08 | 线性映射：如何从坐标系角度理解两个向量空间之间的函数？

2020-08-14 朱维刚

重学线性代数

进入课程 >

讲述：朱维刚

时长 11:38 大小 10.67M

你好，我是朱维刚。欢迎你继续跟我学习线性代数，今天我们要讲的内容是“线性映射”。

前面我们学的内容都是局限在一个线性空间，或者说一个向量空间中，但今天不一样哦，我们要来看看两个向量空间之间的关系，也就是线性映射。

之前我说过，向量也是对象，是能够相加，能够被标量乘的对象，而且这样计算的结果还是向量。而**加和标量乘这样的运算同样适用线性映射**。比如：两个实数向量空间 V 和 W，有一个函数 ϕ 来完成向量空间 V 到 W 的映射，如果我们想要同时保持向量空间结构不变，那么 ϕ 就要满足：

$$\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y)$$
$$\phi(\lambda x)=\lambda\phi(x)$$

其中，所有 x 和 y 属于向量空间 V， λ 属于实数。于是，我们得到了线性映射的定义。

线性映射定义

假设有两个向量空间 V 和 W，ϕ 是一个函数，它完成了向量空间 V 到 W 的线性映射，那么线性映射必须满足等式：

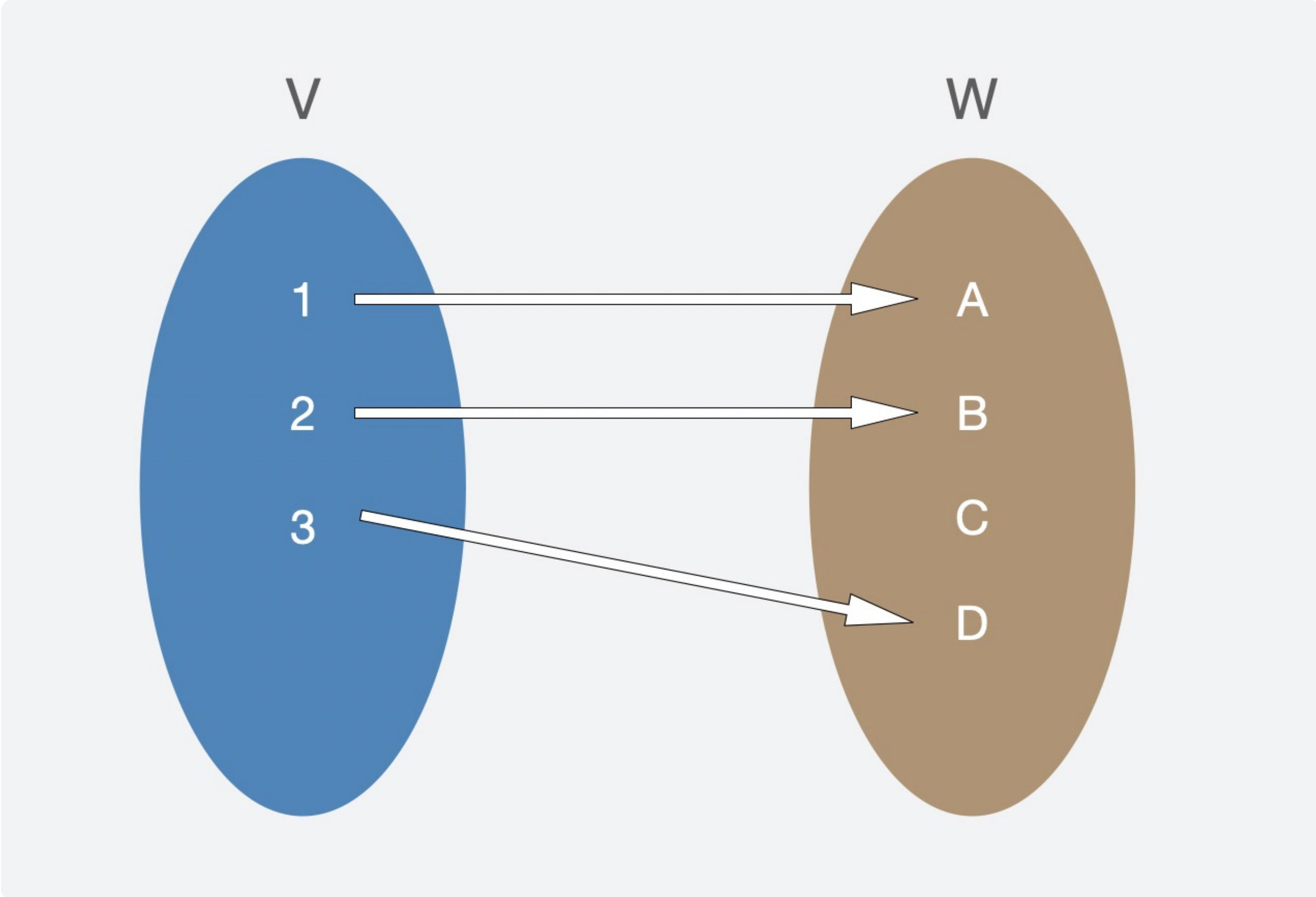
$$\phi(\lambda x+\varphi y)=\lambda\phi(x)+\varphi\phi(y)$$

