Sur une propriété extrémale des polynômes de Tchebychef

Eugène Remes (Kiev)

Etant donnés un intervalle (fermé) $S \equiv \langle a, b\rangle$ de longueur $b - a = l$ sur l'axe OX et deux nombres positifs $\lambda = \theta l$, $(0 < \theta < 1)$ et k, nous considérons le problème suivant:[1]

Déterminer la borne supérieure exacte de la quantité [variable avec $P_n(x)$]

$$\max_{a \le x \le b} |P_n(x)| \tag{1}$$

$P_n(x)$ désignant un polynôme de degré $\le n$ assujetti à la seule condition de vérifier l'inégalité

$$|P_n(x)| \le k \tag{2}$$

sur un ensemble de points (d'ailleurs indéterminé) $E \subset S$ de mesure $\ge \lambda$.

Nous allons montrer que *la borne supérieure en question a pour valeur exacte*

$$M = kT_n\left(\frac{2l}{\lambda} - 1\right) = kT_n\left(\frac{2}{\theta} - 1\right), \tag{3}$$

où T_n est le *polynôme trigonométrique* de degré n :

$$T_n(z) = \frac{1}{2}\{(z + \sqrt{z^2 - 1})^n + (z - \sqrt{z^2 - 1})^n\}. \tag{4}$$

Démonstration. D'abord, comme on le vérifie immédiatement la quantité (1) atteint exactement la valeur (3) pour les deux *polynômes de Tchebychef*

$$P_{n,1}(x) = kT_n\left(\frac{2x - a - (a + \lambda)}{\lambda}\right) \tag{5}$$

et

$$P_{n,2}(x) = kT_n\left(\frac{2x - (b - \lambda) - b}{\lambda}\right), \tag{6}$$

qui vérifient bien la condition (2), l'un sur l'intervalle $\langle a, a + \lambda\rangle$, l'autre sur l'intervalle $\langle b - \lambda, b\rangle$. Il reste à démontrer qu'entre tous les polynômes $P_n(x)$ admissibles les deux polynômes (5) et (6) sont les *seuls* (abstraction faite d'un facteur ± 1), pour lesquels la quantité (1) atteint la valeur (3).

Soit $P_n(x)$ un polynôme admissible quelconque différent de (5) et (6); soit $E \subset S$ l'ensemble de points, sur lequel l'inégalité (2) est vérifiée. Cet ensemble de points se

[1] L'auteur a rencontré ce problème au cours de ses recherches sur la convergence de certains procédés d'approximations successives qu'il a proposés récemment pour le calcul effectif des polynômes d'approximation minimum d'une fonction bornée $f(x)$ sur un ensemble de points pareillement borné (cf. ma note, Comptes Rendus, Paris, 30. VII. 1934 et surtout ma monographie en langue ukrainienne: «Sur les méthodes pour réaliser la meilleure approximation des fonctions d'après le principe de Tchebychef », Acad. des Sc. d'Ukraine, 1935, pp. 99–100).

compose évidemment d'un certain nombre $\nu \leq n$ d'intervalles fermés dont quelques-uns peuvent se réduire à un point. Soient

$$\sigma_1 \equiv \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle, \quad \sigma_2 \equiv \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle, \quad \ldots, \quad \sigma_m \equiv \langle \alpha_m, \beta_m \rangle \tag{7}$$

ceux d'entre eux ($m \leq \nu$) qui ont une longueur non nulle, arrangés par ordre d'abscisses croissantes. Soit ensuite $\xi \in S$ un des points pour lesquels $|P_n(x)|$ acquiert sa valeur maximum sur l'intervalle $\langle a, b \rangle$:

$$|P_n(\xi)| = \max_{a \leq x \leq b} |P_n(x)|. \tag{8}$$

Il faut démontrer que $|P_n(\xi)| < M$, M désignant la valeur (3).

Ici trois cas sont à distinguer, suivant que

$$\xi > \beta_m, \quad \xi < \alpha_1 \quad \text{ou enfin} \quad \beta_i < \xi < \alpha_{i+1} \tag{9}$$

i désignant dans le dernier cas un des nombres $1, 2, \ldots, m-1$.

