Aproksymacja profili wysokościowych
Metody Numeryczne – projekt nr. 3

Maciej Adryan

19 maja 2021

Spis treści

Streszczenie

Celem projektu było zaimplementowanie metod aproksymacji interpolacyjnych wykorzystujących wielomian interpolacyjny **Lagrange'a** oraz **funkcje sklejane trzeciego stopnia**. Zweryfikowano przydatność obu metod.

Projekt został wykonany przy pomocy języka Python przy zastosowaniu poniższych bibliotek opensource'owych:

- **Pandas** (operacje na danych)
- **Numpy** (operacje macierzowe)
- **Matplotlib** (wizualizacja)
- **icecream** (debugowanie)

Do testów wykorzystano pięć tras pochodzących z platformy eNauczanie:

- **100.csv** (trasa o kilku, stosunkowo niewielkich wzniesieniach)
- **MountEverest.csv** (trasa o jednym znacznym wzniesieniu)
- **Obiadek.csv** (trasa o dwóch stromych wzniesieniach na krańcach przedziału i stosunkowo płaskim terenie pomiędzy nimi)
- **SpacerniakGdansk.csv** (trasa względnie płaska)
- **WielkiKanionKolorado.csv** (trasa zróżnicowana o dużej wariacji wysokości)

Na dane składało się **512** równo rozmieszczonych próbek pomiaru wysokości.

Dla każdej z tras wygeneowane zostały wykresy, za równo indywidualne jak i ilustrujące oba algorytmy, dla różnych ilości punktów węzłowych interpolacji.

Rozdział 1

Metoda interpolacji Lagrange'a

1.1 Działanie

Baza **Lagrange'a** do interpolacji składa się z funkcji określonych wzorem:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Funkcję interpolującą otrzymano za pomocą wzoru:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \phi_i(x)$$

dla $i = 1, 2, ...n + 1$
n = ilośc przedziałów interpolacji

Dane wejściowe dla funkcji stanowią dane rzeczywiste pomiaru.

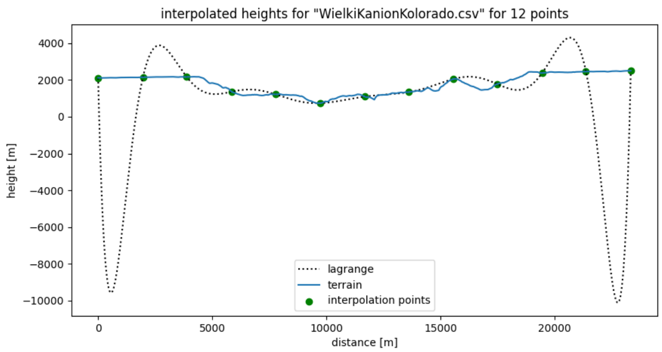
Do przeprowadzenia interpolacji niezbędne było wybranie N równo rozmieszczonych punktów pomiarowych spośród zbioru wszystkich mierzonych wartości.

W celu zbadania wpływu ilości węzłów interpolacyjcnych na wynik działania algorytmu interpolacyjnego interpolacje przeprowadzone zostały na liczbach z zakresu $x = \{6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$.

Próby aproksymacji profilu wysokościowego na większej ilości węzłów, w przypadku metody **Lagrange'a**, okazała bezcelowa, ze względu na występowanie *efektu Rungego*, tj. "pogorszenie jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów".

1.1.1 Wpływ liczby punktów węzłowych oraz ukształtowania terenu na wynik interpolacji

Zgodnie z przewidywaniami jakość interpolacji wzrasta wraz ze zwiększaniem się ilości węzłów, jednak do pewnego momentu. Metoda interpolacji **Lagrange** obarczona jest *efektem Rungego*.



Rysunek 1.1: Wykres z widocznym efektem Rungego $n = 12$

Ze względu na małą liczbę węzłów metoda ta ma skłonności do omijania wzniesień jeżeli wypadają one akurat między dwoma punktami interpolacyjnymi (rys. **1.1**), jest zatem zdecydowanie lepsza do aproksymacji terenów o małym zróżnicowaniu.

1.1.2 Efekt Rungego

Widoczne na krańcach (np. na wykresie **1.1**)przedziałów skoki wartości i ich odstępstwa od wartości rzeczywistych wynika z *efektu Rungego*, czyli pogorszenia się jakości interpolacji idącej w parze ze zwiększeniem ilości węzłów interpolacyjnych.