其中，任意 x 和 y 都属于向量空间 V，而任意 λ 和 φ 都属于实数。

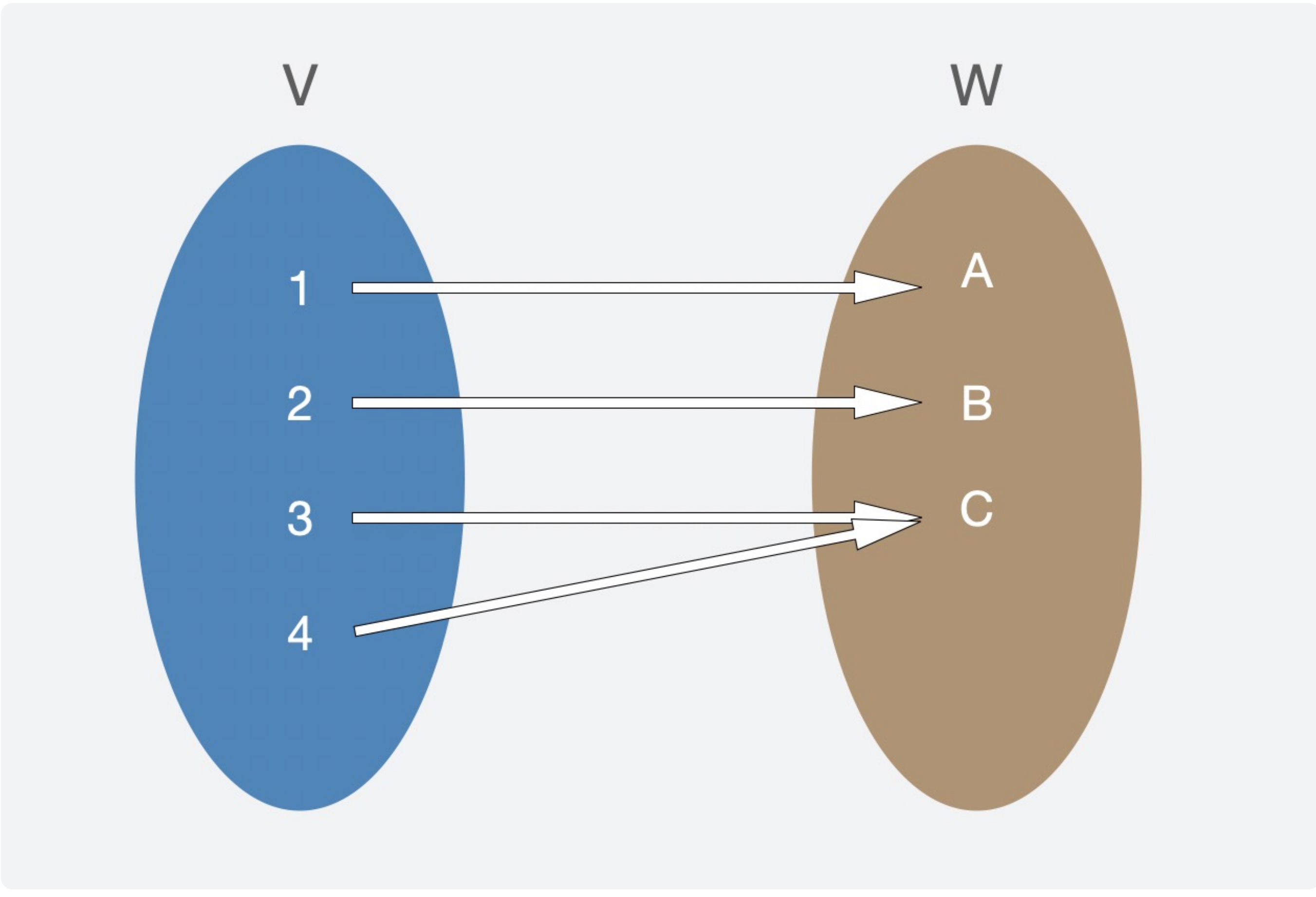
当然，我们能把线性映射表示成矩阵，也就是线性映射矩阵，或者叫做变换矩阵。但因为向量还能组合成矩阵的列，所以我们要特别注意区分矩阵表示的是线性映射还是向量的集合。向量的集合是静态的，而变换矩阵则是动态的哦。

