



下载APP



11 | 如何运用线性代数方法解决图论问题？

2020-08-24 朱维刚

重学线性代数

[进入课程 >](#)**讲述：朱维刚**

时长 10:34 大小 9.69M



你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我要讲的内容是“如何运用线性代数方法解决图论问题”。

“图”这个字在计算机科学领域很常见，特别是在数据结构中。一说到图，是必定要联系到图论（Graph Theory）的，因为它是以图为研究对象的数学的一个分支。图论中的图，是由若干给定的**点**及连接两点的**线**所构成的图形，这种图形通常用来描述某些事物之间的某种特定关系，用点代表事物，用连接两点的线表示相应两个事物间具有这种关系。

说到这，你也许会问，这个和线性代数、矩阵有什么关系？



图的数学定义

既然是数学课，我们还是要先讲一下图的数学定义：一个图 G 是指一个有序三元组 (V, E, ϕ) ， V 是非空的顶点集； E 是不与 V 相交的边集； ϕ 是关联函数，它使 G 的每条边对应于 G 的无序顶点对。如果 e 是一条边， u 和 v 是顶点，使得 $\phi(e) = uv$ ，则 e 连接 u 和 v ，也就是顶点 u 和 v 是 e 的端点。

好了，现在是时候通过两个应用场景来看下，如何把矩阵和图论关联起来，并运用在解决实际问题中了。

邻接矩阵应用

首先，是邻接矩阵 (Adjacency Matrix)，邻接矩阵是表示顶点之间相邻关系的矩阵。假设 G 是一个图， $V(G)$ 是 G 的顶点集， $E(G)$ 是 G 的边集，设 G 中有 n 个顶点， v_1, v_2, \dots, v_n ， $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是 G 的邻接矩阵。

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i v_j \in E(G) \\ 0, & v_i v_j \notin E(G), i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

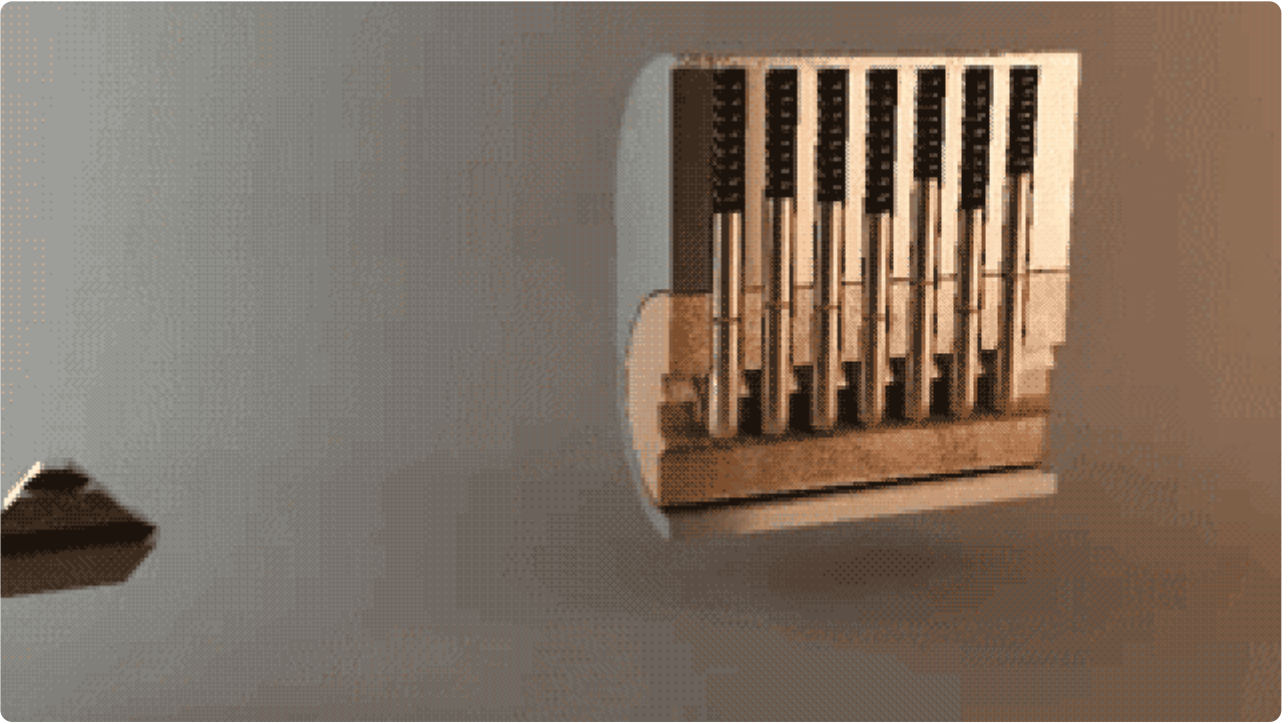
已知情况是这样的，那我们现在来看一下邻接矩阵在现实问题中的应用。这个例子来源于 1994 年全国大学生数学建模竞赛试题 B 题。

