C. R. Acad. Sc. Paris, t. 298, Série I, n°1, 1984

Analyse fonctionnelle – Suites d'opérateurs sur un espace $\mathscr{C}(K)$ de Grothendieck

Note de **Thierry Coulhon**, présentée par Laurent Schwartz

Remise le 21 novembre 1983

On montre que sur un espace $\mathscr{C}(K)$ de Grothendieck, donc en particulier sur L^∞, toute suite de contractions linéaires convergeant fortement vers l'identité, converge uniformément.

Functional analysis – Sequences of Operators on a Grothendieck $\mathscr{C}(K)$ Space.
It is shown that on a Grothendieck $\mathscr{C}(K)$ space, hence in particular on L^∞, every sequence of linear contractions strongly converging to the identity, converges uniformly.

Introduction – Sur les espaces de Banach $\mathscr{C}(\mathrm{T})$ (où T est le tore), L^p pour $1 \leqq p < +\infty$, on connaît des semi-groupes de contractions (positives de surcroît), fortement continus et non uniformément continus : par exemple le semi-groupe des translations. Il n'en est rien sur L^∞, et J.-B. Baillon a conjecturé que tous les semi-groupes fortement continus de contractions sur L^∞ sont uniformément continus. Dans un travail non publié, M. Talagrand a traité le cas de l^∞. On montre ici que la conjecture est vraie pour les espaces $\mathscr{C}(K)$ de Grothendieck (donc L^∞, $\mathscr{C}(K)$ où K est σ-stonien ou un F-espace [1], mais aussi d'autres espaces; construits par R. Haydon [2] et M. Talagrand [3]) : elle découle d'un résultat beaucoup plus général, et de démonstration très simple, sur les suites de contractions linéaires dans de tels espaces.

Rappel et notations – Un espace de Banach X est dit de Grothendieck si toute suite préfaiblement convergente du dual X* est aussi faiblement convergente.

Dans la suite, $\mathscr{C}(K)$ désignera l'espace des fonctions numériques continues, et $M(K)$ l'espace des mesures de Radon, sur l'espace topologique compact K. On notera δ_x la mesure de Dirac en $x \in K$, et T^* le transposé d'un opérateur T.

Théorème. *Soit K un espace compact tel que $\mathscr{C}(K)$ soit de Grothendieck et $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de contractions linéaires de $\mathscr{C}(K)$ telle que, $\forall f \in \mathscr{C}(K), \mathrm{T}_n f \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$. Alors :*

$$\|\mathrm{T}_n - \mathrm{Id}\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Proof. Notons $\mu_{n,x} = \mathrm{T}_n^* \delta_x - \delta_x$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in K$. Alors :

$$\forall f \in \mathscr{C}(K), \quad \operatorname*{Sup}_{x \in K} |\mu_{n,x}(f)| = \operatorname*{Sup}_{x \in K} |\mathrm{T}_n f(x) - f(x)| = \|\mathrm{T}_n f - f\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de K, la suite des mesures $(\mu_{n,x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge préfaiblement vers zéro dans $M(K)$. Mais la propriété de Grothendieck nous assure qu'en fait cette convergence est faible. L'application qui à une mesure associe sa partie discrète étant continue, donc faiblement continue, de $M(K)$ dans $l^1(K)$, la suite des parties discrètes des μ_{n,x_n} converge faiblement, donc fortement (car $l^1(K)$ possède la propriété de Schur) vers zéro.

En particulier :

$$|\mu_{n,x_n}(\{x_n\})| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or :

$$\begin{aligned} \|\mu_{n,x}\| = |\mu_{n,x}(\{x\})| + |\mu_{n,x}|(K/\{x\}) &= |\mathrm{T}_n^* \delta_x(\{x\}) - 1| + |\mathrm{T}_n^* \delta_x|(K/\{x\}) \\ &= |\mathrm{T}_n^* \delta_x(\{x\}) - 1| + \|\mathrm{T}_n^* \delta_x\| - |\mathrm{T}_n^* \delta_x(\{x\})|; \end{aligned}$$

