基础通关 | 线性代数5道典型例题及解析

2020-08-21 朱维刚

重学线性代数 进入课程 >

讲述：朱维刚
时长 00:39 大小 626.67K

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数。

今天这一节课的内容是基础通关。这里会用 5 道典型例题，让你巩固一下线性代数的基础知识，这也是进入应用篇学习之前的一次动手机会。从课程上线到现在快有一个月了，这期间我收到了不少同学的提问和建议，有些问题也是我没有想到的，非常有深度，说实话这让我感觉挺意外的，希望你再接再厉。

现在，你可以看一下基础通关的 5 道例题了，题目和解析都放在了正文中，你可以自己试着做一下。基础通关后，我们应用篇再见。

例题一

找到线性方程组 $Ax=b$ 的所有解，其中：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 0\\-1 & 2\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法，你可以参考第 4 节的内容。

首先，形成增广矩阵：

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\3 & 0 & 1 & 0\\-1 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

接着，分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘 -3 和第二行相加。
2. 第一行和第三行相加。

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\0 & -6 & 1 & -3\\0 & 4 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

2. 第二行乘 $\frac{1}{3}$ 和第一行相加。
3. 第二行乘 $\frac{2}{3}$ 和第三行相加。
4. 第三行乘 $-\frac{1}{6}$。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

最后得出该线性方程组的唯一解：

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

例题二

找到线性方程组 $Ax = b$ 的所有解，其中：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了解线性方程组的方法，特别是高斯消元法。你可以参考第 4 节的内容，和例题一不同的是，例题二这里得到的会是无穷解。所以，这一题里找特殊解和通用解的方法是关键。

首先，形成增广矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

接着，形成增广矩阵：分步计算增广矩阵的行阶梯形矩阵：

1. 第一行乘 -1 和第二行相加；
2. 第二行乘 1/2。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

使用主元列，得到特殊解：

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

下一步，获取线性方程组 $Ax = 0$ 的通用解，从增广矩阵的左边，能够立即得出：

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

最后，把特殊解和通用解组合起来就是：

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

例题三

计算矩阵乘 AB。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，只有相邻阶数匹配的矩阵才能相乘，你可以参考第 3 节的内容。

矩阵乘无法完成，因为 A 是 2 行 3 列矩阵，B 也是 2 行 3 列矩阵，A 和邻居维度不同。

例题四

计算矩阵乘 AB。

$$A=\left[\begin{array}{ccc}1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}4 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1\end{array}\right]$$

解析：

这里考察了基本的矩阵乘运算，特别是普通矩阵乘，你可以参考第 3 节的内容。

矩阵乘可以完成，因为两个矩阵的邻居维度相同，拿 a_{11} 举例：$a_{11}=1 \times 4+2 \times 2+3 \times 2=14$，结果：

$$AB=\left[\begin{array}{cc}14 & 2 \\ 2 & 2\end{array}\right]$$

例题五

假设 R^{3} 和它的运算 $\langle\cdot, \cdot\rangle$，$x, y \in R^{3}$，我们有：

$$\langle x, y\rangle=x^{T} A y, A=\left[\begin{array}{ccc}4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 5\end{array}\right]$$

那么，$\langle\cdot, \cdot\rangle$ 是内积吗？

解析：

这里考察了内积，以及内积的性质之一：对称性，你可以参考第 10 节的内容。

选择 $x=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 0\end{array}\right]^{T}$，$y=\left[\begin{array}{lll}1 & 2 & 0\end{array}\right]^{T}$，通过计算，能够得到：

$$
\begin{gathered}
\langle x, y\rangle=16 \\
\langle y, x\rangle=14 \\
\langle x, y\rangle \neq\langle y, x\rangle
\end{gathered}
$$

于是，$\langle\cdot, \cdot\rangle$ 是不对称的。

上一篇 10 | 解析几何：为什么说它是向量从抽象到具象的表达？

下一篇

精选留言

写留言

> 由作者筛选后的优质留言将会公开显示，欢迎踊跃留言。