某厂生产一种弹子锁具，每个锁具的钥匙有 5 个槽，每个槽的高度从 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 中任取一数。由于工艺及其他原因，制造锁具时对 5 个槽的高度还有两个限制。

1. 至少有 3 个不同的数；
2. 相邻两槽的高度之差不能为 5。

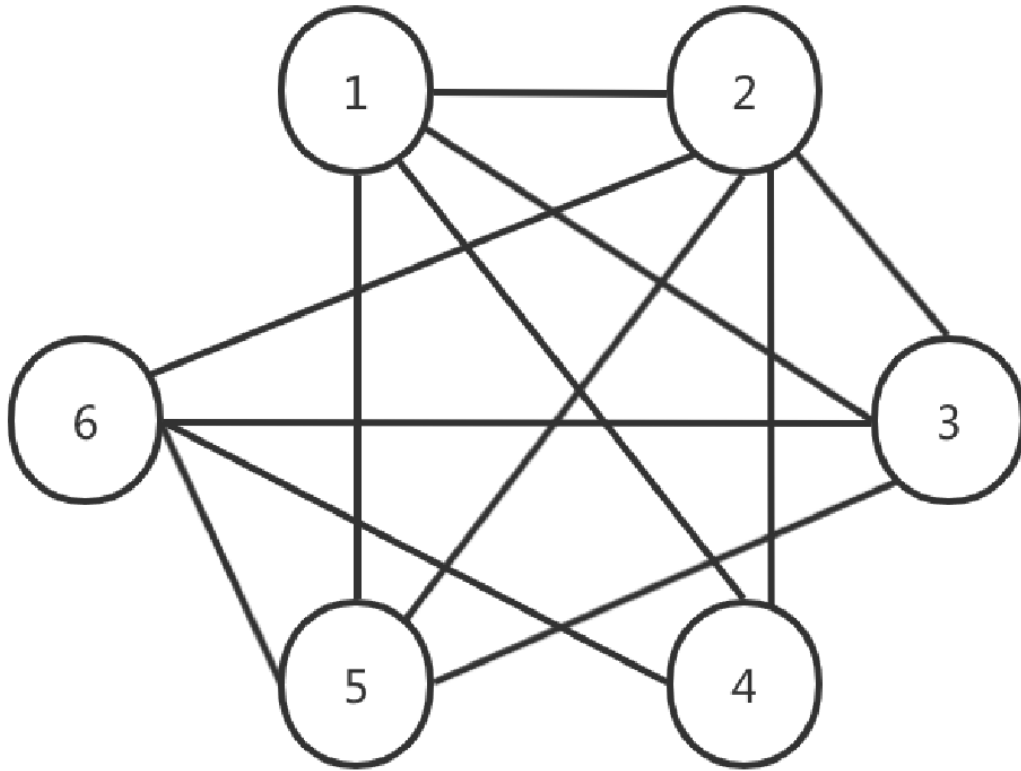
满足以上条件制造出来的所有互不相同的锁具称为一批。销售部门在一批锁具中随意地取每 60 个装成一箱出售。问：每一批锁具有多少个，装多少箱？

我们先来看下弹子锁具的样子，否则自己想象会要一些时间。



这是一个 7 个槽的弹子锁具，只是比我们例子的 5 个槽多了两个槽。有了弹子锁具形象化输出后，我们开始解题。锁具装箱是一个排列组合的数学问题，但如果我们用图论的邻接矩阵方法来解这个问题，就能够起到化繁为简的作用。

