbf{p}\}$
  - implicit: $f(x, y) = 0 \quad \to \quad \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$
- De hogyan tudjuk ezeket kirajzolni?

Görbék transzformációja

Hogyan transzformálunk görbéket a különböző megadási módokban?

- Explicit
  - Függőleges eltolás és nyújtás: a függvényérték módosítása $\to y = a \cdot f(x) + b$
  - Vízszintes eltolás és nyújtás: a paraméter módosítása $\to y = f(\frac{x}{c} - d)$
- Parametrikus: az eredménypont transzformációja $\to A \cdot \mathbf{p}(t)$
- Implicit: a paraméter transzformációja az inverzzel $\to f(A^{-1} \cdot \mathbf{x}) = 0$

Parabola

- Az y tengelyű, $(0, p)$ fókuszpontú parabola egy
  - Implicit egyenlete: $x^2 = 4py$
  - Explicit egyenlete: $y = \frac{x^2}{4p}$, $x \in \mathbb{R}$
  - Parametrikus egyenlete: $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} t \\ \frac{t^2}{4p} \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

Parabola

- Mi van, ha a $\mathbf{c}$ pontba akarjuk eltolni az origóból a parabolát?
- Az implicit és explicit alakban be kell vinni a (c_x, c_y) koordinátákat (pl. implicitből $(x - c_x)^2 = 4p(y - c_y)$ lesz)
- Parametrikus alakban egyszerűen $\mathbf{p}(t) + \mathbf{c}$ lesz az új alak.

Kör

- A $\mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$ középpontú, r sugarú kör egy
  - Implicit egyenlete: $(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = r^2$
  - Explicit alakban nem tudjuk az egész kört leírni egy függvénnyel (DE két darabban menne, pl. $\mathbf{c} = \mathbf{0}, r = 1$ mellett $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, ahol $x \in [-1, 1]$)
  - Parametrikus egyenlete: $\mathbf{p}(t) = r \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + \mathbf{c}$, ahol $t \in [0, 2\pi)$

Ellipszis

- A $\mathbf{c} \in \mathbb{E}^2$ középpontú, nagytengelyével az x tengellyel párhuzamos, $2a$ nagytengelyű és $2b$ kistengelyű ellipszis egy
  - Implicit egyenlete: $\frac{(x-c_x)^2}{a^2} + \frac{(y-c_y)^2}{b^2} = 1$
  - Explicit alakban ugyanaz a probléma, mint a körnél (lásd előbb)
  - Parametrikus egyenlete: $\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{bmatrix} + \mathbf{c}$, ahol $t \in [0, 2\pi)$

Ellipszis

- De mi van, ha nem akarjuk, hogy x, y tengellyel párhuzamosak legyenek a tengelyeink?
  - Implicit egyenlet: ez munkás(nak tűnik és habár nem az, de), nekünk most nem kell...
  - Parametrikus egyenlete: báziscsere! Ha az új tengelyek $\mathbf{k}, \mathbf{l}$, akkor $\mathbf{p}(t) = a\cos t \cdot \mathbf{k} + b \sin t \cdot \mathbf{l} + \mathbf{c}$, ahol $t \in [0, 2\pi)$

Szakasz

- Legyen adott két pont, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3$. A két ponton átmenő egyenes parametrikus egyenlete:

