Számítógépes Grafika

Bán Róbert
robert.ban102+cg@gmail.com

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

2022-2023. tavaszi félév

Tartalom

Motiváció

Transzformációk
- Transzformációk általában

Nevezetes affin transzformációk
- Eltolás
- Forgatás
- Méretezés
- Nyírás
- Áttérés új koordináta-rendszerre
- Áttekintés

Projektív transzformáció

Összegzés

Motiváció

- A virtuális világunkban található összetett alakzatokat (ház, fa stb.) több, kisebb építőelemből is összerakhatjuk (ajtó, ablak, levelek...) $\rightarrow$ az alakzat részeit el kell helyeznünk a térben
- Az alakzatokat el kell helyeznünk a világban, mozgatnunk kell őket stb.
- A virtuális világunkból egy kétdimenziós képet is elő kell állítanunk
- $\rightarrow$ A fenti lépésekhez mind szükségünk lesz *geometriai transzformációkra*, amelyekkel az alakzatainkat megváltoztathatjuk

Transzformációk

- Az elvárásaink
  - minden pontot lehessen transzformálni
  - pont képe legyen pont, egyenes képe egyenes, sík képe sík
  - illeszkedést tartsa
  - legyen egyértelmű és egyértelműen megfordítható

Megjegyzés

- A pontjainkat a számítógépen valamilyen koordináta-rendszerben tároljuk $\rightarrow$ a transzformációk ezeken a koordinátákon végzett műveletek
- A továbbiakban azonosítsuk az Euklideszi tér, $\mathbb{E}^3$ (vagy sík, $\mathbb{E}^2$) elemeit a $\mathbb{R}^3$ (vagy $\mathbb{R}^2$) valós vektorterünk elemeivel
- Ehhez rögzítünk egy $\mathbf{O} \in \mathbb{E}^3$ pontot, origót, és minden $\mathbf{q} \in \mathbb{E}^3$ ponthoz a $\mathbf{p} = \mathbf{q} - \mathbf{O}$ vektort rendeljük

Lineáris leképezések

- Kiemelt jelentősége lesz a *lineáris leképezéseknek*, azaz azon ϕ leképezéseknek, amelyekre teljesül, hogy $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén
  - $\phi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \phi(\mathbf{a}) + \phi(\mathbf{b})$ (additív)
  - $\phi(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \phi(\mathbf{a})$ (homogén)
- Emlékeztető: az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezéseket egy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixszal fel tudjuk írni; ekkor $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Projektív és affin transzformációk – definíciók

- Az ideális síkkal kibővített euklideszi tér önmagára való, kölcsönösen egyértelmű, pont-, egyenes-, sík-, és illeszkedést tartó leképezéseit *kollineációknak*, vagy *projektív transzformációknak* nevezzük.
- Affin transzformációk a projektív transzformációknak az az alcsoportja, amelyek a (kibővített) tér „közönséges”, euklideszi részét önmagára képezik le, és az ideális síkot is önmagára képezi le.

Tulajdonságok

- A projektív és affin transzformációk algebrai csoportot alkotnak a konkatenáció (transzformációk kompozíciója) műveletével $\rightarrow$ ez mit jelent?
  - a konkatenáció asszociatív (a műveletek csoportosíthatók)
  - létezik egységelem (egységtranszformáció)
  - a dimenziótartó transzformációknak van inverze (vissza lehet csinálni)
- Figyeljünk: a csoport nem kommutatív!

Affin transzformációk tulajdonságai

- Az affin transzformációk megadhatóak egy lineáris transzformáció és egy eltolás segítségével, azaz ha $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ affin transzformáció, akkor létezik $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, hogy $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$-ra

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

- A mátrix-vektor szorzást ilyen sorrendben végezzük el, azaz: a mátrix a bal-, a vektor a jobboldalon áll

Affin transzformációk tulajdonságai

- A $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ megadás homogén koordináták segítségével egyetlen mátrix-vektor szorzással is felírható:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ [0,0,0] & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

- Ugyanis ekkor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ [0,0,0] & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{b}\cdot 1 \\ \mathbf{0}\cdot\mathbf{x} + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{b} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Affin transzformációk tulajdonságai

- Az affin transzformációk a baricentrikus koordinátákat érvényben hagyják (más szóval *a baricentrikus koordináták affin invariánsak*)
- Biz.: legyenek egy tetszőleges $\mathbf{x}$ pont baricentrikus koordinátái $\mathbf{x}_i$-kre vonatkoztatva α_i, ekkor

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) \\ &= \mathbf{A}\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) + \mathbf{b} \\ &= \mathbf{A}\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{b} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (\mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{b}) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi(\mathbf{x}_i) \end{aligned}$$