首先，我们构造一个 6 节点的图：把 1、2、3、4、5、6 这 6 个数作为 6 个节点，如果两个数字可以相邻，那这两个节点之间就加一条边，每个节点有自己到自己的一条边。于是，我们得到了锁具各槽之间的关系图：



接着，构建邻接矩阵 A ，根据前面说的，如果两点之间有一条边，那在矩阵中，相应位置的值就是 1，比如：节点 1 和 2 之间有一条边，那矩阵第一行第二列和第二行第一列的值就是 1，节点 1 和 6 之间没有边，那矩阵第一行第六列和第六行第一列的值就是 0，因为每个节点有自己到自己的一条边，所以第一行第一列的值就是 1，其它 5 个节点也是一样的。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因为从没有 1、6 相邻的关系图得到了邻接矩阵 A ，所以 A 中所有元素之和表示两个槽高**无 1、6 相邻**的锁具个数。而每个无 1、6 相邻的 5 位数与关系图中长度是 1 的一条链一一对应。于是， A^k 中各元素之和就是长度为 k 的链接个数。比如， A^2 中第 i 行第 j 列的元素就是 i 开始经过两条边到达 j 的链接个数。我们这里因为是 5 个元素，也就是要经过 4 条边，所以需要计算 A^4 。

$$A^4 = \begin{bmatrix} 141 & 165 & 165 & 165 & 165 & 140 \\ 165 & 194 & 194 & 194 & 194 & 165 \\ 165 & 194 & 194 & 194 & 194 & 165 \\ 165 & 194 & 194 & 194 & 194 & 165 \\ 165 & 194 & 194 & 194 & 194 & 165 \\ 140 & 165 & 165 & 165 & 165 & 141 \end{bmatrix}$$

把 A^4 中的元素求和，就能得到相邻高差为 5 的锁具数是 6306。

最后，因为题目的限制提到了槽的高度至少有 3 个不同的数，我们还要把 6306 这个数字减去仅有一个、两个槽高的锁具： $6306 - (6 + (C_6^2 - 1)(2^5 - 2)) = 5880$ 。

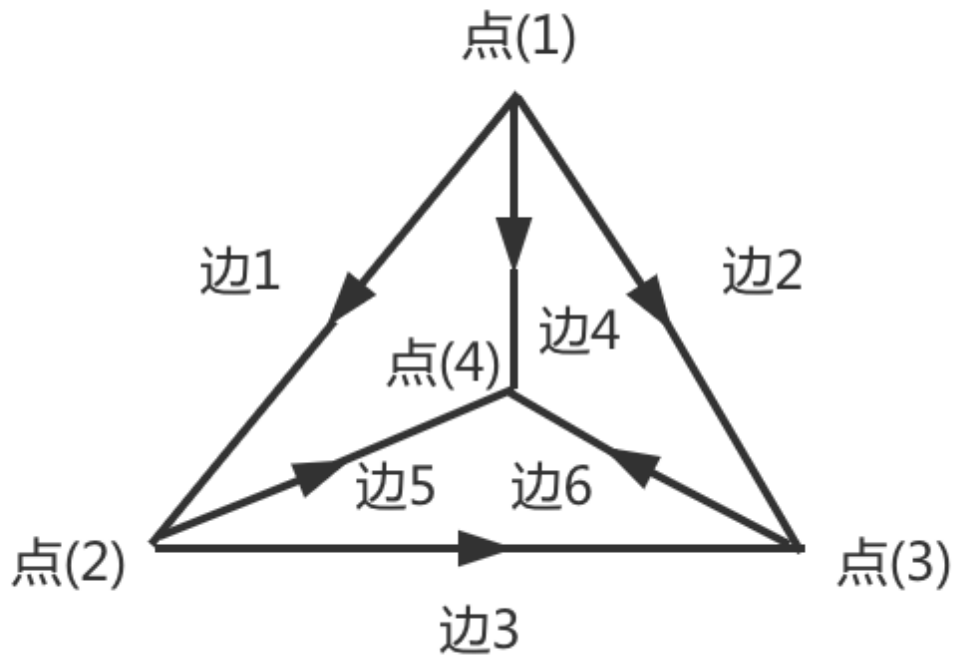
所以，我们得到一批锁具的个数是 5880，总共装 $5880/60=98$ 箱。