1.1.3 Błąd interpolacji

Do obliczenia błędu interpolacji użyto algorytmu (**Root Mean Square**):

$$\mathbf{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x'_i)^2}{n}}$$

dla $i = 1, 2, ...n$

$n =$ ilośc przedziałów interpolacji
$x_i =$ wartość dokładna (mierzona) w zadanym punkcie
$x'_i =$ wartość interpolowana w zadanym punkcie

Omówienie i przedstawienie błędów w podrozdziale **3.1.2**.

Rozdział 2

Metoda interpolacji krzywymi sklejanymi trzeciego stopnia (splajnami)

2.1 Działanie

Interpolacja **funkcjami sklejanymi** (tzw. **splajnami**) to metoda interpolacji lokalnej, polega na wyznaczaniu wielomianów zadanego stopnia pomiędzy poszczególnymi węzłami rzeczywistymi. W przypadku tego projektu użyto wielomianów trzeciego stopnia.

Wielomiany mają postaci:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

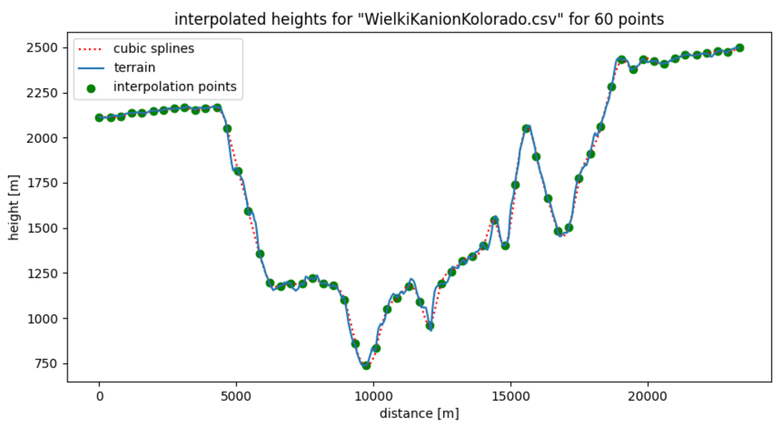
Metoda interpolacji **splajnami** polega na wyznaczeniu czterech powyższych a_i, b_i, c_i, d_i dla każdego przedziału, co przekłada się na potrzebę wyznaczenia układu równań o $4n$ równaniach, zapisany został on w formie macierzy.

Wygenerowany układ równań został następnie rozwiązany metodą *faktoryzacji LU* wzbogaconej o algorytm pivotingu, tj. zamiany wierszy macierzy miejscami, celem uniknięcia operacji dzielenia przez zera mogących występować na diagonali.

Po otrzymaniu odpowiedniego wektora zawierającego obliczone współczynniki i wygenerowaniu odpowiednich podprzedziałów pomiędzy węzłami interpolacyjnymi,odpowiednie wartości zostały zinterpolowane iteracyjnie, automatycznie dobierając współczynniki o odpowiednim indeksie z wektora współczynników.

2.1.1 Wpływ liczby punktów węzłowych oraz ukształtowania terenu na wynik interpolacji

Zgodnie z przewidywaniami zwiększanie ilości punktów węzłowych zwiększa dokładność interpolacji. Dodatkowo metoda ta w przeciwieństwie do metody **Lagrange'a** pozbawiona jest wady w postaci *efektu Rungego*. Zauważyć to można na wykresie **2.1**



Rysunek 2.1: Przykładowa interpolacja splajnami dla $n = 60$

Ukształtowanie terenu wydaje się nie mieć większego wpływu na dokładność interpolacji, szczególnie dla większej liczby n.

2.1.2 Błąd interpolacji

Błąd interpolacji został obliczony identycznie jak w przypadku metody **Lagrange'a** (**1.1.3**).

Omówienie i przedstawienie błędów w podrozdziale **3.1.2**.