接下来我们再来看看两个任意集合 V 到 W 的三类特殊映射，了解一下函数 ϕ 在不一样的情况下究竟表达了怎样的关系。

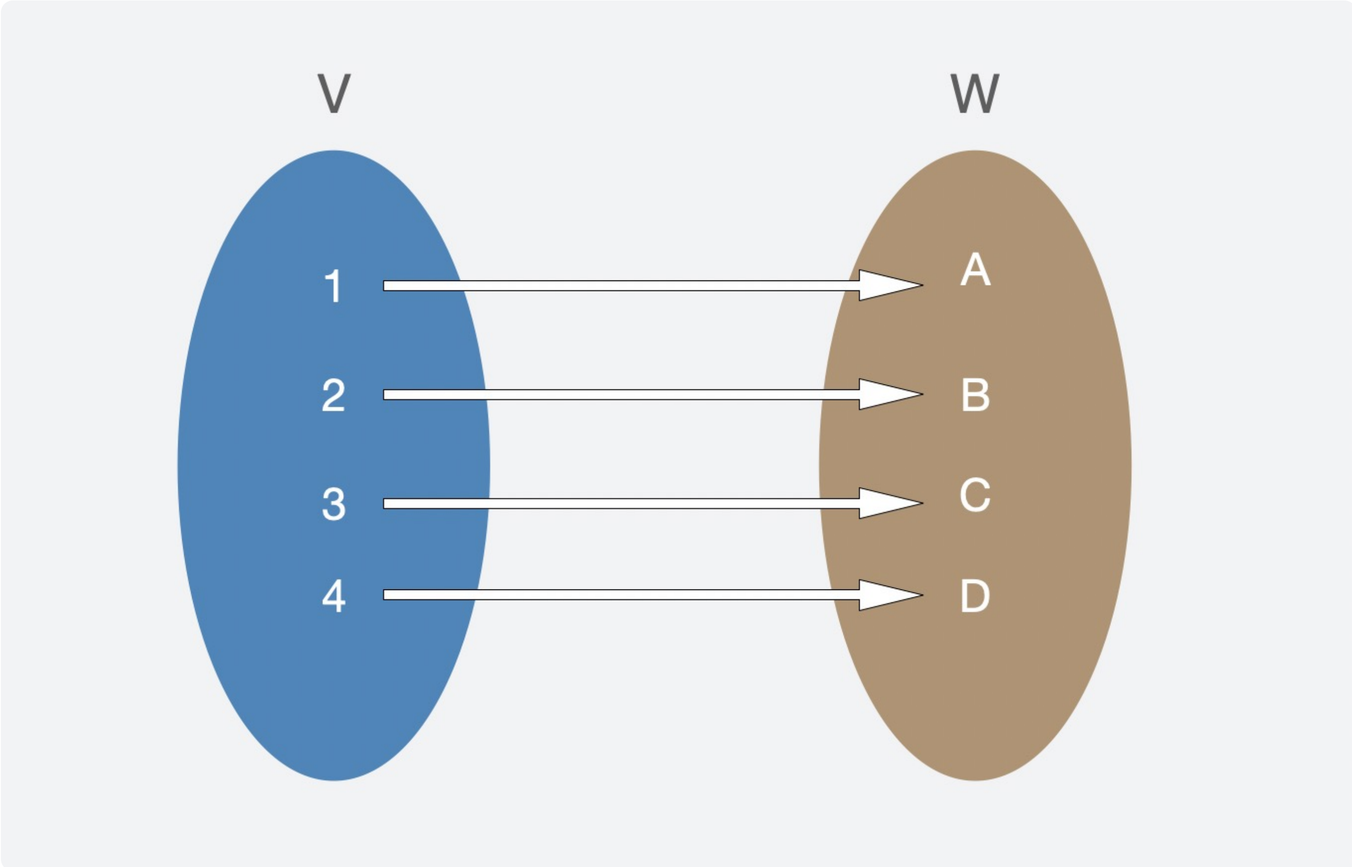
1. 函数 ϕ 是单射（Injective）时：如果 $\phi(x)=\phi(y)$ ，那么 $x=y$ ，其中任意 x 和 y 都属于集合 V，从图中可以看出它表达的是一对一的关系，也就是我们可以由集合 V 的一个元素唯一确定一个集合 W 的元素。



2. 函数 ϕ 是满射（Surjective）：也就是满足等式 $\phi(V)=W$，从图中我们可以看出它表达的是多对一的关系，也就是多个集合 V 的元素能够确定一个集合 W 的元素。



3. 函数 ϕ 是双射（Bijective），就意味着它既是单射又是满射，从图中我们可以看出，它表达的是，所有 V 集合的元素都和 W 集合的元素一一对应，不多不少。