Commençons par considérer *le premier cas*. Désignons par $x_1 = a, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1} = a + \lambda$ les points de l'intervalle $\langle a, a+\lambda \rangle$, auxquels le polynôme de Tchebychef (5) acquiert avec alternance de signe la valeur $\pm k$. Désignons, d'autre part, par $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n+1}$ les $n+1$ points que nous prendrons sur l'ensemble de points E sous les conditions suivantes: d'abord, $\bar{x}_1 = x_1$; puis, pour $i = 2, 3, \ldots, n+1$ soit $\bar{x}_i$ le premier des points de E (en parcourant cet ensemble de points de gauche à droite) pour lequel

$$\operatorname{mes}(\langle \bar{x}_1, \bar{x}_i \rangle \cdot E) = x_i - x_1 \tag{10}$$

le produit entre parenthèses désignant l'ensemble des points qui appartiennent à la fois à l'intervalle $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_i \rangle$ et à l'ensemble de points E.

En appliquant la formule d'interpolation de Lagrange, une fois au polynôme (5) et l'autre fois au polynôme $P_n(x)$, nous pourrons écrire les deux égalités suivantes:

$$M = P_{n,1}(b) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(b-x_1)\ldots(b-x_{i-1})(b-x_{i+1})\ldots(b-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n+1})} P_{n,1}(x_i) \tag{11}$$

$$P_n(\xi) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(\xi-\bar{x}_1)\ldots(\xi-\bar{x}_{i-1})(\xi-\bar{x}_{i+1})\ldots(\xi-\bar{x}_{n+1})}{(\bar{x}_i-\bar{x}_1)\ldots(\bar{x}_i-\bar{x}_{i-1})(\bar{x}_i-\bar{x}_{i+1})\ldots(\bar{x}_i-\bar{x}_{n+1})} P_n(\bar{x}_i) \tag{12}$$

En comparant leurs parties droites terme à terme, on constate les relations suivantes:

α) $|P_{n,1}(x_i)| = k; \quad |P_n(\bar{x}_i)| \leq k$

β) $b - x_j \geq \xi - \bar{x}_j \geq 0$

γ) $|x_i - x_j| \leq |\bar{x}_i - \bar{x}_j| \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n+1;\ j \neq i)$.

En outre, on voit aisément que les $n+1$ termes à la dernière partie de (11) *ont tous le même signe* (à savoir $+$), ce qui ne doit pas avoir lieu forcément dans (12). Ainsi on aura bien

$$|P_n(\xi)| < M$$

à moins que $P_n(x)$ ne soit identique à $\pm P_{n,1}(x)$.

Dans le *second cas* (9), c'est à dire lorsque $\xi < \alpha_1$, le raisonnement est tout-à-fait analogue, en remplaçant le polynôme (5) par (6)

Enfin lorsqu'on a dans (9)

$$\beta_i < \xi < \alpha_{i+1} \tag{13}$$

posons :

$$\frac{\text{mes}(\langle a, \xi\rangle \cdot E)}{\xi - a} = \theta_1 \tag{14}$$

$$\frac{\text{mes}(\langle \xi, b\rangle \cdot E)}{b - \xi} = \theta_2. \tag{15}$$

Il est clair que les deux nombres θ_1 et θ_2 ne peuvent être *à la fois* moindres à $\theta = \frac{\lambda}{l}$. Or, en remplaçant dans les raisonnements précédents l'intervalle $\langle a, b\rangle$ une fois par $\langle a, \xi\rangle$ et l'autre fois par $\langle \xi, b\rangle$, on a *simultanément*

$$\left.\begin{aligned} |P_n(\xi)| &< kT_n\left(\frac{2}{\theta_1} - 1\right) \\ |P_n(\xi)| &< kT_n\left(\frac{2}{\theta_2} - 1\right) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

et *une* des parties droites est certainement $\leq M$, ce qui achève la démonstration.

Nous avons obtenu simultanément une démonstration simple d'un théorème connu dû à *Tchebychef*[2], qui découle de nos raisonnements lorsqu'on restreint *a priori* le champ des polynomes admissibles[3].

[2] *P. L. Tchebychef*, «Sur les fonctions qui s'écartent peu de zéro pour certaines valeurs de la variable», Oeuvres, tome 2, pp. 335–355.

[3] A savoir, en posant *a priori* $E = \langle a, a + \lambda\rangle$ ou bien $E = \langle b - \lambda, b\rangle$.