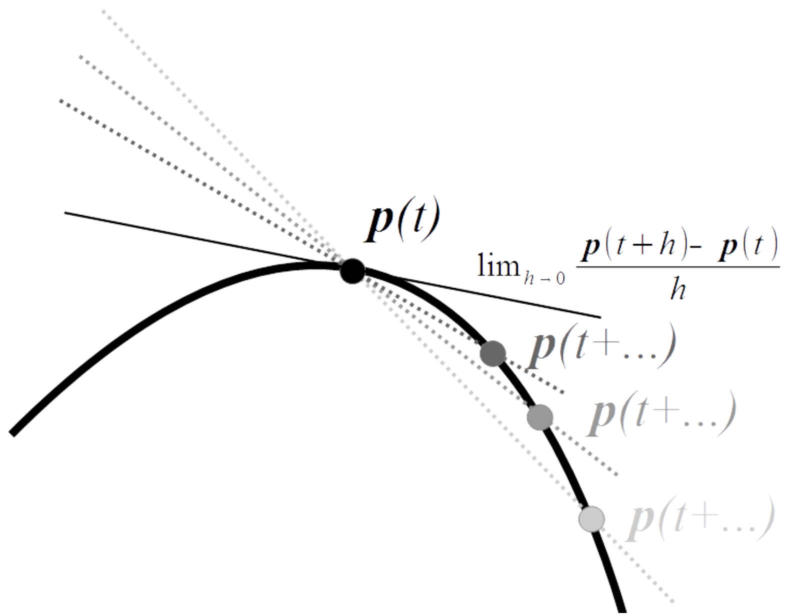
$$\mathbf{p}(t) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b},$$

  ahol $t \in \mathbb{R}$.
- Ha $t \in [0, 1]$, akkor az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ pontokat összekötő egyenes szakaszt kapjuk.

Görbék parametrikus alakja

- Deriváltak: $\mathbf{p}^{(i)}(t) = \begin{bmatrix} x^{(i)}(t) \\ y^{(i)}(t) \end{bmatrix}$, $t \in [\ldots]$, $i = 0, 1, 2, \ldots$
- Ha a görbét egy mozgó pont pályájának tekintjük, akkor az első derivált a sebességnek tekinthető, a második a gyorsulásnak stb.

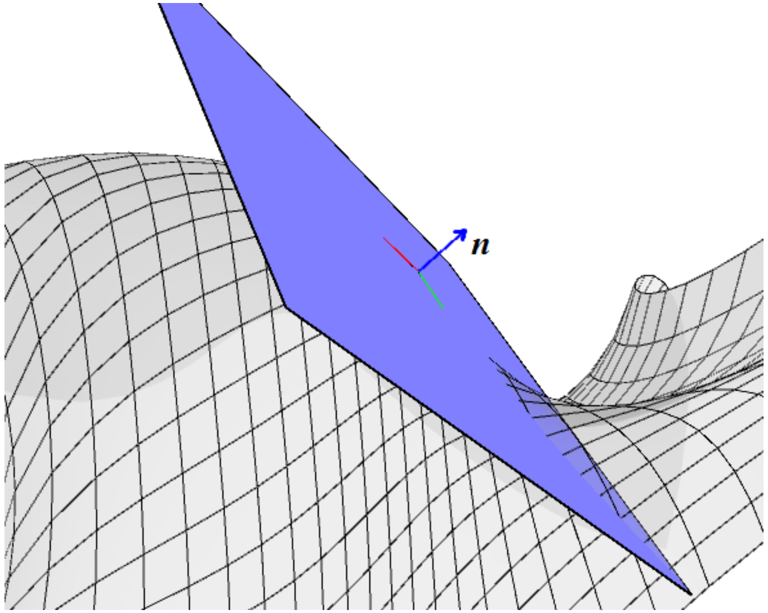
Görbe érintőegyenese



Felületek megadása

- Explicit: $z = f(x, y) \quad \rightarrow \quad \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f\}$
- Implicit: $f(x, y, z) = 0 \quad \rightarrow \quad \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_f \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$
- Parametrikus: $\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$, $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$
  $\rightarrow \quad \{\mathbf{p}(u, v) \mid (u, v) \in \mathcal{D}_\mathbf{p}\}$
- Hogyan rajzoljuk ki őket?