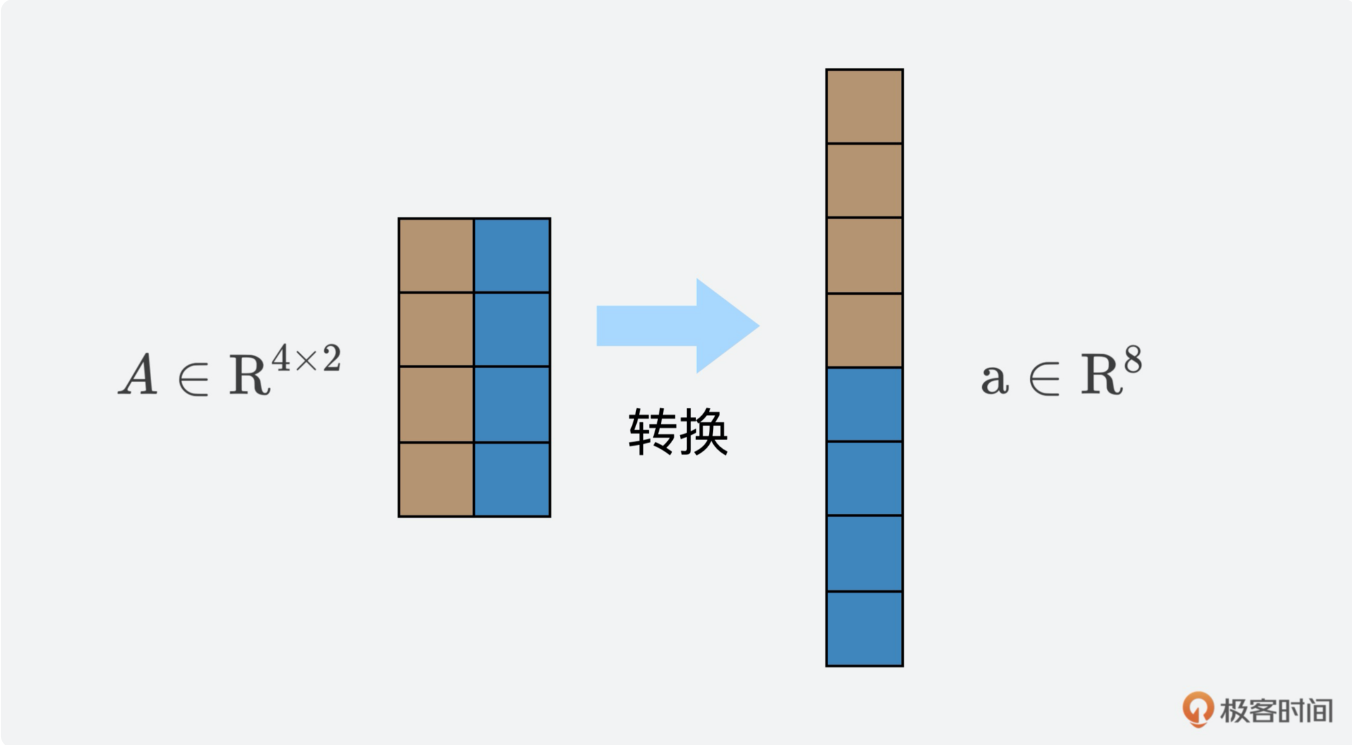


通过这些定义，我们就可以引入几个线性映射的特殊概念了。

1. 同构（ Isomorphism）：即函数 ϕ 使 V 到 W 是线性且双射的；
2. 自同态（Endomorphism）：即函数 ϕ 使 V 到 V 是线性的；
3. 自同构（Automorphism）：即函数 ϕ 使 V 到 V 是线性且双射的；
4. 把 V 到 V，元素 x 到 x 的映射定义为恒等映射。

那么，为什么你需要了解这几个特殊的概念呢？那是因为我们需要通过这些概念引出一个定理：有限维度的向量空间 V 和 W，如果它们的维度相等，那么它们就是同构的。那就是说，同一维度的向量空间某种程度来说是一样的，因为它们能在没有发生损失的条件下互相转换。

比如，$\mathrm{R}^{m\times n}$ 矩阵向量空间，和 R^{mn} 长度是 mn 的向量空间，我们可以认为它们是相同的，因为它们维度都是 mn，而且存在一个线性映射和双射使得它们能互相转换。还记得在矩阵那节课中，我提到的矩阵转换吗？很多时候这类转换就是为了计算方便。