Affin transzformációk megadása

- $\mathbb{E}^n$-ben egy affin transzformációt egyértelműen meghatároz $n+1$ általános állású pont és annak képe
- Azaz, például síkban ha adott három általános állású

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 0,1,2$$

pont és ezek képei, rendre

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 0,1,2$$

akkor $\mathbf{p}_i$-ket $\mathbf{q}_i$-kbe átvivő $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ transzformációra

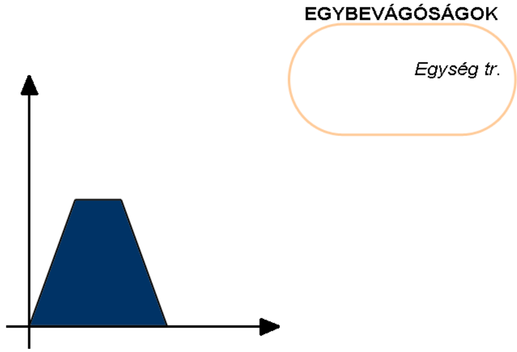
$$\mathbf{R}\cdot[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] = [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2] \Rightarrow \mathbf{R} = [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]\cdot[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]^{-1}$$

Projektív transzformációk megadása

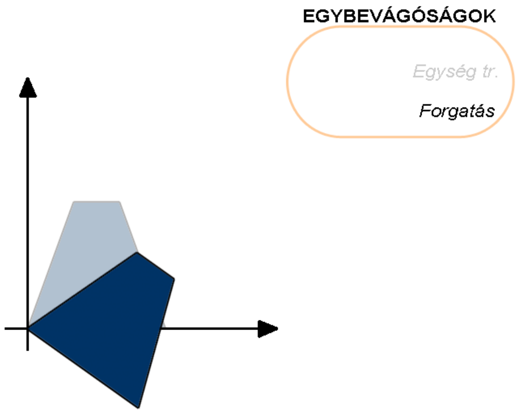
- $\mathbb{E}^n$-ben egy projektív transzformációt egyértelműen meghatároz $n+2$ általános állású pont és annak képe
- Tehát síkban 4: legyen $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ és $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, ekkor megoldandó P-re

$$P \cdot [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3] = [\alpha_0 \mathbf{q}_0, \alpha_1 \mathbf{q}_1, \alpha_2 \mathbf{q}_2, \alpha_3 \mathbf{q}_3]$$