这样，我们通过邻接矩阵的图论知识，解决了一批锁具的数量问题，比其它方法看起来更简单。

特别提示：文中用到的 A^k 在图论中的实际意义，是来自刘亚国的一篇文献《图论中邻接矩阵的应用》。

关联矩阵应用

接下来，我们在邻接矩阵上再升级一下，把边变成有向边。这样就形成了另一类矩阵：关联矩阵。关联矩阵经常被用在图论中，现在我们就来看一下关联矩阵和图之间的关系。如下图所示，我们定义了一个拥有 4 个节点和 6 条边的图。



接下来，定义一个 6×4 的矩阵来描述这个图，其中列表示点 (1) 到点 (4)，行表示边 1 到边 6：

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 只包含了三类元素：-1、1、0。-1 表示点的箭头的出方向，1 表示点的箭头的入方向，0 则表示点和点之间没有关联。举例来说，矩阵 A 的第一行元素是 -1、1、0、0，那对于边 1 和点 (1)、点 (2) 说，我们从图中可以看到边 1 是从点 (1) 到点 (2)， A 中 -1 对于点 (1) 来说是箭头的出方向，1 对于点 (2) 来说是箭头的入方向，而边 1 和点 (3)、点 (4) 没有任何关系，所以第一行第三列和第四列都是 0。

这里，我们把关联矩阵用到现实场景中，比如：让它为电子电路服务，用它来分析整个电路的情况，也就是电路的拓扑结构，这里的电路指的是基尔霍夫定律，是分析和计算较为复杂电路的基础。假设 x_1, x_2, x_3, x_4 是这几个点的电压值，我们来看一下 Ax 的结果：

$$Ax = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_1 \\ x_4 - x_2 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix}$$

由此可见，结果是差值，也就是沿着边 1 到 6 的电势差，有了电势差，就说明有电流，但如果 $Ax=0$ 会怎样呢？也就是方程满足这样的等式：

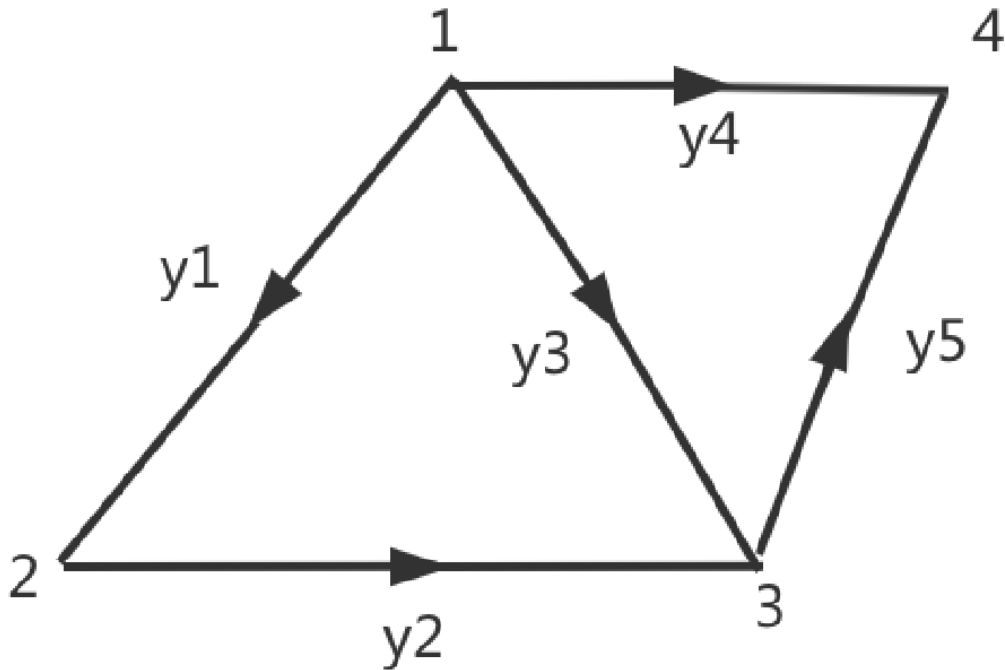
$$Ax = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_1 \\ x_4 - x_2 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