线性映射的矩阵表示

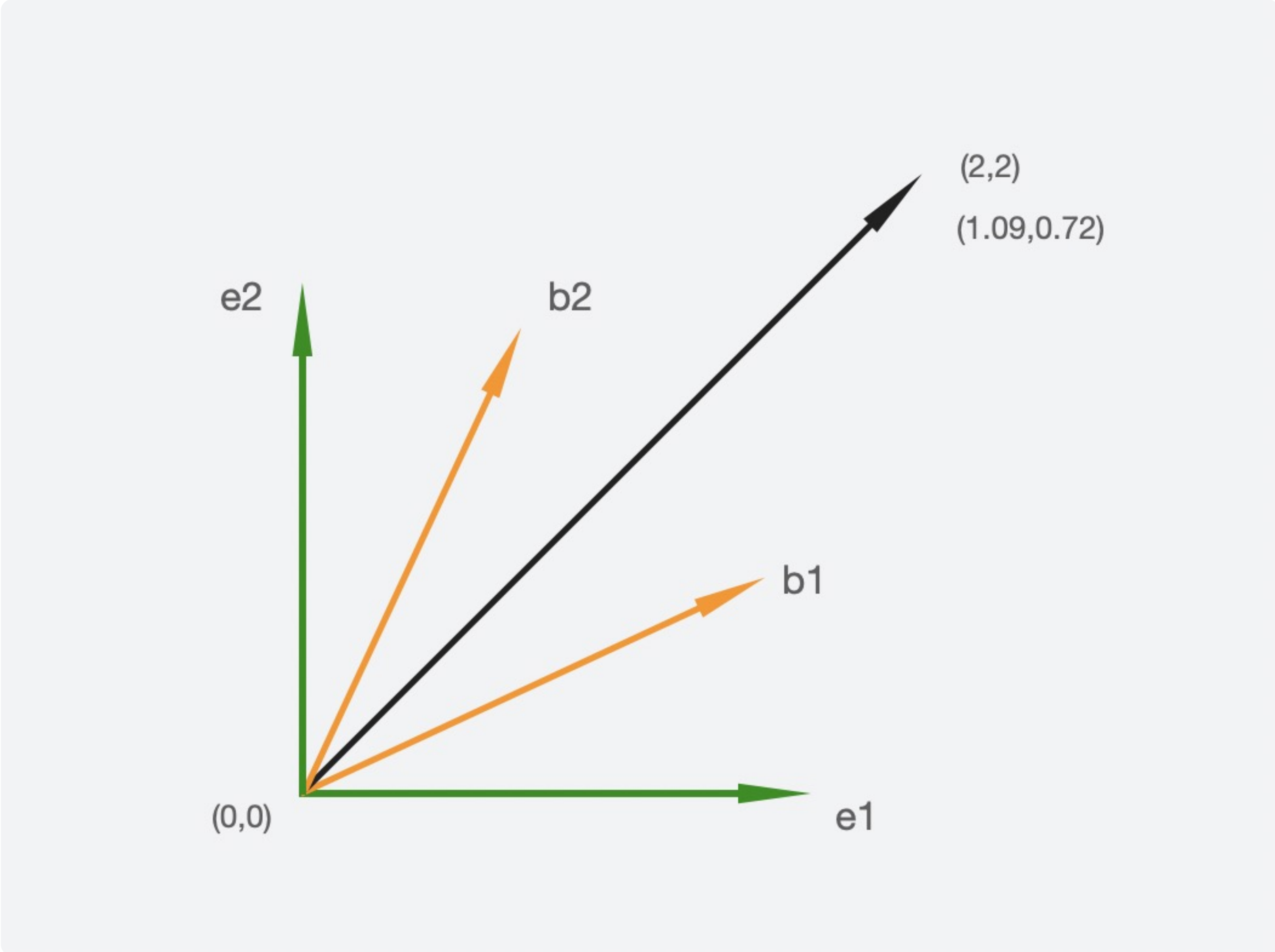
刚才提到了线性映射的矩阵表达，那在了解了线性映射的定义后，现在是时候来具体看一看这个更直观，且有实践意义的表达了。之所以说它有实践意义，那是因为我们赋予了它动态特性，让矩阵表示线性变换的过程。

如果存在一个 n 维向量空间 V 和它的一个有序基 $B=(b_1,\cdots,b_n)$，那么对于任意一个属于 V 的 x，我们能得到一个这样的线性组合：$x=\alpha_1 b_1+\cdots+\alpha_n b_n$，我们可以说

$$\alpha=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \alpha_n\end{bmatrix}$$

是 x 的坐标向量或坐标表达。

我们都了解二维直角坐标系，现在我们通过一个例子，看看一个同样的向量在两个不同坐标系中的表示，加深一下你对线性映射的理解。



假设图中绿色是坐标系 V，黄色是坐标系 W。

在 V 中，e_1 和 e_2 是 V 的标准基，向量 x 由线性组合 e_1 和 e_2 表示，x 的坐标是 (2,2)，于是，x 在 V 中可以被表示成：$x=2e_1+2e_2$。

在 W 中，b_1 和 b_2 是 W 的标准基，向量 x 由线性组合 b_1 和 b_2 表示，而这里的 x 坐标就不同了，变成了 (1.09,0.72)，于是，x 在 W 中可以被表示成：$x=1.09b_1+0.72b_2$ 。

说到这，你是不是对线性映射有了一个更直观的感受？现在我们就把矩阵引入到线性映射中，于是，我们就有了**变换矩阵**，也就是用矩阵表示线性变换的过程。

变换矩阵的定义是：我们有向量空间 V 和 W，它们各自有相应的有序基 $B=(b_1,\cdots,b_n)$ 和 $C=(c_1,\cdots,c_n)$ ，而 ϕ 就是 V 到 W 的线性映射：$\phi(b_j)=\alpha_{1j}c_1+\cdots+\alpha_{mj}c_m$。