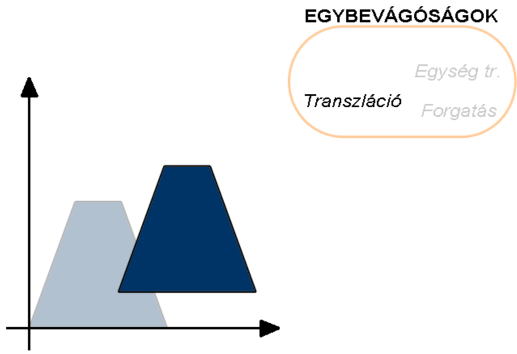
Transzformációk osztályozása



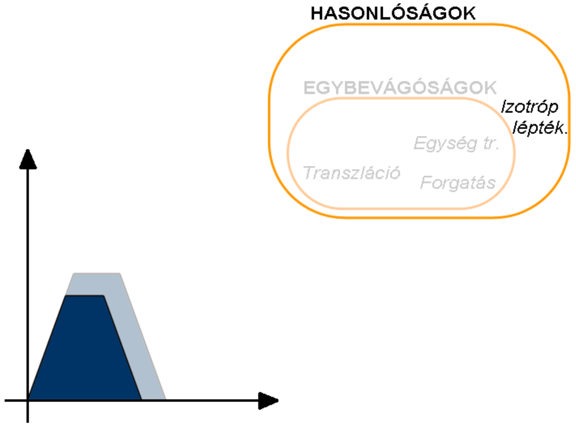
Transzformációk osztályozása



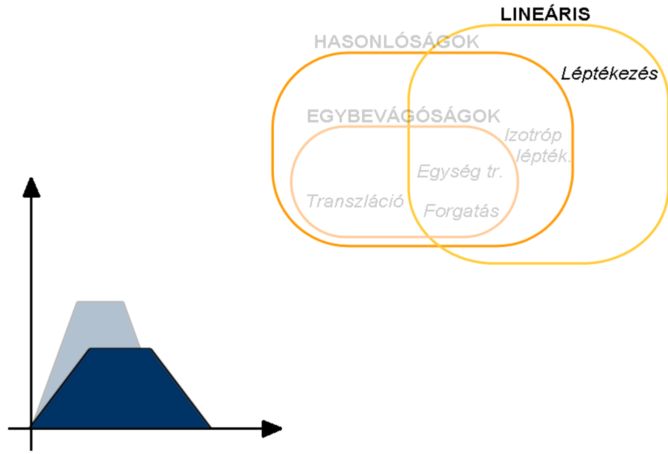
Transzformációk osztályozása



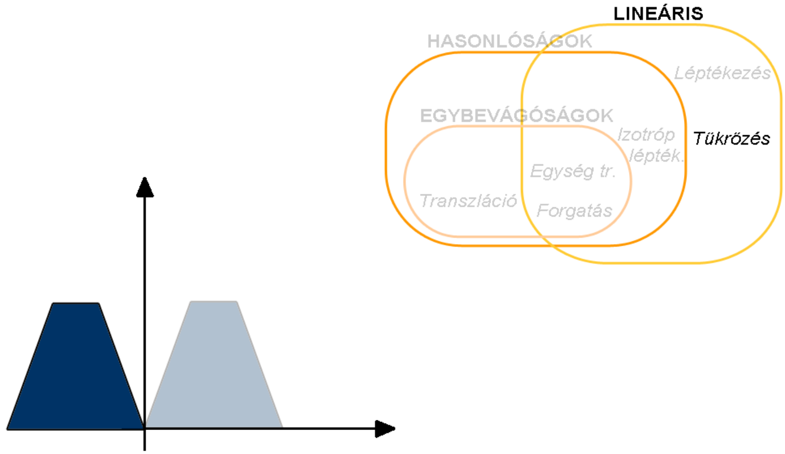
Transzformációk osztályozása



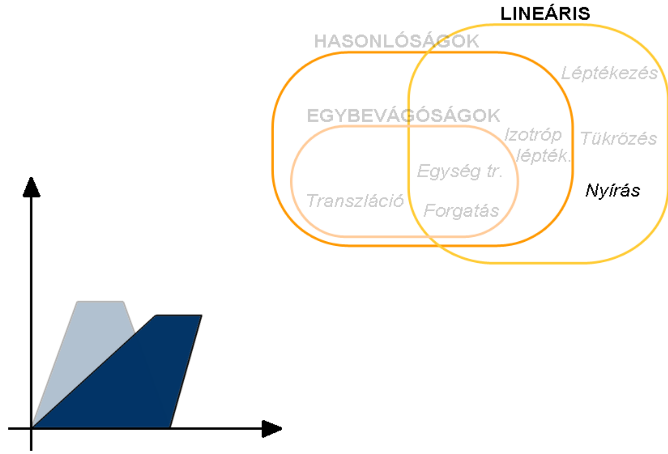
Transzformációk osztályozása



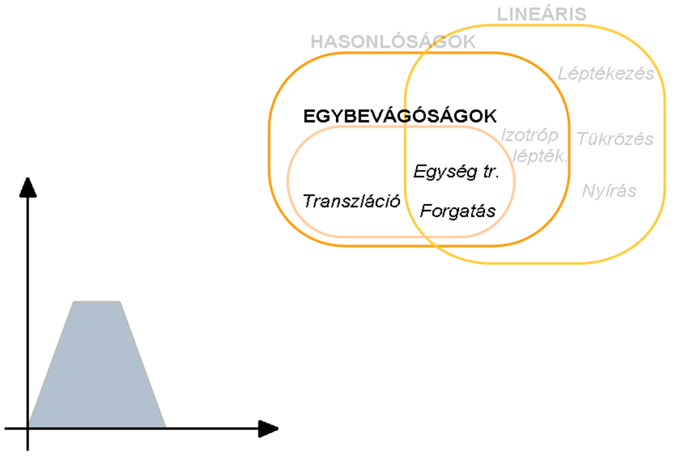
Transzformációk osztályozása



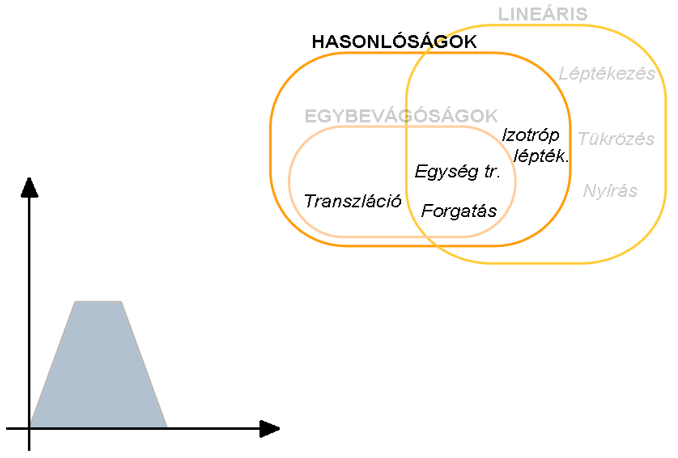
Transzformációk osztályozása



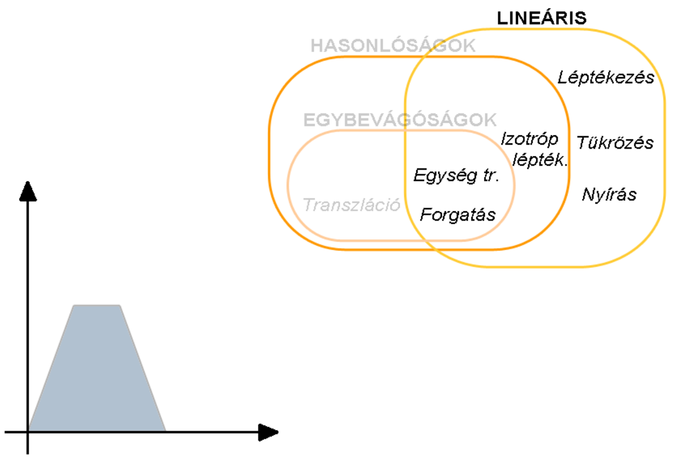
Transzformációk osztályozása



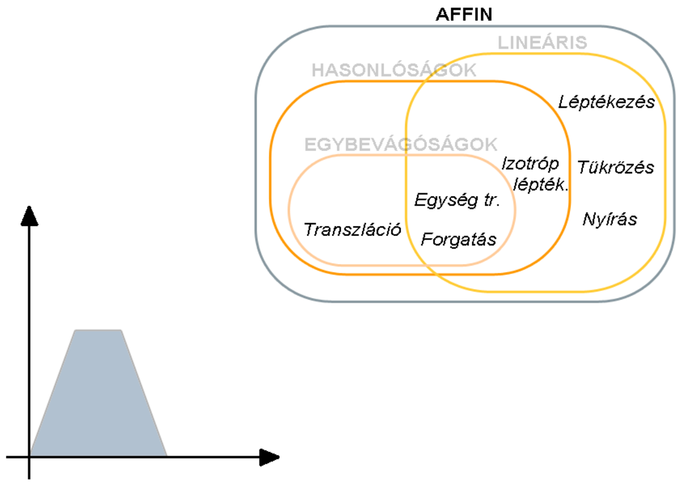
Transzformációk osztályozása



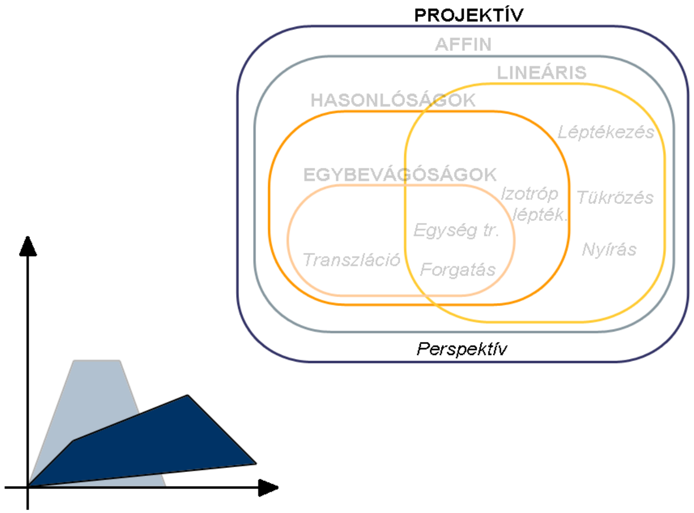
Transzformációk osztályozása



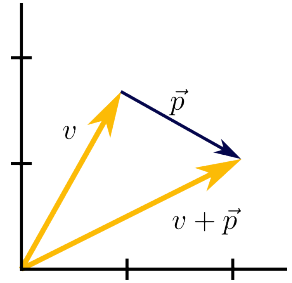
Transzformációk osztályozása



Transzformációk osztályozása



Eltolás



Eltolás

- Minden pontot egy adott **d** vektorral eltolunk:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{d}$$

- Általában $\mathbf{T}(d_x, d_y, d_z)$-vel jelöljük
- Mátrix alakhoz homogén koordináták kellenek, $w = 1$ választással és akkor a következő 4×4-es mátrixszal adható meg:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eltolás

- Hiszen ha homogén koordinátáit használjuk az **x** pontnak, akkor

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 1 \cdot d_x \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z + 1 \cdot d_y \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z + 1 \cdot d_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tulajdonságok

- Az eltolások az affin transzformációk egy kommutatív részcsoportját alkotják
- A $\mathbf{T}(a, b, c)$ inverze $\mathbf{T}^{-1}(a, b, c) = \mathbf{T}(-a, -b, -c)$

Forgatás

- Négyjegyű függvénytáblázatból:
  Forgatás XY síkban (gyakorlatilag a Z tengely körül) θ szöggel:

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta.$$

- Mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Hasonlóan kaphatjuk XZ és YZ síkokon is.

