Sur une propriété des fonctions entières

Note de **M. Serge Bernstein**, présentée par M. Émile Borel

1. Soit

$$f(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

une fonction entière, jouissant de la même propriété que la limite supérieure

$$\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|A_n|} \leqq \rho. \tag{1}$$

Je dis que, *si l'on a pour toute valeur réelle*[1] *de* x

$$|f(x)| \leqq M, \tag{2}$$

on aura aussi pour toute valeur réelle de x

$$|f'(x)| \leqq \frac{\rho}{e} M. \tag{3}$$

D'ailleurs, la limite donnée par (3) est effectivement atteinte par la fonction $M \sin \frac{\rho x}{e}$.

La démonstration repose sur les considérations suivantes. Disons, pour abréger, qu'une fonction satisfaisant à la condition (1) est de *degré* non supérieur à ρ. Cela étant, il est évident que le degré ne dépend pas du choix de l'origine. On est ainsi amené à démontrer que $\frac{e}{\rho} \sin \frac{\rho x}{e}$ est la fonction de degré non supérieur à ρ qui s'écarte le moins possible de O sur l'axe réel entre toutes celles qui satisfont à la condition $f'(0) = 1$. Or, pour le prouver, il suffit de reconnaître qu'il ne peut exister de fonction $\varphi(x)$ impaire de degré ρ qui soit bornée sur l'axe réel, telle que $\varphi'(0) = 0$, et qui, aux points où $\cos \frac{\rho x}{e} = 0$, prenne des valeurs de signes successivement opposés.

2. Il est facile de déduire du théorème énoncé la proposition suivante :
Soit

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos \alpha_1 x + B_1 \sin \alpha_1 x + \ldots + A_n \cos \alpha_n x + B_n \sin \alpha_n x,$$

où $\alpha_n > \alpha_i$ *(pour* $n > i$*), et un au moins des nombres* A_n, B_n *est différent de* 0*; si pour toute valeur réelle* $|f(x)| \leqq L$*, on a également* $|f'(x)| \leqq \alpha_n L$.

En effet, cela résulte du fait que $f(x)$ est de degré $\alpha_n e$.

Cette proposition est une généralisation du théorème que j'ai donné autrefois[2] pour le cas où les nombres α_i sont des entiers.

Comme seconde conséquence de notre théorème, indiquons la suivante :
Si

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{c_n}{n!} x^n, \quad \text{où} \quad \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|c_n|} = R,$$

[1] Au lieu de l'axe réel, on pourrait prendre n'importe quelle droite déterminée.

[2] Dans mon Mémoire *Sur l'ordre de la meilleure approximation, etc.*, je n'avais considéré que le cas où les cos et sin n'interviennent pas simultanément, mais M. Landau, dès l'année 1913, a fait la remarque que le cas général (pour α_i entier) est une conséquence immédiate de celui où les sinus interviennent seulement.

la fonction $f(x)$ ne peut rester bornée sur aucune droite passant par l'origine, si $\frac{c_n}{R^n}$ n'est pas borné.

3. Il est évident, enfin, que l'étude de l'approximation des fonctions continues au moyen des fonctions de degrés finis sur l'axe réel conduit, grâce au théorème 1, à des résultats analogues à ceux que j'ai donnés dans le Mémoire cité relativement à l'existence des dérivées successives pour les fonctions périodiques. Ainsi, soit $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon_n$ sur tout l'axe réel, où $f_n(x)$ est une fonction de degré ρ_n. *Si l'on peut former une suite de fonctions $f(x)$ de degrés ρ_n croissants, telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \rho_{n+1}^p$ soit convergente, la fonction $f(x)$ admet des dérivées continues sur tout l'axe réel jusqu'à l'ordre p inclusivement.* En particulier, il en sera ainsi si l'on peut choisir les nombres ρ_n de sorte que $1 < a < \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} < b$, pour lesquels l'approximation correspondante $\varepsilon_n < \frac{1}{\rho_n^{p+\delta}}$, où $\delta > 0$.

D'autre part, *si $f(x)$ peut être indéfiniment approchée sur tout l'axe réel au moyen de fonctions $f_n(x)$ de degrés bornés, la fonction $f(x)$ est elle-même nécessairement entière et de degré fini.* (Au contraire, il résulte d'un théorème que j'ai donné dans le Mémoire cité que toute fonction continue quelconque qui à l'infini tend vers une limite déterminée peut être approchée indéfiniment par des fonctions entières de degrés bornés sur le *demi*-axe réel.)