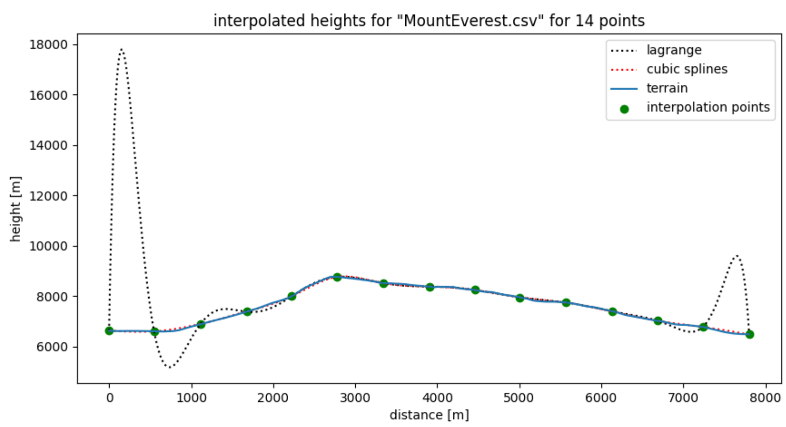
Rozdział 3

Działanie obu metod dla wybranych parametrów pomiarowych

3.1 Porównanie

3.1.1 Wykresy interpolacji

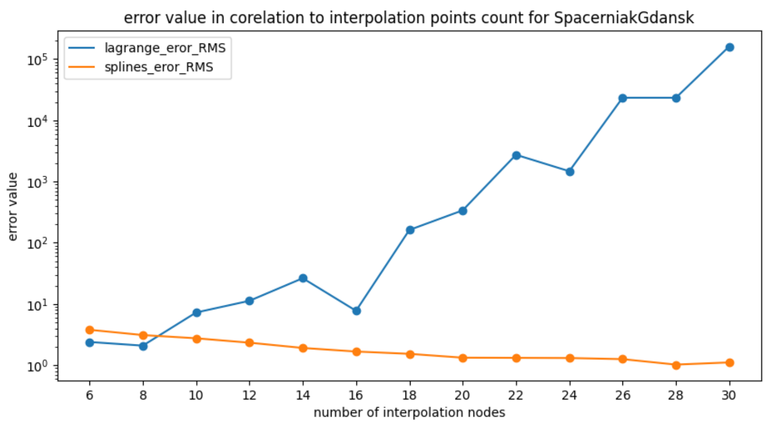
Na wykresie **3.1** widać zdecydowaną przewagę metody **interpolacji splajnami**, wartości są przybliżone z zadowalającą dokładnością i nie występują nierealistyczne ekstrema wynikające z wad metody **Lagrange'a**.



Rysunek 3.1: Wykres porównujący dokładność **metody splajnów** i **Lagrange'a** z widocznym *efektem Rungego*

3.1.2 Wykresy błędu

Na wykresie **3.2** widać, iż wraz ze zwiększaniem się ilości węzłów zwiększa się dokładność interpolacji. Jednakże w przypadku metody **Lagrange'a** dokładność wzrasta tylko do pewnej liczby węzłów = N, później ze względu na *efekt Rungego* zaczyna się coraz bardziej rozbiegać z wartościami rzeczywistymi.



Rysunek 3.2: Wartość błędu interpolacji obiema metodami w zalezności od ilości węzłów interpolujących

3.2 Zalety metody Lagrange'a

Zdecydowaną zaletą metody **Lagrange'a** jest prostota implementacji oraz fakt, iż nie wymaga ona rozwiązywania układów równań. W dodatku metoda **Lagrange'a** jest **stabilna**, w przeciwieństwie do **metody splajnów**.

3.3 Zalety metody krzywych sklejanych

Zaletami **metody splajnów** jest jej brak podatności na *efekt Rungego*. Jednak jej implementacja jest zdecydowanie bardziej czasochłonna, skomplikowana i trudna do debugowania (w porównaniu do metody **Lagrange'a**).

Rozdział 4

Wnioski

Na podstawie powyższej analizy stwierdzić można, iż nie istnieje jedno najlepsze narzędzie do interpolacji a dobór odpowiedniego narzędzia zależy od wielu czynników, m.in.:

- ilości danych
- charakteru terenu (charakteru danych)
- wydajności urządzenia
- przeznaczenia i zastosowania danych
- wymaganej dokładności

W ogólności można stwierdzić, iż (przynajmniej w przypadku interpolacji której dokonano) metoda **Lagrange'a** jest lepsza dla przybliżonej i szybkiej aproksymacji profilu wysokościowego przy małej ilości punktów pomiarowych, jednak w przypadku posiadania większej ilości danych lepsza wydaje się być metoda interpolacji **krzywymi sklejanymi**.