线性映射 ϕ 中的 j 是从 1 到 n，于是，我们就能得到一个 ϕ 的 $m \times n$ 的变换矩阵 A_{ϕ}，这个变换矩阵中的元素是 $A_{\phi}(i, j)=\alpha_{ij}$，也就是说，$\phi\left(b_{j}\right)$ 的坐标就是 A_{ϕ} 的第 j 列。

我们可以来简化一下表达，把它表示成这样：$y=A_{\phi}(x)$。其中，x 是 V 基于 B 基的坐标向量，y 是 W 基于 C 基的坐标向量。所以，变换矩阵可以被用来在有序基上，映射坐标。

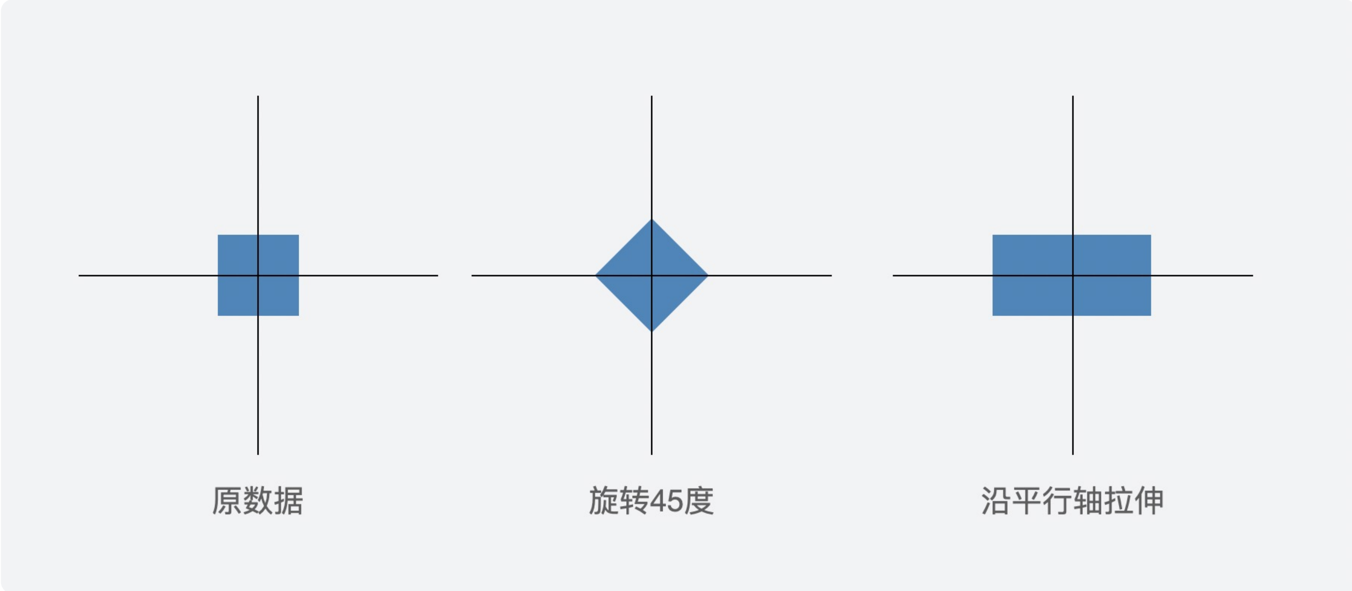
我们来看一个变换矩阵例子：已知两个向量空间 V 和 W，它们各自相应的有序基是 $B=\left(b_{1}, \cdots, b_{3}\right)$ 和 $C=\left(c_{1}, \cdots, c_{4}\right)$，线性映射 ϕ 表示成以下形式。

$$
\begin{array}{l}
\phi\left(b_{1}\right)=c_{1}-c_{2}+3 c_{3}-c_{4} \\
\phi\left(b_{2}\right)=2 c_{1}+c_{2}+7 c_{3}+2 c_{4} \\
\phi\left(b_{3}\right)=3 c_{2}+c_{3}+4 c_{4}
\end{array}
$$

于是，我们可以通过这些条件得到变换矩阵 A_{ϕ} 如下。

$$
A_{\phi}=\left[\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 0 \\
-1 & 1 & 3 \\
3 & 7 & 1 \\
-1 & 2 & 4
\end{array}\right]
$$