很明显，这些差值，也就是电势差都等于 0，意味着没有电流。同理，如果把电压值换成温度呢？那应用场景就切换成热传导了。

刚才我们看到了 $Ax = 0$ 的情况，你还记得 [第八篇](#)中说的零空间吗？它关注的就是 $Ax = 0$ ，也就是向量空间 V 中所有经过 ϕ 映射为零的向量集合，用符号表示就是： $\ker(\phi)$ ，它的维数叫做零化度 (nullity)，表示成： $\dim(\ker(\phi))$ 。

而在电路例子中，它表示的是所有六个电势差都是 0，也就意味着：所有四个电压值是相等的，在零空间中的每个 x 都是一个常向量： $x = (c, c, c, c)$ 。所以， A 的零空间是一条线。无论我们怎么同时升高或降低电压量 c ，都不会改变电势差 0。

刚才我们说的是电压，现在我们来具体看看关联矩阵在基尔霍夫电流定律上的运用。我们来定义一个拥有 4 个节点和 5 条边的图：



基尔霍夫电流定律定义： $A^T y = 0$ ，其中 y 是向量 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 ，我们把这个图以关联矩阵的形式写出来就是：

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这里 -1, 0, 1 的含义上面有所描述，第一行和 y 向量相乘后得到： $-y_1 - y_3 - y_4 = 0$ ，说明从节点 1 出来的总电流等于 0，满足守恒定律；第二行和 y 向量相乘后得到： $y_1 - y_2 = 0$ ，说明流入节点 2 的电流和从节点 2 流出的电流相等；同样，后面两行分别和 y 向量相乘后得到： $y_2 + y_3 - y_5 = 0$ 和 $y_4 + y_5 = 0$ ，和图表示的都一致，也都符合守恒定律。

好了，到这里简单电路的数学知识，也就是关联矩阵讲完了，如果碰到更复杂的电路，比如：在节点之间，也就是边上有电流源，那么，等式就要从 $A^T y = 0$ 变成 $A^T y = f$ 。

本节小结

本节是第一篇应用篇，所以我从更贴近生活的例子来讲解线性代数的应用，通过弹子锁具，让你能够了解，邻接矩阵与图论之间是怎么关联的；通过基尔霍夫定律，让你能够了解关联矩阵与图论之间是怎么关联的。

所以，邻接矩阵、关联矩阵的最大意义就是用数学的方式描述图，进而来描述某些事物之间的某种特定关系，是不是发现问题后通过数学工具来解决问题很美妙呢？

线性代数练习场

这次的练习题稍微有些难度，是一道传统练习题。

三名商人各带一个随从乘船渡河，现有一只小船只能容纳两个人，由他们自己划行，若在河的任一岸的随从人数多于商人，他们就可能抢劫财物。但如何乘船渡河由商人决定，试给出一个商人安全渡河的方案，使得渡河的次数最少。

注意：这里的问题包含两层含义——安全渡河和渡河次数最少。

提示：使用本节的第一个例子的邻接矩阵和 A^k 来解这道题。

欢迎在留言区晒出你的运算过程和结果，我会及时回复。同时，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友，一起讨论、学习。

提建议

更多课程推荐

MySQL 实战 45 讲

从原理到实战，丁奇带你搞懂 MySQL

林晓斌

网名丁奇
前阿里资深技术专家

立省 ¥30

今日秒杀 ¥99，5.8W 人在学

© 版权归极客邦科技所有，未经许可不得传播售卖。页面已增加防盗追踪，如有侵权极客邦将依法追究其法律责任。

上一篇 基础通关 | 线性代数5道典型例题及解析

精选留言 (1)

写留言



那一刻

2020-08-25

课后练习题，在老师提到的文献 图论中邻接矩阵的应用 中有解答。我对文献中邻接矩阵A的构造不是很理解，麻烦老师给讲解下？

展开