T_n étant une contraction, $\|\mathrm{T}_n^* \delta_x\| \leqq 1$, et l'on obtient finalement :

$$\|\mu_{n,x}\| \leqq 2 |\mu_{n,x}(\{x\})|.$$

On déduit donc de ce qui précéde que, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de K, $\|\mu_{n,x_n}\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire que $\operatorname*{Sup}_{x \in K} \|\mu_{n,x}\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Or :

$$\operatorname*{Sup}_{x \in K} \|\mu_{n,x}\| = \operatorname*{Sup}_{x \in K} \operatorname*{Sup}_{\substack{f \in \mathscr{C}(K) \\ \|f\| \leqq 1}} |\mathrm{T}_n f(x) - f(x)| = \operatorname*{Sup}_{\substack{f \in \mathscr{C}(K) \\ \|f\| \leqq 1}} \|\mathrm{T}_n f - f\| = \|\mathrm{T}_n - \mathrm{Id}\|.$$

Donc :

$$\|\mathrm{T}_n - \mathrm{Id}\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Remarques. – 1. Il est facile de voir qu'on peut remplacer dans l'énoncé du théorème, l'hypothèse "contractions", c'est-à-dire $\|\mathrm{T}_n\| \leqq 1 \forall n$, par l'hypothèse $\overline{\lim} \|\mathrm{T}_n\| \leqq 1$.

2. Il résulte facilement du théorème et de la remarque 1 que tout semi-groupe $(\mathrm{T}_t)_{t \geqq 0}$ fortement continu d'opérateurs sur un espace $\mathscr{C}(\mathrm{K})$ de Grothendieck, vérifiant $\overline{\lim}_{t \to 0^+} \|T_t\| \leqq 1$, est uniformément continu.

3. De même, une suite d'opérateurs positifs sur un espace $\mathscr{C}(\mathrm{K})$ de Grothendieck; convergeant fortement vers l'identité, converge uniformément. En effet, la remarque 1 permet de conclure puisque $\|T_n\| = \|T_n 1\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. Cet énoncé, que nous avons obtenu en premier lieu, nous a été suggéré par A. Ancona et G. Mokobodzki. Il s'avère cependant que le cas d'un espace $L^\infty(\mu)$ était déjà connu [4].

4. En particulier les semi-groupes fortement continus d'opérateurs positifs sur un espace $\mathscr{C}(\mathrm{K})$ de Grothendieck sont uniformément continus, et vérifient a fortiori une majoration du type $\|\mathrm{T}_t\| \leqq e^{\omega t}, \omega \in \mathbb{R}$. Ceci contraste avec la situation générale, par exemple sur $\mathscr{C}(T)$,

où l'on sait construire des semi-groupes fortement continus d'opérateurs positifs tels que $1/t \log \|\mathrm{T}_t\| \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, [5].

N.B. Cette note une fois rédigée, nous lisons dans l'exposé de Roland Derndinger, "Betragshalbgruppen normstetiger Operatorhalbgruppen", qui figure dans le compte rendu du semestre d'été 1983 du Séminaire d'Analyse Fonctionnelle de Tübingen, une référence à un article à paraître de H. P. Lotz, qui contient, semble-t-il, un résultat de même nature que le nôtre.

Références bibliographiques

[1] G. L. Seever, *Measures on F-Space*, Trans. Amer. Math. Soc, 133, 1968, p. 267-280.

[2] R. Haydon, *A Non-Reflexive Grothendieck Space that Does not Contain* l^∞, Israël J. Math., 40, n°1, 1981, p. 65.

[3] M. Talagrand, *Un nouveau* $\mathscr{C}(K)$ *qui possède la propriété de Grothendieck*, Israël J. Math., 37, n°1-2, 1980, p. 181.

[4] A. Kishtmoto et D. W. Robinson, *Subordinate Semi-Groups and Order Properties*, J. Austral. Math. Soc, séries A, 31, 1981, p. 59.

[5] C. J. K. Batty et E. B. Davies, *Positive Semi-groups and Resolvents*, prépublication, 1982.

Équipe d'analyse, Équipe de Recherche associée au C.N.R.S., n° 294,
Université Paris-VI, Tour 46, 4, place Jussieu 75230 Paris Cedex 05.