Forgatás mátrixok

Z tengely körül, Y tengely körül, X tengely körül

$$\mathbf{R}_Z = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_Y = \begin{bmatrix} c & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ahol $c = \cos\theta$ és $s = \sin\theta$.

Tulajdonságok

- Az azonos tengely körüli elforgatások az affin transzformációk egy kommutatív részcsoportját alkotják
- A térbeli forgatások felírhatók egyetlen 3×3 mátrix segítségével (lineáris transzformáció)
- Az eltolás és forgatás sorrendje nem felcserélhető!
- A forgatás inverze az eredeti forgatás nagyságával megegyező, de ellentétes irányú elforgatás, pl.: $\mathbf{R}_Z^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_Z(-\theta)$

Tetszőleges forgatás

Tetszőleges orientáció előállítható a három forgatás egymás utáni használatával.

$$\mathbf{R}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma\\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}$$

Tetszőleges tengely körüli forgatás

- Az eddigieket felhasználva:
  - toljuk el a forgatási tengelyt az origóba ($\mathbf{T}$)
  - forgassuk be az egyik tengely körül a másik kettő síkjába (például $\mathbf{R}_Z$-vel)
  - ebben a síkban a két tengely közül az egyikkel forgassuk be a másik tengelybe (például $\mathbf{R}_Y$)
  - végezzük el az elforgatást (például $\mathbf{R}_X$-szel, de: ez az új (X") tengely körül forgat!)
  - alkalmazzuk az eddigi transzformációk inverzeit
- Azaz például $\mathbf{Mx} = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}_Z^{-1}\mathbf{R}_Y^{-1}\mathbf{R}_X\mathbf{R}_Y\mathbf{R}_Z\mathbf{T})\mathbf{x}$

Tetszőleges tengely körüli forgatás – Rodrigues formula

Tetszőleges *tengely* közüli forgatás megadható egy $\mathbf{z}$ egységvektorral, ami a forgatás tengelyét adja, és egy θ szöggel. Ezt írja le a *Rodrigues formula*, aminek felhasználásával:

$$\mathbf{v}' = \text{Rodrigues}(\theta,\mathbf{z})\mathbf{v}$$

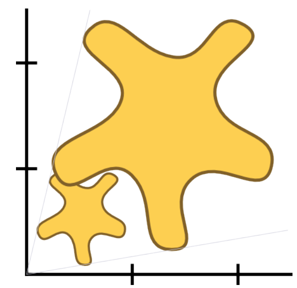
Yaw, pitch, roll

- Egy objektum függőleges- (*yaw*), kereszt- (*pitch*) és hossztengelye (*roll*) menti elfordulásait egyszerre adjuk meg.
- Repüléstanban és robotikában előszeretettel használt megadási mód.
- Gyakorlatilag megegyezik azzal, mintha három „közönséges" tengely menti forgatást használnánk.
- Csak akkor működik helyesen, ha az objektum tengelyei egybe esnek a koordináta rendszer tengelyeivel.
- Legtöbb API támogatja.

Mozgás-transzformációk

- Az eltolások és tengely körüli elforgatások kombinációjaként leírható transzformációkat *mozgás-transzformációknak* nevezzük
- A tárgyak alakját és méretét nem változtatják

Méretezés



Méretezés

- Az x, y, z tengelyek mentén „széthúzzuk”, vagy „összenyomjuk” az alakzatot, azaz más *léptéket* választunk – egymástól függetlenül is akár
- Mátrix alakban:

$$\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Speciális eset: tükrözés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike negatív
  - ha egy negatív: tükrözés az irányra merőleges síkra
  - ha kettő negatív: tükrözés egy tengelyre
  - ha mindhárom negatív: középpontos tükrözés
- Figyeljünk: ha páratlan számú negatív együttható van, akkor a sodrásirány is megváltozik!

Sodrásirány?