Felületek felületi normálisa



Felületek felületi normálisa

- A felület érintősíkjának normálisa
- Ha parametrikus alakban adott a felület:
  $\mathbf{n}(u, v) = \partial_u \mathbf{p}(u, v) \times \partial_v \mathbf{p}(u, v)$
- Implicit alakban adott felületnél $\mathbf{n}(x, y, z) = \nabla f$, ahol
  $\nabla f = [f_x, f_y, f_z]^T$

Gömb

- Implicit: $(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 = r^2$
- Parametrikus:

$$\mathbf{p}(u, v) = r \begin{bmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{bmatrix} + \mathbf{c},$$

$(u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi]$

Ellipszoid

- Implicit: $\frac{(x-c_x)^2}{a^2} + \frac{(y-c_y)^2}{b^2} + \frac{(z-c_z)^2}{c^2} = 1$
- Parametrikus: $\mathbf{p}(u,v) = \begin{bmatrix} a\cos u \sin v \\ b \sin u \sin v \\ c \cos v \end{bmatrix} + \mathbf{c}$, $(u,v) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi]$

Egy egyszerű paraboloid

- Parametrikus: $\mathbf{p}(u,v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ au^2 + bv^2 \end{bmatrix} + \mathbf{c}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

Amire figyelni érdemes

- Matematikában általában a felfelé mutató tengelynek a z tengelyt tekintik
- A fenti képletek is ennek megfelelően adják a „várt” képet
- Grafikában viszont sokszor az y mutat felfelé!

Jelölések

- $\mathbf{l}$ a megvilágító, a fényt „adó” pont felé mutató vektor, ekkor a beesési irány $-\mathbf{l}$
- $\mathbf{n}$ a felületi normális
- $\mathbf{v}, \mathbf{l}, \mathbf{n}$ egységvektorok
- θ' az $\mathbf{l}$ és az $\mathbf{n}$ által bezárt szög

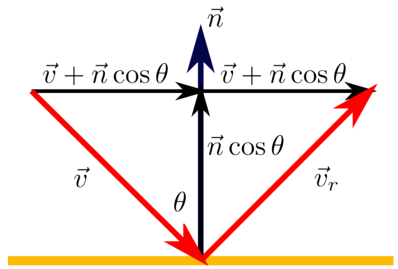
Ideális visszaverődés

Visszaverődési törvény

A beesési irány $(-\mathbf{l})$, a felületi normális $(\mathbf{n})$, és a kilépési irány $(\mathbf{r})$ egy síkban van, valamint a beesési szög (θ') megegyezik a visszaverődési szöggel (θ).

Visszaverődési irány

- Általános esetben, egy $\mathbf{v}$ beeső vektorból a visszaverődési- vagy tükörirány:
- $\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})$
- Mivel $\cos\theta = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$, és $\mathbf{n}$, $\mathbf{v}$ egységnyi hosszúak.



Ideális törés

Snellius-Descartes törvény

A beesési irány $(-\mathbf{l})$, a felületi normális $(\mathbf{n})$, és a törési irány $(\mathbf{t})$ egy síkban van, valamint $\eta = \frac{\sin\theta'}{\sin\theta}$, ahol η az anyagok relatív törésmutatója.

Néhány törésmutató

- Vákuum 1.0
- Levegő 1.0003
- Víz 1.3333
- Üveg 1.5
- Gyémánt 2.417

Törési irány

- Snellius-Descartes törvény: $\eta = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$
- $\mathbf{v}_t = \mathbf{n}_\perp \sin\beta - \mathbf{n}\cos\beta$
- $\mathbf{n}_\perp = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{n}\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\mathbf{v}_t = \frac{\mathbf{v}}{\eta} + \mathbf{n}\left(\frac{\cos\alpha}{\eta} - \cos\beta\right)$
- $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\eta^2}}$
- $$\mathbf{v}_t = \frac{\mathbf{v}}{\eta} + \mathbf{n}\left(\frac{\cos\alpha}{\eta} - \sqrt{1 - \frac{1 - \cos^2\alpha}{\eta^2}}\right)$$