理解到这里还不算透彻，我们要更进一步，看看在现实图形图像处理中的线性变换是什么样的。接下来我们通过下面三个图形的例子来理解一下。



第一个图形是原始数据，你可以把它看成是由几百个向量的密集点组成的图。

第二个图形的效果看起来很简单，是由原始数据经过 45 度变换后得到的，它的变换矩阵是下面这样的。

$$A_1=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{bmatrix}$$

第三个图形是原始数据沿平行轴拉伸两倍的效果，变换矩阵是下面这样的。

$$A_2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

当然，这三个图形是比较简单的例子，是为了方便你理解，其实我们还能做更复杂的变换，比如：旋转、伸缩的组合等等。

基的改变

之前我们讨论的线性映射都是在**基**是一定的情况下，通过变换矩阵做线性映射。那如果基改变了呢？讨论基的改变在实践中也是有重要意义的。比如，为了最小化数据压缩损失，我们需要找到一个合适的被用来数据投影的基。

现在我们就来看看，如果我们改变向量空间 V 和 W 的基，线性映射 ϕ 的变换矩阵会如何改变。我们给向量空间 V 和 W 各自增加两个有序基：$\widetilde{B}=\left(\tilde{b}_1,\ldots,\tilde{b}_n\right)$ 和 $\widetilde{C}=(\tilde{c}_1,\ldots,\tilde{c}_m)$，而 $\tilde{A}_\phi$ 是基于新的有序基的变换矩阵。这样，$\tilde{A}_\phi$ 变换矩阵的计算公式就是：$\tilde{A}_\phi=T^{-1}A_\phi S$。

在这个新的公式中，S 是 $\mathrm{R}^{n\times n}$ 向量空间 V 的恒等映射变换矩阵，向量空间 V 的恒等映射把基于 $\widetilde{B}$ 的坐标，映射到基于 B 的坐标上。同理，T 是 $\mathrm{R}^{m\times m}$ 向量空间 W 的恒等映射变换矩阵，向量空间 W 的恒等映射把基于 $\widetilde{C}$ 的坐标，映射到基于 C 的坐标上。

理论是这样的，那我们还是要通过一个例子来看一下，基改变后，新的线性映射 ϕ 的变换矩阵到底是如何获取的。我们已知，一个三维实数向量空间 R^3 到四维实数向量空间 R^4 的一个线性映射，它们各自有标准基 B 和 C。

$$B=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\},C=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

基于它们各自的标准基 B 和 C，它的变换矩阵是：

$$A_\phi=\begin{bmatrix}1&2&0\\-1&1&3\\3&7&1\\-1&2&4\end{bmatrix}$$

那么现在，我们来看一下，基 B 和 C 改变为 $\widetilde{B}$ 和 $\widetilde{C}$ 之后，会有怎样的变化。

$$\widetilde{B}=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\},\widetilde{C}=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

对于新基 $\widetilde{B}$ 和 $\widetilde{C}$，我们得到 S 和 T：

$$S=\left[\begin{array}{lll}1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1\end{array}\right], T=\left[\begin{array}{llll}1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

于是，我们就可以通过公式得到想要的 $\tilde{A}_{\phi}$ 了。

$$\tilde{A}_{\phi}=T^{-1} A_{\phi} S=\left[\begin{array}{ccc}-4 & -4 & -2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 1 & 6 & 3\end{array}\right]$$

两个重要的子空间

最后，我再来讲两个重要的子空间——核空间和像空间，说它们重要是有原因的。核空间可以帮助我们研究线性方程组的性质，同时还可以帮助我们把复杂问题简化，也就是将复杂的大集合分解成小集合的并来研究。而像空间可以帮助我们快速得到线性方程组的秩，这样就能快速判断线性方程组解的情况。现在我们来具体了解一下。