- Az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisvektorokat felhasználva, ha $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció, akkor
$$\varphi(\mathbf{p}) = \varphi(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = x\varphi(\mathbf{i}) + y\varphi(\mathbf{j}) + z\varphi(\mathbf{k})$$
- $\to$ ha egy transzformáció mátrixának determinánsa negatív, akkor a sodrásirány (a tárgyak térbeli irányítása) megváltozik

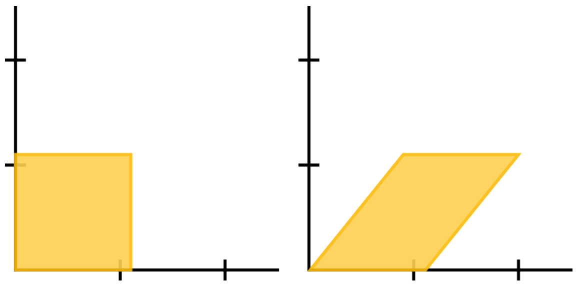
Speciális eset: vetítés

- Ha s_x, s_y, s_z valamelyike nulla
  - ha egy nulla: az irányra merőleges síkra vetítünk
  - ha kettő nulla: egy tengelyre „vetítünk"
  - ha mindhárom nulla: az origóba „vetítünk" mindent…
- Észrevétel: a determináns nulla! $\to$ nincs inverz!

Nyírás

Példa

Ha egy pakli kártyát lerakunk az asztalra és a lapokat egyenletesen szétcsúsztatjuk, de úgy, hogy a pakli még „állva" maradjon, az a *nyírás*.



Nyírás

Ha például minden pontban az x, y értékeket z-vel arányos mértékben módosítjuk:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nyírás

Általánosan:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Áttérés új koordináta-rendszerre

- Tegyük fel, hogy az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormált bázisvektorok helyett át akarunk térni az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ortonormált bázisra (az új bázisvektorok koordinátáit ismerjük a régi bázisban).
- Mik lesznek az eddig $[x, y, z]^T$ koordinátákkal azonosított pont $[x', y', z']^T$ koordinátái az új bázisban? Azaz milyen x', y', z'-re teljesül, hogy $\mathbf{x} = x'\mathbf{u} + y'\mathbf{v} + z'\mathbf{w}$?
- $\mathbf{x} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]\mathbf{x}' = B\mathbf{x}' \to \mathbf{x}' = B^{-1}\mathbf{x}$
- Ortonormált mátrix inverze a mátrix transzponáltja, így az új koordinátákat adó $M = B^{-1}$ mátrixunk a következő alakú
$$M = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ w_x & w_y & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- Ha az új origó koordinátája $\mathbf{c}$, akkor $M = B^{-1}T(-c_x, -c_y, -c_z)$

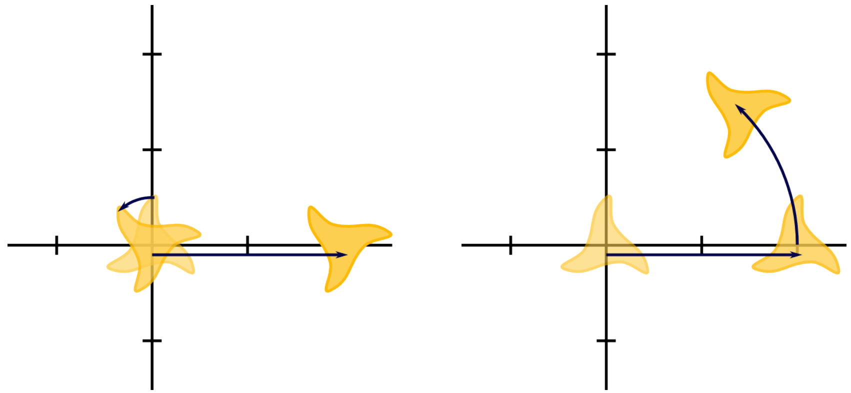
Kommutativitás

- A mátrix szorzás nem kommutatív, úgyhogy általában nem igaz, hogy
$$\mathbf{ABv} = \mathbf{BAv}$$
- Ez jó, mivel általában a transzformációk sem kommutatívak

Példa

Forgatás majd eltolás

Eltolás majd forgatás

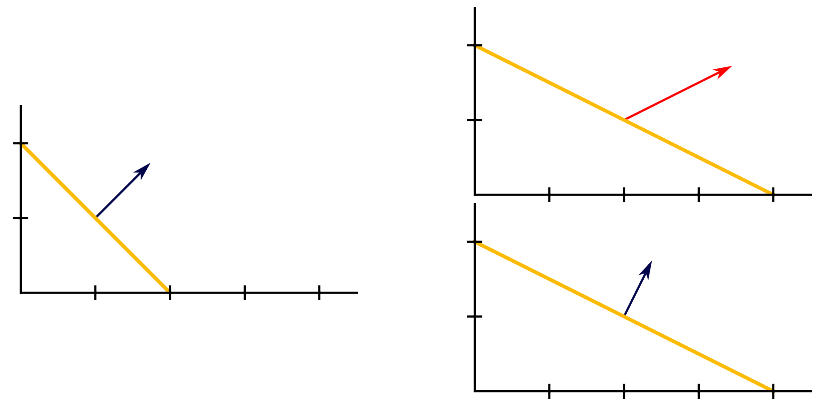


Transzformációs mátrixok determinánsai

- A méretezésnél láttuk, hogy ha egy vagy három együtthatója negatív a transzformációnak, akkor az megfordítja a sodrásirányt.
- Általános esetre megfogalmazva:
- Ha $\det(\mathbf{A}) > 0$, akkor a sodrás irány változatlan marad
- Ha $\det(\mathbf{A}) < 0$, akkor a sodrás irány megfordul

Normálvektorok transzformációja

- Legyen g egy szakasz a síkban, $\mathbf{n}$ normálvektorral. Legyen $\mathbf{S}$ az x tengely mentén kétszeres nyújtás leíró transzformáció.
- Probléma: g'-t megkaphatjuk, ha eltranszformáljuk a két végpontját. Mi a helyzet g' normálvektorával? $\mathbf{n}' = \mathbf{Sn}$ lesz? NEM!



Normálvektorok transzformációja

- Vizsgáljuk a normálvektor által megadott érintősík egyenletét!
- Legyen $\mathbf{p}$ az érintősík egy pontja, ekkor $\mathbf{x}$ akkor és csak akkor van rajta a síkon, ha

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

- Ekkor tetszőleges (invertálható) $\mathbf{A}$ transzformáció mellett:

$$\langle \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{p}), \mathbf{n} \rangle = 0$$

- A skaláris szorzat és a mátrix szorzás szabályai alapján kapjuk, hogy

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{p}), \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T \mathbf{n} \rangle = 0$$

- Azaz a normálvektorokat az $\mathbf{A}$ mátrix helyett annak inverztranszponáltjával kell szorozni!

Megjegyzés

- A sík affin transzformációit egyértelműen meghatározza három független pont és azok képe
- A tér affin transzformációit egyértelműen meghatározza négy független pont és azok képe

Motiváció

- A színterünk képét akarjuk előállítani: vetíteni egy síkra
- Az ember által látott képet nem lehet előállítani affin transzformációk segítségével. A „távolodó” párhuzamosok összetartanak, nem maradnak párhuzamosak.
- Ez a látvány előállítható *középpontos vetítéssel*. Ez a transzformáció a *homogén térben* lineáris transzformáció.
- Az affin transzformációk nem „bántották” az ideális elemeket, a fentiekhez azonban ez „kell”

Általános eset

Ha egy *homogén* transzformációs mátrix utolsó sora nem $[0, 0, 0, 1]$, akkor az olyan *homogén lineáris transzformáció*, ami az euklidészi térnek nem lineáris transzformációja.

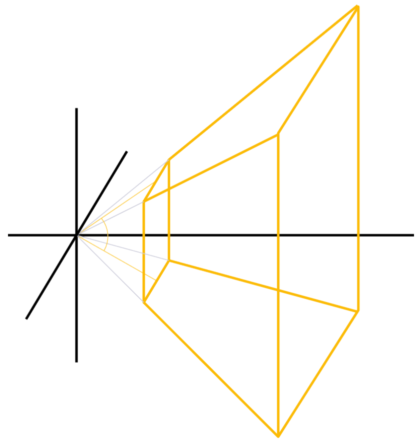
Párhuzamos vetítés

- A mátrix ami megadja egyszerű, például az XY síkra való vetítés
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Perspektív transzformáció

- Középpontos vetítést valósít meg.
- Az origóból a z tengely mentén „nézünk” a térre.
- A látótérnek egy csonkagúla felel meg.
- A transzformáció a szem pozícióban találkozó vetítő egyenesekből párhuzamosokat csinál.
- A csonkagúlát egy téglatestté transzformálja
- Paraméterei:
  - a gúla függőleges nyílásszöge,
  - a gúla alapjának az oldalainak az aránya,
  - a közeli vágósík távolsága
  - a távoli vágósík távolsága