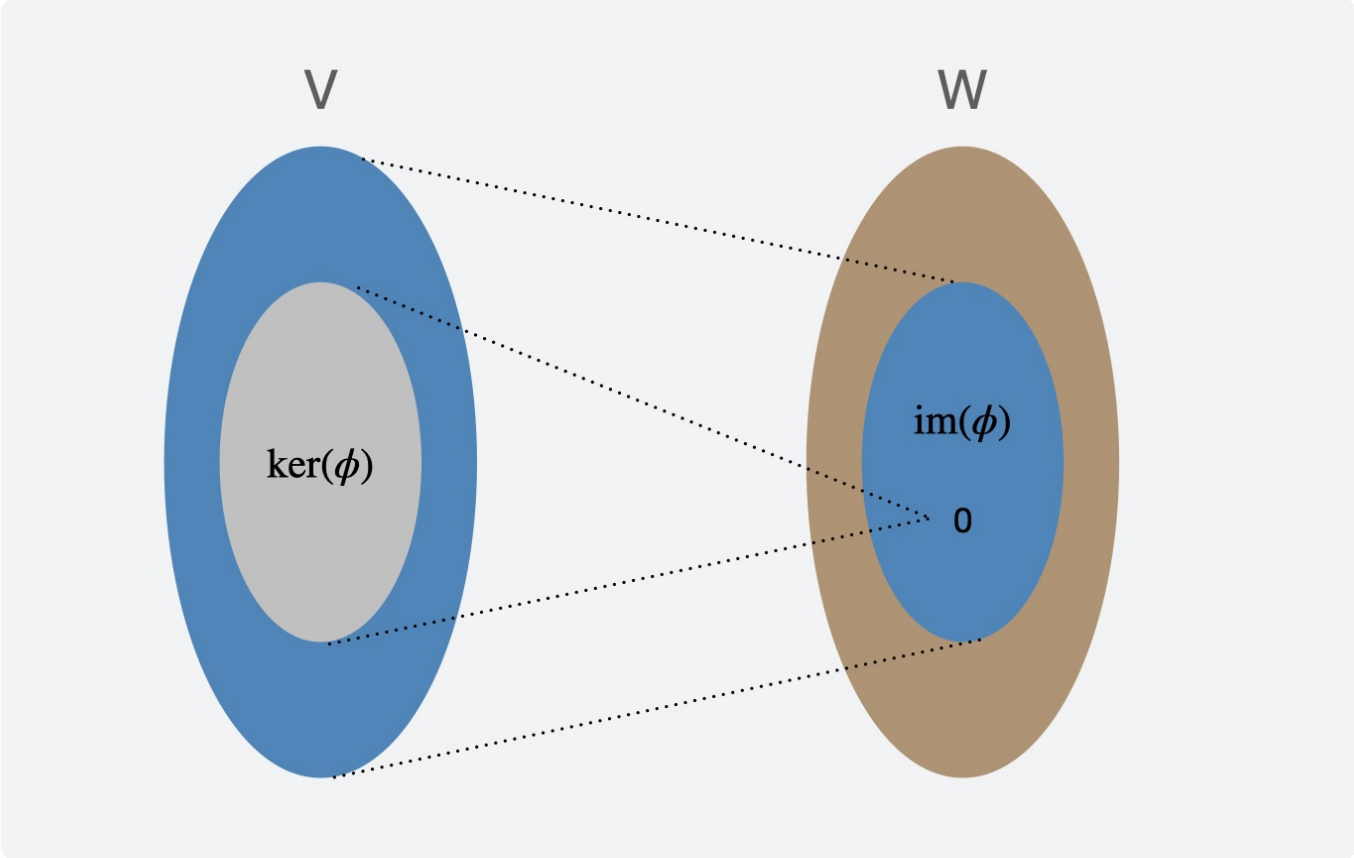
核空间

核空间也叫做零空间，你还记得 $Ax=b$ 吗？核空间关注的就是 $Ax=0$，也就是向量空间 V 中所有经过 ϕ 映射为零的向量集合，用符号表示就是：$\operatorname{ker}(\phi)$ 。核的维数叫做零化度（nullity），表示成：$\operatorname{dim}(\operatorname{ker}(\phi))$。

像空间

向量空间 V 中所有经过 ϕ 映射后的向量集合，叫做像空间，用符号表示就是：$\operatorname{im}(\phi)$，像空间维数就是秩，表示成：$\operatorname{rk}(\phi)$。

通过图形表达出来，你应该能够更好地理解。



最后我以一个定理来结束本节的内容，秩 - 零化度定理：V 的维数等于核空间维数与像空间维数之和 $\dim(\mathrm{V})=\dim(\ker(\phi))+\mathrm{rk}(\phi)$。

本节小结

好了，到这里线性映射这一讲就结束了，最后我再总结一下前面讲解的内容。

线性映射赋予了线性代数灵魂，也让它在计算机科学中发挥了很大的作用。线性映射的矩阵变换是这一节的重点，你要牢固掌握，因为它在无数现实场景中都在使用，比如：三维图形图像处理中的线性变换，图形的伸缩、旋转等等。

线性代数练习场

好，今天练习时刻到了，刚刚我们通过图形图像处理中的线性变换的例子，讲了矩阵变换。现在我们还是以这个例子为基础，不过这一次轮到你来解答问题了。如果我们把原始数据整体沿平行轴收缩两倍，那变换矩阵会是怎样的呢？

欢迎在留言区或者部落里晒出你的变换矩阵。如果你觉得有所收获，也欢迎你把这篇文章分享给你的朋友。

提建议

上一篇 07 | 基和秩：为什么说它表达了向量空间中“有用”的向量个数？

下一篇 09 | 仿射空间：如何在图形的平移操作中大显身手？

精选留言（1）

写留言

那时刻
2020-08-14

请教老师两个问题，

1. 在基改变情况下，通过变换矩阵做线性映射。Aϕ的公式Aϕ=T−1AϕS，看着和SVD分解有相似之处，它们之间是否有联系呢？
2. 在像空间的图形里，像空间im(ϕ)包含了零空间么？如果是的话，那么秩 - 零化度定理...
展开

作者回复: 你好，那时刻，很好的问题。
1. 这个要从哪个角度去看了，如果通过SVD来求旋转矩阵，那么文中说的变换矩阵和SVD就有关系。
2. 像空间包含零空间，不管是核还是像，其实都是函数映射，所以我们不能从包含的关系去理解。