Perspektív transzformáció



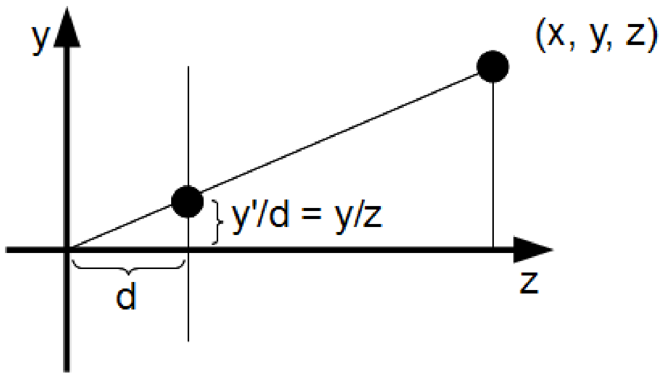
Homogén osztás

- Mivel egy **M** „valódi" projektív transzformáció utolsó sora nem $[0,0,0,1]^T$, ezért

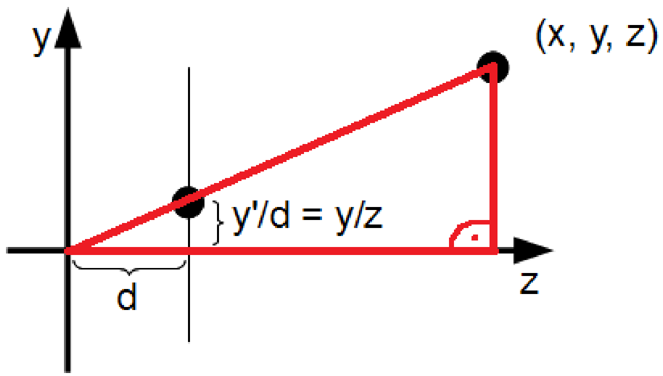
$$[x,y,z,w]^T = \mathbf{Mv}$$

transzformáció után, $w \neq 1$ általános esetben.
- Ha ezt a pontot az eukleidészi térbe szeretnénk átvinni (mert pl. meg akarjuk jeleníteni), akkor végig kell osztanunk w-vel.
- (Persze csak akkor, ha $w \neq 0$)
- Ezt nevezzünk homogén osztásnak.

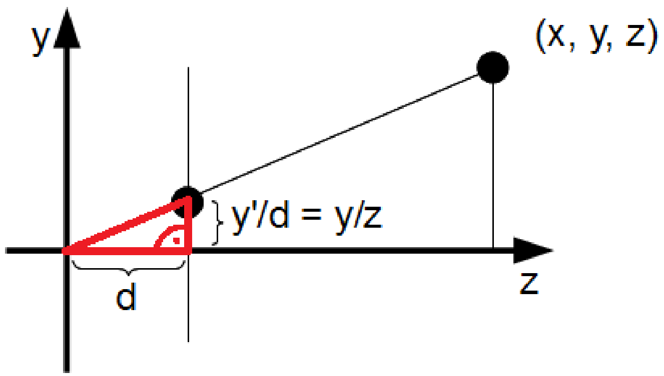
Középpontos vetítés



Középpontos vetítés



Középpontos vetítés



Középpontos vetítés

- Vagyis:

$$x' = \frac{x}{z}d, \qquad y' = \frac{y}{z}d, \qquad z' = \frac{z}{z}d = d$$

- Az origó, mint vetítési középpont és egy, attól a Z tengely mentén d egységre található, XY síkkal párhuzamos vetítősíkra való vetítés mátrixa:

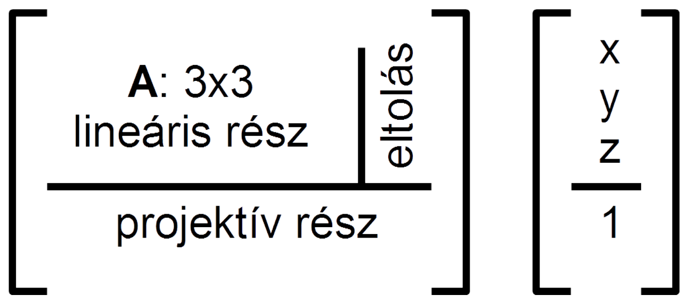
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{bmatrix}$$

- Homogén osztás után ($\frac{z}{d}$-vel) a fentit kapjuk

Megjegyzés

- A sík projektív transzformációit egyértelműen meghatározza négy független pont és azok képe
- A tér projektív transzformációit egyértelműen meghatározza öt független pont és azok képe

Transzformációs mátrixok



Transzformációs mátrixok

- Mi történik, ha a vektorunk negyedik koordinátája nulla (vagyis ha vektort azonosít a számnégyes)?
- Az eltolás rész nem hat rá!
- Figyeljünk: nem mindenhol szoroznak jobbról a vektorokkal!

Transzformációs mátrixok